Geometria

Thomas Kahl

Apontamentos das aulas teóricas

2022/2023

Capítulo 1

Geometria afim

1.1 Espaços afins

1.1.1 Definição. Um *espaço afim* é um triplo $(\mathcal{A}, E, \Phi)$ em que $\mathcal{A}$ é um conjunto não vazio, E é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e $\Phi\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to E$ é uma aplicação tal que

(i) para cada $A \in \mathcal{A}$, a aplicação

$$\Phi_A\colon \mathcal{A} \to E, \quad B \mapsto \Phi(A, B)$$

é bijectiva;

(ii) para quaisquer elementos $A, B, C \in \mathcal{A}$,

$$\Phi(A, C) = \Phi(A, B) + \Phi(B, C).$$

Por abuso de notação, escreveremos $\mathcal{A}$ em vez de $(\mathcal{A}, E, \Phi)$. Os elementos do conjunto $\mathcal{A}$ são os *pontos* do espaço afim. Normalmente usaremos letras maiúsculas $A, B, C, \ldots$ para indicar os pontos do espaço afim. O espaço vetorial E diz-se o *espaço diretor* do espaço afim $\mathcal{A}$ e usaremos a notação $\vec{\mathcal{A}} = E$. Para os vetores do espaço diretor usaremos a notação vetorial: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$ Dados dois pontos $A, B \in \mathcal{A}$, escrevemos $\overrightarrow{AB}$ em vez de $\Phi(A, B)$. Usando esta escrita, a relação (ii) acima fica

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

1.1.2 Exemplos. 1. Qualquer espaço vetorial E é um espaço afim, onde $\vec{E} = E$ e a aplicação $E \times E \to E$, $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ é dada por

$$\overrightarrow{AB} = B - A.$$

Verifiquemos as propriedades (i) e (ii) da definição:

(i) Seja $A \in E$ um ponto. Para $B, C \in E$,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow B - A = C - A \Rightarrow B = C.$$

Logo a aplicação $E \to E$, $B \mapsto \overrightarrow{AB}$ é injectiva. Para $\vec{u} \in E$,

$$\overrightarrow{A(A + \vec{u})} = A + \vec{u} - A = \vec{u}.$$

Logo a aplicação $E \to E$, $B \mapsto \overrightarrow{AB}$ é sobrejectiva e portanto bijectiva.

(ii) Para $A, B, C \in E$,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = B - A + C - B = C - A = \overrightarrow{AC}.$$

2. Como caso particular do exemplo anterior, $\mathbb{R}^n$ é um espaço afim com $\vec{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n$ e $\overrightarrow{AB} = B - A$.

3. O conjunto $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = x + 1\}$ é um espaço afim com espaço diretor $\vec{\mathcal{A}} = \langle(1, 1)\rangle$. A aplicação $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \langle(1, 1)\rangle$ é dada por

$$\overrightarrow{(x, y)(x', y')} = (x' - x, y' - y) = (x' - x, x' + 1 - (x + 1)) = (x' - x) \cdot (1, 1).$$

Vejamos que esta aplicação satisfaz as condições (i) e (ii) da definição de espaço afim:

(i) Seja $(a, b) \in \mathcal{A}$. Para $(u, v), (x, y) \in \mathcal{A}$,

$$\overrightarrow{(a, b)(u, v)} = \overrightarrow{(a, b)(x, y)} \Rightarrow (u - a, v - b) = (x - a, y - b) \Rightarrow (u, v) = (x, y).$$

Para $\lambda \cdot (1, 1) = (\lambda, \lambda) \in \langle(1, 1)\rangle$,

$$\overrightarrow{(a, b)(a + \lambda, b + \lambda)} = (a + \lambda - a, b + \lambda - b) = (\lambda, \lambda).$$

Logo a aplicação $\mathcal{A} \to \langle(1,1)\rangle$, $(x,y) \mapsto \overrightarrow{(a,b)(x,y)}$ é bijectiva.

(ii) Para $(a,b),(u,v),(x,y) \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{(a,b)(x,y)} &= (x-a, y-b) = (x-u+u-a, y-v+v-b)\\ &= (x-u, y-v) + (u-a, v-b) = \overrightarrow{(a,b)(u,v)} + \overrightarrow{(u,v)(x,y)}.\end{aligned}$$

1.1.3 Definição. A *dimensão* de um espaço afim $\mathcal{A}$, $\dim \mathcal{A}$, é a dimensão do espaço diretor, isto é, $\dim \mathcal{A} = \dim \vec{\mathcal{A}}$. Os espaços afins de dimensão 1 são chamados *retas afins*. Os espaços afins de dimensão 2 são chamados *planos afins*.

1.1.4 Exemplos. (i) $\mathbb{R}^2$ é um plano afim.

(ii) O espaço afim $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x+1\}$ do Exemplo 1.1.2 (iii) é uma reta afim.

1.1.5 Notação. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, E, \phi)$ um espaço afim e $A \in \mathcal{A}$ um ponto. Pela condição (i) da definição de espaço afim, a aplicação $\Phi_A \colon \mathcal{A} \to E$, $B \mapsto \overrightarrow{AB}$ é bijectiva. Para $\vec{u} \in E$, escreveremos $A + \vec{u} = \Phi_A^{-1}(\vec{u})$. Como $\Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}} = id_{\mathcal{A}}$ e $\Phi_{\mathcal{A}} \circ \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} = id_E$, temos, para $B \in \mathcal{A}$ e $\vec{u} \in E$,

- $A + \overrightarrow{AB} = B$;
- $\overrightarrow{A(A+\vec{u})} = \vec{u}$.

1.1.6 Proposição. *Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim.*

1. $\forall\, A \in \mathcal{A} \quad \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
2. $\forall\, A, B \in \mathcal{A} \quad \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$.
3. $\forall\, A, B \in \mathcal{A} \quad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
4. $\forall\, A \in \mathcal{A} \,\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{A}} \quad (A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$.
5. $\forall\, A, B, C, D \in \mathcal{A} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ *(regra do paralelogramo).*

Demonstração. 1. Pela condição (ii) da definição de espaço afim,

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA}.$$

Logo $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

2. A implicação "$\Leftarrow$"segue imediatamente de 1. Se $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, por 1,

$$A = A + \overrightarrow{AA} = A + \vec{0} = A + \overrightarrow{AB} = B.$$

3. Por 1, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Logo $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

4. Sejam $B = A + \vec{u}$ e $C = B + \vec{v}$. Então $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$. Logo $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$. Portanto

$$(A + \vec{u}) + \vec{v} = B + \vec{v} = C = A + \overrightarrow{AC} = A + (\vec{u} + \vec{v}).$$

5. Por razões de simetria, basta mostrar a implicação "$\Rightarrow$". Suponhamos então que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Temos

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC}. \qquad \square$$

1.2 Referenciais e coordenadas

1.2.1 Definição. Um *referencial* num espaço afim $\mathcal{A}$ é um par $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ onde $O \in \mathcal{A}$ é um ponto e $\mathcal{B}$ é uma base ordenada de $\vec{\mathcal{A}}$. O ponto O é chamado a *origem* do referencial.

1.2.2 Exemplo. O *referencial canónico* no espaço afim $\mathbb{R}^n$ é dado pelo ponto $O = (0, \dots, 0)$ e a base canónica $\mathcal{B} = (\vec{e}_1 = (1, 0 \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, \dots 0, 1))$.

1.2.3 Definição. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim com referencial $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n))$. As *coordenadas* de um ponto $A \in \mathcal{A}$ no referencial $\mathcal{R}$ são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$ na base $\mathcal{B}$. Se o vetor de coordenadas de A no referencial $\mathcal{R}$ for $(x_1, \dots, x_n)$, isto é, se $\overrightarrow{OA} = x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n$, escrevemos $A \equiv (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}}$. De maneira semelhante, se o vetor de coordenadas de um vetor $\vec{v}$ na base $\mathcal{B}$ for $(x_1, \dots, x_n)$, isto é, se $\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n$, escrevemos $\vec{v} \equiv (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$.

1.2.4 Proposição. *Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim com referencial $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n))$. Então*

1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad A \equiv (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \equiv (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$;

2. $O \equiv (0, \ldots, 0)_{\mathcal{R}}$;

3. $\forall\, A, B \in \mathcal{A} \quad A \equiv (a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{R}}, B \equiv (b_1, \ldots, b_n)_{\mathcal{R}} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \equiv (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)_{\mathcal{B}}$;

4. $\forall\, A \in \mathcal{A}\, \forall\, \vec{v} \in \vec{\mathcal{A}}$

$$A \equiv (a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{R}}, \vec{v} \equiv (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} \Rightarrow A + \vec{v} \equiv (a_1 + x_1, \ldots, a_n + x_n)_{\mathcal{R}}.$$

Demonstração. 1. Óbvio pela definição das coordenadas de A.

2. Como $\overrightarrow{OO} = \vec{0} = 0\vec{v}_1 + \cdots + 0\vec{v}_n$, $O \equiv (0, \ldots, 0)_{\mathcal{R}}$.

3. Temos

$$\begin{aligned} A \equiv (a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{R}},\ & B \equiv (b_1, \ldots, b_n)_{\mathcal{R}} \\ & \Rightarrow \overrightarrow{OA} = a_1\vec{v}_1 + \cdots + a_n\vec{v}_n,\ \overrightarrow{OB} = b_1\vec{v}_1 + \cdots + b_n\vec{v}_n \\ & \Rightarrow \overrightarrow{AO} = -a_1\vec{v}_1 - \cdots - a_n\vec{v}_n,\ \overrightarrow{OB} = b_1\vec{v}_1 + \cdots + b_n\vec{v}_n \\ & \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = (b_1 - a_1)\vec{v}_1 + \cdots + (b_n - a_n)\vec{v}_n \\ & \Rightarrow \overrightarrow{AB} \equiv (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

4. Para $A \in \mathcal{A}$ e $\vec{v} \in \vec{\mathcal{A}}$, $\overrightarrow{O(A + \vec{v})} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A(A + \vec{v})} = \overrightarrow{OA} + \vec{v}$. Logo

$$\begin{aligned} A \equiv (a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{R}},\ & \vec{v} \equiv (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} \\ & \Rightarrow \overrightarrow{OA} \equiv (a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{B}},\ \vec{v} \equiv (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} \\ & \Rightarrow \overrightarrow{O(A + \vec{v})} \equiv (a_1 + x_1, \ldots, a_n + x_n)_{\mathcal{B}} \\ & \Rightarrow A + \vec{v} \equiv (a_1 + x_1, \ldots, a_n + x_n)_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

□

1.2.5 Proposição. *Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim e sejam $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n))$ e $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}' = (\vec{v}'_1, \ldots, \vec{v}'_n))$ dois referenciais em $\mathcal{A}$. Seja $A \in \mathcal{A}$ um ponto com $A \equiv (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}}$ e $A \equiv (x'_1, \ldots, x'_n)_{\mathcal{R}'}$ e seja $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ a matriz de passagem da base $\mathcal{B}'$ para a base $\mathcal{B}$, isto é, a matriz $(\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ com $\vec{v}'_j \equiv (\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{nj})_{\mathcal{B}}$. Então,*

(i) se $O' \equiv (w_1, \ldots, w_n)_{\mathcal{R}}$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix};$$

(ii) se $O \equiv (w'_1, \ldots, w'_n)_{\mathcal{R}'}$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 - w'_1 \\ \vdots \\ x'_n - w'_n \end{pmatrix}.$$

Demonstração. (i) Tem-se $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}$. Logo, como $\overrightarrow{OA} \equiv (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$ e $\overrightarrow{OO'} \equiv (w_1, \ldots, w_n)_{\mathcal{B}}$, se $\overrightarrow{O'A} \equiv (y_1, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}}$,

$$(x_1, \ldots, x_n) = (w_1 + y_1, \ldots, w_n + y_n) = (w_1, \ldots, w_n) + (y_1, \ldots, y_n).$$

Por outro lado, como $\overrightarrow{O'A} \equiv (x'_1, \ldots, x'_n)_{\mathcal{B}'}$,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

e o resultado segue.

(ii) Suponhamos que $O \equiv (w'_1, \ldots, w'_n)_{\mathcal{R}'}$, ou seja, $\overrightarrow{O'O} \equiv (w'_1, \ldots, w'_n)_{\mathcal{B}'}$. Como $\overrightarrow{OO'} = -\overrightarrow{O'O}$, temos $\overrightarrow{OO'} \equiv (-w'_1, \ldots, -w'_n)_{\mathcal{B}'}$. Portanto, se $\overrightarrow{OO'} \equiv (w_1, \ldots, w_n)_{\mathcal{B}}$, temos

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot \begin{pmatrix} -w'_1 \\ \vdots \\ -w'_n \end{pmatrix},$$

pelo que o resultado segue de (i). □

1.2.6 Exemplo. Sejam $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2))$ e $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}' = (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2))$ dois referenciais de um plano afim $\mathcal{A}$ tais que $O \equiv (1, -1)_{\mathcal{R}'}$, $\vec{v}'_1 \equiv (2, -3)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{v}'_2 \equiv (0, 3)_{\mathcal{B}}$. Seja $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \equiv (2, -2)_{\mathcal{R}'}$. Temos

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-1 \\ -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

e portanto $A \equiv (2, -6)_{\mathcal{R}}$.

1.2.7 Definição. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim de dimensão finita com referencial $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$. Dizemos que uma base $\mathcal{B}'$ de $\vec{\mathcal{A}}$ tem *orientação positiva (negativa)* se a matriz de passagem de $\mathcal{B}'$ para $\mathcal{B}$ tem determinante positivo (negativo). Dizemos que um referencial $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}')$ define a *mesma orientação* em $\mathcal{A}$ que $\mathcal{R}$ se $\mathcal{B}'$ tem orientação positiva relativamente a $\mathcal{R}$.

1.2.8 Exemplo. Consideremos o plano afim $\mathbb{R}^2$ munido do referencial canónico. A base $\mathcal{B}' = ((0,1),(1,0))$ de $\vec{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2$ tem orientação negativa. Com efeito,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Assim, o referencial $\mathcal{R}' = ((0,0), \mathcal{B}')$ não define a mesma orientação em $\mathbb{R}^2$ que o referencial canónico.

1.3 Subespaços afins

1.3.1 Notação. Sejam $\mathcal{A}$ um espaço afim e $\vec{\mathcal{U}}$ um subespaço vetorial de $\vec{\mathcal{A}}$. Dado um ponto $A \in \mathcal{A}$, escrevemos $A + \vec{\mathcal{U}}$ para o subconjunto $\{A + \vec{u} \mid \vec{u} \in \vec{\mathcal{U}}\}$ de $\mathcal{A}$.

1.3.2 Proposição. *Sejam $\mathcal{A}$ um espaço afim, $A, B \in \mathcal{A}$ e $\vec{\mathcal{U}}$ e $\vec{\mathcal{V}}$ subespaços vetoriais de $\vec{\mathcal{A}}$.*

(i) Se $B \in A + \vec{\mathcal{U}}$, então $\overrightarrow{AB} \in \vec{\mathcal{U}}$.

(ii) Se $A + \vec{\mathcal{U}} = B + \vec{\mathcal{V}}$, então $\vec{\mathcal{U}} = \vec{\mathcal{V}}$.

(iii) Se $B \in A + \vec{\mathcal{U}}$, então $A + \vec{\mathcal{U}} = B + \vec{\mathcal{U}}$.

Demonstração. (i) Suponhamos que $B \in A + \vec{\mathcal{U}}$. Então existe $\vec{u} \in \vec{\mathcal{U}}$ tal que $B = A + \vec{u}$. Logo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A(A + \vec{u})} = \vec{u} \in \vec{\mathcal{U}}$.

(ii) Suponhamos que $A + \vec{\mathcal{U}} = B + \vec{\mathcal{V}}$. Por razões de simetria, basta mostrar que $\vec{\mathcal{U}} \subseteq \vec{\mathcal{V}}$. Seja $\vec{u} \in \vec{\mathcal{U}}$. Como $A + \vec{u} \in B + \vec{\mathcal{V}}$, existe $\vec{v} \in \vec{\mathcal{V}}$ tal que

$$A + \vec{u} = B + \vec{v} = (A + \overrightarrow{AB}) + \vec{v} = A + (\overrightarrow{AB} + \vec{v}).$$

Temos então $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \vec{v}$. Por (i), como $A = A + \overrightarrow{AA} = A + \vec{0} \in B + \vec{\mathcal{V}}$, temos $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \in \vec{\mathcal{V}}$. Logo $\vec{u} \in \vec{\mathcal{V}}$.

(iii) Suponhamos que $B \in A + \vec{\mathcal{U}}$. Por (i), $\overrightarrow{AB} \in \vec{\mathcal{U}}$. Portanto, para qualquer $\vec{u} \in \vec{\mathcal{U}}$,

$$A + \vec{u} = B + \overrightarrow{BA} + \vec{u} = B - \overrightarrow{AB} + \vec{u} \in B + \vec{\mathcal{U}}$$

e

$$B + \vec{u} = A + \overrightarrow{AB} + \vec{u} \in A + \vec{\mathcal{U}}.$$

Logo $A + \vec{\mathcal{U}} = B + \vec{\mathcal{U}}$. □

1.3.3 Definição. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim. Um subconjunto $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ diz-se um *subespaço afim* de $\mathcal{A}$ se existem um ponto $A \in \mathcal{U}$ e um subespaço vetorial $\vec{\mathcal{U}}$ de $\vec{\mathcal{A}}$ tais que $\mathcal{U} = A + \vec{\mathcal{U}}$.

1.3.4 Notas.

1. Seja $\mathcal{U}$ um subespaço afim de um espaço afim $\mathcal{A}$. Pela Proposição 1.3.2(ii), existe um único subespaço vetorial $\vec{\mathcal{U}}$ de $\vec{\mathcal{A}}$ tal que, para algum ponto $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{U} = A + \vec{\mathcal{U}}$. Por 1.3.2(iii), $\mathcal{U} = A + \vec{\mathcal{U}}$ para qualquer ponto $A \in \mathcal{U}$.

2. Seja $\mathcal{U} = A + \vec{\mathcal{U}}$ um subespaço afim de um espaço afim $\mathcal{A}$. Então $\mathcal{U}$ é um espaço afim com espaço diretor $\vec{\mathcal{U}}$. A aplicação $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \vec{\mathcal{U}}$ é a restrição da aplicação $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \vec{\mathcal{A}}, (B, C) \mapsto \overrightarrow{BC}$. Note-se que, pela Proposição 1.3.2(i), para quaisquer pontos $B, C \in \mathcal{U}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \in \vec{\mathcal{U}}$.

1.3.5 Exemplo. O conjunto $\mathcal{U} = \{(1,0) + \lambda \cdot (1,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço afim do plano afim $\mathbb{R}^2$. Com efeito, $\mathcal{U} = (1,0) + \langle (1,1) \rangle$.

1.3.6 Definição. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim. A *dimensão* de um subespaço afim $\mathcal{U} = A + \vec{\mathcal{U}}$ de $\mathcal{A}$, $\dim \mathcal{U}$, é a dimensão do espaço vetorial $\vec{\mathcal{U}}$ (ou seja, a dimensão do espaço afim $\mathcal{U}$). Os subespaços afins de dimensão 1 são chamadas *retas afins* de $\mathcal{A}$. Os subespaços afins de dimensão 2 são chamados *planos afins* de $\mathcal{A}$. Se $\dim \mathcal{A} = n$, os subespaços afins de dimensão $n - 1$ são chamados *hiperplanos afins* de $\mathcal{A}$.

1.3.7 Exemplo. O conjunto $\mathcal{U} = (1,0) + \langle (1,1) \rangle$ é uma reta afim e um hiperplano afim de $\mathbb{R}^2$.

1.3.8 Proposição. *Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ dois subespaços afins de um espaço afim tais que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Então $\dim \mathcal{U} \leq \dim \mathcal{V}$ e $\mathcal{U} = \mathcal{V} \Leftrightarrow \dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{V}$.*

Demonstração. Exercício. □

1.3.9 Proposição. *Seja $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ uma família não vazia de subespaços afins de um espaço afim $\mathcal{A}$ tal que $\bigcap_{i\in I}\mathcal{U}_i \neq \emptyset$. Então $\bigcap_{i\in I}\mathcal{U}_i$ é um subespaço afim de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Seja $A \in \bigcap_{i\in I}\mathcal{U}_i$ e, para cada $i \in I$, seja $\vec{\mathcal{U}}_i$ um subespaço vetorial de $\vec{\mathcal{A}}$ tal que $\mathcal{U}_i = A + \vec{\mathcal{U}}_i$. Mostramos que $\bigcap_{i\in I}\mathcal{U}_i = A + \bigcap_{i\in I}\vec{\mathcal{U}}_i$. É claro que $\bigcap_{i\in I}\mathcal{U}_i \supseteq A + \bigcap_{i\in I}\vec{\mathcal{U}}_i$. Seja $B \in \bigcap_{i\in I}\mathcal{U}_i$. Então, para cada $i \in I$, existe $\vec{u}_i \in \vec{\mathcal{U}}_i$ tal que $B = A + \vec{u}_i$. Isto implica que, para quaisquer $i, j \in I$, $\vec{u}_i = \vec{u}_j$. Logo, para qualquer $i_0 \in I$, $\vec{u}_{i_0} \in \bigcap_{i\in I}\vec{\mathcal{U}}_i$. Portanto, $B \in A + \bigcap_{i\in I}\vec{\mathcal{U}}_i$. □

1.3.10 Definição. Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ dois subespaços afins de um espaço afim $\mathcal{A}$. A *soma* de $\mathcal{U}$ é $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}+\mathcal{V}$, é o menor subespaço afim de $\mathcal{A}$ que contém $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$, isto é,

$$\mathcal{U}+\mathcal{V} = \bigcap\{\mathcal{W} \mid \mathcal{W} \text{ subespaço afim de } \mathcal{A} \text{ com } \mathcal{W} \supseteq \mathcal{U}\cup\mathcal{V}\}.$$

1.3.11 Proposição. *Sejam $\mathcal{U} = A + \vec{\mathcal{U}}$ e $\mathcal{V} = B + \vec{\mathcal{V}}$ dois subespaços afins de um espaço afim $\mathcal{A}$. Então $\mathcal{U}+\mathcal{V} = A + \vec{\mathcal{U}} + \vec{\mathcal{V}} + \langle\overrightarrow{AB}\rangle$.*

Demonstração. Exercício. □

1.3.12 Equações paramétricas. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim com referencial $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n))$ e seja $\mathcal{U} = A + \langle\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\rangle$ um subespaço afim de $\mathcal{A}$ tal que $A \equiv (a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}}$ e $\vec{u}_j \equiv (u_{1j}, \dots, u_{nj})_{\mathcal{B}}$ ($j \in \{1, \dots, k\}$). Então um ponto $B \in \mathcal{A}$ pertence a $\mathcal{U}$ se e só se existem $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tais que $B = A + \lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{u}_k$, ou seja, se e só se as coordenadas $x_1, \dots, x_n$ de B no referencial $\mathcal{R}$ satisfazem as seguintes *equações paramétricas* de $\mathcal{U}$:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + u_{11}\lambda_1 + \cdots + u_{1k}\lambda_k \\ \quad\vdots \\ x_n = a_n + u_{n1}\lambda_1 + \cdots + u_{nk}\lambda_k \end{cases} \qquad (\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R})$$

1.3.13 Exemplo. No espaço afim $\mathbb{R}^3$ com o referencial canónico, o plano afim $\pi = (1,2,3) + \langle (1,0,2), (3,-1,1) \rangle$ é dado pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x &= 1 + \lambda + 3\mu \\ y &= 2 - \mu \\ z &= 3 + 2\lambda + \mu \end{cases} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Uma vez que $(2,2,5) \in \pi$, tem-se $\pi = (2,2,5) + \langle (1,0,2), (3,-1,1) \rangle$ e outras equações paramétricas de π são

$$\begin{cases} x &= 2 + \lambda + 3\mu \\ y &= 2 - \mu \\ z &= 5 + 2\lambda + \mu \end{cases} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

1.3.14 Proposição. *Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim com referencial $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n))$. Consideremos um sistema possível de $k \leq n$ equações lineares*

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ & \vdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k \end{cases}$$

tal que a matriz $(a_{ij})_{k \times n}$ tem característica r. Então o conjunto

$$\mathcal{U} = \{X \in \mathcal{A} \mid X \equiv (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \text{ e } (x_1, \dots, x_n) \text{ é solução de } (*)\}$$

é um subespaço afim de dimensão $n - r$ de $\mathcal{A}$. O espaço diretor de $\mathcal{U}$ consiste nos vetores de $\vec{\mathcal{A}}$ cujos vetores de coordenadas em relação à base $\mathcal{B}$ são soluções do sistema homogéneo associado a $(*)$.

Demonstração. Consideremos o isomorfismo $\Psi \colon \vec{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}^n$ definido por $\Psi(\vec{v}_i) = \vec{e}_i$ ($i \in \{1, \dots, n\}$). Este isomorfismo associa a cada vetor de $\vec{\mathcal{A}}$ o seu vetor de coordenadas em relação à base $\mathcal{B}$. Seja $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ a aplicação linear dada por

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n \end{pmatrix}$$

e seja $\vec{\mathcal{U}} = \Psi^{-1}(\ker F)$. Então $\vec{\mathcal{U}}$ é o subespaço vetorial de $\vec{\mathcal{A}}$ formado pelos vetores cujos vetores de coordenadas em relação à base $\mathcal{B}$ são soluções do sistema homogéneo associado a $(*)$. Como a característica de $(a_{ij})_{k\times n}$ é r, tem-se $\dim \operatorname{im} F = r$. Logo $\dim \vec{\mathcal{U}} = \dim \ker F = n - r$.

Como o sistema $(*)$ é possível, $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Seja $C \in \mathcal{U}$ e suponhamos que $C \equiv (c_1, \ldots, c_n)_{\mathcal{R}}$. Vejamos que $\mathcal{U} = C + \vec{\mathcal{U}}$.

"$\subseteq$": Seja $D \in \mathcal{U}$ com $D \equiv (d_1, \ldots, d_n)_{\mathcal{R}}$. Então $\overrightarrow{CD} \equiv (d_1 - c_1, \ldots, d_n - c_n)_{\mathcal{B}}$. Como $(c_1, \ldots, c_n)$ e $(d_1, \ldots, d_n)$ são soluções de $(*)$, $(d_1 - c_1, \ldots, d_n - c_n)$ é solução do sistema homogéneo associado a $(*)$. Logo $\overrightarrow{CD} \in \vec{\mathcal{U}}$ e $D = C + \overrightarrow{CD} \in C + \vec{\mathcal{U}}$. Portanto $\mathcal{U} \subseteq C + \vec{\mathcal{U}}$.

"$\supseteq$": Seja $\vec{u} \in \vec{\mathcal{U}}$ com $\vec{u} \equiv (u_1, \ldots, u_n)_{\mathcal{B}}$. Então $C + \vec{u} \equiv (c_1 + u_1, \ldots, c_n + u_n)_{\mathcal{R}}$ e $(c_1 + u_1, \ldots, c_n + u_n)$ é solução de $(*)$. Logo $C + \vec{u} \in \mathcal{U}$. Portanto $C + \vec{U} \subseteq \mathcal{U}$. □

1.3.15 Equações cartesianas. Nas condições de 1.3.14, o sistema $(*)$ é chamado um sistema de *equações cartesianas* do subespaço afim $\mathcal{U}$ de $\mathcal{A}$. Notemos que, por 1.3.14, um subespaço afim de $\mathcal{A}$ definido por uma equação cartesiana

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

com $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$ é um hiperplano de $\mathcal{A}$.

1.3.16 Exemplo. No espaço afim $\mathbb{R}^3$ com o referencial canónico, consideremos o subespaço afim $\mathcal{U}$ dado pelo seguinte sistema de equações cartesianas:

$$(*) \qquad \begin{cases} x - y + 2z &= 1 \\ z &= 2 \end{cases}$$

Então $\mathcal{U} = (0, 3, 2) + \langle (1, 1, 0) \rangle$, ou seja, $\mathcal{U}$ é a reta afim de equações paramétricas

$$\begin{cases} x &= \lambda \\ y &= 3 + \lambda \\ z &= 2 \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

1.3.17 Nota. Seja $\mathcal{U} = A + \vec{\mathcal{U}}$ um subespaço afim de um espaço afim $\mathcal{A}$ com referencial $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n))$ e seja $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k)$ uma base de $\vec{\mathcal{U}}$. Suponhamos que $A \equiv (a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{R}}$

e que $\vec{u}_j \equiv (u_{1j}, \ldots, u_{nj})_{\mathcal{B}}$ $(j \in \{1, \ldots, k\})$. Então $\mathcal{U}$ tem equações paramétricas

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda_1 u_{11} + \cdots + \lambda_k u_{1k} \\ \quad\vdots \\ x_n = a_n + \lambda_1 u_{n1} + \cdots + \lambda_k u_{nk} \end{cases} \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}).$$

Como os vetores $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ são linearmente independentes, a matriz $(u_{ij})_{n\times k}$ tem k linhas linearmente independentes. Resolvendo o sistema das k equações paramétricas correspondentes obtém-se um única solução que exprime os parâmetros $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ em termos dos x_i das linhas consideradas. Substituindo os parâmetros nas restantes $n-k$ equações paramétricas pelos componentes desta solução, obtém-se um sistema de equações cartesianas para $\mathcal{U}$.

1.3.18 Exemplo. No espaço afim $\mathbb{R}^3$ com o referencial canónico, consideremos a reta afim dada pelas seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Pela última equação $\lambda = z - 2$. Substituindo nas duas outras equações, obtêm-se o sistema seguinte:

$$\begin{cases} x = -1 + 2z - 4 \\ y = 2 - z + 2 \end{cases}$$

Assim, a reta $\mathcal{U}$ tem as seguintes equações cartesianas:

$$\begin{cases} x - 2z = -5 \\ y + z = 4 \end{cases}$$

1.3.19 Nota. Uma equação cartesiana de um hiperplano afim $\mathcal{U} = A + \vec{\mathcal{U}}$ de um espaço afim $\mathcal{A}$ com referencial $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n))$ pode também ser determinado da seguinte maneira: Seja $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1})$ uma base de $\vec{\mathcal{U}}$ e suponhamos que $A \equiv (a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{R}}$ e que $\vec{u}_j \equiv (u_{1j}, \ldots, u_{nj})_{\mathcal{B}}$ $(j \in \{1, \ldots, n-1\})$. Então um ponto $X \equiv (x_1, \ldots, x_n)_{\mathbb{R}}$ pertence a $\mathcal{U}$ se e só se

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & u_{11} & \cdots & u_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - a_n & u_{n1} & \cdots & u_{n,n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Através do cálculo deste determinante obtém-se uma equação cartesiana de $\mathcal{U}$.

1.3.20 Exemplo. Consideremos, no espaço afim $\mathbb{R}^2$ com o referencial canónico, a reta afim $\mathcal{U} = (2,1) + \langle(1,-1)\rangle$. Tem-se

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ y-1 & -1 \end{vmatrix} = -x+2-y+1 = -x-y+3.$$

Assim, uma equação cartesiana de $\mathcal{U}$ é

$$x+y=3.$$

1.3.21 Paralelismo. Dois subespaços afins $\mathcal{U} = A + \vec{\mathcal{U}}$ e $\mathcal{V} = B + \vec{\mathcal{V}}$ de um espaço afim $\mathcal{A}$ dizem-se *paralelos*, $\mathcal{U} \mathbin{/\!/} \mathcal{V}$, se $\vec{\mathcal{U}} \subseteq \vec{\mathcal{V}}$ ou $\vec{\mathcal{V}} \subseteq \vec{\mathcal{U}}$.

1.3.22 Notas. 1. Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ dois subespaços afins paralelos de um espaço afim. Se $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$, então $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ ou $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$.

2. Para subespaços afins $\mathcal{U} = A + \vec{\mathcal{U}}$ e $\mathcal{V} = B + \vec{\mathcal{V}}$ com $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{V}$, $\mathcal{U} \mathbin{/\!/} \mathcal{V} \Leftrightarrow \vec{\mathcal{U}} = \vec{\mathcal{V}}$.

3. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim de dimensão $n \geq 2$. Dois hiperplanos afins $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ de $\mathcal{A}$ com equações cartesianas $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ e $a'_1x_1 + \cdots + a'_nx_n = b'$, respetivamente, são paralelos se e só se os vetores $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(a'_1, \ldots, a'_n)$ são linearmente dependentes. Tem-se $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ se e só se os vetores $(a_1, \ldots, a_n, b)$ e $(a'_1, \ldots, a'_n, b')$ são linearmente dependentes. Se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ não são paralelos, então $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ é um subespaço afim de $\mathcal{A}$ de dimensão $n-2$.

1.3.23 Exemplo. No espaço afim $\mathbb{R}^3$ com o referencial canónico, as equações $2x+y-z=3$ e $4x+2y-2z=5$ definem planos afins paralelos disjuntos. Com efeito, os vetores $(2,1,-1)$ e $(4,2,-2)$ são linearmente dependentes, mas os vetores $(2,1,-1,3)$ e $(4,2,-2,5)$ são linearmente independentes.

1.3.24 Retas complanares e enviesadas. Duas retas afins r e r' num espaço afim $\mathcal{A}$ dizem-se *complanares* se existe um plano afim de $\mathcal{A}$ que contém r e r'. Se tal plano não existe, as duas retas dizem-se *enviesadas*.

1.3.25 Proposição. *Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim e sejam r e r' duas retas afins em $\mathcal{A}$.*

(i) Se $\dim r + r' = 1$, *então* $r = r'$.

(ii) Se $\dim r + r' = 2$, *então* r *e* r' *são complanares e diferentes.*

(iii) Se $\dim r + r' = 3$, *então* r *e* r' *são enviesadas.*

Demonstração. (i) Como $r \subseteq r + r'$, temos $1 = \dim r \leq \dim r + r' = 1$ e portanto $r = r + r'$. Do mesmo modo, $r' = r + r'$.

(ii) Se $\dim r+r' = 2$, $r+r'$ é um plano afim que contém r e r', pelo que r e r' são complanares. Se tivéssemos $r = r'$, teríamos $r + r' = r$ e $\dim r + r' = 1$.

(iii) Suponhamos que r e r' são complanares. Então existe um plano afim π de $\mathcal{A}$ tal que $r + r' \subseteq \pi$. Logo $\dim r + r' \leq \dim \pi = 2$. $\square$

Capítulo 2

Geometria euclidiana em $\mathbb{R}^n$

2.1 Produto interno, norma e distância

2.1.1 Definição. O *produto interno* de dois vetores $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ é o número real

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

2.1.2 Exemplo. $(1, 2, 3) \cdot (4, 5, 6) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32.$

2.1.3 Proposição. *Para quaisquer elementos $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,*

1. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ *e* $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$*;*

2. $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v}$*;*

3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$*;*

4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ *e* $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$*.*

Demonstração. Exercício. □

2.1.4 Definição. A norma de um vetor $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ é o número real

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}.$$

2.1.5 Notas. 1. Para $u \in \mathbb{R}$, $\|u\| = \sqrt{u^2} = |u|$.

2. Para quaisquer $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|\lambda\vec{u}\| = \sqrt{(\lambda\vec{u}) \cdot (\lambda\vec{u})} = \sqrt{\lambda^2 \cdot (\vec{u} \cdot \vec{u})} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|.$$

Em particular, $\| - \vec{u}\| = \|\vec{u}\|$.

3. Para qualquer $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}.$$

2.1.6 Definição. A *distância* entre dois pontos $A, B \in \mathbb{R}^n$ é definida por

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \|B - A\|.$$

2.1.7 Notas. 1. Se $A = (a_1, \ldots, a_n)$ e $B = (b_1, \ldots, b_n)$,

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}.$$

2. Para quaisquer dois pontos $A, B \in \mathbb{R}^n$,

(a) $d(A, B) \geq 0$;

(b) $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;

(c) $d(A, B) = d(B, A)$.

2.1.8 Teorema (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$,*

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$$

A igualdade vale se e só se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente dependentes.

Demonstração. Se $\vec{v} = \vec{0}$, $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = 0 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. Podemos então supor que $\vec{v} \neq \vec{0}$. Sejam $\lambda = \vec{v} \cdot \vec{v}$ e $\mu = -\vec{u} \cdot \vec{v}$. Então

$$0 \leq (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^2\vec{u}\cdot\vec{u} + 2\lambda\mu\vec{u}\cdot\vec{v} + \mu^2\vec{v}\cdot\vec{v}\\
&= \lambda^2\vec{u}\cdot\vec{u} + 2\lambda\mu\vec{u}\cdot\vec{v} + \mu^2\lambda\\
&= \lambda\cdot(\lambda\vec{u}\cdot\vec{u} + 2\mu\vec{u}\cdot\vec{v} + \mu^2)\\
&= \lambda\cdot((\vec{v}\cdot\vec{v})\cdot(\vec{u}\cdot\vec{u}) - 2(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 + (\vec{u}\cdot\vec{v})^2)\\
&= \lambda\cdot((\vec{u}\cdot\vec{u})\cdot(\vec{v}\cdot\vec{v}) - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2).
\end{aligned}$$

Como $\vec{v} \neq \vec{0}$, temos $\lambda > 0$ e portanto $(\vec{u}\cdot\vec{u})\cdot(\vec{v}\cdot\vec{v}) - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \geq 0$. Assim,

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leq (\vec{u}\cdot\vec{u})\cdot(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|)^2.$$

Logo

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \sqrt{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2} \leq \sqrt{(\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|)^2} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|.$$

Como $(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\cdot(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) = \lambda\cdot((\vec{u}\cdot\vec{u})\cdot(\vec{v}\cdot\vec{v}) - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2)$, temos ainda

$$\begin{aligned}
|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\| &\Rightarrow (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = (\vec{u}\cdot\vec{u})\cdot(\vec{v}\cdot\vec{v})\\
&\Rightarrow (\vec{u}\cdot\vec{u})\cdot(\vec{v}\cdot\vec{v}) - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = 0\\
&\Rightarrow (\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\cdot(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) = 0\\
&\Rightarrow \lambda\vec{u}+\mu\vec{v} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Como $\lambda \neq 0$, segue-se que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente dependentes se $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$. Inversamente, suponhamos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente dependentes. Como $\vec{v} \neq \vec{0}$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$. Temos então

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| = |\alpha\vec{v}\cdot\vec{v}| = |\alpha|\cdot\|\vec{v}\|^2 = \|\alpha\vec{v}\|\cdot\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|. \qquad \square$$

2.1.9 Corolário (Desigualdade triangular)**.** *Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, A, B, C \in \mathbb{R}^n$,*

1. $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$;
2. $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$.

Demonstração. 1. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\
&\leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 \\
&= (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2.
\end{aligned}$$

Logo $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

2. Por 1,

$$\begin{aligned}
d(A, C) &= \|C - A\| \\
&= \|C - B + B - A\| \\
&\leq \|C - B\| + \|B - A\| \\
&= d(A, B) + d(B, C).
\end{aligned}$$

□

2.2 Ângulos e ortogonalidade

2.2.1 Ângulos. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ dois vetores não nulos. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$-1 \leq \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \leq 1.$$

Define-se a *medida do ângulo* - ou simplesmente o *ângulo* - entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por

$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

Assim, $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ é o único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

2.2.2 Notas. 1. Para quaisquer vetores não nulos $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ e reais λ, μ com $\lambda\mu > 0$,

(a) $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \angle(\vec{v}, \vec{u})$;

(b) $\angle(\lambda\vec{u}, \mu\vec{v}) = \angle(\vec{u}, \vec{v})$;

(c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\angle(\vec{u}, \vec{v})$.

2. Dois vetores não nulos $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}$ são linearmente dependentes se e só se $\angle(\vec{u}, \vec{v}) \in \{0, \pi\}$ (exercício).

2.2.3 Exemplo. Consideremos em $\mathbb{R}^2$ os vetores $\vec{u} = \vec{e}_1 = (1, 0)$ e $\vec{v} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, onde $\theta \in [0, \pi]$. Então $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ e temos

$$\begin{aligned}\angle(\vec{u}, \vec{v}) &= \arccos \vec{u} \cdot \vec{v} \\ &= \arccos\,(1, 0) \cdot (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \\ &= \arccos(\cos\theta) \\ &= \theta.\end{aligned}$$

2.2.4 Ortogonalidade. Dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ dizem-se *ortogonais*, e escreve-se $\vec{u} \perp \vec{v}$, se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Se um vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ for ortogonal a todos os vetores de um subconjunto $V \subseteq \mathbb{R}^n$, escrevemos $\vec{u} \perp V$. O *complemento ortogonal* de um subespaço vetorial V de $\mathbb{R}^n$ é o conjunto

$$V^\perp = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{u} \perp V\}.$$

Verifica-se facilmente que $V^\perp$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Uma família $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$ de vetores de $\mathbb{R}^n$ diz-se *ortogonal* se $v_i \perp v_j$ para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ com $i \neq j$. Se, além disso, todos os vetores v_i tiverem norma 1, a família diz-se *ortonormada*.

2.2.5 Nota. Para quaisquer vetores não nulos $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$.

2.2.6 Proposição (Teorema de Pitágoras)**.** *Sejam $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ tais que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. Então*

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2.$$

Demonstração. Exercício. □

2.2.7 Proposição. *Seja $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k)$ uma família ortogonal de vetores não nulos de $\mathbb{R}^n$. Então os vetores $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ são linearmente independentes.*

Demonstração. Exercício. □

2.2.8 Nota. Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ com base ortonormada $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$. Então, para qualquer $\vec{v} \in V$,

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + \cdots + (\vec{v} \cdot \vec{v}_k)\vec{v}_k$$

(exercício).

2.2.9 Lema. *Sejam U e V dois subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$ tais que $U \subsetneqq V$ e U admite uma base ortonormada. Então existe um vetor $\vec{v} \in V \setminus U$ tal que $\vec{v} \perp U$.*

Demonstração. Seja $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ uma base ortonormada de U. Como $U \subsetneqq V$, existe $\vec{w} \in V \setminus U$. Seja

$$\vec{u} = (\vec{w} \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 + \cdots + (\vec{w} \cdot \vec{u}_k)\vec{u}_k$$

e seja $\vec{v} = \vec{w} - \vec{u}$. Então $\vec{v} \in V \setminus U$. Para qualquer $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{u}_i &= (\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{u}_i \\
&= \vec{w} \cdot \vec{u}_i - \vec{u} \cdot \vec{u}_i \\
&= \vec{w} \cdot \vec{u}_i - ((\vec{w} \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 + \cdots + (\vec{w} \cdot \vec{u}_k)\vec{u}_k) \cdot \vec{u}_i \\
&= \vec{w} \cdot \vec{u}_i - ((\vec{w} \cdot \vec{u}_1)(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_i) + \cdots + (\vec{w} \cdot \vec{u}_k)(\vec{u}_k \cdot \vec{u}_i)) \\
&= \vec{w} \cdot \vec{u}_i - (\vec{w} \cdot \vec{u}_i)(\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Segue-se que $v \perp U$. □

2.2.10 Teorema. *Qualquer subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ admite uma base ortonormada.*

Demonstração. Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Procedemos por indução sobre a dimensão de V. Se $\dim V \leq 1$ não há nada a provar. Suponhamos que $\dim V = i > 1$ e que qualquer subespaço vetorial de dimensão $< i$ admite uma base ortonormada. Seja U um subespaço vetorial de V tal que $\dim U = i - 1$. Então, pela hipótese de indução, U admite uma base ortonormada $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1})$. Pelo Lema 2.2.9, existe $v \in V \setminus U$ tal que $v \perp U$. Seja $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Pela Proposição 2.2.7, $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u})$ é uma base ortonormada de V. □

2.2.11 Corolário. *Seja* V *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$. *Então* $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$, *isto é,* $V + V^\perp = \mathbb{R}^n$ *e* $V \cap V^\perp = \{\vec{0}\}$.

Demonstração. Seja $\vec{v} \in V \cap V^\perp$. Então $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$, pelo que $\vec{v} = \vec{0}$. Logo $V \cap V^\perp = \{\vec{0}\}$. Suponhamos, por absurdo, que $V + V^\perp \neq \mathbb{R}^n$. Pelo Teorema 2.2.10, $V + V^\perp$ admite uma base ortonormada. Pelo Lema 2.2.9, existe um vetor $\vec{w} \in \mathbb{R}^n \setminus (V + V^\perp)$ tal que $\vec{w} \perp V + V^\perp$. Em particular, $\vec{w} \perp V$. Logo $\vec{w} \in V^\perp \subseteq V + V^\perp$. Sendo isto uma contradição, $V + V^\perp = \mathbb{R}^n$. $\square$

2.2.12 Nota. Para qualquer subespaço vetorial V de $\mathbb{R}^n$, $V^{\perp\perp} = V$. Com efeito, como $\vec{v} \perp \vec{w}$ para quaisquer vetores $\vec{v} \in V$ e $\vec{w} \in V^\perp$, tem-se $V \subseteq V^{\perp\perp}$. Como, pelo Corolário 2.2.11, $\dim V + \dim V^\perp = n = \dim V^\perp + \dim V^{\perp\perp}$, tem-se $\dim V = \dim V^{\perp\perp}$ e, portanto, $V = V^{\perp\perp}$.

2.2.13 Normalidade. Um *vetor normal* a um subespaço afim $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ com espaço diretor $\vec{\mathcal{U}}$ é um vetor não nulo $\vec{n} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{n} \perp \vec{\mathcal{U}}$. Sejam $A \in \mathbb{R}^n$ um ponto e $\vec{n} \in \mathbb{R}^n$ um vetor não nulo. Então $\mathcal{H} = A + \langle \vec{n} \rangle^\perp$ é o único hiperplano de $\mathbb{R}^n$ tal que $A \in \mathcal{H}$ e $\vec{n}$ é normal a $\mathcal{H}$. De facto, se $\mathcal{U} = A + \vec{\mathcal{U}}$ é um hiperplano tal que $\vec{n}$ é normal a $\mathcal{U}$, então $\vec{\mathcal{U}}^\perp \supseteq \langle \vec{n} \rangle$ e, portanto, por razões de dimensão, $\vec{\mathcal{U}}^\perp = \langle \vec{n} \rangle$, ou seja, $\vec{\mathcal{U}} = \langle \vec{n} \rangle^\perp$. O hiperplano $\mathcal{H} = A + \langle \vec{n} \rangle^\perp$ chama-se o *hiperplano normal a* $\vec{n}$ *que passa por* A. Um ponto $X \in \mathbb{R}^n$ pertence a $\mathcal{H}$ se e só se existe um vetor $\vec{u} \perp \vec{n}$ tal que $X = A + \vec{u}$. Tem-se então $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A$. Segue-se que $\mathcal{H}$ é o hiperplano afim de equação cartesiana $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A$, pois este é um hiperplano que contém A e tem espaço diretor $\langle \vec{n} \rangle^\perp$.

2.2.14 Exemplo. O plano $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}^3$ de equação cartesiana

$$x + 2y + 3z = 4.$$

é o (hiper)plano normal ao vetor $\vec{n} = (1, 2, 3)$ que passa pelo ponto $A = (4, 0, 0)$. Com efeito, $A \in \mathcal{H}$ e $\vec{\mathcal{H}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\} = \langle \vec{n} \rangle^\perp$.

2.2.15 Perpendicularidade. Duas retas em $\mathbb{R}^n$ dizem-se *perpendiculares* se se intersectam e têm vetores diretores ortogonais. Dois hiperplanos em $\mathbb{R}^n$ dizem-se *perpendiculares* se admitem vetores normais ortogonais. Uma reta e um hiperplano em $\mathbb{R}^n$ dizem-se *perpendiculares* se a reta admite um vetor diretor que é normal ao hiperplano.

2.2.16 Exemplo. Em $\mathbb{R}^2$, consideremos os subespaços afins $r = (1,2) + \langle(3,4)\rangle$ e $r' = (4,6) + \langle(4,-3)\rangle$. Então r e r' são retas perpendiculares. Com efeito, $(4,6) \in r \cap r'$ e $(3,4) \perp (4,-3)$. As retas r e r' são também perpendiculares enquanto hiperplanos. Com efeito, r é o hiperplano normal a $(4,-3)$ que passa por $(1,2)$ e r' é o hiperplano normal a $(3,4)$ que passa por $(4,6)$. Finalmente, r e r' são também uma reta e um hiperplano perpendiculares.

2.2.17 Projeção ortogonal. Seja $\mathcal{U} = A + \vec{\mathcal{U}}$ um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$. Dado um ponto $P \in \mathbb{R}^n$, pelo Corolário 2.2.11, existem vetores únicos $\vec{u} \in \vec{\mathcal{U}}$ e $\vec{v} \in \vec{\mathcal{U}}^\perp$ tais que $\overrightarrow{AP} = P - A = \vec{u} + \vec{v}$, ou seja, $A + \vec{u} = P - \vec{v}$. Assim, $\mathcal{U} \cap (P + \vec{\mathcal{U}}^\perp) = \{A + \vec{u}\}$. O ponto $A + \vec{u}$ diz-se a *projeção ortogonal* de P em $\mathcal{U}$. Tem-se $\overrightarrow{(A+\vec{u})P} = P - A - \vec{u} = \vec{v} \in \vec{\mathcal{U}}^\perp$. Por outro lado, para $Q \in \mathcal{U}$ com $\overrightarrow{QP} \in \vec{\mathcal{U}}^\perp$, tem-se $Q = P + \overrightarrow{PQ} = P - \overrightarrow{QP} \in P + \vec{\mathcal{U}}^\perp$ e portanto $Q = A + \vec{u}$. Assim, a projeção ortogonal de P em $\mathcal{U}$ é o único ponto $Q \in \mathcal{U}$ tal que $\overrightarrow{QP} \in \vec{\mathcal{U}}^\perp$.

2.2.18 Projeção ortogonal de um ponto num hiperplano afim. Sejam $\mathcal{H} = A + \vec{\mathcal{H}}$ um hiperplano afim de $\mathbb{R}^n$ e $P \in \mathbb{R}^n$ um ponto. Sejam Q a projeção ortogonal de P em $\mathcal{H}$ e $\vec{n} \neq \vec{0}$ um vetor normal a $\mathcal{H}$. Então $\mathcal{H}$ é o hiperplano normal a $\vec{n}$ que passa por A. Como $\overrightarrow{QP} \in \vec{\mathcal{H}}^\perp = \langle \vec{n} \rangle$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $P - Q = \overrightarrow{QP} = \lambda\vec{n}$. Assim, $Q = P - \lambda\vec{n}$. Como $Q \in \mathcal{H}$, tem-se $\overrightarrow{AQ} \in \vec{\mathcal{H}}$ e portanto $\overrightarrow{AQ} \cdot \vec{n} = 0$. Como $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AQ} + \lambda\vec{n}$, tem-se $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = \lambda\vec{n} \cdot \vec{n} = \lambda\|\vec{n}\|^2$, ou seja, $\lambda = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$. Deste modo,

$$Q = P - \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = P + \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

2.2.19 Exemplo. Consideremos o plano $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}^3$ de equação cartesiana

$$x + 2y + 3z = 4$$

e o ponto $P = (4,5,6)$. Então $\mathcal{H}$ é o (hiper)plano normal ao vetor $\vec{n} = (1,2,3)$ que passa pelo ponto $A = (4,0,0)$ e a projeção ortogonal de P em $\mathcal{H}$ é o ponto

$$Q = (4,5,6) - \frac{(0,5,6) \cdot (1,2,3)}{1^2 + 2^2 + 3^2}(1,2,3) = (4,5,6) - \frac{28}{14}(1,2,3) = (2,1,0).$$

2.3 Distância entre conjuntos

2.3.1 Definição. A *distância* entre dois subconjuntos não vazios $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ é definida por

$$d(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \inf\{d(A, B) \mid A \in \mathcal{U},\ B \in \mathcal{V}\}.$$

A *distância* de um ponto $P \in \mathbb{R}^n$ a um conjunto $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ é definida por $d(P, \mathcal{V}) = d(\{P\}, \mathcal{V})$.

2.3.2 Proposição. *Sejam $P \in \mathbb{R}^n$ um ponto e $\mathcal{U} = A + \vec{\mathcal{U}}$ um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$. Então $d(P, \mathcal{U})$ é a distância entre P e a projeção ortogonal de P em $\mathcal{U}$.*

Demonstração. Seja Q a projeção ortogonal de P em $\mathcal{U}$ e seja $B \in \mathcal{U}$ um ponto qualquer. Então $\overrightarrow{QB} \in \vec{\mathcal{U}}$. Como $\overrightarrow{QP} \in \vec{\mathcal{U}}^{\perp}$, temos $\overrightarrow{QP} \perp \overrightarrow{QB}$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\|\overrightarrow{BP}\|^2 = \|\overrightarrow{QB}\|^2 + \|\overrightarrow{QP}\|^2 \geq \|\overrightarrow{QP}\|^2.$$

Logo $d(P, B) = \|\overrightarrow{BP}\| \geq \|\overrightarrow{QP}\| = d(P, Q)$. Segue-se que $d(P, \mathcal{U}) = d(P, Q)$. $\square$

2.3.3 Exemplo. Consideremos o plano $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$ de equação cartesiana

$$x + 2y + 3z = 4$$

e o ponto $P = (0, 0, 1)$. Então π é o plano normal a $\vec{n} = (1, 2, 3)$ que passa pelo ponto $A = (4, 0, 0)$ e a projeção ortogonal de P em π é o ponto $Q = P - \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$. Logo

$$d(P, \pi) = d(P, Q) = \|P - Q\| = \|\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(-4, 0, 1) \cdot (1, 2, 3)|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

2.3.4 Proposição. *Sejam $\mathcal{U} = A + \vec{\mathcal{U}}$ e $\mathcal{V} = B + \vec{\mathcal{V}}$ dois subespaços afins paralelos de $\mathbb{R}^n$ com $\vec{\mathcal{U}} \subseteq \vec{\mathcal{V}}$ e seja $P \in \mathcal{U}$. Então $d(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = d(P, \mathcal{V})$.*

Demonstração. Seja $Q \in \mathcal{V}$ a projeção ortogonal de P em $\mathcal{V}$. Então $\mathcal{U} = P + \vec{\mathcal{U}}$ e $\mathcal{V} = Q + \vec{\mathcal{V}}$. Sejam $P' \in \mathcal{U}$ e $Q' \in \mathcal{V}$. Temos que mostrar que $d(P, Q) \leq d(P', Q')$. Sejam $\vec{u} \in \vec{\mathcal{U}}$ e $\vec{v} \in \vec{\mathcal{V}}$ tais que $P' = P + \vec{u}$ e $Q' = Q + \vec{v}$ e seja $\hat{Q} \in \mathcal{V}$ o ponto $\hat{Q} = Q + \vec{u}$. Então

$$\overrightarrow{\hat{Q}Q'} = Q' - \hat{Q} = Q + \vec{v} - (Q + \vec{u}) = \vec{v} - \vec{u} \in \vec{\mathcal{V}}$$

e

$$\overrightarrow{\hat{Q}P'} = P' - \hat{Q} = P + \vec{u} - (Q + \vec{u}) = P - Q = \overrightarrow{QP}.$$

Como $\overrightarrow{QP} \in \vec{\mathcal{V}}^{\perp}$, temos $\overrightarrow{\hat{Q}P'} \perp \overrightarrow{\hat{Q}Q'}$. Logo, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\|\overrightarrow{Q'P'}\|^2 = \|\overrightarrow{\hat{Q}Q'}\|^2 + \|\overrightarrow{\hat{Q}P'}\|^2 \geq \|\overrightarrow{QP}\|^2.$$

Portanto $d(P', Q') = \|\overrightarrow{Q'P'}\| \geq \|\overrightarrow{QP}\| = d(P, Q)$. □

2.4 O produto vetorial em $\mathbb{R}^3$

2.4.1 Definição. Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dois vetores de $\mathbb{R}^3$. O *produto vetorial* de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = (\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}) = (u_2v_3 - u_3v_2, -u_1v_3 + u_3v_1, u_1v_2 - u_2v_1).$$

2.4.2 Exemplos. Tem-se $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$ e $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$.

2.4.3 Proposição. *Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,*

1. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$ *e* $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$;
2. $(\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (\lambda\vec{v})$;
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ *e* $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0 = \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$;
4. $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$;
5. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ *e* $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$;
6. $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ *linearmente dependentes.*

Demonstração. A verificação das propriedades 1-5 é direta. A título de exemplo provamos 4. Escrevamos $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Temos

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (-u_1v_3 + u_3v_1)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \\ &= (u_2v_3)^2 + (u_3v_2)^2 + (u_1v_3)^2 + (u_3v_1)^2 + (u_1v_2)^2 + (u_2v_1)^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - 2(u_2v_3u_3v_2 + u_1v_3u_3v_1 + u_1v_2u_2v_1) \\
&= u_2^2v_3^2 + u_3^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_3^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 + u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 \\
&\quad - u_1^2v_1^2 - u_2^2v_2^2 - u_3^2v_3^2 - 2u_2v_2u_3v_3 - 2u_1v_1u_3v_3 - 2u_1v_1u_2v_2 \\
&= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)\cdot(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)\cdot(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \\
&= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2.
\end{aligned}
$$

A verificação das propriedades 1,2,3 e 5 fica como exercício. Falta mostrar 6. Por 4,

$$
\begin{aligned}
\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0} &\Leftrightarrow \|\vec{u}\times\vec{v}\|^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2 \\
&\Leftrightarrow |\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|.
\end{aligned}
$$

Logo, pelo Teorema da desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$ se e só se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente dependentes. □

2.4.4 Notas. 1. Para dois vetores unitários (isto é, de norma 1) ortogonais $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, pelas propriedades 3 e 4 da Proposição 2.4.3, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v})$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$. Como, pela propriedade 3,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v}) = \det(\vec{u}\times\vec{v}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) \geq 0,$$

a base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v})$ define a mesma orientação que a base canónica.

2. Para quaisquer dois vetores não nulos $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ é a área do paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é,

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot \operatorname{sen}\angle(\vec{u}, \vec{v}).$$

Com efeito, pela propriedade 4 da Proposição 2.4.3,

$$
\begin{aligned}
\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2\cdot\cos^2\angle(\vec{u}, \vec{v}) \\
&= \|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2\cdot(1 - \cos^2\angle(\vec{u}, \vec{v}))
\end{aligned}
$$

$$= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

Como $\angle(\vec{u}, \vec{v}) \in [0, \pi]$, segue-se a fórmula pretendida.

3. Dado um plano $\pi = A + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ (com $\vec{u}$ e $\vec{v}$ linearmente independentes), pelas propriedades 3 e 6 da Proposição 2.4.3, $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor normal a π. Logo uma equação cartesiana de π é dada por

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot X = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot A.$$

2.4.5 Exemplo. Em $\mathbb{R}^3$, consideremos o plano $\pi = (1, 0, 0) + \langle (1, 2, 3), (0, 1, 2) \rangle$. Temos

$$(1, 2, 3) \times (0, 1, 2) = (1, -2, 1) \qquad \text{e} \qquad (1, -2, 1) \cdot (1, 0, 0) = 1.$$

Logo π é o plano de equação cartesiana

$$x - 2y + z = 1.$$

Capítulo 3

Transformações geométricas

3.1 Aplicações afins

3.1.1 Proposição. *Sejam $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ uma aplicação entre espaços afins e $g\colon \vec{\mathcal{A}} \to \vec{\mathcal{A}}'$ uma aplicação linear. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) Para todos os pontos $A, B \in \mathcal{A}$, $g(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.

(ii) Existe um ponto $A \in \mathcal{A}$ tal que, para todos os vetores $\vec{v} \in \vec{\mathcal{A}}$, $f(A+\vec{v}) = f(A) + g(\vec{v})$.

(iii) Para todos os pontos $A \in \mathcal{A}$ e todos os vetores $\vec{v} \in \vec{\mathcal{A}}$, $f(A+\vec{v}) = f(A) + g(\vec{v})$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii): Como $\mathcal{A} \neq \emptyset$, podemos escolher um ponto $A \in \mathcal{A}$. Para qualquer $\vec{v} \in \vec{\mathcal{A}}$,

$$\begin{aligned} f(A+\vec{v}) &= f(A) + \overrightarrow{f(A)f(A+\vec{v})} \\ &= f(A) + g(\overrightarrow{A(A+\vec{v})}) \\ &= f(A) + g(\vec{v}). \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sejam $B \in \mathcal{A}$ e $\vec{v} \in \vec{\mathcal{A}}$. Temos

$$\begin{aligned} f(B+\vec{v}) &= f(A + \overrightarrow{AB} + \vec{v}) \\ &= f(A) + g(\overrightarrow{AB} + \vec{v}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f(A) + g(\overrightarrow{AB}) + g(\vec{v}) \\
&= f(A + \overrightarrow{AB}) + g(\vec{v}) \\
&= f(B) + g(\vec{v}).
\end{aligned}
$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Para $A, B \in \mathcal{A}$,

$$f(A) + g(\overrightarrow{AB}) = f(A + \overrightarrow{AB}) = f(B) = f(A) + \overrightarrow{f(A)f(B)}.$$

Logo $g(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$. $\square$

3.1.2 Proposição. *Sejam $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ uma aplicação entre espaços afins e $g, h\colon \vec{A} \to \vec{\mathcal{A}}'$ duas aplicações lineares que satisfazem as condições da Proposição 3.1.1. Então $g = h$.*

Demonstração. Seja $\vec{v} \in \vec{\mathcal{A}}$ e seja $A \in \mathcal{A}$. Então

$$f(A) + g(\vec{v}) = f(A + \vec{v}) = f(A) + h(\vec{v}).$$

Logo $g(\vec{v}) = h(\vec{v})$. $\square$

3.1.3 Definição. Uma aplicação $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ entre espaços afins diz-se *afim* se existe uma aplicação linear $\vec{\mathcal{A}} \to \vec{\mathcal{A}}'$ que satisfaz as condições da Proposição 3.1.1. Esta aplicação linear, que, pela Proposição 3.1.2, é única, será denotada por $\vec{f}$.

3.1.4 Exemplo. Sejam $\mathcal{A} = X + \vec{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{U} = Y + \vec{\mathcal{U}}$ dois subespaços afins de $\mathbb{R}^n$ tais que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$. A *projeção ortogonal* de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{U}$ é a aplicação $p_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{U}$ que associa a cada ponto de $\mathcal{A}$ a sua projeção ortogonal em $\mathcal{U}$. Vejamos que $p_{\mathcal{U}}$ é uma aplicação afim e que $\vec{p}_{\mathcal{U}}$ é a restrição a $\vec{\mathcal{A}}$ da aplicação linear $p_{\vec{\mathcal{U}}}\colon \mathbb{R}^n = \vec{\mathcal{U}} \oplus \vec{\mathcal{U}}^{\perp} \to \vec{\mathcal{U}}$ definida por

$$p_{\vec{\mathcal{U}}}(\vec{u} + \vec{u}^{\perp}) = \vec{u} \qquad (\vec{u} \in \vec{\mathcal{U}},\ \vec{u}^{\perp} \in \vec{\mathcal{U}}^{\perp}).$$

Sejam $P \in \mathcal{A}$ e $\vec{v} \in \vec{\mathcal{A}}$. Mostramos que

$$p_{\mathcal{U}}(P + \vec{v}) = p_{\mathcal{U}}(P) + p_{\vec{\mathcal{U}}}(\vec{v}).$$

Como $p_{\mathcal{U}}(P) + p_{\vec{\mathcal{U}}}(\vec{v}) \in p_{\mathcal{U}}(P) + \vec{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$, basta mostrar que $\overrightarrow{(p_{\mathcal{U}}(P) + p_{\vec{\mathcal{U}}}(\vec{v}))(P + \vec{v})} \in \vec{\mathcal{U}}^{\perp}$. Ora, como $\overrightarrow{p_{\mathcal{U}}(P)P} = P - p_{\mathcal{U}}(P) \in \vec{\mathcal{U}}^{\perp}$ e $\vec{v} - p_{\vec{\mathcal{U}}}(\vec{v}) \in \vec{\mathcal{U}}^{\perp}$, temos

$$\overrightarrow{(p_{\mathcal{U}}(P) + p_{\vec{\mathcal{U}}}(\vec{v}))(P + \vec{v})} = P + \vec{v} - (p_{\mathcal{U}}(P) + p_{\vec{\mathcal{U}}}(\vec{v})) = P - p_{\mathcal{U}}(P) + \vec{v} - p_{\vec{\mathcal{U}}}(\vec{v}) \in \vec{\mathcal{U}}^{\perp}.$$

3.1.5 Nota. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois espaços afins. Dados dois pontos $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ e uma aplicação linear $g\colon \vec{\mathcal{A}} \to \vec{\mathcal{B}}$, a aplicação $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $f(X) = B + g(\overrightarrow{AX})$ é afim e $\vec{f} = g$. Com efeito, tem-se $f(A) = B + g(\vec{0}) = B$ e então, para qualquer $\vec{v} \in \vec{\mathcal{A}}$, $f(A + \vec{v}) = f(A) + g(\overrightarrow{A(A + \vec{v})}) = f(A) + g(\vec{v})$.

3.1.6 Representação matricial de uma aplicação afim. Seja $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ uma aplicação afim e sejam $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n))$ e $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}' = (\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_m))$ referenciais de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$, respetivamente. Seja $X \in \mathcal{A}$ e suponhamos que $X \equiv (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}}$, $f(X) \equiv (y_1, \dots, y_m)_{\mathcal{R}'}$ e $f(O) \equiv (b_1, \dots, b_m)_{\mathcal{R}'}$. Seja $(a_{ij})_{m\times n}$ a matriz da aplicação linear $\vec{f}$ nas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, isto é, a matriz cujas colunas são dadas por $\vec{f}(\vec{v}_j) \equiv (a_{1j}, \dots, a_{mj})_{\mathcal{B}'}$. Então, como $f(X) = f(O + \overrightarrow{OX}) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OX})$,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Com efeito, considerando o isomorfismo $\Phi\colon \vec{\mathcal{A}}' \to \mathbb{R}^m$ dado por $\Phi(\vec{w}_j) = \vec{e}_j$, tem-se

$$\begin{aligned}
\Phi(\overrightarrow{O'f(X)}) &= \Phi(\overrightarrow{O'(f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OX}))}) \\
&= \Phi(\overrightarrow{O'f(O)}) + \Phi(\vec{f}(\overrightarrow{OX})) \\
&= \Phi(\overrightarrow{O'f(O)}) + \Phi(\vec{f}(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{v}_i)) \\
&= \Phi(\overrightarrow{O'f(O)}) + \sum_{i=1}^{n} x_i\Phi(\vec{f}(\vec{v}_i)).
\end{aligned}$$

Por exemplo, consideremos o espaço afim $\mathbb{R}^2$ com o referencial canónico e a aplicação afim $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = (1, 2) + (3x + y, x - y).$$

Então, escrevendo $f(x, y) = (x', y')$,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

3.1.7 Proposição. *Sejam $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $g\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ duas aplicações afins. Então a composta $g \circ f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ é uma aplicação afim e $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.*

Demonstração. Para $A \in \mathcal{A}$ e $\vec{v} \in \vec{\mathcal{A}}$,

$$g \circ f(A + \vec{v}) = g(f(A) + \vec{f}(\vec{v})) = g(f(A)) + \vec{g}(\vec{f}(\vec{v})) = g \circ f(A) + \vec{g} \circ \vec{f}(\vec{v}). \qquad \square$$

3.1.8 Notas. Seja $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ uma aplicação afim.

(i) Se $\mathcal{U} = A + \vec{\mathcal{U}}$ for um subespaço afim de $\mathcal{A}$, então $f(\mathcal{U})$ é o subespaço afim $f(A) + \vec{f}(\vec{\mathcal{U}})$ de $\mathcal{B}$.

(ii) Se $\mathcal{U} = A + \vec{\mathcal{U}}$ e $\mathcal{V} = P + \vec{\mathcal{V}}$ forem subespaços afins de $\mathcal{A}$ tais que $\mathcal{U} \parallel \mathcal{V}$, então $f(\mathcal{U}) \parallel f(\mathcal{V})$. Com efeito, se $\vec{\mathcal{U}} \subseteq \vec{\mathcal{V}}$ ($\vec{\mathcal{V}} \subseteq \vec{\mathcal{U}}$), então $\vec{f}(\vec{\mathcal{U}}) \subseteq \vec{f}(\vec{\mathcal{V}})$ ($\vec{f}(\vec{\mathcal{V}}) \subseteq \vec{f}(\vec{\mathcal{U}})$).

3.1.9 Definição. Um *ponto fixo* de uma aplicação afim $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é um ponto $A \in \mathcal{A}$ tal que $f(A) = A$. O conjunto dos pontos fixos de f será denotado por χ_f, isto é,

$$\chi_f = \{A \in \mathcal{A} \mid f(A) = A\}.$$

3.1.10 Proposição. *Sejam $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ uma aplicação afim e $A \in \mathcal{A}$ um ponto fixo de f. Então*

(i) χ_f é o subespaço afim $A + \ker(\vec{f} - id_{\vec{\mathcal{A}}})$ de $\mathcal{A}$;

(ii) $\ker(\vec{f} - id_{\vec{\mathcal{A}}}) = \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in \chi_f\}$.

Demonstração. Como (ii) é uma consequência imediata de (i), basta mostrar (i). Consideremos primeiramente um ponto $B \in \chi_f$. Então

$$A + \overrightarrow{AB} = B = f(B) = f(A + \overrightarrow{AB}) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AB}) = A + \vec{f}(\overrightarrow{AB}),$$

pelo que $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$. Assim, $(\vec{f} - id_{\vec{\mathcal{A}}})(\overrightarrow{AB}) = \vec{0}$. Logo $B \in A + \ker(\vec{f} - id_{\vec{\mathcal{A}}})$.

Suponhamos inversamente que $B \in A + \ker(\vec{f} - id_{\vec{\mathcal{A}}})$. Seja $\vec{v} \in \ker(\vec{f} - id_{\vec{\mathcal{A}}})$ tal que $B = A + \vec{v}$. Então $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{v}$ e temos

$$f(B) = f(A + \vec{v}) = f(A) + \vec{f}(\vec{v}) = A + \vec{v} = B.$$

Portanto $B \in \chi_f$. $\square$

3.2 Afinidades

3.2.1 Proposição. *Uma aplicação afim $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é injectiva (sobrejectiva, bijectiva) se e só se a aplicação linear $\vec{f} : \vec{\mathcal{A}} \to \vec{\mathcal{B}}$ é injectiva (sobrejectiva, bijectiva).*

Demonstração. Basta mostrar que f é injectiva (sobrejectiva) se e só se $\vec{f}$ é injectiva (sobrejectiva).

Suponhamos primeiramente que f é injectiva. Seja $\vec{v} \in \vec{\mathcal{A}}$ tal que $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{0}$. Então $f(A+\vec{v}) = f(A) + \vec{f}(\vec{v}) = f(A)$. Logo $A + \vec{v} = A$ e portanto $\vec{v} = \vec{0}$. Assim, $\vec{f}$ é injectiva.

Suponhamos agora que $\vec{f}$ é injectiva. Sejam $A, B \in \mathcal{A}$ tais que $f(A) = f(B)$. Tem-se

$$f(A) = f(B) = f(A + \overrightarrow{AB}) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AB})$$

e portanto $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \vec{0}$. Logo $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ e $B = A + \overrightarrow{AB} = A$. Assim, f é injectiva.

Suponhamos que f é sobrejectiva. Seja $\vec{w} \in \vec{\mathcal{B}}$. Como $\mathcal{B} \neq \emptyset$, existe um ponto $B \in \mathcal{B}$. Como f é sobrejectiva, existem pontos $A, P \in \mathcal{A}$ com $f(A) = B$ e $f(P) = B + \vec{w}$. Temos

$$\vec{f}(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{f(A)f(P)} = \overrightarrow{B(B+\vec{w})} = \vec{w}.$$

Logo $\vec{f}$ é sobrejectiva.

Suponhamos finalmente que $\vec{f}$ é sobrejectiva. Seja $B \in \mathcal{B}$. Como $\mathcal{A} \neq \emptyset$, existe um ponto $A \in \mathcal{A}$. Seja $\vec{v} \in \vec{\mathcal{A}}$ tal que $\vec{f}(\vec{v}) = \overrightarrow{f(A)B}$. Então

$$f(A + \vec{v}) = f(A) + \vec{f}(\vec{v}) = f(A) + \overrightarrow{f(A)B} = B.$$

Logo f é sobrejectiva. □

3.2.2 Definição. Uma aplicação afim bijectiva $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ diz-se uma *afinidade*.

3.2.3 Nota. Uma afinidade $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ envia retas em retas e, mais geralmente, subespaços afins em subespaços afins da mesma dimensão. Com efeito, a imagem de um subespaço afim $\mathcal{U} = A + \vec{\mathcal{U}}$ de $\mathcal{A}$ é o subespaço afim $f(\mathcal{U}) = f(A) + \vec{f}(\vec{\mathcal{U}})$ e como $\vec{f}$ é um isomorfismo, $\dim f(\mathcal{U}) = \dim \vec{f}(\vec{U}) = \dim \vec{\mathcal{U}} = \dim \mathcal{U}$.

3.2.4 Translações. Sejam $\mathcal{A}$ um espaço afim. Dado um vetor $\vec{v} \in \vec{\mathcal{A}}$, a aplicação

$$T_{\vec{v}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad T_{\vec{v}}(A) = A + \vec{v}$$

diz-se *translação* pelo vetor $\vec{v}$. Como, para qualquer ponto $A \in \mathcal{A}$ e qualquer vetor $\vec{u} \in \vec{\mathcal{A}}$,

$$T_{\vec{v}}(A + \vec{u}) = A + \vec{u} + \vec{v} = A + \vec{v} + \vec{u} = T_{\vec{v}}(A) \; + id_{\vec{\mathcal{A}}}(\vec{u}),$$

a translação $T_{\vec{v}}$ é uma afinidade com $\vec{T}_{\vec{v}} = id_{\vec{\mathcal{A}}}$. Nota-se que, para quaisquer dois vetores $\vec{v}, \vec{w} \in \vec{\mathcal{A}}$,

$$T_{\vec{v}+\vec{w}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{w}} = T_{\vec{w}} \circ T_{\vec{v}}.$$

Como $T_{\vec{0}} = id_{\vec{A}}$, segue-se que $T_{\vec{v}}^{-1} = T_{-\vec{v}}$.

Pela seguinte proposição, qualquer aplicação afim $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é composta de uma aplicação linear com uma translação:

3.2.5 Proposição. *Seja $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ uma aplicação afim e sejam $O \in \mathcal{A}$ e $O' \in \mathcal{A}'$. Então a aplicação $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ dada por $g(P) = O' + \vec{f}(\overrightarrow{OP})$ é afim com $\vec{g} = \vec{f}$ e $f = T_{\overrightarrow{O'f(O)}} \circ g$.*

Demonstração. Como $g(O + \vec{v}) = O' + \vec{f}(\overrightarrow{O(O + \vec{v})}) = g(O) + \vec{f}(\vec{v})$, g é afim e $\vec{g} = \vec{f}$. Tem-se

$$\begin{aligned} T_{\overrightarrow{O'f(O)}} \circ g(P) &= T_{\overrightarrow{O'f(O)}}(O' + \vec{f}(\overrightarrow{OP})) \\ &= O' + \overrightarrow{O'f(O)} + \vec{f}(\overrightarrow{OP}) \\ &= f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OP}) \\ &= f(O + \overrightarrow{OP}) \\ &= f(P). \end{aligned}$$

□

3.2.6 Homotetias. Sejam $\mathcal{A}$ um espaço afim, $\Omega \in \mathcal{A}$ um ponto e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. A *homotetia* de *centro* Ω e *razão* λ é a afinidade $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dada por

$$h(A) = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega A}.$$

Como

$$h(\Omega + \vec{v}) = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega(\Omega + \vec{v})} = \Omega + \lambda \vec{v} = h(\Omega) + \lambda id_{\vec{\mathcal{A}}}(\vec{v}),$$

h é efetivamente uma afinidade com $\vec{h} = \lambda id_{\vec{\mathcal{A}}}$. Notemos que h^{-1} é a homotetia de centro Ω e razão $\frac{1}{\lambda}$. Notemos ainda que se $\lambda = 1$, então $h = id_{\mathcal{A}}$. Se $\lambda = -1$, a homotetia h diz-se também a *simetria central* de $\mathcal{A}$ com centro Ω. Notemos finalmente que o centro de uma homotetia é um ponto fixo e que este é o único ponto fixo se a razão da homotetia for diferente de 1.

3.2.7 Reflexões. Sejam $\mathcal{A} = X + \vec{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{U} = Y + \vec{\mathcal{U}}$ dois subespaços afins de $\mathbb{R}^n$ tais que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ e seja $p_{\mathcal{U}} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{U}$ a projeção ortogonal. A *reflexão* (ou *simetria ortogonal*) de $\mathcal{A}$ através de $\mathcal{U}$ é a aplicação afim $\sigma_{\mathcal{U}} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dada por

$$\sigma_{\mathcal{U}}(P) = P + 2\overrightarrow{Pp_{\mathcal{U}}(P)}.$$

Como

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{U}}(P+\vec{v}) &= P + \vec{v} + 2\overrightarrow{(P+\vec{v})p_{\mathcal{U}}(P+\vec{v})} \\
&= P + \vec{v} + 2(p_{\mathcal{U}}(P+\vec{v}) - (P+\vec{v})) \\
&= P + \vec{v} + 2(p_{\mathcal{U}}(P) + \vec{p}_{\mathcal{U}}(\vec{v}) - P - \vec{v}) \\
&= P + \vec{v} + 2p_{\mathcal{U}}(P) + 2\vec{p}_{\mathcal{U}}(\vec{v}) - 2P - 2\vec{v} \\
&= P + 2p_{\mathcal{U}}(P) - 2P + 2\vec{p}_{\mathcal{U}}(\vec{v}) - \vec{v} \\
&= P + 2(p_{\mathcal{U}}(P) - P) + (2\vec{p}_{\mathcal{U}} - id_{\vec{\mathcal{A}}})(\vec{v}) \\
&= P + 2\overrightarrow{Pp_{\mathcal{U}}(P)} + (2\vec{p}_{\mathcal{U}} - id_{\vec{\mathcal{A}}})(\vec{v}) \\
&= \sigma_{\mathcal{U}}(P) + (2\vec{p}_{\mathcal{U}} - id_{\vec{\mathcal{A}}})(\vec{v}),
\end{aligned}$$

$\sigma_{\mathcal{U}}$ é efetivamente uma aplicação afim e $\vec{\sigma}_{\mathcal{U}} = 2\vec{p}_{\mathcal{U}} - id_{\vec{\mathcal{A}}}$. Como $\overrightarrow{Pp_{\mathcal{U}}(P)} \in \vec{\mathcal{U}}^{\perp}$, temos $\vec{p}_{\mathcal{U}}(\overrightarrow{Pp_{\mathcal{U}}(P)}) = p_{\vec{\mathcal{U}}}(\overrightarrow{Pp_{\mathcal{U}}(P)}) = \vec{0}$ e portanto $\vec{\sigma}_{\mathcal{U}}(\overrightarrow{Pp_{\mathcal{U}}(P)}) = -\overrightarrow{Pp_{\mathcal{U}}(P)}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{U}}(\sigma_{\mathcal{U}}(P)) &= \sigma_{\mathcal{U}}(P + 2\overrightarrow{Pp_{\mathcal{U}}(P)}) \\
&= \sigma_{\mathcal{U}}(P) + \vec{\sigma}_{\mathcal{U}}(2\overrightarrow{Pp_{\mathcal{U}}(P)}) \\
&= P + 2\overrightarrow{Pp_{\mathcal{U}}(P)} + 2\vec{\sigma}_{\mathcal{U}}(\overrightarrow{Pp_{\mathcal{U}}(P)}) \\
&= P + 2\overrightarrow{Pp_{\mathcal{U}}(P)} - 2\overrightarrow{Pp_{\mathcal{U}}(P)} \\
&= P.
\end{aligned}$$

Logo $\sigma_{\mathcal{U}}$ é uma afinidade e $\sigma_{\mathcal{U}}^{-1} = \sigma_{\mathcal{U}}$. Notemos que $\chi_{\sigma_{\mathcal{U}}} = \mathcal{U}$. Com efeito, temos

$$\sigma_{\mathcal{U}}(P) = P \Leftrightarrow P + 2\overrightarrow{Pp_{\mathcal{U}}(P)} = P \Leftrightarrow \overrightarrow{Pp_{\mathcal{U}}(P)} = \vec{0} \Leftrightarrow P = p_{\mathcal{U}}(P) \Leftrightarrow P \in \mathcal{U}.$$

3.3 Semelhanças e isometrias

Nesta secção, $\mathcal{A} = P + \vec{\mathcal{A}}$ é um subespaço afim de $\mathbb{R}^m$.

3.3.1 Definição. Uma afinidade $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ diz-se uma *semelhança* se existe um real $\lambda > 0$ tal que, para quaisquer $A, B \in \mathcal{A}$,

$$d(f(A), f(B)) = \lambda d(A, B).$$

O real λ é chamado a *razão* da semelhança. Uma semelhança de razão 1 diz-se uma *isometria*.

3.3.2 Nota. É possível mostrar que uma aplicação bijectiva $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é automaticamente afim se existe um real $\lambda > 0$ tal que $d(f(A), f(B)) = \lambda d(A, B)$ para quaisquer $A, B \in \mathcal{A}$.

3.3.3 Exemplos. (i) Uma translação $T_{\vec{v}}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é uma isometria. Com efeito, para quaisquer pontos $A, B \in \mathcal{A}$,

$$d(T_{\vec{v}}(A), T_{\vec{v}}(B)) = d(A + \vec{v}, B + \vec{v}) = \|B + \vec{v} - (A + \vec{v})\| = \|B - A\| = d(A, B).$$

(ii) A homotetia $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ de centro Ω e razão $\lambda \neq 0$ é uma semelhança de razão $|\lambda|$. Com efeito, para quaisquer pontos $A, B \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}
d(h(A), h(B)) &= d(\Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega A}, \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega B}) \\
&= \|\Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega B} - (\Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega A})\| \\
&= \|\lambda\overrightarrow{\Omega B} - \lambda\overrightarrow{\Omega A}\| \\
&= |\lambda| \cdot \|\overrightarrow{\Omega B} - \overrightarrow{\Omega A}\| \\
&= |\lambda| \cdot \|\overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{A\Omega}\| \\
&= |\lambda| \cdot \|\overrightarrow{AB}\| \\
&= |\lambda| d(A, B).
\end{aligned}$$

3.3.4 Proposição. *Seja $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ uma semelhança e sejam $A, B, C \in \mathcal{A}$ três pontos tais que $A \neq B, C$. Então $f(A) \neq f(B), f(C)$ e*

$$\angle(\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)}) = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

Demonstração. Notemos primeiramente que temos a seguinte generalização do Teorema de Pitágoras:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2)$$

Com efeito, temos

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{BC}\|^2 &= \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 \\
&= \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2 \\
&= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\
&= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \|\overrightarrow{AC}\|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \|\overrightarrow{AB}\|^2.
\end{aligned}$$

Pela mesma razão,

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} \cdot \overrightarrow{f(A)f(C)} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\|^2 + \|\overrightarrow{f(A)f(C)}\|^2 - \|\overrightarrow{f(B)f(C)}\|^2).$$

Como $A \neq B, C$ e f é injectiva, $f(A) \neq f(B), f(C)$. Logo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)} \neq \vec{0}$. Seja λ a razão de f. Então temos

$$\begin{aligned}
\angle(\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)}) &= \arccos \frac{\overrightarrow{f(A)f(B)} \cdot \overrightarrow{f(A)f(C)}}{\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| \cdot \|\overrightarrow{f(A)f(C)}\|} \\
&= \arccos \frac{\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\|^2 + \|\overrightarrow{f(A)f(C)}\|^2 - \|\overrightarrow{f(B)f(C)}\|^2)}{\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| \cdot \|\overrightarrow{f(A)f(C)}\|} \\
&= \arccos \frac{\frac{1}{2}\lambda^2(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2)}{\lambda^2\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} \\
&= \arccos \frac{\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2)}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} \\
&= \arccos \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} \\
&= \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).
\end{aligned}$$

□

3.3.5 Endomorfismos ortogonais. Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Um endomorfismo $g\colon V \to V$ diz-se *ortogonal* se preserva o produto interno, isto é,

$$\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V \qquad g(\vec{u}) \cdot g(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Verifica-se facilmente que para ser ortogonal basta que g tenha esta propriedade para os vetores de alguma base de V. Note-se que um endomorfismo ortogonal transforma uma base ortonormada numa base ortonormada.

Seja $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ a matriz de uma aplicação linear $g\colon V \to V$ numa base ortonormada $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ de V. Então $g(\vec{u}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{u}_i$. Como

$$(a_{1j}, \dots, a_{nj}) \cdot (a_{1k}, \dots, a_{nk}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{u}_i \cdot \sum_{l=1}^{n} a_{lk}\vec{u}_l = g(\vec{u}_j) \cdot g(\vec{u}_k),$$

g é um endomorfismo ortogonal se e só se as colunas de A formam uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$ (tal matriz diz-se *ortogonal*). Neste caso, tem-se $A^{-1} = A^T = (a_{ji})_{1\le i,j\le n}$ e portanto $(\det A)^2 = \det A \cdot \det A^T = 1$, ou seja, $\det g = \det A = \pm 1$.

3.3.6 Proposição. *Uma afinidade $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é uma isometria se e só se a aplicação linear $\vec{f}\colon \vec{\mathcal{A}} \to \vec{\mathcal{A}}$ é um endomorfismo ortogonal.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente que f é uma isometria. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{A}}$. Podemos supor que $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$. Seja $A \in \mathcal{A}$ e sejam $B = A + \vec{u}$ e $C = A + \vec{v}$. Então $A \neq B, C$ e, pela Proposição 3.3.4,

$$\begin{aligned}
\vec{f}(\vec{u}) \cdot \vec{f}(\vec{v}) &= \vec{f}(\overrightarrow{AB}) \cdot \vec{f}(\overrightarrow{AC}) \\
&= \overrightarrow{f(A)f(B)} \cdot \overrightarrow{f(A)f(C)} \\
&= \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| \cdot \|\overrightarrow{f(A)f(C)}\| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)}) \\
&= \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= \vec{u} \cdot \vec{v}.
\end{aligned}$$

Suponhamos inversamente que $\vec{f}$ é ortogonal. Então para quaisquer dois pontos $A, B \in \mathcal{A}$,

$$d(f(A), f(B)) = \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \|\vec{f}(\overrightarrow{AB})\| \\
&= \sqrt{\vec{f}(\overrightarrow{AB}) \cdot \vec{f}(\overrightarrow{AB})} \\
&= \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} \\
&= \|\overrightarrow{AB}\| \\
&= d(A, B),
\end{aligned}
$$

pelo que f é uma isometria. □

3.3.7 Definição. Seja $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ uma isometria. Se $\det \vec{f} = 1$, diz-se que f *preserva a orientação* de $\mathcal{A}$.

3.3.8 Exemplo. Qualquer translação $T_{\vec{v}}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ preserva a orientação. Com efeito, $\det \vec{T}_{\vec{v}} = \det id_{\vec{\mathcal{A}}} = 1$.

3.4 Isometrias do plano

Nesta secção, $\mathcal{A} = P + \vec{\mathcal{A}}$ é um plano afim de $\mathbb{R}^m$ munido de um referencial ortonormado $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2))$ (isto é, a base $\mathcal{B}$ é suposta ortonormada).

3.4.1 Proposição. *Uma aplicação afim $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é uma isometria se e só se existem reais a e b tais que $a^2 + b^2 = 1$ e a matriz de $\vec{f}$ na base $\mathcal{B}$ é*

$$
\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \textit{ou} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.
$$

Demonstração. Uma vez que estas matrizes são ortogonais, f é uma isometria se a matriz de $\vec{f}$ na base $\mathcal{B}$ tiver esta forma. Suponhamos inversamente que f é uma isometria e que a matriz de $\vec{f}$ é

$$
\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.
$$

Uma vez que $\vec{f}$ é um endomorfismo ortogonal, as colunas da matriz formam uma base ortonormada de $\mathbb{R}^2$. Em particular, $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$. Ora, $((a, b), (-b, a))$ também é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^2$. Sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $(c, d) = \lambda(a, b) + \mu(-b, a)$. Então $\lambda = (a, b) \cdot (c, d) = 0$ e $1 = \|(c, d)\| = |\mu| \cdot \|(-b, a)\| = |\mu|$. Logo $(c, d) = (-b, a)$ ou $(c, d) = (a, -b)$. $\square$

3.4.2 Rotações. Seja $f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ uma isometria que preserva a orientação. Pela Proposição 3.4.1, existe um único $\theta \in]-\pi, \pi]$ tal que a matriz de $\vec{f}$ na base $\mathcal{B}$ é

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Verifica-se facilmente que este θ é o mesmo para qualquer outra base ortonormada $\mathcal{B}'$ de $\vec{\mathcal{A}}$ que define a mesma orientação que $\mathcal{B}$ (isto é, $\det P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} > 0$). Se f admite um ponto fixo Ω, f diz-se a *rotação* de *centro* Ω e *ângulo orientado* θ.

3.4.3 Teorema. *Seja $f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ uma isometria que preserva a orientação. Então o conjunto dos pontos fixos χ_f ou é vazio ou consiste em exatamente um ponto ou é igual a $\mathcal{A}$. No primeiro caso, f é uma translação por um vetor não nulo. No segundo caso, f é uma rotação por um ângulo orientado não nulo. No terceiro caso, f é a identidade.*

Demonstração. Seja $f(O) \equiv (c, d)_{\mathcal{R}}$. Como f preserva a orientação, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a^2 + b^2 = 1$ e a matriz de $\vec{f}$ na base $\mathcal{B}$ é

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Seja $X \equiv (x, y)_{\mathcal{R}}$ um ponto de $\mathcal{A}$. Então X é um ponto fixo de f se e só se

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix},$$

os seja, se e só se (x, y) é solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} (1-a)x + by & = c \\ -bx + (1-a)y & = d \end{cases}$$

O determinante da matriz deste sistema é

$$(1-a)^2 + b^2 = 1 - 2a + a^2 + b^2 = 2 - 2a = 2(1-a).$$

Assim, f admite um único ponto fixo se e só se $a \neq 1$. Neste caso, f é uma rotação por um ângulo orientado $\theta \neq 0$ (se tivéssemos $\theta = 0$, teríamos $a = \cos\theta = 1$). Se $a = 1$, então $b = 0$ e a matriz de $\vec{f}$ na base $\mathcal{B}$ é a matriz identidade, pelo que $\vec{f} = id_{\vec{\mathcal{A}}}$. Assim, se $a = 1$, como

$$f(P) = f(O + \overrightarrow{OP}) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OP}) = O + \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{OP} = P + \overrightarrow{Of(O)},$$

f admite um ponto fixo se e só se $\overrightarrow{Of(O)} = \vec{0}$ (ou seja, $(c, d) = (0, 0)$). Neste caso, $f = id_{\mathcal{A}}$. Se $\chi_f = \emptyset$ (isto é, $(c, d) \neq (0, 0)$), f é a translação pelo vetor não nulo $\overrightarrow{Of(O)} = c\vec{\varepsilon}_1 + d\vec{\varepsilon}_2$. $\square$

3.4.4 Definição. Seja $r \subseteq \mathcal{A}$ uma reta afim. Uma *reflexão deslizante* na reta r é uma afinidade da forma $T_{\vec{v}} \circ \sigma_r$, onde $\vec{v}$ é um vetor diretor de r.

3.4.5 Lema. *Seja $r = A + \langle \vec{u} \rangle$ uma reta afim de $\mathcal{A}$ e seja $\vec{n} \perp \vec{u}$. Então $T_{\vec{n}} \circ \sigma_r$ é a reflexão na reta $r' = A + \frac{1}{2}\vec{n} + \langle \vec{u} \rangle$.*

Demonstração. Seja $P \in \mathcal{A}$ e seja $Q = p_r(P)$. Então $Q + \frac{1}{2}\vec{n}$ é a projeção ortogonal de P em r'. Com efeito, como $Q \in r$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Q = A + \lambda\vec{u}$. Assim, $Q + \frac{1}{2}\vec{n} = A + \frac{1}{2}\vec{n} + \lambda\vec{u} \in r'$. Além disso, como $\overrightarrow{QP}, \vec{n} \in \langle \vec{u} \rangle^{\perp}$,

$$\overrightarrow{(Q + \tfrac{1}{2}\vec{n})P} = \overrightarrow{(Q + \tfrac{1}{2}\vec{n})Q} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QP} - \overrightarrow{Q(Q + \tfrac{1}{2}\vec{n})} = \overrightarrow{QP} - \tfrac{1}{2}\vec{n} \in \langle \vec{u} \rangle^{\perp}.$$

Temos então

$$\begin{aligned} \sigma_{r'}(P) &= P + 2\overrightarrow{P(Q + \tfrac{1}{2}\vec{n})} \\ &= P + 2(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{Q(Q + \tfrac{1}{2}\vec{n})}) \\ &= P + 2(\overrightarrow{PQ} + \tfrac{1}{2}\vec{n}) \\ &= P + \vec{n} + 2\overrightarrow{PQ} \\ &= T_{\vec{n}}(P) + \vec{T}_{\vec{n}}(2\overrightarrow{PQ}) \\ &= T_{\vec{n}}(P + 2\overrightarrow{PQ}) \\ &= T_{\vec{n}} \circ \sigma_r(P). \end{aligned}$$

$\square$

3.4.6 Teorema. *Seja $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ uma isometria que não preserva a orientação. Então o conjunto dos pontos fixos χ_f é ou uma reta ou vazio. No primeiro caso, f é a reflexão σ_{χ_f}. No segundo caso, f é uma reflexão deslizante.*

Demonstração. Seja $f(O) \equiv (c,d)_{\mathcal{R}}$. Como f não preserva a orientação, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a^2 + b^2 = 1$ e a matriz de $\vec{f}$ na base $\mathcal{B}$ é

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Seja $X \equiv (x,y)_{\mathcal{R}}$ um ponto de $\mathcal{A}$. Então X é um ponto fixo de f se e só se

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ax + by \\ bx - ay \end{pmatrix},$$

os seja, se e só se (x,y) é solução do seguinte sistema:

$$(*) \qquad \begin{cases} (1-a)x - by & = c \\ -bx + (1+a)y & = d \end{cases}$$

O determinante da matriz deste sistema é

$$(1-a)(1+a) - (-b)^2 = 1 - a^2 - b^2 = 1 - 1 = 0.$$

Logo f não admite um único ponto fixo. Assim, χ_f é ou vazio ou uma reta. Não é possível que $\chi_f = \mathbb{R}^2$, pois neste caso f seria a identidade, que preserva a orientação.

Suponhamos que χ_f é uma reta. Consideremos primeiramente o caso $a = 1$ e $b = 0$. Então $c = 0$ e χ_f é a reta de equação cartesiana $y = \frac{d}{2}$ e um vetor normal a χ_f é $\vec{\varepsilon}_2 \equiv (0,1)_{\mathcal{B}}$. Considerando o ponto fixo $A \equiv (0, \frac{d}{2})_{\mathcal{R}}$, a projeção ortogonal de um ponto P em χ_f é dada por

$$p_{\chi_f}(P) = P - (\overrightarrow{AP} \cdot \vec{\varepsilon}_2)\vec{\varepsilon}_2.$$

Assim, a reflexão σ_{χ_f} é dada por

$$\sigma_{\chi_f}(P) = P + 2\overrightarrow{P(P - (\overrightarrow{AP} \cdot \vec{\varepsilon}_2)\vec{\varepsilon}_2)} = P - 2(\overrightarrow{AP} \cdot \vec{\varepsilon}_2)\vec{\varepsilon}_2.$$

Segue-se que se $P \equiv (x,y)_{\mathcal{R}}$ e $\sigma_{\chi_f}(P) \equiv (x', y')_{\mathcal{R}}$,

$$(x', y') = (x,y) - 2((x, y - \tfrac{d}{2}) \cdot (0,1))(0,1) = (x, y - 2(y - \tfrac{d}{2})) = (x, -y + d),$$

ou seja, $\sigma_{\chi_f}(P) \equiv (x, -y+d)_{\mathcal{R}}$. Como $f(P) \equiv (x, -y+d)_{\mathcal{R}}$ também, obtemos $f = \sigma_{\chi_f}$.

Consideremos agora o caso $a \neq 1$ ou $b \neq 0$. Como $a^2 + b^2 = 1$, temos $a \neq 1$ e $b \neq 0$. Neste caso, χ_f é a reta de equação cartesiana $(1-a)x - by = c$ e um vetor normal a χ_f é $\vec{n} \equiv (1-a, -b)_{\mathcal{B}}$. Considerando o ponto fixo $A \equiv (\frac{c}{1-a}, 0)_{\mathcal{R}}$, a projeção ortogonal de um ponto P em χ_f é dada por

$$p_{\chi_f}(P) = P - \frac{(\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n})}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Assim, a reflexão σ_{χ_f} é dada por

$$\sigma_{\chi_f}(P) = P + 2\overrightarrow{P(P - \frac{(\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n})}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n})} = P - 2\frac{(\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n})}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Como as coordenadas de A satisfazem ambas as equações do sistema $(*)$, temos $-\frac{bc}{1-a} = d$. Assim, se $P \equiv (x,y)_{\mathcal{R}}$ e $\sigma_{\chi_f}(P) \equiv (x', y')_{\mathcal{R}}$,

$$\begin{aligned}
(x', y') &= (x,y) - 2\frac{((x - \frac{c}{1-a}, y)\cdot(1-a,-b))}{(1-a)^2+b^2}(1-a,-b) \\
&= (x,y) - 2\frac{(1-a)x - c - by}{2(1-a)}(1-a,-b) \\
&= (x,y) - ((1-a)x - c - by, -\frac{(1-a)bx - bc - b^2y}{(1-a)}) \\
&= (x - (1-a)x + c + by, y + \frac{(1-a)bx - bc - b^2y}{1-a}) \\
&= (ax + by + c, bx + (1 - \frac{b^2}{1-a})y - \frac{bc}{1-a}) \\
&= (ax + by + c, bx + (\frac{1-a-(1-a^2)}{1-a})y + d) \\
&= (ax + by + c, bx - ay + d),
\end{aligned}$$

ou seja, $\sigma_{\chi_f}(P) \equiv (ax + by + c, bx - ay + d)_{\mathcal{R}}$. Como $f(P) \equiv (ax + by + c, bx - ay + d)_{\mathcal{R}}$ também, obtemos $f = \sigma_{\chi_f}$.

Suponhamos finalmente que $\chi_f = \emptyset$. Pela Proposição 3.2.5, $f = T_{\overrightarrow{Of(O)}} \circ g$, onde $g\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é a aplicação afim definida por $g(P) = O + \vec{f}(\overrightarrow{OP})$. Por esta proposição, $\vec{g} = \vec{f}$, pelo que g é uma isometria que não preserve a orientação. Como $g(O) = O$, $\chi_g \neq \emptyset$. Logo, pelo que já mostrámos, $g = \sigma_{\chi_g}$. Como $\chi_f = \emptyset$, f não é uma reflexão. Além disso, $\overrightarrow{Of(O)} \neq \vec{0}$, mas, pelo Lema 3.4.5, $\overrightarrow{Of(O)}$ não é normal a χ_g. Por isso, $p_{\chi_g}(f(O)) \neq O$ e $\overrightarrow{Op_{\chi_g}(f(O))}$ é um vetor diretor da reta χ_g. Como $\overrightarrow{Of(O)} = \overrightarrow{Op_{\chi_g}(f(O))} + \overrightarrow{p_{\chi_g}(f(O))f(O)}$, temos

$$f = T_{\overrightarrow{Of(O)}} \circ g = T_{\overrightarrow{Op_{\chi_g}(f(O))}} \circ T_{\overrightarrow{p_{\chi_g}(f(O))f(O)}} \circ g.$$

Pelo Lema 3.4.5, $T_{\overrightarrow{p_{\chi_g}(f(O))f(O)}} \circ g$ é uma reflexão numa reta paralela a χ_g, isto é, com vetor diretor $\overrightarrow{Op_{\chi_g}(f(O))}$. Segue-se que f é uma reflexão deslizante. $\square$

3.4.7 Proposição. *Seja $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ uma semelhança de razão λ. Então a afinidade $g\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dada por $g(X) = f(O) + \frac{1}{\lambda}\vec{f}(\overrightarrow{OX})$ é uma isometria.*

Demonstração. Para $X, Y \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}
d(g(X), g(Y)) &= \|g(Y) - g(X)\| \\
&= \|f(O) + \frac{1}{\lambda}\vec{f}(\overrightarrow{OY}) - f(O) - \frac{1}{\lambda}\vec{f}(\overrightarrow{OX})\| \\
&= \|\frac{1}{\lambda}(\vec{f}(\overrightarrow{OY}) - \vec{f}(\overrightarrow{OX}))\| \\
&= \frac{1}{\lambda}\|\vec{f}(\overrightarrow{OY}) - \vec{f}(\overrightarrow{OX})\| \\
&= \frac{1}{\lambda}\|f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OY}) - f(O) - \vec{f}(\overrightarrow{OX})\| \\
&= \frac{1}{\lambda}\|f(Y) - f(X)\| \\
&= \frac{1}{\lambda}d(f(X), f(Y)) \\
&= \frac{1}{\lambda}\lambda d(X, Y) \\
&= d(X, Y).
\end{aligned}$$

□

3.4.8 Proposição. *Seja $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ uma semelhança tal que $\chi_f = \emptyset$. Então f é uma isometria.*

Demonstração. Vejamos primeiramente que a aplicação linear $id_{\vec{\mathcal{A}}} - \vec{f}$ não é bijectiva. Suponhamos, por absurdo, que ela é bijectiva. Então podemos considerar o ponto

$$X = O + (id_{\vec{\mathcal{A}}} - \vec{f})^{-1}(\overrightarrow{Of(O)})$$

e temos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{Of(X)} &= \overrightarrow{Of(O + (id_{\vec{\mathcal{A}}} - \vec{f})^{-1}(\overrightarrow{Of(O)}))} \\
&= \overrightarrow{O(f(O) + \vec{f}((id_{\vec{\mathcal{A}}} - \vec{f})^{-1}(\overrightarrow{Of(O)})))} \\
&= \overrightarrow{Of(O)} + \vec{f}((id_{\vec{\mathcal{A}}} - \vec{f})^{-1}(\overrightarrow{Of(O)})) \\
&= \overrightarrow{Of(O)} + \vec{f}(\overrightarrow{OX}) \\
&= (id_{\vec{\mathcal{A}}} - \vec{f})(\overrightarrow{OX}) + \vec{f}(\overrightarrow{OX})
\end{aligned}$$

$$= \overrightarrow{OX}.$$

Assim, $f(X) = X$, o que não é possível porque $\chi_f = \emptyset$. Logo a aplicação linear $id_{\vec{\mathcal{A}}} - \vec{f}$ não é bijectiva.

Seja λ a razão de f e seja A a matriz de $\vec{f}$ na base $\mathcal{B}$. Pelas Proposições 3.4.7 e 3.4.1, existem reais a, b com $a^2 + b^2 = 1$ tais que

$$\frac{1}{\lambda}A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\lambda}A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

No primeiro caso, a matriz da aplicação linear $id_{\vec{\mathcal{A}}} - \vec{f}$ na base $\mathcal{B}$ é

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda a & \lambda b \\ -\lambda b & 1-\lambda a \end{pmatrix}.$$

Como a aplicação $id_{\vec{\mathcal{A}}} - \vec{f}$ não é bijectiva, o determinante desta matriz é nula e temos

$$\begin{aligned} 0 &= (1-\lambda a)^2 + \lambda^2 b^2 \\ &= 1 - 2\lambda a + \lambda^2 a^2 + \lambda^2 b^2 \\ &= 1 - 2\lambda a + \lambda^2 \\ &= (\lambda - a)^2 - a^2 + 1 \\ &= (\lambda - a)^2 + b^2 \end{aligned}$$

e portanto $b = 0$ e $\lambda = a = 1$. Logo, neste caso, f é uma isometria.

No segundo caso, a matriz da aplicação linear $id_{\vec{\mathcal{A}}} - \vec{f}$ na base $\mathcal{B}$ é

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda a & -\lambda b \\ -\lambda b & 1+\lambda a \end{pmatrix}.$$

Como a aplicação $id_{\vec{\mathcal{A}}} - \vec{f}$ não é bijectiva, o determinante desta matriz é nula e temos

$$\begin{aligned} 0 &= (1-\lambda a)(1+\lambda a) - \lambda^2 b^2 \\ &= 1 - \lambda^2 a^2 - \lambda^2 b^2 \\ &= 1 - \lambda^2 \end{aligned}$$

e portanto $\lambda = 1$. Logo f é uma isometria neste caso também. $\square$

3.5 Isometrias de $\mathbb{R}^3$

Pela Proposição 3.2.5, qualquer isometria de $\mathbb{R}^3$ é composta de uma translação com uma isometria linear, isto é, um endomorfismo ortogonal. Consideremos então um endomorfismo ortogonal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. O polinómio característico de f admite pelo menos uma raiz real, pois é um polinómio de grau 3. Assim, f tem pelo menos um valor próprio. Como f preserva o produto interno e então a norma, tem-se, para qualquer valor próprio λ e qualquer vetor próprio v associado a λ,

$$\|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|.$$

Portanto $\lambda = \pm 1$.

Suponhamos primeiramente que 1 e -1 são valores próprios de f e que a matriz de f numa certa base ortonormada $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de $\mathbb{R}^3$ é

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então $\det f = -1$ e f é a reflexão $\sigma_{\mathcal{A}}$ onde $\mathcal{A}$ é o espaço próprio associado ao valor próprio 1, isto é, $\mathcal{A} = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$. Com efeito, seja $P \in \mathbb{R}^3$. Como $\mathcal{A}^{\perp} = \langle \vec{u} \rangle$, existem $Q \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ únicos tais que $P = Q + \lambda \vec{u}$. O ponto Q é a projeção ortogonal de P em $\mathcal{A}$ e $\overrightarrow{PQ} = -\lambda \vec{u}$. Assim,

$$\begin{aligned} f(P) &= f(Q) + f(\lambda \vec{u}) \\ &= Q - \lambda \vec{u} \\ &= P - 2\lambda \vec{u} \\ &= P + 2\overrightarrow{PQ} \\ &= \sigma_{\mathcal{A}}(P). \end{aligned}$$

Suponhamos agora que 1 é valor próprio de f. Sejam $\vec{\varepsilon} \in \mathbb{R}^3$ um vetor próprio de norma 1 associado ao valor próprio 1 e $\mathcal{A} = \langle \vec{\varepsilon} \rangle^{\perp}$. Então $\mathcal{A}$ é um plano afim de $\mathbb{R}^3$ e $\vec{\varepsilon}$ é um vetor normal a $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ passa pela origem, $\mathcal{A}$ é o seu próprio espaço diretor. Como, para qualquer vetor $v \in \mathcal{A}$,

$$f(\vec{v}) \cdot \vec{\varepsilon} = f(\vec{v}) \cdot f(\vec{\varepsilon}) = \vec{v} \cdot \vec{\varepsilon} = 0,$$

tem-se $f(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$, pelo que a restrição de f a $\mathcal{A}$ é uma isometria e um endomorfismo ortogonal $g\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Como g é uma aplicação linear, g admite um ponto fixo - a origem. Como g é um endomorfismo ortogonal, temos $\det g = 1$ ou $\det g = -1$.

Consideremos primeiramente o caso $\det g = 1$. Então, pelo Teorema 3.4.3, g é uma rotação. Seja $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ uma base ortonormada de $\mathcal{A}$ e seja $\theta \in]-\pi, \pi]$ o ângulo de g relativamente a esta base. Então $(\vec{\varepsilon}, \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ e a matriz de f nesta base é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Temos então $\det f = 1$. Diremos que f é uma *rotação em torno da reta* $\langle \vec{\varepsilon} \rangle$.

Consideremos agora o caso $\det g = -1$. Então, pelo Teorema 3.4.6, g é a reflexão σ_{χ_g}. Seja $\vec{u}$ um vetor diretor de norma 1 da reta χ_g e seja $\vec{v} = \vec{\varepsilon} \times \vec{u}$. Então $\vec{v} \in \mathcal{A}$ e $(\vec{\varepsilon}, \vec{u}, \vec{v})$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$. Como $\vec{u} \in \chi_g$, temos $f(\vec{u}) = g(\vec{u}) = \vec{u}$. Logo $\vec{u}$ é um vetor próprio de f associado ao valor próprio 1. Como $\vec{v} \perp \vec{u}$, $\vec{0}$ é a projeção ortogonal de $\vec{v}$ em χ_g e

$$f(\vec{v}) = g(\vec{v}) = \sigma_{\chi_g}(\vec{v}) = \vec{v} - 2\vec{v} = -\vec{v}.$$

Logo -1 é um valor próprio de f e $\vec{v}$ é um vetor próprio associado a -1. Assim, 1 e -1 são valores próprios de f e a matriz de f na base ortonormada $(\vec{v}, \vec{\varepsilon}, \vec{u})$ é

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo $\det f = -1$ e f é a reflexão $\sigma_{\mathcal{U}}$ onde $\mathcal{U} = \langle \vec{\varepsilon}, \vec{u} \rangle$.

Suponhamos finalmente que 1 não é valor próprio de f. Então -1 é valor próprio de f. Sejam $\vec{\varepsilon} \in \mathbb{R}^3$ um vetor próprio de norma 1 associado ao valor próprio -1 e $\mathcal{A} = \langle \vec{\varepsilon} \rangle^{\perp}$. Como antes,

$\mathcal{A}$ é um plano afim de $\mathbb{R}^3$ com vetor normal $\vec{\varepsilon}$ e a restrição de f a $\mathcal{A}$ é uma isometria e um endomorfismo ortogonal $g\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Como 1 não é valor próprio de f, g admite um único ponto fixo, nomeadamente a origem. Pelos Teoremas 3.4.3 e 3.4.6, segue-se que g é uma rotação. Seja $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ uma base ortonormada de $\mathcal{A}$ e seja $\theta \in]-\pi, \pi]$ o ângulo de g relativamente a esta base. Então a matriz de f na base ortonormada $(\vec{\varepsilon}, \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ de $\mathbb{R}^3$ é

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

e temos $\det f = -1$. Como

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

a isometria f é a composta da reflexão $\sigma_{\mathcal{A}}$ com uma rotação em torno da reta $\langle \vec{\varepsilon} \rangle$.

Resumindo temos o seguinte teorema:

3.5.1 Teorema. *Qualquer isometria de $\mathbb{R}^3$ é a composta de uma translação com um endomorfismo ortogonal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Se $\det f = 1$, então f é uma rotação em torno de uma reta vetorial. Se $\det f = -1$, então f é uma reflexão num plano vetorial após uma rotação em torno da reta perpendicular a este plano.*

Capítulo 4

Cónicas e quádricas

4.1 Endomorfismos auto-adjuntos

4.1.1 Definição. Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Um endomorfismo $f\colon V \to V$ diz-se *auto-adjunto* ou *simétrico* se, quaisquer que sejam $\vec{v}, \vec{w} \in V$, $f(\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot f(\vec{w})$.

Recordemos os seguintes resultados de Álgebra Linear:

4.1.2 Proposição. *Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ uma base ortonormada de V, $f\colon V \to V$ um endomorfismo e $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ a matriz descrevendo f na base $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$. Então f é um endomorfismo auto-adjunto se e só se A é simétrica.*

Demonstração. Como a base $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ é ortonormada, temos $f(\vec{v}_j) = \sum_{i=1}^{n}(f(\vec{v}_j) \cdot \vec{v}_i)\vec{v}_i$ e portanto $a_{ij} = f(\vec{v}_j) \cdot \vec{v}_i$. Logo, se f é auto-adjunto, então $a_{ij} = f(\vec{v}_j) \cdot \vec{v}_i = \vec{v}_j \cdot f(\vec{v}_i) = a_{ji}$, pelo que a matriz A é simétrica. Suponhamos inversamente que A é simétrica. Então temos $f(\vec{v}_i) \cdot \vec{v}_j = a_{ji} = a_{ij} = \vec{v}_i \cdot f(\vec{v}_j)$. Sejam $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i$ e $\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{v}_i$ dois vetores de V. Então

$$f(\vec{v}) \cdot \vec{w} = \sum_{1\le i,j\le n} \lambda_i \mu_j f(\vec{v}_i) \cdot \vec{v}_j = \sum_{1\le i,j\le n} \lambda_i \mu_j \vec{v}_i \cdot f(\vec{v}_j) = \vec{v} \cdot f(\vec{w}),$$

pelo que o endomorfismo f é auto-adjunto □

4.1.3 Teorema. *Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $f : V \to V$ um endomorfismo auto-adjunto. Então V admite uma base ortonormada formada por vetores próprios de f.*

Demonstração. [3, Thm. 6.17] □

4.2 Cónicas

Uma *cónica* é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ da forma

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + by^2 + cxy + dx + fy = g\},$$

onde $a, b, c, d, f, g \in \mathbb{R}$ e $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Repare-se que a equação que define a cónica pode ser escrita sob a seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g$$

É possível que uma cónica seja o conjunto vazio, um ponto, uma reta, duas retas paralelas ou duas retas concorrentes. Para qualquer outra cónica C, existe um referencial ortonormado $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2))$ de $\mathbb{R}^2$ em que C admite uma das seguintes representações reduzidas:

1. *Elipse*: $C = \{X \equiv (\bar{x}, \bar{y})_{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1\} \quad (a, b \neq 0)$
2. *Hipérbole*: $C = \{X \equiv (\bar{x}, \bar{y})_{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1\} \quad (a, b \neq 0)$
3. *Parábola*: $C = \{X \equiv (\bar{x}, \bar{y})_{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{y} = \frac{\bar{x}^2}{a^2}\} \quad (a \neq 0)$

Vejamos através de um exemplo como determinar o tipo de uma cónica. Seja C a cónica dada pela equação

$$x^2 + y^2 + 4xy - 2x + 2y = 6.$$

Escrevemos esta equação na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6$$

Como a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

é simétrica, o endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja matriz na base canónica é A é auto-adjunto. Notemos que este endomorfismo é dado por

$$f(x, y) = (x + 2y, 2x + y).$$

Pelo Teorema 4.1.3, $\mathbb{R}^2$ admite uma base ortonormada de vetores próprios de f. Determinemos tal base. O polinómio característico de f é dado por $(1 - \lambda)^2 - 4$. Temos

$$\begin{aligned}
(1-\lambda)^2 - 4 = 0 &\Leftrightarrow (1-\lambda)^2 = 4 \\
&\Leftrightarrow 1 - \lambda = \pm 2 \\
&\Leftrightarrow \lambda = 1 \pm 2 \\
&\Leftrightarrow \lambda = 3 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1.
\end{aligned}$$

Os valores próprios de f são então 3 e -1. Como

$$\begin{aligned}
f(x, y) = 3(x, y) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y &= 3x \\ 2x + y &= 3y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow 2x = 2y \\
&\Leftrightarrow x = y,
\end{aligned}$$

um vetor próprio de norma 1 associado ao valor próprio 3 é $\vec{\varepsilon}_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Como

$$\begin{aligned}
f(x, y) = -(x, y) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y &= -x \\ 2x + y &= -y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow 2x = -2y \\
&\Leftrightarrow x = -y,
\end{aligned}$$

um vetor próprio de norma 1 associado ao valor próprio -1 é $\vec{\varepsilon}_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Assim,

$$\mathcal{B} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2) = ((\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}), (-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}))$$

é uma base ortonormada de vetores próprios de f. A matriz de passagem da base $\mathcal{B}$ para a base canónica é

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

e a matriz de f na base $\mathcal{B}$ é

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos o referencial ortonormado $\mathcal{R}' = ((0,0), \mathcal{B})$ e um ponto

$$X = (x, y) \equiv (x', y')_{\mathcal{R}'}.$$

Então

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

e temos

$$\begin{aligned}
X \in C &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} P^T AP \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 6 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 6 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x' \\ -y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{pmatrix} = 6 \\
&\Leftrightarrow 3x'^2 - y'^2 - \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' + \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' = 6 \\
&\Leftrightarrow 3x'^2 - y'^2 + 2\sqrt{2}y' = 6 \\
&\Leftrightarrow 3x'^2 - (y'^2 - 2\sqrt{2}y') = 6 \\
&\Leftrightarrow 3x'^2 - ((y' - \sqrt{2})^2 - 2) = 6 \\
&\Leftrightarrow 3x'^2 - (y' - \sqrt{2})^2 + 2 = 6 \\
&\Leftrightarrow 3x'^2 - (y' - \sqrt{2})^2 = 4.
\end{aligned}$$

Consideremos agora o ponto $O \equiv (0, \sqrt{2})_{\mathcal{R}'}$ e o referencial ortonormado $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$. Então para $X \equiv (x', y')_{\mathcal{R}'}$ com $X \equiv (\bar{x}, \bar{y})_{\mathcal{R}}$, tem-se

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (x' - 0, y' - \sqrt{2}) = (x', y' - \sqrt{2})$$

e

$$\begin{aligned} X \in C &\Leftrightarrow 3x'^2 - (y' - \sqrt{2}y')^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow 3\bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{\bar{x}^2}{\frac{4}{3}} - \frac{\bar{y}^2}{4} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\bar{x}^2}{(\frac{2}{\sqrt{3}})^2} - \frac{\bar{y}^2}{2^2} = 1. \end{aligned}$$

Assim, C é a hipérbole

$$\{X \equiv (\bar{x}, \bar{y})_{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\bar{x}^2}{(\frac{2}{\sqrt{3}})^2} - \frac{\bar{y}^2}{2^2} = 1\}.$$

Notemos que as coordenadas do ponto O no referencial canónico obtêm-se calculando

$$P \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tem-se então $O = (-1, 1)$. Notemos ainda que o referencial $\mathcal{R}$ é a imagem do referencial canónico pela isometria $f = T_{(-1,1)} \circ \rho$ onde ρ é a rotação de centro $(0, 0)$ e ângulo $\frac{\pi}{4}$. A isometria f é dada por

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Como P^T é a matriz de passagem da base canónica para $\mathcal{B}$, o vetor de coordenadas de $f(x, y)$ no referencial $\mathcal{R}$ é

$$P^T \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = P^T P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

ou seja, temos $f(x, y) \equiv (x, y)_{\mathcal{R}}$. Assim,

$$C = f(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{(\frac{2}{\sqrt{3}})^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1\}).$$

4.3 Quádricas

Uma *quádrica* é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ da forma

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + fxz + gyz + hx + jy + kz = l\},$$

onde $a, b, c, d, f, g, h, j, k, l \in \mathbb{R}$ e $(a, b, c, d, f, g) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$. É possível que uma quádrica seja o conjunto vazio, um ponto, uma reta, um plano, dois planos paralelos ou dois planos concorrentes. Para qualquer outra quádrica Q, existe um referencial ortonormado $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ em que Q admite uma das seguintes representações reduzidas:

1. *Elipsóide*: $Q = \{X \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})_{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} + \frac{\bar{z}^2}{c^2} = 1\} \quad (a, b, c \neq 0)$
2. *Parabolóide elíptico*: $Q = \{X \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})_{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{z} = \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2}\} \quad (a, b \neq 0)$
3. *Parabolóide hiperbólico*: $Q = \{X \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})_{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{z} = \frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2}\} \quad (a, b \neq 0)$
4. *Hiperbolóide de uma folha*: $Q = \{X \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})_{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} - \frac{\bar{z}^2}{c^2} = 1\} \quad (a, b, c \neq 0)$
5. *Hiperbolóide de duas folhas*: $Q = \{X \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})_{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} - \frac{\bar{z}^2}{c^2} = 1\} \quad (a, b, c \neq 0)$
6. *Cone elíptico*: $Q = \{X \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})_{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} - \frac{\bar{z}^2}{c^2} = 0\} \quad (a, b, c \neq 0)$
7. *Cilindro elíptico*: $Q = \{X \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})_{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1\} \quad (a, b \neq 0)$
8. *Cilindro hiperbólico*: $Q = \{X \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})_{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1\} \quad (a, b \neq 0)$
9. *Cilindro parabólico*: $Q = \{X \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})_{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{y} = \frac{\bar{x}^2}{a^2}\} \quad (a \neq 0)$

Para determinar o tipo de uma quádrica procede-se de maneira análoga ao caso das cónicas.

Bibliografia

[1] Paulo Ventura Araújo, Curso de Geometria, 3.ª edição, Gradiva (2002).

[2] David A. Brannan, Matthew F. Esplen, Jeremy J. Gray, Geometry (2nd ed.), Cambridge University Press (2012).

[3] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence, Linear Algebra, Second Edition, Prentice-Hall International Editions (1989).

[4] Walter Meyer, Geometry and its Applications (2nd ed.), Harcourt Academic Press (2006).

[5] Michèle Audin, Geometry, Universitext, Springer (2003).

[6] John Roe, Elementary Geometry, Oxford University Press (1993).