Addressing a geological conjecture as a Quadratic Eigenvalue Problem

M. Antónia Forjaz, António Mário Almeida,
Jorge Pamplona and T. de Lacerda Aroso

Centro of Matemática
Centro de Física
Instituto de Ciências da Terra (ICT), UM Polo
Universidade do Minho

Motivação

Um Problema Geológico

- Nos processos geológicos (estratificação, dobramento e *boudinage*) materiais com propriedades fisicas contrastantes estão frequentemente em contacto;
- A predição da evolução de diferentes camadas, com contraste de viscosidade elevado, geradas em cisalhamento progressivo.

Motivação

Um Problema Geológico

- Nos processos geológicos (estratificação, dobramento e *boudinage*) materiais com propriedades fisicas contrastantes estão frequentemente em contacto;
- A predição da evolução de diferentes camadas, com contraste de viscosidade elevado, geradas em cisalhamento progressivo.

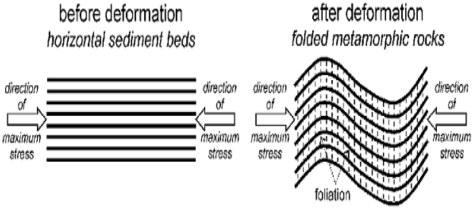
E os Problemas Físicos associados

- Estudo de instabilidades em sistemas com fricção;
- Balanço entre parâmetros de viscososidade e de elasticidade em fluxos de materiais dúcteis com sobreamortecimento.

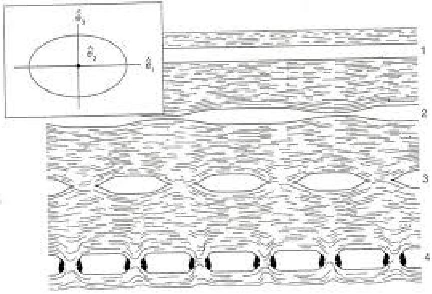
Problemas Geológicos

Cânones em geologia estrutural

O dobramento é gerado por compressão paralela ou oblíqua sobre as camadas geológias.



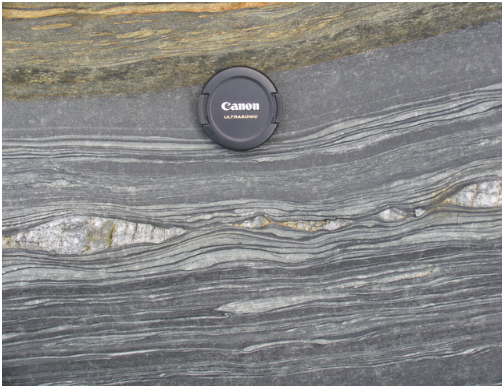
A *boudinage* é gerada por compressão perpendicular (ou distensão paralela) às camadas geológicas.



Problemas Geológicos

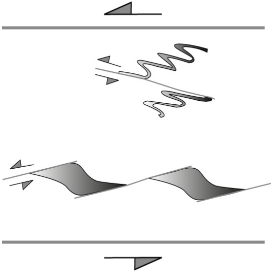
- Tradicionalmente, também a *boudinage* assimétrica é aceite que seja gerada somente por processos distensivos.

- Todavia, as observações de campo contrariam este principio, pois os *boudins* assimétricos são inicialmente formados por dobramento e posteriormente por distenção com o aparecimento de extruturas análogas às C'S (estruturas de acomodação da deformação).



Problemas Geológicos

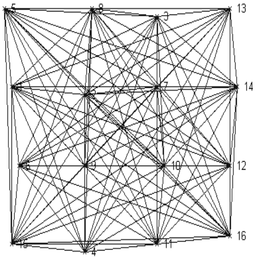
- A ocorrência de dobramento e *boudinage* assimétrica na mesma direção e no mesmo episódio é a conjetura proposta.



Modelo 2D

A Malha

Define-se um modelo 2D de pontos materiais (pontos-massa), como uma malha de nós, onde cada ponto possui valores especificos de massa (preserva a densidade), viscosidade e elasticidade.



- Rede bidimensional de 16 pontos materiais distribuidos em malha irregular.
- Rede completa de ligações de todos os pontos materiais (um-a-um).

O Algoritmo para a redução das coordenações

1. determines the distance from each point to all the others,
2. calculates the average minimum distance, $\bar{d}_{min}$,
3. determines the *coordination* for each point within a radius of $s \times \bar{d}_{min}$,
    1. $\sqrt{2} < s < 2$,
    2. initial coordination binary map,
4. for each pair of coordinated points $\rightarrow$ determines the common coordinations,
    1. c-coordination binary map,
5. for each pair of coordinated points:
    1. analyses the distances to the common coordinated points,
    2. builds the final coordination binary map,
6. establishes the bonds according to the final coordination binary map.

[síntese]

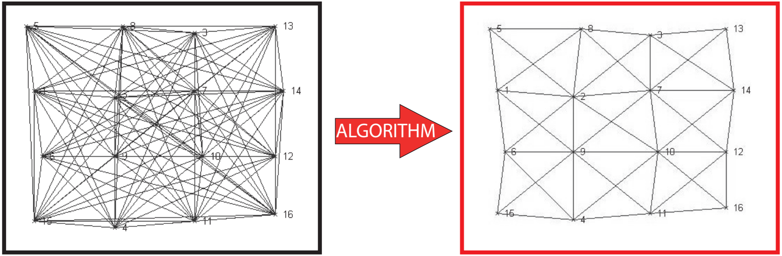
1. determina a distância de cada ponto-massa a todos os outros,
2. calcula a média da distância mínima entre todos os pontos-massa,
3. define um critério de ligação - cada par de pontos separado por

$$\text{distância} < \text{factor} \times \bar{d}_{min}$$

estão ligados.

Modelo 2D

Como resultado da aplicação do algoritmo à malha inicial obtém-se uma malha reduzida.



Equação Dinâmica para sistemas visco-elásticos

Sob a aplicação de uma força externa F um sistema é regido pela

2ª lei de Newton (princípio fundamental da dinâmica)

$$\boxed{M\ddot{u}(t) + B\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t)} \tag{1}$$

M - matriz de massa (simétrica e definida positiva),
K - matriz de elasticidade (definida positiva),
B - matriz de viscosidade (simétrica),
$u(t)$, $\dot{u}(t)$ e $\ddot{u}(t)$ - deslocamento, velocidade e aceleração de cada ponto massa, no instante t.

Equação Dinâmica para sistemas visco-elástico

$$\boxed{M\ddot{u}(t) + B\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t)} \qquad (1)$$

- Sendo F uma força externa, a resistência ao deslocamento é devida a uma mola com elasticidade K, enquanto o mecanismo (dinâmico) de perda de energia é representado por um amortecedor, devido à viscosidade B.
- A **solução geral da equação homogénea** é da forma:

$$u(t) = ve^{\lambda t},$$

onde λ e v são, respectivamente, um escalar e um vector,

- A solução da equação dinâmica (1) pode ser expressa em termos de um problema não linear de valores próprios, em termos da corresponde solução do Problema Quadrático dos Valores Próprios (Quadratic Eigenvalue Problem - QEP).

Problema Quadrático dos Valores Próprios

O Problema Quadrático dos Valores Próprios tem inúmeras aplicações em áreas, tais como, a análise dinâmica de estruturas com modelos de amortecimento, a simulação de circuitos elétricos ou e a mecânica de fluidos.

Definição QEP

Dadas as matrizes $M, B, K \in \mathbb{C}^{r\times r}$, o QEP consiste em determinar o escalar λ e os vetores, não nulos, v e w,tais que:

$$(\lambda^2 M + \lambda B + K)v = 0 \qquad \text{e} \qquad w^*(\lambda^2 M + \lambda B + K) = 0,$$

onde v e w são os vetores próprios, à esquerda e à direita, correspondentes aos valores próprios λ.

- Em todos os casos, o QEP tem $2r$ valores próprios com até $2r$ vectores próprios à direita e $2r$ vectores próprios à esquerda, embora não mais do que r vectores próprios linearmente independentes.
- A equação polinomial matricial $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda B + K$, de grau 2.

Problema Quadrático dos Valores Próprios

Para a equação polinomial matricial $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda B + K$

$\longrightarrow$ Se M, B, e K são matrizes Hermitianas:

- $Q(\lambda)$ é *self-adjoint* e $Q(\lambda) = Q(\bar{\lambda})^*, \forall \lambda \in \mathbb{C}$,
- e os valores próprios são reais ou complexos em pares conjugados, $Q(\lambda)v = 0 \Leftrightarrow w^* Q(\bar{\lambda}) = 0$.

Problema Quadrático dos Valores Próprios

Para a equação polinomial matricial $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda B + K$

$\longrightarrow$ Se M, B, e K são matrizes Hermitianas:

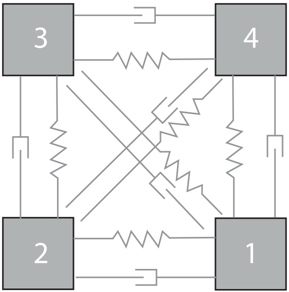
- $Q(\lambda)$ é *self-adjoint* e $Q(\lambda) = Q(\overline{\lambda})^*, \forall \lambda \in \mathbb{C}$,
- e os valores próprios são reais ou complexos em pares conjugados, $Q(\lambda)v = 0 \Leftrightarrow w^* Q(\overline{\lambda}) = 0$.

$\longrightarrow$ Se M, B, e K são matrizes reais e simétricas, $M, B > 0$, e $K \geq 0$, com v um vector próprio:

- as **raízes** de $v^* Q(\lambda) v = 0$ são: $\lambda = \left((v^* B v) \pm \sqrt{(v^* B v)^2 - 4(v^* M v)\,(v^* K v)} \right) / (2 v^* M v)$,
- o sistema está *sobreamortecido* quando estão satisfeitas as condições de sobreamortecimento: $min_{||v||_2 = 1} \left[(v^* B v)^2 - 4(v^* M v)(v^* K v) \right] > 0$.
- $Re(\lambda) < 0$, **e todos os valores próprios são reais, não positivos**, situados no semi-plano à esquerda e o sistema é estável.

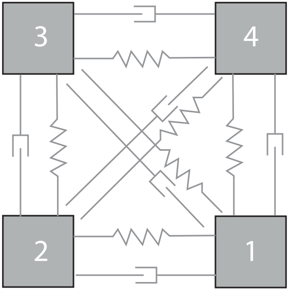
Sistema interligado mola-amordecedor 2D

Considera-se um sistema interligado de massa-mola amortecido, a 2D, onde cada massa, tem 2 graus de liberdade, está ligada a todas as outras através de um sistema mola-amortecedor com constantes elasticidade k e fricção (ou amortecimento viscoso) b .



- Um sistema de massa-mola amortecido com 8-graus de liberdade,
- A equação diferencial de 2ª ordem $M\ddot{u}(t) + B\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t)$ rege o comportamento do sistema,
- M é uma matriz diagonal.

Sistema interligado mola-amordecedor 2D



4 massas

- a matriz de elasticidade K é:

$$K_{8\times 8} = \kappa \left(\begin{array}{cc|cc} P & O_\alpha & O_\gamma & O_\delta \\ O_\alpha & Q & O_\beta & O_\theta \\ \hline O_\gamma & O_\beta & R & O_\varphi \\ O_\delta & O_\theta & O_\varphi & S \end{array}\right),$$

- a matriz de viscosidade B é:

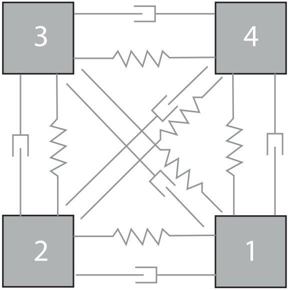
$$B_{8\times 8} = b \left(\begin{array}{cc|cc} P & O_\alpha & O_\gamma & O_\delta \\ O_\alpha & Q & O_\beta & O_\theta \\ \hline O_\gamma & O_\beta & R & O_\varphi \\ O_\delta & O_\theta & O_\varphi & S \end{array}\right).$$

- As matrizes O_i, P, Q, R e S traduzem as relações geométricas entre cada nó e os seus vizinhos, e ainda, os ângulos α, β, γ, θ, φ e δ resultam da direcção definida, relativamente a OX, por cada par de nós.

- $O_i = \begin{pmatrix} c_i^2 & c_i s_i \\ c_i s_i & s_i^2 \end{pmatrix}$, traduz a ligação entre dois nós.

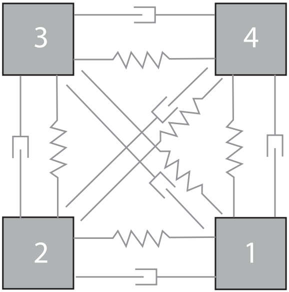
$(c_i = \cos i,\ s_i = \sin i,\ c_i s_i = \cos i \sin i)$.

Sistema interligado mola-amordecedor 2D



- Assumindo que todas as massas m são iguais, sendo as constantes de elasticidade k e de amortecimento b iguais para cada par interligado de massas, pretendem-se obter **soluções de sobreamortecimento.**

Sistema interligado mola-amordecedor 2D

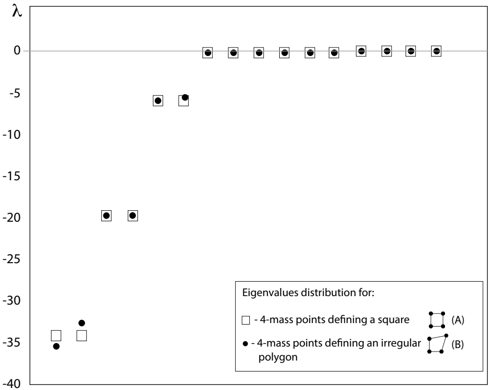


- Considera-se o sistema com uma geometria quadrada (A) a qual é ligeiramente distorcida para uma geometria poligonal (B) (neste caso, um só ponto-massa é deslocado ligeiramente ao longo da diagonal);
- Para ambas as geometrias A e B, definem-se as matrizes K e B considerando os parâmetros $m = 1$, $\kappa = 1$ e $b = 10$.

Sistema interligado mola-amordecedor 2D - exemplo

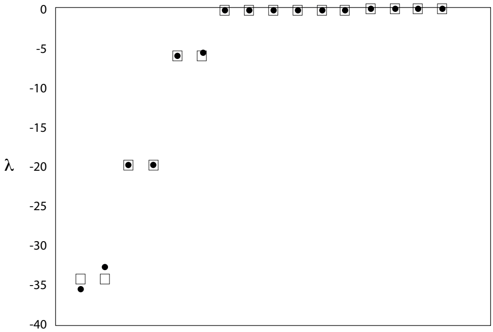
Considerando $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda B + K$ os valores próprios λ foram obtidos no MatLab, usando $polyeig(K, B, M)$.

λ (A)	λ (B)
0,00000	0,00000
0,00000	0,00000
0,00000	0,00000
0,00000	0,00000
-0,10030	-0,10030
-0,10030	-0,10030
-0,10050	-0,10050
-0,10050	-0,10050
-0,10180	-0,10170
-0,10180	-0,10190
-5,75610	-5,49870
-5,75610	-6,00900
-19,89950	-19,81670
-19,89950	-19,82980
-34,04180	-32,64540
-34,04180	-35,59520



Distribuição dos valores próprios do QEP para sistemas massa mola sobreamortecidos A (□) e B (•).

Sistema interligado mola-amordecedor 2D - exemplo



Distribuição dos valores próprios do QEP para sistemas

massa-mola sobreamortecidos A (□) e B (●).

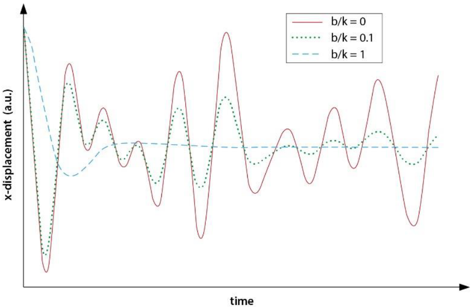
- Os valores próprios são todos reais e não positivos,
- Os valores próprios são degenerados para a geometria quadrada A, embora parcialmente degenerados para a geometria B devido à não existência de simetria.

Case Study

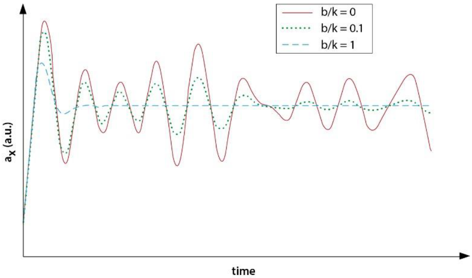
- De modo a verificar a consistência e a convergência do modelo considerou-se um sistema de osciladores associados; iniciámos com um par de massas ligadas por um sistema mola-amortecedor;

- Para diferentes valores de b/k: (i) sem amortecimento (sem atrito); (ii) com amortecimento moderado; (iii) num regime sobreamortecimento.

Deslocamento (OX)

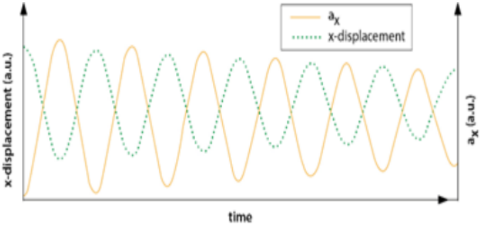


Aceleração (OX)



→ Comparando os gráficos há uma diferença de fase π entre o deslocamento e a aceleração, como é esperado em osciladores harmónicos, com moderado amortecimento.

Case Study



- A sobreposição dos dois gráficos, do deslocamento e da aceleração, evidência a diferença de fase π espectável nos osciladores harmónicos, com moderado amortecimento.

Observações / Considerações Finais

- A aproximação de um sistema de massa contínua por um conjunto discreto de massas pontuais comportando-se como osciladores acoplados parece ser razoável e a redução a um único par de massas reproduz um oscilador harmónico. A extensão para um número arbitrariamente grande de pontos é trivial.

- Embora os resultados apresentados sejam para um material homogéneo, o modelo foi concebido para lidar com diferentes materiais, ao atribuir individualmente a cada ponto massa uma massa volúmica e os coeficientes de elasticidade e de viscosidade, permitindo assim a construção de estruturas em camadas.

- Este modelo está desenvolvido para apenas uma primeira etapa considerando forças externas aplicadas. A próxima evolução fará com que funcione numa série de iterações, para as quais a formulação como um Problema Quadrático de Valores Próprios será explorada a fim de implementar um algoritmo viável, robusto e com economia de tempo, capaz de processar um sistema de milhares de partículas.

Referências