**A génese instrumental e a calculadora gráfica na aprendizagem de funções por alunos do 11.º de escolaridade**

Flávia Mesquita Pereira

UMinho | 2023


**Universidade do Minho**
Instituto de Educação

Flávia Catarina Mesquita Pereira


# A génese instrumental e a calculadora gráfica na aprendizagem de funções por alunos do 11.º ano de escolaridade

Julho de 2023

**Universidade do Minho**
Instituto de Educação

Flávia Catarina Mesquita Pereira

# A génese instrumental e a calculadora gráfica na aprendizagem de funções por alunos do 11.º ano de escolaridade

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho efetuado sob a orientação do
**Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu**

Julho de 2023

# AGRADECIMENTOS

Com a realização deste estudo, chega o início de uma nova etapa. Neste processo, foram várias as pessoas que me ajudaram e mantiveram motivada.

Agradeço então, em primeiro lugar, à minha família que foi acompanhando os meus altos e baixos no desenvolvimento deste estudo e que, de uma forma geral, me ajudaram a não desistir e a continuar esta jornada.

Agradeço à minha prima, Margarida, por me ter ajudado na revisão deste trabalho, por me te dado sugestões e me incentivado e apoiado em todo o processo.

Agradeço ao professor Floriano Viseu, pela incansável paciência e pelo apoio que me forneceu durante o desenvolvimento deste relatório. Agradeço principalmente a honestidade e a orientação sábia que me foi dando.

Aos meus colegas de mestrado, Mariana e Tiago, mas principalmente ao João, o meu colega de estágio, que me ajudaram com a partilha de experiências, no desenvolvimento de trabalhos e que tornaram toda esta aventura muito mais apetecível e agradável.

À professora Ana Paula, que de uma forma bastante doce e atenta, me orientou na minha primeira experiência como professora, me aconselhou e me acolheu de braços abertos.

Às turmas em que entrevi, onde os alunos nunca duvidaram das minhas capacidades docentes e sempre me trataram como sua professora, o que tornou o ano de estágio muito mais prazeroso.

Por último, mas não menos importante, a todos os professores que me inspiraram a tomar este caminho, entre eles, professora Marisa, professor Mário, professora Maria e professora Paula. Obrigada por me guiarem e me mostrarem as melhores versões de se ser professor e que levarei como referência toda a minha vida.

A todos os que, de alguma forma contribuíram nesta caminhada, obrigada.

# DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

**A GÉNESE INSTRUMENTAL E A CALCULADORA GRÁFICA NA APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES POR ALUNOS DO 11.º ANO DE ESCOLARIDADE**


# RESUMO

Serve o presente estudo para averiguar de que forma a génese instrumental e a calculadora gráfica influenciam a aprendizagem de funções em estudantes do 11.º ano de escolaridade. De forma a concretizar este objetivo, foram adotadas as questões de investigação: (1) Como é que os alunos integram a calculadora gráfica nas atividades que realizam no estudo de funções?; (2) Que esquemas desenvolvem os alunos na utilização da calculadora gráfica nas suas atividades no estudo de funções?; (3) Que dificuldades revelam os alunos na aprendizagem de funções e na exploração da calculadora gráfica?; e (4) Quais as perceções dos alunos acerca da calculadora gráfica na aprendizagem de funções? Procurando responder a estas questões, foram recolhidas gravações de áudio e vídeo assim como produções escritas dos alunos às tarefas que foram propostas. Além disto, foram aplicados dois questionários à turma, um antes e outro após a intervenção pedagógica. A intervenção foi desenvolvida numa escola do concelho de Braga, numa turma do 11.º ano de escolaridade do curso de Ciências e Tecnologias. As aulas foram baseadas nas principais características de um ensino exploratório, onde os estudantes fazem a exploração de tarefas e aprendizagem é sistematizada com discussões coletivas.

Os resultados obtidos mostram que os alunos desenvolveram relações com a sua calculadora gráfica, integrando este instrumento na sua atividade. Esta integração deu-se de forma gradual, com o conhecimento sucessivo das potencialidades e limitações da calculadora gráfica. Os alunos fizeram, cada vez mais, um uso inteligente e equilibrado das características da calculadora gráfica, tornando-se críticos em relação ao que era obtido. Isto deveu-se também ao facto de haver desenvolvimento dos esquemas de utilização já possuídos pelos alunos, bem como um aparecimento de novos esquemas de uso e de ação instrumentada, o que contribuiu para o desenvolvimento da génese instrumental em cada aluno.

As principais dificuldades no tema de funções recaíram na manipulação equações racionais, na compreensão de conceitos relacionados com função, na gestão e relação das diferentes representações e nas transformações gráficas. Em relação à calculadora gráfica, houve dificuldades apresentadas na sua manipulação, principalmente em menus recém-descobertos, e, por vezes, na sua adaptação às diferentes tarefas. Na aprendizagem de funções, a turma revelou que a calculadora gráfica que lhes ajudou no desenvolvimento do raciocínio e pensamento matemático, no estabelecimento de relações entre definições e propriedades de funções, permitindo uma abordagem mais completa dos conceitos.


**Palavras-chave:** génese instrumental; calculadora gráfica; alunos do 11.º ano; funções; aprendizagem.

**THE INTRUMENTAL GENESIS AND THE GRAPHIC CALCULATOR IN THE LEARNING OF FUNCTIONS BY STUDENTS IN 11TH GRADE**

## ABSTRACT

The present study aims to investigate how does the instrumental genesis and the graphic calculator influence the learning of functions in 11th grade students. Therefore, were selected the research questions: (1) How do students integrate the graphic calculator in activities developed in the study of functions?; (2) Which schemes are develop by students with the use of graphic calculator in their activities in the study of functions?; (3) What difficulties do students reveal in the learning of functions and in the exploration of the graphic calculator?; and (4) What are the students perceptions about the graphic calculator in learning functions? Seeking to answer these questions, audio and video recordings were collected, as well as written productions of the students to the proposed tasks. In addition, two questionnaires were applied to the class, one before and the other after the pedagogical intervention. The intervention was developed in a school in the city of Braga, in a class of 11th grade students of Science and Technology. The lessons were based on the main characteristics of exploratory teaching. In these lessons, students explore tasks, and their learning is systematized with collective discussions.

The results of the study show that the students developed relationships with their graphic calculator, integrating this instrument in their activity. This integration took place gradually, with successive acknowledge of the potentialities and limitations of the graphic calculator. Students increasingly made intelligent and balanced use of the graphic calculator's features, becoming critical about what was obtained. This is also because there is the development of utilization schemes already possessed by the students, as well as the appearance of new usage schemes and instrumented action schemes, which contributed to the development of the instrumental genesis in each student.

The main difficulties in the subject of functions fell on handling rational equations, understanding concepts related to function, managing and relating different representations and in graphics transformations. Regarding the graphic calculator, there were difficulties in its handling, mainly in newly discovered menus, and, sometimes, in its adaptation to different tasks. In learning functions, the class revealed that the graphic calculator helped them in the development of reasoning and mathematical thought, establishing relationships between definitions and properties of functions, allowing a more complete approach to the concepts.

**Keywords:** instrumental genesis; graphic calculator; 11th grade students; functions; learning.

## ÍNDICE

DIREITOS DE AUTOR E CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO DO TRABALHO POR TERCEIROS ........................ ii
AGRADECIMENTOS ........................................................................................................ iii
DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE ...................................................................................... iv
RESUMO ...................................................................................................................... v
ABSTRACT .................................................................................................................... vi
ÍNDICE ......................................................................................................................... vii
ÍNDICE DE QUADROS ..................................................................................................... ix
ÍNDICE DE TABELAS ........................................................................................................ x
ÍNDICE DE GRÁFICOS ...................................................................................................... xi
ÍNDICE DE FIGURAS ....................................................................................................... xii
CAPÍTULO 1 ..................................................................................................................... 1
INTRODUÇÃO ................................................................................................................... 1
1.1. Tema, objetivos e questões do estudo ............................................................................ 1
1.2. Pertinência do estudo .................................................................................................... 2
1.3. Estrutura do Relatório .................................................................................................... 3
CAPÍTULO 2 ..................................................................................................................... 4
ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO ..................................................................... 4
2.1. Enquadramento Contextual ............................................................................................ 4
2.1.1. Caracterização da escola ........................................................................................... 4
2.1.2. Caracterização da turma ............................................................................................ 5
2.2. Enquadramento Teórico ................................................................................................. 9
2.2.1. O conceito de função: evolução histórica e a sua integração no currículo escolar .................... 9
2.2.2. A importância da calculadora gráfica no ensino e aprendizagem de funções ........................ 12
2.2.3. A génese instrumental e a calculadora gráfica ............................................................... 15
2.2.4. Dificuldades na aprendizagem do tema de funções ......................................................... 19
2.3. Estratégias de Intervenção ............................................................................................ 21
2.3.1. Metodologias de ensino e de aprendizagem .................................................................. 21
2.3.2. Estratégias para avaliação da ação ............................................................................. 23
CAPÍTULO 3 ................................................................................................................... 26

INTERVENÇÃO ....26
3.1. Momentos de Intervenção Pedagógica ....26
3.1.1. Funções Irracionais ....27
3.1.2. Limites de funções reais de variável real quando $x$ tende para $\pm\infty$ ....45
3.1.3. Funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ ....64
Síntese ....78
3.2. Avaliação do ensino ministrado ....82
CAPÍTULO 4 ....85
CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES ....85
4.1. Conclusões ....85
4.1.1. Como os alunos integram a calculadora gráfica nas atividades que realizam no estudo de funções? ....85
4.1.2. Que esquemas desenvolvem os alunos na utilização da calculadora gráfica nas suas atividades no estudo de funções? ....87
4.1.3. Que dificuldades revelam os alunos na aprendizagem de funções e na exploração da calculadora gráfica? ....88
4.1.4. Quais as perceções dos alunos acerca da calculadora gráfica na aprendizagem de funções? 89
4.2. Limitações e Recomendações ....90
BIBLIOGRAFIA ....93
ANEXOS ....96
Anexo 1 – Questionário Inicial ....97
Anexo 2 – Pedido de autorização de gravações aos Encarregados de Educação .... 100
Anexo 3 – Questionário Final .... 101
Anexo 4 – Plano de aula: funções irracionais .... 103
Anexo 5 – Plano de aula: limites de funções reais de variável real quando $x$ tende para $\pm\infty$ .... 105
Anexo 6 – Plano de aula: funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ .... 107

# ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1. Síntese da intervenção pedagógica. .......................................................................... 26

Quadro 2. Quadro a preencher durante a discussão da Tarefa 2. ...................................................... 37

Quadro 3. Quadro com conclusões finais acerca de funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$........ 74

Quadro 4. Identificadores de esquemas de utilização da aula: funções irracionais.............................. 78

Quadro 5. Identificadores de esquemas de utilização da aula: limites de funções r.v.r. no infinito....... 79

Quadro 6. Identificadores de esquemas de utilização da aula: funções do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$. ...... 80

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1. Frequência dos diferentes tipos de resposta às questões 1 e 2 da Tarefa 1 ($n = 4$)........... 28

Tabela 2. Frequência dos diferentes tipos de respostas às questões 3 e 4 da Tarefa 1 ($n = 4$). ........ 30

Tabela 3. Frequência dos diferentes tipos de respostas às questões da Tarefa 1 ($n = 5$). ................. 47

Tabela 4. Frequência dos diferentes tipos de respostas às questões da Tarefa 2 ($n = 5$). ................. 57

Tabela 5. Frequência dos diferentes tipos de respostas às questões da Tarefa 1 ($n = 5$). ................. 65

Tabela 6. Frequência dos diferentes tipos de respostas da Tarefa 2 ($n = 5$). .................................... 75

Tabela 7. Frequência das perceções da turma acerca do tema de funções r.v.r. ($n = 20$). ............... 82

Tabela 8. Frequência das perceções da turma acerca das tarefas propostas ($n = 20$)...................... 82

Tabela 9. Frequência das perceções da turma cerca da calculadora gráfica ($n = 20$)...................... 84

## ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Classificações da turma no final do 10.º ano. ........................................................................ 6

Gráfico 2. Dificuldades sentidas pelos alunos na disciplina de Matemática........................................... 7

Gráfico 3. Ações da calculadora gráfica que os alunos sabem executar................................................ 8

## ÍNDICE DE FIGURAS


Figura 1. Diagrama do modelo IAS. .... 16

Figura 2. Resposta correta do grupo B à questão 1 da Tarefa 1. .... 29

Figura 3. Resposta parcialmente correta do grupo C à questão 1 da Tarefa 1. .... 29

Figura 4. Resposta correta do grupo B à questão 2 da Tarefa 1. .... 29

Figura 5. Resposta correta do grupo A à questão 2 da Tarefa 1. .... 30

Figura 6. Resposta parcialmente correta do grupo D à questão 3 da Tarefa 1. .... 31

Figura 7. Resposta parcialmente correta do grupo D à questão 4 da Tarefa 1. .... 32

Figura 8. Respostas corretas do grupo B às questões 3 e 4 da Tarefa 1. .... 32

Figura 9. Resolução do grupo A à Tarefa 2 (parte 1/2). .... 38

Figura 10. Resolução do grupo A à Tarefa 2 (parte 2/2) .... 39

Figura 11. Resolução do grupo B à Tarefa 2. .... 40

Figura 12. Resolução do grupo C à Tarefa 2 (parte 1/2). .... 41

Figura 13. Resolução do grupo C à Tarefa 2 (parte 2/2). .... 41

Figura 14. Resolução do grupo D à Tarefa 2 (parte 1/3) .... 42

Figura 15. Resolução do grupo D à Tarefa 2 (parte 2/3). .... 43

Figura 16. Resolução do grupo D à Tarefa 2 (parte 3/3) .... 43

Figura 17. Quadro preenchido durante a discussão da Tarefa 2. .... 45

Figura 18. Resposta correta do grupo A à questão 1 da Tarefa 1. .... 48

Figura 19. Resposta correta do grupo E à questão 1 da Tarefa 1. .... 48

Figura 20. Resposta correta do grupo C à questão 2 da Tarefa 1 (método tabelar). .... 50

Figura 21. Resposta correta do grupo B à questão 2 da Tarefa 1 (método gráfico). .... 51

Figura 22. Resposta correta do grupo A à questão 2 da Tarefa 1 (método analítico). .... 51

Figura 23. Resposta correta do grupo C à questão 3 da Tarefa 1. .... 52

Figura 24. Resposta parcialmente correta do grupo B à questão 3 da Tarefa 1. .... 53

Figura 25. Resposta parcialmente correta do grupo A à questão 3 da Tarefa 1. .... 53

Figura 26. Representação equivalente ao esboço feito no quadro, auxiliar à questão 1 da Tarefa 1. ... 54

Figura 27. Resposta correta do grupo A à questão 1 da Tarefa 2 (resolução gráfica). .... 58

Figura 28. Resposta correta do grupo D à questão 1 da Tarefa 2 (resolução analítica). .... 58

Figura 29. Resposta parcialmente correta do grupo E à questão 2 da Tarefa 2. .... 59

Figura 30. Resposta correta do grupo C à questão 3 da Tarefa 2. .... 60

Figura 31. Resposta correta do grupo A à questão 4 da Tarefa 2 (com método tabelar). .................... 60
Figura 32. Resposta correta do grupo E à questão 4 da Tarefa 2 (com método analítico). .................. 61
Figura 33. Resposta correta do grupo B à questão 4 da Tarefa 2 (com método gráfico). .................... 61
Figura 34. Resposta correta do grupo B à Tabela I da Tarefa 1. ........................................................ 65
Figura 35. Resposta correta do grupo C à Tabela II da Tarefa 1. ....................................................... 68
Figura 36. Resposta parcialmente correta do grupo A à Tabela II da Tarefa 1. .................................. 68
Figura 37. Resposta parcialmente correta do grupo B à Tabela III da Tarefa 1. ................................. 69
Figura 38. Resposta correta do grupo D à Tabela IV da Tarefa 1. ...................................................... 70
Figura 39. Resposta parcialmente correta do grupo A à Tabela IV da Tarefa 1. ................................. 71
Figura 40. Resposta parcialmente correta do grupo E à conclusão da Tarefa 1. ................................. 71
Figura 41. Resposta correta do grupo C à etapa 1 da Tarefa 2. ......................................................... 75
Figura 42. Resposta correta do grupo E às etapas 2 e 3 da Tarefa 2. ................................................ 77
Figura 43. Resposta correta do grupo B à etapa 4 da Tarefa 2. ......................................................... 77

# CAPÍTULO 1

# INTRODUÇÃO

Este capítulo, dividido em três secções, apresenta inicialmente o tema deste estudo, mencionando os seus objetivos e questões de investigação. Numa segunda secção, é apresentada a pertinência do estudo face os objetivos atuais do ensino de Matemática. Por último, é descrita a organização deste documento.

## 1.1. Tema, objetivos e questões do estudo

O tema em estudo incide no processo de génese instrumental e na calculadora gráfica na aprendizagem de funções por alunos do 11.º ano de escolaridade. Este tema mostra-se atual com o desenvolvimento gradual da tecnologia e da forma como esta pode ser utilizada em benefício escolar. A utilização que é feita da calculadora gráfica nem sempre acompanha as potencialidades que lhe vão sendo acrescentadas com o avanço da tecnologia. Este tema surge, então, de um questionamento pessoal acerca da importância que é dada, tanto por professores como por alunos, à calculadora gráfica, sendo este o material tecnológico mais utilizado em sala de aula (Ricoy & Couto, 2012).

Os vínculos entre a calculadora gráfica e a teoria abordada na sala de aula podem ser uma fonte de rendimento na aprendizagem dos alunos. Segundo Chazan e Yerushalmy (2003), uma boa relação entre a teoria e a calculadora gráfica poderá facilitar a aprendizagem de determinados conceitos, nomeadamente tópicos de funções. Estas relações surgem principalmente entre representações gráficas, analíticas e tabelares. No entanto, quaisquer que sejam as representações, o estabelecimento de noções visuais acerca de qualquer tema na sala de aula, principalmente na disciplina de Matemática, pode passar pela utilização da calculadora gráfica, tendo em conta que este é um instrumento de pequeno porte e de fácil manuseamento. Assim, um dos objetivos deste estudo passa por perceber qual a melhor forma de estabelecer e desenvolver relações entre estudantes e a calculadora gráfica. A evolução destas relações desenvolvidas entre alunos e a sua calculadora gráfica denomina-se de génese instrumental, conceito explorado por Rabardel (1995).

Tendo em conta a utilidade da calculadora gráfica no estudo de funções e a importância da sua integração nas atividades de aprendizagem da Matemática, o principal objetivo deste estudo consiste em perceber o contributo da génese instrumental na aprendizagem de funções com o uso da calculadora gráfica por alunos do 11.º ano de escolaridade. Adjacentes a este objetivo, surgem algumas questões, as quais pretendo responder:

- Como os alunos integram a calculadora gráfica nas atividades que realizam no estudo de funções?
- Que esquemas desenvolvem os alunos na utilização da calculadora gráfica nas suas atividades no estudo de funções?
- Que dificuldades revelam os alunos na aprendizagem de funções e na exploração e utilização da calculadora gráfica?
- Quais as perceções dos alunos acerca da calculadora gráfica na aprendizagem de funções?

### 1.2. Pertinência do estudo

A disciplina de Matemática é estruturada por vários temas, dos quais o tema das funções ganha destaque no currículo, principalmente a partir do 7.º ano de escolaridade (MEC, 2021). Este tema promove o desenvolvimento cognitivo dos alunos, surgindo no percurso escolar na fase de transição do pensamento concreto para o pensamento abstrato (Viseu et al.27, 2017). Nesse desenvolvimento, muito contribui a natureza dos tópicos de funções, traduzida pelas relações que se estabelecem entre variáveis e pela conexão de significados através das diferentes representações (algébrica, tabelar e gráfica). No entanto, para Nachlieli e Tabach (2012), a analogia de significados nem sempre acontece, sendo que, frequentemente se aborda apenas uma das várias representações ou mais do que uma, mas não as relacionando.

A exploração de diferentes representações potencia a utilização de materiais tecnológicos, sobretudo na conexão entre a representação algébrica e a gráfica. Para Cavanagh e Mitchelmore (2003) tal conexão com recurso à tecnologia permite estabelecer ou reforçar relações que nem sempre se tornam possíveis de outra forma. Dos materiais tecnológicos, ganha destaque a utilização da calculadora gráfica por se tratar de uma ferramenta de uso obrigatório para os alunos do ensino secundário desde o ano letivo de 1997-98. Desde esse ano que em Portugal é dada importância à utilização da calculadora gráfica como recurso útil em vários campos da Matemática, principalmente no estudo de funções (DES, 1997). As recomendações emanadas pelas sucessivas reformas dos programas de Matemática corroboram as apontadas pelo National Council for Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) que defende que os computadores e as calculadoras são ferramentas essenciais para a aprendizagem e ensino da Matemática nas escolas atuais. Acontece que nem sempre os alunos recorrem à calculadora gráfica para dar sentido às atividades que realizam. Por exemplo, na observação de contextos, apercebo-me que há uma tendência de os alunos recorrerem à calculadora gráfica para realizar cálculos numéricos, mesmo que em situações passíveis de serem efetuados através de cálculo mental ou de aplicação da tabuada. Tal tendência contraria a recomendação dada pelo NCTM (2000) de que os materiais tecnológicos "fornecem imagens visuais de ideias matemáticas, facilitando a organização e a análise de dados" (p. 24). Acrescentam dizendo que quando estes materiais eletrónicos estão disponíveis, "os estudantes podem focar-se na tomada de decisões, reflexão, raciocínio e resolução de problemas" (idem) de uma qualquer área da Matemática, como, por exemplo, a Geometria, Estatística e a Álgebra. Trata-se de uma perspetiva que faz emergir o significado matemático que os alunos dão quando recorrem à calculadora gráfica, quando exploram e estabelecem conexões entre os diferentes menus, em detrimento de uma utilização mecânica e acrítica.

### 1.3. Estrutura do Relatório

Este relatório de estágio foi dividido em quatro partes de forma a organizar da melhor maneira a informação deste estudo. A primeira parte, referente à introdução do relatório conta com a explicitação do tema, dos objetivos e das questões de investigação delineadas e que se procura responder. Além disso, é mencionada a pertinência do estudo em questão.

O segundo capítulo, conta com um Enquadramento Contextual, onde são referidas as caracterizações da escola e da turma onde decorreu a intervenção pedagógica. Este capítulo também inclui o Enquadramento Teórico do relatório, onde, em consonância com o objetivo e as questões de investigação deste estudo, são tratados os temas 'função', 'génese instrumental', a 'importância da tecnologia na aprendizagem de funções' e 'algumas das dificuldades de aprendizagem que podem surgir no estudo de funções'. Por fim, são explicitadas as estratégias de intervenção, apresentando as metodologias de ensino e de aprendizagem e, não menos importante, as estratégias para a avaliação da ação.

No terceiro capítulo, é feita a análise a três momentos de Intervenção Pedagógica referentes às funções irracionais, limites de funções reais de variável real quando $x$ tende para $\pm\infty$ e funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, bem como uma síntese dos três momentos. Este capítulo também integra a avaliação do ensino ministrado durante o estágio profissional.

Por último, no quarto capítulo, são apresentadas as Conclusões, respondendo às questões de investigação inicialmente propostas, as limitações encontradas em toda a experiência e algumas recomendações para estudos futuros sobre este tema ou num contexto semelhante.

# CAPÍTULO 2

# ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO

O presente capítulo serve de referência para as decisões e conclusões apresentadas durante a prática pedagógica. Num primeiro subcapítulo é apresentado o enquadramento contextual, caracterizando a escola e a turma onde foi aplicada a intervenção pedagógica. De seguida, o segundo subcapítulo, enquadra teoricamente os pressupostos que se revelaram cruciais no decorrer de todas as etapas do ano de estágio. Finalmente, é apresentado o plano geral da intervenção pedagógica, referindo as metodologias utilizadas, enquadrando-as contextual e teoricamente, bem como as principais estratégias utilizadas com vista a avaliar a ação pedagógica.

## 2.1. Enquadramento Contextual

O presente subcapítulo explora as principais características do ambiente em que foi realizada a intervenção pedagógica: a escola e a turma. O conhecimento destes dois elementos foi essencial para que a minha prestação fosse executada da melhor forma possível. Assim, este subcapítulo está dividido em duas secções: 'caracterização da escola' e 'caracterização da turma'.

### 2.1.1. Caracterização da escola

A escola onde decorreu o desenvolvimento deste estágio é uma escola secundária no concelho de Braga. O agrupamento de escolas onde esta pertence conta com 14 estabelecimentos de ensino público, tendo no seu total cerca de 3314 estudantes, do ensino pré-escolar ao ensino secundário, 315 profissionais docentes e 104 profissionais não-docentes. Apesar de ser caracterizada como uma escola secundária, tem aberto as suas portas a turmas do 3.º ciclo há mais de quatro anos, fazendo a integração, até ao início do letivo 2021/2022, de cerca 180 alunos neste ciclo.

Atendendo à diversidade da sua oferta formativa, 'integração' é uma das chaves de ouro desta escola, tomando grande relevância no seu projeto educativo. O projeto educativo deste agrupamento de escolas tem como missão a promoção de valores e princípios como a igualdade, a inclusão e a participação, encarregando-se, simultaneamente, de desenvolver uma cultura de exigência, rigor e superação. O caminho para atingir esta missão, segundo este agrupamento, passa por desenvolver o espírito crítico nos alunos, alertá-los para a constante aprendizagem ao longo da vida, atentar a comunidade escolar para a importância da sustentabilidade social e ambiental, entre outros aspetos. O agrupamento de escolas compromete-se a divulgar, monitorizar e avaliar todos os compromissos feitos neste projeto educativo, acompanhando o desenvolvimento dos seus princípios orientadores.

A duração do meu estágio profissional foi de, aproximadamente, nove meses, iniciando-se em outubro de 2021 e terminando a junho de 2022. Durante este tempo pude desenvolver o meu conhecimento profissional sobre a carreira docente, mas também consegui constatar alguns dos apoios que a escola oferece aos alunos, docentes e não docentes. O estabelecimento escolar conta com condições favoráveis para um bom ensino e aprendizagem, incluindo áreas de trabalho individualizadas, acesso a *Wi-Fi* em todo o recinto escolar, salas de informática, de artes, laboratórios e oficinas, bem como serviços de psicologia e orientação escolar. Disponibiliza ainda serviços como papelaria, bar, refeitório e biblioteca. Na biblioteca, os alunos têm acesso a livros, documentos e computadores. As salas de aula mais comuns disponibilizam um computador para uso do docente, projetor (por vezes com quadro interativo) e quadros brancos de marcadores.

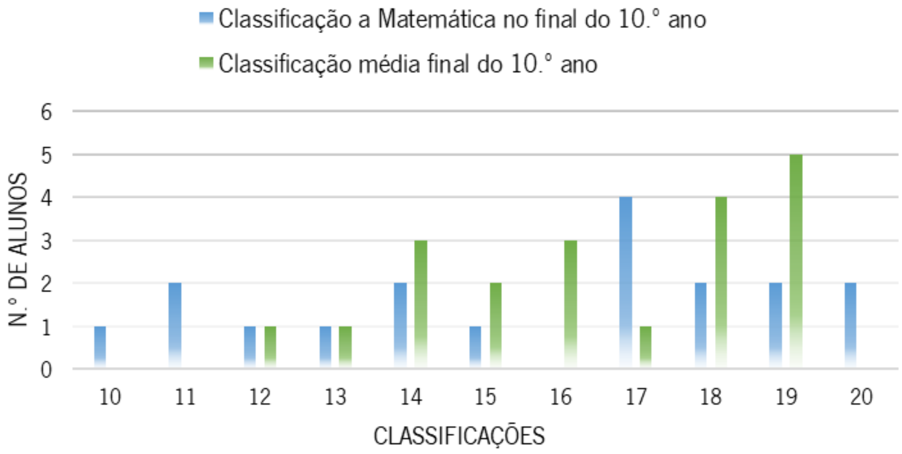
A oferta formativa a nível do ensino secundário varia entre cinco cursos profissionais – entre eles, Técnico(a) de Design, Técnico(a) de Desporto e Técnico(a) de Eletrónica, Automação e Comando – e entre quatro cursos científico humanísticos – Ciências e Tecnologias, Línguas e Humanidades, Artes Visuais e Ciências Socioeconómicas. Como atividades extracurriculares, a escola disponibiliza aos seus alunos mais de 34 atividades, entre núcleos, clubes e oficinas. A Matemática é destacada em várias destas atividades como no Desporto Escolar (com o Xadrez), Olimpíadas da Matemática, Canguru Matemático, Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, Oficina de Matemática e Clube de Matemática. Não posso deixar de destacar mais algumas atividades que foram executadas com mais frequência e eficácia: visitas de estudo, o Parlamento de Jovens e o projeto "Tutorias". O projeto "Tutorias" tem um papel importante em todas as disciplinas, assim como na disciplina de Matemática, onde permite aos alunos o estudo em pares, auxiliando, simultaneamente, o 'ajudante' e o 'ajudado' na sua própria aprendizagem.

Em suma, a escola disponibiliza ofertas formativas, serviços e espaços favoráveis a um bom ensino, proporcionando a integração, a cooperação, o ensino, a aprendizagem, a competência e o rigor.

### 2.1.2. Caracterização da turma

A implementação da minha prática pedagógica decorreu numa turma do 11.º ano de escolaridade constituída por vinte alunos, dos 16 aos 17 anos de idade, dos quais seis se identificaram como sendo do sexo masculino e catorze do sexo feminino. Nenhum estudante da turma conta com retenções em qualquer ano de escolaridade. No gráfico seguinte (Gráfico 1) estão apresentadas as classificações à disciplina de Matemática no final do 10.º ano e a classificação média de cada aluno, a todas as disciplinas, no final do 10.º ano, arredondada às unidades.

**Gráfico 1.** Classificações da turma no final do 10.º ano.

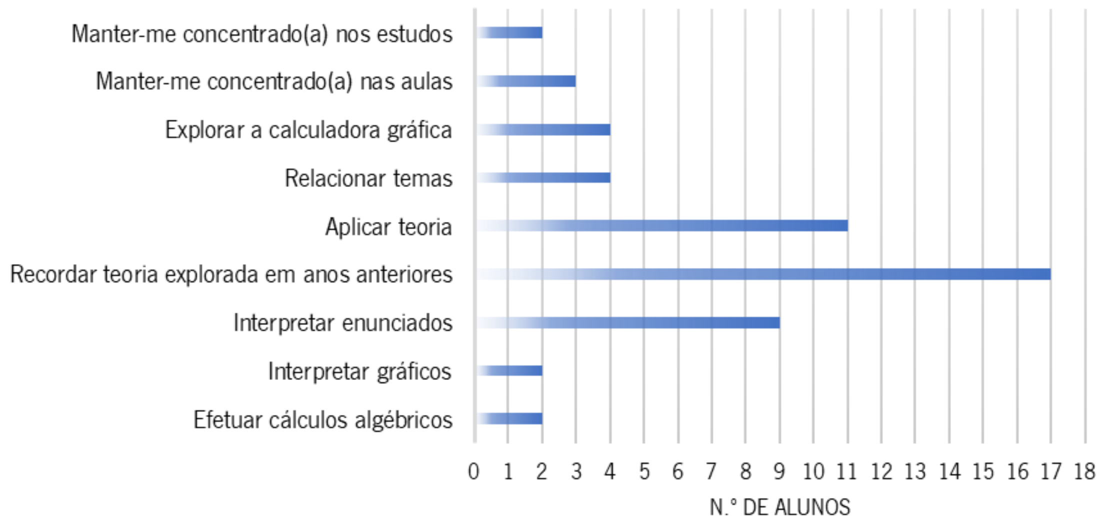



Observando o gráfico, constata-se que no 10.º ano, sem alguma negativa, a turma teve um percurso satisfatório a Matemática, com 50% da turma com classificações acima de 15 valores, inclusive, sendo que 75% da dos alunos obteve médias finais de 10.º ano acima de 15 valores, inclusive. Esta informação permitiu-me conhecer o desempenho dos alunos sobretudo na disciplina de Matemática antes de iniciar a minha intervenção pedagógica.

De forma a conhecer melhor a turma, foi-lhes distribuído (via *online*) um questionário (Anexo 1) com algumas perguntas acerca das principais ambições, da disciplina de Matemática e sobre a utilização da calculadora gráfica, visto que era um elemento fundamental na minha intervenção pedagógica. Quando questionados acerca das suas ambições académicas futuras, todos os estudantes afirmaram que tinham como objetivo ingressar na universidade. As suas escolhas passam por áreas como engenharia, física, astrofísica, matemática, ciências da computação, medicina e outras áreas relacionadas com biologia. Este interesse na área das ciências pode ser uma das razões pelas quais metade da turma considerava a Matemática como útil e bastante útil no seu futuro (classificando numa escala de 1 a 5, 50% dos alunos escolheram níveis 4 ou 5). Ainda assim, metade dos alunos admitiu ainda não ter uma área específica pela qual queiram embarcar.

Numa escala de 1 a 5, 50% da turma classificou o seu gosto pela Matemática como “gosto” e “gosto muito” (níveis 4 e 5), sendo que 90% da turma escolheu um nível igual ou superior a 3. Este fator poderia influenciar a quantidade de tempo que os alunos utilizavam para o seu estudo de Matemática. Dos estudantes da turma, 85% afirmou estudar regularmente Matemática, dos quais mais de metade admite estudar de uma a três horas semanais e cerca de 40% faz uso de mais de três horas semanais para o mesmo fim. Os restantes alunos revelaram dificuldades em fazer uma boa gestão do tempo ou admitiram priorizar outras disciplinas. Metade da turma afirmou receber apoio à disciplina de Matemática fora da escola (como explicações). No que a dificuldades à disciplina diz respeito, numa escala de 1 a 5, toda a turma classificou a facilidade com que entende Matemática num nível igual ou superior a 3, dos quais 45% são iguais ou acima de nível 4. A turma foi questionada acerca das suas principais dificuldades à disciplina. No gráfico seguinte (Gráfico 2) estão apresentadas as suas escolhas:

**Gráfico 2.** Dificuldades sentidas pelos alunos na disciplina de Matemática.

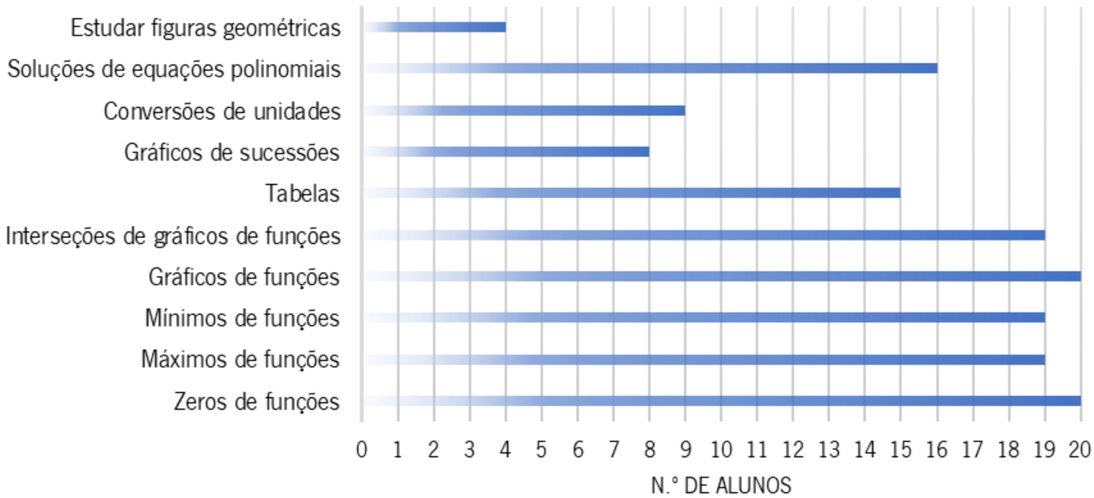



Como se percebe pelo gráfico acima representado, a turma apresenta uma tendência de não conseguir recordar teoria explorada em anos anteriores, assim como aplicar a teoria em aulas atuais, o que pode revelar uma dificuldade geral na aprendizagem de toda a turma. No entanto, são poucos os estudantes que confessam ter dificuldades na manipulação da calculadora gráfica, bem como na relação entre os vários temas matemáticos.

Um dos instrumentos mais importantes da minha intervenção pedagógica foi a calculadora gráfica. Por este motivo, no questionário inicial tentei entender algumas das perceções que a turma tinha sobre este artefacto didático. Depois de verificar que todos os alunos possuíam calculadora gráfica, questionei qual era o modelo utilizado. Esta questão foi apenas uma forma de me certificar de que estaria antecipadamente preparada para trabalhar com os vários modelos disponíveis quando o momento da sua utilização chegasse. Dezoito alunos da turma possuíam o mesmo modelo de calculadora e, portanto, apercebi-me de que apenas teria de trabalhar com dois tipos de calculadoras, o que facilitou o desenvolvimento das aulas.

Em relação à sua utilização, a turma afirmou que a utilização mais frequente da calculadora gráfica é com o objetivo de efetuar cálculos numéricos, confirmar respostas e esboçar gráficos. Nesta perspetiva se percebe que os alunos faziam uma utilização da calculadora muito básica, sem tirar proveito real do que esta ferramenta pode oferecer. No entanto, a turma revelou saber trabalhar com várias das ações da calculadora gráfica que iriam ser desenvolvidas ao longo do ano relacionadas com o estudo de funções. Segue essa informação no gráfico seguinte (Gráfico 3):

**Gráfico 3.** Ações da calculadora gráfica que os alunos sabem executar.




A turma revela uma maior afeição com os menus gráficos da calculadora gráfica comparando com as restantes funcionalidades. Este facto mostrou ser um fator positivo no meu trabalho, sendo que a intervenção pedagogica incidiu no tema de funções e a opção gráfica é, por norma, a mais aproveitada.

No geral, os alunos revelaram ter uma boa relação com a calculadora gráfica, apenas não a sabiam aproveitar completamente, de forma a que esta os auxiliasse no seu estudo. Apenas um estudante da turma defendia que a calculadora gráfica limitava o seu raciocínio. Porém, dezasseis alunos concordavam com a afirmação de que a calculadora gráfica os ajudava a desenvolver racioncínios matemáticos. A utilização da calculadora gráfica no estudo autónomo era feita por mais de metade dos alunos da turma. Quando questionados acerca dos aspetos positivos da calculadora gráfica, os principais apontados foram a análise de representações gráficas de funções, o auxilio em cálculos algébricos e encontrar soluções de equações polinomiais mais rapidamente. Em relação aos aspetos negativos, grande parte da turma revelou ter receio que a utilização da calculadora gráfica lhes causasse dependência e que lhes limitasse a destreza em cálculos algébricos.

Observando a turma durante todo o ano, apercebi-me de que a turma demonstrava interesse nas aulas, mas que se tornava um pouco reservada na parte prática. Os alunos não tinham por hábito partilhar ideias acerca das conclusões a que chegavam, nem comparar processos de resolução. Este aspeto assustou-me um pouco inicialmente, uma vez que pertendia que a turma realizasse trabalhos de grupo frequentemente. Felizmente este aspeto foi melhorando com o decorrer do ano. O ambiente entre docentes e alunos mostrava-se bastante saudável. A turma colocava questões, intervinha com ideias matemáticas e estavam bastante atentos a todos os pormenores discutidos em sala de aula. Por esta relação entre professor e aluno ser bastante boa, a minha integração na turma foi bastante fluída. Foi-nos, a mim e ao meu colega de estágio, possibilitado percorrer a sala durante todo o ano letivo a retirar dúvidas dos alunos, o que permitiu criar relações e laços com os alunos antes de aplicarmos a nossa intervenção pedagógica.

### 2.2. Enquadramento Teórico

Este subcapítulo foi dividido em quatro partes. Numa primeira parte, é dado a conhecer o conceito de função, referindo brevemente parte da sua evolução histórica bem como a sua integração nos programas curriculares de Matemática atuais. Seguidamente, é dedicada uma parte à importância da calculadora gráfica como papel fundamental neste estudo e na educação matemática. A terceira parte introduz o termo 'génese instrumental', onde o conceito é explorado, assim como outros termos relacionados que irão ser fundamentais no desenvolvimento da análise prática e nas conclusões a serem retiradas. Por último, serão exploradas as principais dificuldades sentidas pelos alunos na aprendizagem de funções.

#### 2.2.1. O conceito de função: evolução histórica e a sua integração no currículo escolar

Em Matemática, o termo 'função' é a denominação que se dá a uma correspondência unívoca de um conjunto para outro, ambos não vazios. Todavia, o seu conceito não foi sempre esse e houve inclusive épocas temporais onde não se referiam a este tipo de relações como funções. A correspondência entre conjuntos era já feita na Babilónia e no Egito, por volta do ano 2000 a. C.. Estes povos utilizavam tabelas onde faziam corresponder um valor a um resultado de operações que envolvessem esse valor (Roque, 2012). Desenvolviam estas correspondências sem nunca as associar a uma expressão analítica ou representação gráfica.

Foi só no século XIV, que Nicole d'Oresme deu os primeiros passos nas representações gráficas de funções, ainda sem definir o termo. Na representação gráfica de Oresme, conhecida como 'latitude das formas', era feita a relação entre grandezas físicas e quantitativas (Oliveira et al, 2014; Roque, 2012). Para Oresme, tudo o que fosse mensurável – a velocidade, a distância, peso, temperatura, entre outras – era imaginável e representável através de coordenadas (Roque, 2012). Contudo, e apesar de alguns matemáticos defenderem que esta representação foi um dos antecedentes ao plano cartesiano, "não havia nenhuma menção à sua interpretação algébrica, o que caracteriza a representação cartesiana" (Roque, 2012, p. 247).

Como foi já referido, uns milénios antes, os babilónios e egípcios tinham utilizado o que se assemelhava a correspondências entre conjuntos, sem nunca determinar ou pensar em relacionar essas correspondências a uma expressão analítica, até porque lhes faltava o essencial: a variação. A simbologia de variável que hoje conhecemos começou a ser desenvolvida por Viète, em finais do século XVI. Apesar de, na época, "simbologia com letras para grandezas indeterminadas ser já comum na geometria e utilizadas ocasionalmente na aritmética" (Bos, 2001, p.147), foi Viète que introduziu as letras como forma de representação de quaisquer valores desconhecidos ou indeterminados.

O estudo da variação foi sendo expandido após estudos desenvolvidos por Galileu Galilei, no século XVII, sobre movimentos de fenómenos físicos, por exemplo, a relação entre grandezas físicas como o deslocamento de um objeto e a sua velocidade (Roque, 2012). Descartes, filósofo e matemático francês, – que, ao contrário de Galileu, ambicionava entender o movimento algébrico, não o físico – no mesmo século, com o estudo de retas tangentes a curvas de Roberval (Roque, 2012), afirmou que "uma equação que contem duas variáveis, geometricamente representada por uma curva, indica uma dependência entre variáveis quantitativas" (Ponte, 1992, p. 4). Todavia, a definição de função ainda não apareceu por Descartes. Há diferenças entre equações e funções. Quando resolvemos equações, o nosso objetivo passa por encontrar um conjunto-solução, à partida, desconhecido. Quando uma equação envolve mais do que um valor desconhecido, chegamos a soluções que variam dependendo do valor das restantes incógnitas. Como tinha defendido Descartes, considerando uma equação com duas incógnitas $x$ e $y$, "tomando infinitos valores para $x$, acham-se também infinitos valores para $y$" (Roque, 2012, p. 319). E foi assim introduzida a ideia de dependência entre duas variáveis pela primeira vez.

Foi já no final do século XVII que Leibniz utilizou, pela primeira vez, o termo "função" (Ponte, 1992). Desta forma, o estudo da dependência entre variáveis que tinha sido desenvolvida nos anos transatos, ganharam um novo nome. Segundo Roque (2012), foi Leibniz que introduziu as funções racionais. Juntamente com Johann Bernoulli, matemático suíço, Leibniz tentava perceber se seria possível decompor o denominador de tais funções em fatores mais simples. Foram as pesquisas e estudos desenvolvidos por estes dois matemáticos que levaram, em meados do século XVIII, matemáticos a discutirem acerca de números negativos e, dos chamados atualmente, números imaginários. Foi também estes matemáticos dado o primeiro passo em direção ao estudo dos logaritmos.

A primeira tentativa de definição deste conceito, segundo Roque (2012), veio por Bernoulli que, em 1718, num artigo apresentado à Academia de Ciências de Paris, define: "chamamos função de uma grandeza variável a uma quantidade que resulta, de alguma forma, dessa grandeza variável e de constantes" (Freguglia & Giaquinta, 2016, p. 89). Refere Oliveira et al. (2014) que esta definição foi reformulada e complementada por vários matemáticos – como Euler, Cauchy, Fourier e Heine – durante um período de mais de cem anos. Em 1837, Dirichlet marca a sua presença na história matemática das funções. Segundo Roque (2012), apesar de não definir o termo função, Dirichlet esclarece, num artigo de 1829, algumas das gralhas que encontrou em relação às funções estudadas por Cauchy e Fourier onde afirma:

> Sejam $a$ e $b$ dois números fixos e $x$ uma quantidade variável que recebe sucessivamente todos os valores entre $a$ e $b$. Se a cada $x$ corresponde um único $y$, finito, de maneira que, quando $x$ se move continuamente no intervalo entre $a$ e $b$, $y = f(x)$ também varia progressivamente, então $y$ é dita uma função contínua de $x$ nesse intervalo. Para isso, não é obrigatório, em absoluto, nem que $y$ dependa de $x$ de acordo com uma mesma e única lei, nem mesmo que seja representada por uma relação expressa por meio de operações matemáticas. (p. 392)

Esta noção de função perdurou por várias décadas, sendo sobre ela desenvolvidos outros conceitos relacionados com funções. Foi após esta definição que Cantor e Dedekind, no final do século XIX, fazem surgir "a ideia de função como uma correspondência entre dois conjuntos numéricos" (Roque, 2012). Dedekind avança, então, no desenvolvimento da teoria de conjuntos, cuja importância na organização da matemática moderna é inegável.

Mais recentemente, segundo Roque (2012), em 1934, surge um grupo de matemáticos, maioritariamente franceses, sob o pseudónimo de Nicolas Bourbaki que, no ano 1939, publicam um livro denominado *Éléments des mathématiques: les strutures fondamentales de l'analyse* cujo objetivo passa por organizar e atualizar todos os tópicos da matemática. Uma das suas contribuições passa pela definição de função:

> Sejam $E$ e $F$ dois conjuntos, que podem ser distintos ou não. Uma relação entre um elemento variável $x$ de $E$ e um elemento variável $y$ de $F$ é dita uma relação funcional [função] se, para todo $x$ pertencente a $E$, existe um único $y$ pertencente a $F$ que possui a relação dada com $x$. Damos o nome função à operação que associa, deste modo, a todo o elemento $x$ pertenente a $E$, o elemento $y$ pertencente a $F$ que possui a relação dada com $x$; $y$ será dito o valor da função no elemento $x$. (Roque, 2012, p. 404)

Assim, como podemos constatar, a definição de função alterou-se constantemente no decorrer da história da humanidade.

Tal como em tempos antigos, atualmente é dada grande importância à aprendizagem de funções. Segundo Viseu et al. (2017) a aprendizagem de funções em Portugal acompanha o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, trabalhando-se, assim, do concreto para o abstrato. O NCTM (2000) defende que a analogia entre diferentes representações (como a gráfica, tabelar e algébrica) auxilia a promoção de uma melhor compreensão destes tópicos e um bom desenvolvimento cognitivo. A relação e analogia entre tais representações, principalmente entre a gráfica e a analítica, é feita, principalmente, por meios tecnológicos, como a calculadora gráfica. Para isso, é necessário que a atividade desenvolvida pelos docentes seja direcionada nesse sentido, atendendo às aprendizagens essenciais de cada ano de escolaridade. Todavia, usualmente, devido às mais diversas adversidades, a analogia entre mais do que uma representação não é feita, o que limita a aprendizagem e compreensão dos conceitos por parte dos estudantes (Nachlieli & Tabach, 2012; Viseu et al, 2017).

No sistema educativo português, a disciplina de Matemática é dividida em vários temas, dos quais as funções ganham grande destaque no currículo. A sua aprendizagem inicia-se no 7.º ano de escolaridade e prolonga-se até ao 12.º ano. O Ministério da Educação e Ciência (MEC, 2021) defende que "a compreensão da variação em situações diversas faz-se através do estudo de funções" (p. 10). Segundo as Aprendizagens Essenciais (MEC, 2021), o primeiro tipo de função a ser aprendido em sala de aula são as funções de proporcionalidade direta e inversa, onde os docentes são orientados a conduzir os seus alunos a "interpretar uma função como uma correspondência unívoca de um conjunto num outro" (p. 27). A aprendizagem de funções finaliza, no 12.º ano de escolaridade, com o estudo das funções exponenciais e funções logarítmicas (MEC, 2018b). Alguns dos tópicos de funções referidos nas Aprendizagens Essenciais do 11.º Ano (MEC, 2018a) são:

→ Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente;
→ Reconhecer, interpretar e representar graficamente funções racionais de expressão analítica $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, referindo o conceito intuitivo de assíntota;
→ Caracterizar uma função inversa de restrições bijetivas de funções quadráticas e cúbicas e relacionar os seus gráficos;
→ Reconhecer, interpretar e representar graficamente funções irracionais de expressão analítica $f(x) = a\sqrt{x-b} + c$ e usá-las na resolução de problemas;
→ Conhecer o conceito de limite segundo Heine;
→ Determinar: limites de uma função num ponto aderente ao respetivo domínio; limites laterais; limites no infinito;
→ Calcular e interpretar geometricamente a taxa média de variação de uma função e a derivada de uma função num ponto.

Grande parte dos tópicos referidos foram explorados nas aulas de intervenção prática e alguns estão, inclusivamente, analisados neste relatório de estágio.

### 2.2.2. A importância da calculadora gráfica no ensino e aprendizagem de funções

Desde o desenvolvimento do primeiro computador em 1942, bem como do desenvolvimento da primeira calculadora gráfica em 1985, que a comunidade matemática se tem questionado acerca das vantagens e desvantagens da utilização da tecnologia na educação matemática (Drijvers et al, 2010).

Segundo o NCTM (2000), a utilização da tecnologia por estudantes de Matemática enriquece as suas investigações, auxiliando-os na formação de conjeturas e explorações nos mais variados ramos da Matemática. Por exemplo, as calculadoras gráficas, sendo o material tecnológico mais utilizado na disciplina de Matemática (Ricoy & Couto, 2012), permitem a exploração de vários tipos de funções através da visualização das suas representações gráficas ou ainda representações tabelares, bem como a análise de elementos relativos à própria função – zeros, máximos, mínimos, limites de funções ou ainda assíntotas ao seu gráfico. Para além do estudo de funções, as calculadoras gráficas podem ser utilizadas em estudos estatísticos, estudos geométricos ou para simples cálculos numéricos. Do ponto de vista de Pedro (2021), a utilização da tecnologia na disciplina de Matemática "fomenta a comunicação entre os alunos e o professor tendo em consideração o *feedback* que estes dispositivos podem proporcionar" (p. 18). Para alguns alunos, principalmente para estudantes com maiores dificuldades a Matemática, a utilização da calculadora gráfica é uma grande, e por vezes a única, influência na sua atividade (Guin & Trouche, 1999).

Em várias investigações realizadas nos últimos anos no âmbito da educação matemática, de acordo com Olive et al. (2010), a utilização de tecnologias faz com que a Matemática seja vista como experimental e desafiadora. Estes autores esclarecem que situações que envolvam ferramentas tecnológicas permitem aos alunos o controlo de ambientes complexos, onde lhes é permitido explorar outras ideias. Olive et al. (2010) justificam que "ambientes tecnológicos potencialmente reconectam o aluno com contextos nos quais lhe é possível criar significados" (p. 138). Sem estes ambientes tecnológicos, grande parte das estratégias dos estudantes para resolução de tarefas baseia-se apenas em conhecimento recentemente adquirido (Guin & Trouche, 1999), provocando, possivelmente, uma carência de aprendizagem.

Ora, apesar de todas as suas funcionalidades, as mais importantes integrações da calculadora gráfica nas salas de aula devem-se ao facto de esta permitir, numa só ferramenta, a possibilidade de observar vários tipos de representações. O NCTM (2000) afirma que, com calculadoras gráficas, "os estudantes conseguem examinar mais exemplos ou formas de representação do que as que são possíveis à mão [papel e lápis], de forma a fazer e explorar conjeturas mais facilmente" enriquecendo, desta forma, a qualidade das suas investigações, "fornecendo um meio de visualizar ideias matemáticas a partir de diferentes perspetivas" (p. 25). Reforça ainda que as representações favorecem o raciocínio e são um meio para provas e demonstrações matemáticas. Segundo Ponte et al. (2012), o acesso por alunos a diferentes representações permite o "desenvolvimento e a compreensão dos processos de raciocínio matemático dos alunos" (p. 360). Mais, a exploração de diferentes representações para um mesmo objeto matemático – uma função, por exemplo –, permite aos alunos o conhecimento das relações existentes entre as representações (como gráfica, tabelar ou analítica), despertando o seu interesse e motivação para os respetivos temas em estudo (Drijvers, 2015; NCTM, 2000). A alternância entre as diferentes representações desenvolve nos alunos uma compreensão mais consistente dos conceitos matemáticos a adquirir (Pedro, 2021).

É importante lembrar que a calculadora gráfica não substitui o trabalho do docente (NCTM, 2000), nem tampouco lhe reduz a importância (Drijvers, 2015). O proveito que os alunos poderão ou não retirar de calculadora gráficas depende, fundamentalmente, do trabalho do professor. Tal como defende Consciência (2014), "o modo como o professor trabalha com a tecnologia e como usa as diferentes representações, reflete-se nas escolhas representacionais que os alunos fazem" (p. 132). Se o docente, ao trabalhar com funções por exemplo, apenas fizer referência à representação gráfica da função, será mais difícil que os alunos consigam interpretar ou associar tabelas como formas de representação de funções. É importante que o professor desenvolva tarefas que conduzam os alunos a explorarem as diferentes representações através da calculadora gráfica, estabelecendo relações com o trabalho realizado com lápis e papel (Pedro, 2021). O NCTM (2000) argumenta que cabe ao docente "decidir se, quando e como deve a tecnologia ser utilizada" (p. 26). Como é salientado por algumas pesquisas, a utilização da tecnologia vai depender do contexto de ensino e das práticas matemáticas que proveem da sala de aula (Drijvers, 2015). Desta forma, e no que concerne ao ensino e à aprendizagem da Matemática, os professores precisam de se mostrar preparados para a integração da calculadora gráfica ou de qualquer outra ferramenta tecnológica na atividade dos alunos. Com o trabalho desenvolvido pelos docentes, os estudantes irão adquirir novos esquemas de trabalho e comandos no que diz respeito a estas ferramentas, "aprendendo também passos necessários para justificações teóricas" (Rivera, 2007, p. 285). O objetivo principal da inclusão da calculadora gráfica na atividade do aluno passa por o fazer entender que esta ferramenta tecnológica é um meio para a construção do seu conhecimento e compreensão matemática (Pedro, 2021).

Porém, a integração total (ou parcial) da calculadora gráfica na atividade dos alunos não se dá apenas pela utilização ocasional desta ferramenta. Os estudantes devem entender as capacidades, limitações e potencialidades da sua calculadora gráfica para a conseguirem enquadrar devidamente na sua atividade. Deste modo, cabe ao docente promover tarefas e atividades com os alunos onde estes tenham a oportunidade de explorar este instrumento eficientemente, num ambiente mais controlado e propício à aprendizagem, visualização, experimentação e computação (NCTM, 2000; Pedro, 2021). À medida que o aluno vai conhecendo melhor a sua ferramenta tecnológica, os seus procedimentos tornam-se mais rápidos e precisos (Pedro, 2021), tirando um maior proveito das funcionalidades oferecidas pela ferramenta. Se inicialmente, para o estudante, o principal papel da sua calculadora gráfica eram os cálculos numéricos, o papel desta ferramenta evolui para o de um objeto que acompanha a sua atividade e que trabalha conjuntamente com o seu raciocínio.

### 2.2.3. A génese instrumental e a calculadora gráfica

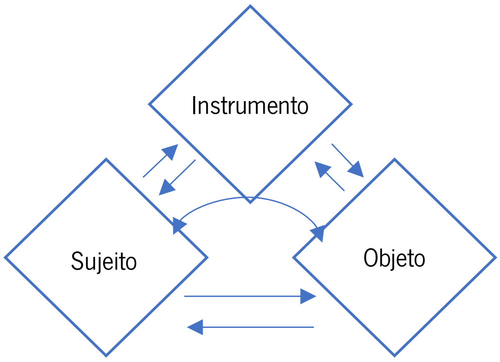
Assim como foi referido anteriormente, a tecnologia permite relacionar diferentes tipos de representações de funções que, por vezes, a sua analogia não é possível de outra forma. As Aprendizagens Essenciais do Ensino Secundário (MEC, 2018a) argumentam que a tecnologia em sala de aula deve ser utilizada desde o início do ensino secundário de forma "crítica e inteligente contribuindo para o desenvolvimento de novas competências" (p. 3), o que provocará nomeadamente uma melhor perceção de ideias matemáticas, desenvolvimento do raciocínio matemático e do pensamento crítico, resolução de problemas e comunicação matemática.

Relativamente ao tema das funções, a tecnologia mais utilizada em sala de aula é a calculadora gráfica. Este instrumento permite a análise de gráficos de funções, tabelas, entre outros. Contudo, os estudantes revelam algumas dificuldades na sua utilização. Alguns dos aspetos em que são encontradas dificuldades são, por exemplo, no ajuste da janela de visualização, na conexão entre mais do que um tipo de representação (gráfica, analítica ou tabelar, por exemplo) e na construção de significado em relação ao que é obtido (Consciência, 2014). Porém, o uso da calculadora gráfica é feito pelos alunos, independentemente do tipo de dificuldades que possam possuir.

Um estudante, quando trabalha com uma qualquer ferramenta tecnológica, num contexto escolar, pode dar-lhe dois tipos de utilização. Por um lado, pode utilizá-la de uma forma construtiva, onde o instrumento o ajuda a contruir e, por vezes, guiar ou moldar o seu pensamento e raciocínio, fazendo uso das suas funcionalidades. Por outro, a sua utilização pode ser feita de uma forma secundária, onde o estudante o utiliza para simples processos, muitas vezes, dispensáveis. Estas duas utilizações são aquilo que diferencia um artefacto de um instrumento. Um artefacto, não necessariamente físico, é utilizado pelo sujeito (um estudante, por exemplo) como um material simbólico, sendo que este não cria qualquer relação intrínseca com a ferramenta (Drijvers et al., 2010; Rabardel, 1995). Por sua vez, um instrumento é um artefacto "inscrito num uso, numa relação instrumental com a ação do sujeito como mediador da sua ação" (Rabardel, 1995, p. 49), isto é, é um artefacto que o sujeito conseguiu enquadrar na sua atividade. A formação de um instrumento não é imediata e, por isso, nem sempre é fácil distinguir os dois termos numa determinada situação, visto que, apesar de distintos, estão intimamente ligados. Além disso, a posição instrumental do artefacto depende da ação a desenvolver pelo sujeito. Um artefacto, em si só, não é um instrumento, mas pode ser "instituído como instrumento pelo sujeito que lhe dá o devido sentido para atingir certo objetivo na sua ação" (Rabardel, 1995, p. 96).

No parecer de Verillon e Rabardel (1995), existem relações desenvolvidas com os instrumentos envolvendo três elementos: o sujeito (por exemplo um aluno), o instrumento (por exemplo uma calculadora gráfica) e o objeto ao qual é aplicado o instrumento pelo sujeito (por exemplo uma tarefa escolar). Estas relações são estudadas pelos autores num modelo a que denominam modelo IAS (Situações de Atividade Instrumentada) onde relacionam as diferentes interações entre os três elementos anteriormente referidos. Na Figura 1 está representado um esquema dessas relações.

**Figura 1.** Diagrama do modelo IAS.
(Adaptado de Verillon & Rabardel, 1995, p. 85)




Os autores salientam três interações essenciais entre os elementos: interação sujeito-instrumento, interação instrumento-objeto e interação objeto-sujeito (mediada pelo instrumento). Seguindo o raciocínio do exemplo dado por Consciência (2014), suponhamos que é proposto a um estudante que analise a representação gráfica de uma função qualquer numa calculadora gráfica com o objetivo de obter os zeros dessa função, resolvendo assim uma certa tarefa. Neste caso, existem três elementos: o estudante (sujeito), a calculadora gráfica (instrumento) e a tarefa (objeto). Inicialmente, para representar graficamente a função na calculadora gráfica, o aluno tem de ter desenvolvido esse conhecimento prévio (interação sujeito-instrumento). De seguida, o aluno necessita de desenvolver, na calculadora gráfica, processos que lhe permitam obter a representação gráfica da função pedida bem como os seus zeros de forma a resolver a tarefa pedida (interação instrumento-objeto). Por último, durante este processo, o aluno conseguiu perceber mais acerca do tipo de funções que foi estudada, bem como sobre os zeros dessas funções (interação objeto-sujeito mediada pelo instrumento).

Estas interações instrumentais são baseadas em esquemas desenvolvidos pelo sujeito em relação ao artefacto (posteriormente instrumento). O conceito de esquema remete para Piaget (1936) que define esquema como uma organização psicológica ou física, invariante de comportamento para uma determinada situação. Trouche (2004) considera que um esquema é "um lugar psicológico entre uma relação dialética entre gestos e invariantes operacionais, ou seja, entre atividade e pensamento" (p. 286). Estes invariantes operacionais referem-se ao conhecimento implícito contido nos esquemas: os teoremas-em-ação (proposições tidas como verdadeiras) e conceitos-em-ação (categoria que se pensa ser relevante para a realização de uma determinada tarefa) (Vergnaud, 1998). Numa mesma tarefa, num mesmo ambiente, diferentes alunos podem desenvolver diferentes esquemas (Drijvers & Trouche, 2008). Associados a Matemática, são distinguíveis dois tipos de esquemas: esquemas instrumentais – associados ao uso explícito de pelo menos uma ferramenta, como uma calculadora gráfica – e os esquemas de compreensão algébrica – onde tal não acontece (Almeida & Oliveira, 2009; Rivera, 2007).

De um ponto de vista instrumental, Rabardel (1995) menciona os esquemas de utilização, associados à organização de uma atividade quando esta é articulada com um artefacto, uma atividade instrumentada. De referir que os esquemas instrumentais e os esquemas de utilização são diferentes conceitos. Os primeiros referem-se à atividade que é desenvolvida com finalidade da resolução de uma certa tarefa. Por outro lado, os esquemas de utilização referem-se ao modo de utilização de um certo artefacto, também associados a uma tarefa. São então definidos, por Rabardel (1995), dois tipos de esquemas de utilização: os esquemas de uso – caracterizados pela sua "orientação para tarefas secundárias, isto é, relacionadas com gestão das características e propriedades específicas do artefacto" (p. 82) – e os esquemas de ação instrumentada – onde o sujeito efetua ações primárias no artefacto "cujo sentido é dado pelo ato global que visa efetuar transformações no objeto da atividade" (p. 83). Um exemplo de esquemas de uso pode ser o ajuste do brilho da calculadora. Poderá surpreender associar uma ação tão simples como ajustar o brilho da calculadora com esquemas de uso, mas até a mais pequena ação exige algum tipo de conhecimento, segundo Trouche (2004). Segundo o mesmo autor, obter os zeros de uma função pode ser considerado um esquema de ação instrumentada. Pode dizer-se que os esquemas de uso são os degraus para se atingir um novo patamar, os esquemas de ação instrumentada (Pedro, 2021). No entanto, um esquema de uso para um estudante pode ser um esquema de ação instrumentada para outro. Seguindo o raciocínio feito por Rabardel (1995), se compararmos um sujeito que está a aprender a conduzir com um condutor experiente a realizar uma ultrapassagem, por exemplo, o primeiro utiliza esquemas de ação instrumentada (mediado por esquemas de uso) – visto que a ação requer que o sujeito desenvolva certos mecanismos partindo de alguns conhecimentos já adquiridos – enquanto o segundo utiliza esquemas de uso – uma vez que os esquemas já foram desenvolvidos durante os seus anos de prática. Da mesma forma, com a passagem do tempo, os esquemas de ação instrumentada do primeiro condutor transformar-se-ão em esquemas de uso. Pode então afirmar-se que os esquemas podem evoluir e, portanto, a construção de um instrumento não é definitiva (Drijvers & Trouche, 2008).

Depois de introduzir os esquemas de utilização, Rabardel (1995) redefine o termo instrumento como "uma entidade composta feita de um componente artefacto [...] e um componente de esquemas (um ou mais esquemas de utilização)" (p. 86). Nesta definição, é previsível que se pense que apenas o sujeito altera o artefacto e o ajusta ao seu próprio ritmo de trabalho e pensamento. No entanto, o sujeito desenvolve métodos de utilização do artefacto, percebe em que tipo de tarefas pode a ferramenta ser utilizada ou que tipo de métodos utilizar para solucionar da melhor forma essas tarefas (Kaptelinin, 2003). Neste processo, um artefacto transforma-se num instrumento. Este processo de transformação é denominado por génese instrumental (Rabardel, 1995).

A génese instrumental é um processo de construção de um instrumento, conduzido pelo sujeito. Como este processo é composto por duas entidades (o artefacto e os esquemas de utilização) são consideradas por Rabardel (1995) dois sentidos distintos, porém frequentemente relacionados: instrumentalização e instrumentação.

Rabardel identifica, por uma lado, um sentido de instrumentalização (voltado para o artefacto) que "concerne ao surgimento e evolução de componentes do artefacto [...] que ampliam as criações e realizações dos artefactos cujos limites são, portanto, difíceis de determinar" (Rabardel, 1995, p. 111). É neste processo que o sujeito adapta e molda o artefacto para servir um certo objetivo, ou seja, o sujeito enriquece as propriedades do artefacto. A instrumentalização pode ser distinguida em várias fases: uma fase de descoberta e seleção das funções do artefacto mais relevantes; uma fase de personalização do artefacto; e uma fase de transformação, onde se acrescentam ou retiram elementos ao artefacto que não lhe pertenciam inicialmente (como a instalação de um jogo) (Trouche, 2004).

Por outro lado, um sentido de instrumentação (voltado para o sujeito) que "é relativo ao surgimento e evolução dos esquemas de utilização" (Rabardel, 1995, p. 111). Neste processo, o sujeito explora e investiga o artefacto, descobrindo propriedades intrínsecas (possíveis potencialidades e restrições) do artefacto e adaptando os seus esquemas de utilização ao artefacto, surgindo, desta forma, novos esquemas (Rabardel, 1995). A instrumentação é um processo pelo qual o artefacto passa e que permite ao sujeito desenvolver uma atividade dentro dos limites do artefacto (Trouche, 2004).

Por outras palavras, podemos afirmar que a instrumentalização acontece quando o sujeito evolui o artefacto para si mesmo e a instrumentação faz evoluir as ações do sujeito para se adaptar ao artefacto. Ambos os processos são provocados pelo sujeito. Apesar de distintos, os dois termos são, em termos práticos, difíceis de identificar. Apenas podem ser diferenciados pela orientação que é dada pelo sujeito numa determinada atividade. Mais, os dois processos contribuem para o surgimento dos instrumentos, bem como para a sua evolução, sendo que, por vezes, um possa estar mais presente ou desenvolvido que o outro (Rabardel, 1995).

A génese instrumental, isto é, o aparecimento de um instrumento a partir de um artefacto, requer tempo, principalmente em contexto escolar. Além disso, a sua evolução depende dos mais variados fatores como a complexidade do artefacto, o tipo de tarefas, o ambiente escolar e, claro, o investimento que o aluno faz sobre o artefacto e a tarefa (Drijvers & Trouche, 2008). No caso da calculadora gráfica, este artefacto inclui em si imensos artefactos, isto é, menus e funções que se espera que os alunos aprendam a utilizar e a integrar na sua atividade.

### 2.2.4. Dificuldades na aprendizagem do tema de funções

Como foi referido anteriormente neste capítulo, o tema de funções é um dos mais importantes temas da disciplina de Matemática. Por esta razão, muitas das dificuldades reveladas pelos alunos, surgem nesta área.

A forma como os docentes apresentam um conceito, um problema ou um exemplo, irá de alguma forma influenciar a maneira como os seus alunos veem aquele conteúdo. Como é defendido por Sajka (2003), "o que nós [professores] escrevemos e o que fazemos nas aulas de Matemática é muito importante para um estudante" (p. 247). Isto deve-se principalmente ao facto de que, por muito que um estudante não esteja devidamente atento na aula que está a decorrer, este acaba por apontar no caderno o que é escrito no quadro, por exemplo, ou algumas das resoluções das tarefas expostas à turma. Quando, mais tarde, este for estudar, vai mais facilmente recorrer ao que tem escrito no caderno do que lembrar-se se o docente utilizou o termo "variável" ou "incógnita" para se referir a tal letra, por exemplo.

Uma das dificuldades mais observadas nos alunos no tema de funções é a interpretação de letras como variáveis (Matos, 2007; Matos & Ponte, 2008; Ponte et al, 2009; Sajka, 2003). Este problema deve-se, fundamentalmente, à interpretação feita pelos estudantes da expressão algébrica de uma função como uma equação algébrica a ser resolvida, onde alguns alunos procuram encontrar a(s) sua(s) solução(ões). No seu estudo, Sajka (2003) dá o exemplo de uma aluna que apenas se referia à expressão de uma função como "equação" evitando, segundo a autora, a palavra "função". Há até um episódio em que a aluna se refere a um exemplo concreto com as palavras "o elemento principal aqui é a equação, não a função" (p. 249). A autora justifica este comportamento com o argumento de que esta estudante se sente confortável com equações, visto que lidou com elas durante vários anos e, então, associa uma situação desconhecida com uma que lhe é familiar. Matos (2007) reitera que a influência de anteriores experiências no âmbito da Aritmética e da Álgebra pode ser um dos focos deste tipo de erros, onde os estudantes tendem em interpretar letras como incógnitas.

As dificuldades algébricas dos alunos provêm de aprendizagens anteriores que, ou não ficaram bem entendidas, ou não foram devidamente ensinadas e que, consequentemente, causam dúvidas em novos conceitos, definições ou estratégias de resolução (Matos & Ponte, 2008). Por esta razão, surgem muitas dúvidas na manipulação algébrica de expressões – e consequente dificuldade em obter zeros de funções, imagens, objetos, entre outros – e na linguagem algébrica. Ponte et al. (2009) salientam alguns dos erros e dificuldades mais comuns como não saber como começar a resolver uma equação, adição incorreta de termos semelhantes ou não semelhantes e simplificação de termos. Referem ainda que, por vezes, "a sua dificuldade é de tal ordem que nem sequer percebem muito bem o que representa uma equação e muito menos o que está envolvido na sua resolução" (p. 96).

De um estudo realizado a 38 alunos, Schnepper e McCoy (2013) identificaram os cinco erros mais comuns cometidos em áreas como funções racionais, expressões e equações. Este estudo revelou que o tipo de erro mais comum são respostas incompletas, onde os alunos respondem a partes das questões, mas não apresentam todas as soluções e conclusões pedidas. As autoras dão o exemplo de um aluno que afirmou que a representação gráfica de uma certa função se movia para cima e para a esquerda, mas nunca chega a mencionar a reflexão e a dilatação que ocorrem no gráfico da mesma função. Outros dos erros exemplificados por Schnepper e McCoy (2013) passam por somas e subtrações de expressões racionais (erro derivado de má utilização da teoria), a resolução de equações racionais (erros técnicos), a multiplicação e divisão de expressões racionais (erros derivados de aprendizagens prévias, que não foram devidamente consolidados) e alguns aspetos diretamente ligados com funções racionais, como domínios, assíntotas ao gráfico, entre outros (erros de definição distorcida).

A dificuldade na interpretação do conceito de função, não é caso único. Matos (2007) e Ponte et al. (2009) revelam que alguns alunos mostram dificuldades em terminologias típicas do tema das funções como o domínio, contradomínio, objeto, imagem, variável dependente, variável independente, entre outras. Há também dificuldades apontadas à utilização eficaz da simbologia $x$, $y$ e $f(x)$. É defendido que a prática de funções se dê em situações contextualizadas, onde os tipos de representações sejam variados, de forma a ajudar os alunos na aprendizagem de termos relativos às funções, passando "a informação de uma representação para a outra e ainda usar a informação dada para a resolução de problemas" (Ponte et al, 2009, p. 122). Tarefas contextualizadas podem também ser um foco de dificuldades se o seu uso não for mais frequente. Por exemplo, a interpretação do domínio quando se é referido o tempo ou a distância como variável independente pode gerar dúvidas sobre o intervalo a considerar. Por esta razão, muitos alunos, quando confrontados com situações em contexto real, não conseguem resolver a tarefa ou têm dificuldades em interpretar os resultados obtidos (Ponte et al, 2009). Com efeito, a utilização de situações contextualizadas no estudo de funções é crucial visto que, "para ultrapassarem as dificuldades que apresentam na interpretação das diferentes representações [os alunos] precisam desenvolver as capacidades de identificar, interpretar, descrever e coordenar as situações apresentadas" (Rebelo, 2011, p. 5). Nestes cenários, cabe ao docente reconhecer que tais dificuldades estão sempre inerentes à aprendizagem dos tópicos de funções e preparar-se para as combater, contornar e resolver.

### 2.3. Estratégias de Intervenção

Este subcapítulo divide-se em duas partes. A primeira parte apresenta as metodologias de ensino e de aprendizagem que foram utilizadas e nas quais me baseei para desenvolver a minha intervenção pedagógica. A segunda, e última, parte faz referência às estratégias utilizadas para avaliação e análise de toda a ação durante o ano de estágio.

#### 2.3.1. Metodologias de ensino e de aprendizagem

Antes de iniciar a minha intervenção pedagógica, procurei refletir sobre os objetivos que queria ver concretizados nas minhas aulas: motivar e ajudar. Motivar e ajudar os alunos a procurarem saber mais e melhor, e suportar todo o caminho da sua aprendizagem. Tentar fazer com que percebessem que a Matemática é necessária e que os mecanismos que são desenvolvidos em sala de aula são preciosos para lidar com situações e problemas no seu futuro. Procurando este destino, tentei utilizar materiais, ferramentas e técnicas adequadas, analisando-os e desenvolvendo-os previamente, de forma a serem consideradas e/ou evitadas dificuldades, formas de resolução ou, eventualmente, erros (NCTM, 2000).

Foi considerado o ensino exploratório como forma de ensino em sala de aula. Este tipo de ensino "defende que os alunos aprendam a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas" (Canavarro, 2011, p. 11), isto é, consiste na exploração de tarefas por parte dos alunos cuja aprendizagem obtida é sistematizada com discussões coletivas. Para melhor aplicar este método de ensino, foi necessária uma elaboração e escolha prévia de tarefas que, simultaneamente, respondessem aos objetivos curriculares e também às questões de investigação por mim anteriormente apresentadas. Ponte (2005) destaca as tarefas como sendo fundamentais no currículo, oferecendo aos alunos oportunidades únicas de aprendizagem. De facto, no ensino exploratório as tarefas tomam um papel protagonista, sendo estas o principal motor de autodesenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos durante a aula. As tarefas escolhidas são caracterizadas por serem de média duração e num contexto de semirrealidade, conceitos explorados por Ponte (2005).

Uma vez que a calculadora gráfica tem um grande papel em toda a minha investigação, esta teve de marcar a sua presença em todas as aulas por mim lecionadas, não só de forma a conseguir obter dados suficientes para responder às questões de investigação do meu trabalho, mas também para auxiliar os alunos a fazer um uso mais eficaz e competente deste artefacto. Mais uma vez, a escolha prévia de tarefas revelou-se essencial para o meu trabalho. Segundo o NCTM (2000) o uso de materiais tecnológicos que acompanhem tarefas "permitem aos professores examinarem os processos usados pelos estudantes nas suas investigações matemáticas, assim com os seus resultados, enriquecendo a informação disponível para tomada de decisões institucionais" (p. 26).

Desta forma, foi pensado em um modelo de aula que pudesse permitir, assim como é contemplado no NCTM (2000), que os alunos aprendessem conjeturando, experimentando vários procedimentos e argumentando em todo o processo de resolução. As aulas foram então divididas em três fases: (i) introdução da tarefa; (ii) exploração da tarefa; e (iii) discussão e sistematização de conhecimentos. A primeira fase é autoexplicativa. Esta tem curta duração, sendo que apenas se dá tempo aos alunos para lerem o enunciado, tirarem as suas dúvidas acerca de alguma palavra ou questão e seguem para a segunda fase, caracterizada pela exploração da tarefa por parte dos estudantes. Nesta fase, o papel do professor é de grande pertinência. Assim como defende Canavarro (2011), cabe ao docente acompanhar o trabalho dos alunos – sempre com o cuidado de não validar respostas ou resoluções – e avaliar as suas estratégias e métodos de resolução, algumas antecipadamente previstas, preparando da melhor forma a fase que se segue: a discussão dos resultados. Na terceira fase, o papel de moderador cabe ao docente. Este é que decide o que se fará de seguida, a ordem da apresentação das resoluções, devendo prever algumas das conexões entre os diferentes resultados, sempre tendo em conta o objetivo da aula. Apesar de guiados pelo docente, os estudantes devem conseguir apresentar algumas conjeturas e conclusões teóricas acerca do que foi explorado, cabendo ao professor auxiliar na sistematização dos conhecimentos (NCTM, 2000; Ponte, 2005, 2017). A síntese da aula foi por vezes aplicada na forma de questões acerca das principais dificuldades sentidas durante a resolução da tarefa ou acerca do uso da calculadora gráfica durante a aula.

Tal como refere Canavarro (2011), o docente depara-se com inúmeros desafios durante uma aula baseada no ensino exploratório, tais como "evitar ao máximo adiar para a aula seguinte a discussão [...] [e] evitar estender o tempo de trabalho" (p. 17). De forma a contornar estes desafios, foi utilizado um temporizador com contagem regressiva, exposto no projetor da sala, onde os alunos podiam consultar o tempo que ainda tinham restante para terminar a sua atividade.

Na mesma linha de pensamento, e tentando aplicar o ensino exploratório da melhor forma, foi dada aos alunos a oportunidade de trabalharem em grupo durante essas aulas. O trabalho de grupo permitiu que os estudantes da turma raciocinassem cooperativamente e que se vissem obrigados a explicitar os seus próprios raciocínios uma vez que "quando os estudantes comunicam as suas razões para outros, nomeadamente os seus colegas de grupo, devem organizar os seus pensamentos e tornar clara a mensagem que querem passar" (Ferreira & Mendes, 2021, p. 6176), tendo, também, de justificar os seus próprios métodos, bem como ouvir e considerar os métodos dos restantes colegas. Assim, a turma foi dividida nos mesmos grupos de 4 alunos durante todas as aulas por mim lecionadas. Estes grupos foram construídos de uma forma heterogénea em relação às classificações obtidas em avaliações, fazendo-se, ainda assim, uma reflexão acerca das características de cada estudante, tentando evitar que elementos do grupo fossem ignorados por outros por estarem menos motivados ou por terem habilidades cognitivas menos fortes (Ferreira & Mendes, 2021). O facto de os grupos serem de pequena dimensão, permitiu que todos os elementos do grupo colaborassem, de forma mais ou menos acentuada, na resolução apresentada no final.

### 2.3.2. Estratégias para avaliação da ação

Durante o meu ano de estágio, fui aplicando alguns instrumentos que me permitiram recolher material para avaliar todo o processo na minha intervenção pedagógica. Entre eles gravações em áudio e vídeo, produções dos alunos, questionário inicial e questionário final. A recolha destes materiais foi essencial para uma análise mais profunda e clara de toda a minha intervenção pedagógica e para resposta às questões de investigação. Para a recolha de imagem e som dentro da sala de aula, foi requisitada autorização à direção da escola e, assim que autorizado, entregue a todos os estudantes um papel a ser assinado pelos encarregados de educação para dar a sua respetiva permissão (Anexo 2).

O questionário inicial (Anexo 1) foi o primeiro instrumento em uso. Aplicado através da plataforma *Google Forms,* este questionário anónimo teve como objetivo recolher informação que me permitisse fazer uma caracterização da turma acerca de três principais temas: as suas características pessoais; os seus costumes e hábitos em relação à disciplina de Matemática; e a sua relação com a calculadora gráfica. No que ao primeiro tema diz respeito, foram feitas questões acerca da idade, sexo, número de retenções, classificações à disciplina de Matemática no final do 10.º ano, classificação média final do 10.º ano e perceções acerca de um futuro académico. No segundo tema, numa escala de 1 a 5, sendo

1 o nível mais baixo ("Nada útil", "Detesto" ou "Não entendo nada") e 5 o nível mais alto ("Bastante útil", "Adoro" ou "Entendo tudo"), foi pedido que avaliassem o contributo da Matemática na sua vida futura, o gosto pela disciplina e as suas dificuldades. Tentei também perceber os seus hábitos de estudo e qual era a quantidade de alunos que recebia apoio a Matemática fora da escola. Por fim, a última parte foi dedicada ao uso da calculadora gráfica pelos alunos nas aulas e fora delas. Inicialmente foram questionados se possuíam calculadora gráfica e qual era o seu modelo. Esta questão não pretendia dividir ou classificar os alunos de alguma forma, mas serviu sim como apoio ao meu trabalho, conseguindo compreender com que calculadoras iria trabalhar durante as minhas aulas, podendo preparar-me devidamente. Além destas, foram interrogados também os tipos de utilização da calculadora gráfica, três aspetos positivos e três negativos deste artefacto.

Em todas as realizações de trabalhos e tarefas em sala de aula, foi entregue uma folha por grupo, onde os alunos deveriam escrever a sua resposta final, devidamente fundamentada com cálculos, composições ou representações. Estas folhas, por mim fornecidas, foram recolhidas no final de cada aula. Eram também entregues folhas de rascunho a cada um dos estudantes onde estes tinham a oportunidade de escrever mais livremente as suas tentativas de resolução. Em algumas das aulas lecionadas, foram ainda recolhidos *feedback* dos alunos através de questões síntese acerca de uma aula específica, questionando, usualmente, dificuldades na atividade e no uso da calculadora gráfica, vantagens acerca da utilização da calculadora gráfica naquela atividade e aprendizagens adquiridas.

De forma a conseguir avaliar e analisar da melhor forma a turma e as aulas por mim lecionadas, foram feitas algumas gravações de áudio e vídeo. Sendo que todas as aulas foram realizadas em grupos, foi atribuído a cada grupo de alunos um gravador de voz, ligado no início de cada aula e desligado apenas no final, sendo possível a captação da discussão entre pares, complementando os documentos escritos que eram recolhidos no final de cada aula. Estas gravações permitiram também ter a perceção da participação de cada um, das suas competências – muitas vezes não demonstradas em sala de aula–, e, acima de tudo, da relação entre os alunos do grupo, permitindo fazer alterações na sua constituição caso fosse necessário. As gravações de vídeo eram usualmente utilizadas aquando da discussão de resultados em turma, filmando o comportamento dos alunos na sua apresentação no quadro ou acompanhados pelo *emulator* no projetor. Neste trabalho, os diálogos dos alunos nos áudios e vídeos obtidos, são identificados segundo a sigla E#@ (estudante número # do grupo @, por exemplo, E2D).

Por fim, no questionário final (Anexo 3), também ele aplicado através da plataforma *Google Forms,* tentei fazer um levantamento, numa escala com "discordo totalmente", "discordo", "indiferente", concordo" e "concordo totalmente", acerca das suas perceções no estudo de funções reais de variável real, das tarefas propostas durantes esse mesmo capítulo e acerca da utilização da calculadora gráfica durante todo esse percurso. Foram também feitas perguntas de resposta aberta acerca da importância dada à calculadora gráfica no final desta experiência, das aprendizagens adquiridas, entre outras, repetindo-se as perguntas iniciais de três aspetos negativos e três positivos da calculadora gráfica como forma de comparação e perceção da evolução da turma sobre esse tópico. De notar que todas as respostas foram respondidas de forma anónima, não havendo qualquer forma de identificação dos alunos.

# CAPÍTULO 3
# INTERVENÇÃO

Este capítulo foi dividido em duas partes principais: a análise de três momentos da intervenção pedagógica e a avaliação do ensino ministrado. De forma a procurar responder às questões de investigação deste estudo, foram analisadas detalhadamente três das nove aulas lecionadas relacionadas com o estudo do tema de funções reais de variável real. No Quadro 1, são apresentadas todas as aulas dadas no decorrer da intervenção pedagógica, bem como os seus tópicos e objetivos.

**Quadro 1.** Síntese da intervenção pedagógica.

| Aula | Tópico(s) | Objetivo(s) |
|---|---|---|
| 1 | Funções Racionais | Definir funções racionais como o quociente entre funções polinomiais.<br>Estudar funções racionais. |
| 2 | Funções Racionais | Simplificação do quociente entre funções polinomiais. |
| 3 | Funções Racionais | Zeros de funções racionais.<br>Resolução de equações racionais. |
| 4 | Funções Irracionais | Reconhecer, interpretar e representar graficamente funções irracionais do tipo $f(x) = a\sqrt{x-b} + c$. |
| 5 | Funções Irracionais | Resolução de equações irracionais. |
| 6 | Funções Inversas | Caracterizar a função inversa de restrições bijetivas de funções quadráticas e cúbicas e relacionar os seus gráficos. |
| 7 | Funções Compostas | Caracterização de funções compostas. |
| 8 | Limites de funções reais de variável real quando $x$ tende para $\pm\infty$ | Interpretar situações e contextos variados que envolvam limites no infinito.<br>Definir o conceito intuitivo de assíntota. |
| 9 | Funções Racionais | Reconhecer, interpretar e representar graficamente funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, referindo o conceito intuitivo de assíntota e usá-las na resolução de problemas. |

Todas as aulas decorreram segundo planos de aula cuidadosamente elaborados em comunicação entre estagiária, professor orientador e professor supervisor, com o objetivo de atender aos objetivos de aprendizagem da turma e aos objetivos deste estudo.

## 3.1. Momentos de Intervenção Pedagógica

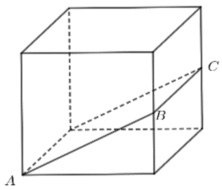
Nesta primeira secção são apresentadas e analisadas três das nove aulas lecionadas: funções irracionais (aula 4); limites de funções reais de variável real quando $x$ tende para $\pm\infty$ (aula 8); e funções racionais (aula 9). Nesta análise, serão tidos em conta os registos áudio e vídeo das interações de sala de aula – onde são consideradas as discussões entre grupos, operações na calculadora gráfica dos alunos e discussões em grupo turma – bem como documentos escritos pelos grupos, na sua atividade, na resolução de tarefas propostas. Os planos destas três aulas encontram-se nos Anexos 4, 5 e 6, respetivamente.

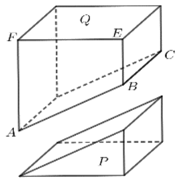
### 3.1.1. Funções Irracionais

O estudo de funções irracionais do tipo $f(x) = a\sqrt{x-b} + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, permite que alunos do 11.º ano de escolaridade sejam capazes de as reconhecer, interpretar e representar graficamente. Este tópico foi estudado em sala de aula com a organização dos alunos em torno de quatro grupos pré-definidos de 4 a 5 alunos, através da exploração de duas tarefas. De referir que dois dos estudantes da turma não estavam presentes devido a atividades de desporto escolar e um dos estudantes do grupo D participou na aula via *Zoom* segundo as regras sanitárias implementadas devido à Covid-19. Com a primeira tarefa os alunos foram desafiados a determinar as medidas do volume e da área associados a dois sólidos obtidos pelo corte de um cubo.

**Tarefa 1 – Corte no cubo**

A partir de um cubo foram construídas duas peças, $P$ e $Q$, através de um corte pelo plano $ABC$, em que os pontos $B$ e $C$ são pontos médios das arestas a que pertencem. Seja $l$ o comprimento da aresta do cubo.




1. Designa por $v$ o volume, em centímetros cúbicos, da peça $P$. Mostra que a aresta do cubo é dada em função de $v$ por uma função $f$ tal que: $f(v) = \sqrt[3]{4v}$.
2. Designa por $a$ a área, em centímetros quadrados, da face $[ABEF]$ da peça $Q$. Mostra que a aresta do cubo é dada em função de $a$ por uma função $g$ tal que: $g(a) = 2 \times \sqrt{\frac{a}{3}}$.
3. Recorrendo às funções $f$ e $g$, que definiste nas alíneas anteriores, e à tua calculadora gráfica, preenche a seguinte tabela, apresentando os resultados arredondados às centésimas:

| Volume da peça $P$ ($v$) | Aresta do cubo | Área da face $[ABEF]$ ($a$) |
|---|---|---|
| 12 | | |
| | | 16 |
| 35 | | |
| | | 40 |

4. Considera que a aresta do cubo tem 10 $cm$ de comprimento. Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, faz o esboço gráfico das funções $f$ e $g$ e determina, graficamente, os valores de $v$ e de $a$.

As duas primeiras questões tinham como objetivo dar a conhecer as funções irracionais, ainda sem o seu conceito estar definido. As questões 3 e 4 exigiam a utilização da calculadora gráfica, com o intuito de conseguir perceber que tipo de relações tinham os alunos já desenvolvido com esta ferramenta.

As respostas às questões 1 e 2 são consideradas: (i) corretas (C) se os alunos obtiveram a expressão das funções pedidas, utilizando devidamente as fórmulas da área e do volume; (ii) parcialmente corretas (PC) se os alunos conseguiram chegar às respostas corretas, mas cometeram algum erro em procedimentos intermédios; (iii) incorretas (I) se grande parte do que foi escrito está feito indevidamente; e (iv) não responde (NR) caso não seja dada qualquer resposta. Na Tabela 1 é indicada a frequência no que diz respeito ao tipo de resposta dada pelos alunos, organizados em grupo, às questões 1 e 2 da primeira tarefa.

**Tabela 1.** Frequência dos diferentes tipos de resposta às questões 1 e 2 da Tarefa 1 ($n = 4$).

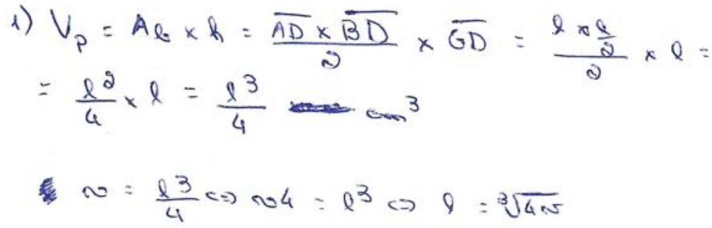
| | C | PC | I | NR |
|---|---|---|---|---|
| Questão 1 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| Questão 2 | 4 | 0 | 0 | 0 |

Na primeira questão, notou-se uma dificuldade inicial nos grupos que consistia em perceber que tipo de sólido era extraído após o corte no cubo, como é exemplificado no diálogo que se segue, ocorrido no grupo D:

E4D: Porque é que estão a dividir por 3 ali? (na fórmula do volume escrita na folha de rascunho)
E3D: Porque é [o volume] da pirâmide... Calma, isto não é uma pirâmide.
E2D: Pois, acho que é um prisma triangular.
E4D: Quadrangular!
Prof.: Há alguma dúvida para já?
E3D: Isto é um prisma triangular?
E2D: Um prisma tem duas bases. Por isso, isto é uma pirâmide.
Prof.: Pirâmide?
E3D: Não, não. É um prisma. Olha aqui (gesticula para o enunciado), estas duas [faces] são bases.
E2D: Pois é, pois é.
Prof.: Está é deitado, certo?
E3D: Sim, é um prisma triangular.
E2D: Ah, okay. Assim já dá.

Pelo menos dois grupos tiveram alguma dificuldade em aperceber-se de que a peça $P$ se tratava de um prisma triangular. A maior parte dos grupos apresentou uma resposta correta a esta questão, como exemplifica a resolução do grupo B (Figura 2).

**Figura 2.** Resposta correta do grupo B à questão 1 da Tarefa 1.

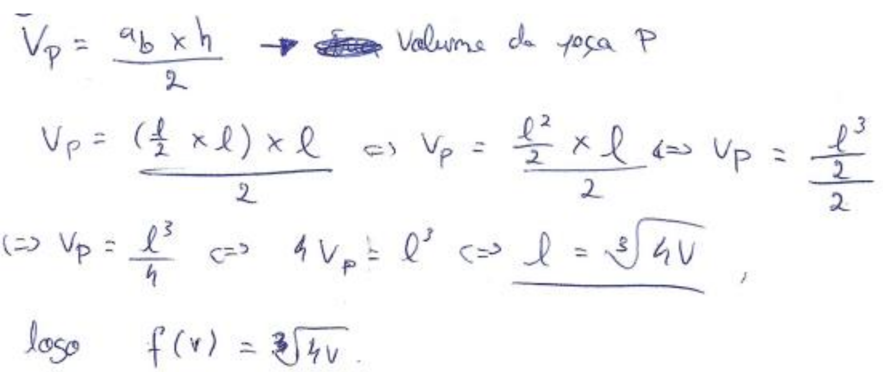

1) $V_p = A_b \times h = \frac{\overline{AD} \times \overline{BD}}{2} \times \overline{GD} = \frac{l \times \frac{l}{2}}{2} \times l =$

$= \frac{l^2}{4} \times l = \frac{l^3}{4}$ $cm^3$

$v = \frac{l^3}{4} \Leftrightarrow v4 = l^3 \Leftrightarrow l = \sqrt[3]{4v}$

Um outro grupo, grupo C, que, apesar de ter chegado ao resultado esperado, não aplicou devidamente a fórmula do volume do prisma, o que faz com que a sua resposta esteja parcialmente correta (Figura 3).

**Figura 3.** Resposta parcialmente correta do grupo C à questão 1 da Tarefa 1.


$V_p = \frac{a_b \times h}{2}$ → Volume da peça P

$V_p = \frac{(\frac{l}{2} \times l) \times l}{2} \Leftrightarrow V_p = \frac{\frac{l^2}{2} \times l}{2} \Leftrightarrow V_p = \frac{\frac{l^3}{2}}{2}$

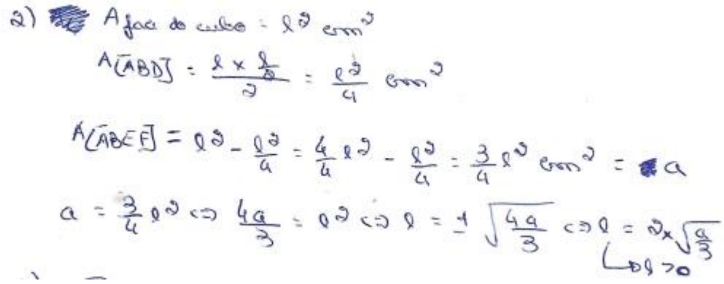
$\Leftrightarrow V_p = \frac{l^3}{4} \Leftrightarrow 4V_p = l^3 \Leftrightarrow l = \sqrt[3]{4V}$,

logo $f(v) = \sqrt[3]{4v}$.

O raciocínio do grupo C faria sentido se tivessem considerado um paralelepípedo com metade do volume do cubo e, portanto, com a mesma altura (aresta do cubo), comprimento (aresta do cubo) e largura (metade da aresta do cubo) que a peça $P$. Assim, a peça $P$ teria metade do volume desse paralelepípedo. No entanto, a partir dos áudios arrecadados da exploração entre grupos, consegui perceber que o grupo C, apesar de ter considerado corretamente a peça $P$ como um prisma triangular, utilizou uma fórmula inicial errada para obter o seu volume.

A resolução da questão 2 era em tudo semelhante à questão 1, sendo que a única diferença era obter a medida da aresta $l$ em função da área do trapézio $[ABEF]$. Todos os grupos responderam corretamente a esta questão, surgindo duas formas de resolução distintas. O grupo B calculou a área da face triangular da peça $P$ e subtraiu-a à área total da face (Figura 4).

**Figura 4.** Resposta correta do grupo B à questão 2 da Tarefa 1.


2) $A_{face\ do\ cubo} = l^2$ $cm^2$

$A_{[ABD]} = \frac{l \times \frac{l}{2}}{2} = \frac{l^2}{4}$ $cm^2$

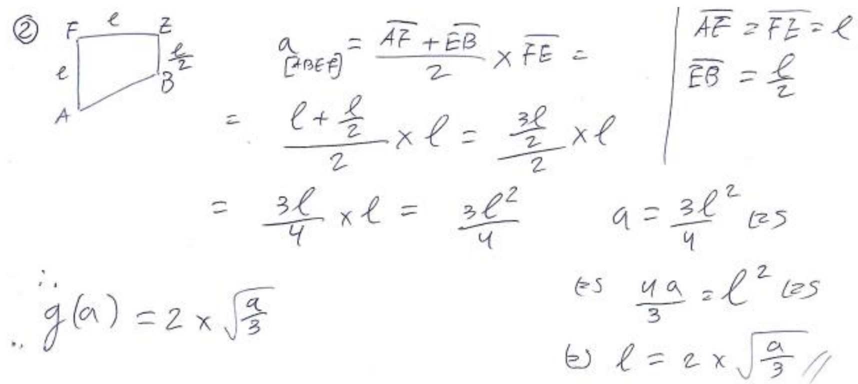
$A_{[ABEF]} = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{4}{4}l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3}{4}l^2$ $cm^2 = a$

$a = \frac{3}{4}l^2 \Leftrightarrow \frac{4a}{3} = l^2 \Leftrightarrow l = \pm\sqrt{\frac{4a}{3}} \Leftrightarrow l = 2 \times \sqrt{\frac{a}{3}}$

$l > 0$

Os restantes grupos responderam de forma idêntica à do grupo A (Figura 5), utilizando a fórmula da área do trapézio para calcular a área pedida e, seguidamente, determinaram a aresta em função dessa área $a$.

**Figura 5.** Resposta correta do grupo A à questão 2 da Tarefa 1.



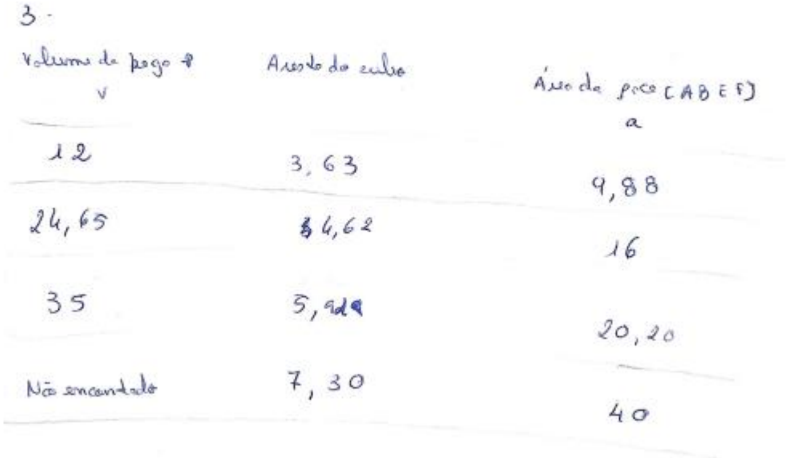

Nas questões seguintes, 3 e 4, era exigido aos alunos que utilizassem a calculadora gráfica na sua resolução, pondo em prática os seus esquemas instrumentais. A questão 3 passava por determinar imagens e objetos das funções $f$ e $g$. Na questão 4 pretendia-se que os alunos explorassem as representações gráficas das duas funções para determinar os valores que lhes daria a resposta correta. Nestas questões, as respostas são consideradas: (i) corretas (C) se, em 3, foram apresentados todos os valores corretos na tabela e, em 4, estiverem bem representadas as funções e todos os elementos necessários para a resposta; (ii) parcialmente corretas (PC) se, em 3, estiveram errados ou em falta dois ou menos valores e, em 4, se estiveram errados ou em falta alguns elementos necessários à resposta; (iii) incorretas (I) se, em 3, foram dados mais do que dois valores incorretos e, em 4, se não foi apresentado algum elemento de resposta correto. Caso as questões não contenham qualquer resposta, são classificadas com NR. Atente-se na seguinte tabela, onde são apresentadas as classificações dadas às respostas de cada grupo nas duas questões em análise (Tabela 2).

**Tabela 2.** Frequência dos diferentes tipos de respostas às questões 3 e 4 da Tarefa 1 ($n = 4$).

| | C | PC | I | NR |
|---|---|---|---|---|
| Questão 3 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| Questão 4 | 2 | 1 | 0 | 1 |

Na fase da exploração da calculadora gráfica notou-se, nas respostas dadas e nas interações entre os grupos, que em alguns alunos os esquemas de utilização da calculadora gráfica estavam numa fase inicial de desenvolvimento e ainda pouco evoluídos. Em alguns grupos percebe-se que o seu entendimento acerca das potencialidades e restrições da calculadora gráfica é limitada, como por exemplo, no grupo D que não conseguiu terminar o preenchimento da tabela devido a não encontrar o valor pretendido. Além disso, o valor 5,929 presente na sua tabela está errado, o que teve implicações na tradução da resposta deste grupo como estando parcialmente correta (Figura 6).

**Figura 6.** Resposta parcialmente correta do grupo D à questão 3 da Tarefa 1.



3.

| Volume do poço V | Aresta do cubo | Área da peça [ABEF] a |
|---|---|---|
| 12 | 3,63 | 9,88 |
| 24,65 | 4,62 | 16 |
| 35 | 5,929 | 20,20 |
| Não encontrado | 7,30 | 40 |

No diálogo entre o grupo, consegue perceber-se que os alunos conheciam os comandos da calculadora gráfica que lhes permitia obter tais valores, verificando-se que são processos que estão habituados a efetuar sem dificuldades (esquemas de uso). Mas, quando tentaram encontrar um certo valor e a calculadora gráfica lhes indicou que este não foi encontrado, assumiram isso como facto e não tentaram ultrapassar essa dificuldade, como é ilustrado no seguinte diálogo:

E2D: Como é que vocês estão a determinar os valores?
E4D: Então, pus a função [na calculadora gráfica] e fui buscar a aresta.
E2D: Mas tu com essa [função] não consegues os valores todos.
E4D: Pois não. Mas depois ponho a outra função e vou buscar os outros.
[...]
E4D: Então 'Y-Cal' quando $x$ é 12... 'Y-Cal' quando $x$ é 35...
[...]
E1D: Olha aqui! Esta não deu. Diz 'não encontrado'.
E4D: Pois é, dá erro.
E2D: Então deve ser daqueles valores que a função não admite.
E3D: Escreve 'não encontrado' então.

O grupo não foi capaz de perceber que o valor existe e que deveriam ter alterado a definição da janela de visualização da calculadora gráfica para valores de $x$ e $y$ grandes o suficiente de forma a abrangerem os valores pedidos. O mesmo problema continuou para o grupo na última questão, apesar de um dos estudantes sugerir uma alteração na janela de visualização:

E1D: Olha, na última pergunta também não dá.
E3D: Mete na janela [de visualização] o $y$ em 20.

E1D: A aresta é 10.

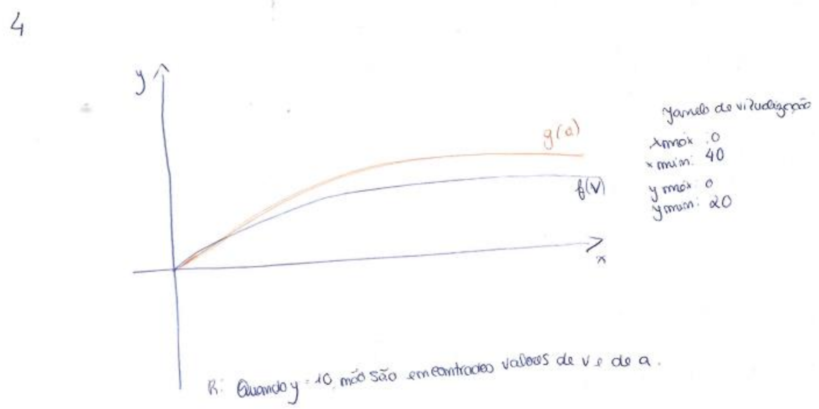
E3D: (E3D faz os cálculos manualmente) Olha, o $x$ tem de ser 75.

E4D: (E4D altera a janela de visualização, mas não refere para qual) Continua 'não encontrado'.

E1D: Olha, então desenhamos o gráfico e pomos 'não encontrado'.

O grupo D, apesar de não ter conseguido responder à questão devido a limitações do grupo em utilizar a calculadora gráfica, conseguiu representar parte dos gráficos das duas funções $f$ e $g$. Por este motivo, a sua resposta foi considerada parcialmente correta (Figura 7).

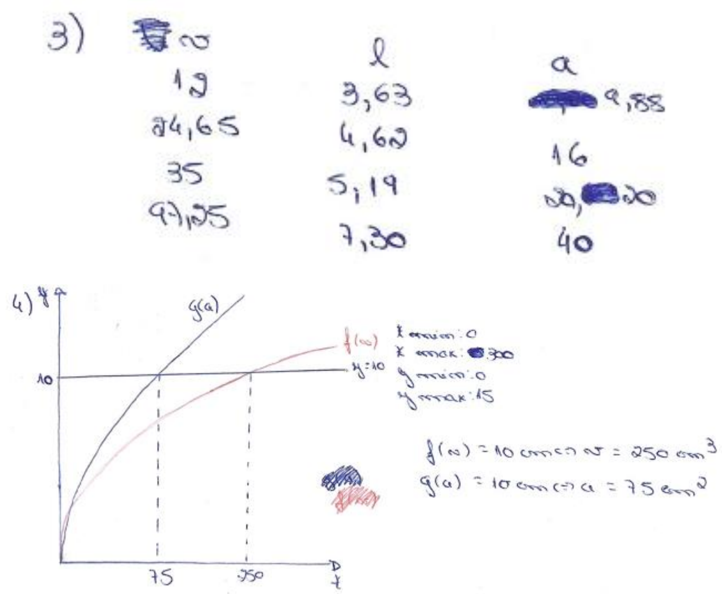
**Figura 7.** Resposta parcialmente correta do grupo D à questão 4 da Tarefa 1.




De notar que, ao reproduzir a resposta na folha, o grupo trocou os valores da janela de visualização. Onde se lê "$x$max: 0" e "$x$min: 40", deveria ler-se "$x$max: 40" e "$x$min: 0" e, semelhantemente, onde se lê "$y$max: 0" e "$y$min: 20", deveria ler-se "$y$max: 20" e "$y$min: 0".

Todavia, alguns grupos conseguiram chegar a respostas corretas, apesar de se depararem com as mesmas dificuldades, como evidencia o grupo B (Figura 8).

**Figura 8.** Respostas corretas do grupo B às questões 3 e 4 da Tarefa 1.



No preenchimento da tabela, na questão 3, alguns estudantes do grupo B mostraram que a construção do instrumento calculadora gráfica estava já em desenvolvimento, revelando serem críticos acerca do que iam obtendo na calculadora em relação ao que que lhes era pedido e ao contexto da tarefa:

E1B: Peguem nas calculadoras e metam as duas funções.
E2B: É só completar a tabela.
E1B: Temos de começar por... Espera, esta janela [de visualização] está muito pequena, vamos aumentar... ah, agora já dá.

Este diálogo é também um exemplo de que algumas expressões linguísticas utilizadas pelos alunos da turma (como "metam as duas funções") revelam-se demasiado banais, considerando o contexto matemático em que estão inseridos. Este exemplo, tal como um diálogo anterior, remete para uma perceção de que os estudantes não denotam o verdadeiro significado de alguns conceitos matemáticos (como função), dificultando o desenvolvimento de esquemas de utilização.

Um dos alunos começou o preenchimento da tabela através de substituições de valores na respetiva função ($f$ ou $g$), não utilizando a calculadora gráfica, contrariando o que era pedido pelo enunciado. Segue-se, então, o seguinte diálogo:

E2B: Mas porque é que estás a substituir?
E1B: Porque descobres os valores da aresta e depois tens de saber o outro.
E2B: Sim, mas podes ir pelo gráfico [da calculadora], com o 'X-Cal' e o 'Y-Cal'.
E1B: Pois, então põe 'Y-Cal' quando $x$ é 12, 'Y-Cal' quando $x$ é 35. (alteraram de função) 'Y-Cal' quando $x$ é 16.

Em grupo, estes alunos conseguiram desenvolver esquemas que lhes permitiram evoluir a interação instrumento-objeto. O grupo avançou então no preenchimento da tabela, mas acabou por deparar-se com outro dilema:

E2B: Olha, fora do domínio.
E1B: Não é fora do domínio. Faz [a área da face] para 40.
E4B: 'G-Solv', 'Y-Cal' quando $x$ é igual a 40. Dá 7,30.
E1B: Agora vamos para 'Y-Cal' para 4,62 (este valor foi obtido para a aresta através do valor da área)
E3B: [O volume] dá 2,64.
E1B: Não, não pode ser.
E4B: 'Y-Cal' na azul (representação gráfica da função $f$), não é?
E1B: Não, tu queres saber o $x$, portanto é o 'X-Cal'.

E1B: Agora o mesmo para 7,30.
E4B: Não dá nenhum valor.
E1B: Tens de mudar a janela.

Este diálogo ilustra a progressão do processo de instrumentação por se verificar um aparecimento e desenvolvimento de esquemas de utilização durante a atividade elaborada pelo grupo. O aluno E1B é crítico em relação ao que é obtido como resultado do trabalho na calculadora gráfica. As suas ações demonstram que este artefacto (calculadora gráfica) está integrado na atividade deste aluno, estando também em ação o processo de instrumentalização, visto que o conhecimento do aluno orienta a utilização do artefacto.

Neste último exemplo consegue perceber-se que, a mesma ação e num mesmo grupo, como aumentar a janela de visualização ou obter abcissas ou ordenadas de uma função inserida num determinado contexto são esquemas de uso para uns alunos (por exemplo, E1B) e esquemas de ação instrumentada para outros (por exemplo, E4B). A evolução dos esquemas de utilização neste grupo deu-se a velocidades distintas. As relações e interações entre os alunos, a atividade que estão a desenvolver e a calculadora gráfica aqui exemplificadas revelam que a génese instrumental em alguns dos alunos (por exemplo, dentro do grupo B) está mais desenvolvida do que em outros alunos da turma (por exemplo, do grupo D).

Terminado o tempo de exploração da Tarefa 1, deu-se início à discussão em turma sobre do trabalho que tinham desenvolvido. As duas primeiras questões foram discutidas muito rapidamente – visto que todos os grupos, à exceção de um, tinham conseguido resolver e perceber as questões. O tempo também contribuiu para o aceleramento da correção destas duas questões (cujas resoluções foram reproduzidas no quadro por dois alunos de dois dos grupos) por este se mostrar escasso em relação ao que tinha sido previsto.

Para início da discussão da questão 3, foi pedido a um dos alunos do grupo D (E5D) que explorasse o *emulator* que se encontrava projetado a partir do computador. Uma das razões deste pedido surgiu do facto de os alunos deste grupo não terem determinado alguns dos valores devido ao tamanho que consideraram para a janela de visualização. Tive como objetivo explorar esta dificuldade com a turma de forma que os alunos fossem capazes de evitar este erro no futuro e conhecessem uma das limitações da calculadora gráfica. O estudante E5D tinha dificuldades no controlo da calculadora gráfica que eu desconhecia. Começou por, distraidamente, abrir o menu 'Gráfico Dinâmico' ao invés do menu 'Gráfico'. Um dos alunos alertou-me para esse pormenor e foi resolvido o percalço. E5D teve algumas dificuldades em alterar a janela de visualização para os valores que foram escolhidos no seu grupo ($xmin$: 0; $xmax$: 40; $ymin$: 0; $ymax$: 20), mas conseguiu concluir este processo. Seguiu-se então o seguinte diálogo:

Prof.: Alguém usou outra janela [de visualização]?
E1A: Nós usamos uma janela enorme. Assim não tivemos de estar sempre a alterar.
Prof.: Okay, muito bem. (o esboço do gráfico aparece no projetor) Então, o que estamos a tentar saber na primeira linha da tabela? Temos apenas o $v$ com valor 12.
E1A: Basicamente são duas funções em que o $y$ é a aresta do cubo em ambos e o $x$ é o volume numa função e a área na outra.
Prof.: Okay… E então?
E1A: Então, como o $x$ é 12, vamos calcular o $y$.
Prof.: Certo. Então E5D, vamos calcular $y$ para $x$ igual a 12.
E1A: Na função a azul [função $f$], E5D.
(o procedimento é feito no emulator)
E1A: É isso, dá 3,6.
E1B: Não! Dá 3,63. É arredondado às centésimas.
Prof.: Exatamente! E como é que podemos saber a área da face?
E2A: Agora o 3,63 que descobrimos passa a ser o nosso $y$ e a área passa a ser o nosso $x$.
Prof.: Okay, e como fazemos isso E5D?

O aluno E5D faz a utilização correta dos comandos 'Y-Cal' e 'X-Cal', apesar de hesitar na sua execução e, aparentemente, não se sentir confiante com os resultados obtidos, mostrando que não está muito à vontade com a utilização da calculadora gráfica. Devido à escassez do tempo, vejo-me na obrigação de acelerar o processo de correção, o que fez com que as restantes linhas da tabela fossem corrigidas oralmente por elementos dos vários grupos. A última linha reservei para o grupo D.

Prof.: A este grupo [D], a última linha?
E2D: A nós não nos deu nada para o volume.
Prof.: Como assim?
E2D: Pusemos na calculadora e apareceu 'não encontrado'.
Prof.: (para a turma) Alguém conseguiu encontrar os valores?
E5A: Sim, deu 97,25.
Prof.: (para E2D) Vocês devem ter usado uma janela de visualização demasiado pequena e a calculadora não assumiu esse valor.

Seguiu-se então a correção da questão 4. Mais uma vez, devido à escassez do tempo, a exploração da calculadora gráfica nesta questão foi mais curta do que o que tinha planeado.

| | |
|---|---|
| Prof.: | A última questão, quem quer vir fazer ao quadro? |
| E1C: | Nós esta não tivemos tempo de fazer. |
| E2A: | Professora, eu posso ir? |
| Prof.: | Okay, vai lá. (para a turma) Qual era o objetivo da última questão? |
| E4D: | Determinar os valores do volume com aresta 10. |
| Prof.: | E a área, certo? E como é que fizeram isso? |
| E5A: | Nós fomos à calculadora e calculamos. |
| Prof.: | Okay, e que janela usaram? (a partir deste momento, tomo o controle do *emulator* e vou seguindo o que a turma me vai dizendo) |
| E5A: | O $x$ de 0 a 300 e o $y$ de 0 a 15. Depois fomos a 'G-Solv', 'Y-Cal', 10. E deu 250. |
| Prof.: | Deu isso a toda a gente? |
| E1B: | Precisamente esse valor. Até usamos a mesma janela e tudo. |
| Prof.: | E o outro valor, grupo A? (espero pela resposta) Isso mesmo, 75. |

Na discussão da primeira tarefa, tinha também como objetivo introduzir o conceito de função irracional. Por esquecimento, esse ponto da discussão foi feito durante a discussão da tarefa seguinte. A segunda tarefa foi, tal como a primeira, entregue em formato papel aos alunos e foram-lhes dados alguns minutos para lerem o seu enunciado.

**Tarefa 2 – Funções irracionais**

Considera a função real de variável real $f$, definida pela expressão $f(x) = \sqrt{x}$. Esta função é denominada por função irracional. Partindo da função $f$, estuda e interpreta gráfica e analiticamente, para $a, b, c \in \mathbb{R}$ e com $a \neq 0$, funções do tipo $g(x) = a\sqrt{x-b} + c$.

De forma a organizares os teus resultados, opta por apresentar as tuas conclusões, por exemplo, na forma de composição matemática ou tabela.

(sugestão: dá valores a cada um dos parâmetros $a$, $b$ e $c$, um de cada vez, para generalizares o estudo da função $g$ a partir da transformação da representação gráfica da função $f$)

Quando questionados acerca do objetivo da tarefa, ocorreu a seguinte interação:

| | |
|---|---|
| Prof.: | Então, qual é o objetivo da tarefa? |
| E1B: | Isto nunca mais acaba, é um exercício infinito… |
| E2D: | Ir alterando os parâmetros $a$, $b$ e $c$ e chegar a conclusões acerca da função $g$? |

Temos, nesta interação, duas reações distintas. Esta tarefa, ao contrário da primeira, tinha um carater mais exploratório e aberto, onde não era dito especificamente quais os elementos que teriam de ser apresentados pelos alunos. Por este motivo, alguns alunos previam dificuldades em chegar a quaisquer conclusões pois não lhes eram especificados os objetivos.

Como o final da aula se encontrava mais próximo do que o inicialmente imaginado, foram dados aos alunos 20 minutos para tirarem algumas conclusões acerca das funções ao invés dos 30 minutos que tinham sido previstos. Caso me mantivesse fiel ao tempo inicial, não teria a oportunidade de fazer uma exploração dos resultados com a turma nem uma sintetização dos conhecimentos, que era uma parte importantíssima desta aula.

Durante a exploração da tarefa, a turma teve alguma dificuldade em organizar a sua atividade no papel e em perceber que conclusões retirar – como se verá mais à frente –, talvez por o pedido feito na tarefa ser demasiado ambíguo para alguns grupos. Houve quem conseguisse chegar a alguns aspetos das funções em estudo, mas comentavam “se ainda temos 15 minutos [restantes para resolver a tarefa] é porque não é só isto” (E1A). Decorridos 10 minutos desde o início da atividade dos alunos, resolvi fornecer um quadro (Quadro 2) que pretendia preencher durante a discussão da tarefa, numa tentativa de conduzir o seu trabalho no sentido esperado.

**Quadro 2.** Quadro a preencher durante a discussão da Tarefa 2.

| Função | $f(x) = \sqrt{x}$ | $g(x) = a\sqrt{x-b} + c, (a > 0)$ | $g(x) = a\sqrt{x-b} + c, (a < 0)$ |
|---|---|---|---|
| Representação gráfica | | | |
| Domínio | | | |
| Contradomínio | | | |
| Concavidade | | | |
| Monotonia | | | |
| Extremos | | | |

Enquanto transcrevia o Quadro 2 no quadro da sala, um aluno questionou-me:

E1B: Professora, é suposto fazermos assim, como a professora está a escrever?

Prof.: Não, não é preciso. Durante a discussão vamos tentar preencher este quadro, portanto tentem ver se têm elementos suficientes para o preencher. Não há problema se escreverem características a mais na folha.

Concluído o trabalho em grupo, as resoluções entregues foram todas desenvolvidas de maneiras distintas. Por este motivo, e também por não ser especificado objetivamente que pontos se pretendiam obter com a atividade dos alunos, as resoluções não foram classificadas como corretas ou incorretas. Ao invés disso, farei uma pequena análise às resoluções de cada grupo, explorando algumas das suas características.

O grupo A optou por uma abordagem inicial às transformações ocorridas nas representações gráficas da função $g$, dependendo dos parâmetros $a, b$ e $c$, em função da representação gráfica da função $f$. Note-se que, nas suas interações, o grupo se refere a transformações ocorridas ao gráfico da função $f$ ao invés do gráfico da função $g$. O seguinte diálogo passa-se pouco depois do início da exploração do grupo à Tarefa 2, onde os alunos ainda não substituíram qualquer valor ou analisaram qualquer gráfico na calculadora gráfica:

E1A: O que eu estava a dizer era, o $a$ dilata na vertical, o $b$ move-a para a direita e o $c$ move-a para cima.

E4A: O $c$ desloca-a no eixo do $x$.

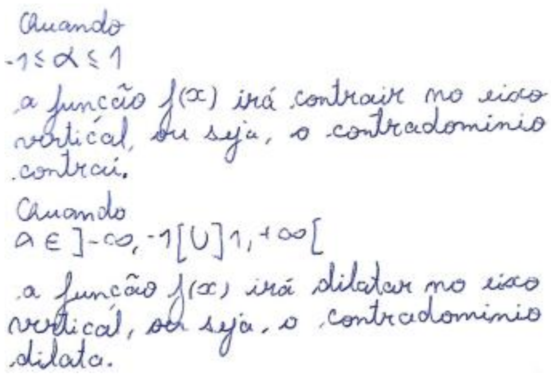
E1A: Não, não. O $b$ move-a para a direita porque é no eixo do $x$, o $a$ dilata na vertical porque é no eixo do $y$ e o $c$ move-a para cima porque é no eixo do $y$.

E2A: O $a$ dilata ou contrai, depende do valor.

E5A: Pronto, então é isso que temos de escrever.

Consegue perceber-se que o grupo se refere a translações, dilatações e contrações associados às representações gráficas da função $g$, dependendo de $a, b$ e $c$, apesar de não o fazerem de uma forma matematicamente correta. Além disso, referem-se a transformações associadas às funções e não associadas às suas representações gráficas. Mais uma vez se evidencia a utilização de expressões linguísticas menos formais nas interações entre alunos. Na sua folha de resposta, falam em contração do contradomínio (Figura 9).

**Figura 9.** Resolução do grupo A à Tarefa 2 (parte 1/2).



Quando
$-1 \leq \alpha \leq 1$
a funcão $f(x)$ irá contrair no eixo vertical, ou seja, o contradominio contraí.
Quando
$a \in \,]-\infty, -1[\, \cup \,]1, +\infty[$
a função $f(x)$ irá dilatar no eixo vertical, ou seja, o contradominio dilata.

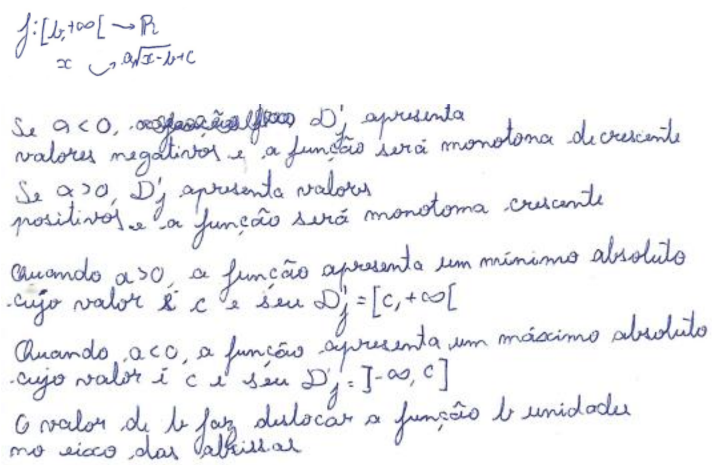
O grupo discutiu o papel que $b$ e $c$ têm nas transformações à representação gráfica de $g$ em relação à representação gráfica de $f$, chegando a verificar graficamente a importância de cada um, principalmente do $b$:

E4A: Olha aqui (aponta para a calculadora gráfica). Pus (substituiu) um $b$ positivo, o gráfico moveu-se para a direita e se for negativo, vai para a esquerda. Não faz sentido, costuma ser ao contrário. O $x$ engana nas translações, não é?

E5A: Pois é… Ah, não te esqueças que já tem ali o $-b$ (menos $b$). E, portanto, como aqui o sinal é negativo, quando o $b$ é negativo, desloca-se para a esquerda porque fica positivo aqui [a expressão fica $g(x) = \sqrt{x + b}$, com $a = 1$ e $c = 0$]. Quando o $b$ é negativo, acontece a mesma coisa.

Como resposta, o grupo não referiu as translações verticais associadas ao vetor $(0, c)$, mas concluiu o estudo da função pedida mencionando o seu domínio, a monotonia, o contradomínio, os extremos e as transformações horizontais associadas ao vetor $(b, 0)$ na representação gráfica de $g$ em função a $f$ – esta última de uma forma muito subtil (Figura 10).

**Figura 10.** Resolução do grupo A à Tarefa 2 (parte 2/2)



$f: [b, +\infty[ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto a\sqrt{x-b}+c$

Se $a<0$, $D'_f$ apresenta valores negativos e a função será monotona decrescente

Se $a>0$, $D'_f$ apresenta valores positivos e a função será monotoma crescente

Quando $a>0$, a função apresenta um mínimo absoluto cujo valor é $c$ e seu $D'_f = [c, +\infty[$

Quando $a<0$, a função apresenta um máximo absoluto cujo valor é $c$ e seu $D'_f = ]-\infty, c]$

O valor de $b$ faz deslocar a função $b$ unidades no eixo das abcissas

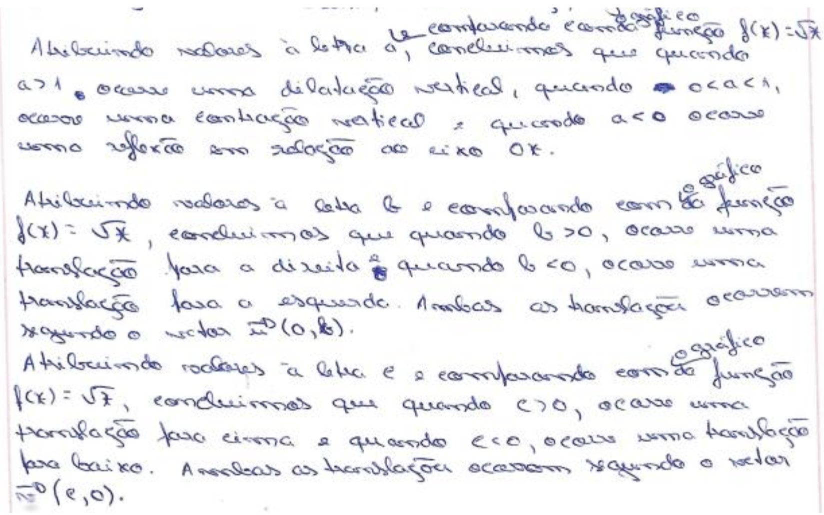
Comparativamente ao grupo A, o grupo B fez um trabalho de pesquisa na calculadora gráfica maior, mas não mais amplo. O grupo limitou-se a observar as transformações ocorridas na representação gráfica de $g$ relativamente à representação gráfica de $f$, alterando os parâmetros $a, b$ e $c$, visualizadas na calculadora gráfica, como pode ser verificado no diálogo seguinte:

E1B: Vamos ver para o $a$. (edita na calculadora gráfica a expressão analítica da função $g$ definida por $g(x) = a\sqrt{x}$). Quando o $a$ é 0,5 a curvatura é mais baixinha, se for 2 vai ser mais alta.

E2B: Põe a 'Window' (menu da calculadora gráfica que altera a janela de visualização de representações gráficas) de $-5$ a 5, tanto no $x$ como no $y$. (o grupo observa representações gráficas para diferentes valores de $a$, nomeadamente valores negativos) Okay, então, com o $a$ há movimento na curvatura.

Neste diálogo, estes dois alunos do grupo B mencionam a concavidade (que denominam de "curvatura"), porém não chegam a mencioná-la na sua folha de resposta. De facto, o grupo apenas se limitou a apresentar todas as transformações que ocorrem nas representações gráficas das funções (Figura 11), de uma forma mais completa do que o grupo A, mas deixando de fora o domínio, contradomínio, extremos e monotonia, apesar de terem tido conhecimento do quadro que se pretendia preencher.

Figura 11. Resolução do grupo B à Tarefa 2.



Atribuindo valores à letra a, e comparando com o gráfico da função $f(x)=\sqrt{x}$, concluímos que quando $a>1$, ocorre uma dilatação vertical, quando $0<a<1$, ocorre uma contração vertical e quando $a<0$ ocorre uma reflexão em relação ao eixo $Ox$.

Atribuindo valores à letra b e comparando com o gráfico da função $f(x)=\sqrt{x}$, concluímos que quando $b>0$, ocorre uma translação para a direita e quando $b<0$, ocorre uma translação para a esquerda. Ambas as translações ocorrem segundo o vetor $\vec{u}(0,b)$.

Atribuindo valores à letra c e comparando com o gráfico da função $f(x)=\sqrt{x}$, concluímos que quando $c>0$, ocorre uma translação para cima e quando $c<0$, ocorre uma translação para baixo. Ambas as translações ocorrem segundo o vetor $\vec{v}(c,0)$.

De salientar que, mais uma vez, se observa no grupo B que alguns alunos conseguem integrar a calculadora gráfica na sua atividade sem grandes dificuldades, como, por exemplo, através de esquemas de uso (como a manipulação da janela de visualização) retirar conclusões essenciais para o estudo em causa.

Neste grupo, tal como no grupo A, há algumas incoerências linguísticas na sua resposta relativa às transformações. Como pode ser verificado na Figura 11, os alunos deste grupo consideraram a contração vertical da representação gráfica de $g$ relativamente à função $f$ para valores de $a$ entre 0 e 1, quando deveria ter sido considerada para valores de $a$ entre $-1$ e 1. Mais, a dilatação vertical referida acontece também para valores de $a$ menores que $-1$, o que também faltou referir. Além disto, os vetores associados às translações vertical e horizontal têm as suas coordenadas com a ordem trocada. Onde se lê "vetor $\vec{u}(0,b)$" deveria ler-se "vetor $\vec{u}(b,0)$" e onde se lê "vetor $\vec{v}(c,0)$", deveria ler-se "vetor $\vec{u}(0,c)$". No geral, a atividade desenvolvida neste grupo foi satisfatória, podendo o grupo ter-se esforçado por proceder ao registo na folha de resposta de mais algumas das outras características que encontraram. As folhas de rascunho do grupo B contam com várias anotações acerca de diversos aspetos de funções irracionais do tipo $g(x)=a\sqrt{x-b}+c$, mas, grande parte delas não são mencionadas na folha de resposta.

Por sua vez, o grupo C consegue referir todas as características que foram apresentadas no quadro, mas fá-lo de uma forma superficial. No entanto, foi o único grupo a aludir à concavidade ainda sem terem visto o quadro. Após atribuírem vários valores para $a$, $b$ e $c$ – que transcreveram para a sua folha de resposta (Figura 12) –, ocorre no grupo o seguinte diálogo:

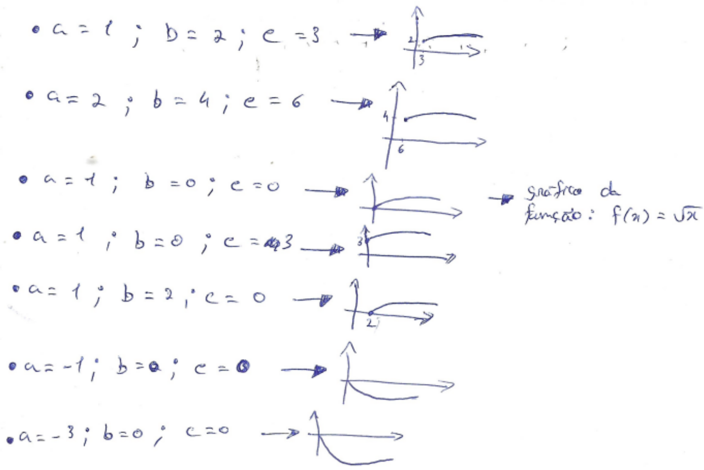
E1C: Ora, o $a$ altera a concavidade. Concavidade...? Professora, podemos chamar concavidade?

Prof.: Podem e devem.

E2C: Okay, obrigado. Então é isso mesmo. Altera a concavidade. Quando o $a$ é positivo, [a representação gráfica da função] tem concavidade voltada para cima.

E4C: Não, tem concavidade voltada para baixo.

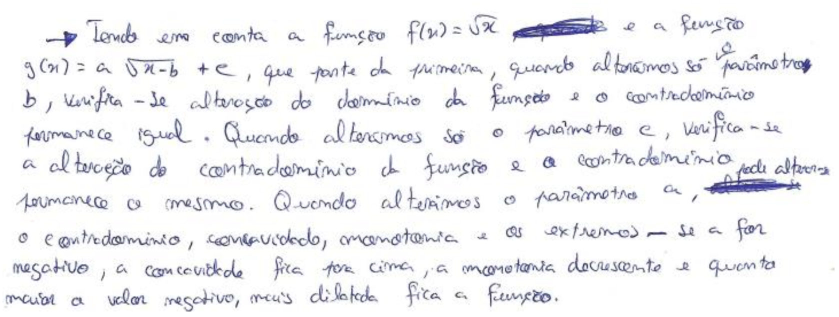
**Figura 12.** Resolução do grupo C à Tarefa 2 (parte 1/2).




Como se constata no diálogo acima apresentado, a interação instrumento-objeto desenvolvida pelos alunos é essencial para perceberem a relação entre o parâmetro $a$ e as transformações associadas à representação gráfica de $g$, apesar de, inicialmente, não decidirem se a concavidade seria voltada para cima ou para baixo.

Apesar da quantidade de exemplos explorados no grupo C, as suas conclusões foram desenvolvidas de uma forma demasiado vaga (Figura 13).

**Figura 13.** Resolução do grupo C à Tarefa 2 (parte 2/2).


→ Tendo em conta a função f(x) = √x e a função g(x) = a √(x-b) + c, que parte da primeira, quando alteramos só o parâmetro b, verifica-se alteração do domínio da função e o contradomínio permanece igual. Quando alteramos só o parâmetro c, verifica-se a alteração do contradomínio da função e o contradomínio pode alterar permanece o mesmo. Quando alterarmos o parâmetro a, o contradomínio, concavidade, monotonia e os extremos — se a for negativo, a concavidade fica para cima, a monotonia decrescente e quanto maior o valor negativo, mais dilatada fica a função.

Os alunos referem que o domínio e o contradomínio se alteram para diferentes valores nos parâmetros $b$ e $c$, respetivamente, mas não explicam de que forma é que estas características são influenciadas pelos dois parâmetros. Mais, falam da alteração da concavidade, da monotonia ou dos extremos sem nunca especificarem que tipo de alteração ocorre. Todas estas alterações referidas no texto de resposta do grupo C não são, como já foi referido, específicas. Isto mostra que o grupo teve alguma dificuldade na fase de sintetização. Acerca do parâmetro $c$, escrevem "o contradomínio permanece o mesmo" quando é o domínio que permanece igual. Este erro indicia dever-se a distração ou da pressão pelo tempo disponível para a exploração da Tarefa 2 estar a terminar.

A abordagem inicial do grupo D foi a de dividir tarefas pelos elementos do grupo, isto é, cada um seria responsável por estudar uma característica acerca das funções pedidas. Ora, esta estratégia não correu como o grupo esperava e, tal como o grupo C, o desenvolvimento das suas conclusões carece de pormenores importantes.

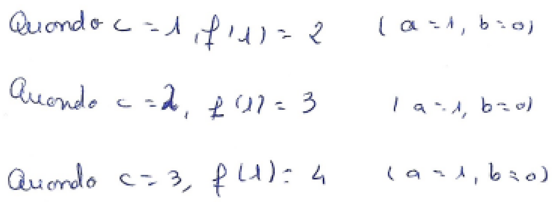
As primeiras tentativas do grupo D passaram por dar valores aos parâmetros $a$, $b$ e $c$. Mas, apesar de tentarem perceber o que acontece à representação gráfica da função – como parece ser objetivo do grupo no diálogo apresentado de seguida –, o grupo anota na sua folha de resposta o valor da função com abcissa 1 para diferentes valores de $c$ (Figura 14).

E4D: Vamos ver na calculadora [gráfica]. Tenta dar valores ao $a$, $b$ e $c$, por exemplo 3, 4 e 5. E depois vamos alterando o $a$, por exemplo.

E2D: Vamos substituindo um de cada vez?

E4D: Sim, se calhar é melhor.

**Figura 14.** Resolução do grupo D à Tarefa 2 (parte 1/3)


Quando $c = 1$, $f(1) = 2$ $(a = 1, b = 0)$

Quando $c = 2$, $f(1) = 3$ $(a = 1, b = 0)$

Quando $c = 3$, $f(1) = 4$ $(a = 1, b = 0)$

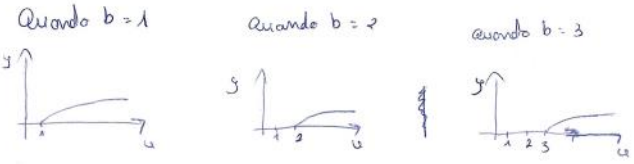
Pelos diálogos entre o grupo, percebe-se que os estudantes não conseguem retirar quaisquer conclusões acerca da função em estudo depois dos esforços mostrados na Figura 14. Só após a interação apresentada de seguida, é que o grupo decide analisar as representações gráficas na calculadora gráfica e esboçar algumas dessas na folha para diferentes valores do parâmetro $b$ (Figura 15).

E1D: Vamos ver na calculadora [gráfica] o que é que o [parâmetro] $a$ faz ao gráfico da função [o estudante pretende referir-se à representação gráfica da função $g$, para diferentes valores de $a$]. (E avança nesse estudo sozinho).

E2D: Olha aqui, olha aqui. A [representação gráfica da] função [g] vai andando para a frente. Mas como é que mostramos isto?

E1D: Desenhamos os gráficos, se calhar é o melhor.

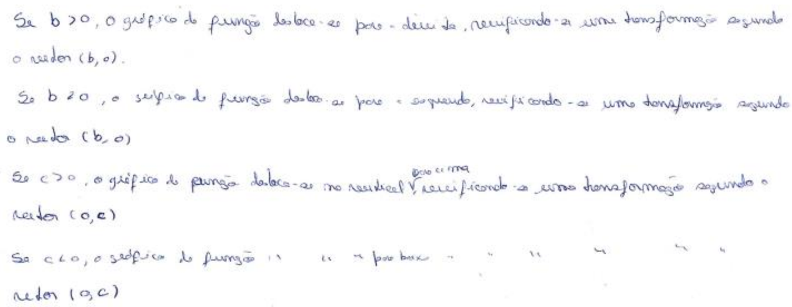
**Figura 15.** Resolução do grupo D à Tarefa 2 (parte 2/3).




No caso do grupo D, há uma maior manipulação da calculadora gráfica por parte de alguns elementos. Em algumas situações (como a ocorrida no diálogo anterior) se percebe que as interações sujeito-instrumento e instrumento-objeto ocorridas estão bastante presentes, o que contribui, não só para um melhor desenvolvimento das relações dos alunos com a calculadora gráfica como também uma melhor progressão da atividade do grupo.

As suas conclusões em relação ao parâmetro $a$ são em tudo semelhantes às do grupo B, incluindo as mesmas gralhas. No que aos parâmetros $b$ e $c$ diz respeito, o grupo D define bem os vetores das translações, mas refere-se a "transformação" ao invés de "translação" (Figura 16).

**Figura 16.** Resolução do grupo D à Tarefa 2 (parte 3/3)


Se b > 0, o gráfico da função desloca-se para a direita, verificando-se uma transformação segundo o vetor (b, 0).

Se b < 0, o gráfico da função desloca-se para a esquerda, verificando-se uma transformação segundo o vetor (b, 0)

Se c > 0, o gráfico da função desloca-se na vertical para cima, verificando-se uma transformação segundo o vetor (0, c)

Se c < 0, o gráfico da função " " para baixo " " " " " " vetor (0, c)

Na discussão da segunda tarefa foi necessário fazer referência aos pontos que me esqueci de referir na primeira discussão, como a introdução do conceito de função irracional. Desta forma, a discussão, que se iniciou a cerca de sete minutos do final da aula, foi introduzida com os seguintes diálogos:

Prof.: Como é que acham que chamamos a funções como a função $f$ e $g$ e as funções que obtiveram na tarefa do cubo? (...) Vocês conhecem as funções racionais, as polinomiais, as trigonométricas... Como acham que denominamos estas?
E2D: Funções irracionais.
Prof.: Porque é que dizes isso?
E2D: Porque é o título da segunda tarefa.
Prof.: Ah, certo. E então porque é que acham que se denominam funções irracionais?
E4A: Porque não podem ser escritas como divisão de polinómios?
Prof.: Okay. Além disso, não conseguem identificar nada que as possa identificar?
E1C: É um número irracional.

Prof.: Hm... então, concordamos que esta função é irracional? (escrevo $f(x) = \sqrt{x}$ no quadro)

Turma: Sim.

Prof.: E esta? (escrevo $h(x) = \sqrt{3}x$ no quadro)

E1B: Não.

Prof.: Porquê? Não tem um número irracional?

E3B: Não é [uma função] irracional? Eu acho que é.

Prof.: Pois, isso é o que eu estou a perguntar. (...) Então, a função $f$ é irracional. A $g$ [definida por $g(x) = a\sqrt{x-b} + c$] que estudaram também é irracional, já tínhamos concluído isso. E a $h$? É irracional? Tem um número irracional.

E5A: Parece, mas é diferente das outras.

E4A: O $x$ tem de estar dentro da raiz para ser irracional.

Prof.: Exatamente. A variável tem de estar dentro do radical para considerarmos a função como irracional. Neste caso, as funções irracionais que vamos estudar este ano são deste tipo (aponto para a função $g$).

A discussão foi então conduzida no sentido de correção do que tinham feito e tendo como objetivo principal o preenchimento da tabela. Foi pedido a E1B que acompanhasse a exploração das representações gráficas no *emulator* durante a discussão. Este aluno foi escolhido por ter já demonstrado em situações anteriores (tanto nesta aula como em aulas passadas) uma manipulação consistente, coerente e confortável da calculadora gráfica, bem como mostrado possuir esquemas de utilização que, neste caso, iriam contribuir para uma melhor e mais completa exploração da calculadora gráfica para a turma. O quadro foi preenchido com informações que iam sendo dadas pelos alunos.

Prof.: Então, o que podemos dizer em relação à concavidade? Não existe concavidade?

E1B: Há concavidade! É voltada para baixo.

E2D: Não, é para cima. (responde ao mesmo tempo que E1B)

Prof.: A concavidade é voltada para baixo, okay? Olhem lá para o projetor.

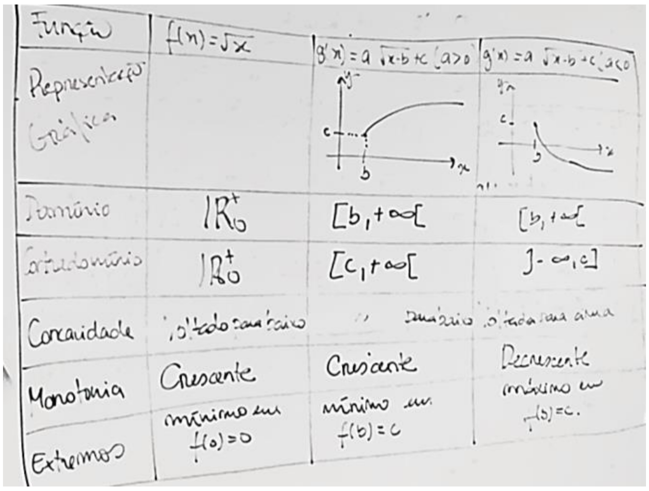
E1B: Pois, porque ela [a representação gráfica da função $f$] está assim (gesticula a concavidade da função). Parece um prato virado ao contrário.

Prof.: Exatamente. Já agora, quando é que a representação tem a concavidade para cima?

E1C: Quando o parâmetro $a$ for negativo. (segue-se um exemplo feito no emulator)

A exploração do *emulator* e da calculadora gráfica durante o resto da discussão foi praticamente nula pelo simples facto de o tempo de aula estar no final. O quadro foi acabado de preencher, ficando como síntese da aula (Figura 17)

**Figura 17.** Quadro preenchido durante a discussão da Tarefa 2.




Numa reflexão feita no final da aula, consegui perceber que a discussão da primeira tarefa não foi muito bem conseguida. No entanto, tanto numa discussão como na outra, gostaria de ter feito uma maior exploração do *emulator* em turma. A escolha da segunda tarefa foi feita com o objetivo de promover o trabalho autónomo e a exploração da calculadora gráfica. Creio que o facto de não ter especificado qual os pontos a serem estudados confundiu alguns alunos, visto que não tinham realizado nada semelhante anteriormente. Porém, com a exposição do quadro, os grupos viram-se mais orientados. A discussão da segunda tarefa correu melhor e consegui perceber que maior parte dos alunos entenderam qual o conceito de função irracional e algumas das suas propriedades com a formalização no preenchimento do quadro.

A exploração da calculadora gráfica durante a resolução das tarefas entre grupos foi satisfatória. Os áudios possibilitaram-me perceber processos e o tipo de esquemas que eram utilizados pelos alunos em determinadas situações. Além disso, permitiram entender onde é que os alunos tinham mais dificuldades em relação à manipulação da calculadora gráfica bem como em relação ao que às funções irracionais dizia respeito. Além disso, percebeu-se que há uma preocupação em assinalar a janela de visualização na folha de resposta como forma de complementar o seu raciocínio.

Nesta aula houve uma maior recorrência de episódios onde a presença de esquemas de uso é maior do que os de esquemas de ação instrumentada – quando foi possível fazer tal distinção. No entanto, consegue perceber-se que houve uma evolução, até mesmo de uma tarefa para a outra, contribuindo para a evolução da génese instrumental.

### 3.1.2. Limites de funções reais de variável real quando $x$ tende para $\pm\infty$

A utilização da calculadora gráfica na resolução de problemas envolvendo limites no infinito, recorrendo a situações variadas é um dos objetivos de aprendizagem do 11.º ano de escolaridade. Nesta aula, foram apresentadas duas tarefas cuja finalidade se centrava na utilização e interpretação de limites no infinito em variados contextos e na introdução do conceito intuitivo de assíntota a um gráfico de uma função. A turma foi divida em cinco grupos de quatro alunos cada, onde um dos alunos do grupo D se encontrava a acompanhar a aula via *Zoom* segundo as regras sanitárias implementadas devido à Covid-19. A primeira tarefa, entregue em suporte papel, visava aludir ao tema em desenvolvimento na altura da aula, as funções racionais e aos limites no infinito, numa relação entre animais de duas espécies num mesmo ecossistema.

**Tarefa 1 – Crias das espécies A e B**

Em 2009, num certo ecossistema foram colocadas crias das espécies de animais $A$ e $B$.

Admite que, $t$ anos após o início do ano 2009, o número de animais, em milhares, da espécie $A$ é dado aproximadamente por $A(t) = \frac{11t+6}{t+1}, (t \geq 0)$, e que o número de animais, em milhares, da espécie $B$ é dado, aproximadamente, por $B(t) = \frac{t+9}{t+3}, (t \geq 0)$.

1. Sabe-se que, desde o início do ano 2009 até ao início do ano 2010 morreram 500 animais da espécie $A$. Determina quantos animais dessa espécie nasceram nesse intervalo de tempo.
2. Calcula, por um método analítico, gráfico e tabelar, os limites seguintes: $\lim_{t \to +\infty} A(t)$ e $\lim_{t \to +\infty} B(t)$ e interpreta o resultado no contexto do problema.
3. A diferença entre o número de animais da espécie $A$ e o número de animais da espécie $B$ vai aumentando, com o decorrer do tempo, e tende para um certo valor. Determina esse valor, justificando.

Na introdução da Tarefa 1, após todos os grupos terem analisado o seu enunciado, li-o para a turma em voz alta. A escolha deste método deveu-se ao facto de me ter apercebido, em aulas anteriores, de que, quando pedia a algum dos alunos para lerem o enunciado em voz alta, os restantes grupos não estavam atentos ao que era dito ou questionado. Desta forma, consegui que alguns pontos fossem realçados durante a leitura do enunciado. Em relação à primeira questão, avisei os alunos de que, apesar de não estar explícito no enunciado, interpretassem que as crias colocadas no ecossistema em 2009, tinham também nascido nesse ano, o que, a meu ver, iria facilitar a compreensão da questão 1. A primeira questão exigia, por isso, que os alunos fizessem uma interpretação cuidada da informação que lhes era dada. A segunda questão foi essencialmente pensada para mostrar aos alunos diferentes formas de resolver limites de funções, neste caso, no infinito, e desenvolvessem diferentes esquemas em relação à utilização da calculadora gráfica. Sobre esta questão, os alunos foram informados de que, para o método tabelar pedido, poderiam utilizar o menu 'Tabela' da calculadora gráfica, mas que eu iria auxiliar nesse procedimento em cada um dos grupos. A terceira e última questão desta tarefa, além da interpretação do seu contexto, exigia que os alunos procedessem à diferença de limites das funções no infinito, o que constituiu mais um conceito abordado nesta aula.

As respostas às três questões são consideradas: (i) corretas (C) se foram apresentados resultados corretos e justificados a cada uma das questões; (ii) parcialmente corretas (PC) se, nas resoluções das questões foi cometido algum erro ou se a resolução carece de justificações; (iii) incorretas (I) se grande parte do que foi escrito está feito indevidamente. Caso não tenha sido apresentada qualquer resposta, são classificadas com NR. Na Tabela 3 é apresentada a classificação atribuída a cada resposta de cada grupo às três questões da primeira tarefa.

**Tabela 3.** Frequência dos diferentes tipos de respostas às questões da Tarefa 1 ($n = 5$).

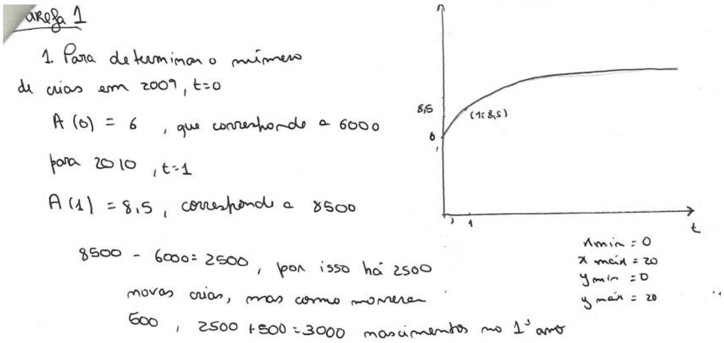
| | C | PC | I | NR |
|---|---|---|---|---|
| Questão 1 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| Questão 2 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| Questão 3 | 3 | 2 | 0 | 0 |

A primeira questão criou uma pequena controvérsia em todos os grupos. Uma vez que referi inicialmente que as crias colocadas em 2009 no ecossistema nasceram também em 2009, surgiram duas resoluções cujos raciocínios e resultados são distintos, mas que considerei ambas corretas devido à ambiguidade do enunciado e à forma como cada um dos raciocínios foi explicado na discussão coletiva entre tarefas. Quando desenvolvi o enunciado, pretendia que se considerassem as crias que nasceram no ecossistema. O facto de não ter referido o ecossistema na questão, fez com que alguns grupos considerassem apenas os animais que nasceram em 2009 dentro do ecossistema e a que outros grupos assumissem os animais, em 2009, que nasceram dentro ou fora do ecossistema. A resolução que eu tinha previsto foi desenvolvida por dois dos cinco grupos, ao considerarem apenas os animais da espécie A que nasceram dentro do ecossistema. Note-se o diálogo dentro do grupo B:

E1B: Então $x$ igual a 0 e $x$ igual a 1. $A(0)$ é 6 e $A(1)$ é 8,5. 8,5? Ah, é em milhares.
E3B: Então, as crias [da espécie A] em 2009 era 6000 e em 2010 eram 8500.
E1B: Ou seja, teve de aumentar 2500, não é? Nasceram 2500, mas morreram 500?
E2B: Pois, morreram, portanto...
E1B: Se aumentaram 2500 crias, mas morreram 500, é como se tivessem nascido 3000. Por isso é que temos de somar 500 aos 2500.
E2B: Pois, faz sentido.

Ao pressuporem que os nascimentos a que se referia o enunciado ocorriam dentro do ecossistema, o grupo B, calculou o número de animais nascidos no ecossistema e somou-lhes o número de animais que morreram nesse intervalo de tempo. O mesmo raciocínio foi feito no grupo A (Figura 18).

**Figura 18.** Resposta correta do grupo A à questão 1 da Tarefa 1.


Tarefa 1

1 Para determinar o número de crias em 2009, t=0

A (0) = 6 , que corresponde a 6000

para 2010 , t=1

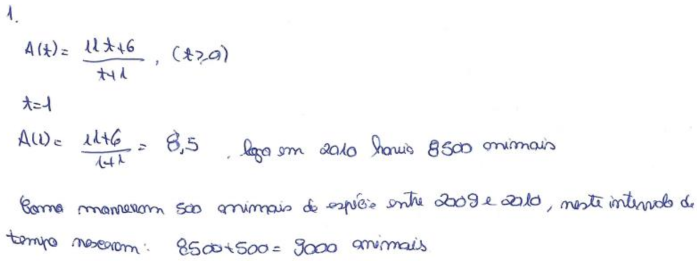
A (1) = 8,5 , corresponde a 8500

8500 - 6000 = 2500 , por isso há 2500 novas crias, mas como morreram 500 , 2500 + 500 = 3000 nascimentos no 1º ano



Este grupo utilizou um esboço da representação gráfica da função $A$ para suportar a sua explicação, assinalando os pontos relevantes à questão. O facto de o grupo ter considerado o esboço, obtido a partir de esquemas de utilização na calculadora gráfica por um dos elementos do grupo, relevante para a sua resposta, evidencia a interação objeto-sujeito mediada pelo instrumento. A segunda forma de resolução foi apresentada pelos restantes grupos, onde os alunos, após eu ter referido que as crias colocadas no ecossistema em 2009 tinham também nascido nesse ano, assumiram-nas também como nascimentos ocorridos no ano de 2009 (Figura 19).

**Figura 19.** Resposta correta do grupo E à questão 1 da Tarefa 1.


1.

$A(t) = \frac{11t+6}{t+1}$ , $(t \geq 0)$

$t=1$

$A(1) = \frac{11+6}{1+1} = 8,5$ . logo em 2010 havia 8500 animais

Como morreram 500 animais da espécie entre 2009 e 2010, neste intervalo de tempo nasceram: 8500+500 = 9000 animais

O raciocínio foi considerado correto uma vez que não é especificado, no enunciado da questão, onde ocorrem estes nascimentos. Este método foi justificado pelos alunos da seguinte forma:

E1C: Então, em 2010 havia 8500 animais [da espécie A].

E3C: Mas morreram 500.

E2C: O que pede são os que nascem.

E3C: Sim, mas se fossem só os que estás a dizer, não tínhamos estes 500 aqui no enunciado.

E1C: Olhem, se não tivessem morrido os 500 [animais da espécie A], tínhamos agora mais 500 do que o que temos. Ou seja, aos que sobreviveram até 2010, os 8500, temos de somar os 500 que, entretanto, morreram.

E2C: Ou seja, nasceram 9000?

E3C: Sim, é isso.

Os três grupos que seguiram este método, não só consideraram os 2500 nascimentos ocorridos dentro ecossistema e as 500 mortes, como também as 6000 crias colocadas no ecossistema no início de 2009, o que faz sentido, visto que referi que estes animais nasceram também em 2009.

Com o início da questão 2, as dúvidas acerca da utilização da tabela como método de justificação e cálculo de limites de funções começaram a surgir. A turma ainda não tinha utilizado nenhum método, além do analítico, para o cálculo de limites de funções, portanto, os métodos tabelar e gráfico eram ainda uma incógnita. Desta forma, durante a exploração da questão 2, deu-se a descoberta, por parte dos alunos, do menu 'Tabela' da calculadora gráfica:

E1D: Como é que se faz o método tabelar?
E2D: Não sei.
E4D: Tem uma tabela no [menu] 'Recursão' que usamos uma vez nas sucessões.
E1D: Olha aqui, este [menu] diz 'Tabela'. Se calhar é aqui.

Durante toda a exploração da questão 2, o meu papel foi, em grande parte do tempo, de auxílio à utilização do menu 'Tabela' da calculadora gráfica, apesar de alguns grupos conseguirem descodificar rapidamente os processos necessários à sua utilização, como é exemplo o grupo B.

E1B: (depois de escrever as expressões das duas funções no menu 'Tabela') Olhem aqui, na tabela [da função $A$] vê-se os valores de $y$ que se vão aproximando cada vez mais do 11, só que nunca chegando ao 11. E nesta [tabela correspondente à função $B$] vai diminuindo sempre até chegar a valores muito próximos de 1. Professora, pode vir aqui?
Prof.: Então, qual é a dúvida?
E3B: É isto que temos de ter? (aponta para a calculadora gráfica de E1B)
Prof.: Sim, basicamente. Mas podiam ter valores melhores para provar o limite das funções (o grupo tinha valores para $x$ apenas até 5). Podem alterar o intervalo na tabela para um domínio maior. Vejam a opção 'SET' que têm aí.
E1B: Okay, obrigado. (saio do grupo) Hm, deixem-me ver. (começa a fazer várias tentativas na opção 'SET') Okay, já sei! No [na opção] 'SET' definimos o domínio que queremos em 'START' e 'END'. Como querem?
E2B: Mete [o domínio] de 1 a 1000, sei lá.
E1B: Okay, está feito. Agora, o 'STEP' é de quanto em quanto queremos os valores na tabela, tipo de 5 em 5, de 10 em 10, de 20 em 20…
E3B: Mete de 20 em 20.

Neste diálogo se percebe que alguns elementos do grupo B tinham já desenvolvidos esquemas de uso que lhes possibilitaram perceber mais rapidamente as funcionalidades da calculadora gráfica referentes ao menu 'Tabela', desenvolvendo novos esquemas. Isto é, partindo de esquemas já adquiridos até de outras funcionalidades, os alunos foram capazes de fortalecer, aprimorar e gerar novos esquemas. Estes novos esquemas, esquemas de ação instrumentada, permitiram ao grupo, posteriormente, avançar mais facilmente para as conclusões acerca do método tabelar em limites de funções. Também outros grupos, como o grupo C, conseguiram desenvolver esquemas que lhes permitiram justificar os limites das duas funções no infinito de forma tabelar, chegando a esclarecer, entre alunos do mesmo grupo, as conclusões resultantes deste método.

E2C: Podem explicar-me esta tabela? (tabela referente a valores da função $A$)

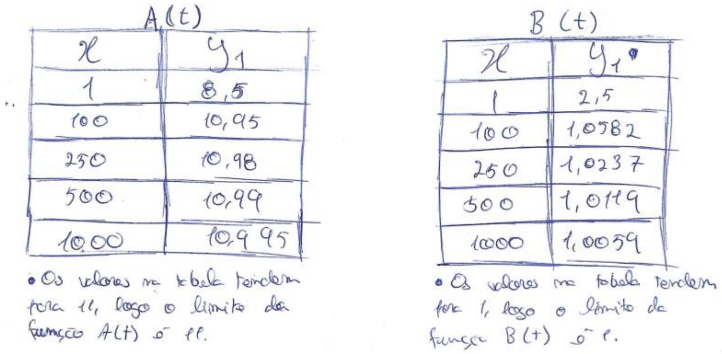
E1C: Olha aqui, tens um $x$ e um $y$. Para cada valor de $x$ dá-te o $y$ desta função [$A$]. E isto (os valores da função), como se vai aproximando de $11$, o limite é esse.

E2C: Ah, mas este [função $A$] aproxima-se de $11$ por baixo e o $B$ aproxima-se de $1$ por cima.

E1C: Sim, mas para a tabela, basta dizeres $11$ e $1$.

Pode dizer-se que é bastante curioso que o aluno E2C tenha utilizado expressões como "aproxima-se por baixo" e "aproxima-se por cima" na análise das tabelas. Estes termos, associados às assíntotas de gráficos de funções, viriam a ser bastante relevantes na resolução gráfica da questão. O grupo C apresenta, então, uma resolução considerada correta para o método tabelar (Figura 20).

**Figura 20.** Resposta correta do grupo C à questão 2 da Tarefa 1 (método tabelar).


A(t)

| x | $y_1$ |
|---|---|
| 1 | 8,5 |
| 100 | 10,95 |
| 250 | 10,98 |
| 500 | 10,99 |
| 1000 | 10,995 |

• Os valores na tabela tendem para 11, logo o limite da função A(t) é 11.

B(t)

| x | $y_1$ |
|---|---|
| 1 | 2,5 |
| 100 | 1,0582 |
| 250 | 1,0237 |
| 500 | 1,0119 |
| 1000 | 1,0059 |

• Os valores na tabela tendem para 1, logo o limite da função B(t) é 1.

Um dos objetivos da aula era introduzir o conceito de assíntota ao gráfico de uma função. Mesmo sem saberem ainda o que era ou qual a sua representação gráfica, muitos alunos chegavam a referir alguns pontos importantes para o seu conceito, como o caso do grupo C no diálogo anterior, ou o diálogo que se segue do grupo B, desta vez em relação ao método gráfico de resolução:

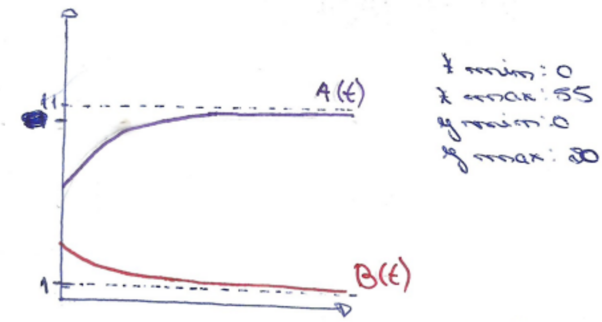
E1B: (trabalha na calculadora gráfica) Reparem, se nós desenharmos [na calculadora gráfica a representação gráfica da função definida por] $y = 11$ e fizermos a interseção de $A$ com $y = 11$, não nos vai dar nenhum ponto. Isto prova que o valor da função nunca vai ser $11$.

E4B: Pois, mas vai se afastando...

E1B: Não, vai aproximar-se! Faz aqui [na folha de resposta] uma reta tracejada com $y = 11$ e $y = 1$ para dizer que os [representações] gráficos [das funções] não lhes tocam.

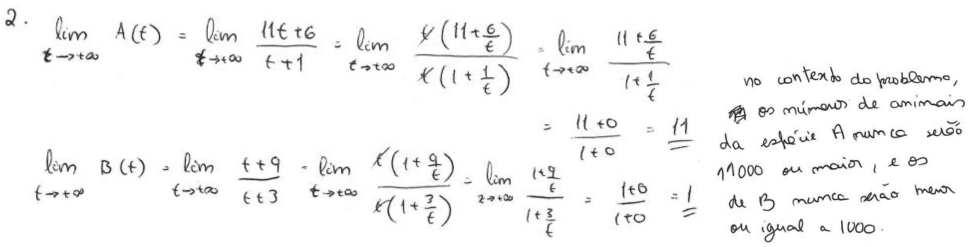
Apresentam, então, uma resposta correta cujo esboço das representações gráficas das funções $A$ e $B$ contam com as devidas assíntotas, ainda sem saberem como estas se denominam ou o que representam (Figura 21).

**Figura 21.** Resposta correta do grupo B à questão 2 da Tarefa 1 (método gráfico).




O método analítico foi o primeiro a ser feito em todos os grupos. Apesar de ainda não terem aprendido o cálculo de limites de funções no infinito, aplicaram os conhecimentos que tinham acerca dos limites de sucessões e, todos os grupos, conseguiram chegar a uma resposta correta, como é exemplo o grupo A (Figura 22).

**Figura 22.** Resposta correta do grupo A à questão 2 da Tarefa 1 (método analítico).




A questão 3 foi resolvida sem grande estranheza. Os alunos de todos os grupos foram capazes de responder corretamente, apesar de alguns grupos não terem feito a interpretação da questão, como era pedido pelo enunciado, obtendo, assim, algumas resoluções consideradas corretas e outras parcialmente corretas. Como resposta correta há o exemplo do grupo C que, com a ajuda da calculadora gráfica, interpretou graficamente o limite da diferença entre as duas funções:

E1C: Na [questão] 2, à medida que os anos vão passando os animais vai ser quase 1000 na espécie B e 11000 da espécie A.

E3C: Isto [o limite da diferença entre as duas funções] aqui tende para 10.

E1C: Pois, mas como é que provas?

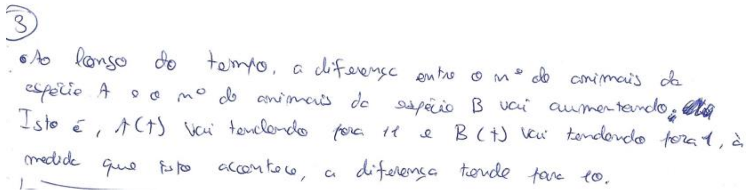
E3C: Fiz o [esboço do] gráfico da diferença das funções e vai [tende] para 10. E está sempre a aumentar (refere-se à função ser crescente) sem nunca chegar a 10.

E1C: A diferença entre eles?

E3C: Sim, a diferença aumenta.

Este diálogo, tal como o anterior do grupo C, demonstra que o grupo consegue, espontaneamente, utilizar a calculadora gráfica e enquadrá-la na sua atividade, pondo em prática esquemas de ação instrumentada e fazendo evoluir os processos de instrumentação e instrumentalização. Apesar de todo este raciocínio, não apresentam na folha qualquer esboço de gráfico. Ainda assim, apresentam uma resposta correta (Figura 23).

**Figura 23.** Resposta correta do grupo C à questão 3 da Tarefa 1.



3

• Ao longo do tempo, a diferença entre o nº de animais da espécie A e o nº de animais da espécie B vai aumentando. Isto é, A(t) vai tendendo para 11 e B(t) vai tendendo para 1, à medida que isto acontece, a diferença tende para 10.

Tal como o grupo C, os elementos do grupo B resolveram fazer uma exploração gráfica entre o grupo, de forma a tentar perceber qual a resposta à questão 3:

E1B: Okay, então, pergunta 3. (...) A função diferença é esta (escreve $A(t) - B(t)$). [...] Parece-me que vai tender para 10. Deixa ver se se interseta com o 10 (o aluno procede a perceber se a representação gráfica da função diferença $A(t) - B(t)$ se interseta com a representação gráfica de $y = 10$)

E3B: E então?

E1B: Não se intersetam, por isso tende para 10.

E2B: Mas porquê para 10?

E1B: Pois, no contexto...

E3B: 10 é 11 menos 1.

E1B: Exato! O limite da função $[A(t) - B(t)]$ é a diferença entre os limites [das funções].

O grupo B é bastante perspicaz no que ao cálculo de limites diz respeito. As conclusões que retiram em relação à diferença de limites deve-se ao facto de terem associado os limites de sucessões com os limites de funções no infinito. Com a ajuda da calculadora gráfica conseguem, rapidamente, identificar o valor do limite da função $A(t) - B(t)$. A resposta apresentada pelo grupo (Figura 24) foi considerada parcialmente correta pelo facto de os alunos não apresentarem qualquer interpretação do resultado na sua folha de resposta.

**Figura 24.** Resposta parcialmente correta do grupo B à questão 3 da Tarefa 1.

3) $\lim\limits_{t\to+\infty}(A(t)-B(t)) = \lim\limits_{t\to+\infty}A(t) - \lim\limits_{t\to+\infty}B(t) = 11-1=10$

Apesar de terem explorado o limite instrumentalmente, e por provavelmente considerarem mais correto o método algébrico, acabam por não apresentar quaisquer representações gráficas na sua resposta. Também o grupo A apresentou uma resposta parcialmente correta (Figura 25), parecida à que foi apresentada pelo grupo B, contudo procedeu à diferença dos limites das funções ao invés do limite da diferença das funções.

**Figura 25.** Resposta parcialmente correta do grupo A à questão 3 da Tarefa 1.

3 $\lim\limits_{t\to+\infty}A(t) - \lim\limits_{t\to+\infty}B(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{11t+6}{t+1} - \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t+9}{t+3} = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{\cancel{t}(11+\frac{6}{t})}{\cancel{t}(1+\frac{1}{t})} - \lim\limits_{t\to\infty}\frac{\cancel{t}(1+\frac{9}{t})}{\cancel{t}(1+\frac{3}{t})}$

$= \frac{11+0}{1+0} - \frac{1+0}{1+0} = 11-1$

$= 10$

Após o tempo disponível para a exploração da primeira tarefa terminar, iniciou-se a discussão coletiva acerca da sua resolução. Assim como já referira, a primeira questão gerou duas resoluções completamente distintas e essas duas versões foram discutidas entre os alunos da turma.

E2D: O $A(1)$ é 8500. Como morreram 500, ficam 8000 animais da espécie A. (o aluno explicou mal o raciocínio do grupo, no entanto, respondeu corretamente à questão)

Prof.: Toda a gente concorda?

E1B: Não.

Prof.: Então explica lá.

E1B: O E1D disse tudo bem até à parte em que subtraiu os 500 animais. Na minha perspetiva, temos de adicionar os 500 animais.

Prof.: Ou seja...?

E1B: Ficam, portanto, 9000.

E2A: Não, são 3000.

E1B: Ah, sim, Nasceram 3000. Porque passou de 6000 para 8500. Ou seja, sabemos que, de um ano para o outro, o número da espécie [A] aumentou 2500. Como sabemos que morreram 500, para terem 8500, eram preciso terem nascido 3000.

E2D: Faz sentido.

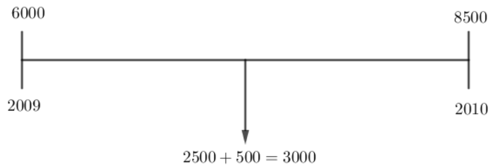
E1E: Mas os 6000 também contam no intervalo de tempo. As crias também contam. Então são 9000

E1B: Não sei se contam. Se contarem, faz sentido.

E1C: Contam. É do início de 2009 até ao início de 2010.

Dado este diálogo, e visto que alguns grupos tinham tomado caminhos dos quais não tinha pensado, esbocei um pequeno esquema (Figura 26) de forma a tentar perceber o raciocínio dos alunos.

**Figura 26.** Representação equivalente ao esboço feito no quadro, auxiliar à questão 1 da Tarefa 1.




A discussão continua então da seguinte forma:

Prof.: Deixem ver se percebo. (desenho um esquema semelhante ao da figura 26) 6000 nasceram em 2009 e, entretanto, nasceram mais 3000...

E1B: A professora no início disse 'se são crias é porque acabaram de nascer'.

E1C: A professora disse isso sobre 2009. Portanto o $t = 0$ dá-nos 6000 animais nascidos em 2009. Foram colocados lá, mas nasceram também em 2009.

E1E: Aqui diz 'em 2009 foram colocadas crias', ou seja, nasceram em 2009. Então as 6000 crias têm de contar.

De facto, o que os alunos me diziam parecia fazer-me sentido, conseguindo convencer-me com as suas explicações. No entanto, como esclareci anteriormente, decidi aceitar as duas resoluções pelo simples facto de o enunciado não ser completamente claro. O facto de ter dado instruções oralmente, que poderiam não ter sido percebidas por todos os alunos, pode ter sido um dos fatores para que as resoluções fossem tão distintas. Avançamos assim a discussão para a questão 2. Inicialmente, a turma foi questionada acerca do resultado dos limites por método analítico. Esta resolução não foi apresentada no quadro uma vez que é a forma que usualmente trabalham os limites. Para a apresentação da resolução desta questão por método tabelar e gráfico, foram escolhidos os grupos C e A, respetivamente. Ficou ao critério de cada grupo escolher quem iria apresentar as conclusões com recurso ao *emulator*.

Prof.: Então, explica lá o que concluíram com a tabela.

E1C: Portanto, o nosso $Y1$ é a função $A$ e o $Y2$ é a função $B$. Aqui, à medida que o $x$ vai aumentando, o nosso $y$ do $A(t)$ vai tendendo para 11 e à medida que o $x$ vai aumentando, o $B(t)$ vai tender para 1.

Prof.: Okay, certo. Agora, que relações encontraram entre a forma analítica e a tabelar? [...] Qual é que percebeste melhor, no contexto do problema?

E1C: As duas. Calcular o limite analiticamente ajudou para que ver que os valores é que o $y$ vai tender à medida que aumenta o $x$. E aqui é igual. Quanto maior o $x$, mais próximo de 11 está o $y$. Se aqui [em $x$] metesse 100000, o $y$ ia estar ainda mais próximo de 11, sem nunca atingir.

Durante a sua exposição, além de ter exemplificado o processo a ser feito através da calculadora gráfica à turma de forma esclarecedora, E1C foi capaz de explicar de forma instrutiva o raciocínio do grupo C à turma no que às tabelas diz respeito. Com o último diálogo, consegue também perceber-se que E1C desenvolveu esquemas de ação instrumentada que lhe permitem alterar a situação que estudou para cenários semelhantes. Seguiu-se a vez do grupo A apresentar o método gráfico à turma.

Prof.: No caso das representações [gráficas] das funções, o que é que podem dizer?

E1A: Como nós vimos, eles (os limites) aproximam-se dos valores, mas nunca chegam lá. Aqui vemos que a azul (representação gráfica de $A$ na calculadora gráfica) tende para 11 e a vermelha (representação gráfica de $B$ na calculadora gráfica) tende para 1.

Prof.: Certo, no contexto do problema, o que é que isso significa?

E1A: Significa que a evolução da espécie... Ela nunca chega àquele número porque também vão morrendo e nascendo animais.

Prof.: Okay. Alguém do grupo quer completar?

E4A: Basicamente, significa que quando os anos passarem, o número de animais da espécie A nunca vai chegar ou ultrapassar os 11000 e as da B nunca vão ser menores ou iguais a 1000.

Prof.: Certíssimo. Já agora, vocês na vossa folha de resposta desenharam mais alguma coisa além daquelas duas representações, certo? O quê?

E4A: Duas retas. $y = 11$ e $y = 1$.

Prof.: E1A, importas-te de desenhar aí na calculadora gráfica?

E1A: Eu não sei se sei fazer isso.

Prof.: Vá, eu ajudo. É só escreveres as [equações das] duas funções $y = 11$ e $y = 1$. Já agora, consegues colocá-las a tracejado?

Como tínhamos trabalhado com este tipo de mudanças em aulas anteriores, E1A sabia proceder a esta alteração. A turma foi então questionada se mais alguém tinha procedido ao esboço daquelas duas retas. Grande parte dos grupos responderam que sim. Usei o facto de terem representado as duas retas para introduzir o conceito de assíntota ao gráfico de uma função. Foram então questionados sobre a razão de tal escolha.

E4A: Porque, por mais que aumentássemos a janela [de visualização] do $x$, as retas nunca se iam intersetar as outras funções.

Prof.: Okay. E as duas retas vieram como consequência de quê?

E2C: Do limite.

Prof.: Do limite das funções com $t$ a tender para $+\infty$. Como este grupo [A] estava a dizer, a função $A$ nunca ia chegar a 11 e a $B$ nunca ia chegar a 1 e então desenhamos estas retas (aponto para as assíntotas aos gráficos das funções projetadas pelo emulator) como auxílio para interpretar graficamente os limites das funções quando $t$ tende para $+\infty$. Estas retas chamamos assíntotas horizontais ao gráfico da função. As equações destas retas podem ser definidas a partir dos limites das funções no infinito, tanto quando tendem para $+\infty$ como para $-\infty$.

Com esta explicação, esperava que fosse feito uso do termo 'assíntota ao gráfico' por parte dos alunos na segunda tarefa. Por fim, deu-se a discussão da última questão. Esta pergunta, e apesar de não ser um dos objetivos da aula, estava enunciada de forma a incitar os alunos a aplicarem propriedades do cálculo algébrico de limites. Ainda que alguns grupos tenham recorrido à calculadora gráfica para a resolução da última questão, todos os grupos transcreveram a sua resolução algébrica para a folha de resposta. Para a discussão da questão 3, os grupos A e B foram questionados acerca das suas resoluções.

Prof.: A última questão. Neste grupo [B].
E3B: Fizemos o limite de $A$ menos $B$, quando $t$ tende para $+\infty$. Deu 10.
Prof.: Ou seja, isto? (Escrevo no quadro '$\lim_{t\to\infty}\big(A(t)-B(t)\big)$') Okay, e vocês? (dirijo-me ao grupo A)
E2A: Nós fizemos o limite de $A$ menos o limite de $B$, quando $t$ tende para $+\infty$. E também deu 10. (procedo a escrever no quadro '$\lim_{t\to\infty} A(t) - \lim_{t\to\infty} B(t)$')
E1C: Mas é a mesma coisa. O limite da soma é a soma dos limites.
Prof.: Exatamente. Caso os dois limites existam, o limite da soma é a soma dos limites, e por isso é que E1C estava a dizer que era a mesma coisa. Já agora, alguém analisou graficamente ou tabelarmente?
E3C: Nós pusemos a diferença das expressões algébricas [no menu 'Gráfico'] e percebemos que o limite tendia para 10.

Após este comentário, tomo posse do *emulator* e executo os processos referidos por E3C, desenhando a assíntota horizontal $y = 10$, de forma a exemplificar o que tinha sido referido anteriormente.

A exposição dos diferentes métodos de resolução no *emulator*, facilitou a perceção dos alunos nas relações entre os métodos analítico, tabelar e gráfico, como poderá ser verificado em algumas resoluções da segunda tarefa. Além disso, o facto de alguns alunos expressarem os seus raciocínios em voz alta para a turma, permitiu, não só que fortalecessem os esquemas de ação instrumentada que tinham sido desenvolvidos nos diferentes processos de resolução durante a exploração da tarefa, como também fazer com que outros elementos da turma ficassem a conhecer variações da sua própria atividade, como a definição dos limites, máximo e mínimo, dos valores de $x$ na tabela da calculadora gráfica.

Um dos objetivos da segunda tarefa, passava por tentar perceber que conceitos e esquemas foram adquiridos pelos alunos da turma na primeira parte da aula. Além disso, pretendia-se o desenvolvimento da interpretação de contextos e a utilização de limites de funções no infinito nesses contextos. O seu enunciado foi entregue em suporte papel.

**Tarefa 2 – Salto em altura**

O Filipe, um atleta que está a iniciar a sua carreira em salto em altura, arranjou um treinador para o ajudar. Este, depois de lhe fazer alguns exames físicos, disse-lhe que a altura a que conseguiria saltar se seguisse cuidadosamente o seu novo método de treino, evoluiria de acordo com a seguinte função $a(t) = \frac{2450t+43967}{1000t+37260}$, em que $a$ é a altura em metros que consegue atingir após $t$ semanas desde o início dos treinos.

1. Que altura, arredondada às centésimas, consegue saltar o Filipe quando inicia os treinos?
2. O grande objetivo do Filipe é bater o recorde nacional de 2,28 metros. Justifica se será possível o Filipe alcançar o seu objetivo e, em caso afirmativo, determina quando é que isso ocorrerá. Apresenta o teu resultado em anos e semanas arredondado às unidades.
3. A maior evolução da altura do salto do Filipe dá-se da primeira para a décima semana ou da septuagésima para a centésima semana?
4. O recorde do mundo está nos 2,45 metros. Será que o Filipe conseguirá atingir e/ou ultrapassar este valor? Justifica, representando o(s) gráfico(s), tabelas e/ou cálculos analíticos que te ajudem na tua resposta.

Na introdução da segunda tarefa não surgiu qualquer dúvida por parte dos alunos. As três primeiras questões tinham como finalidade perceber que métodos de resolução (analítico, gráfico ou tabelar) seriam utilizados pelos alunos em cenários semelhantes, mas em diferentes contextos. A última questão, além de tentar perceber qual seria o método utilizado, tencionava constatar se conceitos como 'assíntota' já seriam utilizados no discurso dos alunos. Assim, as respostas são consideradas: (i) corretas (C) se foram apresentados os valores pedidos devidamente justificados, com palavras, cálculos ou esquemas; (ii) parcialmente corretas (PC) se foram apresentados valores sem qualquer justificação ou haja algum erro na resolução apresentada; (iii) incorretos (I) se não for apresentado qualquer elemento de resposta correto; e (iv) não responde (NR) caso não tenha sido dada qualquer resposta. A tabela seguinte apresenta as classificações dadas às respostas de cada grupo nas questões da segunda tarefa (Tabela 4).

**Tabela 4.** Frequência dos diferentes tipos de respostas às questões da Tarefa 2 ($n = 5$).

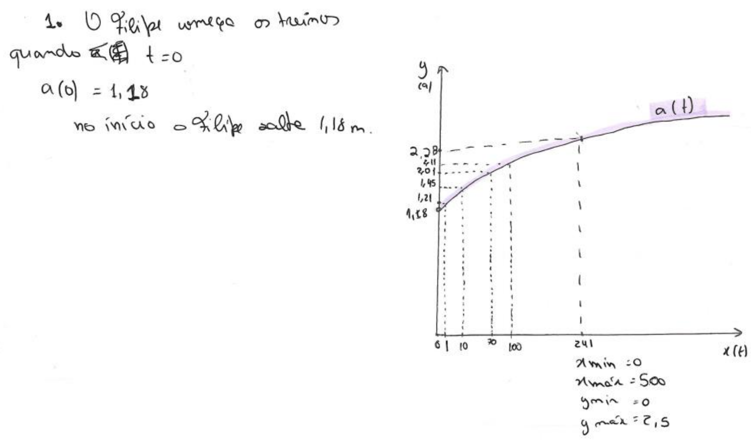
| | C | PC | I | NR |
|---|---|---|---|---|
| Questão 1 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| Questão 2 | 0 | 5 | 0 | 0 |
| Questão 3 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| Questão 4 | 5 | 0 | 0 | 0 |

Há medida que ia circulando pela sala e interagindo com alguns dos grupos, consegui perceber que não havia dúvidas em relação à primeira questão. Todos os grupos apresentaram uma resposta correta utilizando, essencialmente, dois métodos de resolução. Os grupos A e C utilizaram o menu 'Gráfico' da calculadora gráfica de forma a obter o valor da função $a$ na abcissa 0, revelando uma maior conexão com a calculadora gráfica do que os restantes grupos. Os alunos destes grupos revelam a posse de esquemas de uso, pela facilidade que executaram certos procedimentos, como é possível testemunhar no raciocínio de um elemento do grupo C:

> E1C: Primeira questão… (procede a escrever a expressão da função $a$ no menu 'Gráfico' da calculadora gráfica) Então, 'G-Solv', 'Y-Cal' para $x$ igual a 0. Dá 1,18 metros.

O esquema da representação gráfica utilizado na resposta, considerada correta, do grupo A (Figura 27) seria mais tarde reutilizado pelo grupo para algumas das questões seguintes, e por isso é que apresenta mais informações do que as pedidas na primeira questão.

**Figura 27.** Resposta correta do grupo A à questão 1 da Tarefa 2 (resolução gráfica).




A janela de visualização das representações utilizadas é recorrentemente assinalada pelos alunos de vários grupos nas suas folhas de resposta (como são exemplos as figuras 7, 8, 18, 21 e 27), demonstrando uma preocupação dos estudantes em justificar e complementar o seu trabalho. No que diz respeito à questão em causa, os restantes grupos fizeram uso do método analítico, procedendo à substituição de $x$ por 0, como é o caso do grupo D (Figura 28).

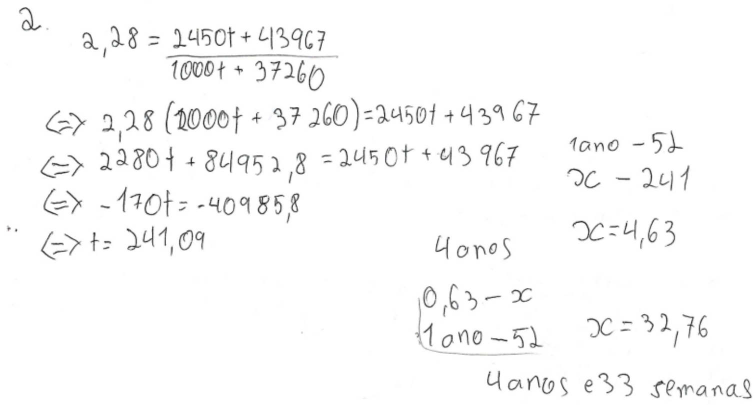
**Figura 28.** Resposta correta do grupo D à questão 1 da Tarefa 2 (resolução analítica).

1-

$$a(0) = \frac{2450 \times 0 + 43967}{1000 \times 0 + 37260} = 1,18 \text{ m}$$

A segunda questão conta com um único tipo de resolução escrita, com a utilização do método analítico, executada em todos os grupos (Figura 29).

**Figura 29.** Resposta parcialmente correta do grupo E à questão 2 da Tarefa 2.




Todas as resoluções foram consideradas parcialmente corretas pelo facto de nenhum dos grupos ter mencionado o domínio da função $a$, o que lhes iria permitir realizar o primeiro passo da resolução apresentada. Sendo as funções racionais o tema em destaque na altura desta aula, este erro é considerado bastante relevante.

Apesar de apenas apresentarem uma resposta analítica, semelhante à do grupo E, os elementos do grupo C discutem e encontram o valor pedido através de procedimentos executados na calculadora gráfica.

E2C: Nesta [questão] é só meter [a expressão da função] igual a 2,28, não é?

E1C: Sim. Vou fazer aqui [na calculadora gráfica]. 'X-Cal' para $y$ igual a 2,28. Olha, não dá. Diz 'não encontrado'. Tenho de mudar a 'Window' (janela de visualização). O $t$ são as semanas, não é?

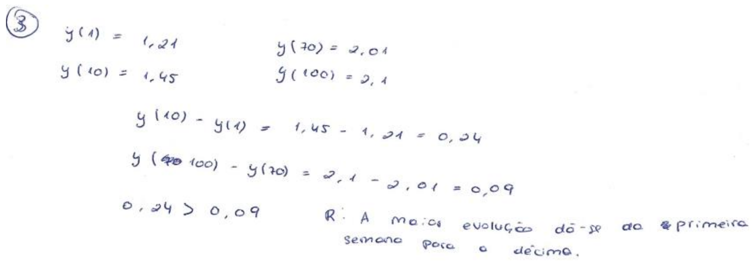
E3C: Deu-me 241 semanas. (o aluno resolveu analiticamente)

E1C: Ui, ele demora assim tanto? Então vou pôr a janela [de visualização] até 250. [...] Olha, já deu. É isso.

Perceber-se que as relações e interações instrumento-objeto nos grupos têm uma evolução crescente em relação à aula apresentada anteriormente, como é exemplo este diálogo. Os alunos conseguiram integrar a calculadora gráfica na sua atividade, num processo de instrumentação. Neste caso, apesar de não ser apresentado qualquer esboço de representação gráfica na folha de resposta, a integração da calculadora é feita como verificação e acompanhamento de raciocínios do grupo.

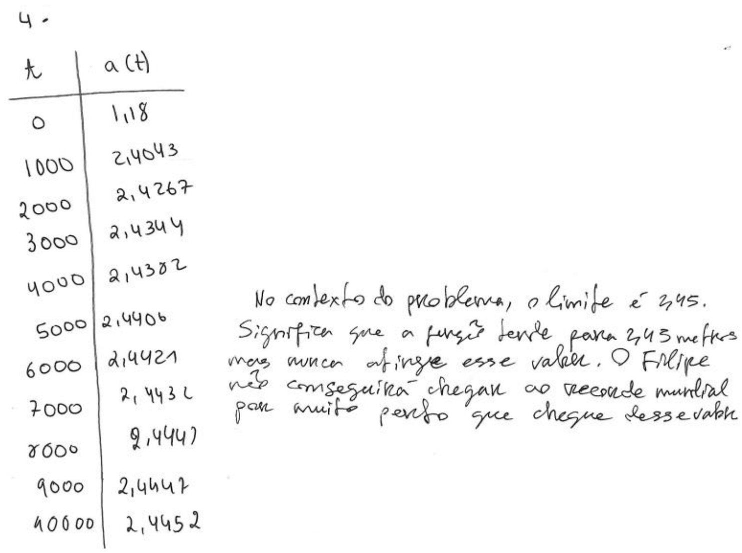
A terceira questão foi resolvida pela turma através de esquemas instrumentais. Todos os grupos obtiveram os valores pedidos através da calculadora gráfica, evidenciando a posse de esquemas de uso e de ação instrumentada. Nesta questão, a obtenção de valores de ordenada através da calculadora gráfica é muito mais utilizada pelos estudantes da turma do que a obtenção de valores de abcissas pela mesma ferramenta (como são exemplo as respostas à questão anterior). Isto deve-se, provavelmente ao facto de os alunos não estarem habituados à resolução de equações de forma gráfica, mas sim apenas analítica. De qualquer forma, e como já tinha sido observado na figura 27, o grupo A apresentou a representação gráfica com as coordenadas dos pontos referentes à questão 3. A sua resposta escrita foi em tudo semelhante à resposta dada pelo grupo C (Figura 30), chegando, assim, à mesma conclusão.

**Figura 30.** Resposta correta do grupo C à questão 3 da Tarefa 2.



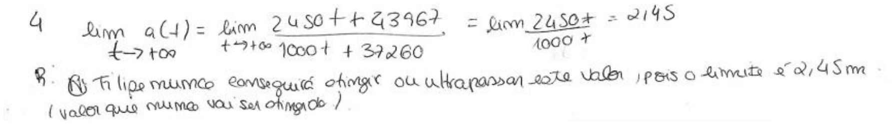

A última pergunta tornou-se bastante reveladora num sentido instrumental. Como já foi referido, uma das finalidades da quarta questão era perceber que processo(s) os alunos utilizariam na justificação de limites de funções, sendo que dispunham de, pelo menos, três diferentes métodos. Todos os grupos responderam de forma correta à questão, utilizando diferentes formas de resolução. Apenas o grupo A utilizou exclusivamente o método tabelar para a sua resposta, respondendo corretamente à questão (Figura 31).

**Figura 31.** Resposta correta do grupo A à questão 4 da Tarefa 2 (com método tabelar).



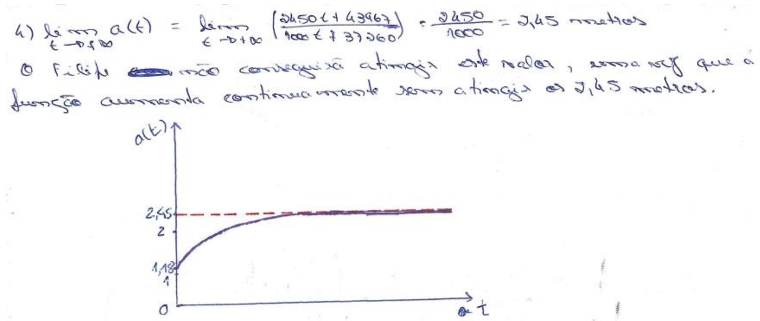

Por outro lado, o grupo E recorreu apenas ao método analítico como forma de responder à questão quatro (Figura 32).

**Figura 32.** Resposta correta do grupo E à questão 4 da Tarefa 2 (com método analítico).




Por sua vez, o grupo B fez uso da representação gráfica da função $a$ como complemento à sua resposta analítica, assinalando a assíntota horizontal ao gráfico da função bem como elementos importantes para uma melhor compreensão do esboço da representação gráfica (Figura 33).

**Figura 33.** Resposta correta do grupo B à questão 4 da Tarefa 2 (com método gráfico).




O grupo B estudou a representação gráfica da função $a$ na calculadora gráfica, fazendo interseções de gráficos, e percebendo que existe uma assíntota ao gráfico da função, que lhes daria a resposta à pergunta.

E3B: A última [questão] não dá.

E1B: Não dá?

E3B: Não. O Filipe nunca chega a 2,45, portanto também não ultrapassa. (E3B recorre à funcionalidade de interseção de gráficos e verifica que a representação gráfica da função $a$ não se intercetava com $y = 2{,}45$)

E2B: Como é que sabes?

E3B: Então, aqui [na questão 4] calculas o limite quando $t$ tende para mais infinito.

E2B: O limite vai ser 2,45.

[…]

E3B: Podemos desenhar [o esboço do] o gráfico, já agora.

E1B: Eu faço. Temos o ponto inicial 1,18 e precisamos do 2,45. E temos de fazer aquele tracejado.

Prof.: (passei pelo grupo) E como é que se chama o tracejado?

E1B: É a assíntota horizontal, claro.

Os restantes grupos, C e D, utilizaram, nas suas respostas, tabelas como elemento suplementar à sua resolução analítica.

Terminando o tempo para a exploração da tarefa, iniciou-se a discussão dos resultados. As três primeiras questões foram rapidamente discutidas devido à sua semelhante natureza, reforçando apenas a importância da determinação do domínio para a resolução da questão 2. A abordagem da questão 4 iniciou-se com o grupo A. Foi-lhes questionado qual o objetivo da questão ao que responderam ser o cálculo do limite da função $a$ quando $t$ tendesse para $+\infty$. Segue-se então a exploração do menu 'Tabela', pelo grupo A, no *emulator*.

Prof.: O grupo A foi analisar uma tabela para perceber qual seria o limite da função. E o que é que observaram?

E4A: (no *emulator*, definiu o intervalo de $x$ de 1 a 10000, com valores de 1000 em 1000, e começou a descer pelos valores de $x$) Nós observamos que, mesmo que o Filipe fosse até às 10000 semanas, ele nunca chegaria a um valor igual ou maior que 2,45 metros.

A exposição do método tabelar por parte do grupo A foi bastante relevante, visto que este foi o único grupo a utilizar, exclusivamente, este método como resolução. Em relação aos valores referidos durante o diálogo anterior, E2D chegou a comentar que seria impossível o Filipe conseguir fazer 10000 semanas de treinos, visto que esse valor correspondia a mais de 192 anos. Assim como neste caso, a turma estava ativamente presente na discussão da resolução. Foi então pedido um elemento voluntário da turma para mostrar e explicar uma interpretação gráfica da questão.

Prof.: Okay, temos uma análise tabelar. Alguém tem uma gráfica?

E1B: Eu tenho.

Prof.: Okay, boa. Representa o gráfico e a outra reta. (para a turma) Como é que se chama a outra reta?

E1A: Assíntota.

E3E: Assíntota horizontal.

(E1B optou, sem ser questionado para tal, por colocar a reta que representa a assíntota horizontal a tracejado)

Prof.: Então, o que conseguiram observar?

E1B: (levantou-se e colocou-se em frente ao projetor) Então, temos a assíntota horizontal. Tínhamos calculado o limite analiticamente e percebemos que era 2,45. Na calculadora [gráfica] podemos tentar intersetar a assíntota com a função que dá sempre 'valor inexistente', visto que se aproxima infinitamente de 2,45 e que nunca chega lá.

Com este último comentário de E1B, decidi abordar uma funcionalidade da calculadora gráfica que não tinha ainda sido apresentada aos alunos:

Prof.: Para melhor analisar o que E1B acabou de dizer, podemos usar o comando Trace (aponto para o seu local no *emulator*). Aparece-nos aqui um ponto móvel no gráfico. Se formos aumentando a abcissa deste ponto, conseguimos perceber que a ordenada se aproxima muito de 2,45, mas nunca atinge esse valor.

E2D: Pois, o ponto aproxima-se bocadinho a bocadinho, mas não chega a tocar. Se tocar é por causa da calculadora ser um bocado limitada.

Após questionar a turma se restavam dúvidas acerca de algum dos conteúdos abordados durante a aula, chegou o final da aula. A realização das atividades da aula promoveu o desenvolvimento de esquemas e interações que tinham estado presentes em aulas anteriores. Em termos instrumentais, há a destacar o grupo C, que na primeira tarefa conseguiu interpretar e ser crítico em relação à análise da tabela das funções $A$ e $B$ na calculadora gráfica e ainda interpretar devidamente os resultados que iam sendo obtidos em toda a Tarefa 1. Em relação à Tarefa 2, o grupo que deve ser destacado é o grupo A. Além de terem interpretado corretamente toda a tarefa, conseguiram enquadrar dois elementos (tabela e representação gráfica) retirados da calculadora gráfica através de processos de instrumentação e instrumentalização, como forma de complementar a sua atividade. Além disso, quando chamados a intervir, conseguiam expor e explicar os seus raciocínios com base no que obtiveram a partir da calculadora gráfica, revelando uma grande destreza no que toca à manipulação deste instrumento.

Foi igualmente importante o facto ter sido adotado o enunciado para valores verdadeiros e atuais. Alguns alunos referiram que tiveram curiosidade em perceber quais eram os valores máximos nacionais e mundiais de salto em altura e ficaram admirados quando encontraram os valores que foram falados na aula.

Em comparação com a aula anteriormente analisada, desta vez as discussões foram mais fluidas e interativas e os conteúdos, como pude verificar posteriormente com as respostas às questões da síntese, foram bem assimilados. A exploração da calculadora gráfica no *emulator* esteve muito mais presente e foi de grande importância nesta aula. A exposição de novos procedimentos no projetor, como a obtenção da tabela, o esboço das assíntotas horizontais aos gráficos ou a utilização do comando 'Trace', permitiu que os alunos pudessem acompanhar as ações na calculadora gráfica. Isto é, mesmo que não tenham conseguido entender completamente algum dos procedimentos utilizados durante a exploração das tarefas dentro dos grupos, foi-lhes possibilitado acompanhar estes procedimentos, bem como as suas explicações, através das discussões coletivas, tornando mais fácil a sua compreensão. Esta exposição permitiu que o número de dúvidas acerca de alguns menus da calculadora gráfica que poderiam surgir em tarefas seguintes fosse mais reduzido.

### 3.1.3. Funções racionais do tipo $\boldsymbol{f(x) = a + \frac{b}{x-c}}$

O estudo das funções racionais teve como principal objetivo auxiliar os alunos no reconhecimento, interpretação e representação gráfica de funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, com $a, b$ e $c \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, bem como estabelecer a noção intuitiva de assíntota ao gráfico de uma função. Para este efeito, foram entregues aos alunos da turma, organizados em cinco grupos de quatro elementos, duas tarefas. Mais uma vez, um dos alunos da turma acompanhou e participou na aula via *Zoom* segundo as regras sanitárias implementadas devido à Covid-19. A primeira tarefa foi resolvida com recurso ao menu 'Gráfico Dinâmico', que teve como finalidades aumentar os esquemas de utilização dos alunos, bem como estabelecer relações entre funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ e as suas características.

**Tarefa 1 – Gráfico Dinâmico**
A partir da representação gráfica da função $g$ definida por $g(x) = \frac{1}{x}$, pretende-se fazer um estudo de funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$.
Explorando o menu 'Gráfico Dinâmico' da calculadora gráfica, regista na tua folha de resposta o que observas e o que podes concluir acerca do domínio, contradomínio, assíntotas e transformações do gráfico da função $f$ em relação ao gráfico da função $g$, completando as tabelas.

Após a introdução da tarefa, a dúvida dos alunos acerca do que leram foi "Como usar o menu 'Gráfico Dinâmico'?". Antecipando esta dúvida, foram entregues algumas indicações acerca da sua utilização.

<u>Guia de utilização do menu 'Gráfico Dinâmico':</u>
1. Abre o menu 'Gráfico Dinâmico'.
2. Define a função $g$.
3. Define a função $f$, escrevendo os parâmetros $a$, $b$ e $c$ com o uso das letras na calculadora gráfica.
4. Define a janela de visualização standard, em 'SHIFT' + 'V-WIN', seleciona 'STANDRD'.
5. Clica na tecla 'EXE' duas vezes.
6. Define os valores 0, 1 e 0 para os parâmetros $a$, $b$ e $c$, respetivamente.
7. Seleciona a variável $a$ a partir da tecla 'SELECT'.
8. Em 'SET', define um intervalo de $-5$ a 5 nos parâmetros 'START' e 'END', respetivamente.
9. Clica na tecla 'EXE' duas vezes.
10. Preenche a tabela da tua folha de resposta com as tuas conclusões, dando alguns exemplos e completando o teu raciocínio com alguns comentários.
11. Clica na tecla 'AC/ON'.
12. Repete o processo a partir do passo 6., mas desta vez com os parâmetros $b$ e $c$.

As respostas dos alunos foram dadas numa folha de resposta que continha quatro tabelas cujo objetivo passava por os auxiliar na organização dos seus dados e consequente apresentação de conclusões. A primeira tabela (Tabela I) focava na análise da função original $g$ definida por $g(x) = \frac{1}{x}$ e as três tabelas restantes (Tabelas II, III e IV) correspondiam, respetivamente, ao estudo da alteração isolada de cada um dos parâmetros $a$, $b$ e $c$ da função $f$ definida por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$. Assim sendo, as respostas foram avaliadas por tabelas e tendo em conta a conclusão apresentada. Desta forma, as respostas são consideradas: (i) corretas (C) se foram apresentados dados corretos em todas as tabelas e foi apresentada uma resposta correta à tarefa; (ii) parcialmente corretas (PC) caso algum dado em alguma das tabelas for incorreto ou incompleto e foi apresentada uma conclusão incompleta ou com algum erro; (iii) incorretas (I) caso grande parte do preenchimento das tabelas foi feito de forma incorreta e foi apresentada uma conclusão incorreta; e (iv) não responde (NR) caso não tenha sido dada alguma resposta em algum dos elementos já referidos. A tabela seguinte apresenta as classificações dadas às respostas de cada grupo da primeira tarefa (Tabela 5).

**Tabela 5.** Frequência dos diferentes tipos de respostas às questões da Tarefa 1 ($n = 5$).

| | C | PC | I | NR |
|---|---|---|---|---|
| Tabela I | 5 | 0 | 0 | 0 |
| Tabela II | 3 | 2 | 0 | 0 |
| Tabela III | 0 | 5 | 0 | 0 |
| Tabela IV | 3 | 2 | 0 | 0 |
| Conclusão | 0 | 1 | 0 | 4 |

A primeira tabela, correspondente ao estudo da função $g$ definida por $g(x) = \frac{1}{x}$, foi preenchida pelos alunos sem grandes dificuldades, excetuando o conceito de assíntota que surgiu em dúvida num dos grupos, mas rapidamente lhe foi facultada uma resposta por um dos membros do mesmo grupo:

E2D: O que são as assíntotas? Já não me lembro.

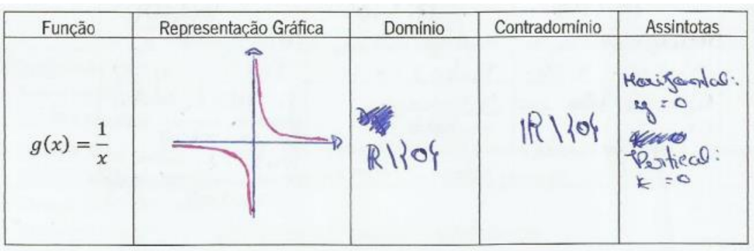
E4D: É aquela linha do limite. Aquela reta que passa juntinho ao gráfico, quase a tocar.

E2D: Okay. Então depende para onde calculas o limite.

E4D: Daí termos as assíntotas verticais e as horizontais.

Com o auxílio da calculadora gráfica, a turma conseguiu chegar a todas as características pedidas de forma correta, tal como é exemplo o grupo B (Figura 34).

**Figura 34.** Resposta correta do grupo B à Tabela I da Tarefa 1.



Com o começo do preenchimento das restantes tabelas, a turma tentava perceber quais os passos a executar para proceder à utilização do menu 'Gráfico Dinâmico' da calculadora gráfica. A entreajuda entre membros do mesmo grupo foi bastante notória durante toda a atividade.

E1A: Preciso de ajuda, isto não me está a dar.
E3A: Tens de seguir os passos daqui. (aponta para a folha de instruções)
E1A: Pois, mas ainda assim não deu. É suposto aparecer um gráfico?
E3A: Sim.
E4A: A mim deu-me.
E3A: Deixa ver. (procede a pegar na calculadora gráfica do colega) É aqui.
E1A: Okay, okay, já deu. Ui, ele [o esboço do gráfico da função] move-se!

Neste diálogo, e semelhantemente ao que aconteceu noutros grupos, se percebe que o desenvolvimento dos esquemas de utilização, bem como os processos de instrumentação e instrumentalização, estão mais desenvolvidos em alguns alunos. Tal como já tinha sido referido, os esquemas de uso que permitem desenvolver uma qualquer atividade na calculadora gráfica podem ser transversais e/ou adaptáveis a diferentes ambientes e menus. Neste caso, com as mesmas instruções, diferentes alunos avançaram a velocidades distintas e com graus de dificuldades distintos. Pode então assumir-se que a génese instrumental está mais desenvolvida em alguns alunos da turma. Também o seguinte diálogo é exemplo disso:

E2B: Olhem, isto [o esboço do gráfico da função] mexe-se.
E3B: Mas isto está muito rápido... será que não dá para pôr os gráficos a moverem-se mais devagar?
E2B: Não sei, vamos perguntar à professora.
E1B: Eu já encontrei! Depois de carregar em 'EXE', aparece uma opção com 'SPEED'. Eu mudei isto [a opção] para 'Lento' em 'F2' e agora está mais devagar.
E2B: Okay, deixa-me tentar.

O grupo acabou por me chamar e perguntar se era aceitável que fizessem tal alteração de forma a conseguirem analisar da melhor forma as alterações ocorridas, ao qual confirmei. Assim como aconteceu em aulas anteriores, determinados elementos do grupo B revelaram possuir uma base alargada de esquemas de uso, o que lhes permitia perceber e desenvolver mais rapidamente a sua atividade. Alguns alunos mostravam que o processo de construção do instrumento calculadora gráfica estava numa etapa bastante adiantada quando comparada com outros estudantes da mesma turma.

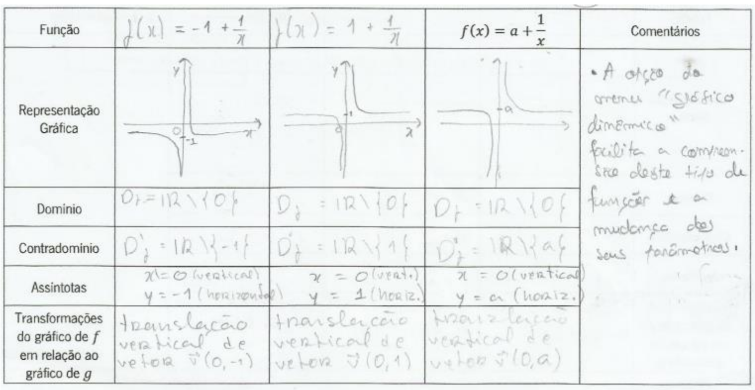
Ultrapassada a fase inicial de compreensão do menu da calculadora gráfica, segue-se o preenchimento das tabelas. O primeiro dilema com que a turma se deparou foi com a presença (ou não) de assíntotas horizontais e/ou verticais nos gráficos que iam sendo representados na calculadora gráfica.

E1E: Mete (esboça) a linha (a reta) da assíntota horizontal.
E4E: Olhem, isto não tem assíntota vertical, não pode ter.
E3E: Tem. É $x = 0$.
E4E: Sim, mas se for essa, nunca vai tocar [na representação gráfica].
E1E: Isso é exatamente o que uma assíntota é, mesmo que falemos da [assíntota] horizontal $y = 1$… deixa-me mostrar-te. (E1E acede ao menu 'Gráfico' da sua calculadora gráfica e esboça uma função $Y1$ com expressão analítica $y = 1 + \frac{1}{x}$ e a reta que representa a assíntota horizontal $y = 1$.) Olha aqui, se fizermos a interseção [na calculadora gráfica] entre $y = 1$ e a [função] que está a azul não nos dá nada.
E4E: Mas elas parece que se tocam. E se aumentares a janela [de visualização]? É que às vezes dá erro.
E1E: (Aumenta a janela de visualização. Não refere para que valores.) Nada. Estás a perceber? É a mesma coisa que calculares os limites no infinito ou os laterais.
E4E: Ah, pois é.
E3E: Então o contradomínio…
E1E: Então o contradomínio vai ser $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

É relevante notar que apesar de ter dúvidas acerca das características das assíntotas, o aluno E4E reconhece limitações na calculadora gráfica, verificando-se um aparecimento progressivo do processo de instrumentalização. Simultaneamente, o facto de reconhecer que o aumento da janela de visualização, neste caso, poderia fazer com que outro resultado pudesse ser obtido na mesma situação, faz salientar o processo de instrumentação, visto que a limitação conhecida ajudou a fomentar uma nova estratégia de resolução do desafio.

Em relação à Tabela II, relativa ao estudo da alteração do parâmetro $a$ na função $f$ definida por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, a turma chegou às suas conclusões relativamente rápido, sendo que dois grupos obtiveram respostas corretas, como é exemplo o grupo C (Figura 35).

**Figura 35.** Resposta correta do grupo C à Tabela II da Tarefa 1.

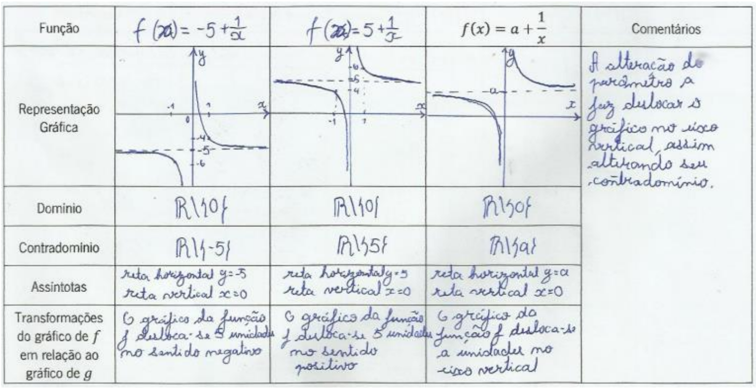


| Função | $f(x) = -1 + \frac{1}{x}$ | $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ | $f(x) = a + \frac{1}{x}$ | Comentários |
|---|---|---|---|---|
| Representação Gráfica | | | | • A opção do menu "gráfico dinâmico" facilita a compreensão deste tipo de funções e a mudança dos seus parâmetros. |
| Domínio | $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | |
| Contradomínio | $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ | $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ | $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ | |
| Assintotas | $x = 0$ (vertical) $y = -1$ (horizontal) | $x = 0$ (vert.) $y = 1$ (horiz.) | $x = 0$ (vertical) $y = a$ (horiz.) | |
| Transformações do gráfico de $f$ em relação ao gráfico de $g$ | translação vertical de vetor $\vec{v}(0,-1)$ | translação vertical de vetor $\vec{v}(0,1)$ | translação vertical de vetor $\vec{v}(0,a)$ | |

No início da aula foi explicado que a coluna "Comentários" tinha como objetivo os alunos complementarem alguma ideia acerca do parâmetro em estudo na respetiva tabela. O grupo C, que não percebeu ou não ouviu o que foi dito, utilizou a coluna para deixar *feedback* acerca do menu 'Gráfico Dinâmico'.

Os restantes grupos apresentaram respostas parcialmente corretas, principalmente pela falta de formalização no que às transformações diz respeito, como é observado na resposta dada pelo grupo A (Figura 36).

**Figura 36.** Resposta parcialmente correta do grupo A à Tabela II da Tarefa 1.



| Função | $f(x) = -5 + \frac{1}{x}$ | $f(x) = 5 + \frac{1}{x}$ | $f(x) = a + \frac{1}{x}$ | Comentários |
|---|---|---|---|---|
| Representação Gráfica | | | | A alteração do parâmetro a faz deslocar o gráfico no eixo vertical, assim alterando seu contradomínio. |
| Domínio | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ | |
| Contradomínio | $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ | |
| Assintotas | reta horizontal $y=-5$ reta vertical $x=0$ | reta horizontal $y=5$ reta vertical $x=0$ | reta horizontal $y=a$ reta vertical $x=0$ | |
| Transformações do gráfico de $f$ em relação ao gráfico de $g$ | O gráfico da função f desloca-se 5 unidades no sentido negativo | O gráfico da função f desloca-se 5 unidades no sentido positivo | O gráfico da função f desloca-se a unidades no eixo vertical | |

A partir do que foi escrito pelo grupo A, consegue perceber-se que a transformação descrita é a observada na calculadora gráfica quando se dá a alteração do parâmetro $a$. No entanto, a formalização deste tipo de conceito era essencial para uma resposta correta.

Tal como no estudo da variação do parâmetro $a$, a Tabela III, acerca da influência do parâmetro $b$ na função $f$, gerou bastantes dúvidas acerca das transformações ocorridas no gráfico de $f$ em relação ao gráfico de $g$.

E4D: O que é que temos aqui? (observa o esboço dos gráficos da função para diferentes valores de $b$) A assíntota ficou igual.

E2D: Não, não. Tem duas assíntotas. Olhas agora ficou zero. (Isto observou-se quando o valor de $b$ era igual a $0$) Uma das assíntotas ficou igual.

E4D: A vertical não mudou. Neste caso, a horizontal também é a mesma. Então o que é que muda?

E1D: Ela encolhe e estica, isso tem de ser alguma alteração nas características da tabela.

E2D: Então deve ser aqui nas transformações.

Alguns dos grupos conseguiam identificar certas das transformações através das representações presentes na calculadora gráfica, mas a contração vertical de coeficiente $b$, quando $-1 < b < 1$, foi a que os alunos mais tiveram dificuldade em identificar.

E2C: O $b$ acho que dilata [a função].

E3C: Dilata?

E2C: Sim, pelos menos aqui [na calculadora gráfica] ela [a função] fica cada vez maior.

E3C: Dilata ao contrário depois. (E3C refere-se à reflexão segundo o eixo $Ox$ quando $b < 0$)

E2C: Sim, quando é negativa.

E3C: O gráfico quando passa o zero, muda aqui para baixo (aponta para o quarto quadrante).

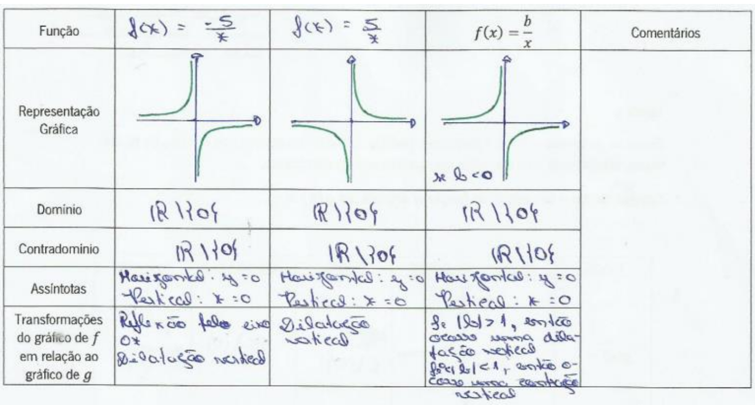
E2C: Pois é, quando é negativo. Troca. Isso tem um nome...

E4C: Reflexão?

E2C: Sim, é isso, é isso. Ele dilata sempre, aparentemente. Muda o sentido com a reflexão, mas dilata sempre.

Apesar de todos os grupos apresentarem respostas parcialmente corretas, o grupo B foi o que completou da melhor forma a Tabela III, esquecendo-se de referir a reflexão ocorrida no caso geral, bem como o coeficiente de dilatação e de contração (Figura 37).

**Figura 37.** Resposta parcialmente correta do grupo B à Tabela III da Tarefa 1.



| Função | $f(x) = \frac{-5}{x}$ | $f(x) = \frac{5}{x}$ | $f(x) = \frac{b}{x}$ | Comentários |
|---|---|---|---|---|
| Representação Gráfica | | | se $b<0$ | |
| Domínio | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ | |
| Contradomínio | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ | |
| Assíntotas | Horizontal: $y=0$<br>Vertical: $x=0$ | Horizontal: $y=0$<br>Vertical: $x=0$ | Horizontal: $y=0$<br>Vertical: $x=0$ | |
| Transformações do gráfico de $f$ em relação ao gráfico de $g$ | Reflexão pelo eixo $Ox$<br>Dilatação vertical | Dilatação vertical | Se $\lvert b \rvert > 1$, então ocorre uma dilatação vertical<br>Se $\lvert b \rvert < 1$, então ocorre uma contração vertical | |

O grupo B foi um dos únicos grupos a referir a contração ocorrida na Tabela III. Isto deve-se provavelmente ao facto de o grupo ter sido capaz de alterar o intervalo entre os valores dados ao parâmetro $b$.

E1B: Olhem, o que é isto do 'STEP'?
E3B: Não sei, não fala dessa opção nas instruções.
E1B: É que isto está em 1… (altera o valor da opção) Olhem, agora os valores andam de 0,5 em 0,5. Pomos [o intervalo entre valores] mais pequeno?

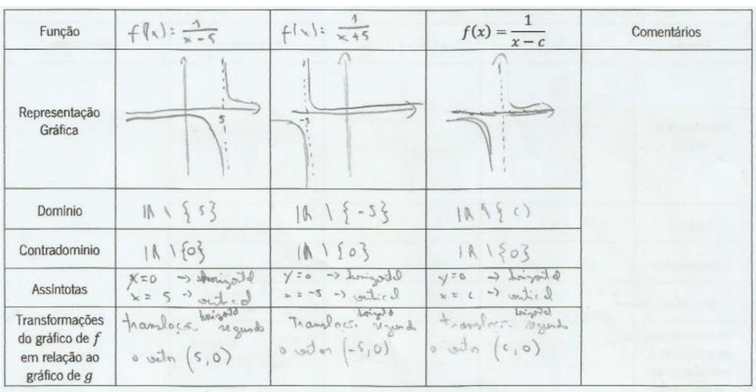
Por defeito, o intervalo entre os valores a dar a $b$ na calculadora gráfica é apresentado com 1. O grupo foi capaz de explorar a calculadora gráfica e alterar este intervalo posteriormente para 0,25, o que lhes permitiu observar a contração ocorrida no esboço dos gráficos da calculadora gráfica. Mais uma vez é possível verificar em desenvolvimento do processo de instrumentalização no grupo B, em especial o aluno E1B, que, num mesmo momento, passa pelas três fases de instrumentalização: descoberta, personalização e transformação.

A exploração dos grupos passou então para a última tabela, Tabela IV, presente na sua folha de resposta, que contava com o estudo da influência do parâmetro $c$ na função $f$. Acerca deste parâmetro não houve quaisquer dúvidas, nem em aspeto ligados com a calculadora gráfica ou com o menu 'Gráfico Dinâmico', nem com o preenchimento da tabela.

E1A: (observa a calculadora gráfica) O caso do [parâmetro] $c$ vai ser semelhante ao do [parâmetro] $a$, mas neste caso há movimento para o lado e não para cima e para baixo.
E2A: Horizontal, portanto.
E1A: Sim, isso. Por isso, o contradomínio é que vai ficar sempre igual.
E3A: $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ então.

Um exemplo de resposta correta é a resposta dada pelo grupo D (Figura 38).

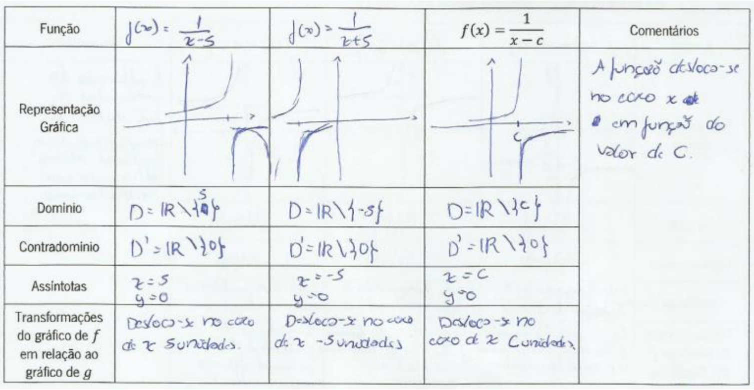
**Figura 38.** Resposta correta do grupo D à Tabela IV da Tarefa 1.



| Função | $f(x) = \frac{1}{x-5}$ | $f(x) = \frac{1}{x+5}$ | $f(x) = \frac{1}{x-c}$ | Comentários |
|---|---|---|---|---|
| Representação Gráfica | | | | |
| Domínio | $\mathbb{R} \backslash \{5\}$ | $\mathbb{R} \backslash \{-5\}$ | $\mathbb{R} \backslash \{c\}$ | |
| Contradomínio | $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ | $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ | $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ | |
| Assíntotas | $x=0 \rightarrow$ horizontal<br>$x=5 \rightarrow$ vertical | $y=0 \rightarrow$ horizontal<br>$x=-5 \rightarrow$ vertical | $y=0 \rightarrow$ horizontal<br>$x=c \rightarrow$ vertical | |
| Transformações do gráfico de $f$ em relação ao gráfico de $g$ | translação horizontal segundo o vetor $(5,0)$ | Translação horizontal segundo o vetor $(-5,0)$ | translação horizontal segundo o vetor $(c,0)$ | |

As respostas parcialmente corretas dadas por dois dos grupos devem-se ao erro que tinha sido já apontado em outras tabelas: a formalização das transformações gráficas das funções. A resposta dada pelo grupo A (Figura 39) é a prova disso.

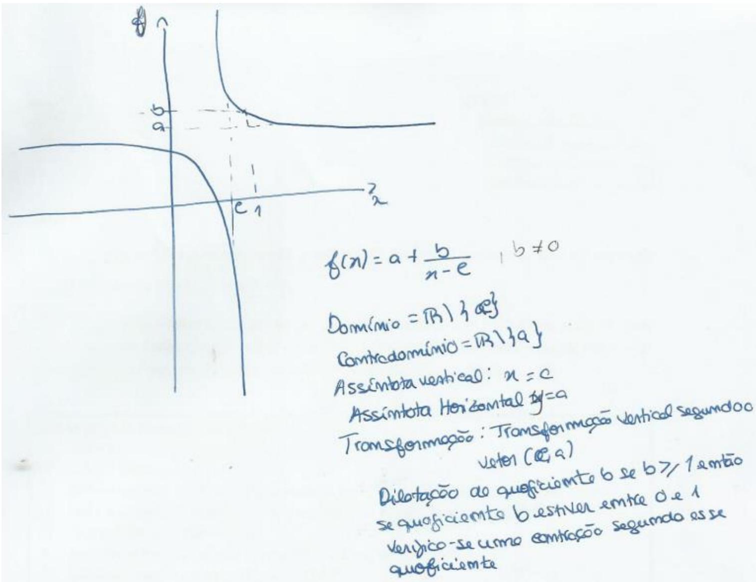
**Figura 39**. Resposta parcialmente correta do grupo A à Tabela IV da Tarefa 1.



| Função | $f(x)=\frac{1}{x-5}$ | $f(x)=\frac{1}{x+5}$ | $f(x)=\frac{1}{x-c}$ | Comentários |
|---|---|---|---|---|
| Representação Gráfica | | | | A função desloca-se no eixo x em função do valor de C. |
| Domínio | D=IR\{5} | D=IR\{-5} | D=IR\{c} | |
| Contradomínio | D'=IR\{0} | D'=IR\{0} | D'=IR\{0} | |
| Assíntotas | x=5 y=0 | x=-5 y=0 | x=c y=0 | |
| Transformações do gráfico de $f$ em relação ao gráfico de $g$ | Desloca-se no eixo do x 5unidades. | Desloca-se no eixo do x -5unidades | Desloca-se no eixo do x Cunidades. | |

A conclusão da Tarefa 1 foi dada apenas por um dos grupos, grupo E (Figura 40). Os restantes grupos demoraram-se no preenchimento das tabelas e não tiveram tempo para concluir.

**Figura 40.** Resposta parcialmente correta do grupo E à conclusão da Tarefa 1.




A resposta dada pelo grupo E foi classificada como parcialmente correta por, tal como já tinham feito na Tabela III, não apresentarem a reflexão segundo o eixo $Ox$ como transformação gráfica, bem como não considerarem as dilatações e contrações ocorridas para valores de $b$ negativos. Também, analogamente às Tabelas II e IV, referem-se a "transformação" ao invés de "translação", sendo que neste caso, apenas referem a vertical.

Terminado o tempo disponível para a exploração da Tarefa 1, inicia-se a discussão coletivas dos resultados. Para o efeito, é chamado um estudante voluntário do grupo C para apresentar à turma as conclusões a que o grupo chegou acerca da influência do parâmetro $a$. A representação gráfica de $g$

não é estudada na discussão coletiva, apesar de ser representada no *emulator* como forma de apoiar ao trabalho dos alunos. Após proceder aos passos iniciais no menu 'Gráfico Dinâmico' do *emulator*, o estudante E3C é convidado a levantar-se e expor à turma as suas conclusões.

E3C: (enquanto aponta para o projetor) A função faz translações verticais quando o valor de $a$ é diferente de zero e move-se para cima e para baixo, dependendo de $a$ ser positivo ou negativo.

Prof.: O gráfico move-se... é só isso? O que é que estudaram mais na tabela?

E3C: Ah, sim. A assíntota vertical é sempre zero e a horizontal mudo consoante o $a$.

Prof.: Espera... está certo o que foi dito?

Turma: Sim.

Prof.: A assíntota pode ser um número?

E1B: Não, não. É $x = 0$.

Prof.: Certo. Mais?

E3C: O domínio é $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}\backslash\{a\}$, dependendo do $a$.

Prof.: Exatamente. O grupo C tem mais alguma coisa a acrescentar?

E2C: A translação vertical é segundo o vetor $(0, a)$.

Seguidamente, para o estudo do parâmetro $b$, voluntariaram-se dois estudantes do grupo B. O aluno que se encarregou de trabalhar no *emulator*, E1B, resolveu modificar a velocidade na alteração dos valores de $b$, de forma a melhor conseguirem explicar as conclusões a que tinham chegado. Após realizar os procedimentos iniciais no menu 'Gráfico Dinâmico', os dois alunos são convidados a apresentarem, de pé, as suas considerações acerca do que era mostrado no projetor.

E2B: Verificamos que ocorre uma dilatação vertical no gráfico da função. O domínio é $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e o contradomínio também.

Prof.: Nenhum deles se altera com o valor de $b$?

E1B: Depende. Tem aqui uma exceção. Quando $b = 0$. Fica uma reta $y = 0$.

Prof.: E porquê?

E1B: Porque fica $\frac{0}{x}$, que é 0. De resto é isso. A não ser quando o $b$ é negativo que muda um bocadinho as coisas.

Prof.: Muda? Em que sentido?

E1B: (espera o gráfico sofra uma reflexão) Agora, ali. Existe uma reflexão segundo o eixo... $Oy$?

E2B: $Ox$.

E1B: Ah, mas pode ser qualquer um dos dois.

E2B: Eu acho que é o $Ox$, porque acho que é o contradomínio a mudar.

E1C: O contradomínio muda?

E1B: Pois, não muda. Mas temos de fazer uma distinção entre as duas reflexões.

Gera-se uma discussão na turma se a reflexão ocorrida ocorre no eixo $Ox$, $Oy$ ou se é irrelevante em qual deles acontece. Tentei então fazer com que observassem como é que o valor de $b$ iria afetar a expressão analítica da função original $g$, com o intuito de que conseguissem chegar a uma resposta.

Prof.: A expressão de $g$ é $g(x) = \frac{1}{x}$. (escrevo a expressão no quadro) Então, quando $b = -1$, como é que fica o $g$?
E1B: Fica $-\frac{1}{x}$.
Prof.: Exato. Ou seja, $-g(x)$. E o que é que faz aquele menos antes da função $g$?
E1C: Reflete.
E2D: Reflexão segundo o eixo $Ox$?
E1B: Segundo $Oy$.
E2D: Sim, mas se fosse $Oy$, o menos ficava em baixo com o $x$.
(entretanto a turma dispersa e volta à discussão acerca de a função admitir reflexões segundo ambos os eixos)
Prof.: Neste caso estamos a falar de uma com $g$. (escrevo no quadro $-1 \times g(x)$) Então [se $b = -1$] vai afetar o nosso $y$.
E2B: Pois, senão ficava $g(-x)$.
Prof.: Exatamente. [...] Dito isto, qual é a reflexão?
Turma: Segundo o eixo $Ox$.

E desta forma a turma entra em acordo acerca da reflexão, avançando, assim, com o resto da discussão acerca do parâmetro $b$.

Prof.: Mais? Só há dilatações e reflexões?
E2B: Não, também há contrações se o módulo de $b$ estiver entre 0 e 1.
E1B: Eu não tenho aqui [no *emulator*] posto, mas posso alterar o 'STEP'. (toma posse do *emulator* mais uma vez)
Prof.: Queres explicar o que fizeste agora à turma?
E1B: Eu mudei o 'STEP'. O 'STEP' é a distância que há entre cada valor da variável. Neste caso a variável vai andar de 0,25 em 0,25. [...] Como vemos aqui, [para valores de $b$] entre $-1$ e 1 há uma contração.
E2B: Também ela vertical.

A apresentação desta opção da calculadora gráfica no *emulator* foi um momento de grande importância, dado que alguns dos grupos não tinham conseguido assimilar a presença de contrações verticais por não terem estudado e visualizado variações do parâmetro $b$ para valores entre $-1$ e 1, excetuando o 0. A apresentação à turma de mais um dos esquemas de uso que poderiam adquirir, tinha como objetivo auxiliar na exploração futura dos alunos no mesmo menu da calculadora gráfica.

O parâmetro $c$, explorado pelo grupo D, cujo diálogo e conclusões foram semelhantes às ocorridas na apresentação do parâmetro $a$, excetuando as suas conclusões, foi explorado sem dificuldades. De salientar que os alunos que apresentaram a resolução do seu grupo acerca dos parâmetros, não se fizeram acompanhar com a sua folha de resposta, o que demonstrou uma compreensão do que foi estudado em grupo.

Com a final da exploração das tabelas relativas à Tarefa 1, e visto que apenas um dos grupos tinha tirado conclusões escritas acerca de funções do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, foram formalizadas as ideias até ali apresentadas. Todas as formalizações e ideias finais foram elaboradas pelos alunos muito rapidamente. Uma vez que não foi possível obter o registo a nível fotográfico do que foi escrito no quadro devido a problemas técnicos, consegui, posteriormente, a partir das gravações de áudio, adquirir o registo do que foi feito e está representado no Quadro 3.

**Quadro 3.** Quadro com conclusões finais acerca de funções racionais do tipo $\boldsymbol{f(x) = a + \frac{b}{x-c}}$.

| | |
|---|---|
| Função | $f(x) = a + \frac{b}{x-c}, b \neq 0$ |
| Domínio | $D_f = \mathbb{R}\backslash\{c\}$ |
| Contradomínio | $D'_f = \mathbb{R}\backslash\{a\}$ |
| Assíntotas | Vertical: $x = c$<br>Horizontal: $y = a$ |
| Transformações | Translação vertical de vetor $(0, a)$<br>Translação horizontal de vetor $(c, 0)$<br>Dilatação vertical de coeficiente $b$, quando $\lvert b\rvert > 1$<br>Contração vertical de coeficiente $b$, quando $-1 < b < 1$<br>Reflexão segundo o eixo $O$, quando $b < 0$ |

De seguida foi entregue a Tarefa 2, onde os alunos foram desafiados a aplicar os conhecimentos recém obtidos na representação gráfica de uma função racional semelhante às funções que foram estudadas na Tarefa 1. Esta tarefa foi desenvolvida de forma a perceber se os alunos compreenderam cada um dos parâmetros estudados na tarefa anterior, aplicando esses conhecimentos sem a utilização de uma calculadora gráfica.

**Tarefa 2 – Salto em altura**

Considera a função $f$ definida por $f(x) = \frac{4x+4}{x+2}$. Sejam as retas $r$ e $s$ assíntotas horizontal e vertical, respetivamente, do gráfico de $f$. Sejam os pontos:

→ $A$ e $B$ os pontos de interseção do gráfico da função $f$ com os eixos coordenados;
→ $C$ o ponto de interseção das retas $r$ e $s$;
→ $D$ o ponto de interseção da reta $r$ com o eixo $Oy$.

Determina a área do quadrilátero $[ABCD]$.

Sem utilizar a calculadora gráfica, desenha um esboço do gráfico da função $f$, marcando os pontos $A, B, C$ e $D$ e assinalando o quadrilátero $[ABCD]$.

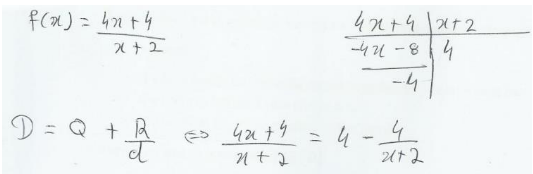
Desta forma, as respostas a esta tarefa são consideradas: (i) corretas (C) se foram apresentadas, de forma correta as seguintes etapas: a expressão geral da função $f$ na forma $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, as coordenadas dos pontos que são vértices do quadrilátero $[ABCD]$, o esboço da representação gráfica da função $f$, com as suas assíntotas e o quadrilátero devidamente assinalados e, por fim, o valor da área que dá a resposta à tarefa; (ii) parcialmente corretas (PC) se duas ou menos das etapas referidas foram apresentadas com erros ou se estiverem em falta uma das etapas; (iii) incorretas (I) se estiverem incorretas mais do que duas das etapas referidas ou estiverem em falta duas ou mais etapas; e (iv) não responde (NR), caso não tenha sido apresentada qualquer resposta. A tabela seguinte apresenta as classificações dadas às respostas de cada grupo da primeira tarefa (Tabela 6).

**Tabela 6.** Frequência dos diferentes tipos de respostas da Tarefa 2 ($n = 5$).

| | C | PC | I | NR |
|---|---|---|---|---|
| Tarefa 2 | 4 | 1 | 0 | 0 |

No início desta tarefa, os alunos depararam-se com o desafio de simplificar a expressão da função $f$, tentando alcançar uma expressão analítica com que conseguissem trabalhar. A turma baseou-se na simplificação da expressão analítica recorrendo à divisão inteira de polinómios, como é exemplo o grupo C (Figura 41), sendo que todos os grupos conseguiram chegar à expressão correta.

**Figura 41.** Resposta correta do grupo C à etapa 1 da Tarefa 2.




Sendo que não podiam aceder à calculadora gráfica para encontrar as coordenadas dos pontos $A$, $B$, $C$ e $D$, os alunos tentaram relacionar as informações que lhes foram dadas com a expressão analítica de $f$ obtida, conseguindo ser bastante perspicazes no encontro dessas relações:

E2B: Para sabermos o [ponto] $A$ e o [ponto] $B$, temos de resolver o $f(x) = 0$ e o $x = 0$. Agora o $C$...

E1B: O $C$ é a interseção das assíntotas $r$ e $s$. Uma é fácil de ver que é a vertical, por causa do domínio, que é a $s$. E, portanto, o $C$ tem coordenadas do tipo $(-2, y)$.

A procura pelas coordenadas dos pontos fazia também com que os estudantes estudassem as assíntotas e a sua posição no esboço do gráfico, como foi verificado no diálogo anterior. Para a representação gráfica da função e das suas assíntotas, alguns grupos conseguiam facilmente relacionar o que tinham estudado na tarefa anterior com o dilema com que se deparavam:

E1A: Então, já temos a [expressão da] função. O $c$ faz com que a função se mova no eixo do $x$, então ele anda 2 unidades para a esquerda.

E4A: Sim, é isso.

E2A: O que é que o $a$ fazia?

E1A: O $a$ fazia o gráfico subir e descer. Portanto anda 2 para a esquerda e desce 4 unidades.

E2A: E o $b$?

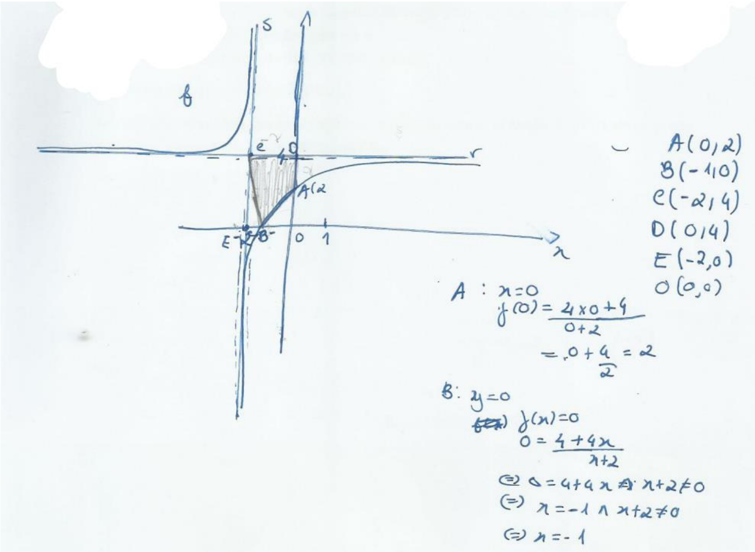
E3A: O $b$ era aquele de dilatar e contrair, não sei como vamos desenhar isso. Mas como é negativo, o gráfico tem de estar ao contrário.

E1A: Ah, sim. Por causa da reflexão.

Neste diálogo é tornado evidente que o suporte gráfico e visual dado pela calculadora gráfica e pelo menu 'Gráfico Dinâmico' na primeira parte da aula, fez com que os alunos conseguissem, nesta tarefa, evocar as imagens anteriormente estudadas e associar os seus movimentos aos diferentes parâmetros. A calculadora gráfica serviu como suporte de aprendizagem aos estudantes e de criação de esquemas de utilização, permitindo à turma facilmente conectar esses conhecimentos com o novo desafio com que se deparam.

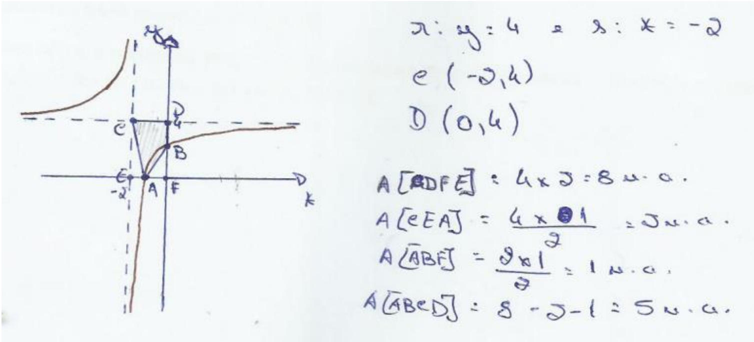
Uma representação gráfica esboçada corretamente é, por exemplo, a que foi executada pelo grupo E, onde assinalam os pontos referentes ao quadrilátero $[ABCD]$ pedido e outros pontos que utilizaram na sua resolução, demarcando de forma correta as assíntotas ao gráfico (Figura 42).

**Figura 42.** Resposta correta do grupo E às etapas 2 e 3 da Tarefa 2.




A resposta da Tarefa 2 foi apresentada com apenas um tipo de resolução. Todos os grupos optaram por retirar os valores das áreas dos dois triângulos retângulos que complementavam o quadrilátero $[ABCD]$ ao valor da área do quadrilátero de lados $[CD]$ e $[OD]$, como é possível verificar na resposta apresentada pelo grupo B (Figura 43).

**Figura 43.** Resposta correta do grupo B à etapa 4 da Tarefa 2.



O grupo que obteve uma classificação parcialmente correta na sua tarefa foi o grupo C, uma vez que não apresentou qualquer resposta na etapa final da Tarefa 2, devido à escassez do tempo. Também por este motivo, infelizmente, não foi possível efetuar uma discussão de resultados desta tarefa devido à falta de tempo e a problemas com a coordenação de aulas da turma.

A importância da presença da calculadora gráfica na primeira tarefa fez-se notória, não só porque, obviamente, sem a calculadora gráfica não seria possível utilizar o menu 'Gráfico Dinâmico', mas também devido ao suporte visual que a calculadora concedeu aos alunos nas suas explorações e conjeturas. Além disso, mais uma vez, o *emulator* teve um papel central como forma de apoio às apresentações dos alunos, permitindo-lhes, como foi o caso da apresentação da opção 'STEP' feita pelo grupo B na primeira tarefa, obter ou evoluir esquemas de utilização próprios, fazendo avançar a génese instrumental em cada um dos estudantes. A Tarefa 2, apesar de não ter diretamente influência instrumental, fez evidenciar o efeito que a calculadora gráfica teve na compreensão dos conceitos acerca da variação dos parâmetros estudados na primeira tarefa e que foram, posteriormente, projetados para a exploração da segunda tarefa.

## Síntese

Da análise da informação recolhida derivam algumas considerações em relação ao desenvolvimento do processo de génese instrumental nos alunos ao tirarem partido da calculadora gráfica nas suas atividades. Estas considerações descendem, essencialmente, dos tipos de esquemas que foram sendo utilizados pelos alunos, assim como da presença dos processos de instrumentalização e instrumentação e das relações encontradas entre 'sujeitos', 'objetos' e 'instrumentos'. Tal como já foi referido, nem sempre foi possível distinguir os esquemas de uso dos esquemas de ação instrumentada. No entanto, quando era possível essa distinção, os dois esquemas de utilização apareciam em diferentes contextos. Para esta síntese, emergiu a seguinte associação: os esquemas de uso são identificados por se tratar de ações diretamente ligadas à gestão da calculadora gráfica ou pela facilidade com que os alunos executam os procedimentos; os esquemas de ação instrumentada são associados a ações na calculadora gráfica diretamente ligadas à tarefa e a ações da calculadora gráfica que revelam algum tipo de desafio cognitivo nos alunos. Desta forma, no Quadro 4 são apresentados alguns identificadores de cada um dos esquemas de utilização presentes na primeira aula analisada.

**Quadro 4.** Identificadores de esquemas de utilização da aula: funções irracionais.

| Atividades | | Esquemas de utilização | |
|---|---|---|---|
| | | Esquemas de uso | Esquemas de ação instrumentada |
| Funções Irracionais | Tarefa 1 | – Esboçar a representação gráfica da função;<br>– Alterar janela de visualização. | – Determinar abcissa para uma dada ordenada da função;<br>– Determinar ordenada para uma dada abcissa da função. |
| | Tarefa 2 | – Esboçar a representação gráfica da função;<br>– Alterar janela de visualização;<br>– Editar expressão analítica da função;<br>– Determinar extremos de uma função. | – Utilizar as teclas da calculadora gráfica, movendo o gráfico da função e explorando as suas características. |

A determinação de uma abcissa/ordenada para uma dada ordenada/abcissa, respetivamente, de uma função pode ser considerada um esquema de uso. Neste caso, esta ação foi considerada um esquema de ação instrumentada. Esta associação deve-se ao facto de que, por exemplo, para a resolução da quarta questão da Tarefa 1, o grupo B utilizou esquemas de uso (alteração da janela de visualização) para determinar a abcissa de uma ordenada dada da função. No entanto, esta ação, além de estar diretamente ligada com o objetivo da questão, é utilizada, pelo mesmo grupo, de forma incorreta, levando a crer que este esquema de utilização não está ainda assimilado e integrado no conhecimento instrumental dos alunos deste grupo. Por outro lado, a edição da expressão analítica foi uma das ações cruciais para a resolução da Tarefa 2. Este ato foi fundamental para os grupos perceberem como se alterava o gráfico da função irracional para diferentes parâmetros. Apesar de estar diretamente ligada à resolução da tarefa, esta ação foi considerada esquema de uso pela facilidade com que é executada, sem merecer dúvida ou preocupação por parte dos alunos.

Todavia, repare-se que, apesar de certas ações serem considerados esquemas de uso, não são desprovidas de significado (Trouche, 2004). Na verdade, é necessário que o estudante consiga entender, por exemplo, em relação à alteração da janela de visualização, qual a parte do gráfico da função que se pretende analisar, percebendo qual é a janela de visualização mais adequada para o efeito (Drijvers & Trouche, 2008; Trouche, 2004).

Também a segunda aula analisada, referente aos limites de funções reais de variável real (r.v.r.) no infinito conta com vários esquemas de uso e de ação instrumentada (Quadro 5).

**Quadro 5.** Identificadores de esquemas de utilização da aula: limites de funções r.v.r. no infinito.

| Atividades | | Esquemas de utilização | |
|---|---|---|---|
| | | Esquemas de uso | Esquemas de ação instrumentada |
| Limites de funções r.v.r. quando $x$ tende para $\pm\infty$ | Tarefa 1 | – Esboçar a representação gráfica da função;<br>– Determinar ordenada para uma dada abcissa da função;<br>– Intersetar gráficos de funções;<br>– Editar expressões analíticas de funções. | – Definir domínio da função (menu 'Tabela');<br>– Definir intervalo entre valores (menu 'Tabela');<br>– Editar valores (menu 'Tabela');<br>– Esboçar assíntota ao gráfico da função;<br>– Alterar o estilo de curva do esboço gráfico de uma função. |
| | Tarefa 2 | – Esboçar a representação gráfica da função;<br>– Determinar abcissa para uma dada ordenada da função;<br>– Determinar ordenada para uma dada abcissa da função.<br>– Alterar o estilo de curva do esboço gráfico de uma função. | – Esboçar assíntota ao gráfico da função;<br>– Definir domínio da função (menu 'Tabela');<br>– Definir intervalo entre valores (menu 'Tabela'). |

É possível observar no Quadro 5 que, nesta aula, grande parte dos esquemas de ação instrumentada estão associados com o menu 'Tabela' recém-descoberto. Estas ações contribuíram para uma melhor interpretação das tabelas obtidas, como a alteração do domínio ou do intervalo entre valores, e consequente compreensão dos objetivos das tarefas. Alguns destes esquemas de uso surgiram também como evoluções de esquemas de ação instrumentada, e não apenas direcionados a tarefas secundárias, numa fase mais avançada da experiência. É o caso do grupo C no início da segunda tarefa. O processo de obtenção de uma ordenada sabendo a abcissa correspondente – cujo simples ato exige o conhecimento e a posse de esquemas de uso – é usualmente tido, como foi o caso da aula anterior, como um esquema de ação instrumentada. Na situação agora analisada, um elemento do grupo C, sem qualquer hesitação, procedeu à sua operação. Todos os procedimentos realizados por E1C são já tidos como dados adquiridos cuja facilidade de execução levou a uma sensação de conhecimento possuído e integrado, o que aponta num sentido de esquema de uso. Tal como defende Drijvers e Trouche (2008), "diferentes alunos podem desenvolver diferentes esquemas para o mesmo tipo de tarefa, ou utilizando um comando semelhante num ambiente tecnológico" (p. 18), apesar de, neste caso, estes esquemas surgirem em aulas distintas.

Em várias ocasiões, o desenvolvimento dos esquemas de utilização emergiu também acompanhado com um entendimento e descoberta da calculadora gráfica bem como das suas potencialidades e limitações. Consequentemente, os processos de instrumentação e instrumentalização se mostravam mais evoluídos no decorrer das aulas, mas nem sempre distinguíveis.

Na última aula analisada, apenas a primeira tarefa contou com esquemas de utilização, sendo que a segunda não fez uso da calculadora gráfica. O Quadro 6 apresenta alguns dos identificadores de esquemas de utilização detetados nessa aula.

**Quadro 6.** Identificadores de esquemas de utilização da aula: funções do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$.

| Atividades | | Esquemas de utilização | |
|---|---|---|---|
| | | Esquemas de uso | Esquemas de ação instrumentada |
| Funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ | Tarefa 1 | – Esboçar a representação gráfica da função;<br>– Executar comandos do menu 'Gráfico Dinâmico';<br>– Alterar o estilo de linha/curva de uma função.<br>– Intersetar gráficos de funções. | – Esboçar assíntotas ao gráfico da função;<br>– Alterar o intervalo entre valores (menu 'Gráfico Dinâmico')<br>– Alterar velocidade de movimentos entre gráficos das funções (menu 'Gráfico Dinâmico'). |

Analogamente à análise da aula, pelo Quadro 6 se percebe que a execução dos comandos do menu 'Gráfico Dinâmico' (esquemas de uso) contribuiu para o aparecimento de esquemas de ação instrumentada ligados com este menu, confirmando, como é defendido por Pedro (2021) que "os esquemas de uso podem servir como blocos de construção para esquemas de ordem superior, os esquemas de ação instrumentada" (p. 34).

Mais uma vez se presencia o esboço de assíntotas ao gráfico de uma função. Este aspeto foi utilizado essencialmente como meio de perceção e compreensão dos limites de funções. Apesar de ser executado com alguma facilidade, esta ação não é considerada um esquema de uso pela sua importância na interpretação dada pelos alunos, isto é, este passo estava intrínseco com a atividade desenvolvida na tarefa e com as conclusões a retirar, sendo, por isso, considerado esquema de ação instrumentada.

Esta tarefa permitiu que os alunos conseguissem analisar um maior número de exemplos num menor espaço de tempo, o que, segundo o NCTM (2000), enriquece a qualidade das suas investigações e conjeturas. Desta forma, os esquemas de utilização nomeados foram fundamentais para a evolução da construção do instrumento. Na exploração do menu 'Gráfico Dinâmico' presencia-se, como também aconteceu na exploração do menu 'Tabela', uma adaptação e personalização da calculadora gráfica ao perfil de cada estudante (alteração entre valores ou alteração da velocidade entre gráficos) cujas características seguem num sentido de instrumentalização (Trouche, 2004).

Apesar de não ter existido a presença de esquemas de utilização na Tarefa 2, devido à ausência da calculadora gráfica, verificou-se que a exploração efetuada na primeira tarefa fomentou algumas das conclusões obtidas. Tal como é defendido por Olive et al. (2010), foi-lhes possível, a partir do ambiente instrumental em que tinham estado inseridos, criar significados para a resolução da segunda tarefa.

Finalmente, não poderia deixar de referir que o grupo B, principalmente, revelou-se constantemente curioso em relação à calculadora gráfica, chegando a descobrir a funcionalidade de alteração da curva da representação gráfica das funções para uma curva tracejada, num momento anterior às aulas descritas, bem como descortinar o menu 'Gráfico Dinâmico', revelando a funcionalidade de alteração da velocidade a que se moviam as representações gráficas das funções definidas. Este comportamento revela indubitavelmente que, além de uma mente curiosa, havia a posse de esquemas de uso, possibilitando-lhes a criação de padrões que lhes permitiam trabalhar com outros tipos de funcionalidades na calculadora gráfica, desenvolver esquemas de ação instrumentada e criar e/ou fortalecer as relações entre os alunos, as tarefas e a sua calculadora gráfica. O reconhecimento das potencialidades e limitações do instrumento e a sua adaptação – num processo de instrumentalização – assim como a investigação da calculadora e construção de esquemas de utilização – num processo de instrumentação –, fez com que se notasse uma evolução significativa no processo de criação do instrumento, génese instrumental (Rabardel, 1995).

### 3.2. Avaliação do ensino ministrado

Com o objetivo de avaliar as estratégias de ensino e a aprendizagem na turma durante e no final da intervenção pedagógica, foi recolhida a informação através de dois métodos de recolha de dados. Como já foi referido, aplicou-se, no final da intervenção pedagógica um questionário anónimo (Anexo 3) com a finalidade de perceber que considerações tinha a turma em relação à aprendizagem do tema funções com o apoio da calculadora gráfica, bem como considerações acerca do próprio instrumento. Neste questionário foi utilizada a seguinte escala: 1 – discordo totalmente (DT); 2 – discordo (D); 3 – indiferente (I); 4 – concordo (C); e 5 – concordo totalmente (CT). Para além deste método de recolha de dados, no final de duas das aulas analisadas, foram recolhidas respostas dos alunos a questões, como forma de síntese, acerca da própria aula. As repostas dadas permitiram receber *feedback* imediato acerca do uso da calculadora gráfica e de dificuldades que foram sentidas durante a respetiva aula. Esta avaliação foi dividida em três dimensões de análise: (i) perceções sobre o tema de funções reais de variável real; (ii) perceções sobre as tarefas propostas; e (iii) perceções sobre a utilização da calculadora gráfica.

Durante a intervenção pedagógica, a turma foi revelando interesse e disposição de trabalho no que diz respeito ao tema de funções r.v.r. e poucas dificuldades no seu estudo, como se constata nas frequências que traduzem as respostas dos alunos às afirmações colocadas (Tabela 7).

**Tabela 7.** Frequência das perceções da turma acerca do tema de funções r.v.r. ($n = 20$).

| Afirmações | DT/D | I | C/CT | $\bar{x}$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Funções r.v.r. foi um tema da Matemática que gostei de estudar. | 1 | 4 | 15 | 3,9 | 0,77 |
| No tema das funções r.v.r., evidenciei mais dificuldades do que noutros temas matemáticos. | 12 | 2 | 6 | 2,45 | 1,28 |
| O tema de funções r.v.r. não é importante para a minha formação. | 11 | 7 | 2 | 2,45 | 0,97 |

Também nas questões feitas após a segunda aula analisada, é possível perceber-se que não houve grandes dificuldades por maior parte dos alunos, sendo que a única dificuldade apontada por um dos estudantes foi a de que "gerou confusão aplicar esses conteúdos a problemas da realidade" (E1E). É ainda importante salientar que, talvez pelo facto de as tarefas serem enquadradas em cenários reais, mais de metade da turma considera, segundo a Tabela 7, que o tema de funções é relevante para a sua própria formação.

As tarefas foram uma parte essencial de todo o processo da intervenção pedagógica. Desta forma, recolheram-se as perceções dos alunos sobre as tarefas que foram propostas nas aulas (Tabela 8).

**Tabela 8.** Frequência das perceções da turma acerca das tarefas propostas ($n = 20$).

| Afirmações | DT/D | I | C/CT | $\bar{x}$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|
| As tarefas propostas durante o capítulo das funções r.v.r. despertaram o meu interesse pela Matemática. | 2 | 5 | 13 | 3,9 | 0,99 |
| As tarefas propostas durante o capítulo das funções r.v.r. desafiaram os meus conhecimentos matemáticos. | 2 | 0 | 18 | 4,35 | 0,91 |
| As tarefas propostas durante o capítulo das funções r.v.r. desenvolveram o meu raciocínio matemático e pensamento crítico. | 1 | 1 | 18 | 4,45 | 0,8 |

Como é possível observar na Tabela 8, os alunos, no geral, concordam com o facto de que as tarefas propostas os ajudaram a ganhar interesse pela disciplina e a desafiar e desenvolver os seus conhecimentos. Também é mencionado, que a calculadora gráfica foi, por vezes, determinante para responder da melhor forma a algumas das tarefas apresentadas, como por exemplo, a Tarefa 2 da primeira aula. De facto, em algumas das respostas dadas pelos alunos, estes afirmavam que a calculadora gráfica surgiu como suporte para uma melhor compreensão e apoio da sua atividade, referindo que "por exemplo, na primeira tarefa [da aula 2], havia uma função crescente e outra decrescente, mas só me apercebi disso quando vi os gráficos [na calculadora gráfica]" (E4A). Alguns alunos referem também que a calculadora gráfica foi essencial para perceberem, tanto a nível tabelar como gráfico, os limites no infinito de funções, afirmando que "dá para perceber muito mais rápido qual é o limite da função" e que "para tirar conclusões, estas são as maneiras mais práticas de o fazer" (E2B).

Efetivamente, a utilização da calculadora gráfica durante a intervenção pedagógica indicia que teve um efeito positivo na turma. Por exemplo, nas respostas ao questionário final, 17 alunos referem a importância das funcionalidades gráficas da calculadora gráfica, onde um deles menciona especificamente que estas funcionalidades representaram "um método de auxílio à compreensão dos temas", acrescentando que se deve ao facto de "mostrar visualmente os processos normalmente analíticos [...] levando a uma simplificação e entendimento do que antes só tinha em papel". Há alunos que referem que algumas das funcionalidades adquiridas durante o ano letivo lhes permitiu uma melhor conceção em relação aos diferentes conceitos abordados, aludindo aos limites de funções e assíntotas a gráficos de funções, onde um dos alunos refere que "[a calculadora] foi determinante na compreensão dos limites das funções, permitindo que eu conseguisse observar os limites nos gráficos das respetivas funções". Das funcionalidades adquiridas, são principalmente referidos os menus 'Tabela' e 'Gráfico Dinâmico', sendo que muitos dos alunos apontam também para funcionalidades diretamente ligadas com o menu 'Gráfico': "usei pela primeira vez os menus 'Gráfico Dinâmico' e o das tabelas", completando que "aprofundei a [utilização da] funcionalidade 'Gráfico'". Na segunda aula, quando questionados acerca do tipo de representação (gráfica, analítica ou tabelar) que lhes pareceu mais relevante, alguns alunos afirmam que, apesar de os três métodos serem importantes, como exemplifica o aluno E2E, "a que pareceu mais relevante e de certa forma mais intuitiva foi a representação gráfica" e completa dizendo que para os alunos "é-nos mais facilmente percetível que [os limites das] funções tendem para determinado valor com uma representação gráfica porque observamos que de facto, o gráfico se aproxima desse valor". As características apontadas podem ser confirmadas a partir das respostas dadas na Tabela 9. Esta tabela apresenta algumas das perceções dos alunos em relação à utilização da calculadora gráfica durante o tópico de funções r.v.r. e na realização das tarefas propostas.

**Tabela 9.** Frequência das perceções da turma cerca da calculadora gráfica ($n = 20$).

| Afirmações | DT/D | I | C/CT | $\overline{x}$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Na aprendizagem de funções, recorri à calculadora gráfica para me ajudar na resolução de tarefas. | 0 | 0 | 20 | 4,7 | 0,46 |
| Na resolução de tarefas, só utilizava a calculadora gráfica porque me era exigido pelo enunciado. | 17 | 1 | 2 | 2 | 0,84 |
| Na resolução de tarefas, maior parte das vezes, começava por resolver analiticamente e só depois confirmava com a calculadora gráfica. | 7 | 1 | 12 | 3,2 | 1,17 |
| O uso da calculadora gráfica levou-me a estabelecer conexões entre as definições e as propriedades dos tópicos que foram estudados. | 0 | 2 | 18 | 4,25 | 0,62 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A calculadora gráfica ajudou-me a desenvolver melhores conhecimentos em relação aos temas estudados. | 0 | 0 | 20 | 4,45 | 0,5 |
| O uso da calculadora gráfica limitou o meu raciocínio. | 17 | 2 | 1 | 1,85 | 0,79 |
| Compreendi melhor os tópicos de funções quando usei papel e lápis. | 6 | 8 | 6 | 3 | 0,95 |
| Durante o estudo do tema de funções r.v.r., aprendi formas de utilizar a calculadora gráfica noutros temas da Matemática. | 0 | 1 | 19 | 4,5 | 0,59 |
| A utilização da calculadora gráfica tem sido maior no meu estudo autónomo do que no início do ano letivo. | 5 | 2 | 13 | 3,85 | 1,24 |
| A utilização da calculadora gráfica exigiu que tivesse bem presente conhecimentos dos tópicos em estudo. | 0 | 4 | 16 | 4,1 | 0,7 |
| A utilização da calculadora gráfica não me permitiu dar sentido ao estudo de tópicos de funções r.v.r.. | 20 | 0 | 0 | 1,4 | 0,49 |

De facto, a tendência das respostas aponta para uma concordância de que a calculadora gráfica auxiliou no desenvolvimento do conhecimento matemático e do pensamento crítico. A turma atribui alguns aspetos positivos em relação à utilização da calculadora gráfica na aprendizagem de funções como a vertente da visualização gráfica, que já tinha sido referido por vários alunos nas questões anteriormente colocadas, pequenas funcionalidades do menu 'Gráfico' (como determinação de zeros, de máximos e mínimos, fazer a interseção entre gráficos de funções), o facto de conseguirem representar as assíntotas ao gráfico das funções. Indicam também a importância de conseguirem utilizar diferentes tipos de representações num mesmo aparelho, não só permitindo, como refere um dos alunos, "uma abordagem mais completa da função que tencionamos estudar", como também possibilitando que "cada um possa utilizar o que compreender melhor".

Entre os aspetos negativos, são frequentemente referidos receios de que o uso da calculadora gráfica possa provocar uma "diminuição do intelecto e falta de autonomia" no estudante. Além disto, são mencionadas algumas das limitações da calculadora gráfica como "podem induzir em erro" e que "às vezes, encontrar a janela de visualização adequada para uma determinada função poderá tornar-se um bocado complicado". Alguns alunos mostram-se apreensivos com a implementação da calculadora gráfica nas atividades da sala de aula. No entanto, como foi possível verificar, grande parte da turma revela um grande interesse em conhecer, mais e melhor, este instrumento.

## CAPÍTULO 4
## CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Este capítulo divide-se em duas secções. A primeira secção apresenta as respostas a cada uma das questões de investigação propostas no início deste estudo. A segunda recai sobre as limitações sentidas antes, durante e após a realização desta investigação, bem como sobre algumas recomendações para futuros estudos acerca da mesma temática ou temáticas semelhantes.

### 4.1. Conclusões

Neste estudo procurou-se perceber o contributo da génese instrumental na aprendizagem de funções com o uso da calculadora gráfica por alunos do 11.º ano de escolaridade. Na concretização deste objetivo pretende-se responder às questões de investigação delineadas.

#### 4.1.1. Como os alunos integram a calculadora gráfica nas atividades que realizam no estudo de funções?

Desde o início da intervenção pedagógica que a integração da calculadora gráfica na atividade dos alunos foi executada com a finalidade de desenvolver e evoluir a relação da turma com este instrumento. Assim, a forma como cada aluno integrava a calculadora gráfica na sua atividade é de grande importância.

Numa fase inicial da experiência, quando eram preparadas tarefas que não exigiam a utilização da calculadora gráfica, os alunos não tinham a iniciativa de fazer a sua utilização a não ser que surgissem cálculos numéricos, não conseguissem resolver a partir de determinada circunstância ou se não soubessem por onde começar. Contudo, caso fosse referida a representação gráfica da função, não hesitavam em fazer uso do menu 'Gráfico' da calculadora gráfica. De facto, além do que era presenciado em sala de aula, estes aspetos foram verificados pelas respostas dadas pelos alunos ao questionário inicial (Anexo 1) onde mais de metade da turma revelou utilizar regularmente a calculadora gráfica para efetuar cálculos numéricos e confirmar respostas, mas também a utilizar frequentemente para esboçar gráficos. A calculadora gráfica era, assim, utilizada como um último recurso na aprendizagem dos tópicos em estudo. Nesta fase, a calculadora gráfica era utilizada, tal como reitera Rabardel (1995), como um artefacto, uma vez que não existia uma relação mútua entre o aluno e a sua calculadora gráfica (Drijvers et al, 2010).

Com o decorrer da intervenção pedagógica, fui tentando proceder às recomendações do NCTM (2000) que defendem que "os professores devem utilizar tecnologia para melhorar a aprendizagem dos alunos, selecionando ou criando tarefas matemáticas que tirem proveito do que a tecnologia consegue fazer [...] graficamente, visualmente" (p. 26). Foram propostas aos alunos tarefas que implicavam uma maior exigência do manuseamento da calculadora gráfica. Com efeito, as interações entre sujeito-instrumento (Verillon & Rabardel, 1995) foram evoluindo, tornando-se mais presentes. Ao procederem a uma utilização mais assídua da calculadora gráfica, os alunos foram confrontados com "um conjunto de constrangimentos que têm de identificar, perceber e gerir" (Verillon & Rabardel, p. 86). Os alunos continuavam a fazer uma utilização assídua de cálculos numéricos e do menu 'Gráfico', mas, neste último, de uma forma integrada com a atividade que desenvolviam. Começavam a conhecer algumas das suas limitações, como o espaço limitado da janela de visualização, e a aperceber-se de algumas potencialidades que poderiam tirar proveito, como a alteração do tipo de curva da representação gráfica da função.

A relação dos estudantes com a calculadora gráfica evoluiu significativamente com a descoberta e utilização do menu 'Gráfico Dinâmico'. Apesar de terem sido conduzidos nos processos iniciais, as interações instrumento-objeto e objeto-sujeito mediada pelo instrumento evoluíram, tornaram-se cada vez mais evidentes. Este menu permitiu que a turma conseguisse conjeturar e estudar situações que, sem a calculadora gráfica seriam demoradas e difíceis de resolver. Tal como é reiterado pelo NCTM (2000), com a utilização da calculadora gráfica, "os alunos podem raciocinar sobre questões mais gerais, como mudanças de parâmetros, e podem modelar e resolver problemas complexos que até então lhes eram inacessíveis" (p. 26).

No final da intervenção pedagógica, foi já possível perceber que a integração da calculadora gráfica na atividade dos alunos surgia de uma forma mais natural e fluida. Os estduantes revelaram uma maior agilidade e maturidade em relação ao instrumento, conseguindo gerir a sua atividade entre vários menus e diferentes representações, como foi traduzido na análise das três aulas, podendo afirmar-se que, para alguns alunos, houve, efetivamente, a construção de um instrumento.

#### 4.1.2. Que esquemas desenvolvem os alunos na utilização da calculadora gráfica nas suas atividades no estudo de funções?

Como já foi referido, a turma baseava a sua atividade, no início da intervenção pedagógica, mais em esquemas de compreensão algébrica do que em esquemas instrumentais, fazendo uso da calculadora gráfica apenas em situações de última instância. Por este motivo, a presença de esquemas de utilização foi apenas surgindo quando o uso da calculadora gráfica era imposto ou então era o único meio de resolução.

A partir das aulas analisadas, é possível perceber-se que os esquemas de uso foram surgindo inicialmente como ações na calculadora gráfica que auxiliavam à execução e consequente análise de esquemas de ação instrumentada. Os alunos foram desenvolvendo estes esquemas como "blocos de construção para esquemas de ordem superior, os esquemas de ação instrumentada" (Pedro, 2021, p. 34). Com o aumento progressivo da utilização da calculadora gráfica em sala de aula, onde esta era integrada na atividade dos alunos, começavam a surgir evoluções de esquemas de ação instrumentada como esquemas de uso. Os alunos conseguiam integrar e desenvolver tão facilmente determinadas ações que, o que inicialmente foi nomeado esquema de ação instrumentada, começava a surgir como esquema de uso. De facto, assim como defende Consciência (2014), "o mesmo esquema, dependendo da situação, pode ser considerado um esquema de uso ou um esquema de ação mediada pelo instrumento" (p. 28), ilustrando que a simples tarefa de editar uma expressão analítica de uma qualquer função, "para um aluno com experiência é um esquema de uso, enquanto para um aluno que está a aprender o que é necessário para editar uma expressão, corresponde a um esquema de ação mediada pelo instrumento" (idem). Este aspeto mostra a razão de grande parte dos esquemas de ação instrumentada indicados na análise da atividade dos alunos surgirem com a descoberta dos novos menus: 'Tabela' e 'Gráfico Dinâmico'.

Os esquemas de uso e os esquemas de ação instrumentada ajudaram também os estudantes no desenvolvimento da sua relação com a calculadora gráfica, identificando mais facilmente algumas restrições e capacidades do instrumento com o decorrer da intervenção pedagógica.

A partir dos diferentes esquemas desenvolvidos pelos diferentes alunos, surgiram diferentes visões acerca do instrumento calculadora gráfica, ou seja, tal como defende Trouche (2004) "a conceção do instrumento do utilizador é formada a partir do seu uso" (p. 295). Os diferentes esquemas desenvolvidos pelos alunos fizeram com que cada aluno moldasse a calculadora gráfica ao seu próprio uso e feitio (como a modificação da velocidade de alteração dos valores dos parâmetros no menu 'Gráfico Dinâmico'), num processo de instrumentalização, e as limitações e potencialidades da calculadora fizeram com que os alunos tivessem de se adaptar à calculadora e, consequentemente, alterar algumas estratégias de resolução, num processo de instrumentação (Drijvers et al, 2010).

### 4.1.3. Que dificuldades revelam os alunos na aprendizagem de funções e na exploração da calculadora gráfica?

Em relação ao tema de funções, foi possível identificar que alguns dos erros cometidos derivaram de dificuldades na resolução de equações racionais. Tal como foi apontado na análise das aulas, alguns grupos igualavam o denominador dos dois membros da equação racional, mas não demarcavam o domínio em que estavam a trabalhar. Os estudantes foram alertados para este erro, definido por Schnepper e McCoy (2013) como erro técnico, sendo que as funções racionais foram o principal tema em grande parte das aulas. Numa das aulas foi também apontada a associação errada de abcissa e ordenada, levando a que o grupo chegasse a um valor bastante diferente do que o que era pedido. A dificuldade com algumas terminologias relacionadas com o tema de funções foi apontada por Matos (2007) e Ponte et al. (2009).

De forma a tentar reduzir as dificuldades dos alunos nos tópicos de funções, foram utilizadas tarefas com situações contextualizadas onde as representações fossem variadas, de acordo com o sugerido por Ponte et al. (2009). No entanto, a gestão das várias representações, sendo que os alunos estariam mais habituados a representações analíticas e gráficas, muitas vezes não relacionadas, provocou algumas dúvidas na turma. As relações existentes entre as representações tabelar, gráfica e analítica revelaram-se, para alguns alunos, difíceis de encontrar. Entre elementos do mesmo grupo, os estudantes tentavam combater essas dificuldades questionando os colegas, o que se mostrou, grande parte das vezes, um método eficiente para as colmatar.

A aprendizagem e utilização dos menus 'Tabela' e 'Gráfico Dinâmico', que apresentavam também outros tipos de representações, provocaram dificuldades também no manuseamento da calculadora gráfica. Dentro de um artefacto (calculadora gráfica) existem outros artefactos integrados (menus). Trouche (2004) defende que a articulação entre vários artefactos exige o conhecimento de vários esquemas, o que nem sempre é fácil construir. Quem já revelava dificuldades em integrar a calculadora gráfica na sua atividade e em fazer a gestão destes artefactos, mostrou-se ainda mais desorientado. Com isto, a calculadora gráfica também levou a que algumas dificuldades fossem levantadas na resolução das tarefas. Num dos casos, o facto de o grupo não ter percebido que a alteração da janela de visualização era essencial para chegarem ao ponto pedido, fez com que a resposta não estivesse completa. No estudo das funções irracionais, onde a calculadora teve um papel bastante relevante, os alunos tiveram dificuldades em conjeturar em relação às diferentes características da função para os diferentes parâmetros. Muito dos estudantes da turma apresentaram bastantes dificuldades ao nível de transformações de gráficos, provavelmente derivadas da teoria que não foi devidamente consolidada.

#### 4.1.4. Quais as perceções dos alunos acerca da calculadora gráfica na aprendizagem de funções?

Durante a intervenção, foram abordados tópicos de funções com os quais a calculadora gráfica foi incluída de alguma forma: pela ajuda gráfica, tabelar ou pelo estudo de funções com alteração de parâmetros. Segundo Olive et al. (2010), a utilização da calculadora gráfica na disciplina de Matemática faz com que os alunos se sintam desafiados, o que foi confirmado pelas afirmações de que as tarefas propostas os desafiaram matematicamente. Adicionalmente, os alunos referiam que a utilização da calculadora gráfica exigia que tivessem bem presentes conceitos e conhecimentos acerca de funções, permitindo-lhes dar sentido ao que era estudado. Tal como defendem Guin e Trouche (1999), sem a utilização da calculadora gráfica, as estratégias usadas pelos alunos teriam uma carência de significado e de aprendizagem. De facto, os alunos concordavam que a utilização da calculadora gráfica lhes permitiu desenvolver conhecimentos mais consistentes dos tópicos estudados, afirmando que conseguiram estabelecer relações entre as definições e as propriedades estudadas do tema de funções.

Em concordância com as respostas dadas no primeiro questionário, os alunos reiteraram, no final da intervenção pedagógica, que a calculadora gráfica não lhes limitou o raciocínio. Todavia, revelaram bastante preocupações e receios de que venham a ser desenvolvidas dependências em relação a este instrumento e haja a perda de autonomia de trabalho. Apesar disto, realçaram o papel da vertente gráfica da calculadora gráfica que lhes permitiu auxiliar visualmente na interpretação e resolução de tarefas bem como a capacidade de, num único objeto, conseguirem ter acesso a diferentes tipos de representações, sendo a representação tabelar e a gráfica as mais enfatizadas.

De um modo geral, a turma fez transparecer que a intervenção pedagógica lhes permitiu evoluir as suas relações com a calculadora gráfica. Houve também o reconhecimento de que deve ser feita uma melhor e maior utilização deste instrumento. Alguns alunos continuaram céticos no que concerne ao uso mais frequente da calculadora gráfica em sala de aula, com receio de dependência, no entanto, revelaram que a calculadora gráfica conseguiu ser um grande suporte de aprendizagem.

### 4.2. Limitações e Recomendações

Se no início desta experiência pensei que o tempo de estágio ia ser demasiado longo, hoje apercebo-me de que foi demasiado curto. Esta é uma das principais limitações com que me deparei. O facto de o ano de estágio decorrer em apenas uma parte de um ano letivo levanta a problemática de que o tema do relatório dificilmente recai sobre os tópicos que são abordados até ao mês de dezembro. Além disso, houve alguma dificuldade em fazer a gestão entre os objetivos de aprendizagem do tema de funções reais de variável real de 11.º ano e os objetivos da minha investigação. Devido a prazos curriculares da disciplina, por vezes, não foi possível realizar todas as atividades que pretendia ou como pretendia.

No período em que decorreu o meu estágio profissional, os alunos regressavam de um ensino online devido à pandemia provocada pela Covid-19. Em conversações com o docente responsável pela turma, foi referido que os alunos se tornaram mais lentos na entrega de trabalhos em tempo definido. Isto também dificultou a gestão de tempo dentro da sala de aula e a coordenação das atividades durante as intervenções pedagógicas.

Para futuro, em relação ao tema da génese instrumental, é aconselhável que se entenda bem, e desde cedo, os conceitos teóricos que rodeiam o tema de maneira a adaptar, da melhor forma, tarefas ou qualquer tipo de material que seja utilizado. Além disso, quem pretende avaliar a evolução da génese instrumental num determinado grupo de alunos deve utilizar um ou mais instrumentos cujos mecanismos, potencialidades e limitações se conheçam e as ações inerentes estejam dominadas. De facto, o conhecimento integral do instrumento é crucial para uma melhor investigação neste tema (ou em temas semelhantes que envolvam a sua presença).

Na aplicação dos conceitos teóricos que rodeiam a génese instrumental, é recomendável que se explore o maior número de tarefas distintas com os alunos que envolvam a calculadora gráfica. A exploração de diferentes cenários e diferentes usos dos vários menus da calculadora gráfica, ajudam à evolução da relação dos alunos com o instrumento, onde os alunos conhecem as suas potencialidades e restrições, o que facilita a avaliação do seu desenvolvimento. Também as potencialidades e restrições do instrumento devem ser exploradas com os alunos, criando até tarefas em que a turma seja obrigada a deparar-se com tais cenários. A discussão deste tipo de características em turma pode gerar momentos de aprendizagem que elevam o vínculo entre o aluno e a sua calculadora gráfica.

Apesar das limitações sentidas, considero que o ano de estágio foi uma experiência única da qual tentei aproveitar da melhor forma possível. Teria mudado e melhorado alguns aspetos deste caminho, mas todos os momentos serviram para moldar a minha visão do que é ser docente e da vida que tenho (e quero) pela frente.

# BIBLIOGRAFIA


Almeida, A. C., & Oliveira, H. (2009). O processo de génese instrumental e a calculadora gráfica na aprendizagem de funções no 11. º ano. *Quadrante*, 87-118.

Bos, H. J. (2001). *Redefining geometrical exactness: Descartes' transformation of the early modern concept of construction*. Springer Science & Business Media.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11-17.

Cavanagh, M., & Mitchelmore, M. (2003). Graphics calculators in the learning of mathematics: teacher understandings and classroom practices. *Mathematics teacher education and development, 5*, 3-18.

Chazan, D., & Yerushalmy, M. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: Research on algebra learning and directions of curricular change. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 123-135.

Consciência, M. M. C. (2014). *A calculadora gráfica na aprendizagem das funções no ensino secundário.* Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

Departamento Ensino Secundário (DES) (1997). *MATEMÁTICA – Programas 10º, 11º e 12º anos*.

Drijvers, P. (2015). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). In *Selected regular lectures from the 12th international congress on mathematical education,* (pp. 135-151). Springer International Publishing.

Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*, *2*, 363-391.

Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M. A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., Leung, A., & Meagher, M. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. *Mathematics education and technology-rethinking the terrain: The 17th ICMI Study*, 89-132.

Ferreira, R. T., & Mendes, A. R. (2021). Mathematical learning in a virtual environment: the role of group work in solving problems. In *ICERI2021 Proceedings* (pp. 6172-6182). IATED Academy.

Freguglia, P., & Giaquinta, M. (2016). *The early period of the calculus of variations*. Birkhäuser.

Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *3*, 195-227.

Kaptelinin, V. (2003). Learning with artefacts: integrating technologies into activities. *Interacting with computers*, *15*(6), 831-836.

Matos, A. (2007). *Explorando relações funcionais no 8.º ano de escolaridade: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico.* Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa.

Matos, A., & Da Ponte, J. P. (2008). O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8. ano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(2), 195-231.

MEC (2018a). *Aprendizagens Essenciais: Articulação com o Perfil dos Alunos – 11.º Ano – Ensino Secundário – Matemática A*. Ministério da Educação e Ciência.

MEC (2018b). *Aprendizagens Essenciais: Articulação com o Perfil dos Alunos – 12.º Ano – Ensino Secundário – Matemática A*. Ministério da Educação e Ciência.

MEC (2021). *Aprendizagens Essenciais: Articulação com o Perfil dos Alunos – 7.º Ano – 3.º Ciclo do Ensino Básico – Matemática*. Ministério da Educação e Ciência.

Nachlieli, T., & Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom – The case of function. *International Journal of Educational Research, 51*, 10-27.

National Council for Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA.

Olive, J., Makar, K., Hoyos, V., Kor, L. K., Kosheleva, O., & STRäSSER, R. (2010). Mathematical knowledge and practices resulting from access to digital technologies. *Mathematics education and technology-rethinking the terrain: The 17th ICMI study*, 133-177.

Oliveira, D. P. A., Rosa, M., & Viana, M. D. C. V. (2014). De Oresme a Dirichlet: um breve histórico do desenvolvimento das funções. *Revista Brasileira de História da Matemática, 14(28)*, 47-61.

Pedro, M. M. S. B. (2021). *A tecnologia no desenvolvimento do currículo de Matemática no Ensino Básico – o contributo da Teoria da Mediação Semiótica*. Tese de Doutoramento, Universidade Nova de Lisboa.

Piaget, J. (1936). *La naissance de l'intelligence chez l'enfant.* Delachaux et Niestlé.

Ponte, J. P. D. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, 3-8.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*, (pp. 11-34). APM.

Ponte, J. P. (2017). Discussões coletivas no ensino-aprendizagem da Matemática. *A prática dos professores: planificação e discussão coletiva na sala de aula*, (1ª), 33-56.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa*, *7*(02), 355-377.

Rabardel, P. (1995). *People and Technology: a cognitive approach to contemporary instruments.* Paris: Université Paris 8.

Rebelo, C. (2011). *A aprendizagem das funções: uma experiência com alunos do 7º ano de escolaridade.* Dissertação de Mestrado, Universidade da Beira Interior.

Ricoy, M. C., & Couto, M. J. V. (2012). Os recursos educativos e a utilização das TIC no Ensino Secundário na Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, *25*(2), 241-262.

Rivera, F. D. (2007). Accounting for students' schemes in the development of a graphical process for solving polynomial inequalities in instrumented activity. *Educational Studies in Mathematics*, *65*, 281-307.

Roque, T. (2012). *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo muitos e lendas*. Zahar.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function – A case study. *Educational studies in mathematics*, *53*, 229-254.

Schnepper, L. C., & McCoy, L. P. (2013). Analysis of Misconceptions in High School Mathematics. *Networks: An Online Journal for Teacher Research, 15*(1), 1-7.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*, 281-307.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 167-181.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European journal of psychology of education, 10*(1), 77-101.

Viseu, F., Fernandes, J. A., & Martins, P. M. (2017). Exploração da noção de função em tabelas e gráficos por alunos do 3.º ciclo. *Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación, 1*, 11-15.

# ANEXOS

## Anexo 1 – Questionário Inicial

No âmbito do Estágio Profissional do 2.º ano do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, pretende-se conhecer o interesse e hábitos dos alunos da tua turma do 11.º ano em relação à disciplina da Matemática e à utilização da calculadora gráfica. A informação recolhida será usada somente para fins académicos, assegurando-se o seu anonimato através da proteção dos dados fornecidos.

1. Idade: ________

2. Sexo: ________

3. Número de retenções: ________ Em caso de retenções, em que anos escolares? ________

4. Classificação média do 10.º ano, de todas as disciplinas: ________

5. Tens como objetivo ingressar na universidade? ☐ Sim ☐ Não

5.1. Se sim, em que área? ____________________________________________

5.2. Se não, porquê? ____________________________________________

6. Classifica, numa escala de 1 a 5, em que medida achas que a Matemática será útil no teu futuro?

Bastante útil ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 Nada útil

7. Como classificas, numa escala de 1 a 5, o teu gosto pela Matemática?

Detesto ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 Adoro

8. Classifica, numa escala de 1 a 5, a facilidade com que entendes Matemática:

Muito mal ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 Bastante bem

9. Costumas estudar regularmente Matemática? ☐ Sim ☐ Não

9.1. Se sim, em média, quantas horas semanais estudar Matemática?

☐ < 1h ☐ 1h – 3h ☐ 3h – 5h ☐ > 5h

9.2. Se não, porquê? ____________________________________________

10. Recebes algum tipo de apoio a Matemática fora da escola? (como explicações) ☐ Sim ☐ Não

11. Quais são as maiores dificuldades que sentes à disciplina de Matemática?

☐ Efetuar cálculos numéricos

☐ Interpretar representações gráficas

☐ Interpretar enunciados

☐ Recordar teoria explorada em anos anteriores

☐ Aplicar teoria

☐ Relacionar temas

☐ Explorar a calculadora gráfica

☐ Manter-me concentrado(a) nas aulas

☐ Manter-me concentrado(a) nos estudos

☐ Outro: ________________________

12. Tens calculadora gráfica? ☐ Sim ☐ Não

12.1. Se sim, qual é o modelo da tua calculadora gráfica? ________________________________________

13. Antes do 10.º ano, já tinhas utilizado uma calculadora gráfica? ☐ Sim ☐ Não

13.1. Se sim, em que ano de escolaridade? __________________________________________________

14. Classifica de 1 a 5, com que frequência utilizas a calculadora gráfica nas atividades de sala de aula:

Nunca ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 Sempre

15. Quando utilizas a calculadora gráfica, qual é, normalmente, o objetivo?

☐ Confirmar respostas

☐ Interpretar representações gráficas

☐ Esboçar gráficos

☐ Efetuar gráficos numéricos

☐ Ser mais fácil chegar à solução

☐ Outra: ____________________________________________________

16. O que sabes obter utilizando a tua calculadora gráfica?

☐ Zeros de funções

☐ Máximos de funções

☐ Mínimos de funções

☐ Gráficos de funções

☐ Interseção de gráficos de funções

☐ Tabelas

☐ Gráficos de sucessões

☐ Conversões de unidades

☐ Soluções de equações polinomiais

☐ Estudar figuras geométricas

☐ Outra: ____________________________________________________

17. Assinala, das seguintes afirmações, aquelas com que concordas:

☐ A calculadora gráfica ajuda-me a desenvolver raciocínios matemáticos.

☐ A calculadora gráfica ajuda-me na interpretação de enunciados.

☐ A calculadora gráfica limita o meu raciocínio.

☐ Utilizo a calculadora gráfica apenas quando me é exigido pelo enunciado.

☐ Confio mais nos meus processos analíticos do que nos resultados obtidos pela calculadora gráfica.

☐ Costumo utilizar com frequência a calculadora gráfica no meu estudo autónomo.

18. Indica três aspetos positivos da utilização da calculadora gráfica na tua aprendizagem de tópicos matemáticos:

___________________________________________________________________________

19. Indica três aspetos negativos da utilização da calculadora gráfica na tua aprendizagem de tópicos matemáticos:

___________________________________________________________________________

20. Gostavas de fazer uma maior utilização da calculadora gráfica na sala de aula?

☐ Sim ☐ Não ☐ Talvez

## Anexo 2 – Pedido de autorização de gravações aos Encarregados de Educação

**Exmo(a). Sr(a). Encarregado(a) de Educação,**

No âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade de Minho, enquanto professora estagiária, pretendo desenvolver uma experiência de ensino que potencie a aprendizagem dos alunos. O desenvolvimento dessa experiência implica a recolha de dados, que serão obtidos através da resolução de tarefas e da observação de aulas. Para uma melhor compreensão das atividades que se desenvolvem na aula de Matemática, necessito de proceder à **recolha de dados através de gravações (áudio e vídeo)**. Para esse fim, venho por este meio solicitar a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio e vídeo dos dados necessários à concretização da experiência de ensino e de aprendizagem na sala de aula do seu educando.

Comprometo-me a usar os dados apenas para fins académicos e a não divulgar o nome da escola e dos alunos, nem expor qualquer indicador que envolva o seu educando.

Agradeço desde já a sua colaboração. Com os melhores cumprimentos,

Braga, 5 de novembro de 2021

A estagiária de Matemática,

________________________________________

(Flávia Mesquita Pereira)

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

**Autorização**

Eu, ________________________________________, Encarregado de Educação do(a) aluno(a) __________________________________, autorizo que se faça o registo em áudio e vídeo das atividades de ensino e de aprendizagem na aula de Matemática que envolvem o meu educando desde que seja salvaguardado o anonimato do seu nome e de qualquer indicador que o indicie.

Encarregado(a) de Educação,

________________________________________

## Anexo 3 – Questionário Final

Este questionário tem como finalidade conhecer as tuas perceções acerca da utilização da calculadora gráfica durante a aprendizagem dos tópicos de funções reais de variável real (r.v.r.). É importante que as respostas sejam dadas de forma consciente e clara. Não existem respostas corretas ou erradas. A informação recolhida será utilizada exclusivamente para fins académicos, assegurando-se o seu anonimato.

1. Nas seguintes afirmações, assinala o teu grau de concordância tendo em consideração a seguinte escala: DT – discordo totalmente; D – discordo; I – indiferente; C – concordo; CT – concordo totalmente.

| **Afirmações** | **DT** | **D** | **I** | **C** | **CT** |
|---|---|---|---|---|---|
| Funções r.v.r. foi um tema da Matemática que gostei de estudar. | | | | | |
| No tema das funções r.v.r., evidenciei mais dificuldades do que noutros temas matemáticos. | | | | | |
| O tema de funções r.v.r. não é importante para a minha formação. | | | | | |
| As tarefas propostas durante o capítulo das funções r.v.r. despertaram o meu interesse pela Matemática. | | | | | |
| As tarefas propostas durante o capítulo das funções r.v.r. desafiaram os meus conhecimentos matemáticos. | | | | | |
| As tarefas propostas durante o capítulo das funções r.v.r. desenvolveram o meu raciocínio matemático e pensamento crítico. | | | | | |
| Na aprendizagem de funções, recorri à calculadora gráfica para me ajudar na resolução de tarefas. | | | | | |
| Na resolução de tarefas, só utilizava a calculadora gráfica porque me era exigido pelo enunciado. | | | | | |
| Na resolução das tarefas, maior parte das vezes, começava por resolver analiticamente e só depois confirmava com a calculadora gráfica. | | | | | |
| O uso da calculadora gráfica levou-me a estabelecer conexões entre as definições e as propriedades dos tópicos que foram estudados. | | | | | |
| A calculadora gráfica ajudou-me a desenvolver melhores conhecimentos em relação aos temas estudados. | | | | | |
| O uso da calculadora gráfica limitou o meu raciocínio. | | | | | |
| Compreendi melhor os tópicos de funções quando usei papel e lápis. | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Durante o estudo do tema de funções r.v.r., aprendi formas de utilizar a calculadora gráfica noutros temas da Matemática. | | | | | |
| A utilização da calculadora gráfica tem sido maior no meu estudo autónomo do que no início do ano letivo. | | | | | |
| A utilização da calculadora gráfica exigiu que tivesse bem presente conhecimentos dos tópicos em estudo. | | | | | |
| A utilização da calculadora gráfica não me permitiu dar sentido ao estudo de tópicos de funções r.v.r.. | | | | | |

2. Consideras que a calculadora gráfica te ajudou a compreender melhor o tema de funções reais de variável real? Em que aspetos?

___

3. Durante a realização das tarefas, em que situação a calculadora gráfica foi determinante para a tua aprendizagem de algum tópico matemático?

___

4. Que ações e funcionalidades da calculadora gráfica adquiriste durante o estudo dos tópicos matemáticos de funções reais de variável real?

___

5. Enumera três aspetos positivos do uso da calculadora gráfica na aprendizagem das funções reais de variável real:

___

6. Enumera três aspetos negativos do uso da calculadora gráfica na aprendizagem das funções reais de variável real:

___

## Anexo 4 – Plano de aula: funções irracionais

| Plano de aula | Comentários |
|---|---|

**Tópico:** Funções Irracionais.

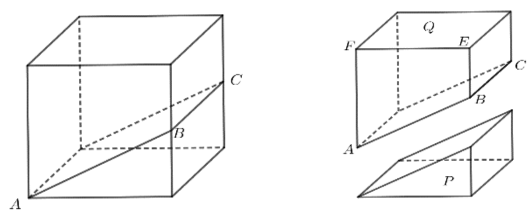
**Objetivos:** Reconhecer, interpretar e representar graficamente funções irracionais do tipo $f(x) = a\sqrt{x-b} + c$.

**Conhecimentos prévios:** Generalidades sobre funções reais de variável real.

**Formato de Ensino:** Ensino Exploratório.

### Tarefa 1 – Corte no cubo

A partir de um cubo foram construídas duas peças, $P$ e $Q$, através de um corte pelo plano $ABC$, em que os pontos $B$ e $C$ são pontos médios das arestas a que pertencem. Seja $l$ o comprimento da aresta do cubo.




1. Designa por $v$ o volume, em centímetros cúbicos, da peça $P$. Mostra que a aresta do cubo é dada em função de $v$ por uma função $f$ tal que: $f(v) = \sqrt[3]{4v}$.
2. Designa por $a$ a área, em centímetros quadrados, da face $[ABEF]$ da peça $Q$. Mostra que a aresta do cubo é dada em função de $a$ por uma função $g$ tal que: $g(a) = 2 \times \sqrt{\frac{a}{3}}$.
3. Recorrendo às funções $f$ e $g$, que definiste nas alíneas anteriores, e à tua calculadora gráfica, preenche a seguinte tabela, apresentando os resultados arredondados às centésimas:

| Volume da peça $P$ ($v$) | Aresta do cubo | Área da face $[ABEF]$ ($a$) |
|---|---|---|
| 12 | | |
| | | 16 |
| 35 | | |
| | | 40 |

4. Considera que a aresta do cubo tem $10\,cm$ de comprimento. Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, faz o esboço gráfico das funções $f$ e $g$ e determina, graficamente, os valores de $v$ e de $a$.

### Exploração

1. Entregar o enunciado da tarefa a cada grupo. Dar dois minutos para a sua leitura. Questionar os alunos sobre o objetivo da tarefa e se há dúvidas em relação à interpretação do enunciado.
2. Propor a exploração da tarefa à turma.
3. Discutir os resultados obtidos em grupo-turma.

**Comentários:**

Turma do 11.º ano de escolaridade do curso de Ciências e Tecnologias. Aula com uma duração de 90 min.

Pretende-se avaliar conhecimentos e capacidades dos alunos na resolução de problemas e no uso da calculadora gráfica

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório ao proporcionar momentos de trabalho em torno de tarefas: (i) introdução; (ii) exploração; (iii) discussão e sistematização de conhecimentos.

A turma será organizada em grupos de 4 alunos previamente definidos.

As respostas às duas tarefas serão escritas em folhas que serão recolhidas no final da aula.

(i) Entregar o enunciado da tarefa aos grupos. Pedir uma leitura cuidada do enunciado e questionar se há dúvidas. (duração: 5min)

(ii) Exploração e resolução da tarefa. Apoiar o trabalho dos alunos identificando dúvidas, estratégias de resolução e exploração da calculadora gráfica. (duração: 15min)

(iii) Discussão em grupo-turma sobre a resolução da tarefa com recurso ao emulator. (duração: 15min)

Com esta questão 4. pretende-se que os alunos relacionem as expressões que obtiveram com a noção de função irracional, foco da tarefa seguinte.

4. Questionar os alunos acerca das funções obtidas.

**Tarefa 2 – Funções irracionais**

Considera a função real de variável real $f$, definida pela expressão $f(x) = \sqrt{x}$. Esta função é denominada por função irracional. Partindo da função $f$, estuda e interpreta gráfica e analiticamente, para $a, b, c \in \mathbb{R}$ e com $a \neq 0$, funções do tipo $g(x) = a\sqrt{x-b} + c$. De forma a organizares os teus resultados, opta por apresentar as tuas conclusões, por exemplo, na forma de composição matemática ou tabela.

(sugestão: dá valores a cada um dos parâmetros $a$, $b$ e $c$, um de cada vez, para generalizares o estudo da função $g$ a partir da transformação da representação gráfica da função $f$)

**Exploração**

1. Entregar o enunciado da tarefa a cada grupo. Dar dois minutos para a sua leitura. Questionar os alunos sobre o objetivo da tarefa e como a pretendem desenvolver.
2. Propor a exploração da tarefa à turma.
3. Discutir os resultados obtidos em grupo-turma.

**Síntese Final**

Partindo da função irracional $f$, definida por $f(x) = \sqrt{x}$, que informações obténs para o estudo da função $g$, definida por $g(x) = a\sqrt{x-b} + c$?

**Materiais:** Calculadora gráfica e *emulator*

(i) Entrega dos enunciados aos grupos. Pedir uma leitura cuidada do enunciado e questionar se há dúvidas. Tentar perceber se entenderam qual é o objetivo da tarefa.
(duração: 5min)

(ii) Exploração e resolução da tarefa. Apoiar o trabalho dos alunos identificando dúvidas, estratégias de resolução e exploração da calculadora gráfica.
(duração: 30min)

(iii) Discussão em grupo-turma sobre a resolução da tarefa e conhecimentos obtidos.
(duração: 10min)

A síntese final vai de encontro ao objetivo da aula. Pretende-se que seja feito o preenchimento de uma tabela que generaliza domínio, contradomínio, concavidade, monotonia e extremos de funções irracionais do tipo $f(x) = a\sqrt{x-b} + c$..
(duração: 10min)

## Anexo 5 – Plano de aula: limites de funções reais de variável real quando $x$ tende para $\pm\infty$

### Plano de aula

**Tópico:** Limites de funções reais de variável real quando $x$ tende para $\pm\infty$.

**Objetivo:** Interpretar situações e contextos variados que envolvam limites no infinito. Definir o conceito intuitivo de assíntota.

**Conhecimentos prévios:** Generalidades sobre funções. Funções racionais. Limites de funções segundo Heine.

**Formato de Ensino:** Ensino Exploratório.

**Tarefa 1 – Crias das espécies A e B**

Em 2009, num certo ecossistema foram colocadas crias das espécies de animais $A$ e $B$.

Admite que, $t$ anos após o início do ano 2009, o número de animais, em milhares, da espécie $A$ é dado aproximadamente por $A(t) = \frac{11t+6}{t+1}, (t \geq 0)$, e que o número de animais, em milhares, da espécie $B$ é dado, aproximadamente, por $B(t) = \frac{t+9}{t+3}, (t \geq 0)$.

1. Sabe-se que, desde o início do ano 2009 até ao início do ano 2010 morreram 500 animais da espécie $A$. Determina quantos animais dessa espécie nasceram nesse intervalo de tempo.
2. Calcula, por um método analítico, gráfico e tabelar, os limites seguintes: $\lim\limits_{t \to +\infty} A(t)$ e $\lim\limits_{t \to +\infty} B(t)$ e interpreta o resultado no contexto do problema.
3. A diferença entre o número de animais da espécie $A$ e o número de animais da espécie $B$ vai aumentando, com o decorrer do tempo, e tende para um certo valor. Determina esse valor, justificando.

**Exploração**

1. Entregar o enunciado da tarefa a cada grupo. Questionar os alunos sobre o objetivo da tarefa e se há dúvidas em relação ao enunciado.
2. Propor a exploração da tarefa à turma.
3. Discutir os resultados obtidos em grupo-turma, reforçando o papel desempenhado pelos limites no infinito na interpretação dos contextos em estudo.
4. Abordar intuitivamente o conceito de assíntota horizontal.

**Tarefa 2 – Salto em altura**

O Filipe, um atleta que está a iniciar a sua carreira em salto em altura, arranjou um treinador para o ajudar. Este, depois de lhe fazer alguns exames físicos, disse-lhe que a altura a que conseguiria saltar se seguisse cuidadosamente o seu novo método de treino, evoluiria de acordo com a seguinte função $a(t) = \frac{2450t+43967}{1000t+37260}$, em que $a$ é a altura em metros que consegue atingir após $t$ semanas desde o início dos treinos.

1. Que altura, arredondada às centésimas, consegue saltar o Filipe quando inicia os treinos?
2. O grande objetivo do Filipe é bater o recorde nacional de 2,28 metros. Justifica se será possível o Filipe alcançar o seu objetivo e, em caso afirmativo, determina quando é que isso ocorrerá. Apresenta o teu resultado em anos e semanas arredondado às unidades.

### Comentários

Turma de 11.º ano de escolaridade de Ciências e Tecnologias
Duração: 90min

Pretende-se desenvolver conhecimentos e capacidades dos alunos na resolução de problemas e no uso da calculadora gráfica.
O formato de ensino adquire características do ensino exploratório ao proporcionar momentos de trabalho em torno de tarefas: (i) introdução; (ii) exploração; (iii) discussão e sistematização de conhecimentos.
A turma será organizada em grupos de 4 alunos previamente definidos.

Tarefa 1 adaptada do teste intermédio de 11.º ano (maio de 2010).

(i) Entregar o enunciado da tarefa aos grupos. Pedir uma leitura cuidada do enunciado e questionar se há dúvidas. (duração: 5min)
(ii) Exploração e resolução da tarefa. Apoiar o trabalho dos alunos identificando dúvidas, estratégias de resolução e exploração da calculadora gráfica. (duração: 20min)
(iii) Discussão em grupo-turma sobre a resolução da tarefa com recurso ao *emulator*. Os grupos serão aleatoriamente chamados a responder às questões, ficando ao critério do grupo quem irá responder. Caso seja necessário, será solicitado mais do que um elemento para ajudar na exploração simultânea com o *emulator* (como por exemplo nas questões 2 a 5).
(duração: 20min).

| | |
|---|---|
| 3. A maior evolução da altura do salto do Filipe dá-se da primeira para a décima semana ou da septuagésima para a centésima semana?<br>4. O recorde do mundo está nos 2,45 metros. Será que o Filipe conseguirá atingir e/ou ultrapassar este valor? Justifica, representando o(s) gráfico(s), tabelas e/ou cálculos analíticos que te ajudem na tua resposta.<br>**Exploração**<br>1. Entregar o enunciado da tarefa a cada grupo. Questionar os alunos sobre o objetivo da tarefa e se há dúvidas em relação ao enunciado.<br>2. Propor a exploração da tarefa à turma.<br>3. Discutir os resultados obtidos em grupo-turma, reforçando o papel desempenhado pelas representações gráficas de funções no estudo de limites no infinito e na interpretação dos contextos em estudo.<br>**Síntese Final**<br>Pedir aos alunos que respondam às seguintes questões:<br>1. De que forma a calculadora gráfica te ajudou ou não a dar sentido aos conteúdos teóricos abordados nestas duas tarefas?<br>2. Dos três tipos de representações (analítica, gráfica e tabelar) qual te pareceu mais relevante no estudo de limites no infinito? Qual delas achas que te poderá ajudar mais futuramente?<br>3. Que dificuldades sentiste na aplicação dos conteúdos anteriormente aprendidos? E na utilização da calculadora gráfica?<br>**Materiais:** Calculadora gráfica e *emulator*. | (i) Entregar o enunciado da tarefa aos grupos. Pedir uma leitura cuidada do enunciado e questionar se há dúvidas. (duração: 5min)<br>(ii) Exploração e resolução da tarefa. Apoiar o trabalho dos alunos identificando dúvidas, estratégias de resolução e exploração da calculadora gráfica. (duração: 20min)<br>(iii) Discussão em grupo-turma sobre a resolução da tarefa com recurso ao *emulator*. Os grupos serão aleatoriamente chamados a responder às questões, ficando ao critério do grupo quem irá responder. Caso seja necessário, será solicitado mais do que um elemento para ajudar na exploração simultânea com o *emulator*.<br>(duração: 15min).<br><br>Síntese: (duração:5min) |

## Anexo 6 – Plano de aula: funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$

<table>
<tr><th>Plano de aula</th><th>Comentários</th></tr>
<tr><td>

**Tópico:** Funções racionais.

**Objetivo:** Reconhecer, interpretar e representar graficamente funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, referindo o conceito intuitivo de assíntota e usá-las na resolução de problemas.

**Conhecimentos prévios:** Generalidades sobre funções. Funções racionais. Limites de funções segundo Heine. Limites laterais. Limites no Infinito.

**Formato de Ensino:** Ensino exploratório.

**Tarefa 1 – Gráfico Dinâmico**

A partir da representação gráfica da função $g$ definida por $g(x) = \frac{1}{x}$, pretende-se fazer um estudo de funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$.

Explorando o menu 'Gráfico Dinâmico' da calculadora gráfica, regista na tua folha de resposta o que observas e o que podes concluir acerca do domínio, contradomínio, assíntotas e transformações do gráfico da função $f$ em relação ao gráfico da função $g$, completando as tabelas.

**Exploração**

1. Questionar os alunos sobre o objetivo da tarefa.
2. Propor a exploração da tarefa à turma.
3. Discutir os resultados obtidos em grupo-turma, reforçando o papel desempenhado pelos limites no infinito e limites laterais na interpretação das assíntotas de representações gráficas de funções.

**Tarefa 2**

Considera a função $f$ definida por $f(x) = \frac{4x+4}{x+2}$.

Sejam as retas $r$ e $s$ assíntotas horizontal e vertical, respetivamente, do gráfico de $f$.

Sejam os pontos:

→ $A$ e $B$ os pontos de interseção do gráfico da função $f$ com os eixos coordenados;

→ $C$ o ponto de interseção das retas $r$ e $s$;

→ $D$ o ponto de interseção da reta $r$ com o eixo $Oy$.

Determina a área do quadrilátero $[ABCD]$.

Sem utilizar a calculadora gráfica, desenha um esboço do gráfico da função $f$, marcando os pontos $A, B, C$ e $D$ e assinalando o quadrilátero $[ABCD]$.

**Exploração**

1. Questionar os alunos sobre o objetivo da tarefa.
2. Propor a exploração da tarefa à turma.
3. Discutir os resultados obtidos em grupo-turma.

**Síntese Final**

Pedir aos alunos que respondam às seguintes questões:

1. De que forma a calculadora gráfica te ajudou ou não a dar sentido aos conteúdos teóricos abordados na primeira tarefa?
2. Que dificuldades sentiste na aplicação dos conteúdos? E na utilização da calculadora gráfica?

**Materiais:** Calculadora gráfica e *emulator*.

</td><td>

Turma de 11.º ano de escolaridade de Ciências e Tecnologias

Duração: 90min

Pretende-se desenvolver conhecimentos e capacidades nos alunos acerca de funções racionais e o estudo da sua representação gráfica com recurso à calculadora gráfica.

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório ao proporcionar momentos de trabalho em torno de tarefas: (i) introdução; (ii) exploração; (iii) discussão e sistematização de conhecimentos.

A turma será organizada em grupos de 4 alunos previamente definidos.

(i) Entregar o enunciado da tarefa aos grupos. Pedir uma leitura cuidada do enunciado e questionar se há dúvidas. (duração: 5min)

(ii) Exploração e resolução da tarefa. Apoiar o trabalho dos alunos identificando dúvidas, estratégias de resolução e exploração da calculadora gráfica. (duração: 35min)

(iii) Discussão em grupo-turma sobre a resolução da tarefa com recurso ao emulator. Serão chamados três elementos de diferentes grupos para mostrar o processo de exploração da calculadora (emulator) e as respetivas conclusões acerca de cada parâmetro. (duração: 20min).

A tarefa 2 é adaptada do teste intermédio de 11.º ano de maio de 2009.

(i) Entregar o enunciado da tarefa aos grupos. Pedir uma leitura cuidada do enunciado e questionar se há dúvidas. (duração: 5min)

(ii) Exploração e resolução da tarefa. Apoiar o trabalho dos alunos identificando dúvidas e estratégias de resolução. (duração: 15min)

É necessário que os alunos tentem esboçar o gráfico de $f$ sem a calculadora gráfica de forma a perceber se entenderam o que foi explorado na tarefa anterior. Pode, eventualmente, ser pedido aos alunos que guardem as calculadoras durantes uns minutos para esboçarem uma primeira representação do gráfico. Depois de perceber que desenharam o esboço sem calculadora, irá ser permitido aos alunos confirmarem o gráfico na calculadora gráfica.

(iii) Discussão em grupo-turma sobre a resolução da tarefa com recurso ao emulator (duração: 15min).

Síntese (duração: 5min)

</td></tr>
</table>

**Folha de resposta – Tarefa 1**

Preenche as tabelas com as informações pedidas. Sempre que encontrares colunas de tabelas vazias, preenche-as com exemplos que apoiem as tuas conclusões.

Começa por fazer um estudo da função $g$ definida por $g(x) = \frac{1}{x}$.

| Função | Representação Gráfica | Domínio | Contradomínio | Assíntotas |
|---|---|---|---|---|
| $g(x) = \frac{1}{x}$ | | | | |

Em relação à função $f$, <u>alterando apenas o parâmetro $a$:</u>

| Função | | | $f(x) = a + \frac{1}{x}$ | Comentários |
|---|---|---|---|---|
| Representação Gráfica | | | | |
| Domínio | | | | |
| Contradomínio | | | | |
| Assíntotas | | | | |
| Transformações do gráfico de $f$ em relação ao gráfico de $g$ | | | | |

Em relação à função $f$, alterando apenas o parâmetro $b$:

| Função | | | $f(x) = \frac{b}{x}$ | Comentários |
|---|---|---|---|---|
| Representação Gráfica | | | | |
| Domínio | | | | |
| Contradomínio | | | | |
| Assíntotas | | | | |
| Transformações do gráfico de $f$ em relação ao gráfico de $g$ | | | | |

Em relação à função $f$, alterando apenas o parâmetro $c$:

| Função | | | $f(x) = \frac{1}{x-c}$ | Comentários |
|---|---|---|---|---|
| Representação Gráfica | | | | |
| Domínio | | | | |
| Contradomínio | | | | |
| Assíntotas | | | | |
| Transformações do gráfico de $f$ em relação ao gráfico de $g$ | | | | |