Universidade do Minho
Instituto de Educação

Anaís Veloso Silva

As perguntas na promoção da aprendizagem de tópicos de funções: uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade

março de 2022

Anaís Veloso Silva
As perguntas na promoção da aprendizagem de tópicos de funções: uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade

UMinho|2022

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Anaís Veloso Silva

As perguntas na promoção da aprendizagem de tópicos de funções: uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade

Relatório de Estágio

Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho efetuado sob a orientação do

Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

março de 2022

AGRADECIMENTOS

"Children must be taught how to think, not what to think."
- Margaret Mead

Ao meu supervisor, Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu, pela disponibilidade, pela ajuda, pela confiança e pelo apoio. Pela paciência nos inúmeros avanços e recuos durante este trabalho. Obrigada por me desafiar e fazer evoluir pessoal e profissionalmente e, principalmente, por toda a dedicação!

À minha orientadora, Professora Emiliana Costa, pela liberdade para trabalhar com as suas turmas, pela proximidade, pelo incentivo e pela confiança. Por todos os ensinamentos, pela partilha, pelas ideias e sugestões e pelo carinho!

Aos meus alunos que, embora não totalmente meus, foram um bocadinho meus. Pela experiência que me proporcionaram, pela colaboração, pelo aconchego e por me acolherem. Ensinaram-me muito!

À minha família, por estarem do meu lado, por me apoiarem incondicionalmente, por confiarem e por acreditarem em mim!

À minha colega de estágio curricular e amiga, Marta Morais, pelo apoio, pela partilha, pela confiança e pela amizade!

Aos meus amigos, pela amizade, pela paciência e por me acarinharem e me apoiarem!

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

AS PERGUNTAS NA PROMOÇÃO DA APRENDIZAGEM DE TÓPICOS DE FUNÇÕES: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO 10.º ANO DE ESCOLARIDADE

RESUMO

A comunicação tem um papel fundamental no processo de ensino e de aprendizagem. As perguntas são uma das formas de comunicação mais utilizadas pelo professor para estruturar o seu discurso. Estas permitem estabelecer dinâmicas e promovem a interação entre os diferentes elementos da sala de aula. Este estudo pretende identificar o contributo das perguntas do professor na aprendizagem de tópicos de funções numa turma do 10.º ano de escolaridade. Para a concretização deste objetivo foram formuladas as seguintes questões de investigação: (i) Que tipo de perguntas promove o professor nos diferentes momentos das aulas no ensino de tópicos de funções?; (ii) Como o professor usa as perguntas para clarificar as dificuldades dos alunos na aprendizagem de funções?; (iii) Que relação há entre o tipo de perguntas do professor e o tipo de respostas dos alunos na aprendizagem de funções?; (iv) Que perceções têm os alunos sobre o contributo das perguntas na aprendizagem de funções?

A intervenção pedagógica foi realizada numa turma do 10.º ano de escolaridade de uma escola da cidade de Braga, tendo em consideração a relação professor-aluno, as tarefas selecionadas e o método de ensino exploratório. De forma a dar resposta às questões de investigação, recolheu-se informação através dos seguintes métodos de recolha de dados: questionários (um no início da intervenção pedagógica e outro no final); gravações áudio e vídeo das aulas que integraram a intervenção pedagógica; planificações e pós-reflexões das aulas; e as produções dos alunos.

Com os resultados obtidos constatou-se que as perguntas da professora alternaram entre as de confirmação, focalização e inquirição. Tais perguntas tiveram diferentes finalidades, prevalecendo as perguntas de inquirição. As perguntas que permitiram testar o conhecimento do aluno deram informações importantes à professora e ao próprio aluno. As perguntas que focaram a atenção do aluno em determinado pormenor permitiram que este organizasse o seu raciocínio e estruturasse a sua resposta. As perguntas que exigiram que o aluno explicasse ou justificasse os seus pensamentos foram as perguntas que mostraram mais contribuir para o desenvolvimento do raciocínio do aluno.

No estudo de tópicos de funções, os alunos revelaram dificuldades na interpretação de enunciados, em interpretar o significado de variáveis e em identificar as variáveis dependente e independente. A representação gráfica de funções também se revelou uma tarefa complicada para os alunos, sendo que estes não conseguiram, na maioria das vezes, esboçar gráficos corretos ou traduzir a informação dos gráficos desenhados. A professora usou as perguntas para, sem diminuir o nível de exigência cognitiva, encaminhar o pensamento do aluno, auxiliá-lo a organizar o seu raciocínio e levá-lo a focar a sua atenção em aspetos fulcrais para facilitar a construção de estratégias.

Apesar de não se ter verificado uma relação estrita entre o tipo de perguntas da professora e o tipo de respostas dos alunos, constatou-se que as perguntas de inquirição foram as que originaram respostas mais completas por parte do aluno. Enquanto as perguntas de confirmação, na maioria das vezes, estiveram relacionadas com respostas curtas dos alunos.

Os alunos apontaram diversas vantagens da colocação de perguntas, tanto por parte da professora, como deles próprios ou dos colegas, das quais se destacam o esclarecimento de dúvidas, a superação de dificuldades, a consolidação de conhecimentos e o facto de desafiar o raciocínio matemático.

Palavras-chave: Alunos do 10.º ano; Aprendizagem; Dificuldades; Funções; Pergunta do professor.

QUESTIONS IN THE PROMOTION OF FUNCTIONS TOPICS LEARNING: AN EXPERIENCE WITH 10TH GRADE STUDENTS

ABSTRACT

Communication has a fundamental role in the teaching and learning process. Questions are one of the most communication forms teachers use to structure their discourse. They allow the establishment of dynamics and promote interaction between the different classroom elements.

This study aims to identify the contribution of questions to the learning of function topics in a 10th grade class. To accomplish this goal, the following research questions were formulated: (i) What kind of questions does the teacher promote in the different moments of a functions topic class?; (ii) How does the teacher use questions to clarify the students' difficulties in the Functions learning?; (iii) What is the relationship between the type of teacher questions and the type of students answers the Functions learning?; (iv) What perceptions do students have about the contribution of questions in the Functions learning?.

The pedagogical intervention was carried out in a 10th grade class of a school in the city of Braga, considering the teacher-student relationship, the selected tasks, and the exploratory teaching method. In order to answer the research questions, information was collected according to the following data collection methods: two questionnaires (initial and final); audio and video recordings of all the classes that integrated the pedagogical intervention; lesson plans and post-reflections; and the students' productions.

Following the obtained results, it was found that the teacher's questions vary between confirmation questions, focalization questions and inquiry questions. Such questions had different purposes, prevailing the inquiry questions. The questions that allowed testing the students' knowledge gave the teacher and the student important information. The questions that focused the students' attention on a specific detail allowed them to organize their reasoning and structure their answers. The questions that required the students to explain or justify their thoughts were the ones that contributed the most to the students' reasoning development.

In the Functions study topics, the students revealed some difficulties interpreting the enunciation, interpreting the meaning of variables, and identifying the dependent and independent variables. The graphic representation of Functions was also a challenging task for the student since they could not sketch the correct graphs or translate the information into the sketched graphs, most of the time. The teacher used questions to guide the students' thoughts without reducing the level of cognitive requirement, aiding them in organizing their reasoning and focusing their attention on essential aspects to favour strategy building.

Despite not verifying a linear relationship between the type of questions posed by the teacher and the type of answer given by the students, it was found that the inquiry questions were the ones that originated the most complete answers provided by the students. Meanwhile, most of the time, the confirmation questions were related to the shortest answers.

The students pointed out several advantages of posing questions by either the teacher, the students themselves or the colleagues, from which they highlight the clarification of some doubts, the suppuration of difficulties, the reinforcement of the knowledge and the fact that it defies the mathematical reasoning.

Keywords: 10th students; Difficulties; Functions; Learning; Teacher question.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

No âmbito da prática pedagógica supervisionada, este relatório incide sobre a relevância da pergunta do professor na dinamização das atividades que se realizam na sala de aula. Tendo como foco esta temática, este capítulo tem como finalidade explicitar as razões da escolha deste tema e, consequentemente, o objetivo e as questões de investigação que lhe são vinculadas. Segue-se a pertinência do estudo realizado e a organização da estrutura do presente relatório.

1.1. Tema, objetivo e questões de investigação

O tema do estudo recai sobre 'As perguntas na promoção da aprendizagem de tópicos de funções: uma experiência com alunos do 10.º ano de escolaridade'. A comunicação desempenha, de acordo com vários investigadores, um papel preponderante nas aulas de matemática e, em particular, no desenvolvimento do raciocínio dos alunos (Domingues & Martinho, 2012; NCTM, 2007; Ponte & Serrazina, 2000). A comunicação auxilia os alunos na verbalização do seu pensamento e na clarificação das suas ideias (Menezes, 1996). Apesar de ser amplamente reconhecida a sua importância, existem posições divergentes entre os professores. Alguns professores veem a comunicação como um instrumento para a circulação do conhecimento matemático, em que apenas se pressupõe a transmissão de conhecimento do professor para os alunos. Outros professores entendem a comunicação como um processo social de construção e partilha do conhecimento, que pressupõe a interação entre os diferentes elementos da sala de aula.

O ensino direto, que pode ser expresso como um ensino em que 'o professor fala e o aluno ouve', ainda está muito presente nas salas de aulas (Canavarro et al., 2012; Franke et al., 2007). Por sua vez, o ensino exploratório, que pode ser caracterizado por um ensino em que alunos e professor dialogam e trocam ideias, ainda não é uma prática largamente adotada pelos professores (Guerreiro et al., 2015). Sendo os tempos atuais caracterizados por cenários de mudança, de revigoração do currículo e de alteração das condições de aprendizagem, são muitas as ideias de renovação defendidas pelos investigadores em Educação. O envolvimento dos alunos nas atividades de aprendizagem, em detrimento da reprodução do que o professor diz e faz é uma das ideias defendidas. Trata-se de uma mudança de paradigma de percecionar os processos de ensino e de aprendizagem, em que a centralidade da atividade do professor, num paradigma de transmissão, dá lugar à valorização das interações sociais que se dinamizam entre os intervenientes do processo educativo, num paradigma de interação.

A forma como o professor promove a comunicação matemática tem impacto na dinamização das interações na sala de aula. Assim, o professor tem um papel fundamental no estabelecimento da comunicação na sala de aula e, em particular, na estruturação do discurso. O NCTM (2007) destaca a atividade do professor no tipo de questões que coloca aos alunos, no modo como os ouve e gere as interações e discussões, e no modo como lhes pede que expliquem e justifiquem as suas ideias. Neste sentido, o discurso desenvolvido na sala de aula assenta, principalmente, em quatro ações discursivas: (i) explicar; (ii) questionar; (iii) ouvir; e (iv) responder (Menezes et al., 2014). Relativamente ao questionamento, sabe-se que, na maioria das aulas, o discurso do professor é constituído por várias perguntas. As perguntas podem promover um maior envolvimento dos alunos, incentivando a comunicação e as interações em sala de aula (Coutinho, 2012). No entanto, a existência de perguntas ao longo do discurso do professor não é necessariamente sinónimo de valorização da comunicação ou de contributo para a aprendizagem (Almeida, 2007; Guerreiro, 2011). Desta forma, as perguntas que são colocadas, o modo como são colocadas, a quem são colocadas e o momento em que são colocadas constitui um processo fundamental para o desenvolvimento do raciocínio, do sentido crítico e do pensamento (Barros, 2008; Coutinho, 2012; Guerreiro, 2011).

São vários os estudos que abordam as potencialidades do questionamento na sala de aula. Exemplo disso são os trabalhos de Martinho e Ponte (2005) e de Menezes (1996), que referem a importância do questionamento no processo de ensino e aprendizagem, permitindo ao professor obter informação que não detém, fazer pensar o aluno, incentivar à participação, testar o conhecimento dos alunos e detetar as suas dificuldades (Ponte & Serrazina, 2000; Terceiro, 2014).

Na observação de contextos onde decorreu a experiência de ensino que é o foco deste relatório, os alunos não aparentavam ter hábitos de efetuar perguntas sobre as suas dúvidas, dificuldades e sobre o que se diz e faz nas aulas de Matemática, nem de serem questionados e incentivados a partilhar ideias, embora estas ações sejam tão importantes para o processo de ensino e aprendizagem. Tendo em consideração tais pressupostos, o principal objetivo deste estudo é identificar o contributo das perguntas do professor na aprendizagem de funções por alunos do 10.º ano de escolaridade. De modo a concretizar este objetivo, importa responder às seguintes questões de investigação:

1. Que tipo de perguntas promove o professor nos diferentes momentos das aulas no ensino de tópicos de funções?

2. Como o professor usa as perguntas para clarificar as dificuldades dos alunos na aprendizagem de funções?
3. Que relação há entre o tipo de perguntas do professor e o tipo de respostas dos alunos na aprendizagem de funções?
4. Que perceções têm os alunos sobre o contributo das perguntas na aprendizagem de funções?

Na primeira questão, visto que as aulas seguiram características de ensino exploratório, pretende-se averiguar o tipo de perguntas que emerge em cada uma das fases deste método de ensino (Ponte, 2005). Na segunda questão, atendendo ao que advoga Gonçalves (2015) sobre os alunos tenderem revelar dificuldades no estudo de tópicos de funções, pretende-se identificar que tipo de perguntas favorece a superação de tais dificuldades. Subjacente às perguntas efetuadas pelo professor, surgem as respostas dos alunos, que são fulcrais para o processo de ensino e de aprendizagem, como defendem Franke et al. (2010). Neste sentido, torna-se pertinente estudar que relação há entre o tipo de perguntas colocadas pelo professor e o tipo de respostas dos alunos. Sendo a falta de hábitos de questionamento e discussão notória na turma que integrou este estudo, as perceções dos alunos sobre o contributo das perguntas na aprendizagem de tópicos de funções são fulcrais para a compreensão da abertura dos alunos para estas práticas e dos possíveis constrangimentos destas.

1.2. Pertinência do estudo

O conceito de 'Matemática com compreensão, Matemática para todos', proposto pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) é o lema que norteia os Princípios e Normas para a Matemática Escolar, enunciados por esta organização (NCTM, 2007). De entre as normas apresentadas, destaca-se a que se debruça sobre a comunicação matemática. Neste documento, a comunicação assume-se parte essencial da Educação Matemática, contribuindo para "a construção de significados e para a consolidação de ideias e, ainda, para a sua divulgação" (NCTM, 2007, p. 66). Na prática docente dos professores, a comunicação desempenha um papel preponderante (Martinho & Ponte, 2005). De acordo com estes autores, o modo como o professor facilita a comunicação e gere e estrutura o seu discurso na sala de aula tem um grande impacto no processo de ensino e de aprendizagem. Neste sentido, como futura professora, uma das minhas maiores preocupações era a forma como poderia promover a comunicação na sala de aula, incentivando à participação dos alunos e estimulando o seu interesse.

Vários estudos mostram que os alunos aprendem mais quando estão envolvidos ativamente nas atividades da sala de aula e na construção do seu conhecimento (Almeida, 2012; Matos & Serrazina, 1996). Importa, assim, que o professor procure envolver os alunos e estimule a interação entre alunos e entre professor-aluno na sala de aula, seja através da seleção de tarefas estimulantes, do encorajamento dos alunos, da utilização de materiais que promovam uma aprendizagem centrada na discussão e partilha de ideias matemáticas e da formulação de perguntas que fomentem o pensamento divergente (Lampert & Cobb, 2003; Menezes, 1995). O questionamento tem sido apontado como uma das técnicas mais importantes no processo de ensino e aprendizagem e, em particular, no incentivo e na melhoria da participação dos alunos (Menezes, 1995). Aliás, tendo como base diversas investigações, constata-se que o discurso do professor na sala de aula é essencialmente estruturado sob a forma de pergunta (Almeida & Fernandes, 2010; Barros, 2008; Chin, 2006; Martinho & Ponte, 2000; Menezes, et al., 2014).

As perguntas são um instrumento fundamental no ensino e na aprendizagem uma vez que perguntas bem formuladas, com objetivos claros e níveis cognitivos adequados podem estimular o desenvolvimento de níveis de raciocínio elevados no aluno (Almeida, 2007). Estas têm diferentes potencialidades e benefícios como, por exemplo, detetar as dificuldades dos alunos, testar o conhecimento dos alunos, motivar o aluno e ajudá-lo a pensar (Menezes, 1995). Para Moyer e Milewicz (2002), uma boa pergunta representa a diferença entre coagir o pensamento dos alunos ou encorajar novas ideias. Por isso, o professor, além de ser um bom comunicador, deve ser um bom questionador, sabendo quando e como praticar o questionamento de forma a tirar proveito das perguntas que coloca.

Desenvolver estratégias eficazes de questionamento não obedece a um conjunto de regras fixas, mas exige uma adaptação e ajuste às condições da sala de aula (Dong et al., 2018). Por isso, tal como referem Ponte et al. (2007), "não é fácil aprender a formular boas questões, [sendo necessário desenvolver a capacidade de] integrar tais questões num fluxo natural da comunicação na sala de aula" (p. 55).

Em síntese, as perguntas colocadas em contexto de sala de aula, pela sua frequência e pelas suas potencialidades, constituem um elemento importante no processo de ensino e de aprendizagem e, em particular, nas práticas discursivas do professor, sendo imprescindível que o professor saiba quando e como as colocar de forma a enriquecer a aula, estimular o pensamento do aluno e ajudá-lo a ultrapassar as suas dificuldades.

1.3. Estrutura do relatório

O presente relatório está organizado em quatro capítulos: Introdução; Enquadramento Contextual e Teórico; Intervenção Pedagógica; e Conclusões, Recomendações e Limitações. No primeiro capítulo, Introdução, é apresentado o tema, o objetivo e as questões de investigação, a pertinência do estudo, bem como a estrutura do relatório.

No segundo capítulo, Enquadramento Contextual e Teórico, é caracterizada a escola onde decorreu a intervenção pedagógica e a turma. É também apresentada a fundamentação teórica em que se sustenta este relatório e as metodologias de ensino e aprendizagem que orientaram a prática pedagógica.

No terceiro capítulo, Intervenção Pedagógica*,* são descritos e ilustrados momentos da intervenção pedagógica, tendo como base gravações áudio e vídeo das aulas e as produções dos alunos. Além disso, são analisadas as perceções dos alunos sobre o contributo das perguntas na sua aprendizagem de tópicos de funções.

No quarto capítulo, Conclusões, Recomendações e Limitações, são apresentados e discutidos os resultados da intervenção pedagógica e, em particular, da resposta às questões de investigação. Algumas recomendações e limitações a ter em consideração em investigações futuras são apresentadas neste capítulo.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO

Tendo como referência o tema, o objetivo e as questões de investigação deste trabalho, este capítulo começa, numa primeira instância, por efetuar o enquadramento contextual onde decorreu a intervenção pedagógica e, numa segunda instância, por apresentar os pressupostos teóricos que sustentam este estudo.

2.1. Enquadramento Contextual

Neste subcapítulo caracteriza-se a escola e a turma onde decorreu a intervenção pedagógica focada no estudo do questionamento e no seu papel no ensino e na aprendizagem de tópicos de funções.

2.1.1. Caracterização da escola

A escola onde decorreu a intervenção pedagógica é uma escola do concelho de Braga cuja origem remota ao ano de 1884 (Projeto Educativo [PE], 2016). Esta escola integra um agrupamento de escolas constituído por diferentes níveis de ensino desde o ensino pré-escolar até ao 12.º ano de escolaridade, incluindo a modalidade de ensino recorrente e ainda Educação para adultos e Educação Especial. Trata-se de uma escola de referência para alunos com necessidades educativas especiais, ao nível da surdez e cegueira, integrando uma 'Unidade de Apoio Especializado para a Educação de Alunos com Multideficiência e Surdo cegueira Congénita'. A escola oferece ainda todos os cursos científico-humanísticos, cursos de português para falantes de outras línguas e diversos cursos profissionais, como, por exemplo, Técnico de Artes do Espetáculo, Técnico de Desenho Digital 3D, Técnico de Eletrónica, Automação e Computadores e Técnico de Gestão de Equipamentos Informáticos.

De acordo com o Projeto Educativo, transversal às escolas que integram o agrupamento, a escola onde decorreu a prática pedagógica acolhe 1636 alunos, o que representa 52,29% dos alunos do agrupamento de escolas. No agrupamento, o corpo docente é constituído por 271 professores, dos quais 19 são professores de Matemática. O pessoal não docente é constituído por 98 profissionais.

O Projeto Educativo do agrupamento de escolas defende a educação para todos como um lema a seguir. Tendo como referência este lema, o agrupamento de escolas pretende ser um espaço que compreenda a diversidade e a pluralidade de opiniões, bem como um espaço de modelos civilizacionais. Nas suas linhas estruturais, tal projeto define como principais princípios e valores a liberdade e responsabilidade, o humanismo e equidade, a qualidade e transparência, o conhecimento e inquietação, a fraternidade e sustentabilidade e a participação e motivação. Reconhecer o mérito nas suas diversas dimensões e fomentar o intercâmbio de culturas e saberes são alguns dos muitos objetivos do agrupamento de escolas, num espaço que promova o querer aprender, a autonomia e a liberdade.

Na última avaliação externa ao agrupamento de escolas, este obteve *muito bom* nos domínios de liderança e gestão e prestação do serviço educativo e *bom* nos resultados académicos. Nesta avaliação, concluiu-se que 71% dos alunos da escola não beneficiaram de auxílios económicos e que "o caminho já percorrido na construção de uma cultura de escola mais equitativa e inclusiva" (PE, 2016, p. 8) é notório no que às necessidades educativas especiais diz respeito.

As ofertas educativas da escola também se estendem a clubes e oficinas como a oficina e atelier de artes, clube da astronomia, o desporto escolar (ginástica, corfebol e badminton), oficina de robótica, oficina de teatro, projeto parlamento dos jovens, clube de xadrez e projeto eco escolas.

Relativamente às infraestruturas, a escola possui salas de aula equipadas, na sua maioria, com computador, vídeo projetor, quadro branco e quadro iterativo. Para além destas infraestruturas, a escola dispõe de salas de desenho, laboratórios de multimédia, laboratórios de *software* e laboratórios de *hardware*, um estúdio de rádio e televisão, ginásios, um campo de jogos e um pavilhão desportivo, salas de estudo, uma biblioteca e quatro auditórios. Esta escola também integra diversos equipamentos e recursos, assumindo-se como um espaço de construção da cultura.

2.1.2. Caracterização da turma

A intervenção pedagógica decorreu numa turma do 10.º ano de escolaridade do curso de Ciências Socioeconómicas, constituída por 27 alunos, dos quais quinze eram raparigas e doze eram rapazes, com idades compreendidas entre os 15 e os 17 anos.

Tabela 1: Distribuição (%) das idades dos alunos da turma

Idades dos alunos	Número de alunos	Percentagem de alunos
15	24	88,9%
16	2	7,4%
17	1	3,7%

Pela análise da Tabela 1, verifica-se que a maioria dos alunos da turma tinha 15 anos. Entre os alunos da turma, três frequentaram a disciplina de Matemática do 10.º ano de escolaridade pela segunda vez para melhoria de nota.

Em termos de materiais para o estudo escolar, a maioria dos alunos possuía computador e telemóvel com acesso à internet, o que refletia as condições sócio económicas do seu agregado familiar, constituído por encarregados de educação com elevadas habilitações académicas e profissões de nível económico intermédio.

Relativamente às atividades desempenhadas nos seus tempos livres, os alunos apontaram que praticam desporto, utilizam o computador para jogar, veem filmes, leem livros e gostam de conviver com os amigos.

Antes da intervenção pedagógica, revelou-se importante conhecer as perceções dos alunos sobre a disciplina de Matemática e, em particular, sobre as funções e a colocação de perguntas por parte do professor na sala de aula. Para tal, foi aplicado um questionário à turma (Anexo III), cuja informação se sintetiza em torno das dimensões que organizaram este instrumento de recolha de dados. Alguma dessa informação é apresentada, neste subcapítulo, num registo que traduz o que o aluno determinou.

Perceções dos alunos relativamente à disciplina de Matemática. A Matemática é vista pelos alunos de diferentes formas e os temas intrínsecos ao estudo desta disciplina no 10.º ano de escolaridade também. Enquanto alguns alunos preferiram certos temas por considerarem que são mais exigentes e desafiam o raciocínio, outros referiram que tais temas os desmotivaram por lhes causarem mais dificuldades de compreensão dos conteúdos subjacentes. A maioria dos alunos (52,6%) referiu que o tema Geometria foi o seu favorito por considerarem que este tema é constituído por "subtemas de fácil compreensão" que facilmente se relacionam, ser "mais interessante", "estimula o pensamento" e que é "o tema mais fácil". Cerca de 36,8 % referiu que funções foi o seu favorito por considerarem que este tema é "o mais útil" e aquele em que tiveram "mais facilidade" e que exigiu "um raciocínio mais elaborado". Por outro lado, as funções foi também um dos temas em que os alunos (42,1%) revelaram sentir mais dificuldades, referindo que neste tema "é fácil cometer pequenos erros" e que o facto de ter "muito conteúdo" o tornou um tema de difícil estudo. A Lógica (42,1%) foi outro tema em que os alunos revelaram ter sentido dificuldades. A razão apresentada para tal foi o facto de não conseguirem "compreender os conceitos apresentados nas aulas" e a aplicabilidade dos mesmos.

Relativamente às várias estratégias que podem ser adotadas no ensino e na aprendizagem do tema funções, os alunos referiram que as estratégias mais adequadas são a transmissão de matéria por parte do professor (57,9%), a promoção da interação nas aulas entre alunos e entre professor e alunos (47,4%), a promoção da discussão sobre a resolução das tarefas (42,1%) e o envolvimento dos alunos nas definições, propriedades e regras matemáticas estabelecidas na aula (26,3%).

Quanto ao modo como gostariam que as aulas de Matemática decorressem, os alunos afirmaram que gostariam que os alunos e o professor estabelecessem uma comunicação mais encorajadora, uma vez que isso ajudaria a que "os alunos se sentissem mais à vontade para expor as suas dúvidas" e "incentivaria os alunos a participar". Além disso, os alunos consideraram que deveriam ter oportunidade de interagir mais com os colegas e debater questões na sala de aula.

Perceções dos alunos relativamente às perguntas na sala de aula. Os alunos consideraram que as perguntas têm diferentes vantagens na sala de aula. Todos os alunos, à exceção de um, revelaram concordar com a afirmação 'as perguntas que são colocadas pelo professor favorecem a aprendizagem'. Vários alunos referiram que estas perguntas "desafiam" o pensamento, permitem perceber o nível de conhecimento de cada aluno e, através das perguntas que são colocadas aos colegas, o aluno consegue "aprender mais". Além disso, através das perguntas, o professor consegue encaminhar o raciocínio do aluno e "perceber onde é que os alunos erram". Um dos alunos referiu que as perguntas colocadas pelo professor "nem sempre favorecem a aprendizagem, uma vez que os alunos podem não entender a questão e isso pode confundi-los". Relativamente à afirmação 'nas aulas de Matemática o professor deve escutar as ideias dos alunos e pedir-lhes que as justifiquem', todos os alunos concordaram com a afirmação, referindo que permite que haja uma "melhor comunicação entre o professor e os alunos" e que permite que o professor consiga "identificar melhor as dúvidas" dos alunos e, consequentemente, construir estratégias para colmatar tais dificuldades. Além disso, os alunos comentaram que é importante que o professor escute as ideias dos alunos "pois com isso poderá identificar as dúvidas dos alunos" e "dá vontade de participar mais". O pedido de justificação das ideias dos alunos por parte do professor pode, de acordo com um aluno, "ajudar muito os alunos com mais dificuldades, seja na compreensão de uma pergunta, de um conceito ou até da matéria". Todos os alunos concordaram também com a afirmação 'nas aulas de Matemática o professor deve incentivar os alunos a escutar, responder e questionar'. Relativamente a esta afirmação, os alunos referiram que "as aulas ficam mais leves" porque os alunos se "interessam mais" e que "só a escutarmos é que conseguimos perceber o que nos estão a transmitir e responder e questionar é muito importante porque nos ajuda a entender as dúvidas que temos". Para alguns alunos, embora este tipo de comunicação pareça "assustador", pode contribuir significativamente para a construção do conhecimento e o esclarecimento de dúvidas. Os alunos referiram ainda que o apoio do professor é essencial para que o aluno se sinta menos desconfortável na colocação de perguntas e na resposta a perguntas do professor.

No que se refere ao comportamento e participação, esta turma era muito participativa e interessada, procurando interagir com os colegas e com o professor durante a aula e participar em diferentes momentos da aula. Os alunos mostraram-se dedicados e empenhados. No entanto, a turma tinha um comportamento um pouco atípico, perturbando algumas vezes o ritmo da aula. Esta turma integrava alunos com níveis de desempenho heterogéneos, desde alunos com muitas dificuldades à disciplina de Matemática a alunos com elevadas capacidades de desempenho. Por conseguinte, os alunos da turma tinham ritmos de trabalho muito diferentes, tanto na resolução das tarefas como na assimilação e compreensão dos tópicos em estudo. A turma destacava-se de forma positiva pelo facto de expor as suas dúvidas e ter a iniciativa de participar e procurar o conhecimento.

Em termos de desempenho ao longo do ano letivo, como já foi referido, três alunos da turma estavam a repetir o 10.º ano de escolaridade, com o objetivo de melhorar a classificação obtida no ano letivo anterior. Os restantes alunos tinham uma média final, no 9.º ano de escolaridade, de nível 4, aproximadamente.

Tabela 2: Frequência do desempenho escolar dos alunos no 9.º e 10.º anos de escolaridade

	9º ano	**10º ano de escolaridade**		
	Classificação Final	1.º Período	2.º Período	3.º Período
Positivas	24	19	19	22
Negativas	0	8	8	5
Média	3,96	11,32	12,52	13,35

No final do 10.º ano de escolaridade, apenas 5 alunos tiveram avaliação negativa a Matemática e os restantes tiveram avaliação positiva, resultando numa média final de 13,35 valores aproximadamente. Três alunos conseguiram melhorar o seu desempenho no 3.º período e, consequentemente, passar de uma avaliação negativa para uma avaliação positiva.

2.2. Enquadramento Teórico

Atendendo à temática em estudo, este subcapítulo apresenta os fundamentos teóricos que sustentam a intervenção pedagógica à luz da literatura existente. Assim, divide-se em quadro secções: (1) a evolução histórica das funções; (2) as funções nos programas escolares; (3) as dificuldades dos alunos no tema funções; (4) a comunicação na sala de aula, em particular, a negociação de significados e os estilos de comunicação e interação identificados na literatura; (5) a relevância das perguntas na sala de aula, tanto as perguntas colocas pelo professor como as perguntas colocadas pelos alunos.

2.2.1. A evolução histórica das funções

A Matemática que hoje é em ensinada nas escolas resulta de séculos de estudos e de um longo caminho de desenvolvimento do pensamento matemático para o qual muitos matemáticos contribuíram. O conceito de função passou por diferentes formulações e generalizações ao longo da história da Matemática. Desde a ideia de independência entre duas variáveis até à noção de função estudada atualmente e aos estudos mais complexos de funções, foram necessários vários séculos. Diversos autores como, por exemplo, Bueno e Vialli (2009) e Gonçalves (2015), defendem que a evolução do conceito de função pode ser explicada tendo em consideração três etapas: a Antiguidade, a Idade Média e a Idade Moderna. No entanto, na Idade da Pedra, sem qualquer noção de função, a ideia de dependência entre duas grandezas já tinha surgido associada à contagem de rebanhos (Kleiner, 2012).

Na Antiguidade, a noção de função aparecia associada à dependência entre duas quantidades, não existindo ainda o conceito de função. De acordo com Pires (2016), os babilónios, por exemplo, recorriam a tabelas sexagesimais de quadrados, de cubos e de raízes quadradas e raízes cúbicas para as operações matemáticas. Nestas tabelas evidencia-se a ideia principal do conceito de função - a dependência funcional entre variáveis.

Na Idade Média, a dependência entre quantidades era definida, principalmente, através da descrição verbal ou por meio de tabelas e gráficos (Ponte, 1992), mais do que através da sua representação algébrica. Nesta época, Oresme destacou-se por desenvolver a teoria geométrica das latitudes, utilizando as coordenadas para representar a velocidade em função do tempo (Ponte, 1992). Num gráfico, Oresme representou as longitudes, isto é, instantes de tempo, através de pontos, e as latitudes através de segmentos de reta perpendiculares à reta que une as longitudes e que passam em cada um dos pontos de longitudes (Pires, 2016). Assim, o comprimento de cada um desses segmentos de reta representa a velocidade (Pires, 2016). Por sua vez, a latitude representava uma quantidade variável e dependida da longitude. Neste sentido, na atualidade, a latitude e a longitude são equivalentes aos termos 'ordenada' e 'abcissa', respetivamente. Deste modo, surge a representação de função através de um gráfico.

É no século XVII, no período moderno, que se dá o surgimento do conceito de função como objeto de estudo corrente em Matemática (Ponte, 1992). Viète foi o primeiro matemático a utilizar uma expressão algébrica, introduzindo vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes matemáticas (Gonçalves, 2015). Segundo Boyer (1999), Leibniz foi o primeiro a usar o termo 'função' num manuscrito em 1673. Este matemático, além de introduzir o termo 'função', introduziu também termos como 'variável', 'parâmetro' e 'constante' (Ponte, 1990). O estudo mais complexo do comportamento das curvas através de métodos algébricos levou à necessidade de representar quantidades dependentes de uma variável por meio de uma expressão analítica. Por conseguinte, o termo ‘função’ surge então numa correspondência entre Bernoulli e Leibniz (Pires, 2016; Ponte, 1992). No entanto, só com a publicação de um artigo de Bernoulli, em 1718, surgiu uma definição de função. Nesta definição, Bernoulli apresentada ‘função’ como sendo uma quantidade que é composta por variáveis e constantes (Ponte, 1992). Após essa definição, Euler, em 1748, modificou o termo ‘quantidade’ na definição por ‘expressão analítica’. Aliás, foi este matemático que introduziu a notação f para o conceito de função (Gonçalves, 2015). Boyer (1999) considera que foi Euler o construtor da notação mais bem-sucedida para função. A definição de Euler de função provocou várias discussões e inúmeras polémicas, o que o levou a reformular o conceito de função, apresentando uma definição em que já não era exigido que uma função fosse dada por uma expressão analítica (Correia, 1999).

No século XIX, Fourier conjeturou que se poderia obter um desenvolvimento em série trigonométrica para qualquer função (Correia, 1999; Ponte, 1990). Segundo estes autores, embora Fourier não tenha provado esta conjetura, forneceu diversos exemplos da sua afirmação. Dirichlet, mais tarde, resolve o problema da representação de uma função qualquer por uma série geométrica, formulando-o corretamente. Este matemático mostrou que uma função é uma correspondência entre duas variáveis, de forma que a todo o valor da variável independente corresponde apenas a um e um só valor da variável dependente.

No século XX, devido a Cantor e à teoria dos conjuntos, a definição de função passou a incluir correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos, numéricos ou não (Ponte, 1990). Atualmente, a noção de função é semelhante à definição proposta por Dirichlet em 1837:

> “Dados dois conjuntos A e B, dá-se o nome de função f (ou aplicação) de A em B a uma correspondência que a cada elemento x de A associa um único elemento de B, representado por $f(x)$.” (Andrade, Pereira, & Pimenta, 2015, p. 6)

2.2.2. As funções nos programas escolares

Ao longo dos tempos têm-se verificado constantes mudanças curriculares e programáticas no sistema educativo português, o que tendem a instigar mudanças ao nível dos objetivos e dos conteúdos a abordar, que variam de acordo com as finalidades da educação (Ponte, 2002). O tema funções, sendo considerado um tema central no estudo da Matemática, foi, portanto, fonte de constantes reformulações no currículo de Matemática do ensino em Portugal.

Nos primórdios do século XX, as funções apresentavam um papel diminuto no currículo de Matemática, percetível, principalmente, no Decreto-Lei de 1936. É com este Decreto-Lei que se introduz o estudo de funções no 6.º ano de escolaridade. Após esse Decreto-Lei verificaram-se diversas alterações no currículo, alvo de bastantes críticas devido, essencialmente, à densidade e extensão que conferiam ao programa de Matemática. Com o objetivo de simplificar estes programas, foram introduzidas, em 1954, alterações que permitiam uma maior adequação ao nível de ensino dos alunos, mas marcadas pela importância dada à memorização e mecanização (Mota, 2019; Ponte, 2002).

No final da década de 50, começaram a surgir pressões para a modernização do ensino da Matemática. Os currículos de Matemática são, fruto do movimento internacional da Matemática Moderna, reformulados e confrontados com uma nova abordagem da Matemática, como é vista, aprendida e ensinada (Mota, 2019; Ponte, 2002). Um dos protagonistas e principais responsáveis pelas iniciativas de 'Matemática Moderna' em Portugal foi, de acordo com Ponte (2002), Sebastião e Silva. Este matemático procurou mostrar a validade das suas ideias e difundi-las através da realização de um curso na Universidade de Lisboa, que procurava atualizar os professores do Liceu, e da redação de manuais e livros para alunos e professores, respetivamente, e de textos e guias para os 10.° ano e 11.° ano de escolaridade (Gonçalves, 2007). Nestes manuais e livros, Sebastião e Silva refletia a sua visão da Matemática, dos processos de ensino e aprendizagem e dos conteúdos a abordar, "proporcionando o tratamento de novos temas sem derrapar para os formalismos extremistas que se assistia noutros países" (Ponte, 2002, p. 28). Apesar dos seus esforços, a Matemática Clássica continuou a estar muito presente e, aliada à resistência e formação dos professores, conduziu a diversas críticas à Matemática Moderna e aos currículos vigentes.

A Lei de Bases do Sistema Educativo de 1986 e as reformas na educação provocaram a reorganização dos planos curriculares. Assim, é implementada a reforma de 1991 com novos programas de Matemática para o ensino básico e para o ensino secundário. Estes novos programas de Matemática para o ensino secundário conduziram a críticas relacionadas com a organização curricular e com o conteúdo a abordar. No sentido de resolver alguns dos problemas apresentados pelos professores, foi proposto um plano de 'reajustamento' curricular.

Já no século XXI dá-se um novo movimento de reorganização curricular, cujas alterações foram discutidas nas escolas e só depois implementadas. No caso dos programas de Matemática para o ensino secundário, estes não foram sujeitos a alterações substanciais. Só em 2011 surge uma nova reforma curricular com o aparecimento de um documento designado por 'Metas Curriculares', que correspondem a um conjunto de objetivos que os alunos devem atingir e que estão divididos em níveis de desempenho. Este documento gerou alguma controvérsia na comunidade educativa e, por isso, surgiram algumas orientações para a gestão do programa curricular de Matemática. Em 2016, é publicado um novo documento pelo Ministério da Educação, o 'Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória'. Este documento e a alteração legislativa do currículo no ensino secundário levaram a um clima de instabilidade nos professores. De forma a auxiliar os professores e orientá-los, foram definidas as 'Aprendizagens Essenciais' (AE), que incentivam à procura de ligações entre as diversas disciplinas e à diversificação das metodologias de ensino, integrando orientações para o trabalho do professor.

Atualmente, a noção de Função surge informalmente nos 1.º e 2.º Ciclos de ensino através das sequências, em que a cada número corresponde um único termo, e através do trabalho com correspondências entre duas variáveis que são representadas por tabelas, diagramas e gráficos. A sua noção formal surge no 7.º ano de escolaridade, através da introdução do conceito de função. Neste ano de escolaridade são apresentados conceitos como 'objeto', 'imagem', 'domínio' e 'conjunto de chegada' aos alunos. Ainda neste ano de escolaridade, estudam-se as funções constantes e lineares com o objetivo de os alunos serem capazes de "analisar e representar funções e relacionar as suas diversas representações" (Ministério da Educação e Ciência [MEC], 2017a, p. 11), em particular, a de proporcionalidade direta. No 8.º ano de escolaridade, os alunos desenvolvem a capacidade de "reconhecer uma função em diversas representações, e interpretá-la como relação entre variáveis e como correspondência unívoca entre dois conjuntos" (MEC, 2017a p. 11). Paulatinamente, os alunos estabelecem conexões entre as diferentes representações de funções com o intuito de serem capazes de representar e interpretar graficamente, além da função linear estudada no ano letivo anterior, uma função afim, e relacionar a respetiva representação gráfica e algébrica. No 9.º ano de escolaridade, além das funções estudadas nos anos letivos anteriores, os alunos aprendem a "representar e interpretar graficamente uma função (incluindo a de proporcionalidade inversa e a do tipo $y = ax^2, a \neq 0$), e relacionar a representação gráfica com a algébrica e reciprocamente" (MEC, 2017a, p. 11).

No ensino secundário, o estudo de funções é mais aprofundado. No 10.º ano de escolaridade são estudadas generalidades sobre funções reais de variável real: monotonia, extremos, zeros, entre outras. Neste ano de escolaridade são apresentadas as funções quadrática, definida por ramos e módulo. Com os conhecimentos adquiridos, os alunos são confrontados com problemas que envolvem o estudo elementar destas funções. No 11.º ano de escolaridade, os alunos estudam sucessões, funções reais de variável real e limites e derivadas de funções polinomiais e racionais. Relativamente ao estudo das funções reais de variável real, pretende-se que os alunos sejam capazes de "reconhecer, interpretar e representar graficamente funções racionais do tipo $f(x) = \frac{a+b}{x-c}$, referindo o conceito intuitivo de assíntota" (MEC, 2017b, p. 7) e "reconhecer, interpretar e representar graficamente as funções irracionais do tipo $f(x) = a\sqrt{x-b} + c$" (MEC, 2017b, p. 7). No 12.º ano de escolaridade, os alunos adquirem conhecimentos de continuidade de funções polinomiais, racionais e irracionais e da soma, da diferença, do produto e do quociente de funções contínuas. Complementa-se o estudo do tema de funções com a aprendizagem de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

2.2.3. Dificuldades dos alunos no tema funções

A Matemática é vista, muitas vezes, pelos alunos como uma disciplina exigente e difícil (Almeida, 2011; Brown et al., 2008). As funções são um dos temas em que os alunos mais evidenciam as suas dificuldades, seja pela sua natureza abstrata, pela terminologia e simbologia associada ou pelas conexões entre diferentes domínios da Matemática exigidas (Gonçalves, 2015). Os alunos revelam, de acordo com Domingos (1994) e Pereira (2016), dificuldades relacionadas com a identificação do que é uma variável e que variáveis se encontram envolvidas em determinados contextos matemáticos, a determinação do objeto de uma dada imagem e da imagem de um determinado objeto. Estas dificuldades podem dever-se à diminuta capacidade dos alunos no reconhecimento das relações entre quantidades e entre variáveis, como também com a passagem da representação algébrica para a gráfica e vice-versa.

Para o estudo de funções e para uma real compreensão do conceito de função é essencial que os alunos tenham contacto e sejam confrontados com diferentes representações (NCTM, 2007; Pires et al., 2015). Segundo Pires et al. (2015), aliado ao conhecimento e à compreensão das diferentes representações de uma função está a compreensão do modo como estas representações se articulam. Também outros autores e organizações partilham este ponto de vista. Por exemplo, para Tripathi (2008), a aprendizagem de um conceito só é efetiva quando o aluno consegue articular vários registos de representação, uma vez que a diversidade das representações confere significado ao objeto matemático, dado que nenhuma destas consegue descrevê-lo por completo, mas todas descrevem diferentes aspetos desse mesmo objeto. Friedlander e Tabach (2001) advogam que uma aprendizagem efetiva da Álgebra exige um domínio das várias representações e uma compreensão das limitações de cada representação. O NCTM (2007) defende a importância da capacidade de compreensão das relações entre os diferentes tipos de representação (gráficos, tabelas e símbolos) e da capacidade de avaliação das vantagens e desvantagens de cada representação para um conhecimento mais sólido das funções. No entanto, tal como advoga Domingos (1994), a passagem da representação gráfica para algébrica de funções, e vice-versa, é uma das dificuldades reveladas pelos alunos. Loureiro (2013) considera que os alunos apresentam dificuldades relacionadas com a representação gráfica, entre as quais: o trabalho com escalas quando os eixos das ordenadas e das abcissas não admitem a mesma escala, por exemplo, e a determinação de coordenadas de pontos em contextos que envolvam variáveis contínuas. De forma a colmatar as dificuldades dos alunos relacionadas com as diferentes representações das funções, este autor sugere que sejam dados exemplos, inicialmente, aos alunos em que exista uma expressão algébrica que estabeleça uma relação entre conjuntos numéricos, devendo ser dada especial atenção ao estudo inicial dos gráficos de funções por parte dos alunos.

Para Sajka (2003), as dificuldades sentidas pelos alunos no tema funções estão, principalmente, relacionadas com a ambiguidade intrínseca do simbolismo matemático, com o contexto no qual os símbolos são ensinados e com o tipo limitado de tarefas que se propõe aos alunos. A Álgebra envolve uma imensa simbologia e alterações de significado dos símbolos existentes como, por exemplo, o símbolo de igualdade (Ponte et al., 2009). Desta forma, estes autores identificam a terminologia utilizada na Álgebra como uma das fontes de dificuldades dos alunos no estudo de funções. De acordo com os mesmos, o domínio, o contradomínio, o objeto e a imagem são alguns dos termos que os alunos confundem, principalmente em contextos puramente matemáticos. Os alunos entendem, várias vezes, as letras como incógnitas, no entanto, estas podem também representar variáveis ou um número generalizado (José, 2015). Assim, muitos dos erros dos alunos estão relacionados com o facto de continuarem a usar o mesmo simbolismo aprendido na Aritmética para a Álgebra (Ponte et al., 2009).

Para lidar com todas tais dificuldades, é fundamental delinear estratégias e métodos de trabalho que despertem o interesse dos alunos, que os motivem e os esclareçam, evitando as confusões que possam surgir durante o estudo de tópicos de funções.

2.2.4. A comunicação na aula de matemática

A comunicação é essencial para o quotidiano do ser humano, sendo cada vez mais utilizada para fomentar o desenvolvimento social. No que à sala de aula diz respeito, o NCTM (2007) refere que a "comunicação é uma parte essencial da matemática e da educação matemática" (p. 60). A comunicação pode ser entendida como "um conjunto de processos iterativos desencadeados na sala de aula, na diversidade dos contextos em que ocorrem, das representações subjacentes e das formas de expressão" (Martinho & Ponte, 2005, p. 3). A partir dos anos 80, a comunicação tem adquirido um papel central, tendo as reformas educativas acentuado a importância das interações na sala de aula para uma aprendizagem efetiva (Martinho & Ponte, 2005). Estas reformas incentivaram os professores a criar ambientes de aprendizagem propícios ao desenvolvimento do raciocínio do aluno, impulsionando as conexões matemáticas e a troca de ideias (Brendefur & Frykholm, 2000; Fennema & Franke, 1992). A comunicação na sala de aula passou a ser cada vez mais valorizada e entendida como um processo pelo qual os alunos aprendem, em contraste com um mero objeto curricular (Costa & Pires, 2016).

Na dinamização das atividades de ensino e de aprendizagem muito contribui a comunicação entre os alunos e o professor e entre os alunos. De acordo com vários autores, existem diversas vantagens da promoção da comunicação na sala de aula. Por exemplo, Baroody (1993) refere o desenvolvimento do conhecimento matemático e das capacidades de resolver problemas, o desenvolvimento do raciocínio e a estimulação da confiança como algumas das razões para o incentivo da comunicação na sala de aula. As intervenções dos alunos permitem que o professor se aperceba do nível de conhecimento dos alunos, das suas dúvidas e dificuldades matemáticas, auxiliando-o na construção de estratégias para colmatar estas dificuldades.

As dinâmicas comunicativas na sala de aula podem compreender, pelo menos, dois aspetos essenciais: a negociação de significados e a interação (Ponte et al., 1997; Ponte & Serrazina, 2000).

2.2.4.1. A negociação de significados

A negociação de significados está relacionada com a produção de significados, conceitos e processos matemáticos, e envolve as normas sociais e sociomatemáticas emergentes das interações entre alunos e professor (Guerreiro, 2011; Ponte & Serrazina, 2000). Na negociação de significados, o professor e alunos partilham conceitos entre si e os seus próprios significados e processos matemáticos, tornando o aluno capaz de fazer conexões entre ideias matemáticas (Guerreiro, 2014). A negociação de significados na sala de aula implica que tanto o professor como os alunos formem os seus significados de determinados conceitos e processos matemáticos. Neste processo de negociação de significados, o papel do professor é fundamental, uma vez que é ele que promove um ambiente propício ao desenvolvimento desta negociação de significados matemáticos. Uma das formas que o professor tem de o conseguir é através da promoção da discussão e da troca de ideias e através da estimulação da confiança do aluno (Ponte & Serrazina, 2000). É com esta troca de ideias e negociação de significados que estes são construídos e reconstruídos e a aprendizagem se torna um processo de interação e reflexão, na qual as discussões são de extrema importância para o processo de ensino e de aprendizagem.

A negociação de conceitos decorre, de acordo com Meira (1996), do confronto entre as representações matemáticas e conceitos matemáticos do professor. Na perspetiva deste autor, as dificuldades de aprendizagem matemática podem estar relacionadas com a incapacidade de compreensão de conceitos e representações matemáticas e, em particular, com a ausência de negociação dos significados matemáticos destes conceitos e destas representações. A negociação de processos matemáticos pressupõe o confronto entre processos matemáticos e sociais. Nesta negociação, o contexto escolar é determinante para o reconhecimento dos processos matemáticos negociáveis e os processos matemáticos aceites pelo professor e alunos (Meira, 1996).

A negociação de normas sociais e sociomatemáticas emerge da definição do papel do professor e dos alunos nas interações. As normas sociais e sociomatemáticas regulam o comportamento dos alunos e do professor e devem ser negociáveis entre professor e alunos, ao invés de serem entendidas como regras ou imposições. As normas sociais são normas relacionadas com os aspetos sociais da aprendizagem na sala de aula e as normas sociomatemáticas são específicas da atividade matemática e da sala de aula de Matemática (Guerreiro, 2001).

De acordo com Bishop e Goffree (1986), a negociação de significados tende a ser menos praticada quanto maior o controlo exercido pelo professor sobre a dinâmica da aula.

2.2.4.2. Estilos de comunicação e padrões de interação

A interação pode ser compreendida como uma componente do processo de comunicação (Brait, 2001). A interação pressupõe, segundo Fanizzi (2012), dois ou mais intervenientes por meio dos quais é possível desenvolver e estabelecer um processo de comunicação. Na sala de aula existem diferentes estilos de comunicação e padrões de interação, associados às conceções do professor relativamente às práticas de ensino e de aprendizagem.

O processo de comunicação e interação social pode ser caracterizado pelos padrões de interação existentes entre professor e alunos e entre alunos. Voigt (1985) identifica quatro padrões de interação, que permitem distinguir a natureza das interações e as práticas adotas em sala de aula: padrão de extração; padrão de discussão; padrão de funil; e padrão de focalização. Nos dois primeiros padrões, o professor procura, através do questionamento, que os alunos clarifiquem e expliquem as suas ideias e estratégias matemáticas. O padrão de extração é utilizado quando o objetivo do professor é validar o conhecimento dos alunos. O professor assume o papel de questionador e procura "extrair pequenas parcelas do conhecimento dos alunos" (Ferreira, 2005, p. 55). No padrão de discussão, o professor assume o papel de gestor. Os alunos explicam as suas estratégias e respetiva resolução e o professor coloca algumas questões e submete o conhecimento dos alunos à validação da turma. De seguida, este pode perguntar aos alunos se têm resoluções alternativas, promovendo uma nova discussão na sala de aula. Por sua vez, os padrões de funil e focalização distinguem-se pelo facto de o professor procurar direcionar o conhecimento e o raciocínio dos alunos, de forma a superarem as suas dificuldades. No padrão de funil, o professor pretende conduzir, através do afunilamento do pensamento, os alunos até à resposta pretendida. No padrão de focalização, podem ser distinguidas três fases: (i) o professor propõe uma tarefa à turma; (ii) os alunos apontam algumas dificuldades encontradas e o professor recorre ao questionamento para encaminhar o pensamento dos alunos; (iii) o professor incentiva à continuação do trabalho autónomo e à partilha de ideias com os colegas.

Na dinamização das interações na sala de aula muito contribui as formas como o professor promove a comunicação matemática. Brendefur e Frykholm (2000) distinguem quatro estilos de comunicação matemática: unidirecional; contributiva; reflexiva; e instrutiva. Os estilos de comunicação matemática unidirecional e contributiva pressupõem um predomínio do discurso do professor e pequenas intervenções dos alunos, que funcionam geralmente como resposta a perguntas colocadas pelo professor para validar o conhecimento dos alunos. No primeiro, o professor domina completamente o discurso na sala de aula, enquanto no segundo as intervenções dos alunos são valorizadas, mas estes apenas intervêm com respostas curtas e em resposta a questões de verificação do professor (Silva, 2014). O estilo de comunicação reflexivo é caracterizado por associar ação e reflexão. O professor pede aos alunos para explicarem e justificarem as suas ideias e estratégias matemáticas e, ao longo da aula, interliga o pensamento e raciocínio dos alunos com o seu próprio raciocínio. Por sua vez, o estilo de comunicação instrutiva integra as ideias, estratégias e dificuldades dos alunos e, por isso, o discurso na sala de aula sofre sucessivas alterações, em conformidade com as intervenções dos alunos (Silva, 2014).

Ponte e Serrazina (2000) distinguem três tipos de comunicação relacionados com a exposição, o questionamento e a discussão. A exposição é um tipo de comunicação centrada no professor e muito utilizada na sala de aula, auxiliando-o na introdução de informação ou na explicação de um procedimento matemático. No entanto, os alunos também podem utilizar este tipo de comunicação, devendo ser encorajados a fazê-lo para que organizem os seus pensamentos e desenvolvam o raciocínio e as suas capacidades de argumentação e comunicação com os colegas e o professor (Ponte & Serrazina, 2000). O questionamento pode ser caracterizado pela colocação de perguntas por parte de um dos intervenientes – normalmente, o professor – com determinado objetivo, como, por exemplo, perceber o nível de conhecimento dos alunos. Este tipo de comunicação continua muito centrado no professor, sendo poucas as perguntas que o aluno faz que não sejam apenas perguntas de esclarecimento (Miranda, 2014; Pedrosa, 2000). A discussão pode ser caracterizada pela partilha coletiva de conhecimentos e ideias entre vários intervenientes. Este tipo de comunicação pressupõe uma certa igualdade de papéis na sala de aula, sendo o professor, muitas vezes, o moderador da discussão. As discussões devem ter sempre um objetivo, seja o de clarificar uma ideia ou de definir uma estratégia matemática para a resolução de determinada tarefa, por exemplo.

A forma como o professor promove a comunicação, verbal ou escrita, incentiva os alunos a apresentar as suas dúvidas e a argumentar e justificar as suas ideias (Lopes, 2018; Ponte et al., 1997). O tipo de comunicação implementado na sala de aula depende, na sua maioria, das perspetivas e conceções do professor sobre a comunicação e sobre o seu papel na aprendizagem da Matemática (Menezes et al., 2014). Assim, a comunicação matemática que ocorre na sala de aula é simultaneamente um instrumento e objetivo do processo de ensino e de aprendizagem.

2.2.5. A relevância das perguntas na aula de Matemática

A comunicação na sala de aula pode ser vista como uma forma de debate e partilha de conhecimentos e ideias, mas também como uma forma de interação social na qual ocorrem negociações de significado entre os intervenientes (Guerreiro, 2014; Sierpinska, 1998). O professor, de um modo geral, tem um papel central na estruturação do discurso na sala de aula e no processo comunicativo (Campos, 2009; Martinho & Ponte, 2005; Silva & Navarro, 2012), nomeadamente, através das suas perguntas. A colocação de questões é uma das ações que mais se associa ao professor, assumindo-se como uma parte imprescindível da comunicação na sala de aula de Matemática e permitindo a promoção da aprendizagem e o desenvolvimento de certas competências e capacidades no aluno (Almeida & Fernandes, 2010; Menezes et al., 2014). Aliás, muitas vezes, os professores recorrem às perguntas para regular a aprendizagem, detetar as dificuldades dos alunos e, só depois, encaminhar o seu raciocínio.

A par das tarefas que o professor propõe, as perguntas que emergem das atividades da sala de aula desafiam os alunos a envolverem-se nessas atividades, a pensar e a discutir as suas estratégias e os resultados obtidos (NCTM, 2007). Com o intuito de promover essa discussão, compete ao professor proporcionar na sala de aula uma cultura que valorize o questionamento (Moyer & Milewicz, 2002), tanto por parte do professor como dos alunos. A reação dos alunos às perguntas formuladas permite ao professor aperceber-se do nível de compreensão e das dificuldades sobre os tópicos abordados. No desenvolvimento desta capacidade, as perguntas podem ajudar os alunos a dar sentido às suas atividades, a serem capazes de avaliar se algo é ou não matematicamente correto, a conjeturar, argumentar e a conectar as ideias e as aplicações matemáticas (NCTM, 2007). Nicol (1999) aponta que para além de colocar as perguntas certas aos alunos certos na altura certa, importa que o professor tenha o hábito de ouvir os alunos e a responder de forma construtiva às suas ações. Para Moyer e Milewicz (2002), uma boa pergunta representa a diferença entre coagir o pensamento dos alunos ou encorajar novas ideias. Desse modo, o papel do professor consiste em criar uma 'comunidade discursiva', mais especificamente: (i) colocar perguntas que desafiem o pensamento de cada aluno; (ii) escutar cuidadosamente as ideias dos alunos e pedir-lhes que as clarifiquem e justifiquem; (iii) encorajar os alunos a escutarem, responderem e questionarem o professor e os seus colegas (NCTM, 2007).

Ponte et al. (1997) consideram que a comunicação oral é um meio "imprescindível para que os alunos possam exprimir as suas ideias e confrontá-las com as dos colegas" (p. 84). Claxton (2002) defende que, no século XXI, a educação deve estar relacionada, essencialmente, com o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem. Para promover esta construção, o autor considera necessário que o professor coloque questões capazes de alcançar raciocínios de níveis mais elevados e que incentivem o aluno a procurar coerência, relevância e significado nos seus pensamentos matemáticos. Por sua vez, o NCTM (2011) defende que a ação do professor no tipo de perguntas que coloca aos alunos, no modo como ouve as suas respostas, na forma como gere as interações durante as discussões e como lhes pede para justificarem as suas ideias e raciocínios, é de extrema importância para a aprendizagem dos mesmos. A colocação de perguntas é uma das formas que permite ao professor detetar as dificuldades dos alunos, elucidar sobre o pensamento do aluno e direcioná-lo ou ampliá-lo e promover a sua participação e interação com os colegas (Souza & Moreira, 2007). Quando o professor fala na maioria do tempo da aula, o sentido do fluxo de ideias e conhecimentos é, essencialmente, unidirecional, do professor para o aluno e, por isso, o aluno assume-se como um mero recetor do conhecimento (Almeida & Fernandes, 2010). Neste sentido, é necessário que os alunos intervenham, se sintam parte integrante da sala de aula e interajam com o professor e uns com os outros, uma vez que, quando os alunos intervêm e descrevem os seus procedimentos e ideias, estruturam o seu raciocínio, aprendem a ser claros e explícitos e a utilizar a linguagem matemática para comunicar com os colegas e se expressarem, de maneira a serem compreendidos pelos restantes intervenientes da sala de aula (Nathan & Knuth, 2003; Sfard & Kieran, 2001; Silver, 1990).

Vários autores mencionam diversas vantagens para a colocação de perguntas na sala de aula. Por exemplo, Rocha (2015) refere que as perguntas colocadas pelo professor permitem-lhe aceder a informação que não detém, orientar e direcionar o pensamento dos alunos e avaliar a qualidade do conhecimento dos alunos. Rojas-Drummond e Mercer (2003) apontam que as perguntas formuladas pelo professor facilitam a promoção da participação por parte dos alunos, conduzem o processo de ensino e de aprendizagem e estimulam uma correta utilização da linguagem científica.

Apesar das questões colocadas pelo professor desempenharem um papel relevante no processo de ensino e de aprendizagem, é necessário ter em consideração alguns aspetos na elaboração, preparação e colocação das mesmas. Por exemplo, Brown e Wragg (1993) apresentam as seguintes sugestões:

- Preparar antecipadamente algumas questões;
- Elaborar perguntas claras e concisas, com diferentes níveis de dificuldade;
- Assegurar que todos os alunos são envolvidos no processo de questionamento e de discussão;
- Fazer pausas entre as perguntas e aguardar pelas respostas dos alunos;
- Preparar algumas estratégias para suportar e orientar o pensamento do aluno, caso seja necessário;
- Ouvir as respostas dos alunos e mostrar-se aberto para os seus erros;
- Assegurar que não são feitas perguntas inapropriadas ou que se desviem do objeto em estudo.

Tais sugestões remetem para uma pedagogia que valoriza o envolvimento dos alunos nas atividades realizadas na sala de aula e na construção da sua aprendizagem. Nesta dinâmica, as perguntas colocadas pelo professor desafiam os alunos a pensar e a orientar a atividade matemática que se pretende realizar. Porém, tal como referem Ponte et al. (1997), "fazer perguntas não é tão simples quanto se parece" (p. 85), não sendo a quantidade de perguntas que promove uma aprendizagem mais ou menos significativa, mas a qualidade das perguntas colocadas e, consequentemente, as aptidões interpessoais do professor (Chin, 2007; Menezes, 1996).

2.2.5.1. As perguntas colocadas pelo professor

Na literatura, as perguntas colocadas pelo professor são categorizadas de diferentes formas e aparecem associadas a diferentes objetivos. Por exemplo, Pereira (1991) distingue as perguntas entre perguntas de exame, perguntas reais e perguntas didáticas. As primeiras perguntas servem para controlar e avaliar o conhecimento dos alunos. As perguntas reais constituem perguntas ditas verdadeiras e genuínas e são utilizadas para que o professor obtenha determinada informação do aluno. As perguntas didáticas são perguntas específicas do discurso na sala de aula. Estas perguntas podem implicar uma resposta curta ou exigir que o aluno analise determinado gráfico e explique determinado raciocínio. As pseudo perguntas correspondem a pedidos indiretos de intervenção dos alunos. As interpelações reguladoras servem para o professor organizar o discurso e gerir a aula e o comportamento dos alunos.

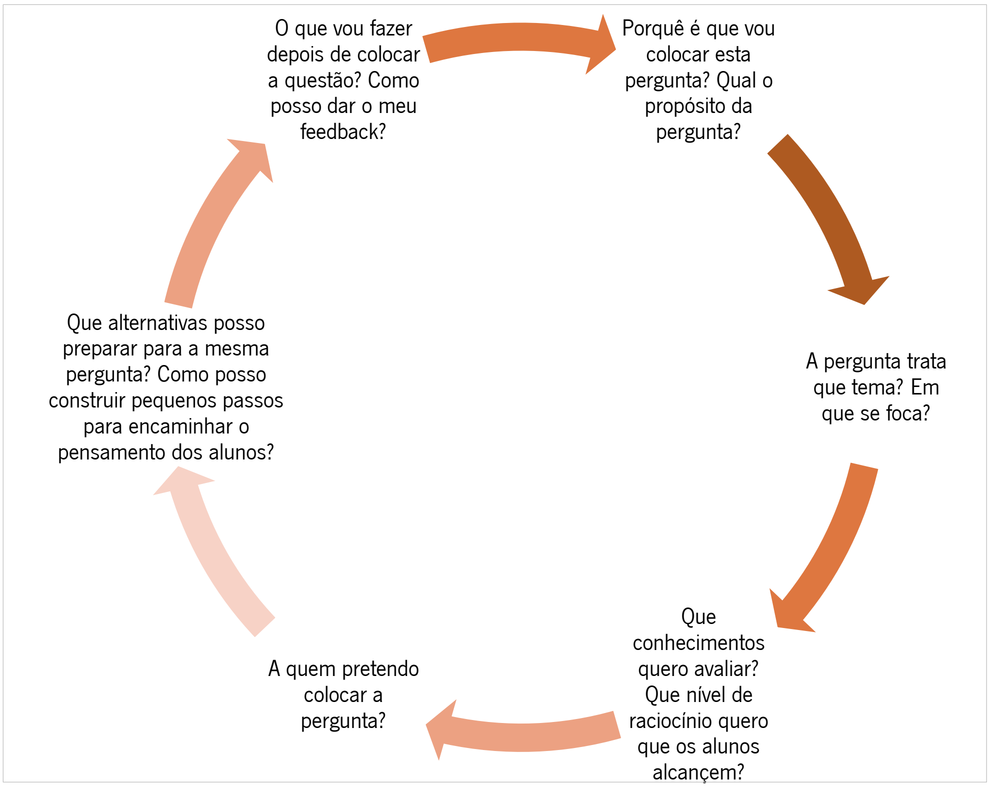
Outro exemplo é o da categorização de Badham (1994) que distingue quatro categorias para as questões colocadas em sala de aula, as questões iniciais, as questões que estimulam o pensamento matemático, as perguntas de avaliação e as perguntas de discussão. As questões iniciais correspondem a questões abertas que têm o intuito de encaminhar o raciocínio do aluno. As questões que estimulam o pensamento matemático têm o objetivo de auxiliar o aluno para que este se foque em estratégias específicas e visualize padrões (Badham, 1994; Way, 2008). As perguntas de avaliação exigem que o aluno explique o seu raciocínio e a sua estratégia de resolução. As perguntas de discussão levam os alunos a partilhar as suas ideias e raciocínios e à comparação de estratégias de resolução. Este tipo de perguntas permite que os alunos avaliem o seu trabalho e é propícia à construção de ideias e ao estabelecimento de relações matemáticas (Way, 2008).

Por sua vez, Love e Mason (1995) categorizam as perguntas em três tipos: as perguntas de focalização, as perguntas de confirmação e as perguntas de inquirição. As perguntas de focalização, que têm como objetivo focar a atenção do aluno num ponto específico e, consequentemente, ajudá-lo a seguir determinado percurso de raciocínio e/ou a ultrapassar determinada dificuldade (Martinho & Ponte, 2005; Ponte & Sezarrina, 2000). As perguntas de confirmação, que procuram ajudar o professor a testar o nível de conhecimento e memória do aluno relativamente a determinado tema. Neste tipo de questões, o professor sabe exatamente o que quer ouvir e o que pretende com determinada pergunta (Martinho & Ponte, 2005; Ponte & Sezarrina, 2000). As perguntas de inquirição, que são perguntas que o professor coloca com o intuito de obter alguma informação por parte do aluno como, por exemplo, o modo como está a raciocinar, a sua resolução em determinada tarefa, as dificuldades que está a sentir, entre outros. Para tal, o professor pode pedir que o aluno comente determinada resolução do colega ou que explique dado raciocínio, por exemplo (Fonseca, 2009). Apesar das perguntas terem diferentes objetivos e poderem, consequentemente, ser associadas a perguntas de diferentes níveis, Ponte e Serrazina (2000) defendem que todas elas são necessárias e têm o seu papel na sala de aula, mas a sua utilização deve ser equilibrada, havendo momentos propícios e adequados a cada uma delas.

Frank et al. (2009) identificam e analisam quatro tipos de perguntas a que os professores recorrem para tornar o raciocínio dos alunos explícito: as perguntas gerais; as perguntas específicas; as sequências de perguntas específicas; e as perguntas de encaminhamento. As perguntas gerais não estão relacionadas com nada específico mencionado pelo aluno, enquanto as perguntas específicas estão associadas a algo específico da explicação do aluno. As sequências de perguntas específicas consistem numa série de duas ou mais perguntas relacionadas entre si e que estão associadas a algo específico que o aluno mencionou, estas perguntas têm várias respostas por parte do aluno. As perguntas de encaminhamento são perguntas que o professor coloca com o objeto de conduzir o pensamento do aluno e encaminhar as suas respostas ou explicações matemáticas. Neste trabalho, os autores estudam as perguntas que os professores fazem para envolverem os seus alunos em discussões matemáticas e o modo como os alunos se envolvem nestas discussões. Para tal, observaram as aulas de três professores. Estas aulas revelam que os professores colocam os diferentes tipos de perguntas de forma relativamente equilibrada, sendo as sequências de perguntas específicas as mais utilizadas e as perguntas de encaminhamento as menos utilizadas. Relativamente ao efeito que cada tipo de pergunta teve nos alunos, é percetível que os alunos conseguem, depois de dar uma explicação incorreta, construir explicações corretas e completas quando o professor coloca, maioritariamente, sequências de perguntas específicas.

Apesar de existirem diferentes tipos de perguntas que podem ser colocadas na sala de aula e diversas formas de 'manipular' a utilização e frequência destas perguntas, é fundamental que o professor tire o máximo proveito das perguntas que coloca na sala de aula e das respostas que os alunos lhe dão, tornado o questionamento produtivo (Newton, 2017). Com esta finalidade, Newton (2017) elaborou um possível ciclo de preparação de perguntas:

Figura 1: Sequência de preparação do questionamento baseado em Newton (2017)



Para a autora, as perguntas devem ser elaboradas tendo em mente o objetivo das mesmas e os processos mentais necessários para a sua resposta. Assim, a autora defende que os professores devem questionar: (i) a razão da pergunta que pretendem colocar e o seu propósito; (ii) sobre que tema se trata a pergunta e em que se relaciona com o objeto em estudo ou se se foca em algum aspeto específico; (iii) que tipo de nível de raciocínio se pretende que o aluno atinja e que percurso de raciocínio se pretende que este siga; (iv) a quem se pretende colocar a pergunta (conjunto de alunos ou aluno específico) e qual o conteúdo em que se está a trabalhar ou em que contexto; (v) se pode ter de reformular a pergunta ou se pode ter que preparar algumas perguntas ou estratégias que permitam orientar o pensamento do aluno; (vi) que atitude pretende admitir caso a resposta seja respondida corretamente, ou seja, que *feedback* deve ser dado ao aluno.

Como é referido por Ponte e Serrazina (2000), todos os tipos de perguntas devem ser utilizados na sala de aula, mas são diversos os estudos que mostram que os professores se focam muitas vezes num discurso centralizado e cujas perguntas apenas servem de ponte e forma de organização do diálogo. Além disso, as perguntas partem, geralmente, do professor e não dos alunos. Menezes (1995) estudou as conceções dos professores sobre as perguntas na sala de aula. Para tal, observou as aulas de dois professores e as suas práticas relativamente à comunicação na sala de aula. O autor verificou que o primeiro professor fez um elevado número de perguntas, sendo que uma parte significativa dessas perguntas visavam a execução de tarefas ou o controlo de comportamentos atípicos por partes dos alunos, ao invés da obtenção de informações sobre o raciocínio e/ou conhecimento dos alunos. As perguntas do professor eram, na sua maioria, dirigidas à turma, devendo os alunos propor-se a participar na aula. O segundo professor observado colocou várias perguntas cujo objetivo era controlar o conhecimento dos alunos relativo a temas tratados nas aulas anteriores e o desenvolvimento da capacidade de comunicação dos mesmos. O professor em questão procurava, através do questionamento, fomentar a discussão, incentivar a intervenção dos alunos e a reflexão e troca de ideias. Martinho e Ponte (2005) estudaram o desenvolvimento profissional de um professor de Matemática. Nesse caso de estudo é percetível que a aula observada é pautada por diversas perguntas, no entanto, estas eram, essencialmente, perguntas de focalização e confirmação.

2.2.5.2. A intervenção dos alunos

A intervenção do aluno é considerada uma componente relevante do discurso na sala de aula e um veículo para aumentar a aprendizagem (Franke et al., 2010). O NCTM (2011), em particular, advoga que "os alunos devem conversar uns com os outros e também em resposta ao professor (...) Quando os alunos fazem conjeturas em público e raciocinam com outras pessoas sobre Matemática, as ideias e o conhecimento são desenvolvidos de forma colaborativa" (p. 34). As capacidades de comunicação do aluno estão relacionadas com a sua aptidão para expressar suas ideias, descrever e discutir conceitos matemáticos de forma coerente e clara. Mas também é a capacidade do aluno de explicar e justificar os seus procedimentos e ideias, tanto oralmente quanto por escrito (Lomibao et al., 2016).

Relativamente à comunicação verbal, quando o professor faz uma pergunta, as respostas dos alunos podem ser muito distintas e dar informações diferentes ao professor. As ideias e as respostas do aluno às perguntas do professor permitem que o professor compreenda o raciocínio dos alunos e avalie os seus conhecimentos (Franke et al., 1997; Franke et al., 2010). Estas permitem que os restantes alunos da turma avaliem e comparem as estratégias de resolução utilizadas, resultando em inúmeras oportunidades de aprendizagem. Além disso, o próprio ato de falar e responder às perguntas colocadas, tanto pelo professor como pelos colegas, pode promover o desenvolvimento de uma compreensão efetiva do objeto em estudo (Chi, 2000). Ao descrever, explicar ou justificar o seu raciocínio, o aluno tem a noção do seu conhecimento, reorganiza e esclarece dúvidas, preenche lacunas na compreensão, constrói regras de inferência específicas para resolver problemas e institucionaliza conceitos (Chi, 2000; King, 1992; Rogoff, 1991).

Existem autores, nomeadamente, Muir (2009), que apresentam uma tipologia para as respostas dos alunos. Esta autora distingue seis tipos de respostas dos alunos: respostas curtas; explicação; partilha; justificação; pergunta ou desafio. As respostas dos alunos são consideradas curtas quando o aluno dá uma resposta usando poucas palavras, por exemplo, quatro palavras ou menos. As explicações são respostas mais longas que uma resposta curta e diferem da partilha porque exigem uma explicação da estratégia ou raciocínio do aluno. As justificações correspondem a respostas nas quais os alunos elaboram as suas explicações e, frequentemente, procuram generalizar uma ideia. As respostas em que os alunos questionam ou contestam a resposta são consideradas perguntas ou desafios, respetivamente.

Não só as questões colocadas pelo professor constituem um aspeto importante da comunicação verbal, como também as perguntas colocadas pelos alunos são parte crucial desta comunicação. Embora o discurso na aula de Matemática seja, frequentemente, definido por um panorama em que o professor faz as perguntas e o aluno responde, a colocação de perguntas por parte do aluno pode impulsionar a aprendizagem (Graesser & Olde, 2003). Questionar incentiva os alunos e envolve-os no raciocínio crítico (Graesser & Olde, 2003). De acordo com estes autores, as perguntas são geralmente colocadas quando os alunos são confrontados com, por exemplo, obstáculos aos objetivos, contradições, discrepâncias, contrastes salientes e lacunas óbvias no conhecimento, sendo um elemento importante dos processos de ensino e aprendizagem.

A formulação de perguntas pelos alunos é reconhecida como uma das interações mais importantes para a aprendizagem, uma vez que o facto de os alunos serem desafiados e encorajados a formular perguntas, em diferentes momentos da aula, estimula a ocorrência de raciocínios de alto nível e a capacidade de refletir sobre o conhecimento adquirido, algo que geralmente não ocorre quando apenas respondem a perguntas colocadas pelo professor (Lopes & Silva, 2010). Chin e Osborne (2008) advogam que as perguntas colocadas pelos alunos lhes permitem: (a) conduzir a construção do seu conhecimento; (b) fomentar a discussão e o debate de ideias; (c) avaliar o próprio conhecimento e monitorizar a aprendizagem; (d) e aumentar a motivação e o interesse pelo objeto em estudo. Mas não são só os alunos que saem beneficiados com a colocação de perguntas por parte dos alunos, os professores conseguem, através delas, perceber o nível de conhecimento dos alunos, as suas dificuldades, avaliar raciocínios de níveis superiores, estimular o pensamento do aluno e promover a discussão e reflexão na turma (Chin & Osborne, 2008).

Vários autores distinguem diferentes categorias para as perguntas colocadas pelos alunos na sala de aula. Por exemplo, Scardamalia e Bereiter (1992) distinguem duas categorias de perguntas – as perguntas com base em textos e as perguntas baseadas no conhecimento. As perguntas baseadas em textos estão relacionadas com perguntas colocadas pelos alunos com o objetivo de clarificar alguma informação apresentada no enunciado de uma tarefa. Por sua vez, as perguntas baseadas no conhecimento estão relacionadas com perguntas espontâneas dos alunos e que têm como objetivo dar sentido a determinado pensamento, colmatar determinada dificuldade ou obter determinada informação por parte do professor ou dos colegas. Watts et al. (1997) propõem três categorias de perguntas colocadas pelos alunos: as perguntas de consolidação; as perguntas de exploração; e as perguntas de elaboração. Esta categorização de perguntas está associada à evolução do conhecimento dos alunos. As perguntas de consolidação são utilizadas para consolidar o conhecimento e, consequentemente, a aprendizagem. As perguntas de exploração servem para auxiliar os alunos a aumentar o seu conhecimento e nível de raciocínio. As perguntas de elaboração são utilizadas para elaborar estratégias de resolução e resolver conflitos de conhecimento, por exemplo.

Além da comunicação verbal, também a comunicação escrita constitui uma componente da comunicação, assumindo-se como uma forma dos alunos comunicarem entre si e com o professor (Martins, 2018). Freitas (2006) e Santos (2005) referem que a linguagem escrita tem a capacidade de fazer o aluno refletir sobre as suas ideias e, consequentemente, sobre a sua aprendizagem. Quando é pedido ao aluno que escreva, este assume uma postura ativa no processo de aprendizagem, uma vez que deve refletir criticamente sobre o seu pensamento e clarificar as suas ideias (Freitas, 2006; Lomibao et al., 2016; NCTM 2007). Adu-Gyamfi et al. (2010) defendem que os estudantes que têm oportunidade e são encorajados a ler, escrever, ouvir e falar na aula de matemática impulsionam a sua aprendizagem, sendo que, por um lado, utilizam a comunicação para aprender Matemática e, por outro, aprendem a comunicar matematicamente. Estes autores referem que comunicar matematicamente e, em particular, escrever matemática requer um domínio da linguagem matemática e dos conteúdos aprendidos. Neste sentido, a comunicação escrita é uma importante fonte de informação para o professor, permitindo detetar e compreender as dificuldades e potencialidades dos alunos (Santos & Semana, 2014). Geralmente, espera-se que os alunos apresentem e expliquem as estratégias que utilizaram para resolver determinada tarefa, bem como justifiquem o seu raciocínio. No entanto, de acordo com as autoras, muitas vezes, os alunos apenas apresentam a estratégia efetuada e não justificam o seu pensamento durante as suas produções, fazendo-o apenas oralmente e quando são confrontados pelo professor ou pelos colegas.

De um modo geral, as produções escritas dos alunos são constituídas por diferentes representações e, por vezes, justificações. O tipo de justificação formulado pelos alunos e as representações utilizadas podem dar informação ao professor sobre o nível de compreensão do aluno à cerca de determinado tópico (Santos & Semana, 2014).

A partilha dos raciocínios e a explicação da razão para considerarem que algo é ou não verdadeiro ou correto caracteriza o processo de justificação (Cioe et al., 2015). As justificações podem ser usadas para validar determinadas afirmações, revelar o entendimento de determinado tópico e sistematizar o conhecimento. Existem várias formas dos alunos justificarem as suas estratégias. Santos e Semana (2014) distinguem os seguintes tipos de justificação: (i) vaga – justificação pouco clara; (ii) regra – justificação com recurso exclusivo a regras, algoritmos ou definições; (iii) procedimental – justificação do que é feito em determinada etapa, mas sem explicar a validade da mesma; (iv) e relacional – justificação da validade de um passo, incluindo ou não a justificação do que é feito em determinada etapa. Apesar das justificações dos alunos serem essenciais para a compreensão do seu nível de conhecimento, estes parecem preocupar-se mais em responder corretamente às questões formuladas (Santos e Semana, 2014).

As representações permitem que o aluno organize o seu pensamento (Duval, 2004; Ponte et al., 2015). Estas retratam algo de alguma forma, isto é, são formas de interpretar e apresentar algo ou alguma informação e ajudam a interpretar, sistematizar, organizar informação e comunicar ideias matemáticas (NCTM, 2007; Stylianou, 2010). As representações que um aluno é capaz de fazer estão relacionadas com a sua compreensão de determinado conteúdo e com a sua capacidade de lidar com conceitos matemáticos e, por isso, estão relacionadas com o raciocínio matemático de cada aluno (Ponte et al., 2012). Vários autores, como é o caso de Dreyfus (2002), dividem as representações em dois grupos – as representações externas e as representações internas. As representações externas são a forma como uma ideia matemática pode ser apresentada, através da escrita ou da oralidade, correspondendo, por exemplo, a tabelas, gráficos, esquemas, diagramas e símbolos (Dreyfus, 2002; Valério, 2005). Por sua vez, as representações internas são as imagens mentais construídas por cada indivíduo, isto é, são as formulações internas construídas da realidade (Goldin & Shteingold, 2001; Valério, 2005). Estes autores advogam que só se pode tirar conclusões sobre as representações internas dos alunos através das suas representações externas.

Relativamente às representações internas, Friedlander e Tabach (2001), por exemplo, consideram quatro formas diferentes de representações externas: algébrica; gráfica; numérica; e a verbal. Duval (2004) propõe outra categorização para as representações: mentais; internas ou computacionais; e as semióticas. As primeiras correspondem às conceções que se tem sobre determinado objeto ou situação e englobam as imagens formadas sobre esse objeto ou situação. As segundas são caracterizadas pela execução automática de determinada tarefa. As representações semióticas consistem em empregar símbolos pertencentes a um sistema de representação que tem as suas próprias dificuldades de significado e funcionamento. Este tipo de representação é considerado por Duval (2004) essencial à atividade cognitiva do pensamento. Por sua vez, Santos e Semana (2014) distinguem três tipos de representações externas – linguagem verbal; icónica; e simbólica. A linguagem verbal está relacionada com a linguagem natural, constituída pelas palavras dos alunos e pela terminologia matemática, enquanto a representação icónica está relacionada com a utilização de esquemas, desenhos e gráficos e a representação simbólica com o recurso a símbolos numéricos e algébricos (Martins, 2018; Santos & Semana, 2014).

2.3. Estratégias de intervenção pedagógica

Esta secção descreve as metodologias de ensino e de aprendizagem e as estratégias de avaliação que nortearam a intervenção pedagógica. A primeira secção apresenta as linhas orientadoras da ação pedagógica, em particular, a relação professor-aluno, as tarefas matemáticas e o ensino exploratório. A segunda secção especifica os instrumentos de recolha de dados utilizados antes, durante e após a intervenção pedagógica para dar resposta às questões de investigação formuladas.

2.3.1. Metodologias de ensino e aprendizagem

As metodologias de ensino e aprendizagem que foram implementadas no projeto de intervenção pedagógica foram definidas tendo como principal eixo orientador a dinâmica e relação professor-aluno que pretendia que existisse na sala de aula. O ensino diretivo, que tende a não valorizar a atividade do aluno, é caracterizado, essencialmente, pela exposição de conteúdos teóricos por parte do professor e seguida da realização de exercícios com o objetivo de repetir procedimentos e memorizar métodos matemáticos (Canavarro et al., 2014). No entanto, atualmente, nas salas de aula, verifica-se que os professores têm diferentes conceções do ensino de matemática e, consequentemente, práticas de ensino diferentes das diretivas. O professor deixa de ser um mero transmissor do conhecimento e dá oportunidades de aprendizagem aos seus alunos de ser parte interventiva na dinamização da sequência de ensino através da realização de tarefas matemáticas que contribuam para a construção do seu próprio conhecimento, raciocinando matematicamente sobre diferentes ideias e atribuindo significado ao conhecimento adquirido através da partilha de ideias com os colegas e professor. Tendo como base esta mudança no panorama de ensino, uma das prioridades nas minhas estratégias de ensino foi fazer com que os alunos não fossem apenas recetores de conhecimento, mas que fossem participantes e construtores do mesmo. Parto do pressuposto de que o principal objetivo da educação consiste em promover o desenvolvimento do sentido crítico e das capacidades de raciocínio. Por isso, as estratégias de ensino valorizaram, essencialmente, a relação professor-aluno, as características das tarefas adotadas e o método de ensino exploratório na concretização dessas tarefas.

2.3.1.1. Relação professor-aluno

A relação professor-aluno desempenhou um papel de grande relevância na intervenção pedagógica e nas decisões tomadas a este nível. A interação professor-aluno é imprescindível para o sucesso dos processos de ensino e de aprendizagem. Como referido anteriormente, é usual pensar-se que na sala de aula o professor assume o papel de emissor do conhecimento e o aluno o papel de recetor desse conhecimento (Menezes, 1995; Pereira, 1991). Nas minhas aulas, procurei implementar metodologias de ensino e aprendizagem em que a relação professor-aluno não se caracterizasse por uma relação em que o professor é um mero transmissor do conhecimento e o aluno um recipiente pronto a 'encher' com este conhecimento. Neste sentido, procurei envolver os alunos nas diferentes atividades, privilegiar o 'fazer para aprender', ao invés de 'aprender a fazer', motivando os alunos para a aprendizagem e encorajando-os a desafiar os seus raciocínios, a comunicar, intervir, a questionar e a debater ideias com os colegas, tal como sugere o NCTM (2007).

Durante as aulas, defini um objetivo claro: incentivar e encorajar os alunos a intervir, fazendo-os sentir-se parte integrante da dinamização das atividades realizadas na sala de aula e fazendo-os perceber que o erro não é algo negativo na sala de aula, devendo, pelo contrário, ser encarado como algo extremamente valioso para o processo cognitivo da aprendizagem da Matemática, sendo esta ideia também defendida por Correia (2005). Moura (2014) considera que, na cultura de ensino atualmente assente em Portugal, o erro deixou de ser visto como um fracasso e passou a ser visto como "elemento que pode ajudar na construção do conhecimento" (p. 14). O erro do aluno é considerado, assim, como uma forma de responsabilizar o aluno, incentivando-o a monitorizar os seus processos de estudo, a identificar os conceitos e os procedimentos que ainda não têm instituídos, de forma a colmatar as suas dificuldades. Além de procurar que os alunos não se sentissem desconfortáveis em errar, direcionei a sua preocupação para a compreensão da causa do erro, de forma a adaptar as suas estratégias de ensino para envolver os alunos na identificação das razões dos seus erros e na compreensão dos mesmos, bem como na sua correção.

Durante as aulas, desde a apresentação da tarefa até à instituição de conceitos, procurei instituir uma escuta ativa, fosse para valorizar as ideias dos alunos, como para 'captar' toda a informação que o aluno disponibiliza através da sua capacidade de comunicação e que me permitiu avaliar, questionar e esclarecer os alunos.

2.3.1.2. Tarefas

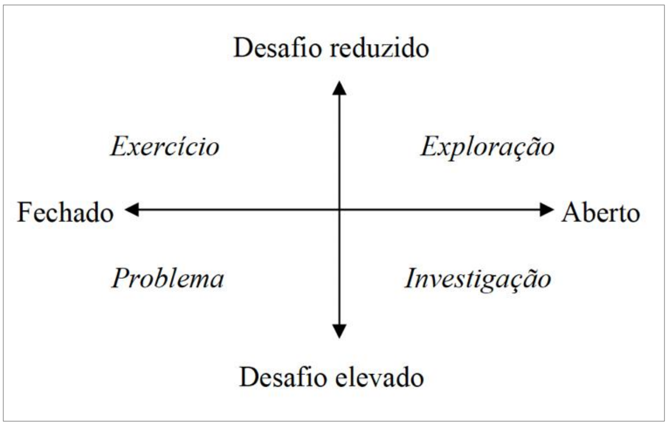
Nas aulas de Matemática existem diferentes aspetos que influenciam a sua dinâmica como, por exemplo, as tarefas propostas pelo professor e os materiais que os alunos utilizam para as resolver (Ponte, & Serrazina, 2000; Silva, 2014). As tarefas são, por isso, um elemento essencial num plano de aula com o intuito de envolver o aluno na construção do conhecimento dos tópicos em estudo. As tarefas propostas pelo professor podem proporcionar inúmeras oportunidades de aprendizagem, potencializando o desenvolvimento de níveis de raciocínio mais elevados (Boavida & Menezes, 2012; Watson & Mason, 2007).

De acordo com o NCTM (2007), o professor é um elemento fundamental na seleção das tarefas matemáticas a propor aos alunos. O tipo de oportunidades de aprendizagem conferidas ao aluno e o desenvolvimento de determinadas capacidades estão diretamente relacionados com a forma como o professor vê a Matemática e, consequentemente, com as tarefas que seleciona (Shimizu et al., 2010). Quando o professor prepara uma tarefa para apresentar durante a aula importa ter em consideração que capacidades pretende promover nos alunos e que objetivos pretende alcançar com a mesma (Johnson et al., 2017). Neste sentido, o desenvolvimento, a seleção e a sequência de tarefas propostas em sala de aula representam, geralmente, uma intenção de aprendizagem por parte do professor.

As características das tarefas propostas contribuem significativamente na dinamização das atividades de ensino e aprendizagem (Viseu et al., 2015). O NCTM (2011) advoga que as tarefas a propor tencionam, entre outros, estimular os alunos a fazer ligações, promover a comunicação matemática e exigir a formulação e resolução de problemas e o raciocínio matemático. Neste sentido, procurei propor tarefas diversificadas, ricas e que ampliassem a experiência matemática do aluno (Ponte, 2014). Consoante o tipo de tarefas propostas, apelei à utilização de processos rotineiros, exigi raciocínios de níveis mais elevados e desafiei a exploração e a descoberta.

Ponte (2005) classifica as tarefas em diferentes tipos – exercícios, problemas, tarefas de exploração e tarefas de investigação –, de acordo com os seus propósitos. Segundo o autor, estas tarefas apresentam um grau de desafio matemático e um grau de estrutura diferentes, conforme a categoria em que estão inseridas (Ponte, 2005, 2014).

Figura 2: Classificação das tarefas quanto ao seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005, p. 8)



Pela observação da Figura 2, é possível inferir que um exercício é uma tarefa fechada e de desafio reduzido: é dito, de forma clara, o que é dado e o que é pedido e a dificuldade subjacente à resolução da tarefa é reduzida. Por sua vez, um problema é uma tarefa fechada, mas de desafio elevado. Já as tarefas de exploração e as tarefas de investigação são tarefas abertas – com um grau de indeterminação elevado relativamente ao que é dado e/ou ao que é pedido – de desafio reduzido e de desafio elevado, respetivamente (Ponte, 2005, 2014). Os exercícios permitem consolidar conhecimentos e devem testar a compreensão dos conceitos fundamentais por parte dos alunos, constituindo tarefas de desafio reduzido (Ponte, 2005). De acordo com o autor, os problemas estão associados, geralmente, a tarefas de desafio elevado em que o aluno não dispõe de apenas um processo de resolução. As tarefas de exploração e as tarefas de investigação exigem, de um modo geral, que o aluno formule questões e procure soluções para a tarefa (Ponte, 2005; Viseu et al., 2015). Estas apenas diferem no grau de desafio: as tarefas de investigação têm um grau de desafio mais elevado que as tarefas de exploração, em que os alunos conseguem começar a trabalhar imediatamente na tarefa (Ponte, 2014).

Ponte (2014) advoga que todos os tipos de tarefas têm o seu papel no processo de ensino e de aprendizagem, contribuindo para o cumprimento de determinados objetivos curriculares e, por isso, todos eles devem ter o seu espaço na sala de aula. Com base neste pressuposto, durante a minha intervenção pedagógica, procurei diversificar as tarefas propostas na sala de aula, selecionar e construir tarefas ricas e que estimulassem e desenvolvessem o pensamento do aluno. Apesar de ter procurado diversificar o tipo de tarefas, dei particular atenção aos problemas. Considero que as atividades centradas na resolução de problemas constituem múltiplas oportunidades de aprendizagem e de desenvolvimento da comunicação matemática, na medida em que facilitam a promoção de uma cultura de questionamento e discussão na sala de aula (Martinho & Ponte, 2005; Wood et al., 1991). Aliada a esta cultura de questionamento e discussão, está a vantagem de os problemas poderem representar situações de semi-realidade ou realidade e, por isso, permitirem que os alunos sejam confrontados com a Matemática aplicada a contextos de realidade.

2.3.1.3 Ensino Exploratório

O ensino tradicional ou direto tem subjacente a ideia de que o professor assume o papel de transmissor do conhecimento, competindo ao aluno aprender ouvindo e fazendo os exercícios que lhe são sugeridos – cujo principal objetivo é que estes treinem e repitam procedimentos matemáticos explicados e aplicados pelo professor anteriormente (Ponte, 2005). Apesar deste tipo de ensino ainda persistir em várias salas de aula (Fernandes, 2007; Franke et al., 2007; Guerreiro et al., 2015), procurou adotar estratégias de ensino exploratório durante a intervenção pedagógica, que me permitissem proporcionar uma aprendizagem mais efetiva aos alunos e na qual os alunos pudessem ser parte ativa da aula e da construção do seu próprio conhecimento.

O ensino exploratório pode ser caracterizado por práticas em que "o professor não procura explicar tudo" (Ponte, 2005, p. 13), mas a aprendizagem dos alunos decorre da descoberta e da possibilidade de trabalharem com tarefas ricas e de poderem partilhar as suas ideias com os colegas e com o professor (Canavarro et al., 2012; Ponte, 2005). No entanto, como realça Ponte (2005), não é uma ou outra tarefa mais interessante que define o carácter geral da estratégia de ensino adotada, mas sim o tipo de trabalho adotado usualmente na sala de aula.

Geralmente, no ensino exploratório, a aula é estruturada em três ou quatro fases: a fase de 'lançamento' da tarefa, em que a tarefa é proposta aos alunos; a fase de 'exploração' da tarefa, em que os alunos se envolvem na tarefa e a exploram e o professor pode apoiar os alunos no respetivo trabalho autónomo; a fase de 'discussão' e 'sintetização', na qual o professor conduz a discussão relativa às várias resoluções (Stein et al., 2008). Na fase do lançamento da tarefa, apresentei a tarefa à turma (esta tarefa foi, na maioria das vezes, um problema) e procurei assegurar que os alunos interpretassem corretamente o enunciado, identificando o que lhes era dado e o que lhes era pedido. Nesta fase da aula, o trabalho a desenvolver relativamente à tarefa foi organizado, tendo sido estipulado o tempo a dedicar à resolução da tarefa por parte dos alunos e os modos de trabalho dos alunos (individual, pares ou grupos de trabalho). De seguida, na fase de exploração da tarefa, circulei pela sala de aula de forma a apoiar os alunos durante o seu trabalho autónomo, no entanto, procurei manter o nível de exigência cognitiva da tarefa. Ou seja, nesta fase da aula, procurei auxiliar os alunos, encaminhar o seu raciocínio, colocar questões e fazê-los refletir, mas tendo cuidado para que seus comentários não retirassem o potencial da tarefa. Nesta parte da aula, selecionei as resoluções que pretendia que fossem explicadas à turma para promover a discussão, bem como a sequência com que pretendia apresentar cada resolução. Após a exploração da tarefa, a fase de discussão foi gerida pela minha intervenção, solicitando explicações e justificações, colocando perguntas e gerindo as intervenções dos alunos, tendo em vista a promoção da qualidade matemática da discussão. Na fase da sistematização das aprendizagens, incentivei os alunos a institucionalizar ideias e procedimentos matemáticos, isto é, sintetizar o conhecimento adquirido durante a aula e, em particular, durante a resolução da tarefa. Como referem Petrucci e Bastion (2006),

> ensinar requer arte por parte do docente, que precisa envolver o aluno e fazer com que ele se encante com o saber. O professor precisa promover a curiosidade, a segurança e a criatividade para que o principal objetivo educacional, a aprendizagem do aluno, seja alcançado. (p. 263)

No meu ponto de vista, a participação e o envolvimento dos alunos na aula são essenciais para a construção do seu próprio conhecimento. Os alunos devem ser incentivados a participar ativamente na aula, ser escutados e ter oportunidade de ser expressar, errando para aprender. Para tal, procurei promover uma cultura de partilha na sala de aula, de encorajamento e de incentivo, procurando fazer os alunos refletir e criando atividades com significado. Neste sentido, esforcei-me para adotar práticas de ensino exploratório, uma vez que considero serem as mais adequadas para o cumprimento dos objetivos traçados.

Como referido anteriormente, no ensino exploratório, a aprendizagem decorre do trabalho com tarefas matemáticas ricas, mas também da partilha e do diálogo com os colegas. Por isso, durante a intervenção pedagógica, a procurei colocar perguntas aos alunos, quer para detetar dificuldades de aprendizagem, avaliar os conhecimentos dos alunos, motivá-los, promover a discussão em sala de aula, ajudar o aluno a pensar e encaminhar o seu raciocínio ou para fomentar o pensamento divergente e crítico. Além disso, empenhei-me em incentivar os alunos a colocarem questões, de forma a promover a discussão na turma e, assim, desenvolver a comunicação matemática e o raciocínio e despertar o sentido crítico dos mesmos.

2.3.2. Estratégias de avaliação da ação

Para avaliar a intervenção pedagógica e, por conseguinte, obter informação que permita dar resposta às questões de investigação formuladas, avaliando o desempenho da turma e o contributo das perguntas na aprendizagem de tópicos de funções, recorri a diferentes instrumentos de recolha de dados, tais como: questionários (inicial e final); observação das gravações áudio e vídeo; planificações e reflexões das aulas; e produções dos alunos. O processo de recolha de dados decorreu em três momentos: antes da intervenção pedagógica, através da aplicação de um questionário inicial; durante a intervenção pedagógica, através das produções dos alunos, das planificações, das reflexões e das gravações áudio e vídeo das aulas; e após a intervenção pedagógica, com a aplicação de um questionário final aos alunos.

2.3.2.1. Questionários

O questionário é uma técnica de recolha de dados com particular destaque na área da Educação (Coutinho, 2011; Ghiglione & Matalon, 2001; Gonçalves, 2004; Tuckman, 2012). Esta técnica destaca-se por permitir incidir sobre atitudes, opiniões ou valores, dependendo do objetivo do estudo (Coutinho, 2011). Segundo esta autora, recorre-se ao questionário quando se pretende estudar a opinião, certo tipo de comportamentos ou reações de um conjunto de indivíduos sobre uma determinada realidade ou fenómeno social, de forma a proceder a inferências e a generalizações. Este método possibilita a verificação e refutação de hipóteses teóricas (Carmo & Ferreira, 2008). Por isso, como pretendia averiguar as perceções dos alunos sobre o contributo das perguntas na promoção da aprendizagem de tópicos de funções, o método de recolha de informação que demonstrou ser mais indicado foi o questionário. A escolha de fazer o questionário em contexto virtual prendeu-se, essencialmente, pelo facto de serem respondidos mais rapidamente, o preenchimento ser feito com mais cuidado e ser mais fácil fazê-los chegar aos indivíduos em estudo (Murthy, 2008). A inclusão de uma introdução que incentive o preenchimento do questionário, a apresentação clara das instruções para a resposta às questões, questões de fácil interpretação e resposta e formatação simples são alguns dos aspetos que procurei ter em consideração de forma a aumentar a eficácia do questionário, conforme sugerido por Cohen et al. (2007).

Os questionários inicial e final (Anexo III e Anexo IV) foram realizados antes e após a minha intervenção pedagógica, respetivamente, e tiveram diferentes objetivos. Através do questionário inicial procurei conhecer as perceções dos alunos sobre a disciplina de Matemática e as funções, tal como foi tratado na caracterização da turma, e sobre o contributo das perguntas na aprendizagem e se tinham o hábito de colocar perguntas durante as aulas das diferentes disciplinas. Por sua vez, com o questionário final procurei perceber as perceções dos alunos relativamente a tópicos de funções, às perguntas na sala de aula e, em particular, ao seu contributo na aprendizagem de tópicos de funções. Assim, questionei os alunos relativamente ao contributo das perguntas na aprendizagem de tópicos de funções, as vantagens e desvantagens das mesmas e o conforto ou desconforto de cada aluno relativamente às perguntas colocadas nas aulas. A informação proveniente deste questionário é apresentada no subcapítulo 3.2. relativo à avaliação do ensino ministrado.

Os dois questionários tinham a mesma estrutura: um grupo relativo às informações pessoais dos alunos (idade, preferências, dificuldades, ...), um grupo com questões de resposta fechada e em que cada aluno tinha que escolher um grau de concordância (entre Discordo Totalmente, Discordo, Indiferente, Concordo, Concordo Totalmente) e um grupo com questões de resposta aberta e em que cada aluno tinha que indicar se concordava com determinada afirmação e explicar. Note-se ainda que os dois questionários foram respondidos de forma totalmente anónima para que os alunos se sentissem menos desconfortáveis e, por isso, mais cooperantes.

2.3.2.2. Observação das gravações áudio e vídeo

A observação é um método de recolha de dados em que o observador tem contacto direito com o contexto e as situações em estudo (Esteves, 2008). O papel de observação consiste em observar e registar de forma objetiva o objeto em estudo (Ludke & Andre, 1986). Segundo Esteves (2008), uma das vantagens deste método é o facto de os dados não serem manipulados quando são recolhidos, levando a uma análise mais fidedigna. A observação permite aceder a dados que não seriam evidenciados através de questionários (Lakatos & Marconi, 1990). Para este estudo, a observação de aulas revelou-se imprescindível. Antes da minha intervenção pedagógica, a observação de aulas permitiu-me conhecer os perfis dos alunos e, consequentemente, a turma. Isto facilitou a compreensão das dificuldades dos alunos e das suas potencialidades a Matemática. A observação de aulas da minha orientadora permitiu também enriquecer a minha formação.

Durante a intervenção pedagógica procedi a gravações áudio e vídeo de todas as aulas, com o objetivo de registar as discussões e os diálogos entre alunos e entre alunos e professor e as dúvidas dos alunos. Para tal, foi entregue um pedido de autorização aos encarregados de educação dos alunos intervenientes neste estudo (Anexo I). A opção de gravar áudio e vídeo as aulas prendeu-se com o facto de considerar que, relativamente aos registos escritos, as gravações permitiram-me analisar as aulas da intervenção pedagógica na íntegra. Sendo o meu tema "as perguntas na promoção da aprendizagem de tópicos de funções", torna-se essencial perceber e analisar as perguntas colocadas na sala de aula e, através de registos escritos, esta prática seria menos precisa e rigorosa. Durante a intervenção pedagógica, fiz vários registos áudio e vídeo de forma a facilitar a análise de cada aula, permitindo apresentar excertos das aulas mais próximos da realidade e perceber o papel das perguntas na aula de Matemática, o tipo de perguntas colocadas, a atitude dos alunos perante tais perguntas e as suas dificuldades e potencialidades. Além disso, as gravações das aulas permitiram-me avaliar as aulas, repensar a minha prática e reformular algumas estratégias, contribuindo para o meu desenvolvimento profissional e pessoal.

Para distinguir o tipo de perguntas colocadas durante a aula, recorri à tipologia proposta por Love e Mason (2005), que distinguem os seguintes tipos de perguntas: perguntas de confirmação; perguntas de focalização; e perguntas de inquirição.

Para relacionar as perguntas colocadas com as respostas dadas pelos alunos, caracterizei as respostas orais e escritas dos alunos. A análise das respostas orais dos alunos baseou-se na tipologia proposta por Muir (2009). No entanto, uma vez que as respostas dos alunos surgiram sempre como respostas diretas às minhas perguntas, a resposta do tipo 'partilha' não foi considerada nesta análise. Obtendo-se, portanto, a seguinte tipologia de respostas orais:

(i) respostas curtas – respostas em que o número de palavras utilizado não seja superior a três;
(ii) explicação – respostas em que o aluno procura explicar a sua resposta anterior ou uma estratégia ao professor e/ou aos colegas;
(iii) justificação – respostas em que o aluno dá uma explicação mais elaborada, justificando a razão de uma afirmação ou estratégia;
(iv) pergunta – respostas em formato de pergunta, ou seja, em que os alunos questionam o professor e/ou os colegas;
(v) desafio – respostas em que os alunos desafiam a resposta dos colegas ou do professor.

2.3.2.3. Planificações das aulas e reflexões pós-aulas

A planificação assume-se como um fator determinante para o sucesso educativo, envolvendo uma reflexão relativamente a todos os aspetos de ação e exigindo dedicação, responsabilidade, sentido crítico e capacidade de articulação (Barroso, 2013; Superfine, 2008; Zabalza, 2003). A planificação permite que se determine a forma como se ensina e o conteúdo que se ensina, representando as intenções do professor relativamente à sua aula (Santos, Cardoso & Lacerda, 2016). Conforme advogam estes autores, a planificação permite antecipar diferentes estratégias de resolução e possíveis dificuldades dos alunos e, consequentemente, construir métodos e estratégias que permitam lidar com tais dificuldades (Santos et al., 2016).

A prática reflexiva na educação sustenta o pensamento crítico e promove a autorregulação e, consequentemente, o desenvolvimento profissional (Conway, 2001; Singh, 2008). Através da reflexão pós-aula, refleti sobre a minha prática pedagógica. Tal como advoga Isabel Alarcão, "a reflexão é importante para os educadores, porque têm uma responsabilidade acrescida na compreensão do presente e na preparação do futuro" (Alarcão, 2001, p.10). A reflexão permitiu-me analisar, problematizar e reconstruir momentos da minha prática pedagógica, passíveis de me fornecerem indicadores do que deveria melhorar. Por exemplo, incentivar os alunos a refletir sobre situações que ocorrem na sala de aula e delinear estratégias para colmatar as suas dificuldades.

2.3.2.4. Produções dos alunos

No sentido de perceber as dificuldades e potencialidades dos alunos, mas também o impacto das perguntas colocadas durante cada aula, recolhi as suas produções em cada tarefa proposta. De forma a recolher as produções dos alunos, foram entregues folhas de papel com o enunciado de cada tarefa e um espaço em branco para a resolução da mesma. Após o trabalho autónomo de cada aluno, essa mesma folha foi recolhida e, na aula seguinte, a resolução de cada aluno foi-lhe entregue. Depois dessa recolha, seguiu-se a discussão da resolução das tarefas. Durante a discussão sobre cada tarefa, as resoluções dos alunos que foram selecionados para ir ao quadro explicar as suas estratégias foram-lhes entregues temporariamente.

Os registos, resultantes da resolução das tarefas propostas, foram analisadas tendo em conta a compreensão dos alunos sobre a tarefa, as representações utilizadas e o tipo de justificação, quando aplicável. As representações foram classificadas segundo os três tipos considerados por Santos e Semana (2014) – linguagem verbal; representação icónica; e representação simbólica. Relativamente às justificações, foram distinguidas em três tipos – procedimentos matemáticos; regra; e explicação própria –, tendo como base a tipologia proposta por Santos e Semana (2014). A justificação por procedimentos matemáticos está relacionada com exposição/transcrição dos procedimentos matemáticos efetuados para responder à questão. A regra refere-se à referência a um nome de uma regra ou definição para justificar determinada estratégia ou método; e a explicação própria é uma explicação da razão para um procedimento ou estratégia serem válidos, utilizando palavras próprias e/ou símbolos.

2.3.3. Métodos de análise de dados

Após a recolha de dados, que resultou da minha atividade enquanto professora estagiária, seguiu-se a análise desses dados, que consiste na atividade que, enquanto investigadora, desenvolvi na organização da informação recolhida com a finalidade de a tornar compreensível aos outros (Bogdan & Biklen, 1994). Neste duplo papel que desempenhei, surgem confluências e conflitos em tornar percetível a informação que deriva enquanto estagiária da que advém da análise e interpretação enquanto investigadora. Ciente da linha ténue que separa os dois papéis, torna-se difícil de afastar o 'olhar' retrospetivo da investigadora da sua própria ação no processo de simplificar, abstrair e transformar os dados que foram recolhidos (Miles & Huberman, 1994).

De modo a situar o leitor nos diferentes momentos que pautaram a prática pedagógica, importa clarificar a colocação no texto a informação que resulta da análise dos dados recolhidos. A informação proveniente do questionário inicial – na procura de conhecer as perceções dos alunos sobre a disciplina de Matemática, as funções, o contributo das perguntas na aprendizagem e o hábito de colocar perguntas durante as aulas – integra o texto que incide sobre a caracterização da turma (2.1.2). Por sua vez, a informação proveniente do questionário final responde ao requisito de dar 'voz' aos alunos na avaliação das estratégias delineadas para a sua aprendizagem de tópicos de funções com recurso à pergunta, assim como as vantagens e desvantagens das mesmas e o conforto ou desconforto de cada aluno relativamente às perguntas colocadas nas aulas (3.2.).

Para evidenciar momentos da minha intervenção pedagógica, a informação proveniente da observação das gravações vídeo das aulas é comtemplada no texto sob o código GVA#, enquanto a que integra a planificação das aulas (PA) e as respetivas reflexões pós aulas (RPA) surgem referidas com os códigos PA# e RPA#, respetivamente, em que # representa o número de identificação da aula analisada. Para estudar o contributo das perguntas na aprendizagem dos tópicos de funções que foram lecionados, optei por apresentar a informação da minha ação pedagógica em torno das fases que estruturam o ensino exploratório: Introdução da tarefa; Exploração da tarefa; e Discussão em grupo-turma.

Finalmente, a informação proveniente da análise das produções dos alunos é identificada por A#, em que # representa um número distinto identificador do aluno. No caso de existirem produções identificadas sem número, tal representa uma produção na qual não existe uma identificação por parte do aluno.

Na procura de dar sentido à informação proveniente das diferentes fontes que dão sustentação empírica a este estudo, emergiu o papel da investigadora, ciente da subjetividade que está implícita a este processo. Para evidenciar mais o 'olhar' racional do que o emocional da análise e interpretação dos dados que informam o leitor dos momentos da prática pedagógica, o 'sujeito' da ação passou do 'eu' para 'a professora'. Dá-se, assim, a possibilidade de o leitor validar as inferências efetuadas, sustentando a credibilidade do estudo. Durante o processo de análise de dados houve a preocupação de não "acrescentar significados ou comentários à mensagem original, nem alterar o sentido da mensagem" (Lessard-Hébert et al., 1990, p. 110).

CAPÍTULO 3

INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Este capítulo tem por finalidade descrever, analisar, interpretar e avaliar momentos da intervenção pedagógica que dão 'corpo' a este trabalho.

3.1. A intervenção pedagógica

No sentido de estudar o contributo das perguntas no ensino e na aprendizagem de tópicos de funções por alunos do 10.º ano de escolaridade, selecionaram-se alguns domínios do respetivo programa curricular para integrarem as aulas da intervenção pedagógica. Estes tópicos estão resumidos na tabela seguinte.

Tabela 3: Síntese das aulas que integraram a intervenção pedagógica

Aula	Tópicos	Objetivos
1	Função quadrática	Estudar a função quadrática: translação horizontal
2	Função quadrática	Estudar a função quadrática: translação vertical
3	Função quadrática	Estudar a função quadrática: translação oblíqua
4	Função quadrática	Estudar a função quadrática: translação oblíqua
5	Função quadrática	Estudar a função quadrática: forma canónica e determinação do vértice da função quadrática
6	Função quadrática	Estudar a função quadrática – determinação do vértice da função quadrática
7	Função quadrática	Estudar a função quadrática: revisões
8	Inequações do 2.º grau	Resolver inequações do 2.º grau
9	Inequações do 2.º grau	Resolver inequações do 2.º grau
10	Problemas envolvendo a função quadrática	Resolver problemas envolvendo a função quadrática
11	Problemas envolvendo a função quadrática	Resolver problemas envolvendo a função quadrática
12	Função definida por ramos	Estudar a função definida por ramos
13	Função definida por ramos	Estudar a função definida por ramos
14	Função módulo	Introduzir a função módulo
15	Função módulo	Estudar a função módulo
16	Equações com módulos	Resolver equações com módulos
17	Função módulo	Estudar a função módulo: revisões
18	Inequações com módulos	Resolver inequações com módulos
19	Inequações com módulos	Resolver inequações com módulos

Durante a intervenção pedagógica os alunos foram desafiados a resolver diferentes tarefas, com o intuito de se envolverem nas atividades dinamizadas na sala de aula em prol do seu desenvolvimento cognitivo. A consecução de cada tarefa promoveu diferentes momentos de discussão e, em particular, de questionamento. De modo a explicitar a intervenção pedagógica, descrevem-se e interpretam-se momentos das aulas que incidiram sobre os tópicos: problemas envolvendo a função quadrática; a função definida por ramos; e a resolução de inequações com módulo.

3.1.1. Problemas envolvendo a função quadrática

O tópico 'Problemas envolvendo a função quadrática', remeteu os alunos para a aplicação dos conhecimentos adquiridos no estudo da função quadrática como, por exemplo, a identificação do domínio e do contradomínio, a determinação do vértice da sua representação gráfica (parábola), além de exigir o desenvolvimento das capacidades de raciocínio e de comunicação matemática. De forma a incentivar os alunos para a resolução de problemas envolvendo a função quadrática, mostrando-lhes a sua aplicabilidade no dia-a-dia e fomentando o seu gosto pela descoberta, a professora propôs um problema de contexto de realidade considerado adequado ao nível de desempenho da turma, adaptado de Costa e Rodrigues (2016):

Tarefa 1: Temperatura do André

O André acordou às 5 horas com uns calafrios. Pegou no termómetro e verificou que estava com febre. A conselho da sua mãe, registou a sua temperatura nas 5 horas seguintes. Como estava a estudar a função quadrática, apercebeu-se que as suas temperaturas variaram de acordo com a função T, definida por $T(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 38$, que começaram a baixar 20 minutos após a administração de um medicamento para a febre. (T representa a temperatura observada após x horas da primeira medição da temperatura)

1.1. Qual a temperatura observada às 5 horas? Justifica a tua resposta.

1.2. Qual a temperatura máxima atingida no período de observação? Justifica a tua resposta.

1.3. A que horas é que o André tomou o medicamento? Justifica a tua resposta.

1.4. Mostra que a temperatura, entre as 6 e as 8 horas, se manteve superior a 39,5°C.

1.5. A Sónia, irmã do André, também está com febre. A sua temperatura variou de acordo com a função S, definida por $S(x) = T(x+2)$. Em que intervalo de tempo a temperatura da Sónia foi superior a 39,5°C? Justifica a tua resposta.

Com este problema, a professora pretendia que os alunos fossem confrontados com diferentes estratégias de resolução por parte dos colegas e que fossem discutidos diversos conteúdos relacionados com a função quadrática.

3.1.1.1. As perguntas do professor na aula de ensino exploratório

De modo a evidenciar a integração da pergunta nas estratégias de ensino, descrevem-se e interpretam-se as informações recolhidas nos diferentes momentos da aula, em conformidade com o método de ensino adotado: (i) introdução da tarefa; (ii) exploração da tarefa; e (iii) discussão em grupo-turma. Como as perguntas tendem a obter uma resposta dos alunos, procuro categorizar tais respostas com o intuito de identificar a relação entre o tipo de pergunta e o tipo de resposta dos alunos.

Introdução da tarefa

No início da aula, a Tarefa 1 foi distribuída aos alunos, que efetuaram uma leitura silenciosa da tarefa, seguida de uma leitura em voz alta por parte de um dos alunos e interpretação, em grupo-turma, das informações contidas no enunciado. Nesta fase, de lançamento da tarefa, a professora procurou esclarecer algumas dúvidas que surgiram durante a leitura do enunciado.

Professora: Então, ao ler o enunciado surgiu alguma dúvida?
Professora: Vamos lá ver, o x é o quê?
Alunos: O x é as horas da primeira medição.
Professora: Da primeira medição da temperatura. E o André começou a medir a temperatura a que horas?
Alunos: Às 5 horas.
Professora: Então, pensem lá, a que é que corresponde as 5 horas?
Alunos: É o $x = 0$.
Professora: E o $x = 1$?
A20: É mais uma hora, às 6 horas.
Professora: Concordam?
Alunos: Sim.
Professora: Alguém tem mais alguma dúvida depois de ler o enunciado?
[Os alunos não apresentaram dúvidas]
Professora: Ok, então façam lá.

No diálogo estabelecido em grupo-turma durante a fase de introdução da tarefa, as perguntas que prevaleceram foram as de focalização e de inquirição, tendo sido colocadas três perguntas de cada um dos tipos. As perguntas de focalização foram utilizadas para focar a atenção do aluno e encaminhar o seu raciocínio. Depois de ter percebido que estes estavam com dificuldades na interpretação do significado da variável x, a professora optou por formular algumas perguntas que permitissem 'ir construindo o seu pensamento'. As perguntas de inquirição foram unicamente utilizadas para aceder ao pensamento do aluno, obter a sua opinião e identificar as suas dificuldades. Por sua vez, só foi colocada uma pergunta de confirmação, utilizada para se certificar que os alunos tinham percebido o significado da variável x.

Relativamente às respostas dos alunos, estes deram quatro respostas curtas e uma resposta de explicação. Neste diálogo, a explicação do aluno surgiu sem que fosse necessário colocar perguntas como 'porquê?' ou 'como?' e deram respostas curtas quando as perguntas colocadas foram fechadas. Aliás, as perguntas de inquirição colocadas, que tiveram como principal propósito perceber o raciocínio dos alunos, tiveram respostas curtas.

Exploração da tarefa

Na primeira alínea da Tarefa 1 pretendia-se que os alunos interpretassem o enunciado e, consequentemente, identificassem o valor da variável x de forma a calcular o valor da função T nesse mesmo instante. Apesar de terem discutido, em grupo-turma, alguns pormenores do enunciado durante a introdução da tarefa, ao circular pela sala de aula, a professora apercebeu-se que alguns alunos estavam a ter dificuldades na interpretação da informação do enunciado e em perceber que a variável x correspondia às horas desde a primeira medição da temperatura. Por isso, optou por colocar algumas perguntas à turma no início da Tarefa 1, de forma a perceberem alguns detalhes do enunciado.

Professora: Que pormenor é que está subentendido no enunciado? Não temos nenhum pormenor sobre o domínio da função T?
[Surge barrulho na sala de aula, mas nenhum aluno responde concretamente à pergunta]
Professora: Que valores pode assumir a variável x?
A6: Pode assumir valores entre 0 e $+\infty$.
Professora: Pode assumir valores até $+\infty$? Ele mede a temperatura dele para sempre?
Alunos: Não.
A6: O André parou de medir a temperatura às 10 horas, professora.
Professora: Concordam todos com o aluno A6? Ou alguém não concorda?
[A turma acena com a cabeça, revelando concordar com o colega]
Professora: Ok, então o André começou a medir a temperatura às 5 horas e parou às 10 horas. Qual é o domínio?
A1: O domínio é de 5 a 10, professora.
Professora: De 5 a 10? O que diz no enunciado sobre a variável x?
A26: Que é x após a primeira medição da temperatura.
[Surge barulho na sala de aula]
Alunos: Então o domínio é de 0 a 5.
Professora: Porquê?
A6: A primeira medição é às 5 horas que é quando $x = 0$. E vai até 5 porque o André mede a temperatura até às 10 horas, ou seja, 5 horas depois.
Professora: Concordam? Perceberam o que o vosso colega disse?
[Os alunos afirmam ter percebido e o aluno que foi chamado ao quadro resolve a alínea 1.1. da tarefa]

Pelos diálogos transcritos, é possível perceber as dificuldades reveladas pelos alunos na identificação do domínio da função T. Perante tais dificuldades, a professora colocou um conjunto de perguntas à turma. As perguntas de confirmação foram as que mais se evidenciaram, tendo sido colocadas três perguntas de confirmação, três perguntas de focalização e duas perguntas de inquirição. As perguntas de confirmação foram utilizadas para garantir que a turma percebeu as ideias dos colegas e para testar o conhecimento dos alunos. As perguntas de focalização foram, essencialmente, utilizadas para direcionar o pensamento dos alunos e procurar que estes se focassem em aspetos específicos do enunciado como, por exemplo, no domínio da função. Por sua vez, a pergunta de inquirição surgiu pela necessidade da professora de perceber o raciocínio dos alunos que intervieram.

No que diz respeito às respostas dos alunos, estes deram cinco respostas curtas e apenas uma explicação. Esta explicação está associada a uma pergunta de inquirição. Os alunos foram questionados sobre o motivo pelo qual o domínio da função era entre 0 e 5 e um aluno explicou a razão para tal.

Durante o trabalho autónomo, vários alunos interpelaram a professora na procura de indicações sobre a sua resolução, se estava adequada e se justificava o que se pretendia, como exemplifica o seguinte diálogo:

A26: Professora, eu fiz assim [aponta para a sua resolução]. Calculei $T(0)$ e só pus esse cálculo. Está certo?
Professora: Não sei. Consegues justificar porque é que fizeste $T(0)$ e achas que faz sentido?!
A26: Sim, eu calculei $T(0)$ porque às 5 horas, como vimos, é $x = 0$. É a primeira medicação da temperatura do André. É isso, não é?
Professora: Já vamos ver se é esse o raciocínio.

Como se constata pelo diálogo, o aluno colocou duas perguntas, de forma a perceber se o seu raciocínio estava correto. Este aluno deu uma explicação sobre a estratégia e uma justificação de forma a sustentar a opção pela estratégia utilizada. Como este aluno, também outros alunos mostraram a sua resolução à professora e questionaram a validade da mesma. Apesar de os alunos que a chamaram terem respondido corretamente à alínea em questão, verificou-se que alguns, mesmo tendo dúvidas, não questionaram nem expuseram as suas dúvidas. Por exemplo, quando a professora se aproximou da mesa do aluno A25 apercebeu-se que ainda não tinha resolvido a alínea 1.1. e, por isso, interpelou-o:

Professora: Tens alguma dúvida?
A25: Não, professora.
Professora: Mas ainda não fizeste a primeira alínea. Como é que estás a pensar?
A25: Acho que é $T(5)$ para saber a temperatura às 5 horas.
Professora: Nós já falamos sobre o que é o x. Lembra-te lá.
[O A25 não responde à professora]

Ao interpelar este aluno, colocou-lhe duas perguntas de inquirição para perceber se estava a conseguir organizar o seu raciocínio e como estava a raciocinar. Através destas perguntas, percebeu que o aluno não esteve atento à discussão sobre esta alínea proporcionada no início da aula ou que não esclareceu as suas dúvidas durante a mesma. Por sua vez, o aluno recorreu a uma resposta curta, para afirmar que não tinha dúvidas, e uma explicação para que a professora compreendesse o seu raciocínio, em resposta a uma pergunta de inquirição.

Na alínea 1.2. da Tarefa 1 era pedido aos alunos que determinassem a temperatura máxima atingida pelo André durante as suas medições de temperatura. Os alunos deviam calcular o vértice da parábola que representa graficamente a função T. Embora fosse um tópico estudado recentemente nas aulas, durante o trabalho autónomo, diversos alunos apresentaram dificuldades e expuseram as suas dúvidas. Veja-se o caso do aluno A4:

A4:	Professora, como é que eu faço a 1.2.? Qual a temperatura máxima atingida?
Professora:	O que é a temperatura máxima?
A4:	É a temperatura mais elevada que o André registou.
Professora:	E como é que tu determinas isso?
A4:	É nesta expressão. Então a coisa é esta: o André começou às 5 horas, mais 5 horas seguintes dá 10 horas. Tenho que fazer assim ou não tem nada a ver?
Professora:	Como é que com esse raciocínio vais determinar a temperatura máxima? Sabes a que horas foi atingida a temperatura máxima?
A4:	Não.
Professora:	A expressão dá-nos o gráfico de quê?
A4:	De uma parábola.
Professora:	E o máximo de uma função quadrática corresponde ao quê?
A4:	Ao vértice da parábola.

No diálogo com o aluno A4 foram colocadas quatro perguntas de focalização, uma pergunta de confirmação e uma pergunta de inquirição. As perguntas de focalização foram formuladas com o objetivo de encaminhar o pensamento do aluno, uma vez que este mostrou não estar a conseguir organizar o seu raciocínio e perceber que o máximo da função corresponde à ordenada do vértice da parábola associada. A pergunta de confirmação apenas foi utilizada para se certificar que o aluno percebeu o que era pedido na alínea em questão, tendo o aluno respondido através de uma resposta curta. Por sua vez, a pergunta de inquirição foi utilizada para perceber o raciocínio do aluno. No entanto, é importante notar que a professora não fez uma pausa entre esta pergunta e a pergunta de focalização, o que não permitiu que o aluno respondesse à sua pergunta. Por isso, o objetivo de ter colocado esta pergunta não foi atingido, não tendo conseguido perceber o raciocínio do aluno.

No diálogo em análise, o aluno deu quatro respostas curtas, formulou duas perguntas em resposta às perguntas da professora e deu uma explicação. A explicação surgiu como resposta a uma pergunta de focalização que, devido à subjetividade associada à tipologia das perguntas e se retirada do seu contexto, poderia ser considerada uma pergunta de inquirição, na qual é perguntado ao aluno a estratégia que poderia aplicar para determinar a temperatura máxima.

Na alínea 1.3. era pedido que os alunos determinassem a hora a que o André tomou o medicamento. Sabendo que a temperatura do André começou a baixar após 20 minutos da toma do medicamento, os alunos apenas tinham que utilizar a alínea anterior para calcular as horas a que o André tomou o medicamento. Um aspeto que corrobora esta afirmação é o facto de apenas um aluno ter interpelado a professora, procurando validar o seu raciocínio.

A18:	Professora, só temos que saber a que horas é que a temperatura baixou e tirar 20 minutos, não é?
Professora:	No enunciado diz que a temperatura baixou 20 minutos depois do André ter tomado o comprimido?
A18:	Sim.
Professora:	E como é que sabes quando é que a temperatura do André começou a baixar?
A18:	É o vértice e eu calculei-o na alínea anterior.
Professora:	Ok. Tenta aplicar o teu raciocínio para vermos se conseguimos responder à pergunta assim.

O aluno A18 quis validar o seu raciocínio, provavelmente por achar que a sua resolução era demasiado simples, para isso utilizou uma pergunta. Para perceber se o aluno estava a raciocinar corretamente e não lhe responder diretamente à pergunta, mas procurar que este validasse o seu raciocínio autonomamente, a professora optou por lhe colocar duas perguntas de confirmação. A uma das perguntas o aluno deu uma resposta curta e à outra pergunta deu uma explicação. A resposta curta do aluno já era esperada, quando a pergunta foi feita, porque foi colocada uma pergunta fechada. Neste diálogo, o aluno formulou uma pergunta, uma explicação e uma resposta curta.

Relativamente à alínea 1.4., esta exigia que os alunos mostrassem que a temperatura entre as 6 horas e as 8 horas se manteve superior a 39,5°C. Embora pudessem ser apresentadas diferentes estratégias de resolução, os alunos teriam de mostrar que a temperatura se manteve superior, não se resumindo a calcular a temperatura às 6 horas e às 8 horas. Durante o trabalho autónomo, a professora apercebeu-se que vários alunos estavam a cometer o mesmo erro: calcular a temperatura às 6 horas e às 8 horas, verificando que esta era 39,5°C. Então, decidiu intervir para os alertar quanto a este pormenor.

Professora:	Na alínea 1.4., como é que estão a pensar resolver?
A6:	Eu estou a fazer $T(1)$ e $T(3)$, não é assim?
Professora:	Estou a ver algumas resoluções incompletas. Ao calcular $T(1)$ e $T(3)$ estão a determinar o quê?
A18:	Estamos a determinar a temperatura às 6 horas e às 8 horas.

Professora: E esses cálculos têm que dar 39,5°C. Mas isso quer dizer que a temperatura se manteve superior a 39,5°C entre as 6 e as 8 horas?
A1: Sim.
Professora: Porquê?
A18: Não, só sabemos que às 6 e às 8 horas a temperatura foi de 39,5°C.
Professora: Ok, mas queremos mostrar que a temperatura se manteve superior a 39,5°C. Por isso, pensem lá.

Como mostra este diálogo, a professora procurou realçar o facto de não bastar calcular a temperatura às 6 horas e às 8 horas para responder corretamente à alínea 1.4. Para tal, recorreu a duas perguntas de focalização e a duas perguntas de inquirição. As perguntas de focalização permitiram-lhe focar a atenção dos alunos no que se obtinha calculando $T(1)$ e $T(3)$ para, de seguida, focar a atenção deles no facto de se querer mostrar que a temperatura se manteve superior entre esse intervalo. Por sua vez, uma das perguntas de inquirição permitiu-lhe captar a atenção dos alunos para a discussão que procurei promover e perceber como é que estavam a resolver a alínea em questão, enquanto a outra pergunta de inquirição permitiu-lhe pôr o aluno A1 a pensar para justificar a sua resposta.

Às perguntas colocadas, os alunos responderam através de uma pergunta, de duas respostas curtas e de uma explicação. A pergunta foi formulada pelo aluno A6 para validar a sua estratégia. As respostas curtas surgiram como resposta a perguntas de focalização. A explicação surgiu como resposta a uma pergunta de inquirição.

A tarefa pressupunha ainda uma última alínea que exigia que o aluno reconhecesse uma transformação horizontal do gráfico da função que resulta dos dados da tarefa em análise para, de seguida, determinar a temperatura da Sónia. Durante o trabalho autónomo, não surgiram muitas dúvidas. Apenas dois alunos solicitaram a ajuda da professora, apresentando a mesma dúvida, como ilustra o diálogo com o aluno A13:

A13: Professora, basta utilizar a translação?
Professora: Não sei. Como achas que podes saber a que horas é que a temperatura da Sónia se manteve superior a 39,5°C?
A13: Eu sei em que intervalo a temperatura do André foi mais de 39,5°C e isto é uma translação. Por isso, só tenho que tirar duas horas às horas do André.
Professora: Ok, faz assim e vê se consegues responder à pergunta.

Para esclarecer o aluno e perceber o seu raciocínio, sem lhe responder diretamente, a professora utilizou uma pergunta de inquirição. O aluno respondeu com uma justificação, em que, além de explicar o seu raciocínio justificou a utilização da translação para responder à alínea 1.5. Além disso, o aluno utilizou também uma pergunta para responder à pergunta da professora sobre que estratégia poderiam utilizar.

Na fase de exploração da aula, a professora procurou apoiar o trabalho autónomo dos alunos, mas não lhes responder diretamente às suas perguntas para não reduzir o nível de exigência cognitiva da tarefa. Para tal, formulou perguntas que lhe permitiram verificar o nível de compreensão dos alunos, encaminhar o seu raciocínio ou perceber o seu pensamento. Na fase de exploração da tarefa, procurou estimular o raciocínio dos alunos. Para esse efeito, recorreu a perguntas de confirmação, focalização e inquirição que lhe permitiram confirmar, encaminhar e perceber o raciocínio dos alunos, respetivamente. As frequências de cada tipo das perguntas colocadas não são muito distintas. No entanto, o número de perguntas colocadas poderia ter sido maior, uma vez que é na fase de exploração da tarefa que os alunos deveriam colocar mais dúvidas. Este número de perguntas pode ser explicado pelo facto de poucos alunos terem procurado esclarecer as suas dúvidas durante o trabalho autónomo.

Discussão em grupo-turma

Como já foi referido, embora a maioria dos alunos tenha resolvido a alínea 1.1. corretamente e se tenha discutido pormenores importantes na fase de introdução da tarefa, alguns alunos revelaram não terem estado atentos à discussão ou não terem exposto as suas dúvidas. Por isso, após escolher um aluno para ir ao quadro resolver a primeira alínea da Tarefa 1, a professora confrontou os alunos com algumas resoluções que observou nos cadernos.

Durante a discussão em grupo-turma, um dos principais objetivos da intervenção da professora foi que os alunos que erraram esta alínea percebessem os seus erros e esclarecessem as suas dúvidas. Como as quatro resoluções incorretas eram parecidas entre si e tinham o mesmo erro em comum – determinar $T(5)$ –, considerou importante confrontar a turma. Neste sentido, começou a discussão sobre esta alínea da Tarefa 1 dando ênfase ao facto de nem todos os alunos terem apresentado resoluções idênticas.

Professora: O aluno A26 fez $T(0)$, mas eu vi muitos alunos a fazer $T(5)$. Acham que faz sentido calcular $T(5)$?
Alunos: Não.
A25: Sim.
Professora: Porquê? Alguém consegue explicar ao aluno A25 porque é que não é $T(5)$ ou porque é que é $T(5)$?
A4: Porque $T(5)$ corresponde à última medição, é quando passaram 5 horas desde a primeira medição.
A25: Ok. Já percebi.
Professora: E nós o que queremos?
Alunos: A primeira medição.
Professora: Exatamente. E isso obtém-se calculando o quê?
Alunos: $T(0)$.
Professora: Alguém resolveu de outra maneira?

[Os alunos acenam com a cabeça, afirmando que não]

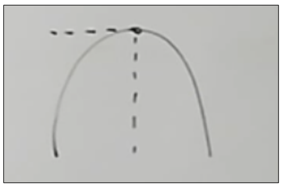
A principal dificuldade consistiu na compreensão de que a variável x representa as horas após a primeira medição de temperatura e não as horas a que a temperatura foi medida pelo André. Na discussão com a turma recorreu a mais perguntas de inquirição, para perceber a opinião dos alunos e o modo como estes estavam a raciocinar. Neste sentido, colocou três perguntas de inquirição e duas perguntas de focalização. As perguntas de focalização foram utilizadas para encaminhar o raciocínio dos alunos e focar a sua atenção em aspetos específicos, fazendo-os reler o enunciado da tarefa, associando a informação deste e o significado da variável x.

Embora as perguntas colocadas tenham sido na sua maioria perguntas de inquirição, as respostas dos alunos não foram do mesmo tipo a cada uma dessas perguntas. Os alunos formularam uma explicação e duas respostas curtas às perguntas em questão. Para responderem às perguntas de focalização, os alunos recorreram a respostas curtas. Tal pode ser explicado pelo facto de as perguntas formuladas serem perguntas fechadas.

Relativamente à alínea 1.2., no sentido de esclarecer as dúvidas dos alunos que responderam incorretamente ou de forma parcialmente correta à alínea 1.2. e de perceber se todos os alunos perceberam a razão dos procedimentos, procurei confrontá-los com algumas perguntas. Essas perguntas tinham como principal objetivo exigir que os alunos explicassem os procedimentos efetuados, encaminhar e sustentar o raciocínio dos alunos e esclarecer as suas dúvidas, mesmo se estes não interviessem.

Professora: A temperatura é dada pelo quê?
A4: Pela expressão.
Professora: Pela expressão de uma função quê?
Alunos: Quadrática.
Professora: O aluno A4 está a fazer um esquema de uma parábola...
A1: Com concavidade voltada para baixo.
Professora: Se queremos saber quando é que a temperatura foi máxima, a que é que isso corresponde no esquema?
Alunos: Ao vértice.
Professora: E corresponderia sempre ao vértice, mesmo se a concavidade não fosse voltada para baixo?
Alunos: Não, se a concavidade fosse voltada para cima não corresponderia ao vértice.
Professora: Então?
A26: Depende do domínio, mas tinha que ser o valor de y maior.
Professora: Concordam?
[O A4 esboçou o seguinte gráfico]

Figura 3: Representação do gráfico da função T do aluno A4

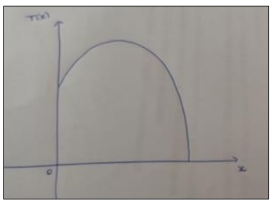


Depois de observar o esboço que o aluno A4 fez no quadro, a professora apercebeu-se que a representação do gráfico não tinha rigor matemático. Embora não lhes seja pedida na alínea 1.2. e não seja necessária para a sua resolução, como vários alunos optaram por esboçar um gráfico, a professora considerou pertinente abordar este tópico de forma a colmatar as dificuldades sentidas pelos alunos. Para que a turma ajudasse o aluno em questão a melhorar a sua representação gráfica e, simultaneamente, esclarecesse as suas próprias dúvidas, colocou algumas perguntas no sentido de os alertar para o rigor matemático da mesma.

Professora: Acham que a representação do aluno A4 está correta?
Alunos: Não, tens que pôr os eixos do referencial.
A4: Eu não sei, não fiz esta parte da representação.
A1: O gráfico não começa assim, começa no $x = 0$.
A1: Tens que apagar a parte esquerda do gráfico.
Professora: Aluno A4, achas que o vértice pode ser aí? Calcula primeiro o vértice e já vemos essa representação.
[O aluno insiste em continuar a representação do gráfico]
Professora: Estejam atentos que eu vi muitos erros na representação do gráfico. Vocês podem simplesmente recorrer à calculadora e pôr a expressão?
Alunos: Não.
Professora: Têm que ter em conta o quê?
Alunos: O domínio e o contradomínio.
Professora: Ok. Temperaturas corporais negativas existem? E horas?
Alunos: Não.

Para que os alunos compreendessem os aspetos a ter em conta na representação do gráfico, a professora optou por começar a fazer uma representação no quadro com alguns erros, nomeadamente no domínio.

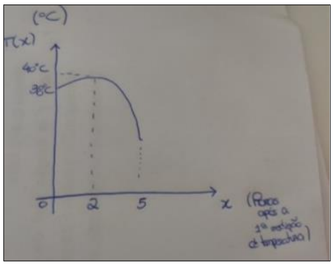
Figura 4: Representação gráfica da função T elaborada pela professora



Professora: A representação pode ser assim?
[Surge barulho na sala de aula e os alunos têm diferentes opiniões]

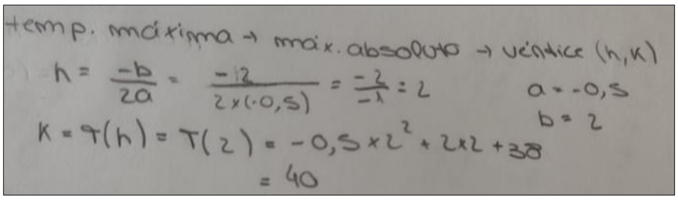
A1:	Não pode tocar no $y = 0$?
Professora:	Não sei, digam-me vocês. Qual é o domínio?
Alunos:	De 0 a 5.
Professora:	Ok. Imaginem que o 0 está aqui [aponta para um ponto do gráfico] e o 5 está aqui [aponta para outro ponto do gráfico]. Então nós podemos continuar a desenhar o gráfico?
Alunos:	Não.
A4:	Não, temos que apagar aqui [aponta para uma parte do gráfico].
Professora:	Concordam com o aluno A4?
Alunos:	Sim.
Professora:	Porquê?
Alunos:	Porque não faz parte do domínio da função quadrática.

Figura 5: Representação gráfica da função T no quadro com o auxílio dos alunos



[O aluno A4 continua a sua resolução da alínea 1.2.]

Figura 6: Resolução da alínea 1.2. da Tarefa 1 do aluno A4



Professora:	Que conclusão conseguimos tirar da resolução do aluno A4?
Alunos:	Que a temperatura máxima é 40°C.
Professora:	E se eu perguntasse a que horas é que essa temperatura foi registada?
Alunos:	A temperatura máxima foi atingida às 7 horas.
Professora:	Porquê?
A5:	Porque o vértice é o ponto de coordenadas $(2, 40)$ e 2 horas depois das 5 horas é as 7 horas.

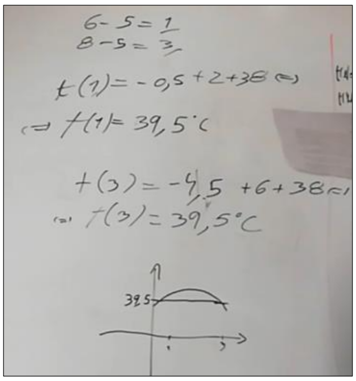
A turma não mostrou dificuldades na resolução desta alínea, no entanto revelou alguma falta de rigor matemático e dificuldades na representação gráfica da função quadrática em questão. Por isso, as perguntas foram colocadas, maioritariamente, no sentido de colmatar tais dificuldades. Para tal, a professora formulou catorze perguntas de confirmação, nove perguntas de inquirição e nenhuma pergunta de focalização. As perguntas de confirmação foram formuladas com o objetivo de testar o conhecimento dos alunos, permitir que estes avaliassem o seu próprio nível de conhecimento e que os alunos com mais dificuldades pudessem, tanto através das suas próprias respostas como das respostas dos colegas às perguntas, esclarecer algumas dúvidas e colmatar essas dificuldades. As perguntas de inquirição foram, essencialmente, utilizadas para perceber o raciocínio do aluno e certificar-se que as suas respostas tinham sido sustentadas por um raciocínio correto. Com estas duas categorias de perguntas, a professora pretendia que os alunos conseguissem organizar o seu raciocínio e compreender melhor alguns conceitos que ainda não estavam interiorizados, como, por exemplo, domínio e contradomínio.

Nas discussões transcritas, os alunos formularam, maioritariamente, respostas curtas – catorze. As respostas com uma explicação também se evidenciaram, tendo sido formuladas quatro respostas deste tipo. Por sua vez, os alunos apenas deram duas justificações. Estas justificações surgiram em resposta a duas perguntas de inquirição do tipo “porquê?”. As explicações foram respostas dadas a perguntas de confirmação e de inquirição.

Como já foi referido, durante o trabalho autónomo, a professora apercebeu-se que a maioria dos alunos conseguiu resolver a alínea 1.3. da tarefa em questão sem dificuldades. Por isso, não colocou muitas perguntas na discussão sobre esta alínea, deixando que o aluno que foi apresentar a sua resolução ao quadro explicasse aos colegas o seu raciocínio e esclarecesse as dúvidas dos alunos que não responderam ou deram uma resposta parcialmente correta à alínea 1.2. da Tarefa 1.

Na alínea 1.4. os alunos apresentaram algumas dificuldades e diferentes formas de resolução. Neste sentido e de forma a promover a discussão na turma, a professora optou por solicitar a um aluno com um elevado nível de desempenho e capacidade de expressão que fosse resolver esta alínea no quadro. Esse aluno tinha resolvido a alínea 1.4. através da mesma estratégia que os colegas que apresentaram respostas parcialmente corretas, por isso, considerou que a sua intervenção poderia levar a que os colegas percebessem a necessidade de apresentar o esboço do gráfico, por exemplo. O aluno A24 apresentou a sua resolução do quadro, explicando o seu raciocínio.

Figura 7: Resolução da alínea 1.4. da Tarefa 1 do aluno A24



Professora: Toda a gente percebeu a resolução do aluno A24? Todos concordam ou alguém resolveu de forma diferente?

[O aluno A22 chama-me e diz que não concorda com a resolução do colega]

Professora: Aluno A24, o teu colega tem uma questão. Acho que ele não concorda contigo.

A24: Diz lá.

A22: Na pergunta dão-nos os dados que entre as 6 horas e as 8 horas a temperatura é superior a 39,5°C. E tu estás a partir do que te dão na pergunta, sabendo que está correto, para verificar. Não devias descobrir a resposta a partir do enunciado e não da pergunta?

[O aluno A25 mostra não ter percebido a pergunta do colega e surge barulho na sala de aula]

A22: Se não tivesses a pergunta não sabias que era entre as 6 horas e as 8 horas que a temperatura era superior a 39,5°C.

Alunos: Professora, não se pode fazer assim? Está na mesma no enunciado da pergunta.

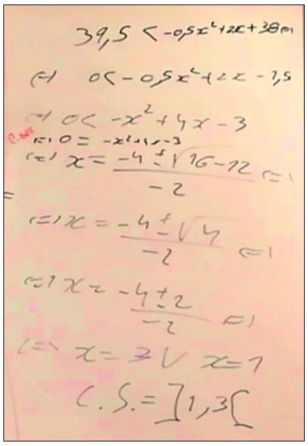
Professora: O que o vosso colega está a dizer é que, na perspetiva dele, o que o aluno A25 fez não é numa demonstração, um "mostre que", mas sim uma espécie de verificação. É isso que estás a dizer, aluno A22?

A22: Sim, exatamente. Estás a verificar que o $T(1)$ dá 39,5°C e o $T(5)$ também.

A24: Não, eu mostrei com o esboço do gráfico porque o gráfico tem concavidade voltada para baixo.

[O aluno A24 resolve a alínea de forma diferente, utilizando as inequações de 2.° grau]

Figura 8: Resolução da alínea 1.4. da Tarefa 1 do aluno A24 através de outro método



Professora: O que é que falta aqui, que aprenderam ao resolver inequações de 2.° grau? [apontando para a resolução no quadro]

Professora: Calculam os zeros desta expressão, igualando a zero, mas como é que sabem quando é que a função é positiva? Fazem mentalmente?

Alunos: O esboço do gráfico.

Professora: Para identificarem o quê nesse esboço?

Alunos: O sinal da função.

[A professora completa a resolução no quadro, esboçando o gráfico com a ajuda da turma]

Professora: De $-\infty$ a 1, a função é positiva ou negativa?

Alunos: A função é negativa.

Nesta alínea, a discussão centrou-se em dois alunos que a tinham resolvido recorrendo a estratégias diferentes e que não concordavam na validade da estratégia adotada por um deles. Como a discussão foi enriquecida automaticamente pelos alunos, a professora não colocou muitas perguntas, só intervindo para promover o início da discussão e para gerir as intervenções dos alunos. A maioria das perguntas foram colocadas depois do aluno que estava no quadro apresentar uma segunda resolução, utilizando a estratégia de resolução do seu colega, e ter algumas lacunas nessa resolução como, por exemplo, a falta de um esboço do gráfico. Nesta parte da aula, a professora formulou três perguntas de focalização, que a ajudaram a focar a atenção do aluno no gráfico necessário para o estudo da monotonia de uma função, uma pergunta de inquirição – que lhe permitiu perceber a opinião dos alunos –, e uma pergunta de confirmação. A pergunta de confirmação foi utilizada com o intuito de testar os conhecimentos dos alunos sobre a monotonia de funções, embora a mesma pudesse ter sido enriquecida se tivesse apenas perguntado: "de $-\infty$ a 1 qual é a monotonia da função?". Assim, poderia ter exigido que o aluno aplicasse todos os seus conhecimentos, nomeadamente, do conceito de monotonia.

Neste excerto de diálogo, os alunos apenas deram respostas curtas. Tal pode ser explicado pelo facto de a professora ter feito perguntas de focalização em que os alunos só teriam que responder diretamente, sem necessitar de elaborar ou justificar a sua resposta.

Na alínea 1.5., a professora decidiu solicitar a um aluno que não tinha conseguido resolver essa alínea para ir ao quadro e com a ajuda dos colegas resolvê-la no quadro. A professora colocou um conjunto de perguntas para promover o auxílio dos colegas e a troca de ideias na turma.

Como verificou que vários alunos não resolveram esta alínea por não terem tido tempo para tal, a sua intervenção teve como principal objetivo promover a discussão na turma, para que mesmo os alunos que não resolveram esta alínea interviessem e esclarecessem as suas dúvidas.

O aluno que foi resolver a alínea em questão ao quadro não a tinha conseguido resolver durante o trabalho autónomo, por isso, a discussão teve uma maior intervenção da turma, que procurou ajudá-lo. Para gerir as diferentes intervenções dos alunos e incentivá-los a explicar o seu raciocínio ao colega, a professora interveio no início da discussão para a encaminhar. Veja-se:

Professora: O que nos dá esta expressão $S(x) = T(x+2)$?
A15: Uma translação.
Professora: Uma translação quê?
A15: Uma translação horizontal.
Professora: Ok, horizontal...
Alunos: Para a esquerda.
Professora: Ok. Como resolveste esta alínea, Aluno$_1$?
A1: Fiz $1-2$ e $3-2$.
Professora: Porquê?
A4: Porque o x engana.

A1: Como o gráfico tem a translação horizontal, afeta o domínio e os zeros, e tenho que andar duas unidades para a esquerda, porque o x é mentiroso.

Neste excerto de diálogo, foram colocadas duas perguntas de focalização e três perguntas de inquirição. As perguntas de focalização, embora também tenham servido para testar os conhecimentos do aluno, tiveram como principal objetivo encaminhar o pensamento do aluno. Com estas perguntas, a professora pretendia que o aluno associasse a expressão apresentada a uma transformação geométrica do gráfico da função T. As perguntas de inquirição serviram para incentivar à participação e perceber o raciocínio dos alunos. Este tipo de perguntas teve duas explicações como resposta e uma justificação. A principal diferença entre a explicação do aluno A4 e a justificação do aluno A1 é o facto do aluno A4 apenas ter explicado o facto do seu colega ter calculado $1-2$ e $3-2$ e o aluno A1 elaborou a explicação do aluno A4, justificando com o facto da translação horizontal afetar o domínio e os zeros. Além disso, os alunos formularam três respostas curtas para responder às minhas perguntas de focalização.

Em síntese, nesta fase, a professora colocou mais perguntas que nas restantes fases da aula. Tal pode dever-se ao facto de os alunos terem participado mais do que nos restantes momentos da aula, o que lhe permitiu interagir com eles e formular perguntas que promovessem a discussão. Verifica-se uma predominância das perguntas de confirmação, seguidas das de inquirição. Enquanto as perguntas de focalização aparecem em menor número. As perguntas de confirmação foram utilizadas, maioritariamente, para testar o conhecimento dos alunos e, muitas vezes, para, simultaneamente, encaminhar o seu raciocínio. Por isso, a maioria das perguntas colocadas durante a fase de discussão tiveram um 'duplo objetivo', não sendo facilmente categorizáveis. Por sua vez, as perguntas de inquirição foram formuladas para encorajar o aluno a explicar o seu raciocínio, permitindo-me aceder à sua linha de pensamento.

Síntese

É possível afirmar, pela análise da informação apresentada anteriormente, que surgiram mais perguntas na fase de discussão do que nas restantes duas fases da aula. As perguntas que surgiram durante a fase de introdução da tarefa foram formuladas com o objetivo de perceber as dúvidas e dificuldades dos alunos e incentivá-los ao desenvolvimento do seu raciocínio. No entanto, nesta fase surgiram relativamente poucas perguntas e tal pode dever-se ao facto dos alunos não estarem habituados a expor as suas dúvidas e dificuldades e, por isso, ter que ser a professora a interpelá-los para perceber as suas dificuldades e promover a discussão. Na fase de exploração da tarefa, as perguntas formuladas foram, essencialmente, no sentido de esclarecer as dúvidas dos alunos sobre o enunciado, sem diminuir o nível de exigência cognitiva da tarefa. Por sua vez, na fase de discussão em grupo-turma, surgiram mais perguntas, principalmente porque os alunos pareciam estar mais abertos para a discussão e troca de ideias, o que permitiu que a professora colocasse mais perguntas e, assim, tirar partido de todas as vantagens do questionamento. Na Tabela 4, é apresentado o número de perguntas de cada tipo colocadas durante os diferentes diálogos apresentados relativamente à Tarefa 1.

Tabela 4: Frequência do tipo de perguntas colocadas pela professora

Tipo de pergunta	Fase da aula	Indicador	Finalidade	Frequência
Confirmação	Introdução da Tarefa	"que valores pode assumir a variável x?"	Testar o conhecimento dos alunos	1
	Exploração da Tarefa	"diz que a temperatura baixou 20 minutos antes?"		9
	Discussão da Tarefa	"de $-\infty$ a 1 a função é positiva ou negativa?"		5
Focalização	Introdução da Tarefa	"não temos nenhum pormenor sobre o domínio de T?"	Encaminhar o raciocínio dos alunos	–
	Exploração da Tarefa	"ao calcular $T(1)$ e $T(3)$ estão a calcular o quê?"		9
	Discussão da Tarefa	"para identificarem o quê nesse esboço?"		6
Inquirição	Introdução da Tarefa	"concordam?"	Perceber a opinião e o raciocínio dos alunos	13
	Exploração da Tarefa	"porquê?"		9
	Discussão da Tarefa	"porquê?"		14
Total				66

Pela observação da Tabela 4, constata-se que os tipos de pergunta apresentam uma frequência aproximada, com um destaque para as de inquirição e de confirmação. As perguntas de confirmação tiveram, essencialmente, a finalidade de testar o conhecimento dos alunos e, simultaneamente, com as suas respostas, esclarecer as suas próprias dúvidas ou dos colegas. As perguntas de focalização foram utilizadas para encaminhar o pensamento do aluno, focando a sua atenção em determinados aspetos do enunciado, por exemplo. Por sua vez, as perguntas de inquirição serviram para perceber o raciocínio do aluno, incentivá-lo a justificar as suas estratégias e perceber se os alunos concordavam com os colegas, tinham optado por estratégias diferentes ou estavam com dúvidas ou dificuldades.

Relativamente às respostas dos alunos, as frequências de cada tipo de resposta encontram-se apresentada na Tabela 5.

Tabela 5: Frequência de cada tipo de respostas dos alunos

Tipo de resposta	Frequência	Frequência (%)
Resposta curta	40	58%
Explicação	17	24,6%
Justificação	4	5,8%
Pergunta	8	11,6%
Desafio	–	–
Total	69	100%

Pela análise da Tabela 5, constata-se que os alunos recorreram, maioritariamente, às respostas curtas para responder às perguntas colocadas. A justificação é o tipo de resposta menos utilizado pelos alunos, além da resposta do tipo 'desafio' que não foi utilizada. Note-se que, nesta aula, os alunos formularam justificações apenas quando lhes foi pedido, não tendo procurado sustentar as suas respostas. De acordo com Martino e Maher (1999), uma forma de encorajar o aluno a explicar a sua solução ou estratégia é a utilização de perguntas em que é pedido diretamente ao aluno que justifique a sua resposta como, por exemplo, 'como estás a pensar?', 'podes explicar a tua resolução?', entre outras.

3.1.1.2. A pergunta do professor na resolução dos alunos

As resoluções dos alunos da Tarefa 1 foram recolhidas, após a fase de exploração da tarefa. Da análise dessas resoluções emergiram alguns indicadores do nível de compreensão da tarefa, diferentes representações – simbólica, gráfica ou tabelar – e justificações das respostas. As justificações, quando apresentadas, foram classificadas segundo três categorias: procedimentos matemáticos (PM), regra (R) e explicação própria (EP).

Relativamente à alínea 1.1., as frequências de cada tipo de representação e justificação são apresentadas na Tabela 6.

Tabela 6: Frequência dos tipos de resposta dos alunos à alínea 1.1. da Tarefa 1 ($n = 27$)

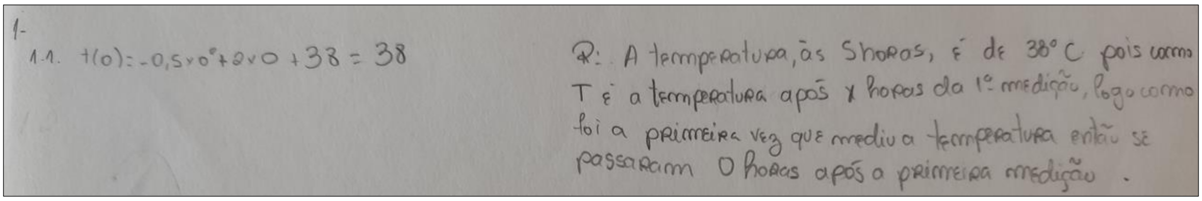
Tipo de representação			Justificação			
			Sim			
Verbal	Icónica	Simbólica	PM	R	EP	Não
7	–	27	19	–	7	1

PM – Procedimentos matemáticos; R – Regra; EP – Explicação própria

Pela Tabela 6, constata-se que a representação simbólica foi utilizada por todos os alunos e que as justificações das respostas foram, essencialmente, justificações através da transcrição dos procedimentos matemáticos. De um modo geral, os alunos utilizaram a representação simbólica na sua resolução, em particular, para transcrever os procedimentos efetuados, isto é, o cálculo de $T(0)$ e a representação através da linguagem verbal para responderem à questão e justificarem, por palavras próprios, estes procedimentos.

Apesar da maioria dos alunos terem conseguido resolver a alínea em questão, poucos alunos justificaram a sua estratégia. Dos alunos que justificaram os seus cálculos, todos utilizaram as suas próprias palavras e o enunciado para o fazer, sendo consideradas ‘explicações próprias’. Entre as resoluções dos alunos que justificaram o seu procedimento, encontra-se a do aluno A26:

Figura 9: Resposta da alínea 1.1. da Tarefa 1 do aluno A26

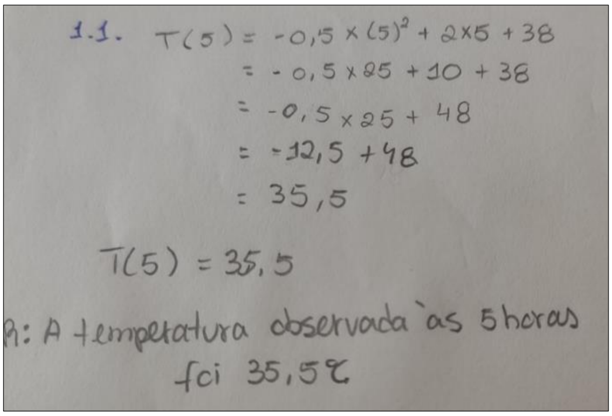


O aluno determinou o valor de $T(0)$ e interpretou esse valor de acordo com o contexto da tarefa. Além disso, o aluno justificou o facto de ter considerado $x = 0$, explicando que a temperatura às 5 horas corresponde à temperatura 0 horas após a primeira medição. Com a sua justificação, através da linguagem natural, o aluno mostrou ter compreendido a tarefa.

Durante a fase de introdução da tarefa, como já foi referido, a professora recorreu ao questionamento para captar a atenção dos alunos e abordar o significado da variável x, procurando evitar que confundissem as horas da primeira medição com as horas a que o André mediu a temperatura. Neste diálogo, os alunos pareciam ter compreendido o enunciado, referindo que para determinar a temperatura do André no instante inicial, seria necessário calcular o valor da função T para $x = 0$, uma vez que teriam passado 0 horas após a primeira medição da temperatura.

Ainda assim, algumas resoluções revelam que os alunos não compreenderam o enunciado como, por exemplo, a resolução do aluno A25 (Figura 10).

Figura 10: Resposta da alínea 1.1. da Tarefa 1 do aluno A25



O aluno A25 recorreu à representação simbólica para responder à questão e justificar a sua resposta. Para justificar a sua resposta, apresentou o cálculo efetuado, isto é, o cálculo de $T(5)$. Contudo, ao considerar $x = 5$ para o cálculo da temperatura observada às 5 horas, revelou não ter percebido o teor da discussão desenvolvida em grupo-turma no momento da introdução da tarefa ou não ter estado atento à mesma.

Na alínea 1.2., os alunos tinham que determinar a temperatura máxima atingida pelo André. Para esse efeito, tinham que determinar a ordenada do vértice da parábola que representa a função T. A Tabela 7 apresenta as frequências dos tipos de representação e justificação existentes nas resoluções da alínea 1.2.

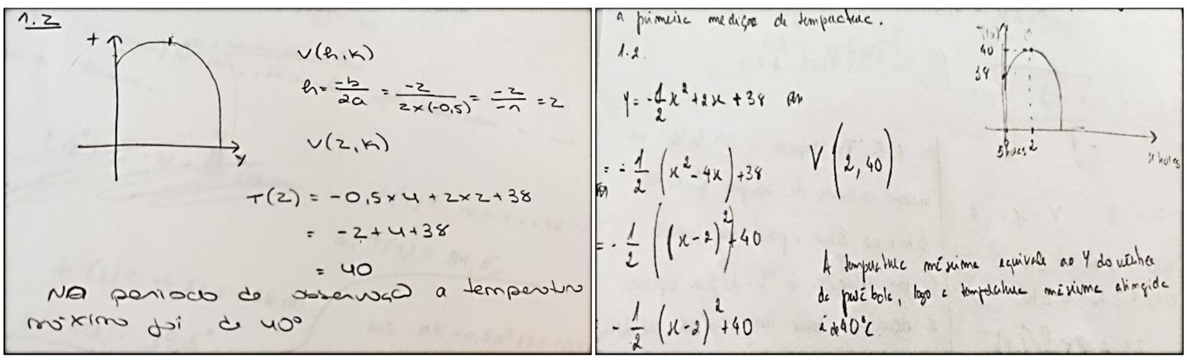
Tabela 7: Frequência dos tipos de resposta dos alunos à alínea 1.2. da Tarefa 1 ($n = 26$)

Tipo de representação			Justificação			
			Sim			
Verbal	Icónica	Simbólica	PM	R	EP	Não
6	10	26	26	26	6	–

PM – Procedimentos matemáticos; R – Regra; EP – Explicação própria

Pela análise da Tabela 7, verifica-se que vários alunos recorreram à representação icónica, em particular, à representação gráfica. As justificações dadas foram, maioritariamente, justificações através da transcrição dos procedimentos matemáticos e do recurso a regras. Os alunos utilizaram a representação simbólica para apresentar as suas estratégias de resolução como, por exemplo, a determinação das coordenadas do vértice da parábola. A representação gráfica serviu para sustentar a ideia de que a temperatura máxima registada pelo André corresponde à ordenada do vértice da parábola que traduz a função T. No entanto, de um modo geral, os gráficos representados não apresentaram o rigor matemático adequado tal como ilustram as resoluções dos alunos A2 e A22:

Figura 11: Respostas da alínea 1.2. da Tarefa 1 dos alunos A2 e A22



Nestas resoluções, os alunos recorreram à representação simbólica, através da determinação das coordenas do vértice da parábola e da resposta à alínea, e à representação gráfica, através do esboço da parábola. O facto de terem esboçado a parábola com a concavidade voltada para baixo e a intersetar o eixo das ordenadas revela um nível de compreensão satisfatório da tarefa. No entanto, o esboço do gráfico também revela que estes não refletiram suficientemente sobre o enunciado da tarefa, uma vez que esses esboços têm vários erros. Por exemplo, os alunos A2 e A22 esboçaram gráficos que intersetam o eixo das abcissas e tal não acontece uma vez que o André só mede a temperatura até às 10 horas e, nesse instante, a sua temperatura é 35,5°C. Além disso, a temperatura corporal do André não poderia atingir os zero graus.

Apesar da representação gráfica não ser necessária para a resolução da alínea 1.2., quando apresentada esta deve ter o rigor matemático adequado para que possa servir de sustentação ao raciocínio do aluno. Note-se que, durante a fase de exploração da tarefa, ao procurar auxiliar os alunos na resolução da alínea 1.2., a professora formulou perguntas para encaminhar os seus raciocínios para a compreensão de que a temperatura máxima atingida pelo André correspondia à ordenada do vértice do gráfico que traduz a função T. Tal pode ter levado a que os alunos se focassem mais na determinação das coordenadas do vértice da parábola e não tivessem procurado ter rigor no esboço do gráfico da mesma. Por isso, ao recolher as produções dos alunos e se aperceber das suas dificuldades no esboço do gráfico, a professora preocupou-se em colocar perguntas, durante a fase de discussão da tarefa, que permitissem alertá-los para alguns aspetos importantes no esboço de um gráfico.

Ainda que os alunos tenham recorrido aos mesmos tipos de representações – a simbólica e a gráfica – a resolução do aluno A22 é mais completa. O aluno A22 justificou, utilizando linguagem natural, a necessidade de calcular a ordenada do vértice da parábola. O aluno procurou explicar que determinou as coordenadas do vértice da parábola porque a temperatura máxima é dada pela ordenada do vértice da parábola, sustentando-o com o esboço do gráfico. Enquanto o aluno A2 apenas transcreveu os procedimentos efetuados, utilizando linguagem matemática. O aluno A2 elaborou uma justificação por transcrição dos procedimentos matemáticos, procurou fundamentar a sua estratégia através da apresentação do gráfico, mas não explicou que informação retirou desse esboço.

No caso da alínea 1.3., esta foi a alínea em que mais alunos não justificaram as suas respostas. A Tabela 8 explicita as frequências de cada tipo de representação e justificação presentes nas suas produções.

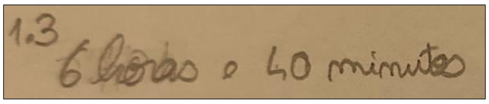
Tabela 8: Frequência dos tipos de resposta dos alunos à alínea 1.3. da Tarefa 1 ($n = 27$)

Tipo de representação			Justificação			
			Sim			
Verbal	Icónica	Simbólica	PM	R	EP	Não
11	3	12	12	-	11	5

PM – Procedimentos matemáticos; R – Regra; EP – Explicação própria

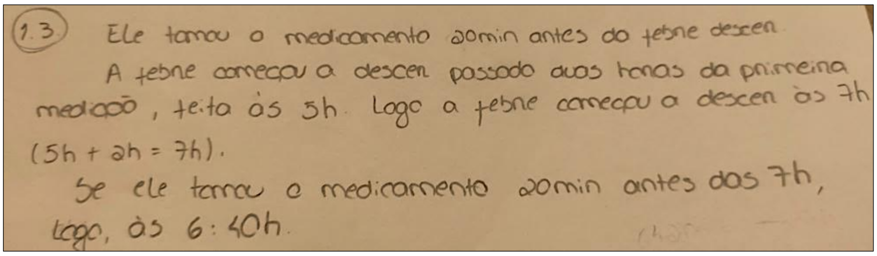
Pelas informações que contemplam a Tabela 8, infere-se que praticamente todos os alunos recorreram à representação através da linguagem verbal e que apenas três alunos recorreram à representação icónica, utilizando-a para complementar a representação simbólica. Relativamente à justificação, vários alunos justificaram, através das suas próprias palavras, a sua resposta. Apesar de ter sido pedido, no enunciado da alínea, que justificassem as suas respostas, alguns alunos apenas apresentaram a resposta. A resolução do aluno A27 exemplifica uma das resoluções em que a resposta não foi justificada (Figura 12).

Figura 12: Resposta da alínea 1.3. da Tarefa 1 do aluno A27


1.3
6 horas e 40 minutos

Nesta resolução, o aluno apenas refere as horas a que o André tomou o medicamento, não explicando como obteve essa resposta. Por sua vez, o aluno A6 explicou o seu raciocínio e determinou corretamente as horas a que o André tomou o medicamento A6 (Figura 13):

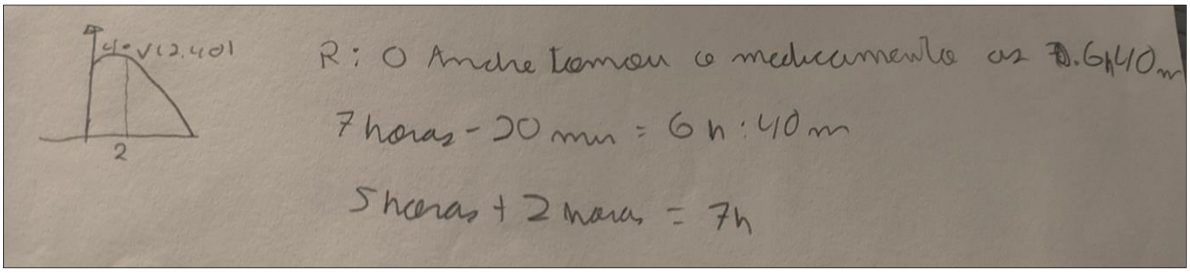
Figura 13: Resposta da alínea 1.3. da Tarefa 1 do aluno A6


1.3 Ele tomou o medicamento 20min antes do febre descer.
A febre começou a descer passado duas horas da primeira medicação, feita às 5h. Logo a febre começou a descer às 7h (5h + 2h = 7h).
Se ele tomou o medicamento 20min antes das 7h, logo, às 6:40h.

O aluno A6 explicou como é que obteve a sua resposta, isto é, o modo como concluiu que o André tomou o medicamento às 6h40 e apresentou a devida resposta. A justificação apresentada pelo aluno A6, através das suas próprias palavras, foi adequada ao nível exigido, revelando que este compreendeu o enunciado.

Como referido, alguns alunos também recorreram à representação icónica, como ilustra a resolução do aluno A1 (Figura 14).

Figura 14: Resposta da alínea 1.4. da Tarefa 1 do aluno A1



A resolução do aluno A1 apresenta uma representação icónica e uma representação simbólica. O aluno A1 procurou sustentar o seu raciocínio através do esboço do gráfico e dos 'cálculos' apresentados. Através do gráfico, o aluno procurou justificar o facto do André ter atingido a temperatura mais alta às 7 horas e de, a partir desse instante, a febre ter começado a baixar. Com os 'cálculos' apresentados, o aluno traduziu a informação do enunciado, que indica que o comprimido tomado pelo André demorou 20 minutos a fazer efeito. A sua justificação baseou-se na apresentação de cálculos e, por isso, foi considerada uma justificação através de procedimentos matemáticos. Essa mesma justificação não está clara, o aluno não apresenta o seu raciocínio de forma 'ordenada'. Primeiramente, o aluno A1 apresentou uma resposta à questão e só depois apresentou os processos utilizados para chegar a essa resposta. Além disso, o aluno procurou explicitar o facto da temperatura do André ter atingido o seu máximo 2 horas após a primeira medição da temperatura e, por isso, às 7 horas, tendo tomado o comprimido 20 minutos antes e, por isso, às 6h40. No entanto, apresenta um cálculo que relaciona diferentes unidades de medida.

Por sua vez, na alínea 1.4. era pedido que se mostrasse que a temperatura do André entre as 6 e as 8 horas se manteve superior a 39,5°C. As produções dos alunos demonstram as suas dificuldades na resolução desta alínea, principalmente na demonstração pedida.

A Tabela 9 apresenta as frequências de cada tipo de representações e justificações encontradas nas produções dos alunos para a alínea 1.5.

Tabela 9: Frequência dos tipos de resposta dos alunos à alínea 1.4. da Tarefa 1 ($n = 27$)

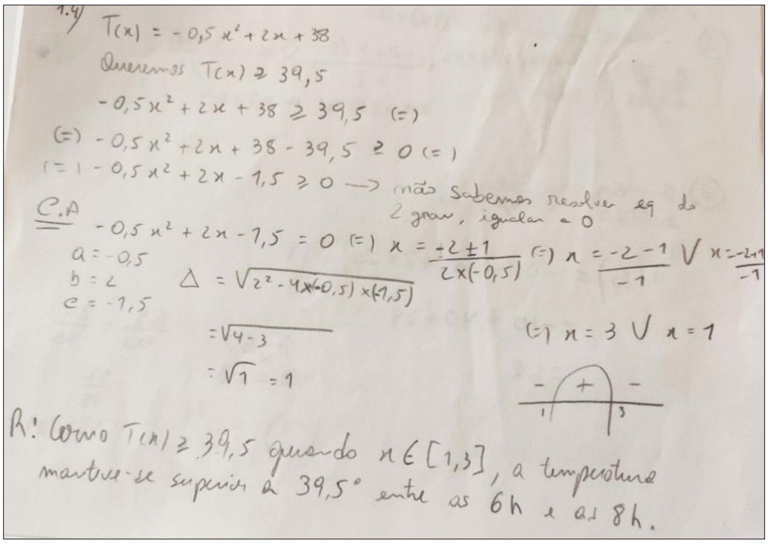
Tipo de representação			Justificação			
Verbal	Icónica	Simbólica	Sim			Não
			PM	R	EP	
4	4	25	7	–	4	18

PM – Procedimentos matemáticos; R – Regra; EP – Explicação própria

É possível afirmar, pela Tabela 9, que os alunos, na sua maioria, apenas utilizaram a representação simbólica e não justificaram devidamente os seus procedimentos. Apesar de ser uma alínea em que é necessário o esboço do gráfico para se estudar a monotonia da função obtida, poucos alunos o apresentaram. As justificações dadas pelos alunos limitaram-se, essencialmente, transcrições dos procedimentos matemáticos. Apenas quatro alunos recorreram à linguagem natural para explicar a razão para a estratégia utilizada.

A resolução do aluno A3 é um exemplo de uma das resoluções em que é utilizada a representação simbólica e gráfica e em que é justificado, através da descrição dos procedimentos efetuados e de linguagem natural, a estratégia utilizada (Figura 15).

Figura 15: Resposta da alínea 1.4. da Tarefa 1 do aluno A3


1.4) $T(x) = -0,5x^2 + 2x + 38$

Queremos $T(x) \geq 39,5$

$-0,5x^2 + 2x + 38 \geq 39,5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0,5x^2 + 2x + 38 - 39,5 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0,5x^2 + 2x - 1,5 \geq 0 \rightarrow$ não sabemos resolver eq do 2 grau, igualar a 0

C.A

$-0,5x^2 + 2x - 1,5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 1}{2 \times (-0,5)} \Leftrightarrow x = \frac{-2-1}{-1} \vee x = \frac{-2+1}{-1}$

$a = -0,5$

$b = 2$

$c = -1,5$

$\Delta = \sqrt{2^2 - 4 \times (-0,5) \times (-1,5)}$

$= \sqrt{4-3}$

$= \sqrt{1} = 1$

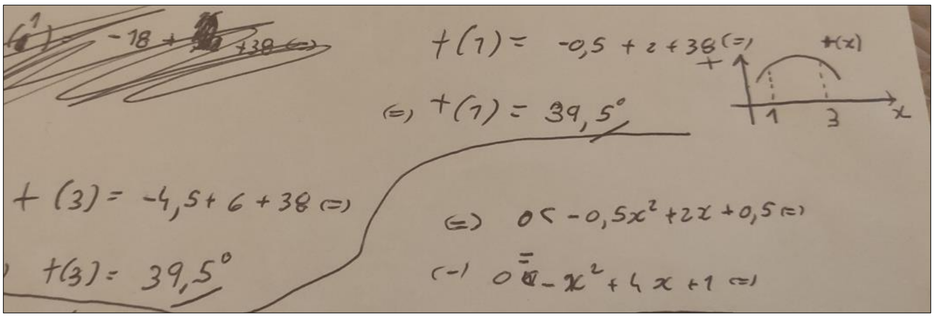
$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$

R: Como $T(x) \geq 39,5$ quando $x \in [1,3]$, a temperatura manteve-se superior a 39,5° entre as 6h e as 8h.

Na sua resolução, o aluno A3 resolveu uma inequação para determinar entre que intervalo é que o André manteve uma temperatura superior a 39,5°C, mostrando assim o que era pedido na alínea 1.4. Além disso, apresentou uma justificação para o facto de ter 'transformado' a inequação do 2.º grau numa equação do 2.º grau. O aluno referiu não saber como resolver inequações do 2.º grau e, por isso, ter optado por resolver uma equação do 2.º grau e estudar a monotonia da função associada a essa equação. Além disso, o aluno justificou a razão para ter concluído que a temperatura se manteve superior a 39,5°C entre as 6 horas e as 8 horas por palavras próprias. Embora pouco aprofundada, a resposta do aluno é clara e precisa, apresentando todos os elementos necessários para responder à questão.

Por outro lado, alguns alunos optaram por provar, através do gráfico e dos valores da temperatura do André às 6 horas e às 8 horas, que a temperatura se manteve superior a 39,5°C nesse intervalo. resolução do aluno A24 ilustra uma dessas resoluções (Figura 16).

Figura 16: Resposta da alínea 1.4. da Tarefa 1 do aluno A24



Como se pode observar na Figura 16, o aluno A24, além de ter verificado os valores de $T(1)$ e $T(3)$ são 39,5, apresentou um esboço do gráfico da parábola representativa de T. Apesar de ter esboçado o gráfico que traduz a temperatura do André ao longo das medições efetuadas, o aluno não explicou que informação 'retira' do mesmo, isto é, que, como o gráfico que traduz a função T tem concavidade voltada para baixo, a temperatura é sempre superior a 39,5°C para qualquer instante entre as 6 horas e as 8 horas. Assim, considero que o aluno não justificou a sua resposta e que deveria ter redigido um pequeno texto em que explicaria a informação que retirou ao observar o gráfico e ao verificar os valores de $T(1)$ e $T(3)$.

Note-se que, durante a fase de exploração da tarefa, coloquei algumas perguntas no sentido de chamar a atenção dos alunos para a necessidade de demonstrar que a temperatura se manteve superior a 39,5°C durante o intervalo entre as 6 e as 8 horas. No entanto, alguns alunos continuaram a responder de forma incompleta à alínea 1.4. e tal pode dever-se ao facto desta discussão não ter envolvido mais alunos, nomeadamente, os que estavam a cometer o erro mencionado. Assim, considero que a professora podia ter colocado perguntas mais direcionadas e mais abertas, para que os alunos que demonstraram dificuldades na compreensão do que era pedido na questão se sentissem encorajados a participar na discussão. Isto revela, mais uma vez, que estes alunos não compreenderam o que se estava a discutir, não expuseram as suas dúvidas ou não participaram direta ou indiretamente na discussão, seja como ouvintes ou como intervenientes ativos. Por isso, as perguntas colocadas podiam ter sido direcionadas a esses alunos para garantir que participassem na discussão e que esclarecessem as suas dúvidas. Para compreender se os alunos esclareceram as suas dúvidas, a professora podia utilizar perguntas de confirmação ou até perguntas de inquirição – que os levassem a desenvolver o seu raciocínio e, sendo perguntas de um nível de exigência cognitiva mais elevada, permitissem averiguar se tinham compreendido os aspetos anteriormente abordados.

Quanto às resoluções dos alunos à alínea 1.5., as frequências de cada tipo de representação e justificação são apresentadas na Tabela 10.

Tabela 10: Frequência dos tipos de resposta dos alunos à alínea 1.5. da Tarefa 1 ($n = 27$)

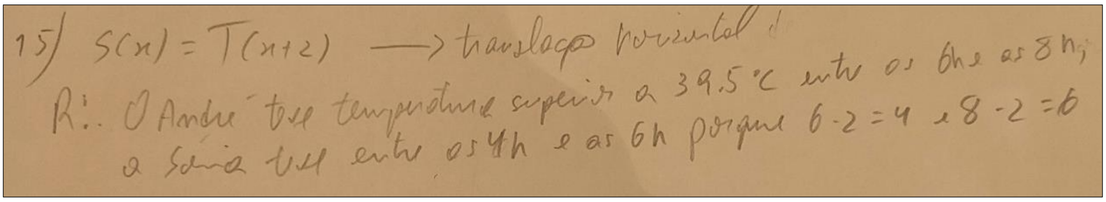
Tipo de representação			Justificação			
			Sim			
Verbal	Icónica	Simbólica	PM	R	EP	Não
4	—	14	7	7	4	3

PM – Procedimentos matemáticos; R – Regra; EP – Explicação própria

Através da informação que integra a Tabela 10, é possível inferir que vários os alunos recorreram à representação simbólica para responder à alínea 1.5., apesar desta alínea estar relacionada com uma transformação geométrica do gráfico de uma parábola e, por isso, poder ser útil o esboço de um gráfico que refletisse essa situação. Relativamente às justificações, a maioria dos alunos justificou a sua resposta através da apresentação dos procedimentos matemáticos subjacentes ou da referência à definição de translação horizontal.

A resolução do aluno A21 exemplifica uma justificação em que foi referida a translação horizontal e explicado o raciocínio do aluno, através da linguagem natural (Figura 17).

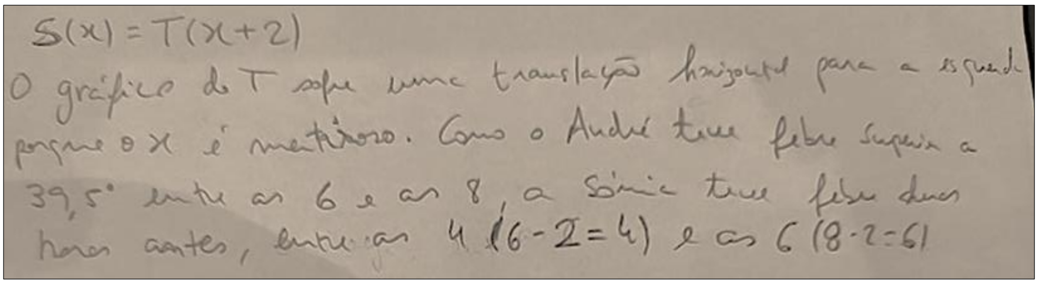
Figura 17: Resposta à alínea 1.5. da Tarefa 1 do aluno A21


1.5) S(x) = T(x+2) ⟶ translação horizontal
R: O André teve temperatura superior a 39.5 °C entre as 6h e as 8h;
a Sónia teve entre as 4h e as 6h porque 6-2=4 e 8-2=6

Na resolução do aluno A21, este referiu que o gráfico da parábola que representa a função S resulta de uma translação horizontal do gráfico que traduz a função T e apresentou a sua resposta. Apesar de ter procurado justificar a sua resposta, esta justificação foi pouco desenvolvida, uma vez que o aluno não refere que a translação horizontal resulta numa deslocação de duas unidades para a esquerda do gráfico que traduz a função S em relação ao gráfico que traduz a função T.

O aluno A22 apresentou uma justificação mais desenvolvida (Figura 18):

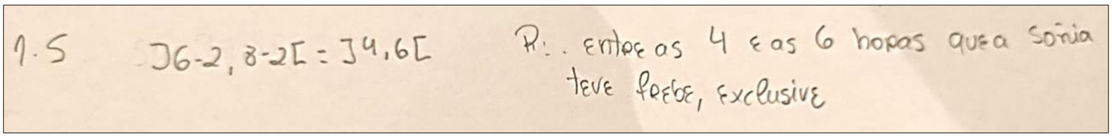
Figura 18: Resposta da alínea 1.5. da Tarefa 1 do aluno A21


S(x) = T(x+2)
O gráfico de T sofre uma translação horizontal para a esquerda
porque o x é [illegible]. Como o André teve febre superior a
39,5° entre as 6 e as 8, a Sónia teve febre duas
horas antes, entre as 4 (6-2=4) e as 6 (8-2=6)

O aluno A21 referiu, utilizando linguagem matemática correta, a translação horizontal do gráfico resultante da função T, explicando a razão de considerar que a translação horizontal em questão é uma translação para a esquerda. Além disso, o aluno explicou como obteve o intervalo em que a Sónia apresentou uma temperatura superior a 39,5°C. A justificação do aluno A21 pode ser considerada uma justificação através de explicação própria e também uma justificação por regra, uma vez que este refere-se a um conceito estudado nas aulas – o conceito de transformação geométrica de gráficos de funções.

Por sua vez, vários alunos apenas utilizaram a linguagem simbólica para a dar a sua resposta. O aluno A26, por exemplo, apenas indicou o conjunto-solução que corresponde à resposta à questão.

Figura 19: Resposta da alínea 1.5. da Tarefa 1 do aluno A26



O aluno A26 apresentou o intervalo de tempo em que a Sónia teve febre, mas não justificou que retirou 2 horas ao intervalo em que o André teve febre porque identificou a translação horizontal do gráfico que traduz a função T. Depois o aluno elaborou uma resposta que traduz o intervalo apresentado.

Síntese

As produções dos alunos revelam que a maioria recorreu à representação simbólica e verbal para resolver todas as alíneas da Tarefa 1 e/ou para sustentar o seu raciocínio. A representação icónica foi utilizada, principalmente, na alínea 1.2. Tal pode dever-se ao facto de a temperatura máxima corresponder à ordenada do vértice da parábola e, por isso, os alunos terem recorrido ao gráfico para 'mostrar' a razão para determinarem as coordenas do vértice. Apesar de terem utilizado algumas vezes a representação icónica, o rigor matemático apresentado não foi adequado. Por isso, durante a fase de discussão em grupo-turma, a professora procurou formular perguntas que me permitissem discutir, com os alunos, aspetos importantes e a ter em atenção no esboço de um gráfico como, por exemplo, o domínio e o contradomínio. Note-se ainda que foram raros os casos em que os alunos recorreram a diferentes tipos de representações simultaneamente.

Relativamente às justificações, as produções escritas dos alunos revelaram as suas dificuldades na apresentação de justificações. Mesmo sendo pedido no enunciado que justificassem as suas respostas, vários alunos optaram por apenas apresentar a resposta ou os procedimentos algébricos subjacentes, contrastando com a postura revelada durante a discussão da tarefa me grupo-turma, em que procuraram justificar as suas ideias e estratégias. Isto parece indicar que o modo como as perguntas foram colocadas ou o momento em que foram colocadas influenciaram as justificações dos alunos.

À medida que o nível de exigência cognitiva aumentou, os alunos parecem ter tido cada vez menos cuidado na formulação de justificações. Consequentemente, as ocorrências de justificações diminuíram, o que contrasta com o observado por Santos e Semana (2014).

No caso da Tarefa 1, os alunos apresentaram, essencialmente, justificações através de procedimentos matemáticos. Ainda que pouco utilizadas, as justificações por explicação própria ou por regra evidenciaram-se nas alíneas 1.3. e 1.5., respetivamente.

3.1.2. Função definida por ramos

No seguimento do estudo de tópicos de funções, os alunos foram confrontados com uma função, a função definida por ramos, através da resolução da seguinte tarefa:

> **Tarefa 2: Consumo de água**
> Na aldeia de Lindoso, o preço a pagar por mês pelo consumo de água é a soma das seguintes parcelas:
> - 6 euros pelo aluguer do contador;
> - 0,75 euros por metro cúbico de água consumido até 10 metros cúbico, inclusive;
> - 1,60 euros por cada metro cúbico de água consumido para além de 10 metros cúbicos.
>
> Por uma questão de poupança de água, cada habitante apenas pode consumir até 100 metros cúbicos de água.
> 1.1. O Inácio, habitante da aldeia, consome $8\ m^3$ de água por mês. Quanto paga num ano pelo consumo de água?
> 1.2. A Isabel, amiga do Inácio, paga mais 15 € do que ele por mês. Quanto é o consumo de água da Isabel por mês?
> (Apresenta o resultado arredondado às centésimas)
> 1.3. Define algebricamente a função f que a cada m^3 de água consumidos faz corresponder o preço pago, em euros.
> 1.4. Representa graficamente a função f.

Esta tarefa, denominada 'Consumo de água', reflete uma situação de contexto da realidade, cujas condicionantes proporcionam aos alunos a representação algébrica e gráfica de uma função definida por ramos.

3.1.2.1. As perguntas do professor na aula de ensino exploratório

Introdução da *tarefa*

Após a distribuição da tarefa, do estabelecimento do tempo a dedicar à sua resolução em trabalho autónomo e de definido o modo de trabalho, os alunos efetuaram uma leitura silenciosa do enunciado. De seguida, a professora pediu ao aluno A10 que lesse a tarefa em voz alta para que pudéssemos, em grupo-turma, interpretar o enunciado. Com a interpretação do enunciado em grupo-turma, a professora pretendia garantir que todos os alunos percebiam as informações do enunciado e o que era pedido, e que se sentissem desafiados à exploração da tarefa.

Professora:	Vamos parar um bocadinho. O que é que nós sabemos do pagamento do contador da água?
Alunos:	São 6 euros.
Professora:	E pagam sempre estes 6 euros ou não?
Alunos:	Sim.
Professora:	Todos os meses pagam 6€ pelo contador da água. E depois, o que têm que pagar pelo consumo de água?
A4:	Depois 75 cêntimos.
Professora:	75 cêntimos pelo quê?

A1: Por cada metro cúbico.
A4: Até $10\ m^3$.
Professora: Ok, os habitantes têm que pagar 0,75€ por cada metro cúbico de água até $10\ m^3$. E depois?
A4: E se passar de $10\ m^3$ pagam 1,60€.
Professora: Toda a gente concorda com o A4?
Alunos: Sim.
Professora: Por cada metro cúbico de água que passe os $10\ m^3$. Este pormenor é muito importante.
[O aluno A10 continua a ler o enunciado]
Professora: O que é que isso quer dizer?
A10: Que no máximo só podem consumir $100\ m^3$ de água por mês.
Professora: Ok. Têm alguma dúvida do enunciado?
Alunos: Não.

Como a professora pretendia que os alunos retirassem e destacassem as informações mais importantes do enunciado para garantir que todos tinham percebido, formulou cinco perguntas de focalização. Estas perguntas permitiram-lhe focar a atenção dos alunos nos dados do enunciado, como, por exemplo, no facto de existirem dois preços distintos para o consumo de água. As duas perguntas de inquirição foram colocadas para averiguar se todos os alunos concordavam com o colega e se alguém tinha dúvidas. A única pergunta de confirmação colocada teve como propósito averiguar se o aluno tinha percebido o que tinha lido e exigir que este traduzisse a informação lida para a turma, para que todos pudessem perceber a informação do enunciado da tarefa. As perguntas de focalização foram as que mais se evidenciaram, enquanto as perguntas de confirmação e inquirição foram as menos utilizadas.

Relativamente às respostas dos alunos, o único tipo de respostas evidenciado foi a resposta curta, tendo sido dadas oito respostas deste tipo. As perguntas colocadas foram, como constatado, na sua maioria perguntas de focalização, em que o objetivo era focar a atenção do aluno em determinados pormenores do enunciado para uma interpretação dos mesmos. Por isso, o facto das respostas dos alunos serem todas respostas curtas pode estar relacionado com o tipo de pergunta colocada, que apenas exigia a interpretação do enunciado e respostas curtas dos alunos.

Exploração da tarefa

Na alínea 1.1., alguns alunos expressaram dúvidas, que se relacionavam, principalmente, com a interpretação do significado de '0,75€ por cada metro cúbico de água até $10\ m^3$'. Embora os alunos tivessem interpelado a professora para que validasse as suas respostas, depois de se ter apercebido que estas não estavam corretas, utilizou as perguntas para os fazer perceber dos seus erros.

A4: Professora, é assim?

Professora: Explica o que fizeste, que eu assim não sei como estás a pensar.
A4: É 6€ por ter alugado o contador, vezes 12 porque ele aluga o contador durante um ano, mais 0,75€ porque gasta $8\ m^3$.
Professora: E o Inácio só paga 0,75€ por $8\ m^3$ de água?
A4: Sim, porque é menos de $10\ m^3$.
Professora: E é isso que diz no enunciado? Olha lê de novo.
[O aluno A4 relê o enunciado]
A4: Aqui diz que paga 0,75€ por cada metro cúbico de água até $10\ m^3$.
Professora: Ok. Por cada metro cúbico de água. E então, como é que sabemos quando é que ele paga num mês por $8\ m^3$ de água? Só num mês, sem pensar no aluguer do contador.
A4: Tem que se fazer $0{,}75 \times 8$, não é professora?

Para não responder diretamente ao aluno, mas encaminhá-lo para a compreensão do seu erro, a professora colocou duas perguntas de focalização. Com estas perguntas pretendia que o aluno percebesse que o preço a pagar é um preço por metro cúbico de água e não um preço pelo consumo total de água. De seguida, colocou uma pergunta de confirmação para se certificar que o aluno tinha percebido e interpretado corretamente o enunciado. Por sua vez, o aluno recorreu a duas perguntas para validar a sua resolução e três explicações. Uma das explicações surgiu como resposta a um pedido de explicação e as outras duas explicações surgiram como resposta a perguntas de focalização, em que a professora procurou que o aluno se focasse no preço a pagar por cada litro de água e explicasse a razão dos seus procedimentos e as suas interpretações.

Relativamente à alínea 1.2., ao monitorizar o trabalho autónomo, a professora apercebeu-se que vários alunos, embora não tivessem demonstrado dificuldades na alínea 1.1., tiveram algumas dificuldades na alínea 1.2. desta tarefa. Por isso, para os orientar para essa alínea e para a discussão associada, decidiu questionar a turma.

Professora: E se o Inácio gasta $11m^3$de água?
A4: Fazemos $6 + 1{,}60 \times 8$.
Professora: Fazemos 6 porquê?
A4: 6 é o preço fixo do contador de água.
Professora: Ok, fazemos 6…
A4: $6 + 1{,}60 \times 8$.
Professora: Porquê, A4? Concordam com o A4?
A1: Não, eu fiz $6 + 8 \times 0{,}75 + 1{,}60$.
Professora: A1, explica o que estás a pensar.
A1: Como são 11 metros cúbicos, até aos 10 e inclusive os 10 temos que pagar 0,75€, por isso, fazemos $10 \times 0{,}75 + 1{,}60$.
Professora: Porque é que não podíamos fazer $6 + 1{,}60 \times 11$?
A5: Porque tem que ter 0,75.
A1: Porque no enunciado diz que até $10m^3$ é 0,75 €.
A4: Professora, se fosse 12 fazíamos $2 \times 1{,}60$?

Professora: Não sei. O que acham?
Alunos: Sim.

Neste excerto de diálogo, a professora colocou duas perguntas de confirmação e quatro perguntas de inquirição. Recorreu às perguntas de confirmação como, por exemplo, "fazemos 6 porquê?", para validar o conhecimento do aluno sobre o enunciado da tarefa. As perguntas de inquirição foram utilizadas para perceber o raciocínio dos alunos.

Às perguntas colocadas, os alunos responderam recorrendo a cinco explicações, três respostas curtas e uma pergunta. O aluno recorreu à pergunta para esclarecer uma dúvida relativa ao cálculo do preço a pagar por 12 metros cúbicos de água. As respostas curtas serviram, principalmente, para partilhar a resolução com a turma ou a sua opinião. As explicações foram dadas quando lhes foi perguntado "porquê?" ou lhes foi pedido para explicarem como estavam a pensar, aparecendo associadas a perguntas de inquirição.

Durante o trabalho autónomo, a professora apercebeu-se também que um aluno estava a utilizar uma estratégia diferente. Decidiu interpelá-lo e solicitar uma explicação do seu raciocínio e da estratégia utilizada.

Professora: Então, como é que estás a pensar nessa alínea?
A21: A Isabel paga mais 15€ que o Inácio e, por isso, paga 27€. E por tentativas, tenho que descobrir quanto é que a Isabel consumiu de água para gastar 27€.
Professora: Estás a atribuir valores ao consumo de água para veres quando dá 27€, é isso?! Não estou a dizer que essa estratégia está errada, mas estás a utilizar só números naturais?
A21: Sim.
Professora: Porquê? Os metros cúbicos só podem ser valores inteiros?
A21: Não, também pode ser tipo $1{,}5\ m^3$.
Professora: E aí pode ser um bocadinho mais complicado determinares o valor pretendido com essa estratégia. Por isso, vamos utilizar duas estratégias diferentes, uma estratégia que é a tentativa-erro e outra estratégia que tens que arranjar.
A21: Ok.
[Após alguns minutos, interpelei novamente o aluno A21]
Professora: Então, já arranjaste alguma estratégia?
A21: Acho que sim.
Professora: Explica-me lá.
A21: Como a Isabel gastou 27€ e pagou 6€ do contador, ela só pagou 21€ da água. Agora não sei se ela gastou mais de $10\ m^3$ ou não. Como é que faço?
Professora: Quanto é que um habitante paga se gastar $10\ m^3$ de água?
A21: Gasta 7,5€.
Professora: E a Isabel só gastou 7,5€?
A21: Não, gastou mais. Então também gastou mais de $10\ m^3$ de água.
Professora: Ok. E como é que vais saber quanto é que ela gastou agora?

A21: Vou ter que dividir o dinheiro por 1,60€ e vou saber o que ela gastou de água a mais.

Inicialmente, o aluno A25 pensou em recorrer a uma estratégia diferente dos restantes colegas – a tentativa-erro. Apesar deste método ser facilmente utilizado neste caso, porque a solução é um número natural relativamente pequeno, noutros casos poderia ser exaustivo. Por isso, a professora formulou três perguntas de inquirição iniciais e uma pergunta de confirmação para tentar que o aluno percebesse a desvantagem que poderia vir da utilização desse método. Além disso, procurou incentivar o aluno à procura por outra estratégia de resolução. Depois de se ter apercebido das suas dificuldades na compreensão de que a Isabel só poderia ter gasto mais de $10\ m^3$ de água porque senão pagaria, no máximo, 7,5€, a professora colocou duas perguntas de focalização para encaminhar o seu raciocínio e ajudá-lo a esclarecer a sua dúvida. As duas perguntas de inquirição que colocou permitiram-lhe compreender o que o aluno A25 estava a pensar, que estratégia tinha adotado e como continuaria a resolver essa alínea.

Em suma, a professora colocou cinco perguntas de inquirição, duas perguntas de focalização e uma pergunta de confirmação. As perguntas de inquirição tiveram como finalidade a compreensão do raciocínio do aluno, as perguntas de focalização serviram para a ajudar a encaminhar o raciocínio do aluno e a pergunta de confirmação teve como propósito certificar-se que o aluno sabia que os metros cúbicos de água não têm que ser valores inteiros.

O aluno respondeu com cinco respostas curtas, quatro explicações e uma pergunta. As explicações foram elaboradas no sentido de explicar a sua resolução e o seu raciocínio. O aluno utilizou a pergunta para informar que não sabia como podia determinar se a Isabel gastou ou não mais de $10\ m^3$ e pedir ajuda na resolução da alínea em questão.

A alínea 1.3. pedia que os alunos definissem algebricamente a função que a cada metro cúbico de água faz corresponder o preço a pagar, em euros, ao fim de um mês. Os alunos que interpelaram a professora tinham, na sua maioria, definido duas expressões algébricas diferentes para a função f e as suas dúvidas estavam relacionadas com o facto de não saberem se podiam definir duas expressões algébricas para a mesma função.

A6: Professora, pode ser assim? Eu não consigo arranjar outra forma de definir a função.
Professora: O que tens aí no teu caderno são duas expressões para a função f?
A6: Sim.
Professora: E como é que sabes quando é que utilizas uma expressão ou outra?
A6: Eu sei que a primeira é quando o x é menor ou igual a 10 e senão é a outra.
Professora: Mas não escreveste isso no caderno. Como é que podes representar isso?

A6: Posso usar tipo $x \leq 10$ [o aluno A1 escreve no caderno].
Professora: E como é que isso se chama?
A6: São condições.
Professora: Ok. E tens a certeza que para a primeira expressão x só tem que ser menor que 10?
[O aluno A6 não responde à professora, mostrando ter dúvidas no intervalo a considerar]
Professora: O x é o quê?
A1: O consumo de água.
Professora: E pode ser negativo?
A1: Não, mas pode ser zero. Ponho $0 \leq x \leq 10$ então.
Professora: Ok. Tu é que tens que ver se faz sentido.

Outros alunos apresentaram dificuldades na compreensão do modo correto de utilização da linguagem matemática para traduzir os intervalos utilizados para 'cada expressão':

A16: Como é que pomos esta parte? Podemos deixar assim? [apontando para "quando consome até $10\ m^3$"]
Professora: Que variável estás a utilizar para o consumo de água?
A16: O x.
Professora: E então, o x tem que estar entre que valores para que essa expressão defina f?
A16: Só tenho que pôr $0 \leq x \leq 10$?
Professora: Depende, se são esses os valores de x que queres considerar para essa expressão ou não.

Nos diálogos associados à alínea 1.3. apresentados, a professora colocou cinco perguntas de focalização, três perguntas de confirmação e uma pergunta de inquirição. As perguntas de focalização foram utilizadas, no primeiro excerto de diálogo, para que o aluno A1 percebesse inicialmente que tinha que indicar os subconjuntos em que cada expressão estava definida e, depois, para levá-lo a perceber que o intervalo considerado não estava correto porque a variável x correspondia ao consumo de água, que não pode ser negativo. No segundo diálogo, as perguntas de focalização tiveram como propósito esclarecer a dúvida do aluno A16 sem lhe responder diretamente à pergunta e encaminhar o seu raciocínio para a compreensão de que bastava utilizar intervalos ou condições. As perguntas de confirmação serviram para testar o nível de compreensão do aluno e também confirmar se tinha percebido o seu pensamento. A única pergunta de inquirição colocada teve como objetivo fazer o aluno refletir sobre a validade do intervalo considerado.

Relativamente às respostas dos alunos, as respostas curtas e as perguntas destacaram-se, tendo sido formuladas cinco respostas curtas e quatro perguntas. Neste diálogo apenas foi formulada uma explicação. A explicação surgiu como resposta a uma pergunta de focalização, cujo propósito era focar a atenção do aluno no facto de ser necessário condições para se perceber em que domínio está definida cada uma das expressões. As perguntas que o aluno colocou teve como objetivo validar o seu raciocínio e esclarecer dúvidas.

Na alínea 1.4., como já tinha sido antecipado durante a planificação da aula (PA2, 2021), a principal dúvida dos alunos prendeu-se com o facto de não saberem se tinham que apresentar dois gráficos ou apenas um gráfico.

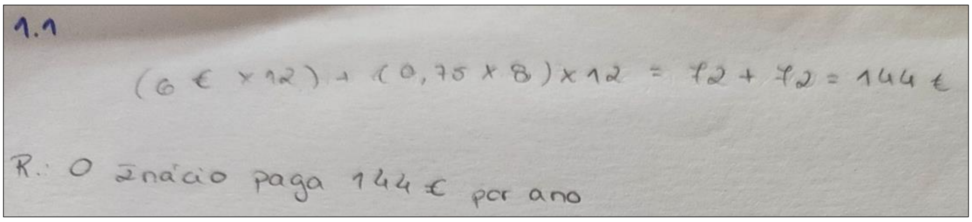
A24:	Tenho que pôr um gráfico ou dois?
Professora:	Tu definiste quantas funções?
A24:	Duas funções. Esta e esta [apontando para as duas expressões].
Professora:	Isso são duas funções? Mas na alínea 1.3. não pedia que definisses uma função apenas?
A24:	Não, são duas expressões.
Professora:	Exato. E se temos só uma função podemos ter dois gráficos diferentes?
A24:	Não. Mas então desenho os gráficos das duas expressões por cima um do outro?
Professora:	Cada expressão não está apenas definida para intervalos diferentes?
A24:	Como assim, professora?
Professora:	Para certos valores de x definiste uma expressão e para outros valores de x definiste outra expressão?
A24:	Sim.
A24:	Então desenho até 10 a primeira expressão e depois desenho a segunda expressão?
Professora:	Tenta e vê se faz sentido com as informações que tens no enunciado: esboça o gráfico que traduz a primeira expressão algébrica e, no mesmo referencial, o gráfico que traduz a segunda expressão algébrica.

Neste excerto de diálogo, a professora colocou quatro perguntas de focalização cujo principal objetivo foi esclarecer a dúvida do aluno A24, levando-o a perceber que se só tinha definido uma função, também só poderia esboçar um gráfico. A pergunta de confirmação serviu para se certificar que o aluno tinha percebido que, na alínea anterior, tinha definido duas expressões para a mesma função e não duas funções. A esta pergunta o aluno respondeu com uma resposta curta, transmitindo a noção de que definiu duas expressões. No total, o aluno formulou quatro respostas curtas e quatro perguntas. As perguntas serviram para o aluno esclarecer as suas dúvidas e perceber como poderia representar graficamente uma função definida por ramos. Note-se que, com estas perguntas, o aluno foi construindo o seu raciocínio. As perguntas colocadas permitiram à professora obter *feedback* das aprendizagens dos alunos e orientá-los na organização da informação relativa à tarefa ajudando-os, consequentemente, a pensar.

Discussão em grupo-turma

Para resolver a alínea 1.1., uma vez que os alunos devem ser ouvidos e que quando um aluno pede para ir ao quadro deve-lhe ser dada essa confiança e incentivo, a professora escolheu o aluno A7, depois de este lhe ter solicitado (Figura 20).

Figura 20: Resolução da alínea 1.1. da Tarefa 2 do aluno A7



Durante a fase de exploração da tarefa, a professora constatou que vários alunos tinham interpretado incorretamente o enunciado, considerando que o aluguer do contador da água era apenas pago uma vez. Por isso, de forma a promover a discussão, incentivou o aluno A7 a explicar o seu raciocínio:

Professora: A7, explica lá como fizeste.
A7: Ele tinha que pagar obrigatoriamente os 6€ e também já sabíamos que era 0,75€ se fosse até $10\ m^3$. Então temos que fazer este valor [apontando para 0,75€] vezes 8 que era o que nos dizia no enunciado.
Professora: E não falta aqui nada [apontando para o resultado do cálculo mencionado]?
Alunos: O euro.
[O aluno acrescenta o símbolo dos euros]
A7: Depois temos que fazer 12€ vezes 12 meses.
Professora: E toda a gente concorda com o aluno A7? Vi algumas resoluções diferentes.
A12: Eu só fiz $0{,}75 \times 8 \times 12$ e depois fiz mais 6€.
Professora: E esses 6€ é o preço de quê?
A12: Do contador da água.
Professora: E isso só se paga uma vez, A7?
A7: Eu acho que se paga todos os meses.
Professora: E tu, A12? Lê o enunciado de novo.

Para estimular os alunos que tinham resolvido de forma diferente (correta ou incorretamente), colocou uma pergunta de inquirição. De seguida, a professora utilizou quatro perguntas de focalização para focar a atenção dos alunos no aluguer do contador da água e no facto de este ter que ser pago todos os meses. Uma das perguntas foi utilizada para que o aluno A7 se apercebesse que não tinha colocado a unidade monetária com que estava a trabalhar durante um dos cálculos.

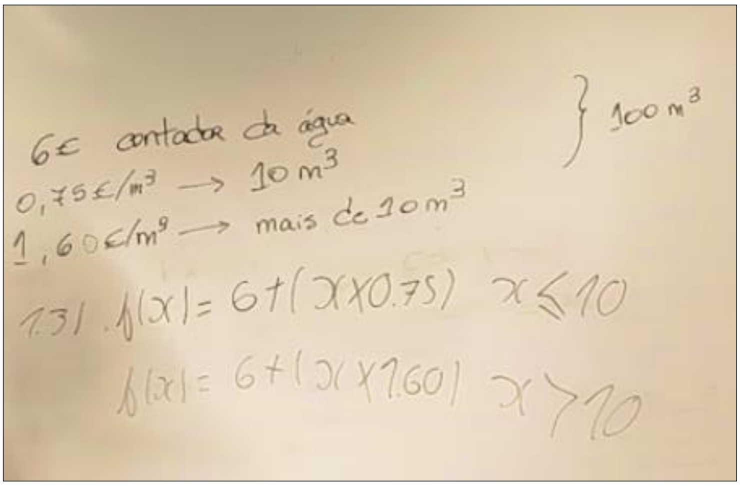
Os alunos formularam três respostas curtas e três explicações. As respostas curtas surgiram sempre como resposta a perguntas de focalização. Como essas perguntas foram perguntas fechadas, os alunos não procuraram aprofundar as suas respostas ou explicá-las. As explicações foram formuladas pelos alunos para explicar as suas estratégias de resolução. Por exemplo, o aluno A12 descreveu à turma a sua estratégia, que era diferente da estratégia do colega.

Na alínea 1.2., embora se tenha abordado durante a fase de exploração da tarefa, alguns aspetos a ter em consideração no cálculo do preço a pagar pelo consumo de água, os alunos apresentaram algumas dificuldades na resolução da mesma. Após observarem a resolução da alínea 1.2. do aluno A18 a turma revelou dúvidas quanto à sua resolução e colocou-lhe questões. Por isso, a professora optou por deixar que os próprios alunos conduzissem a discussão e colocassem as suas dúvidas, intervindo somente para gerir as intervenções dos alunos e perceber se os colegas que não estavam a intervir, estavam a compreender a resolução.

Na alínea 1.3. é pedido que os alunos definam algebricamente a função f, que representa o preço a pagar por mês pelo consumo de água na aldeia de Lindoso. Apesar de ainda não terem aprendido a definir funções definidas por ramos, esta alínea foi formulada para que os alunos usassem as suas capacidades, conhecimentos adquiridos e o que resulta das alíneas anteriores para conseguirem definir a função definida por ramos em questão. Vários alunos conseguiram definir duas expressões algébricas, correspondentes ao preço a pagar pelo consumo até 10 m^3 de água, inclusive, e pelo consumo de mais de 10 m^3 de água, respetivamente. No entanto, como já tinha sido previsto durante a preparação da aula (P2, 2021), os alunos utilizaram a linguagem natural para definir os dois ramos da função f.

Para promover a discussão e perceber o raciocínio da turma, a professora pediu a um aluno cuja resolução não estava correta para ir ao quadro apresentá-la (Figura 21).

Figura 21: Resolução da alínea 1.3. da Tarefa 2 do aluno A1 no quadro



Esta resolução não está completamente correta uma vez que, embora já fosse expectável que os alunos pudessem apresentar a função definida por ramos através de 'duas funções', uma para cada ramo, as condições apresentadas não estão corretas (PA, 2021). O aluno em questão não teve em consideração o domínio da função e, consequentemente, o subconjunto de domínio em que está definido cada ramo da função. Este erro foi cometido por alguns alunos e as suas respostas foram consideradas parcialmente corretas.

Depois de se ter apercebido, durante o trabalho autónomo, que os alunos tinham cometido vários erros associados às partições do domínio, a professora escolheu um aluno cujo erro tinha sido o mesmo para apresentar a sua resolução à turma. De forma a dar ênfase a este erro e focar a atenção dos alunos, formulou perguntas diretas aos alunos sobre o domínio de cada expressão. Veja-se:

Professora: O domínio da primeira expressão faz sentido?
A6: Eu não pus assim, professora. Eu pus $1 \leq x \leq 10$.
Professora: O que acham do que o A6 está a dizer?
A1: Não porque tem de ser 0.
Professora: Porque é que não pode ser maior ou igual a 1?
A1: Porque ele pode gastar $0{,}1m^3$.
Professora: Concordam?
[Os alunos afirmam concordar com a afirmação do aluno A1]
Professora: E na expressão de baixo?
A1: Tem que ser no máximo até 100, inclusive.
Professora: Se fosse $f(11)$ quanto é que dava só olhando para o enunciado?
[Os alunos afirmam dar 15,6€ e explicam os cálculos feitos]
Professora: Usando a resolução do A1 como é que fariam? Onde é que está o 11 aqui [apontando para a condição de cada um dos ramos]?
A1: Fazemos aqui 10 [aponta para a primeira expressão] e 1 aqui [aponta para a segunda expressão].
Professora: Fazemos aqui porquê?
A1: Porque aqui é até 10.
Professora: Mas 11 não é maior que 10 [aponta para a condição da segunda expressão]?
A1: Sim, mas aqui é até 10.
Professora: Mas assim estás a somar duas expressões. E acham que é isso?
Alunos: Não.
A3: Eu acho que só fazíamos na segunda expressão, porque está definida para valores de x superiores a 10, como o 11.
A1: Mas não se pode fazer $6 + 11 \times 0{,}75$. Se calhar a expressão está incorreta.
Professora: Alguém consegue arranjar uma expressão que a partir de $10m^3$ esteja sempre correta?
[O aluno A22 acena com a cabeça]
Professora: Então A22 diz-me lá o que pensaste. E como é a partir de $10\ m^3$, vamos 'esquecer' a expressão de cima.
A22: Fiz $1{,}60 \times (x - 10)$.
Professora: Porquê $(x - 10)$?
A22: Porque são $10m^3$e nós só queremos calcular os m^3 a partir de $10\ m^3$.
Professora: Ok. Concordam?
[Os alunos acenam com a cabeça, concordando com o colega de turma]

A22: Mais 13,50€. Porquê? Porque são 6€ do contador mais 7,5€ que é o preço de $10\ m^3$de água.
Professora: Perceberam de onde é que saiu este 7,5?
Alunos: Sim, $0{,}75€ \times 10$.
[Os alunos continuam a colocar perguntas, de forma a validar as expressões]
(...)
Professora: Concordam com o A1? Se fosse 8 pegavam na expressão de cima?
Alunos: Sim.
Professora: E se fosse 13?
Alunos: Na expressão de baixo.
Professora: Então qual era o problema da expressão apresentada pelo A1?
Alunos: Ele usava as duas expressões, não tinha uma expressão para cada caso.

Durante a discussão sobre a alínea 1.3., a professora procurou que os alunos percebessem que a resolução apresentada no quadro estava errada e que, através das minhas perguntas, identificassem os erros dessa resolução. Para averiguar se a turma estava a acompanhar o raciocínio dos colegas que estavam a intervir e compreender o raciocínio destes, colocou dez perguntas de inquirição. Para testar os conhecimentos dos alunos, formulou duas perguntas de confirmação. No final da discussão, colocou três perguntas de focalização, principalmente para focar a atenção dos alunos nas condições e no cálculo de valores que os levasse a perceber o erro da resolução do colega. No total, ao longo deste diálogo, foram colocadas sete perguntas de focalização.

Os alunos deram oito explicações, seis respostas curtas e três justificações. As explicações estão, principalmente, relacionadas com a explicação das estratégias utilizadas, enquanto as justificações estão relacionadas com a razão para tais estratégias, bem como para determinadas ideias como, por exemplo, a soma de 13,50€ como resultado do preço do contador e do preço a pagar por $10\ m^3$ de água.

Para explicar aos alunos o que é e como se define uma função definida por ramos, a professora utilizou a alínea 1.3. para construir uma função definida por ramos. Depois de os alunos terem definido duas expressões algébricas, uma para o consumo de água até $10\ m^3$ e uma para o consumo de água superior a $10\ m^3$, fez algumas perguntas para construir a expressão algébrica correta da função definida por ramos em questão.

Professora: No enunciado desta alínea pede-nos que definamos a função f algebricamente, mas assim [apontando para o quadro] temos duas funções, cada uma com a sua expressão. Quando vocês tinham, por exemplo, $x + 1 = 0$ e $x + 3 = 0$, como é que escreviam isso em linguagem matemática?
A10: $x + 1 = 0\ \wedge$ (um v virado para baixo) $x + 3 = 0$.
[Os restantes alunos respondem o mesmo que o colega de turma]
Professora: Ok. Faziam assim. Mas nós podíamos representar este 'e' de outra maneira. Lembram-se como é que se pode fazer isso?

A4: Com um sistema.

Professora: Ok, punham uma chaveta e escreviam as expressões [acompanha a explicação no quadro]. Como é que vocês liam isto [apontando para a resolução da alínea 1.3. apresentada no quadro]?

A6: $f(x) = 6 + 0{,}75x \ se \ 0 \leq x \leq 10$ e $f(x) = 1{,}60x - 2{,}5 \ se \ 10 < x \leq 100$.

Professora: Exatamente. E como é que chamamos a isto [apontando para as condições de cada expressão]?

Alunos: Condições.

Professora: Ok. Então, não temos que acrescentar nada no sistema para sabermos que expressão usar da função?

Alunos: As condições.

A6: Professora, podemos mesmo escrever ‘se’ ao pôr as condições no sistema?

Professora: Sim, podem escrever ‘se’ ou pôr uma vírgula, como preferirem. Outra pergunta: Só podemos representar as condições desta maneira?

A23: Podemos usar os intervalos.

Professora: Como assim?

A23: Podemos pôr $x \in [0{,}10]$ [exemplifica com os braços].

Professora: Concordam com o A23?

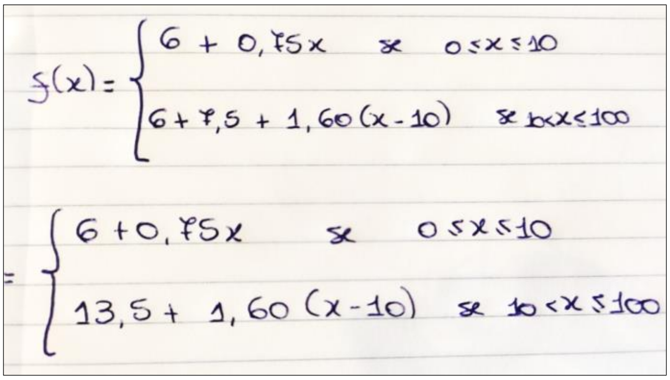
Alunos: Sim.

Professora: Os intervalos podem ser fechados, no caso da condição de cima?

Alunos: Sim.

Após esta discussão, e em grupo-turma, a função f foi definida da seguinte forma:

Figura 22: Resolução da alínea 1.3. da Tarefa 2 em grupo-turma



No momento da aula transcrito acima, a professora colocou cinco perguntas de confirmação, duas perguntas de focalização e duas perguntas de inquirição. As perguntas de confirmação foram as mais utilizadas, principalmente, para testar os conhecimentos das aulas e, simultaneamente, encaminhar o seu raciocínio. As duas perguntas de focalização foram utilizadas com o intuito de focar a atenção dos alunos nas condições das expressões, ou seja, na partição do domínio de cada ramo da função definida por ramos. As perguntas de inquirição foram utilizadas apenas para saber se os alunos concordavam com o colega e para compreender o raciocínio do aluno A23 quando este se referiu a usar intervalos para representar as condições, uma vez que o aluno podia estar-se a referir a intervalos, mas a pensar em representá-los de outra maneira.

As respostas curtas foram as que mais se evidenciaram, tendo sido formuladas oito respostas curtas e apenas uma explicação. O facto das perguntas de confirmação, que foram as perguntas que mais se destacaram, terem o objetivo de testar os conhecimentos adquiridos nas aulas, pode ser uma razão para o facto da maioria das respostas dos alunos serem respostas curtas, uma vez que foram respostas em que apenas se invocaram conceitos ou cálculos.

Relativamente à alínea 1.4. da Tarefa 2, como referido, os alunos ainda não tinham sido confrontados com funções definidas por ramos antes desta aula. A professora apercebeu-se que os alunos estavam a ter algumas dificuldades na compreensão da definição de função definida por ramos. Para colmatar tais dificuldades, optou por alterar o que tinha planeado para a alínea 1.4., na qual é pedido para representar graficamente uma função definida por ramos, e perguntar aos alunos como é que se podia representar a função definida no quadro, de forma a promover a troca de ideias entre os alunos.

Professora: Como é que acham que se pode representar graficamente esta função?
A4: É preciso uma tabela... um referencial.
Professora: Sim, podemos já desenhar o referencial cartesiano. Mas antes disso, que tipos de funções são estas?
Alunos: Funções afins.
Professora: Porquê?
Alunos: [Os gráficos] Não passam no zero e escreve-se $ax + b$.
(...)
Alunos: É o y que depende do x.
Professora: Qual é a variável independente então?
Alunos: O metro cúbico.
(...)
Professora: E o que precisamos mais?
Alunos: Marcar os pontos.
A5: Ali, no eixo do y podemos marcar o 6. O preço mínimo vai ser 6.
Professora: O A5 diz que podemos marcar o ponto $(0{,}6)$. Concordam?
Alunos: Sim.
Professora: E porque é que podemos marcar o ponto $(0{,}6)$?
A4: Porque é o preço do contador.
A18: Quando não consumimos água, pagamos na mesma o contador.
Professora: E agora, A5?
A5: E agora o preço vai por aí adiante, é sempre a subir até chegar a $x = 100$.
Professora: E então qual é o preço máximo que o Inácio paga?
A5: Substituímos por 100.
Professora: Por 100? Onde é que substituímos, se temos duas expressões?

A5: Sim. Mas só precisamos de utilizar a expressão de baixo, porque é para substituir por 100 e unir os pontos.

Professora: Temos duas expressões, definidas para cada subconjunto do domínio da função f.

A1: Ah, temos duas expressões diferentes e duas retas diferentes.

A1: Podemos já traçar a reta da primeira expressão porque já sabemos a ordenada na origem.

Professora: Já sabemos a ordenada na origem e já marcamos esse ponto no gráfico. E depois, como traçamos o segmento de reta?

A1: Só precisamos de outro ponto e unimos os dois pontos.

Professora: E vocês não sabem outro ponto? Olhem para a expressão e para a condição da expressão.

A18: Temos que determinar pela condição.

Professora: O intervalo vai até que valores?

A18: Até 10. É só substituir então.

(...)

Para a representação gráfica da função definida por ramos, a professora precisou que os alunos percebessem que, como tínhamos duas expressões algébricas diferentes e definidas em subconjuntos do domínio disjuntos, teriam que ser traçados dois segmentos de reta. Para tal, começou por colocar cinco perguntas de inquirição. De seguida, ao perceber que os alunos estavam a ter boas ideias, mas não as estavam a conseguir organizar de forma a proceder à representação gráfica, formulou cinco perguntas de confirmação. Estas perguntas serviram para, simultaneamente, testar o conhecimento dos alunos e encaminhar o seu raciocínio. As três perguntas de focalização colocadas tiveram o objetivo de focar a atenção do aluno em alguns pormenores da expressão algébrica da função definida por ramos, para que estes pormenores auxiliassem na representação gráfica.

As respostas dos alunos foram, maioritariamente, respostas curtas – onze. Apenas foram formuladas cinco explicações. Destas explicações, três delas surgiram de forma espontânea, não tendo sido colocadas perguntas do tipo “porquê?” ou “como?”. Apenas uma das explicações surgiu como resposta a uma pergunta de inquirição, em que era perguntado à turma a razão para terem afirmado tratar-se de funções afins.

Nesta fase da aula, a par das perguntas de inquirição, que predominaram, as perguntas de focalização também se evidenciaram. As perguntas de confirmação foram as menos utilizadas. Através das perguntas de inquirição, a professora procurou averiguar se os alunos concordavam com algumas ideias dos colegas e porquê, compreender o modo de pensar dos alunos e como estavam a organizar o seu pensamento. Por sua vez, as perguntas de focalização permitiram-lhe encaminhar o pensamento do aluno, fazendo-o seguir o percurso de raciocínio que considerava mais adequado. Estas perguntas foram utilizadas como uma estratégia para esclarecer as dúvidas dos alunos e redirecionar o seu raciocínio. As perguntas de confirmação tiveram como principal propósito testar o conhecimento dos alunos e realçar alguns aspetos matemáticos como, por exemplo, o tipo de funções em estudo.

Síntese

Da análise da interação entre e com os alunos resultante da resolução da tarefa proposta, nas diferentes fases que organizaram a aula, constata-se que surgiram mais perguntas na fase de discussão do que nas restantes duas fases da aula. Quase metade das perguntas surgiram na fase de discussão sobre a resolução da tarefa.

Durante a fase de introdução da tarefa, surgiram poucas perguntas e todas elas tiveram como principal objetivo ajudar na interpretação do enunciado. Nesta fase os alunos não colocaram dúvidas, afirmando ter percebido todas as informações do enunciado. No entanto, na fase de exploração da tarefa, as suas dificuldades com a interpretação do enunciado foram notórias. Neste sentido, considero que a fase de introdução da tarefa deveria ter sido mais rica e incisiva na medida em que deveriam ter sido formuladas mais perguntas e essas perguntas deveriam ter sido direcionadas. Tais perguntas permitiriam que a professora se certificasse que todos os alunos, e principalmente aqueles que revelaram mais dificuldades, tinham interpretado corretamente o enunciado.

Na fase de exploração da tarefa, os alunos colocaram muitas dúvidas e expuseram as suas dificuldades. Como a maioria das dificuldades estavam relacionadas com uma incorreta interpretação do enunciado, as perguntas formuladas foram, essencialmente, no sentido de os questionar sobre a sua interpretação e ajudá-los a reinterpretar o enunciado, sem diminuir o nível de exigência cognitiva da tarefa.

Por último, na fase de discussão em grupo-turma, surgiram mais perguntas. Os alunos estavam mais abertos para a discussão e troca de ideias. Esta atitude por parte dos discentes permitiu que a professora tirasse o máximo proveito das perguntas. Como nesta fase da aula os alunos estavam mais concentrados nas resoluções dos colegas e no que estava a ser feito e dito no quadro, a sua intervenção foi muitas vezes no sentido de conduzir a discussão entre os diferentes intervenientes. As perguntas de focalização permitiram-lhe, muitas vezes, direcionar a discussão para os aspetos que considerava mais importantes. Enquanto as perguntas de inquirição foram fundamentais para a promoção da troca de ideias. Na Tabela 11, é apresentado o número de perguntas de cada tipo colocadas durante os diferentes diálogos apresentados relativamente à Tarefa 1.

Tabela 11: Frequência de cada tipo de perguntas colocadas pela professora

<table>
<tr><th>Tipo de pergunta</th><th>Fase da aula</th><th>Indicador</th><th>Finalidade</th><th>Frequência</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Confirmação</td><td>Introdução da Tarefa</td><td>“o que é que isso quer dizer?”</td><td rowspan="3">Testar o conhecimento dos alunos</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Exploração da Tarefa</td><td>“como se chama a isso?”</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Discussão da Tarefa</td><td>“que tipos de funções são estas?”</td><td>12</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Focalização</td><td>Introdução da Tarefa</td><td>“O que é que nós sabemos do pagamento do contador da água?”</td><td rowspan="3">Encaminhar o raciocínio dos alunos</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Exploração da Tarefa</td><td>“cada expressão não está apenas definida para intervalos diferentes?”</td><td>17</td></tr>
<tr><td>Discussão da Tarefa</td><td>“e vocês não sabem outro ponto?”</td><td>17</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Inquirição</td><td>Introdução da Tarefa</td><td>“toda a gente concorda com o A4?”</td><td rowspan="3">Perceber o modo como os alunos estavam a raciocinar</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Exploração da Tarefa</td><td>“e como é que vais saber quanto é que ela gastou agora?”</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Discussão da Tarefa</td><td>“concordam?”</td><td>18</td></tr>
<tr><td colspan="4">Total</td><td>90</td></tr>
</table>

As perguntas de focalização foram as mais utilizadas, seguidas das perguntas de inquirição. As perguntas de confirmação foram as menos utilizadas, com uma diferença substancial das perguntas de focalização. Apesar de ter antecipado algumas perguntas de inquirição para colocar durante a aula (PA1, 2021), estas acabaram por não ser utilizadas. Tal deveu-se ao facto de a professora ter optado por assegurar que todos os alunos compreendiam e adquiriam os conhecimentos básicos do tópico em estudo. Como a turma tem níveis de desempenho muito díspares, a professora considerou que as perguntas de inquirição planeadas não teriam o efeito pretendido. No entanto, colocou mais perguntas de focalização do que na aula anterior, o que revela uma evolução da sua prática pedagógica.

Relativamente às respostas dos alunos, as frequências de cada tipo de resposta são apresentadas na Tabela 12.

Tabela 12: Frequência de cada tipo de resposta dos alunos

Tipo de resposta	Frequência	Frequência (%)
Resposta curta	53	54,6%
Explicação	29	29,9%
Justificação	3	3,1%
Pergunta	12	12,4%
Desafio	-	-
Total	97	

Pela análise da Tabela 12, verifica-se uma predominância das respostas curtas, que representam 54,6% das respostas dadas. As explicações e as perguntas representam 29,9% e 12,4%, respetivamente, das respostas, sendo que as justificações apenas representam 3,1% das respostas formuladas pelos alunos.

3.1.2.2. A pergunta do professor na resolução dos alunos

Após a fase de exploração da tarefa, as resoluções dos alunos da Tarefa 2 foram recolhidas e analisadas de acordo com o tipo de representação utilizada, o tipo de justificações e o nível de compreensão da tarefa.

Relativamente à alínea 1.1., as frequências de cada tipo de representação e justificação nas produções recolhidas para a Tarefa 2, quando existente, são apresentadas na Tabela 13.

Tabela 13: Frequência dos tipos de resposta dos alunos à alínea 1.1. da Tarefa 2 ($n = 27$)

Tipo de representação			Justificação			
			Sim			
Verbal	Icónica	Simbólica	PM	R	EP	Não
10	–	27	25	–	4	2

PM – Procedimentos matemáticos; R – Regra; EP – Explicação própria

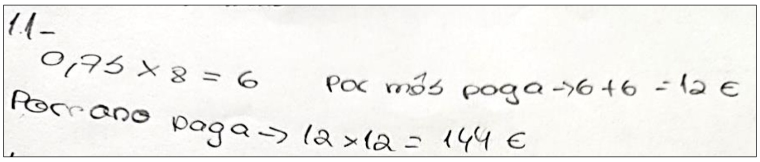
Da observação da Tabela 13, conclui-se que a maioria dos alunos recorreu à representação simbólica para resolver a alínea 1.2. Apesar de terem recorrido, maioritariamente, à representação simbólica, vários alunos utilizaram a linguagem verbal para complementar a sua resolução ou para a organizar. Dos alunos que justificaram a sua resposta, a maioria apenas transcreveu os procedimentos matemáticos efetuados para tal. Apenas quatro alunos recorreram simultaneamente à transcrição dos procedimentos matemáticos e à linguagem natural para justificarem a sua resposta.

Quer a alínea 1.1. como a alínea 1.2. da Tarefa 1, exigiam que o aluno interpretasse as informações do enunciado, percebendo que o preço a pagar por metro cúbico depende dos metros cúbicos consumidos, mas não exigiam que soubesse o que é uma função definida por ramos ou como esta se representa algébrica ou graficamente. Estas alíneas requeriam que os alunos usassem conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente e a capacidade de interpretação da informação do enunciado.

Relativamente à alínea 1.1. os alunos, na sua maioria, não revelaram dificuldades, tanto durante a discussão como ao longo do trabalho autónomo, tendo resolvido esta questão corretamente.

A Figura 23 ilustra uma resolução da alínea 1.1., na qual os dois tipos de representação foram utilizados.

Figura 23: Resolução da alínea 1.1. da Tarefa 2 do aluno A19

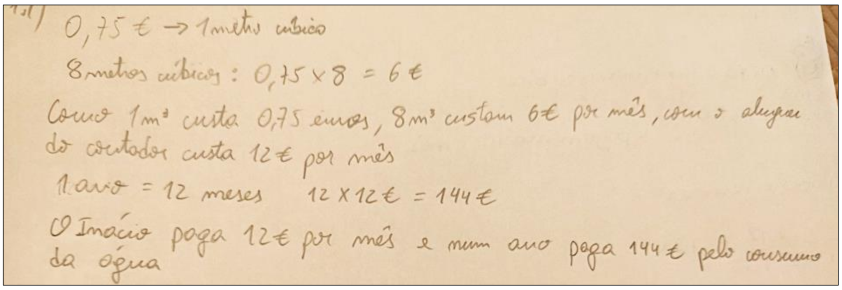


1.1-
0,75 × 8 = 6   Por mês paga → 6+6 = 12 €
Por ano paga → 12×12 = 144 €

Na resolução apresentada, o aluno A19 começou por calcular o preço a pagar por $8\ m^3$ de água num mês, somou o preço do aluguer do contador e concluiu que, num mês, o Inácio tem que pagar 12€ e, como se queria determinar o preço a pagar num ano, multiplicou por 12, obtendo 144€. Este aluno A19 procurou justificar a sua resposta através dos cálculos efetuados, tendo recorrido à linguagem verbal para organizar a sua resolução e explicitar o significado de cada procedimento.

Embora poucos, alguns alunos apresentaram um pequeno texto em que procuraram explicar o seu raciocínio. A resolução do aluno A9 ilustra uma destas resoluções (Figura 24).

Figura 24: Resolução da alínea 1.1. da Tarefa 2 do aluno A9



1.1) 0,75 € → 1 metro cúbico
8 metros cúbicos: 0,75 × 8 = 6 €
Como 1m³ custa 0,75 euros, 8m³ custam 6€ por mês, com o aluguer do contador custa 12€ por mês
1 ano = 12 meses   12 X 12€ = 144€
O Inácio paga 12€ por mês e num ano paga 144€ pelo consumo da água

Nesta resolução, o aluno A9 recorreu à linguagem verbal e à representação simbólica para explicitar o seu raciocínio e o modo como procedeu para determinar o preço que o Inácio paga pelo consumo de água. Para justificar a sua resposta, este aluno apresentou um pequeno texto, em que, por palavras suas, procurou explicar cada 'passo' do seu raciocínio.

Na alínea 1.2. era pedido que os alunos, sabendo que a Isabel paga mais 15€ que o Inácio por mês, determinassem quanto é o consumo de água da Isabel por mês. A turma revelou dificuldades, principalmente, na compreensão de que o contador da água é pago tanto pela Isabel, como pelo Inácio. Neste caso, uma resolução foi considerada correta quando o aluno percebe que a Isabel gasta mais de $10\ m^3$ porque paga mais de 7,5€, e calcula o excedente de $10\ m^3$ de água gasta.

Tabela 14: Frequência dos tipos de resposta dos alunos à alínea 1.2. da Tarefa 2 ($n = 27$)

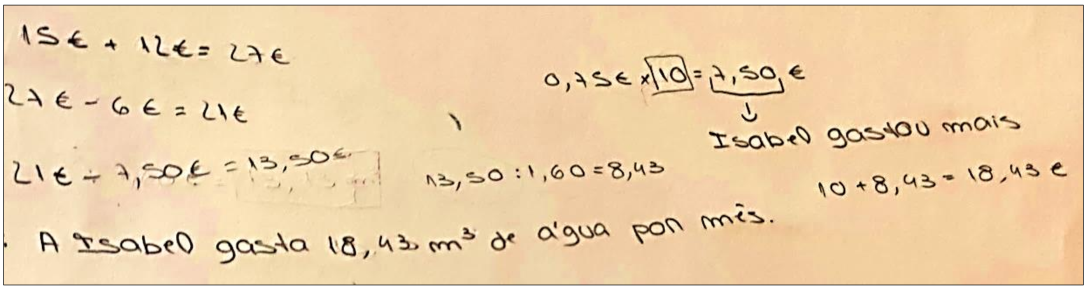
Tipo de representação			Justificação			
			Sim			
Verbal	Icónica	Simbólica	PM	R	EP	Não
8	4	23	24	–	3	2

PM – Procedimentos matemáticos; R – Regra; EP – Explicação própria

Grande parte dos alunos, recorreu à representação simbólica para resolver a alínea 1.2. As representações icónicas e através da linguagem verbal são menos evidenciadas, mas foram utilizadas por oito e quatro alunos, respetivamente. As justificações elaboradas pelos alunos foram, principalmente, através da transcrição dos procedimentos matemáticos efetuados, sendo que apenas três alunos recorreram à linguagem natural para justificar as estratégias que utilizaram.

A Figura 25 ilustra uma resolução em que foi utilizada a representação simbólica.

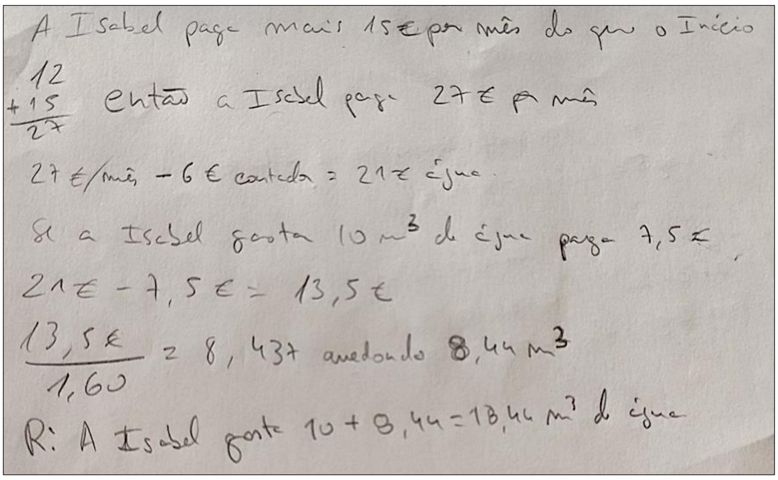
Figura 25: Resolução da alínea 1.2. da Tarefa 2 do aluno A18



Na resolução apresentada, o aluno A18 indicou que a Isabel gastou mais de $10\ m^3$. Depois, calculou o preço pago pela Isabel para o consumo de água que excedeu os $10\ m^3$. De seguida, dividiu esse valor por 1,60€, tendo determinado que a Isabel gastou $8{,}48\ m^3$ a mais, além dos $10\ m^3$. Este aluno recorreu à representação simbólica para apresentar os cálculos efetuados e, assim, justificar a sua resposta. A linguagem verbal apenas foi utilizada na resposta que conclui a resolução e, portanto, não foi considerada como uma representação utilizada pelo aluno A18.

Outros alunos recorreram à representação verbal para complementar a representação simbólica e sustentar o seu raciocínio. A Figura 26 exemplifica uma dessas resoluções.

Figura 26: Resolução da alínea 1.2. da Tarefa 2 do aluno A22

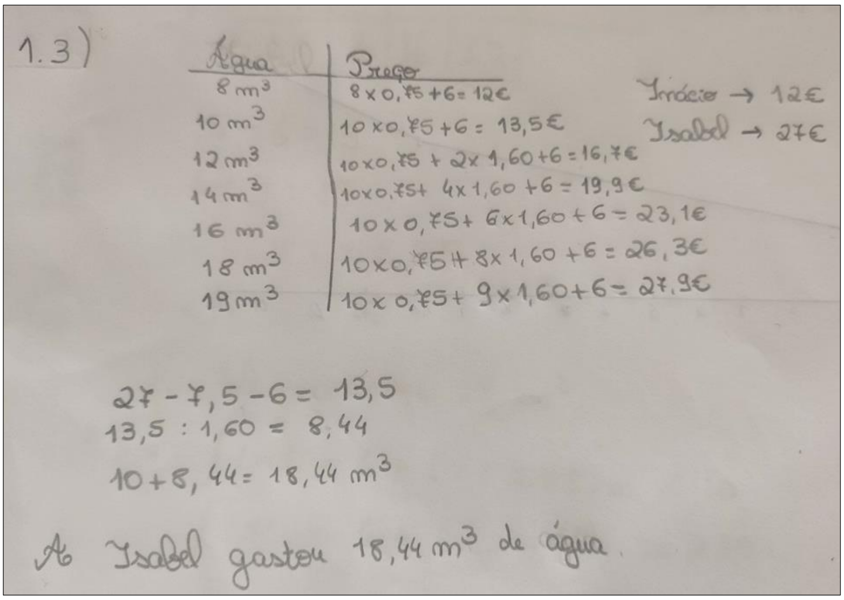


O aluno A22, além de ter recorrido à representação simbólica para apresentar os cálculos subjacentes ao seu raciocínio, utilizou a linguagem verbal para explicar, por palavras suas, o seu pensamento e como é que tinha organizado a sua estratégia. Através da sua resolução e, em particular, do pequeno texto que elaborou, é possível inferir que o aluno compreendeu a tarefa, fazendo uma leitura acertada de todas as informações do enunciado.

Alguns alunos, ainda que poucos, utilizaram a representação icónica para os auxiliar na resolução da alínea 1.2. Todos os alunos que recorreram à representação icónica, fizeram-no porque utilizaram a estratégia de tentativa e erro e optaram por construir tabelas para organizar os dados.

A Figura 27 ilustra uma das resoluções em que a representação icónica foi utilizada.

Figura 27: Resolução da alínea 1.2. da Tarefa 2 do aluno A13



O aluno A13 recorreu à representação icónica, construindo uma tabela com a água consumida pela Isabel e o preço a pagar correspondente, para determinar a quantidade de água gasta pela Isabel. Por tentativa e erro percebeu que a Isabel tinha que ter gasto entre 18 metros cúbicas e 19 metros cúbicos de água. Depois de ter percebido que a Isabel gastou mais de 10 metros cúbicos de água, abandonou a estratégia de tentativa e erro e calculou o preço que a Isabel pagou pela quantidade de água que excedeu esses metros cúbicos. A estratégia do aluno A13 podia ter sido uma ótima estratégia caso a quantidade de água gasta pela Isabel fosse um número inteiro. No entanto, tal não era garantido no enunciado, fazendo com que esta estratégia levasse a uma resposta imprecisa.

Na alínea 1.3. era pedido que os alunos definissem uma expressão algébrica para a função que ao metro cúbico de água consumido fizesse corresponder o preço a pagar no final do mês. Embora os alunos ainda não tivessem sido confrontados com funções definidas por ramos, procuraram resolver a alínea em questão com os conhecimentos adquiridos até então. Nenhum aluno conseguiu apresentar a resposta matemática pretendida, mas vários alunos revelaram as suas potencialidades e apresentaram resoluções próximas do que era pretendido. A Tabela 15 reflete a frequência de resoluções em que se evidenciam as representações icónicas, simbólicas ou as representações através da linguagem verbal, bem como a frequência de resoluções cuja justificação, quando existente, foi feita através de procedimentos matemáticos, da referência a uma regra ou através de uma explicação própria.

Tabela 15: Frequência dos tipos de resposta dos alunos à alínea 1.3. da Tarefa 2 ($n = 27$)

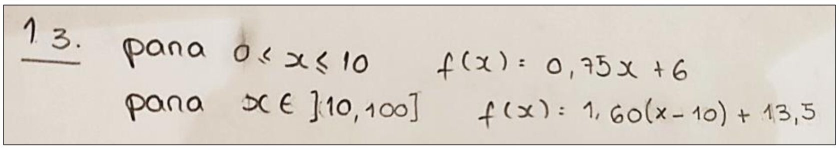
Tipo de representação			Justificação			
			Sim			
Verbal	Icónica	Simbólica	PM	R	EP	Não
–	–	17	10	–	–	7

PM – Procedimentos matemáticos; R – Regra; EP – Explicação própria

Nesta alínea, os alunos apenas recorreram à representação simbólica. Relativamente às justificações, apenas dez alunos justificaram as suas resoluções, sendo que o fizeram através de transcrições dos procedimentos matemáticos. Note-se que, nesta alínea, não se esperava, pelo que é pedido na questão e pelo modo como está formulada, que os alunos justificassem os seus raciocínios. Por isso, as respostas em que os alunos apresentavam todos os cálculos efetuados para chegar à expressão da função definida por ramos foram consideradas justificações por transcrição de procedimentos matemáticos.

Vários alunos apresentaram a função definida por ramos através dos seus ramos ou até utilizando linguagem natural ao invés de linguagem matemática, como ilustra a Figura 28.

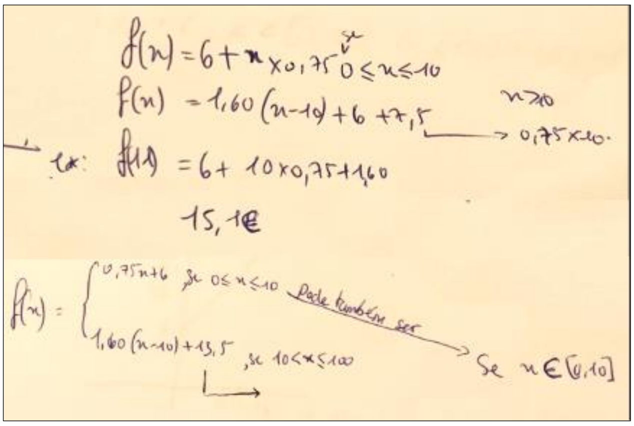
Figura 28: Resolução correta da alínea 1.3. da Tarefa 2 do aluno A6



Como se constata, o aluno A6 apresentou duas expressões corretas, cada uma correspondente a um ramo da função em questão, e as condições respetivas. Durante o trabalho autónomo, este aluno interpelou a professora para se certificar que a sua resolução estava correta. Como o aluno não tinha colocado as condições de cada ramo, a professora colocou-lhe algumas perguntas de focalização no sentido de o fazer refletir e compreender que, sem as mesmas, não saberíamos que expressão utilizar. Estas perguntas parecem ter ajudado o aluno A6 a melhorar a sua resolução. Aliás, o aluno mostrou ter compreendido o enunciado uma vez que parece ter percebido o significado de cada uma das condições, escrevendo-as corretamente e utilizando duas formas de expressar os intervalos em que cada uma das expressões estava definida. Nesta resolução, o aluno recorreu à representação simbólica para definir a função definida por ramos, mas não explicitou os procedimentos efetuados para definir essa função como, por exemplo, explicar que obteve 13,5 pela soma de 7,5€, que corresponde ao custo pelo consumo de $10\ m^3$, com 6€, que corresponde ao preço do aluguer do contador.

A Figura 29 ilustra outra resolução da alínea 1.3.

Figura 29: Resolução da alínea 1.3. da Tarefa 2 do aluno A#



Na resolução apresentada na Figura 29, o aluno A# definiu algebricamente a função definida por ramos. O aluno explicitou que 7,5€ corresponde à determinação do preço a pagar pelo consumo de $10\ m^3$ de água. O aluno completou ainda a sua resolução com um exemplo, a determinação do preço a pagar pelo consumo de $11\ m^3$ de água.

A alínea 1.4. pedia que os alunos esboçassem um gráfico que traduzisse a função definida anteriormente. Vários alunos não responderam a esta alínea por, segundo os mesmos, não terem tido tempo para a resolver e sentirem-se inseguros quanto ao que era pedido (GVA2). Apesar da maioria dos alunos não ter resolvido a alínea em questão, alguns alunos apresentaram os seus gráficos.

A Tabela 11 explicita a frequência de representações e justificações de cada tipo que emergem das produções dos alunos na alínea 1.4.

Tabela 16: Frequência dos tipos de resposta dos alunos à alínea 1.4. da Tarefa 2 ($n = 27$)

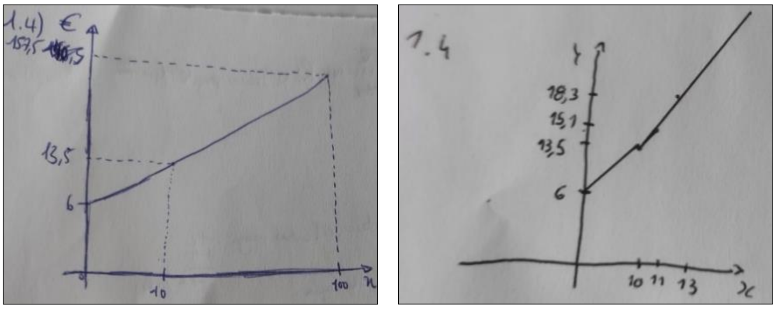
Tipo de representação			Justificação			
			Sim			
Verbal	Icónica	Simbólica	PM	R	EP	Não
–	11	–	–	–	–	11

PM – Procedimentos matemáticos; R – Regra; EP – Explicação própria

Para esta alínea, os alunos recorreram exclusivamente à representação icónica através do esboço do gráfico da função definida por ramos. Uma resposta foi considerada justificada quando o aluno apresentou uma explicação, seja através de linguagem matemática ou natural, dos principais procedimentos efetuados para determinar esboçar o gráfico, isto é, a determinação das coordenadas dos pontos utilizados para traçar cada um dos segmentos de reta.

A Figura 30 ilustra as respostas dos alunos A6 e A24, respetivamente.

Figura 30: Resolução da alínea 1.4. da Tarefa 2 dos alunos A26 e A24



O aluno A26 apresentou um gráfico correto e com rigor matemático. O aluno explicitou as variáveis de cada eixo ordenado e também o mínimo e o máximo, bem como o minimizante e o maximizante da função.

O aluno A24, embora tenha esboçado corretamente o gráfico que traduz a função definida por ramos em questão, não apresenta rigor matemático. Note-se que, no enunciado, é indicado que os habitantes só podem consumir, no máximo, $100\ m^3$ de água. Por isso, o gráfico tem como domínio o intervalo $[0, 10]$ e não $[0, +\infty[$.

Durante o trabalho autónomo, o aluno expôs algumas dúvidas relativamente ao esboço do gráfico, como, por exemplo, não saber se tinha que esboçar um ou dois gráficos. Para esclarecer esta dúvida, a professora colocou várias perguntas de focalização. Pela resolução apresentada pelo aluno, posso inferir que estas perguntas o podem ter ajudado a perceber que só deveria esboçar um gráfico.

O aluno A24 revelou também dúvidas relativamente aos subdomínios em que cada expressão algébrica estava definida. Mais uma vez, a professora recorreu às perguntas de focalização para que o aluno compreendesse que, como tinha dois intervalos definidos – um para cada expressão algébrica – então, teria que ter isso em consideração no esboço do gráfico. Apesar da professora ter inferido que o aluno tinha percebido, a sua resolução mostra que o aluno não atendeu aos intervalos definidos ou não percebeu o seu significado. Por isso, considero que teria sido importante certificar-me que o aluno tinha percebido o significado de cada um dos intervalos. Para tal, poderia utilizar perguntas de confirmação e até algumas perguntas de inquirição, que desafiassem o seu raciocínio e permitissem que a professora o percebesse melhor.

Síntese

As representações mais utilizadas durante a resolução da Tarefa 2 foram as representações simbólicas. A natureza da tarefa pode explicar este facto, uma vez que não promovia o recurso a diferentes representações, seja pelo tipo de questões que a compõem, como pelo seu contexto.

Relativamente às justificações, os alunos não justificaram nenhuma das suas estratégias com a referência a uma regra ou definição, o que era plausível, visto que os alunos ainda não tinham estudado funções definidas por ramos. A maioria das justificações dos alunos estão relacionadas com a transcrição de procedimentos matemáticos. As justificações através da utilização das suas próprias palavras também foram encontradas ao longo da análise das produções dos alunos, ainda que com menor frequência. As justificações formuladas pelos alunos ou até o facto de não formularem justificações ou não fundamentarem as suas respostas podem ser reveladoras das dificuldades que alguns alunos em se explicitar, justificar e expressar de forma clara, embora não tenha evidências para o afirmar.

As produções dos alunos revelam as suas dificuldades e as suas potencialidades. As dificuldades dos alunos revelaram-se, principalmente, ao nível do rigor matemático e da capacidade de interpretação do enunciado. Para colmatar as dificuldades na interpretação do enunciado, as perguntas parecem ter tido um papel fundamental, uma vez que vários alunos que me interpelaram durante o trabalho autónomo com dúvidas a este nível, mostraram, através das suas produções, terem conseguido ultrapassá-las durante a resolução da Tarefa 2. No entanto, ao nível do rigor matemático, a professora não fez muitas perguntas relacionadas com o rigor matemático. Tal fez-se notar nas produções dos alunos, que tinham falhas nos esboços dos gráficos, por exemplo. O facto de ter sido um aspeto mais trabalhado durante a fase de discussão da tarefa, não permitiu perceber o papel que as perguntas poderiam ter tido na superação destas dificuldades, se tivessem sido feitas ao longo da fase de exploração da tarefa. Por sua vez, as potencialidades dos alunos revelaram-se, sobretudo, ao nível da capacidade de desenvolvimento do raciocínio e de consolidação de conhecimentos. A formulação de perguntas de inquirição e confirmação durante o trabalho autónomo, permitiu que os alunos trabalhassem as suas capacidades de raciocínio, uma vez que, com estas perguntas, a professora procurou não responder às dúvidas dos alunos, mas dar-lhes os instrumentos necessários para que conseguissem fazê-lo sozinhos ou com a ajuda de outros colegas.

As produções dos alunos também tiveram impacto no modo de condução da fase de discussão da tarefa. Como vários alunos não responderam à alínea 1.4. e mostraram dúvidas na alínea 1.3., a professora procurou formular perguntas que lhe permitissem tirar todo o proveito da discussão – testar conhecimentos, direcionar o pensamento dos alunos e fazê-los pensar e confrontar ideias.

3.1.3. Inequações com módulos

Na aprendizagem do tópico 'Resolução de inequações com módulos', os alunos começaram por, com a resolução da Tarefa 3, relembrar, através de um raciocínio abdutivo, significados da representação numérica e da resolução analítica de inequações com módulos, conhecimentos já adquiridos no 9.º ano de escolaridade, para, de seguida, os generalizar.

Tarefa 3: Resolução gráfica de inequações com módulos

1.1. Preenche a seguinte tabela:

	Significado	Representação na reta numérica	Resolução analítica
$\|x\| < 2$			
$\|x\| > 1$			

1.2. Para $k \in \mathbb{R}$, discute as soluções da inequação $|x| < k$.

1.3. Para $k \in \mathbb{R}$, discute as soluções da inequação $|x| > k$.

3.1.3.1. As perguntas do professor na aula de ensino exploratório

Introdução da tarefa

No início da aula, a professora entregou a Tarefa 3 aos alunos, que tiveram dois minutos para a ler e interpretar. Após a leitura do enunciado, interpelou-os de forma a averiguar se estes tinham percebido o que era pedido em cada uma das alíneas. Neste sentido, perguntou-lhes o que entendiam por significado, representação na reta numérica e resolução analítica.

Professora: O que nos pede aí?! Para preenchermos a tabela com o significado, a representação na reta numérica e a resolução analítica. O que vos parece ser o significado?

A5: Acho que é os valores de x positivos...

Professora: Não quero que me digam a resposta, quero que me expliquem o que é pedido quando nos referimos a significado.

A5: É para dizer como lemos cada uma das expressões.

A19: Interpretar.

Professora: Ok, vamos tentar ler, perceber, indicar como interpretamos cada uma das inequações. Perceberam?

Alunos: Sim.

Professora: E a representação na reta numérica?

A22: Tentar resolver as inequações através da representação na reta numérica.

[Os alunos começam a explicar e a professora interrompe]

Professora: Tentar representar as soluções destas inequações na reta numérica. E a resolução analítica?

Professora: Vamos usar o vosso raciocínio e conhecimento para tentar compreender como é que se pode resolver analiticamente inequações com módulos, para obter a mesma solução que obtemos na representação na reta numérica.

Neste excerto de diálogo, a professora apenas recorreu a perguntas de inquirição, uma vez que o seu objetivo com as perguntas colocadas era saber como é que os alunos estavam a interpretar o que era pedido em cada coluna do quadro apresentado. Em síntese, nesta fase da aula, colocou poucas perguntas. As três perguntas de confirmação tiveram como objetivo questionar a turma sobre o que era pedido e, assim, certificar-se que todos tinham percebido a tarefa e o seu objetivo. A única pergunta de inquirição que formulou teve como propósito averiguar se nenhum aluno tinha dúvidas sobre o que era pretendido quando se pedia o significado da inequação.

Relativamente às respostas dos alunos, só se evidenciaram respostas curtas – cinco. O facto de as perguntas colocadas terem tido como propósito verificar se todos os alunos tinham compreendido o que era pedido na tarefa pode ser uma explicação para que a turma não tivesse procurado justificar ou explicar as suas respostas e apenas indicar o que compreenderam do enunciado.

Exploração da tarefa

Após uma breve introdução à tarefa e respetiva interpretação do que era pedido, os alunos prosseguiram para o trabalho autónomo. Nesta fase da aula, a professora circulou pela sala de aula e percebeu que, na sua generalidade, os alunos não estavam a sentir dificuldades no preenchimento do significado de cada uma das expressões apresentadas, o que era previsível uma vez que estes já abordaram o significado de módulo várias vezes ao longo da sua escolaridade. Ainda assim, alguns alunos interpelaram-na no sentido de esclarecer o que estava a ser representado pelo módulo:

A12: O que quer dizer estas duas barras?
Professora: Já falamos disto, mesmo em aulas anteriores.
A12: Eu sei que tem a ver com os números ficam sempre positivos.
Professora: O módulo não é sempre um número positivo, também pode ser zero. Mas porque é que isso acontece?
A12: Não sei, foi assim que inventaram.
Professora: O que é que quer dizer o módulo de um número?
A12: Não sei.
Professora: Pede ajuda a um colega, por exemplo, ao aluno A11. Pergunta-lhe o que é o módulo de um número.
A12: A11, o que é o módulo?
A11: O módulo acho que é a distância de um número à origem.
Professora: Estás-te a referir à distância à origem onde?

A11: Na reta.
Professora: ...numérica. Percebeste, A12?
A12: Sim, já me lembro de termos falado disso.
Professora: E então, se já percebeste, diz-me lá porque é que o módulo é sempre positivo ou zero?
A12: Porque não há distâncias negativas.
Professora: Um exemplo: a distância de 3 a 0 é 3 e a distância de -3 a 0 também é 3 então o módulo de 3 e o módulo de -3 são iguais: são 3.
A12: Sim. Ok.

Neste excerto de diálogo, a professora colocou uma pergunta de inquirição cujo propósito era fazer o aluno refletir sobre a razão para o módulo de um número ser sempre não negativo, na tentativa de que este se recordasse do que foi abordado em aulas anteriores. No entanto, após a verificação de que o aluno A12 não se lembrava do conceito de módulo e apenas tinha decorado que não é negativo, decidiu incentivá-lo a pedir ajuda a um colega. Para acompanhar o diálogo com o colega e certificar-se que ambos percebiam o conceito de módulo e os aspetos subjacentes ao mesmo, colocou três perguntas de confirmação. Estas perguntas permitiram-lhe certificar-se que estes dois alunos tinham percebido que o módulo de um número representa a distância desse número à origem na reta numérica e que, por isso, é um valor sempre não negativo.

Os alunos responderam de forma curta em seis vezes, fizeram duas perguntas e apenas explicaram uma das suas respostas ao longo das suas intervenções. Essa explicação surgiu como resposta à pergunta de um colega, que pretendia perceber qual era o significado de módulo.

Relativamente às alíneas 1.2. e 1.3., apercebeu-se que os alunos estavam a ter dificuldades na sua resolução. Por isso, e como já tinha sido previsto durante a preparação desta aula (P3, 2021), a professora optou por interromper o trabalho autónomo e colocar-lhes algumas perguntas de forma a ajudá-los na construção de uma estratégia de resolução e encaminhar os seus raciocínios.

Professora: Temos $|x| < k$ e pergunta-nos quando é que isto acontece para k pertencente a $\mathbb{R}$. O k pertence a $\mathbb{R}$, ou seja, pode ser qualquer número real. Mas nós temos que estudar o que é que acontece aqui, certo? E como é que podemos dividir os números reais em grandes grupos?
A1: Negativos.
Professora: Os negativos, ok... $k < 0$ e que mais?
Alunos: k maior que 0.
Professora: $k > 0$.
[A professora faz uma pausa]
Professora: E não falta nada?
A1: $k = 0$.
Professora: Se calhar dividir por casos pode ajudar. (...) Ou por exemplo, atribuirmos um valor concreto.

As perguntas que colocou neste momento da aula foram maioritariamente perguntas de focalização, cujo intuito foi o de encaminhar o raciocínio dos alunos e, simultaneamente, focar o pensamento dos alunos nos números reais e na sua possível divisão em subconjuntos. Embora estas perguntas também possam inserir-se na categoria das perguntas de confirmação por permitirem testar conhecimento dos alunos, o seu principal objetivo foi encaminhar o raciocínio deles, auxiliando-os na resolução da alínea em questão. A única pergunta de confirmação formulada teve como objetivo perceber se os alunos estavam a acompanhar o meu raciocínio. Os alunos elaboraram três respostas curtas, talvez pela forma como as perguntas foram colocadas, uma vez que não procurou que os alunos explicassem ou justificassem as suas respostas.

Apesar da professora ter procurado explicar que k podia tomar o valor de um número real qualquer, vários alunos continuaram a demonstrar não ter percebido a alínea 1.2.:

A14: O que é o k? Eu posso escolher qualquer valor para k?
Professora: Não, no enunciado diz que k pertence a que conjunto?
A14: Diz que é um número real.
Professora: Exato. E diz que valor é?
A14: Não.
Professora: O que é diz é "Para $k \in \mathbb{R}$, discute as soluções da inequação". E não é para quaisquer valores de k reais.
A14: Ok. Então não posso ser eu a escolher um número.
Professora: Não, a minha sugestão foi que atribuíssem valores a k para perceberam melhor as soluções da inequação com esses valores. Por isso falei em valores estratégicos. Por exemplo, o $k = 0$, um valor positivo e um valor negativo. Percebeste?
A14: Sim, professora.

Para além destes alunos, outros procuraram encontrar mais estratégias para resolver esta alínea. Atente-se no caso do aluno A6, que já tinha resolvido a alínea 1.2. através de processos exclusivamente analíticos e queria utilizar outra estratégia.

A6: Eu já fiz, mas ouvi a professora a dizer para o A1 fazer graficamente. Como é que se pode fazer graficamente?
Professora: Quando estávamos a estudar os problemas que envolviam a função quadrática e queríamos descobrir para que valores é que o número de bactérias, por exemplo, era menor do que 500, como é que fazíamos graficamente?
A6: Desenhávamos a função quadrática e depois a reta $y = 500$ e víamos onde é que intersetava.
Professora: Desenhavam a parábola, não a função quadrática. E aqui, consegues aplicar uma técnica parecida?
A6: Não sei.
Professora: Sabes representar graficamente $f(x) = |x|$? Já aprendemos isso.
A6: Sim.
Professora: E atribuindo valores a k, como já fizeste, podes traçar o quê?

A6: Retas.

Professora: E assim já consegues estudar as soluções da inequação em qualquer um dos casos e até podes fazer a alínea 1.2. e a alínea 1.3. juntas, se quiseres.

Nestes dois excertos de diálogo, a professora colocou duas perguntas de confirmação e duas perguntas de inquirição. As perguntas de confirmação tiveram como propósito testar o conhecimento do aluno para se certificar que podia prosseguir com a estratégia utilizada para esclarecer a sua dúvida. As perguntas de inquirição serviram para fazer o aluno refletir, no caso do segundo diálogo, e para se certificar que o aluno tinha percebido, no caso do primeiro diálogo. Também colocou três perguntas de focalização, cujo intuito foi o de focar e encaminhar o pensamento do aluno para que compreendesse a resposta às suas dúvidas.

De forma a responderem às perguntas da professora, os alunos elaboraram sete respostas curtas. As duas perguntas formuladas pelos alunos tiveram como objetivo o esclarecimento de dúvidas. Num dos casos, o aluno interrogou a professora para perceber que outra estratégia poderia utilizar para resolver a alínea em questão. Nestes dois diálogos apenas surgem uma explicação como resposta a uma pergunta de confirmação.

Discussão em grupo-turma

Na alínea 1.1. foram apresentadas duas inequações simples com módulos com o intuito de rever o significado do módulo de um número, como é que a solução de cada inequação pode ser representada na reta numérica e estimular o desenvolvimento do raciocínio dos alunos na procura pelo modo de resolução analítica das mesmas.

Enquanto o aluno A5 resolvia a alínea 1.1. no quadro, a professora questionou os colegas de forma a perceber o seu raciocínio e averiguar o nível de compreensão do conteúdo em questão. No diálogo decorrente ao longo da resolução da alínea 1.1. surgiram os diferentes tipos de perguntas distinguidos por Love e Mason (1995). Veja-se o seguinte excerto desse diálogo:

Professora: Então, na representação na reta numérica, Aluno$_5$ o que é que pensaste?

A5: Eu peguei nisto [aponta para a inequação dada] e fiz que o x ia ser menor do que 2 ou maior do que -2.

Professora: Achas que é "ou"? Toda a gente acha que é "ou"?

Alunos: Não, é "e".

Professora: Porquê?

Alunos: Porque é menor.

Professora: Nós não queremos a interseção dos intervalos?! Se fizéssemos a união de intervalos o que seria o conjunto-solução?

A5: $\mathbb{R}$.

Professora: E vocês querem $\mathbb{R}$?

[Os alunos acenam negativamente com a cabeça]

Professora: Porque é que não querem $\mathbb{R}$?

A5: Porque o módulo de um valor menor que -2 ou de um valor maior que 2 não é menor que 2.

Neste excerto de diálogo, a professora colocou quatro perguntas de inquirição, duas perguntas de confirmação e apenas uma pergunta de focalização. As perguntas de inquirição foram colocadas com o objetivo de perceber o que o aluno estava a pensar e se a turma concordava com o seu raciocínio. As perguntas de confirmação tiveram o intuito de testar o conhecimento dos alunos e certificar-se que os raciocínios dos alunos eram os corretos. Por sua vez, a pergunta de focalização foi utilizada para focar a atenção do aluno na utilização incorreta da disjunção.

No que concerne às respostas dos alunos, estes responderam com explicações a quase todas as perguntas de inquirição, tendo elaborado três explicações e apenas duas respostas curtas. Como a compreensão do raciocínio dos alunos era o objetivo das perguntas de inquirição, parece natural que os alunos respondam com explicações.

É importante realçar que, embora alguns alunos tenham apresentado resoluções mais completas, optei por pedir ao aluno A5 para apresentar a sua resolução no quadro por considerar que esta resolução seria suscetível de discussão. Os alunos que erraram puderam ser confrontados com uma resolução correta e mais completa e os alunos que apresentaram resoluções mais completas puderam confrontar o colega, nomeadamente, relativamente à resolução analítica.

Nas alíneas 1.2. e 1.3. da Tarefa 3 é pedido que os alunos discutam as soluções das inequações apresentadas. Estas inequações são do tipo $|x| < k$ e $|x| > k$ para que os alunos conseguissem, utilizando a alínea 1.1. se necessário, generalizar a resoluções de inequações com módulo. Nestas alíneas, os alunos revelaram dificuldades na generalização, algo que não tinha sido previsto na planificação da aula (P3, 2021). Apesar de os alunos terem conseguido atribuir valores a k, tais que $k < 0$, $k = 0$ ou $k > 0$, e terem determinado o conjunto-solução das inequações resultantes, não conseguiram generalizar esse conjunto-solução para o conjunto de valores de k considerados. De forma a colmatar estas dificuldades e esclarecer algumas dúvidas, a professora optou por recorrer à calculadora gráfica para, em conjunto com a turma, procurar encontrar uma generalização do conjunto-solução. Para tal, atribuiu diferentes valores a k. Inicialmente, atribuiu a k valores negativos e pediu aos alunos que lhe dissessem as soluções das inequações resultantes e as escrevessem no caderno. De seguida, repetiu este procedimento para valores positivos. Note-se no excerto de diálogo decorrente neste momento da aula:

Professora: Começando por $k > 0$, que valor pode ser k?

A26: $1.$

Professora: Então vamos representar aqui a reta $y = 1.$ Quando é que o módulo é menor do que 1?

Alunos: De -1 a $1.$

(...)

Professora: Digam lá outro valor.

A1: $55.$

Professora: 55?! Pronto, $55.$

[A professora introduz $y = 55$ na calculadora gráfica]

Professora: Temos um problema com o quê?

Alunos: A janela de visualização.

Professora: E como é que vamos fazer?

A1: Pomos [o máximo de x igual a] 60.

Professora: Achas que é no x?

A1: É no y.

Professora: Quando é que o módulo é menor do que 55?

Alunos: De -55 a $55.$

(...)

Neste diálogo, há uma predominância das perguntas de confirmação – três –, utilizadas para testar o conhecimento dos alunos. Das duas outras categorias apenas foram colocadas duas perguntas de focalização e uma pergunta de inquirição. Por sua vez, relativamente às respostas dos alunos, eles formularam seis respostas curtas e apenas uma explicação. Essa explicação surgiu como resposta à única pergunta de inquirição, em que foi perguntado à turma como é que poderiam fazer para alterar a janela de visualização da calculadora gráfica.

O método utilizado para a alínea 1.3. foi o mesmo que o utilizado na alínea 1.2.: o aluno A26 apresentou a sua resolução e a resolução recorrendo à calculadora gráfica foi feita em grupo-turma.

Professora: Para $k = 0,$ o que observamos na calculadora gráfica?

A21: Que é sempre verdadeira.

A1: A inequação é sempre verdadeira.

Professora: Porquê?

A2: O módulo de qualquer valor é maior do que zero... é positivo.

Professora: O módulo corresponde a quê?

Alunos: À distância.

A24: Que não pode ser negativa.

Professora: A distância não pode ser negativa, mas tem que ser obrigatoriamente positiva?

Alunos: Pode ser zero.

Professora: Então concordam com a resposta do aluno A1?

Alunos: Não.

A24: A inequação é sempre positiva, exceto para $x = 0$.
Professora: Concordam?
[Os alunos acenam positivamente com a cabeça]

As perguntas de confirmação e inquirição dominam a discussão, tendo sido colocadas três perguntas de inquirição, duas perguntas de confirmação e apenas uma pergunta de focalização. As perguntas de inquirição foram, essencialmente, utilizadas para saber a opinião dos alunos em relação às respostas dos colegas, enquanto as perguntas de confirmação foram utilizadas para avaliar os conhecimentos dos alunos sobre a função módulo. A pergunta de focalização teve como propósito focar no erro dos alunos ao assumir que o módulo tem que ser sempre positivo.

Neste excerto de diálogo, os alunos formularam, essencialmente, respostas curtas – seis. Um dos alunos que interveio explicou a razão da inequação ser sempre verdadeira. Outro aluno elaborou uma justificação para o facto do módulo de um número não poder ser um valor negativo porque corresponde à distância desse número à origem na reta numérica.

Após a resolução da Tarefa 3, a professora completou, em grupo-turma, um quadro-resumo com todos os detalhes necessários para a resolução de inequações com módulos. Para averiguar o nível de conhecimento dos alunos à cerca das inequações com módulos e permitir consolidar conhecimentos, propôs várias inequações com módulos à turma. Depois, escolheu diferentes alunos para apresentarem as suas resoluções e formulou um conjunto de perguntas, de forma a avaliar o conhecimento da turma.

Na resolução das inequações propostas à turma após a Tarefa 3, o predomínio das perguntas de confirmação e inquirição é notório. Veja-se o caso da discussão relativa à resolução da inequação $\left|\frac{1}{3}x + 5\right| > -3$:

A20: Não é uma condição universal, professora?
Professora: O aluno A20 disse que era uma condição universal. É ou não é?
Alunos: É.
Professora: Porquê?
A1: Porque todos os módulos são maiores do que 0.
Professora: Todos os módulos são não negativos. Se a condição é universal, qual é que é o conjunto-solução?
A26: $\mathbb{R}$.

Outro exemplo é o da discussão em torno da resolução da inequação $|x + 5| > 0$:

Professora: Qual é o conjunto-solução?
A1: É $]-\infty, -5[\, \cup\,]-5, +\infty[$.
Professora: Porquê? Concordam?
A1: Enganei-me, professora.

Alunos: Não.

Professora: Se calhar uma representação gráfica ajuda, A1.

A1: Vamos lá, professora.

[A professora, com o auxílio do A1, representa a função $|x + 5|$ no quadro]

Professora: A função $|x + 5|$ resulta do quê?

A1: De uma translação horizontal para a esquerda.

Professora: E então, A1?

A1: Já está professora.

Professora: Sim, mas o que observas pela representação?

A1: É sempre positiva.

Professora Concordam?

Alunos: Não.

A20: Toca no ponto zero, o bico.

Professora: Como é que se chama o bico [apontando para vértice do gráfico da função]?

Alunos: Vértice.

Professora: Ok. E concordam que o vértice toca no eixo do x?!

Alunos: Sim.

[Alguns alunos referem que o conjunto-solução é $\mathbb{R}\backslash\{-5\}$].

Professora: Porquê?

A24: Como o vértice toca no eixo do x $|x + 5|$ é zero no vértice e, por isso, em $x = -5$.

(...)

Nos diálogos transcritos acima, verifica-se, novamente, um predomínio das perguntas de confirmação e inquirição. Mais uma vez, as perguntas de confirmação foram utilizadas para testar o conhecimento dos alunos e as perguntas de inquirição utilizadas para saber o modo de pensar dos alunos e a sua opinião sobre algumas respostas dos colegas. Os alunos, por sua vez, deram onze respostas curtas, duas explicações e apenas uma justificação. Tanto a justificação como as explicações surgiram como resposta a perguntas de inquirição.

Note-se que nas discussões relativas às resoluções das inequações propostas, prevaleceram as perguntas de confirmação. Tal pode dever-se ao facto de os alunos apresentarem e explicarem os seus raciocínios de forma correta, não apresentando dificuldades e, por isso, a professora não considerou necessário colocar perguntas de focalização. Por outro lado, uma vez que os alunos não revelaram dificuldades, podia ter colocado perguntas de inquirição para promover o desenvolvimento dos seus raciocínios matemáticos.

Síntese

Nesta aula, a fase de discussão sobre a resolução da tarefa foi aquela em que foram formuladas mais perguntas, com um grande desfasamento das restantes fases da aula. O facto dos alunos não se sentirem confortáveis com o conteúdo em estudo – a função módulo – pode-os ter inibido a participar. Além disso, os alunos mostraram-se apreensivos na exposição das suas dúvidas e na colocação de perguntas.

As perguntas colocadas apresentaram frequências aproximadas. Nesta aula, a professora efetuou várias perguntas de confirmação e focalização. Talvez por ter percebido as dificuldades que os alunos estavam a ter, formulou demasiadas perguntas destes dois tipos e teve receio de os fazer pensar e descobrir, não tendo colocado perguntas de inquirição relevantes, que fizessem os alunos refletir sobre as respostas dos colegas e sobre algumas ideias matemáticas como, por exemplo, o facto do módulo ser sempre não negativo – algo que se torna imprescindível para a sua aprendizagem.

Na Tabela 17, é apresentado o número de perguntas de cada tipo colocadas durante os diferentes diálogos apresentados relativamente à Tarefa 3.

Tabela 17: Frequência de cada tipo de perguntas colocadas pela professora

Tipo de pergunta	Fase da aula	Indicador	Finalidade	Frequência
Confirmação	Introdução da Tarefa	"o que vos parece ser o significado?"	Testar o conhecimento dos alunos	3
	Exploração da Tarefa	"no enunciado diz que k pertence a que conjunto?"		6
	Discussão da Tarefa	"se a condição é universal, qual é que é o conjunto-solução?"		10
Focalização	Introdução da Tarefa	-	Focar a atenção dos alunos num determinado pormenor	-
	Exploração da Tarefa	"como é que podemos dividir os números reais em grandes grupos?"		6
	Discussão da Tarefa	"mas o que observas pela representação?"		7
Inquirição	Introdução da Tarefa	"perceberam?"	Perceber o raciocínio dos alunos	1
	Exploração da Tarefa	"consegues aplicar uma técnica parecida?"		3
	Discussão da Tarefa	"porquê?"		14
Total				50

Pela Tabela 17, infere-se que as perguntas de confirmação foram as mais utilizadas, seguidas das perguntas de inquirição. As perguntas de focalização foram as menos utilizadas. Note-se que as frequências de cada tipo de perguntas são aproximadas.

A análise dos vários diálogos ocorridos durante a aula permite constatar que as perguntas de confirmação e inquirição foram as mais utilizadas. A necessidade da professora de confirmar os conhecimentos do aluno e de perceber o modo como estes estavam a raciocinar foi evidente nesta aula. As perguntas de focalização tiveram como finalidade o foco da atenção do aluno em certos aspetos como, por exemplo, o gráfico da função e o facto de este resultar de uma translação horizontal do gráfico de outra função. As perguntas de inquirição foram, na sua maioria, formuladas tendo como base a pergunta "porquê?". Com estas perguntas, a professora pretendia perceber o raciocínio dos alunos e a razão para algumas respostas e resoluções. As perguntas de confirmação foram utilizadas para motivar os alunos a completar o meu raciocínio ou dos colegas e, simultaneamente, testar os seus conhecimentos. Pela análise dos diálogos, foi também percetível o recurso a mais perguntas de inquirição que tinham como objetivo obter informações sobre o pensamento do aluno do que nas duas aulas anteriores. Tal pode dever-se à natureza da aula, que incidiu sobre um tópico novo e no qual, geralmente, os alunos apresentam dificuldades. Assim, a utilização de mais perguntas de inquirição pode ser explicada pelo facto do nível de compreensão e o domínio dos alunos perante este tópico serem mais baixos e, por isso, facilitarem e promoverem um ambiente propicio à colocação deste tipo de perguntas.

A Tabela 18 apresenta as frequências de cada tipo de resposta dos alunos nos diferentes diálogos ocorridos durante a aula.

Tabela 18: Frequência de cada tipo de resposta dos alunos

Tipo de resposta	Frequência	Frequência (%)
Resposta curta	45	71,4%
Explicação	9	14,3%
Justificação	3	4,8%
Pergunta	6	9,5%
Desafio	-	-
Total	63	100%

Os alunos responderam frequentemente, de acordo com as informações apresentadas na Tabela 10, com respostas curtas. Apenas foram elaboradas três justificações, seis perguntas e nove explicações.

3.1.3.2. A pergunta do professor na resolução dos alunos

Durante e após a aula, as produções dos alunos foram analisadas, de forma a identificar o contributo das perguntas na resolução dos alunos. Na alínea 1.1 da Tarefa 2, a maioria dos alunos não demonstrou dificuldades. Na Tabela 19 são apresentadas as frequências de cada tipo de resposta dada pelos alunos a esta alínea.

Tabela 19: Frequência dos tipos de resposta dos alunos à alínea 1.1. da Tarefa 3 ($n = 27$)

<table>
<tr><th colspan="3">Tipo de representação</th><th colspan="4">Justificação</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Verbal</th><th rowspan="2">Icónica</th><th rowspan="2">Simbólica</th><th colspan="3">Sim</th><th rowspan="2">Não</th></tr>
<tr><th>PM</th><th>R</th><th>EP</th></tr>
<tr><td>25</td><td>25</td><td>25</td><td>15</td><td>–</td><td>–</td><td>10</td></tr>
</table>

PM – Procedimentos matemáticos; R – Regra; EP – Explicação própria

Todos os alunos que responderam à alínea em questão, utilizaram os três tipos de representação, mas apenas quinze alunos justificaram as suas respostas. Note-se que, devido ao tipo de resolução pedida, só a resolução analítica é que foi analisada relativamente à justificação. Relativamente às representações, a maioria dos alunos utilizou a linguagem verbal para explicar o significado das inequações apresentadas, a representação icónica para representar graficamente as soluções das inequações e a representação simbólica para resolver analiticamente cada uma das inequações. A resolução analítica foi onde os alunos demonstraram mais dificuldades. A Figura 31 ilustra uma resolução correta e justificada.

Figura 31: Resolução da alínea 1.1. da Tarefa 3 do aluno A23

	Significado	Representação na reta numérica	Resolução analítica
$\|x\| < 2$	a distância de x à origem é menor que 2	-2 -1 0 1 2	$\|x\|<2$ $x<2 \wedge -x<2$ $x<2 \wedge x>-2$
$\|x\| > 1$	a distância de x à origem é maior que 1	-1 0 1	$\|x\|>1$ $x>1 \vee -x>1$ $x>1 \vee x<-1$

O aluno A23 dá indícios de compreender o significado das duas inequações, referindo-se ao módulo de um número como a distância desse número à origem. Relativamente à representação na reta numérica, conseguiu representar corretamente a inequação como a união de dois intervalos, resultando no intervalo aberto de -2 a 2. No que à resolução analítica diz respeito, o aluno justificou a sua resposta através da transcrição dos procedimentos efetuados, isto é, 'desdobrou' o módulo em duas inequações e resolver as mesmas. No entanto, considero que, nesta parte do quadro, a resolução poderia estar mais completa, apresentando a solução que resulta da conjunção das duas inequações.

Vários alunos, apesar de apresentarem respostas corretas para o significado e a representação na reta numérica, não justificaram a solução da resolução analítica, como exemplifica a do aluno A6 (Figura 32).

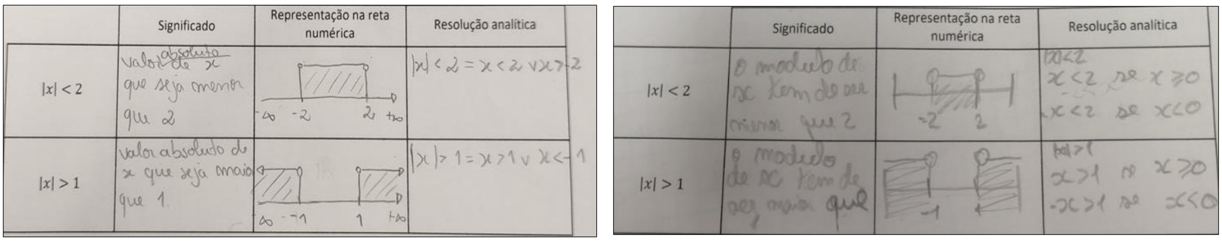
Figura 32: Resolução da alínea 1.1. da Tarefa 3 do aluno A6

	Significado	Representação na reta numérica	Resolução analítica
$\|x\| < 2$	a distância à origem tem de ser menor que dois	-2 2	$-2 < x < 2$
$\|x\| > 1$	a distância à origem tem de ser menor que uma unidade	-1 1	$x<-1 \wedge x>1$

Nesta resolução, o aluno A6 mostra falta de atenção na tradução do significado ao escrever ‘menor’ ao invés de ‘maior’. Além disso, embora a resolução da alínea 1.1., de um modo geral, esteja correta, o aluno não demonstrou não ter percebido o que era pedido sobre a resolução analítica. Este aluno apresentou a solução, analiticamente, da inequação, mas não a resolveu nem explicou como se poderia descobrir a solução da inequação analiticamente.

No que à resolução analítica diz respeito, vários alunos apresentaram erros matemáticos graves, como ilustram as resoluções dos alunos A13 e A27 (Figura 33).

Figura 33: Resoluções da alínea 1.1. da Tarefa 3 dos alunos A13 e A27



Os principais erros dos alunos estão associados à incorreta utilização da linguagem matemática para exprimir o significado de $|x| < 2$ e $|x| > 1$. Os alunos limitaram-se a escrever o símbolo de valor absoluto em vez de evidenciar a noção de distância. Na resolução analítica, o aluno A13 traduziu a igualdade em vez de uma equivalência entre condições e não utilizou corretamente a conjunção e a disjunção que resulta da reescrita das inequações com módulo em inequações equivalentes sem módulo, mostrando não compreender o significado das mesmas, uma vez que a solução da representação numérica e da resolução analítica não são as mesmas. O aluno A27, em vez de desdobrar o módulo, rescreveu-o em ramos e, de seguida, como não apresenta a solução, não se percebe o que o aluno faz.

Relativamente às alíneas 1.2. e 1.3., vários alunos demonstraram as suas dificuldades, não tendo conseguido resolver estas alíneas. Na Tabela 12 são apresentadas as frequências dos tipos de representação e justificação utilizadas nas alíneas 1.2. e 1.3.

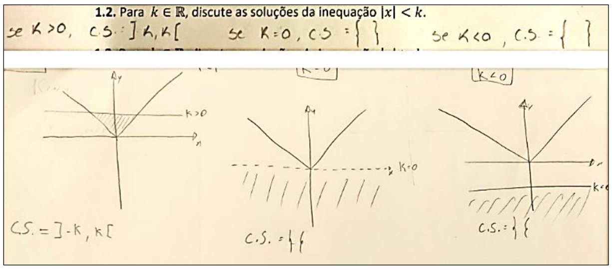
Tabela 20: Frequência dos tipos de resposta dos alunos às alíneas 1.2. e 1.3. da Tarefa 3 ($n = 25$)

	Tipo de representação			Justificação			
				Sim			
	Verbal	Icónica	Simbólica	PM	R	EP	Não
Alínea 1.2.	1	12	2	10	–	–	10
Alínea 1.3.	1	12	2	10	–	–	10

PM – Procedimentos matemáticos; R – Regra; EP – Explicação própria

Note-se que o número de alunos que não responderam foi superior ao número de respostas, o que significa que os alunos não conseguiram sequer compreender o que era pedido ou seguir as sugestões dadas durante a fase de exploração da tarefa. Apesar das dificuldades, alguns alunos conseguiram apresentar respostas completas. Um exemplo de uma dessas respostas é a resolução apresentada na Figura 34.

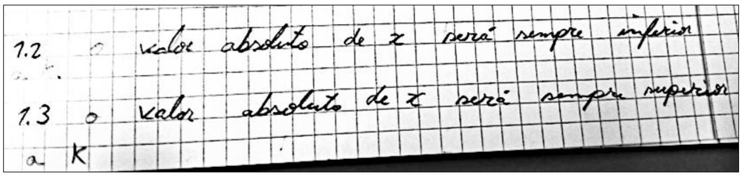
Figura 34: Resolução da alínea 1.2. da Tarefa 3 do aluno A6



O aluno A6 além de ter resolvido a alínea 1.2. através de processos analíticos, também recorreu à representação gráfica. Durante o trabalho autónomo, este aluno perguntou à professora como poderia resolver graficamente a questão. Face às suas dúvidas, a professora colocou várias perguntas para que o aluno percebesse que bastava representar graficamente a função módulo e traçar retas representativas de cada uma das situações possíveis ($k < 0$, $k = 0$ e $k > 0$). Estas perguntas parecem ter ajudado o aluno, uma vez que este conseguiu resolver corretamente esta alínea utilizando a representação gráfica.

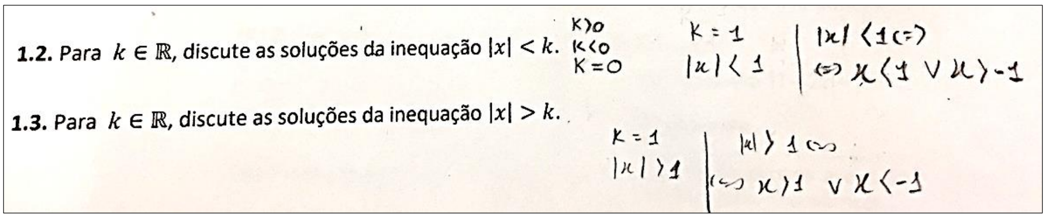
As maiores dificuldades reveladas pelos alunos nas suas produções estão associadas às resoluções das alíneas 1.2. e 1.3., como exemplifica a Figura 35.

Figura 35: Resolução das alíneas 1.2.e 1.3. da Tarefa 3 do aluno A24



A resolução apresentada na Figura 35 revelou as dificuldades do aluno A24 na compreensão de que k poderia ser qualquer valor de $\mathbb{R}$. Por isso, a resolução do aluno só está correta para $k \leq 0$. O aluno interpretou que, nas inequações do tipo $|x| < k$, k é menor ou igual a zero e, nas inequações do tipo $|x| > k$, k é maior que zero. Este aluno não justificou a sua resposta e utilizou apenas linguagem natural para responder a estas duas alíneas. Em contraste, outros alunos apenas recorreram à linguagem matemática para as alíneas 1.2. e 1.3. A Figura 36 ilustra uma dessas resoluções.

Figura 36: Resolução das alíneas 1.2. e 1.3. da Tarefa 3 do aluno A25

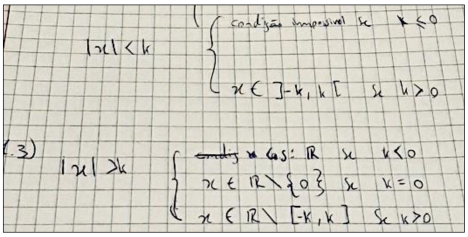


Na Figura 36, o aluno A25 apenas utilizou representação simbólica. Este aluno não conseguiu generalizar o conjunto-solução obtido depois de ter atribuído o valor 1 a k. O aluno A25 apenas resolveu as inequações $|x| < 1$ e $|x| > 1$, apesar de ter escrito que k poderia ser positivo, negativo ou zero. Além disso, na alínea 1.2., este aluno utilizou incorretamente os conetores lógicos.

As resoluções apresentadas nas figuras 35 e 36 mostram que as perguntas que a professora colocou durante a fase de exploração da tarefa e, em particular, no momento em que se dirigiu à turma para a questionar sobre os diferentes valores que k poderia assumir, não tiveram o efeito pretendido. Os alunos revelaram não ter percebido que k era um valor real qualquer e que o que se pretendia estudar era as soluções para diferentes valores de k. Por isso, a professora deveria ter colocado mais questões, orientadas para determinados alunos e, principalmente, colocar mais perguntas de confirmação e inquirição para se certificar que todos os alunos tinham percebido e não memorizado.

De um modo geral, esta tarefa revelou muitas dificuldades dos alunos, mas também diversas potencialidades. A par da resolução do aluno A6 da alínea 1.2., que a apresentou no quadro, também a resolução do aluno A8 revela várias capacidades matemáticas.

Figura 37: Resolução das alíneas 1.2.e 1.3. da Tarefa 3 do aluno A8



O aluno A8 revela ter compreendido o conceito de valor absoluto de um número e ter conseguido perceber que as soluções de cada inequação variam consoante o valor de k. Além disso, o aluno recorre a um sistema para apresentar os diferentes conjuntos-solução.

Síntese

Pelas produções dos alunos, é possível perceber que os alunos não se preocuparam em justificar as suas ideias e estratégias. As únicas justificações elaboradas surgem através da transcrição dos procedimentos efetuados. Tal pode dever-se às dificuldades que tiveram na compreensão do tópico em estudo.

Relativamente às representações utilizadas, na maioria das vezes, os alunos utilizaram a representação simbólica, à exceção da alínea 1.1. em que recorreram aos três tipos de representação.

Da análise das produções dos alunos, emerge algumas ilações, entre as quais, o facto do tópico "inequações com módulos" ser abstrato para os alunos, causando dificuldades na sua compreensão. A proposta de tarefas ricas e a disponibilização de um tempo adequado para o trabalho autónomo e discussão parecem contribuir para uma assimilação e compreensão do conteúdo abordado. Neste sentido, e sendo o trabalho autónomo e a discussão partes essenciais da aula, as perguntas assumem-se fundamentais na criação de oportunidades de aprendizagem. Durante a aula, as perguntas contribuíram para o esclarecimento das dúvidas dos alunos, no entanto podiam ter sido aproveitadas para estimular o pensamento deles. Nesta aula, a professora não recorreu a muitas perguntas de inquirição nem fez perguntas que incentivassem o aluno a pensar mais além. Apenas utilizou as perguntas como forma de colmatar as dificuldades da turma e não as utilizou para promover o debate, a discussão e a partilha de ideias.

O facto de os alunos terem revelado dificuldades e considerado esta tarefa "muito difícil" e "muito estranha" (GAV3), pode ter inibido a comunicação e até a aprendizagem. Note-se que, tal como referem Menezes (1996) e Silva (2014), as tarefas demasiado difíceis e que levam a uma incapacidade, por parte do aluno, de as resolver podem ter um efeito desmotivador e inibir a comunicação e aprendizagem.

As produções dos alunos revelam que as perguntas tiveram um papel relevante na superação das suas dificuldades. Contudo, também revelam que os alunos nem sempre compreenderam o que estavam a fazer, optando por processos 'automáticos' e memorizados.

3.2. Avaliação do ensino ministrado

Após a intervenção pedagógica e de forma a dar resposta à última questão de avaliação formulada, foi aplicado um questionário (Anexo IV) que teve por finalidade conhecer as perceções dos alunos sobre o ensino ministrado e, em particular, sobre o contributo das perguntas na aprendizagem de tópicos de funções. Esse questionário era composto por questões de concordância (escala tipo Likert) e por questões de resposta aberta. As questões de concordância encontraram-se divididas em três categorias – as perceções dos alunos sobre as tarefas e aos desafios do estudo de tópicos de funções; as perceções dos alunos sobre as perguntas na aula de Matemática; e as perceções dos alunos relativas à discussão na aula de Matemática. As questões de resposta aberta incidiram no papel das perguntas e nas dificuldades sentidas na aprendizagem de tópicos de funções.

As respostas dos alunos foram analisadas de acordo com três categorias: (i) o tema funções; (ii) as perguntas na sala de aula; e (iii) a discussão na sala de aula.

Perceções dos alunos sobre o tema funções. De forma a conhecer as perceções dos alunos acerca do tema funções, os alunos foram questionados sobre o interesse pelo tema, as dificuldades sentidas na aprendizagem de tópicos de funções, o contributo das tarefas propostas e o recurso a materiais didáticos. A Tabela 21 apresenta a frequência sobre o grau de concordância das perceções dos alunos relativamente ao tema Funções.

Tabela 21: Perceções dos alunos sobre o tema funções ($n = 27$)

Afirmação	DT/D	I	C/CT
O tema funções é mais interessante do que os outros temas matemáticos (geometria, lógica, ...)	22%	22%	56%
Tive dificuldades no estudo de tópicos de funções	56%	4%	41%
Tive dificuldades em resolver as tarefas propostas na aula de Matemática do tema funções	52%	15%	33%
Tive menos dificuldades no tópico funções do que em outros temas matemáticos	41%	11%	48%
Nas aulas de Matemática do estudo de funções senti-me desafiado a desenvolver o meu raciocínio	0%	7%	93%
As tarefas propostas motivaram-me e incentivaram-me a participar nas aulas	4%	22%	74%
As tarefas propostas promoveram a minha aprendizagem	0%	4%	96%
O recurso a materiais didáticos como, por exemplo, a calculadora gráfica, facilitaram a minha compreensão sobre o tema funções	0%	7%	93%

A maioria dos alunos (56%) considerou o tema funções mais interessante que outros temas, mas quanto às dificuldades sentidas no seu estudo comparativamente com outros temas, os alunos estão divididos: 41% sentiu mais dificuldades e 48% menos dificuldades do que em outros temas matemáticos.

Relativamente às tarefas propostas nas aulas de Matemática sobre tópicos de funções, a maioria (74%) dos alunos revelou ter sentido que tais tarefas os motivaram e incentivaram a participar nas aulas, tendo promovido a sua aprendizagem. Grande parte dos alunos (93%) referiu também o facto do recurso a matérias didáticos ter facilitado a sua compreensão sobre o tema.

Perceções dos alunos sobre as perguntas na aula de Matemática. Para conhecer as perceções dos alunos sobre o contributo das perguntas na aprendizagem de tópicos de funções, foi-lhes pedido que enumerassem as vantagens e desvantagens das perguntas colocadas na sala de aula, tanto pela professora, como pelo aluno ou pelos colegas e que revelassem o seu grau de concordância ou discordância relativamente a algumas afirmações. A Tabela 22 explicita os resultados das respostas dos alunos relativas às perguntas colocadas na sala de aula.

Tabela 22: Perceções dos alunos sobre as perguntas colocadas na aula de Matemática ($n = 27$)

Afirmações	DT/D	I	C/CT
As perguntas colocadas pela professora permitiram-me colmatar as dificuldades que senti no estudo do tema funções	0%	15%	85%
As perguntas colocadas pelos meus colegas ajudaram a ultrapassar dificuldades que senti no estudo do tema funções	0%	22%	78%
As perguntas que coloquei à professora e aos meus colegas ajudaram a ultrapassar dificuldades que senti no estudo do tema funções	0%	15%	85%
As perguntas colocadas pela professora serviram para avaliar o grau de compreensão dos tópicos em estudo de funções	0%	7%	93%
As perguntas colocadas pela professora fizeram-me sentir desconfortável	70%		30%
Não me sinto confortável para colocar perguntas à frente dos meus colegas	56%	7%	37%
Quando tive dúvidas sobre as atividades realizadas na aula coloquei perguntas para as esclarecer	4%	22%	74%
Quando tenho dúvidas na aula prefiro esclarecê-las no meu lugar	0%	15%	85%
A colocação de perguntas por parte da professora desafiou-me a pensar	0%	7%	93%

A maioria dos alunos (85%) afirmou que as perguntas da professora lhe permitiram colmatar as suas dificuldades e cerca de 93% considerou que tais perguntas os desafiaram e lhes permitiram avaliar o grau de compreensão dos tópicos de funções em estudo. Ainda assim, alguns alunos (30%) revelaram sentir-se desconfortáveis com as perguntas colocadas pela professora. Alguns alunos (37%) afirmaram que não se sentiam confortáveis para colocar perguntas à frente dos colegas e cerca de 74% afirmaram que quando tiveram dúvidas na aula colocaram perguntas para as esclarecer, mas 85% revelaram preferir esclarecer as suas dúvidas no lugar. Relativamente às perguntas colocadas pelos alunos à professora ou aos colegas, 85% afirmaram que estas perguntas os ajudaram a ultrapassar dificuldades durante o estudo de tópicos de funções, porém apenas 78% concordaram que as perguntas colocadas pelos colegas os ajudaram a ultrapassar dificuldades no tema em estudo.

Relativamente às vantagens, os alunos destacaram que as perguntas colocadas pela professora lhes permitiram compreender melhor os tópicos em estudo, consolidar a sua aprendizagem e "esclarecer dúvidas". Os alunos afirmaram também que as perguntas os desafiaram e auxiliaram na superação de dificuldades. O aumento da "participação na aula", a "melhoria da comunicação entre os alunos e a professora" e a "desenvolver a capacidade de comunicação e raciocínio" foram das vantagens mais mencionadas pelos alunos.

Tabela 23: Frequências das vantagens das perguntas colocadas pela professora ($n = 27$)

Categorias	Frequência
Esclarecer dúvidas/Colmatar dificuldades	18
Consolidar conhecimentos	17
Desafiar o raciocínio matemático	13
Promover a comunicação nas aulas de matemática	13
Promover a participação de todos os alunos	10
Impulsionar a aprendizagem	10

Por outro lado, das vantagens das perguntas colocadas pelo próprio aluno enumeradas, o "esclarecimento de dúvidas", a "consolidação de conhecimentos" e a promoção do "desenvolvimento do raciocínio" foram as que mais se destacaram (Tabela 24).

Tabela 24: Frequências das vantagens das perguntas colocadas pelos alunos ($n = 27$)

Categorias	Frequência
Consolidação de conhecimentos	15
Esclarecimento de dúvidas	15
Promoção do desenvolvimento do raciocínio	10
Aumentar o interesse pelas aulas	10
A professora consegue detetar as dificuldades e erros dos alunos	10
Confronto com outras estratégias e ideias	8
Mais facilidade em aprender	6
Resolver as tarefas em conjunto com os colegas	5

Por sua vez, quando questionados sobre as desvantagens das perguntas colocadas pela professora, alguns alunos referiram a pressão e o desconforto por não saberem responder a determinadas perguntas (Tabela 25).

Tabela 25: Frequências das desvantagens das perguntas colocadas pela professora ($n = 27$)

Categorias	Frequência
Pressão	10
Desconforto	8
Receio de não saber responder	6

Enquanto o receio de formularem uma "pergunta óbvia", de serem os únicos "que não sabem a resposta" ou a confusão que as perguntas dos colegas lhes podem causar foram os aspetos mencionados quando questionados acerca das desvantagens das perguntas colocadas por si ou pelos colegas (Tabela 26).

Tabela 26: Frequências das desvantagens das perguntas colocadas pelos alunos ($n = 27$)

Categorias	Frequência
Receio de formularem perguntas óbvias	10
Vergonha de não saberem a resposta	6
Perguntas dos colegas podem gerar confusão	5

Relativamente à afirmação "as perguntas colocadas na sala de aula são fundamentais na dinamização das atividades", todos os alunos concordaram com a afirmação, referindo que "as perguntas permitem desenvolver o raciocínio, (...) e faz-nos abrir horizontes" e que "as perguntas colocadas durante a aula são importantes para tornar as aulas mais interessantes e ajudar a que fiquem mais atentos". Aliás, vários alunos referiram que consideram fundamental a "troca de ideias e debates" nas aulas de Matemática porque permite "ajudar os colegas", "melhorar a dinâmica" na sala de aula e "faz com que todos se sintam à vontade em responder e colocar perguntas".

Perceções dos alunos sobre as discussões na aula de Matemática. Por considerar que as discussões após a realização de cada tarefa contribuem significativamente para a aprendizagem, delineei um conjunto de questões sobre as mesmas, de modo a compreender a opinião dos alunos e averiguar se sentiram que estas impulsionaram a sua aprendizagem, nomeadamente, ao lhes permitir esclarecer as suas dúvidas e melhorar as capacidades de comunicação matemática e se sentiram algum desconforto ao intervir ou explicitar o seu raciocínio aos colegas e à professora (Tabela 27).

Tabela 27: Perceções dos alunos sobre a discussão na aula de Matemática ($n = 27$)

Afirmações	DT/D	I	C/CT
A discussão após a realização de cada tarefa contribuiu para a minha aprendizagem	0%	0%	100%
A discussão após a realização de cada tarefa ajudou-me a esclarecer as minhas dúvidas	0%	0%	100%
A discussão após a realização de cada tarefa permitiu-me melhorar as minhas capacidades de comunicação matemática	0%	0%	100%
Não me sinto confortável para intervir e explicitar o meu raciocínio	37%	7%	66%
A partilha de ideias com os meus colegas contribuiu para a minha aprendizagem	0%	7%	93%
A discussão sobre a resolução das tarefas deu oportunidade aos alunos para estabelecer definições e propriedades dos tópicos de funções em estudo	0%	0%	100%

A discussão parece ter gerado unanimidade, todos os alunos concordaram que as discussões contribuíram para a sua aprendizagem, ajudaram a esclarecer dúvidas, permitiram melhorar as suas capacidades de comunicação e que deram oportunidades aos alunos de estabelecer definições e propriedades dos tópicos de funções em estudo. Apenas 37% afirmaram que não se sentiam confortáveis para intervir e explicar o seu raciocínio à turma, mas 93% concordaram que a partilha de ideias com os colegas, apesar do desconforto, contribuiu para a sua aprendizagem.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Este capítulo divide-se em duas secções. A primeira refere-se às conclusões deste estudo, na procura de responder, com base no enquadramento teórico e na análise de dados, às questões de investigação que orientaram este estudo. A segunda secção apresenta algumas das limitações do estudo e possíveis recomendações para futuros estudos sobre as perguntas na aprendizagem de tópicos matemáticos.

4.1. Conclusões

A realização deste trabalho pretende identificar o contributo das perguntas do professor na aprendizagem de tópicos de funções. Para concretizar este objetivo, as conclusões emergem como resposta às seguintes questões de investigação: (1) Que tipo de perguntas promove o professor nos diferentes momentos das aulas no ensino de tópicos de funções?; (2) Como o professor usa as perguntas para clarificar as dificuldades dos alunos na aprendizagem de funções?; (3) Que relação há entre o tipo de perguntas do professor e o tipo de respostas dos alunos na aprendizagem de funções?; (4) Que perceções têm os alunos sobre o contributo das perguntas na aprendizagem de funções?. As respostas a estas questões e a correspondente discussão são sustentadas, sempre que possível, pelo quadro teórico apresentado neste estudo.

4.1.1. Que tipo de perguntas promove o professor nos diferentes momentos das aulas no ensino de tópicos de funções?

As perguntas formuladas nas aulas assumem um papel preponderante no processo de ensino e aprendizagem e podem ser um "meio de manter o ritmo da aula e envolver todos os alunos" (Almeida, 2007, p. 24). Neste estudo, constatou-se que, durante a prática pedagógica, a professora formulou os três tipos de perguntas distinguidos por Love e Mason (2005) – confirmação, focalização e inquirição – no ensino de tópicos de funções. A formulação de um elevado número de perguntas pela professora revela a importância que atribui ao papel das perguntas no processo de ensino e de aprendizagem, como foi concluído no estudo desenvolvido por Menezes (1995) sobre as conceções e práticas de dois professores de Matemática relativamente às perguntas nas aulas de Matemática.

As perguntas colocadas pela professora na sua sequência de ensino serviram para detetar dificuldades dos alunos e ajudar na sua superação, esclarecer dúvidas, promover a partilha de ideias e incentivar à participação e discussão. Almeida (2007) e por Wellington (2000) consideram que a pergunta tem a função de controlar os alunos e a aula, incentivar à curiosidade e ao interesse e testar o conhecimento dos alunos.

Na dinamização das suas estratégias de ensino, a professora pautou a sua ação, nas aulas que são objeto de análise deste estudo, através das fases que determinam o ensino exploratório. Este método de ensino resulta da forma como as tarefas são introduzidas, trabalhadas e se explora o que resulta da sua resolução na aula de matemática. Sendo, nesta dinâmica, o discurso da professora pautado por perguntas, estas tiveram diferentes finalidades, consoante o contexto em que estavam inseridas e o modo como foram formuladas. Na fase de introdução da tarefa, a professora procurou que os alunos interpretassem corretamente o enunciado e dialogassem sobre o que é dado e o que é pedido. Como advogam Oliveira et al. (2014), esta fase tem uma grande influência no sucesso da resolução da tarefa. No caso das aulas analisadas, na fase de introdução das tarefas as perguntas colocadas tiveram como principal propósito verificar se a turma tinha percebido o enunciado, bem como o que era dado e o que era pedido. Nesta fase, evidenciaram-se as perguntas de inquirição, que tiveram como principal objetivo perceber se os alunos estavam a acompanhar a interpretação do enunciado e se concordavam com as ideias dos colegas. Alguns alunos, durante esta fase, mostraram-se concentrados na exploração da tarefa e, consequentemente, desatentos à discussão com os restantes alunos. Devido a esta postura dos alunos e ao pouco aprofundamento da discussão sobre as informações da tarefa, as informações mais importantes nem sempre foram enfatizadas. Por vezes, os alunos parecem ter ficado confusos, como aponta Ponte (2005). Por isso, as fases da exploração da tarefa e de discussão em grupo-turma revelaram-se fundamentais.

Na fase de exploração da tarefa, os alunos expuseram as suas dúvidas e procuraram construir diferentes estratégias de resolução, tal como expresso nos momentos analisados das aulas. Como grande parte das intervenções dos alunos, nesta fase, tiveram como propósito certificar-se que determinada resolução estava correta ou esclarecer uma dúvida, a professora formulou perguntas que lhe permitissem auxiliar os alunos sem diminuir o nível de exigência cognitiva subjacente. Assim, embora as perguntas colocadas tivessem oscilado entre os três tipos, evidenciaram-se as perguntas de focalização, cujo objetivo era focar a atenção do aluno em determinados pormenores para que, através destas perguntas e das respetivas respostas, conseguisse encaminhar o pensamento do aluno, esclarecer as suas dúvidas e auxiliar na construção de estratégias de resolução. Esta finalidade já tinha sido apontada por Velez et al., (2019) num estudo sobre as práticas letivas de quatro professores de Matemática, em particular, nos tipos de ação e questionamento destes.

Na fase de discussão em grupo-turma, os alunos mostraram-se preocupados em compreender os tópicos em estudo, as estratégias utilizadas pelos colegas e as respostas dadas pelos colegas, bem como em responder às perguntas colocadas pelos vários elementos da sala de aula, conforme revelado nos momentos analisadas das aulas. A característica mais marcante desta fase, destacada por Ponte (2005) e Canavarro et al. (2014), incide na interação entre diversos intervenientes que expõem ideias e fazem perguntas uns aos outros. Nesta fase, as perguntas colocadas tiveram, principalmente, o intuito de promover a discussão, incentivando os alunos a participar, partilhar as suas ideias e justificá-las. Neste sentido, nesta fase, a professora colocou mais perguntas de inquirição do que perguntas de confirmação ou de focalização.

As perguntas de confirmação tiveram como finalidade averiguar o nível de compreensão dos alunos sobre os tópicos em estudo; as perguntas de focalização tiverem o objetivo de focar a atenção do aluno em determinados pormenores e encaminhar o seu raciocínio, enquanto as perguntas de inquirição foram colocadas com o intuito de perceber o modo de pensar e a opinião dos alunos, bem como incentivá-los a explicar os seus raciocínios e estratégias aplicadas.

Na análise das resoluções das diferentes tarefas, constatou-se que as perguntas de inquirição predominaram, seguindo-se as perguntas de focalização e as perguntas de confirmação. As perguntas de inquirição surgiram com maior frequência na Tarefa 1 e na Tarefa 2, o que indicia dever-se por serem as tarefas em que os alunos se mostraram mais participativos, interessados e confortáveis com os tópicos em estudo. As perguntas de focalização também se evidenciaram, tendo sido formuladas, tendencialmente, quando os alunos mostravam não perceber as perguntas colocadas, em particular, no caso de anteriormente terem sido colocadas perguntas de confirmação.

Apesar das perguntas de inquirição se evidenciarem ligeiramente, as perguntas de focalização e confirmação apresentam frequências muito próximas, o que revela um determinado 'equilíbrio' na colocação dos diferentes tipos de perguntas, tal como é defendido por Ponte e Serrazina (2000). No estudo de Martinho e Ponte (2005), os autores verificaram que as perguntas de confirmação e focalização foram as mais utilizadas pela professora observada, enquanto as perguntas de inquirição quase não foram formuladas, o que contrasta com os resultados deste estudo. Porém, o facto desta professora aproveitar as discordâncias para fazer os alunos intervir e explicar o seu raciocínio vai ao encontro do constatado no presente estudo. Grande parte das perguntas de inquirição foram promovidas pela existência de discordância ou erros nas resoluções apresentadas.

4.1.2. Como o professor usa as perguntas para clarificar as dificuldades dos alunos na aprendizagem de funções?

As aulas da intervenção pedagógica e a posterior análise da informação recolhida permitem evidenciar várias dificuldades sentidas pelos alunos na aprendizagem de tópicos de funções. Estas dificuldades estão principalmente associadas à interpretação de enunciados e à representação gráfica de funções.

A interpretação de enunciados envolve duas áreas do saber: a Matemática e o Português. Na resolução de problemas, a interpretação de enunciados é fulcral para o sucesso do aluno. Nestes casos, o Português está associado à capacidade que o aluno tem para interpretar um texto, retirando a informação necessária para a resolução do problema, enquanto a Matemática está associada ao pensamento matemático e aos procedimentos efetuados pelo aluno para obter determinado resultado (Mesquita, 2013). A compreensão de enunciados é também influenciada pelo conhecimento que o aluno tem do assunto apresentado e das palavras que o integram, como advoga Nunes (2017). No presente estudo, verificou-se que os alunos apresentavam dificuldades na resolução de problemas quando não conseguiam interpretar corretamente o enunciado. Quando confrontados com os problemas das Tarefas 1 e 2, os alunos revelaram dificuldades na compreensão de vários pontos do enunciado, apesar de estes terem sido discutidos na fase de introdução das tarefas o que vai ao encontro das conclusões de Costa e Fonseca (2009). Estas autoras constataram que os alunos que apresentaram menos sucesso na resolução de problemas foram aqueles que não conseguiram interpretar o enunciado da tarefa, sendo que muitos deles não possuíam hábitos de leitura.

O facto de os alunos, na fase de exploração das tarefas, demonstrarem dificuldades na interpretação do enunciado revelou que os alunos não estiveram atentos às discussões na fase de introdução das tarefas, não expuseram as suas dúvidas ou que a discussão desenvolvida não foi aprofundada o suficiente. Para ultrapassar estas dificuldades, as perguntas que mais contribuíram foram as perguntas de focalização. Este tipo de perguntas permitiu que os alunos se focassem nas informações relevantes do enunciado, as decifrassem e que fossem construindo o seu pensamento de acordo com as informações recolhidas e tendo em vista a resolução do problema. Também no estudo de Miranda (2014), a professora recorreu às perguntas de focalização para ajudar a ultrapassar as dificuldades dos alunos, revelando que estas permitiram "desbloquear os seus raciocínios" (p. 45).

Não só na interpretação do enunciado residem as maiores dificuldades dos alunos, a representação gráfica de funções também é um ponto em que os alunos se mostram inseguros, como defendido por Loureiro (2013) e Domingos (1994). Os alunos demonstraram ter dificuldades no esboço de gráficos, não entendendo os gráficos que eles próprios desenharam ou as informações que estes gráficos transmitiam. Por exemplo, o domínio das funções foi, na maioria das vezes, esquecido pelos alunos. Várias representações gráficas de funções não apresentavam rigor matemático e são inúmeros os exemplos em que os alunos, quando confrontados com os seus gráficos, demonstraram não saber interpretar ou representar gráficos. Ao serem confrontados com gráficos incoerentes, os alunos não parecem ter-se apercebido da leitura que poderia emergir da interpretação do gráfico e do facto de esta não coincidir com o enunciado, por exemplo. Este é um dos aspetos apontados por Eisenberg (2002), que refere que os alunos não compreendem alguns dos gráficos que constroem, revelando-se incapazes de interpretar gráficos. Berg e Phillips (1994) também referem as dificuldades que os alunos revelam na interpretação e construção de gráficos. Ao longo da intervenção pedagógica, para colmatar estas dificuldades, as perguntas de focalização e confirmação indiciam que foram as mais impactantes. As perguntas de confirmação, que tiveram como principal propósito a verificação dos conhecimentos dos alunos, fê-los refletir e repensar as suas respostas e representações gráficas. Já as perguntas de focalização permitiram focar a atenção do aluno em aspetos específicos dos gráficos e, assim, de uma forma sequencial ir alterando os vários erros apresentados nos seus próprios esboços ou nos esboços dos colegas. O papel das perguntas de confirmação como forma de testar o conhecimento dos alunos também foi observado por Martinho e Ponte (2005), num estudo em que verificaram que as perguntas de confirmação formuladas pela professora tiverem como principal objetivo testar a correta utilização da linguagem matemática, e por Miranda (2014).

O desconforto dos alunos relativamente à representação gráfica foi notório ao longo das aulas analisadas e, em particular, nas suas produções. Os alunos recorreram, sistematicamente, à representação simbólica para resolver as tarefas propostas, mesmo quando a representação icónica e, em particular, o esboço de um gráfico parecia ser uma opção mais intuitiva e simples.

A resolução de inequações com módulos foi um dos tópicos em que os alunos parecem ter-se sentido mais desconfortáveis e com mais dificuldades. Ao analisar a aula relativa a este tópico, constatou-se que as intervenções dos alunos foram reduzidas, em relação às outras duas aulas. Os alunos revelaram dificuldades em fazer generalizações, não sendo capazes de olhar para os símbolos matemáticos e interpretá-los. Segundo Aguiar (2019), os alunos mostram-se incapazes de olhar com significado para os objetos matemáticos, o que frequentemente se reflete quando os alunos tentam entender a sintaxe da Álgebra ou interpretar o significado dos símbolos algébricos. Os alunos também manifestaram dificuldades na atribuição de sentido a uma expressão algébrica e de significado a uma variável, tal como constatou Ponte (2006). Estas dificuldades também se refletiram nas intervenções e resoluções dos alunos e respetivas fundamentações. A aula em que se abordou a resolução de inequações com módulos foi aquela em que os alunos menos tentaram explicar e justificar as suas ideias por palavras próprias e em que menos questionaram os colegas ou a professora.

As perguntas colocadas permitiram, de um modo geral, avaliar o grau de compreensão dos alunos e detetar e colmatar as suas dificuldades (Menezes, 1996). Perante as respostas orais dos alunos ou as suas resoluções, a professora detetou dificuldades e formulou perguntas que permitissem ultrapassar tais dificuldades. As perguntas de confirmação permitiram testar o conhecimento dos alunos e, consequentemente, fazê-los relembrar ou refletir sobre conhecimentos adquiridos. As perguntas de focalização contribuíram, essencialmente, no desbloqueio do pensamento dos alunos (Miranda, 2014). Alguns alunos, durante as resoluções, ficaram bloqueados e as perguntas de focalização, ao permitirem construir gradualmente o seu percurso de raciocínio, levaram a que os alunos conseguissem ultrapassar as suas dificuldades e encaminhar a sua resolução. As perguntas de inquirição revelaram-se fulcrais para que os alunos se questionassem sobre determinadas estratégias ou opções. Ao serem questionados sobre o 'porquê' de determinada afirmação ou estratégia, os alunos procuraram justificar-se e, nessa procura pela justificação, perceberam que o seu raciocínio, por vezes, não estava correto ou que não tinham como o sustentar (Oliveira & Boavida, 2016). Por sua vez, a pergunta 'concordam?' permitiu envolver a turma nas discussões e promover a partilha de ideias, o que de certa forma contribuiu para o processo ensino-aprendizagem.

A professora usou as perguntas para, sem diminuir o nível de exigência cognitiva, encaminhar o pensamento do aluno, auxiliá-lo a organizar o seu raciocínio e levá-lo a focar a sua atenção em aspetos fulcrais para facilitar a construção de estratégias, por exemplo.

Apesar das perguntas nem sempre terem atingido o objetivo pretendido, por não terem sido formuladas as perguntas certas, ou por não terem sido colocadas ao aluno certo no momento certo, de um modo geral, contribuíram significativamente para a superação de dificuldades.

4.1.3. Que relação há entre o tipo de perguntas do professor e o tipo de respostas dos alunos na aprendizagem de funções?

Os alunos realizaram atividades distintas a partir das perguntas colocadas nas diferentes fases que compuseram as aulas, entre as quais: (i) interpretação do enunciado da tarefa; (ii) exposição de dúvidas e dificuldades; e (iii) discussão de estratégias e partilha de ideias.

Na análise das três aulas apresentadas, constatou-se que, de um modo geral, os alunos procuraram responder às perguntas colocadas pela professora, mostrando-se participativos e interessados. Porém, na maioria das vezes, os alunos apenas procuraram responder às perguntas colocadas, de forma curta, fazendo-se notar o facto de não estarem habituados a ser questionados.

Relativamente às respostas dos alunos, nas três tarefas propostas, evidenciaram-se as respostas curtas, seguindo-se as explicações e as perguntas. As justificações apareceram muito pouco nas respostas formuladas pelos alunos. Não existiram respostas do tipo desafio, o que indicia que os alunos estavam habituados a aceitar as explicações do professor e a responder apenas ao necessário, não procurando descobrir mais ou desafiar o seu próprio conhecimento. Constatou-se que a maioria das explicações e justificações foram formuladas após uma pergunta de inquirição, enquanto as respostas curtas surgiram, essencialmente, como resposta a perguntas de confirmação e focalização. Este resultado vai ao encontro do constatado por Muir (2009), que verificou que a maioria das explicações emergem de perguntas abertas associadas, muitas vezes neste estudo, a perguntas de inquirição.

Na fase de introdução da tarefa, os alunos responderam, principalmente, com respostas curtas. Tal parece dever-se ao facto de a professora ter colocado, maioritariamente, perguntas de confirmação que, além de terem sido perguntas diretas, foram perguntas fechadas.

Na fase de exploração da tarefa, os alunos, além de colocarem perguntas, elaboraram explicações e justificações, tendo sido a fase em que estes tipos de resposta foram mais evidenciados. Nesta fase, os alunos procuraram esclarecer dúvidas e certificar-se que tinham resolvido corretamente cada uma das tarefas. Por isso, o facto de terem formulado perguntas é compreensível, uma vez que estas parecem ter servido para que os alunos expusessem as suas dúvidas e interpelassem a professora de forma a perceber se as suas resoluções estavam corretas. Por sua vez, as explicações e justificações evidenciam estar relacionadas com o facto da professora ter procurado, através das suas perguntas, que os alunos explicassem e justificassem o seu raciocínio para que, autonomamente, validassem as suas resoluções (Oliveira, & Boavida, 2016).

Na fase de discussão em grupo-turma, as respostas curtas e as explicações foram os tipos de resposta que mais se evidenciaram. As explicações surgiram quando os alunos queriam partilhar ideias com os colegas ou responder às perguntas da professora. Nesta fase da aula, as explicações estiveram, essencialmente, associadas às perguntas de inquirição. O facto de a professora perguntar a razão para os alunos defenderem determinada ideia ou perguntar como é que os alunos resolveram uma tarefa parece estar relacionado com o facto dos alunos terem formulado explicações. Lannin et al. (2011) defendem, através da apresentação de um modelo do processo de raciocínio matemático, que raciocinar matematicamente é um processo que começa, muitas vezes, com conjeturas e depois, quando confrontados com a pergunta "porquê?", investigam e procuram justificar ou refutar ideias.

Em síntese, os alunos responderam, de um modo geral, com respostas curtas às perguntas de confirmação e apenas formularam explicações e justificações quando pretendiam responder a perguntas de focalização relacionadas com as estratégias utilizadas e a perguntas de inquirição. A análise da quantidade de perguntas colocadas e de respostas dos alunos permite inferir que os alunos formularam mais respostas do que as perguntas que lhes foram colocadas, o que revela uma participação satisfatória da turma.

4.1.4. Que perceções têm os alunos sobre o contributo das perguntas na aprendizagem de funções?

Durante a intervenção pedagógica, a professora recorreu várias vezes às perguntas para impulsionar o processo de ensino e de aprendizagem. Da análise das respostas ao questionário final, infere-se que, de um modo geral, os alunos consideraram que as perguntas assumem um papel fundamental nas aulas de Matemática. A importância que os alunos atribuíram às perguntas resulta de inúmeros aspetos, entre os quais, a superação das dificuldades, a perceção do grau de compreensão de determinado tema e o facto das perguntas os desafiarem a pensar.

Os alunos concordaram, na sua esmagadora maioria, com a importância das perguntas colocadas pela professora, pelos próprios ou pelos colegas como meio de ultrapassar e superar dificuldades. Estes revelaram também que concordam que as perguntas colocadas pela professora permitem perceber o grau de compreensão dos tópicos em estudo. Poucos alunos referiram que estas perguntas os fizeram sentir-se desconfortáveis e que não se sentiam confortáveis em questionar a professora à frente dos colegas. Apesar destes alunos terem revelado sentir-se desconfortáveis, quase todos os alunos afirmaram que, quando tiveram dúvidas, colocaram perguntas à professora para as esclarecer, referindo, no entanto, que preferiam tirar dúvidas no lugar.

Relativamente às perguntas colocadas pela professora, os alunos destacam o esclarecimento de dúvidas, a superação das dificuldades e o incentivo à participação como algumas das vantagens. Os alunos referiram ainda que as perguntas colocadas pela professora aumentaram o seu interesse pelas aulas, incentivou-os a trabalhar, a estar atentos e a desenvolver a capacidade de comunicação matemática, bem como de raciocínio. Porém, os alunos também enumeraram algumas desvantagens, entre as quais o facto de se sentirem nervosos ou pressionados à frente dos colegas e de terem receio de não saber responder às perguntas colocadas pela professora.

Por sua vez, em relação às perguntas colocadas pelos próprios ou pelos colegas, os alunos referiram que o facto deles ou dos colegas fazerem perguntas à professora, permitiu esclarecer dúvidas, melhorar a sua compreensão sobre os temas em estudo, confrontar as suas resoluções e as dos colegas, consolidar conhecimentos, construir estratégias em conjunto com os colegas e melhorar a capacidade de comunicação. Alguns alunos referiram também o facto de lhes permitir ser mais ativos na aula, sem prejudicar a turma. Apesar de todas as vantagens, os alunos afirmaram que tinham receio de colocar uma pergunta cuja resposta era óbvia ou de baralhar os colegas e que, por vezes, as perguntas dos colegas lhes causaram confusão.

Por fim, os alunos referiram que as perguntas colocadas nas aulas de Matemática tornavam-nas mais interessantes, estimulavam a aprendizagem e incentivavam os alunos a querer aprender. Estes alunos afirmaram ainda que as perguntas criaram uma dinâmica diferente na aula, permitindo a partilha e troca de ideias, e promoveram uma relação professora-alunos mais aberta, o que contribuiu para a sua aprendizagem.

4.2. Limitações e Recomendações

Na realização deste estudo, em que se pretendia averiguar o contributo das perguntas na aprendizagem de tópicos de funções, surgiram diversas limitações. Uma das maiores limitações esteve relacionada com a recolha de dados, uma vez que, durante o período de aulas, recolher as produções dos alunos revelou-se um desafio. A recolha das produções dos alunos após a resolução de cada tarefa quebrou o ritmo da aula e implicou que os alunos não tivessem acesso às mesmas durante a discussão em grupo-turma. Neste sentido, os alunos tinham que copiar as resoluções do quadro para terem resoluções corretas no caderno e poderem confrontá-las com as suas próprias produções, o que levou a que alguns alunos não conseguissem estar plenamente atentos às discussões por estarem preocupados em copiar o que era apresentado no quadro.

O período reduzido de aulas em que decorreu a intervenção pedagógica não permitiu que os alunos se adaptassem completamente à dinâmica que a professora pretendia implementar. Pelas aulas estudadas, é percetível que os alunos não estavam habituados a que lhes fossem colocadas perguntas e lhes fosse pedido que interviessem mais, comunicassem entre si e com os colegas e explicassem e partilhassem as suas ideias. Por isso, as aulas que integraram a intervenção pedagógica não foram suficientes para perceber o efeito das perguntas no processo de ensino e de aprendizagem. Também devido a esse período e à inexperiência da professora, a colocação de perguntas certas, no momento certo e ao aluno certo revelou-se uma tarefa complicada. As perguntas colocadas pela professora poderiam ter sido perguntas com um nível de exigência cognitiva mais elevado ou que estimulassem mais o raciocínio dos alunos.

Como recomendações para trabalhos futuros, sugere-se a realização de um estudo sobre o contributo das perguntas do professor e dos alunos no processo de ensino e de aprendizagem. Outro estudo que também pode ser relevante é o estudo do contributo dos materiais didáticos na promoção do questionamento nas aulas de Matemática.

Referências Bibliográficas

Adu-Gyamfi, K., Bossé, M., & Faulconer, J. (2010). Assessing Understanding Through Reading and Writing in Mathematics. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.* Acedido a 10 de Março, 2022, de http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/adugyamfi.pdf.

Aguiar, K. N. (2019). *O uso e a compreensão da linguagem algébrica por estudantes do 3.º Ciclo.* Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa.

Alarcão, I. (2001). *Escola reflexiva e supervisão.* Porto editora.

Almeida, M. M. R. (2011). Insucesso na Matemática: As percepções dos alunos e as percepções dos professores. Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto.

Almeida, M. G., & Fernandes, J. A. (2010). A comunicação promovida por futuros professores na aula de Matemática. *Zetetiké*, *18*(34), 109-154.

Almeida, P. (2007). *Questões dos alunos e estilos de aprendizagem – um estudo com um público de Ciências no ensino universitário.* Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro.

Andrade, C., Pereira, P. P., & Pimenta, P. (2015). *Novo Ypsilon – 10.º ano, Volume 3.* Raiz Editora.

Aziza, M. (2018). An analysis of a teacher's questioning related to students' responses and mathematical creativity in an elementary school in the UK. *International Electronic Journal of Elementary Education. 10*(4), 475-487.

Badham, V. (1994). What's the Question?. *Pamphlet*, *23*. Primary Association for Mathematics.

Baroody, A. J. (1993). *Problem solving, reasoning, and communicating, K-8: Helping children think mathematically.* Macmillan.

Barros, P. T. (2008). *O questionamento do supervisor e dos docentes nas sessões de formação contínua: uma estratégia de reflexão sobre a praxis.* Universidade de Aveiro. Acedido a 1 de novembro, 2021, de http://bit.ly/1gVMggP.

Berg, C. A., & Philips, D. G. (1994). An investigation of the relationship between logical thinking structures and the ability to construct and interpret line graphs. *Journal of Research in Science Teaching*, *31*(4), 323-344.

Bishop, A., & Gofree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspetives on mathematics education* (pp. 309–365). Reidel.

Boavida, A. M., & Menezes, L. (2012). Ensinar matemática desenvolvendo as capacidades de resolver problemas, comunicar e raciocinar: contornos e desafios. In L. Santos (Ed). *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 287-295). SPIEM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Boyer, C. B. (1999). *História da matemática*. Edgard Blücher.

Brait, B. (2001). O processo interacional. In D. Preti (Org.), *Análise de textos orais.* Humanitas FFLCH/USP.

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*, 125–153.

Brown, G., & Wragg, E. C. (1993). *Questioning - The leverhulme primary project*: *Classroom Skills.* Routledge.

Bueno, R., Viali, L. (2009). The Historical Construction of the Function Concept. *Educação Matemática em Revista, 1*(10), 37-47.

Campos, C. M. (2009). *Saberes docentes e autonomia dos professores.* Editora Vozes.

Canavarro, A., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da Matemática: O caso de Célia. In L. Santos, A. Canavarro, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Correia (Orgs.), *Atas do EIEM2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 255-266). SPIEM.

Canavarro, A., Oliveira, H., & Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora. In J.P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 219-236). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Carmo, H., & Ferreira, M. M. (2008). *Metodologia da investigação - Guia para autoaprendizagem*. Universidade Aberta.

Castro, N. A. B. (2014). *A comunicação escrita no ensino de matemática: experiência realizada com uma turma do 10º ano de escolaridade durante o estudo das funções.* Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho.

Chi, M. T. H. (2000). Self-explaining expository texts: The dual processes of generating inferences and repairing mental models. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology: Educational design and cognitive science* (pp. 161-238). Lawrence Erlbaum.

Chin, C. (2006). Teacher questioning in science classrooms: What approaches stimulate productive thinking? *International Science Education Conference*, 183–192.

Chin, C., & Osborne, J. (2008). Students' questions: A potential resource for teaching and learning science. *Studies in Science Education*, 44, 1-39.

Cioe, M., King, S., Ostien, D., Pansa, N., & Staples, M. (2015). Moving Students to "the Why?" Mathematics Teaching in the Middle School. *NCTM*, *20*(8), 484–491.

Claxton, G. (2002). *Building learning power*. TLO Ltd.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. Routledge.

Conway, P. F. (2001). Anticipatory reflection while learning to teach: From a temporally truncated to a temporally distributed model of reflection in teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 17, 89-106.

Correia, J. M. T. (1999). *A evolução do conceito de função na segunda metade do século XVIII*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto.

Correia, C. E. F. (2005). Aprender com os erros. *EDUC@ação – Rev. Ped. – UNIPINHAL 1*(3), 13-19.

Costa, A. M., & Fonseca, L. (2009). Os números na interface da língua portuguesa e da matemática – *In Atas do XIX EIEM.* Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. Acedido a 2 de março, 2022, de http://spiem.pt/publicacoes/download-de-atas/

Costa, B., & Rodrigues, E. (2016). *Novo Espaço - Parte 2 - Matemática A 10.º ano.* Porto: Porto Editora.

Coutinho, C. (2011). *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas: teoria e prática*. Almedina.

Coutinho, M. J. P. (2012). *Estratégias potenciadoras do questionamento em ciências naturais.* Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro.

Decreto-Lei de n.º 27.085/36 de 14 de outubro. *Diário da República n.º 241/36* - I Série. Ministério da Educação.

Domingos, A. M. D. (1994). *A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações*. Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa.

Domingues, C., & Martinho, M. H. (2012). Ações do professor na construção coletiva de um argumento genérico numa turma do 9.º ano. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 187-214). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Dong, L., Clarke, D., Cao Y., Wang, L., & Seah, W. T. (2018). Teacher Questioning Practices over a Sequence of Consecutive Lessons: A Case Study of Two Mathematics Teachers. *Sustainability, 11*, 2-8.

Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Kluwer Academic Publisher.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine: sémiotiques registres et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Eisenberg, T. (2002). Functions and associated learning difficulties. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 140-152). Kluwer Academic Publishers.

Esteves, L. (2008). *Visão panorâmica da investigação-ação*. Porto Editora.

Fanizzi, S. (2012). A importância da interação nas aulas de Matemática: da elaboração oral à construção de conhecimentos. *Educação Matemática*, *14*(2), 17-336.

Fennema, E., & Franke, M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 147–164). Macmillan.

Fernandes, D. (2007). Um Imperativo Ético. *Educação e Matemática*, 94, 1.

Ferreira, R. A. (2005). *Portuguese mathematics student teacher's evolving teaching modes: a modified teacher development experiment.* Tese de Doutoramento não publicada, Illinois State University.

Fonseca, L. (2009). Comunicação matemática na sala de aula. *Educação e Matemática.* APM.

Franke, M. L., Fennema, E., & Carpenter, T. P. (1997). Teachers creating change: Examining evolving beliefs and classroom practice. In E. Fennema, & B. S. Nelson (Eds.), *Mathematics Teachers in Transition* (pp. 255-282). Lawrence Erlbaum.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 225-356). Information Age Publishing.

Franke, M. L., Webb, N. M., Chan, A. G., Ing, M., Freund, D., & Battey, D. (2010). Teacher questioning to elicit students' mathematical thinking in elementary school classrooms. *Journal of Teacher Education,* 60(4), 380-392.

Freitas, M. (2006). A *Escrita no processo de formação contínua do professor de matemática.* Tese de Doutoramento, Unicamp.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. A. Cuoco, & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). NCTM.

Ghiglione, R., & Matalon, B. (2001). *O inquérito: teoria e prática*. Celta editora.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts. In *Roles of Representation in School Mathematics* (pp. 1-23). NCTM.

Gonçalves, A. (2004). *Métodos e técnicas de investigação social I - Programa, conteúdo e métodos de ensino teórico e prático*. Acedido a 3 de março, 2021, de https://tendimag.files.wordpress.com/2012/09/mc3a9todos-e-tc3a9cnicas-de-investigac3a7c3a3o-social-i.pdf

Gonçalves, F. M. B. (2007). *O movimento da Matemática Moderna. Concepções, Dinâmicas e Repercurssões*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto.

Gonçalves, A. C. (2015). *Aspectos da história do conceito de funções e suas representações por diagramas, linguagem algébrica e gráficos cartesianos.* Dissertação de Mestrado, USP.

Graesser, A., & Olde, B. A. (2003). How does one know whether a person understands a device? The quality of the questions the person asks when the device breaks down. *Journal of Educational Psychology*, *95*(3), 524–536.

Guerreiro, A. (2011). *Comunicação no ensino-aprendizagem da matemática: Práticas no 1.º ciclo do ensino básico.* Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Guerreiro, A. (2014). Comunicação matemática na sala de aula: Conexões entre questionamento, padrões de interação, negociação de significados e normas sociais e sociomatemáticas. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 237-260). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Guerreiro, A., Ferreira, R. A. T., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: a perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké*, *23*(2), 279-295.

Johnson, H. L., Coles, A. & Clarke, D. (2017). Mathematical tasks and the student: navigating "tensions of intentions" between designers, teachers, and students. *ZDM Mathematics Education,* 49, 813–822.

José, A. A. G. (2015). *As dificuldades dos alunos em tarefas envolvendo gráficos de funções afins no 8.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms that Promote Understanding* (pp. 133-155). Lawrence Erlbaum.

King, A. (1992). Facilitating elaborative learning through guided student generated questioning. *Educational Psychologist*, 27, 111-126.

Kleiner, I. (2012). A brief history of the function concept. In *Excursions in the History of Mathematics* (pp. 103–124). Birkhauser Boston.

Lakatos, E. M., & Marconi, M. A. (1990). *Técnicas de Pesquisa*. Atlas.

Lampert, M., & Cobb, P. (2003). Communication and language. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Shifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 237-249). NCTM.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1990). *Investigação qualitativa: Fundamentos e práticas*. Instituto Piaget.

Lomibao, L. S., Luna, C. A., Namoco, R. A. (2016). The influence of mathematical communication on students' mathematics performance and anxiety. *Science and Education Publishing, 4*(5), 378-382.

Lopes, J. (2018). *A comunicação verbal e não-verbal de docentes do ensino médio e o processo de ensino-aprendizagem: um estudo de caso.* Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto.

Lopes, J., & Silva, H. (2010). *O professor faz a diferença.* Lidel.

Loureiro, N. M. da S. (2013). A *representação gráfica das funções linear e afim: um estudo com alunos do 8.º ano.* Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa.

Love, E., & Mason, J. (1995). *Telling and asking.* In *Subject learning in primary curriculum*. Routledge.

Ludke, M., André, M. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.* PEU.

Martinho, M. H. & Ponte, J. P. (2005). A comunicação na sala de aula de matemática: Um campo de desenvolvimento profissional do professor*.* In *Actas do V CIBEM*, 17-22.

Martins, L. G. B. (2018). *A resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem numa turma do 11.º ano de Ciências e Tecnologias.* Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho.

Matos, J. M., & Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática.* Universidade Aberta.

Meira, L. L. (1996). Aprendizagem, ensino e negociação de significados na sala de aula. In M. Mira, & M. Brito (Orgs.), *Psicologia na educação: articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica*. (Vol. 5, pp. 95–112). ANPEPP.

Menezes, L. (1995). *Concepções e práticas de professores de matemática: contributos para o estudo da pergunta*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa.

Menezes, L. (1996). A importância da pergunta do professor na aula de Matemática. In J. Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina, & C. Loureiro (Orgs.), *Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática: Que Formação?* (pp. 105-116). Secção de Educação Matemática da SPCE.

Menezes, L., Ferreira, R. T., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 135-164). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Mesquita, M. S. B. V. (2013). *A interpretação de enunciados matemáticos e a resolução de problemas: Um estudo com alunos do 4.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado, Instituto Politécnico de Setúbal.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook*. SAGE.

Ministério da Educação e Ciência (2017a). *Aprendizagens Essenciais - Matemática - Ensino Básico*. Acedido em 2 de maio, 2021, de http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

Ministério da Educação e Ciência (2017b). *Aprendizagens Essenciais - Matemática A - Ensino Secundário*. Acedido em 2 de maio, 2021, de http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-secundario

Miranda, A. F. S. (2014). A exploração do questionamento na aula de matemática como meio dos alunos ultrapassarem dificuldades: um estudo com alunos do 10.º ano. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho.

Mota, P. R. P. D. (2019). *Conceito de função: fundamentos e lecionação*. Dissertação de Mestrado, Universidade Aberta.

Moura, A. P. C. (2014). *O erro na regulação da aprendizagem do tema derivada de uma função de alunos do 11.º ano de Matemática A.* Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho.

Moyer, P. S., & Milewicz, E. (2002). Learning to question: categories of questioning used by preservice teachers during diagnostic mathematics interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 293-315.

Muir, T. (2009). Investigating teachers' use of questions in the mathematics classroom. In *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 161-168.

Murthy, D. (2008). Digital ethnography: An examination of the use of new technologies for social research. *Sociology*, *42*(5), 837-855.

Nathan, M., & Knuth, E. (2003). A study of whole class mathematical discourse and teacher change. *Cognition and Instruction, 21*(2), 175-207.

NCTM (2011). *Normas profissionais para o ensino da Matemática.* Associação de Professores de Matemática e Instituto Internacional de Educação.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar.* Associação de Professores de Matemática.

Newton, L. (2017). *Questioning: a window on productive thinking*. International Centre for Innovation in Education (ICIE).

Nicol, C. (1999). Learning to teach mathematics: questioning, listening, and responding. *Educational Studies in Mathematics, 37*, 45-66.

Nunes, M. M. A. (2017). *A interpretação de enunciados matemáticos e a resolução de problemas*. Dissertação de Mestrado, Instituto Politécnico de Setúbal.

Oliveira, C., Boavida, A. M. R. (2016). Raciocinando matematicamente no 5.º ano de escolaridade: os problemas enquanto ponto de partida. In A. P. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo & L. Santos (Eds), *Recursos na educação matemática: livro de atas do EIEM* (pp. 211-228). Universidade de Évora.

Oliveira, H., Canavarro, A. P., Menezes, L. (2014). Casos de multimédia na formação de professores que ensinam Matemática. In J.P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 13-31). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Pedrosa, M. H. (2000). A comunicação na sala de aula: as perguntas como elementos estruturadores da interacção didáctica. In C. Monteiro, F. Tavares, J. Almiro, J. P. Ponte, J. M. Matos, & L. Menezes (Eds.), *Interacções na aula de matemática* (pp. 149-161). Secção de Educação e Matemática da SPCE.

Pereira, A. (1991). *Comunicação e ensino das ciências: Contributo para o estudo da pergunta no discurso da aula de ciências do ensino básico.* Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa.

Pereira, J. E. (2016). *Dificuldades dos alunos em aprender álgebra.* Dissertação de Mestrado, UFSJ.

Petrucci, V. B. C., & Batiston, R. R. (2006). *Estratégias de ensino e avaliação de aprendizagem em contabilidade.* Edições Saraiva.

Pires, R. F. (2016). *O conceito de função: uma análise histórico epistemológica*. Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Pires, M. V., Ferreira, R. T., Domingos, A., Martins, C., Martinho, M. H., Vale, I., Amado, N., Carreira, S., Pimentel, T., Santos, L. (2015). *Investigação em educação matemática 2015: representações matemáticas.* Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Ponte, J. P. (1984). *Function reasoning and the interpretation of cartesian graphs*. Dissertação de Mestrado, University of Georgia.

Ponte, J. P. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Educação e Matemática*, (15), 3–9.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, *3*(2), 3-8.

Ponte, J. P. (2002). O ensino da matemática em Portugal: uma prioridade educativa? In L. Soares (Ed.). *O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas,* Conselho Nacional de Educação. Acedido em 22 de março, 2022 de https://www.cnedu.pt/content/antigo/files/pub/EnsinoMatematica/5-Conferencia.pdf.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). SEM-SPCE.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In J.P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 13-31). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra No Ensino Básico*. DGIDC.

Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J. M., Veia, L., & Viseu, F. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, *20*(2), 39–74.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa*, *7*(2), 355-377.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2015). Representações matemáticas e ações do professor no decorrer de uma discussão matemática. *EIEM*.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º ciclo.* Universidade Aberta.

Projeto Educativo do Agrupamento de Escolas (2016/2018). Braga.

Rocha, S. L. (2015). *O questionamento como elemento integrador do blogue nas aulas de ciências.* Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro.

Rogoff, B. (1991). Guidance and participation in spatial planning. In L. Resnick, J. Levine, & S. Teasley (Eds.), *Perspectives on socially shared cognition* (pp. 349-383). American Psychological Association.

Rogers, L., Pope, S. (2016). Working Group report: A brief history of functions for mathematics educators. In G. Adams (Ed.). *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 36*(2). Acedido em 22 de março, 2022 de https://bsrlm.org.uk/wp-content/uploads/2016/11/BSRLM-CP-36-2-14.pdf

Rojas-Drummond, S., & Mercer, N. (2003). Scaffolding the development of effective collaboration and learning, *International Journal of Educational Research, 39*(1-2), 99-111.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function - A case study. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(3), 229–254.

Santos, S. (2005). Exploração da linguagem escrita nas aulas de matemática. In A. Nacarato & C. Lopes (Orgs.). *Escritas e leituras na Educação Matemática* (pp. 127-141). Autêntica.

Santos, S., Cardoso, A. P., & Lacerda, C. (2016). A planificação na perspetiva dos professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico. *Estudos Curriculares e Práticas Educativas - Atas do XIII Congresso SPCE*. Instituto Politécnico de Viseu.

Scardamalia, M., & Bereiter, C. (1992). Text-based and knowledge-based questioning by children. *Cognition and Instruction, 9*, 177–199.

Shimizu, Y., Kaur, B., Huang, R., & Clarke, D. J. (2010). *Mathematical tasks in classrooms around the world.* Sense Publishers.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky, & G. Harel (Eds.), *The concept of function – Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). MAA Notes 25.

Silva, G. G. C. C. (2014). Um modelo de ensino para o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática em alunos do 5.º ano do Ensino Básico. Dissertação de Mestrado, Escola Superior de Educação de Viseu.

Silva, O. G. da, & Navarro, E. C. (2012). A relação professor-aluno no processo ensino-aprendizagem. *Revista Eletrónica Interdisciplinar*, *3*(8), 95-100.

Silver, E. K. (1990). *Thinking through mathematics: Fostering inquiry and communication in mathematics classrooms.* College Entrance Examination Board.

Singh, P. (2008). Oral and written reflection in practice management: *An action research approach. Systematic Practitioner Action Research*, *21*, 171–85.

Styalinou, D. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*, 325-343.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Superfine, A. (2008). Planning for mathematics instruction: A model of experienced teachers' planning processes in the context of a reform mathematics curriculum. *The Mathematic Educator*, *18*(2), 11-22.

Terceiro, M. S. M. (2014). O processo de melhoria do questionamento de um professor estagiário. Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 438-445.

Tuckman, B. W. (2012). *Manual de Investigação em Educação: Metodologia para conceber e realizar o processo de Investigação Científica*. Fundação Calouste Gulbenkian.

Valério, N. (2005). Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1° ciclo. *Quadrante, 14*(1), 38-65.

Velez, I., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2019). Promovendo o estabelecimento de conexões durante a discussão coletiva com alunos do 3.° ano. In *Livro de Atas do EIEM 2019*, Encontro em Investigação em Educação Matemática. Universidade de Évora.

Viseu, F., Fernandes, J., & Gomes, A. (2015). A resolução de problemas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In F. Viseu, & A. Gomes (Coords.), *Resolução de problemas de Geometria* (pp. 3-17). Lulu.

Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *6*(1), 69-118.

Youschkevitch, A. P. (1981). Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX e siècle. In J. L. Ovaert, & D. Reisz (Eds.), *Fragments d'historie des Mathématiques* (pp. 1-67). A.P.M.E.P.

Watts, M., Gould, G., & Alsop, S. (1997). Questions of understanding: Categorising pupils' questions in science. *School Science Review*, *79*(286), 57–63.

Watson, A., & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teachers Education*, *10*(4), 205–215.

Way, J. (2008). Using questioning to stimulate mathematical thinking. *Australian primary mathematics classroom*, *13*(3), 22-27.

Wellington, J. (2000). *Teaching and learning secondary science: contemporary issues and practical approaches.* Routledge. Acedido a 2 de março, 2022, de http://bit.ly/1fc0EVn

Wood, T., Cobb, P., & Yackel, E. (1991). Changing in teaching mathematics: A case study. *American Educational Research Journal*, *28*(3), 587-616.

Zabalza, M. (2003). *Planificação e desenvolvimento curricular na escola* (7.ª ed.). Edições ASA.

ANEXOS

ANEXO I

Pedido de Autorização para os Encarregados de Educação

Exmo(a). Senhor(a) Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade do Minho, enquanto professora estagiária, pretendo desenvolver experiências de ensino que potenciem a aprendizagem dos alunos na disciplina de Matemática A. O desenvolvimento dessas experiências implica a recolha de dados, que serão obtidos através da resolução de tarefas e da observação das aulas. Para uma melhor compreensão das atividades que se desenvolvem na aula de Matemática necessito de proceder à recolha de dados através de gravações (áudio e/ou vídeo). Para esse fim, venho desta forma solicitar a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio e/ou vídeo dos dados necessários à concretização das experiências de ensino e de aprendizagem na sala de aula do seu educando.

Comprometo-me a usar os dados apenas para fins académicos e a não divulgar o nome da escola e dos alunos, nem expor qualquer indicador que envolva o seu educando. Só me interessa a informação que me ajude a repensar e melhorar as minhas estratégias de ensino em prol da aprendizagem dos alunos.

Agradeço desde já a sua colaboração. Para qualquer esclarecimento adicional pode contactar-me através do correio eletrónico: ——

Braga, 18 de novembro de 2020

A estagiária de Matemática,

____

Anaís Veloso Silva

- -

Autorização

Eu, ____, Encarregado de Educação do(a) aluno(a) ____, autorizo que se faça o registo em áudio e vídeo das atividades de ensino e de aprendizagem nas aulas de Matemática que envolvem o meu educando desde que seja salvaguardado o anonimato do seu nome e de qualquer indicador que o indicie.

Encarregado(a) de Educação

____

- -

Autorização

Eu, ____, Encarregado de Educação do(a) aluno(a) ____, autorizo que se faça o registo em áudio das atividades de ensino e de aprendizagem nas aulas de Matemática que envolvem o meu educando desde que seja salvaguardado o anonimato do seu nome e de qualquer indicador que o indicie.

Encarregado(a) de Educação

____

ANEXO II

Questionário para a caracterização da turma

Nome: ____ Nº: _________

Turma: ___ Idade: ____ E-mail da escola: ________________________________

Concelho onde mora: ________________ Nacionalidade: ____________________

Disciplina preferida: ________________________________

Disciplina com mais dificuldades: ______________________

Nota a matemática no final do ano letivo anterior: ________

Estás a repetir o 10.º ano de escolaridade? _______

Informações sobre os pais:

	Nome (1.º e último)	Profissão	Habilitações literárias (1)
Mãe			
Pai			

(1) 1ºciclo, 2ºciclo, 3ºciclo, Ensino Secundário, Licenciatura, Mestrado ou Doutoramento.

Agregado familiar (pessoas com quem vivem, se viverem com algum dos pais apenas escrever o grau de parentesco):

Grau de parentesco	Nome (1º e último)	Profissão

Encarregado de educação: __________________________

Hobbies: ____

Pretendes frequentar o ensino superior? ____

Que profissão gostarias de ter no futuro? ____________________________

Tens computador para assistir às aulas à distância? ____________________

Tens telemóvel com capacidade para videochamadas? _______

E para instalação de aplicações? ________

Se achares que devemos saber mais alguma coisa sobre ti, escreve aqui: ____

____

____

____

ANEXO III

Questionário inicial

No âmbito do mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, pretendo identificar o contributo das perguntas na aprendizagem de funções. Para tal, numa fase inicial do estudo torna-se pertinente conhecer as características dos alunos da turma onde se realiza a minha prática pedagógica de modo a tê-las em consideração na construção das tarefas que pretendo dinamizar com a turma. Comprometo-me a usar os dados apenas para efeitos de investigação, garantindo o anonimato dos intervenientes.

1. Idade: _____ anos
2. Género: Feminino ☐ Masculino ☐
3. Frequentas o 10.º ano de escolaridade pela primeira vez?
   Sim ☐ Não ☐
4. Que classificação obtiveste à disciplina de Matemática no final do ano letivo anterior? _______
5. Quantas horas, em média, costumas estudar semanalmente para a disciplina de Matemática?
   ☐ Não estudo ☐ Menos de 1 hora ☐ 1 a 2 horas
   ☐ 2 a 3 horas ☐ 3 a 4 horas ☐ Mais de 4 horas
6. Após os estudos do ensino secundário, quais são as tuas perspetivas profissionais?
   ____
   ____
   ____
7. Das disciplinas que estudas no 10.º ano, quais são as tuas favoritas? Porquê?
   ____
   ____
8. Das disciplinas que estudas no 10.º ano, quais são as que tens mais dificuldades? Porquê?
   ____
   ____
   ____
9. Quais são os temas (funções, geometria, ...) que gostas mais na disciplina de Matemática A? Porquê?

10. Quais são os temas (funções, geometria, ...) em que tens mais dificuldades na disciplina de Matemática A? Porquê?

11. Das várias **estratégias** que podem ser adotadas no ensino e na aprendizagem do tema funções, indicadas a seguir, seleciona três a(s) que consideras mais adequada(s).

___ Transmissão da matéria pelo professor.

___ Resolver as tarefas (exercícios, problemas, ...) do manual escolar.

___ Fazer trabalhos de pares/grupos.

___ Ter muitas sugestões para trabalho em casa.

___ Disponibilização de fichas orientadoras.

___ Resolver problemas que envolvam situações do quotidiano.

___ Dar sentido aos conhecimentos matemáticos adquiridos na exploração da calculadora gráfica, do GeoGebra, de vídeos educativos, entre outros.

___ Promover a interação nas aulas entre alunos e alunos e entre professor e alunos.

___ Promover a discussão sobre as resoluções das tarefas.

___ Envolver os alunos nas definições, propriedades e regras matemáticas estabelecidas na aula.

12. Como gostavas que decorressem as aulas de Matemática A? Porquê?

13. Comenta, a seguinte afirmação: "as perguntas que são colocadas pelo professor favorecem a aprendizagem".

14. Comenta a seguinte afirmação: “Nas aulas de matemática o professor deve escutar as ideias dos alunos e pedir-lhes que as justifiquem”.

____

____

15. Comenta a seguinte afirmação: “Nas aulas de matemática o professor deve incentivar os alunos a escutar, responder e questionar”.

____

____

____

ANEXO IV

Questionário final

Este questionário tem por finalidade conhecer as tuas perceções sobre o contributo das perguntas na tua aprendizagem de tópicos de funções. Importa que respondas de forma consciente e sincera a todas as questões que te são apresentadas. Não existem respostas certas ou erradas. A informação recolhida será usada exclusivamente para fins académicos, comprometendo-me a assegurar o seu anonimato.

Idade: _____

Género: Feminino _____ Masculino _____

1. Nas afirmações seguintes, assinala com uma cruz (**X**) a opção que mais se adequa ao teu grau de concordância tendo em consideração a seguinte escala:

DT – Discordo Totalmente; **D –** Discordo; **I –** Indiferente; **C –** Concordo; **CT –** Concordo Totalmente.

Afirmações	**DT**	**D**	**I**	**C**	**CT**
As tarefas e os desafios do estudo de tópicos de funções					
1. O tema funções é mais interessante do que os outros temas matemáticos (geometria e lógica)					
2. Tive dificuldades no estudo de tópicos de Funções					
3. Tive dificuldades em resolver as tarefas propostas na aula de Matemática do tema Funções					
4. Tive menos dificuldades no tópico funções do que em outros temas matemáticos (geometria e lógica)					
5. Nas aulas de Matemática do estudo de funções senti-me desafiado a desenvolver o meu raciocínio					
6. As tarefas propostas motivaram-me e incentivaram-me a participar nas aulas					
7. As tarefas propostas promoveram a minha aprendizagem					
8. O recurso a materiais didáticos como, por exemplo, a calculadora gráfica, facilitaram a minha compreensão sobre o tema Funções					
As perguntas na aula de Matemática					
1. As perguntas colocadas pela professora permitiram-me colmatar as dificuldades que senti no estudo do tema funções					

2. As perguntas colocadas pelos meus colegas ajudaram a ultrapassar dificuldades que senti no estudo do tema funções					
3. As perguntas que coloquei à professora e aos meus colegas ajudaram a ultrapassar dificuldades que senti no estudo do tema funções					
4. As perguntas colocadas pela professora serviram para avaliar o grau de compreensão dos tópicos em estudo de funções					
5. As perguntas colocadas pela professora fizeram-me sentir desconfortável					
6. Não me sinto confortável para colocar perguntas à frente dos meus colegas					
7. Quando tive dúvidas sobre as atividades realizadas na aula coloquei perguntas para as esclarecer					
8. Quando tenho dúvidas na aula prefiro esclarecê-las no meu lugar					
9. A colocação de perguntas por parte da professora desafiou-me a pensar					
A discussão na aula de Matemática					
1. A discussão após a realização de cada tarefa contribuiu para a minha aprendizagem					
2. A discussão após a realização de cada tarefa ajudou-me a esclarecer as minhas dúvidas					
3. A discussão após a realização de cada tarefa permitiu-me melhorar as minhas capacidades de comunicação matemática					
4. Não me sinto confortável para intervir e explicitar o meu raciocínio					
5. A partilha de ideias com os meus colegas contribuiu para a minha aprendizagem					
6. A discussão sobre a resolução das tarefas deu oportunidade aos alunos para estabelecer definições e propriedades dos tópicos de Funções em estudo					

2. Indica três vantagens das perguntas colocadas pela professora na aprendizagem de tópicos de funções.

____

____

____

3. Indica três desvantagens das perguntas colocadas pela professora na aprendizagem de tópicos de funções.

4. Indica três vantagens das perguntas colocadas por ti ou pelos teus colegas na aprendizagem de tópicos de funções.

5. Indica três desvantagens das perguntas colocadas por ti ou pelos teus colegas na aprendizagem de tópicos de funções.

6. Que dificuldades sentiste na aprendizagem de tópicos de funções?

7. Comenta a seguinte afirmação: "As perguntas colocadas na sala de aula são fundamentais para a dinamização das atividades".

ANEXO V

Planos de aula

Plano de aula 1	Comentários
Tópico: Problemas envolvendo a função quadrática. **Objetivo:** Resolver problemas envolvendo a função quadrática **Conhecimentos Prévios:** Noções de função afim e de função quadrática e das suas propriedades **Formato de Ensino:** Ensino exploratório	Turma do 10.º ano de escolaridade do curso de Ciências Socioeconómicas Duração da aula: 90 minutos O formato de ensino adquire características do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: (i) Introdução da tarefa; (ii) Exploração da tarefa; (iii) Discussão e Sistematização de conhecimento
Tarefa 1: Temperatura do André O André acordou às 5 horas com uns calafrios. Pegou no termómetro e verificou que estava com febre. A conselho da sua mãe, registou a sua temperatura nas 5 horas seguintes. Como estava a estudar a função quadrática, apercebeu-se que as suas temperaturas variaram de acordo com a função T, definida por $T(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 38$, que começaram a baixar 20 minutos após a administração de um medicamento para a febre. (T representa a temperatura observada após x horas da primeira medição da temperatura) **1.1.** Qual a temperatura observada às 5 horas? Justifica a tua resposta. **1.2.** Qual a temperatura máxima atingida no período de observação? Justifica a tua resposta. **1.3.** A que horas é que o André tomou o medicamento? Justifica a tua resposta. **1.4.** Mostra que a temperatura, entre as 6 e as 8 horas, se manteve superior a 39,5°C. **1.5.** A Sónia, irmã do André, também está com febre. A sua temperatura variou de acordo com a função S, definida por $S(x) = T(x + 2)$. Em que intervalo de tempo a temperatura da Sónia foi superior a 39,5°C? Justifica a tua resposta.	Pretende-se com a Tarefa 1 que os alunos sejam capazes de interpretar um enunciado e retirar informações pertinentes, que lhes permitam responder às questões colocadas em cada alínea: determinar a imagem na origem e o máximo da função quadrática; resolver inequações do 2.º grau; e transformar o gráfico da função. Tempo estimado: 35 minutos (Fonte: Costa & Rodrigues, 2016, p. 127)
Exploração: 1. Solicitar aos alunos que leiam a tarefa e questioná-los sobre o que é dado e o que é pedido na tarefa. 2. Após o trabalho autónomo, proporcionar uma discussão com a turma sobre as várias questões e as estratégias desenvolvidas para responder a essas questões. 3. Questionar os alunos sobre o domínio da função T e da função S.	Garantir que a turma percebe o enunciado. Colocar algumas perguntas que auxiliem os alunos na interpretação da cada alínea da tarefa. Por exemplo: Qual é o domínio da função em questão?; A que horas é que o André começou a observar a sua temperatura?
Tarefa 2: As caixas	Tempo estimado: 30 minutos

A turma do Fonseca decidiu construir, com folhas de cartão retangular, com $80\ cm$ de perímetro, caixas sem tampa, dobrando, em cada um dos vértices, quadrados de $2\ cm \times 2\ cm$. **2.1.** Investiga a relação entre x, o comprimento de um lado de um cartão, e C, a capacidade da caixa construída. **2.2.** Haverá caixas com diferentes dimensões e capacidades iguais? Justifica a tua resposta. **2.3.** Para que valores de x a capacidade é máxima? **Exploração:** 1. Questionar os alunos sobre o que é dado e é pedido na tarefa. 2. Após o trabalho autónomo, proporcionar uma discussão com a turma sobre as várias questões e a resolução dos alunos. 3. Atender e procurar clarificar as dificuldades dos alunos nas tarefas. 4. Relativamente à alínea 1), questionar os alunos sobre o modo como determinaram o valor da altura e a capacidade de cada caixa com comprimento x. **Tarefa 3: Lançamento de bolas** O Joaquim lançou duas bolas, A e B, simultaneamente. A altura em metros das bolas é dada, em função de t, em segundos, pelas seguintes expressões analíticas: $A: f(t) = 3t - \frac{t^2}{4} + 2$ e $B: g(t) = -t^2 + 8t + 2$. **3.1.** Qual das bolas atingiu maior altura e em que instante? **3.2.** Em que instante é que as duas bolas atingiram a mesma altura? (Apresenta o resultado arredondado às décimas) **3.3.** Determina, com aproximação às décimas, a distância máxima entre as duas bolas e o instante em que tal ocorreu. **Exploração:** 1. Questionar os alunos sobre as informações que conseguem retirar a partir do enunciado. 2. Após o trabalho autónomo, proporcionar uma discussão com a turma sobre as diferentes estratégias construídas para responder às alíneas da tarefa. 3. Colocar algumas questões aos alunos de forma a perceber os seus raciocínios. **Materiais:** Caderno, manual escolar e calculadora gráfica.	(Fonte: NZMaths) Colocar algumas perguntas que auxiliem os alunos na interpretação do enunciado. Por exemplo: Como é que a turma do Fonseca pretende construir a caixa? O que é necessário ter em consideração para construir estas caixas? Questionar os alunos sobre o que significa a relação entre duas variáveis; que conclusões se pode tirar sobre a capacidade de uma caixa se atribuirmos um valor concreto ao comprimento desta caixa. Tempo estimado: 25 minutos (Fonte: Silva, 2013) Colocar algumas perguntas aos alunos, como por exemplo: Como é que sabemos a distância da bola A ao solo? E da bola B?; Qual a bola que atingiu a maior altura?; A distância entre as duas bolas pode ser negativa? Como podemos evitar que a distância entre as duas bolas seja negativa?; Como garantimos que a diferença entre dois valores dá um valor positivo?; Como calculamos a distância entre as duas bolas? E como garantimos que essa distância é máxima? Pretende-se com as tarefas delineadas que os alunos apliquem as propriedades das funções quadráticas na resolução de problemas, recorrendo à calculadora gráfica e a processos analíticos para responder às questões colocadas em cada tarefa.

Plano de aula 2	**Comentários**
Tópico: Função definida por ramos **Objetivo:** Estudar a função definida por ramos **Conhecimentos Prévios:** Noções de função afim e função quadrática **Formato de Ensino:** Ensino exploratório	Turma do 10.º ano de escolaridade do curso de Ciências Socioeconómicas Duração da aula: 90 minutos
Tarefa 1: Consumo de água Na aldeia de Lindoso, o preço a pagar por mês pelo consumo de água é a soma das seguintes parcelas: • 6 euros pelo aluguer do contador; • 0,75 euros por metro cúbico de água consumido até 10 metros cúbico, inclusive; • 1,60 euros por cada metro cúbico de água consumido para além de 10 metros cúbicos. Por uma questão de poupança de água, cada habitante apenas pode consumir até 100 metros cúbicos de água. **1.1.** O Inácio, habitante da aldeia, consome $8\ m^3$ de água por mês. Quanto paga num ano pelo consumo de água? **1.2.** A Isabel, amiga do Inácio, paga mais 15 € do que ele por mês. Quanto é o consumo de água da Isabel por mês? (Apresenta o resultado arredondado às centésimas) **1.3.** Define algebricamente a função f que a cada m^3 de água consumidos faz corresponder o preço pago, em euros. **1.4.** Representa graficamente a função f.	Tempo estimado: 40 minutos (20 minutos de trabalho autónomo + 20 minutos de discussão da tarefa) Pretende-se com a Tarefa 1 que os alunos determinem as expressões algébricas que relacionam cada metro cúbico de água consumido por um determinado habitante com o preço a pagar pelo mesmo habitante. Para a representação gráfica da função, os alunos podem recorrer à calculadora gráfica. Através da Tarefa 1, pretende-se introduzir a função definida por ramos através da noção de que, dependendo do subconjunto do domínio considerado, a expressão algébrica que representa o preço a pagar em função do metro cúbico de água consumido é diferente.
Exploração: 1. Apresentar a Tarefa 1 à turma, garantindo que todos os alunos interpretam corretamente os dados do enunciado da tarefa, questionando-os sobre o que é dado e o que é pedido na tarefa. 2. Durante o trabalho autónomo, circular pela sala de aula de forma a perceber as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos e as suas dificuldades em cada alínea da tarefa. 3. Após o trabalho autónomo, promover a discussão com a turma sobre as várias questões e as estratégias de resolução dos alunos. Para tal, pretendo solicitar a alguns alunos que apresentem a sua estratégia de resolução à turma e explicitem o seu raciocínio.	Os alunos serão selecionados tendo em consideração os seguintes fatores: estratégias de resolução diferentes, utilização correta da linguagem matemática ou alunos que estejam com dificuldades na resolução da tarefa. Colocar algumas perguntas aos alunos, de forma a encaminhar o seu raciocínio, como por exemplo: Se quisermos representar o preço a pagar por cada metro cúbico de água consumido, podemos fazê-lo através de uma única

4. Perguntar aos alunos se existe algum critério para colocar o sinal "=" no valor da abcissa em que se muda de ramo.
5. Perguntar aos alunos: "Que diferenças existem entre as funções que já estudaram e esta função?".
6. Definir função definida por ramos.

Tarefa 2: Meteorologia

O Instituto Português do Mar e da Atmosfera prevê que, num determinado dia e intervalo de tempo, em Sintra, a temperatura varie de acordo com a função f, definida por:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{11}{4}t + \frac{5}{4} & se\ 5 \leq t \leq 9 \\ -\frac{1}{4}t^2 + \frac{13}{2}t - \frac{49}{4} & se\ 9 < t \leq 20 \end{cases}$$

em que t corresponde ao tempo, em horas, de um determinado dia e f corresponde à temperatura, em graus Celsius, em Sintra.

2.1. Indica o domínio da função f.

2.2. Calcula $f(10)$ e $f(5)$, interpretando os resultados no contexto do problema apresentado.

2.3. Determina as temperaturas máxima e mínima atingidas em Sintra e os instantes em que tal ocorreu.

2.4. Faz um esboço da representação gráfica da função f.

2.5. Indica para que valores de k para os quais a equação $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, tem uma e uma só solução.

Exploração:

1. Apresentar e clarificar a Tarefa 2 com a turma, questionando os alunos sobre o que é dado e o que é pedido na tarefa.
2. Durante o trabalho autónomo, circular pela sala de aula de forma a perceber as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos e as suas dificuldades durante a tarefa.
3. Após o trabalho autónomo da turma, pedir a alguns alunos que apresentem as suas estratégias de resolução da tarefa e expliquem o seu raciocínio, procurando o confronto entre diferentes resoluções e ideias.
4. Analisar e discutir as resoluções dos alunos.
5. Sintetizar o tópico abordado na aula, solicitando que os alunos deem exemplos de funções definidas por ramos e justifiquem o seu raciocínio.

Síntese: Pedir que os alunos esbocem alguns exemplos de funções definidas por ramos.

função?; Como podemos dividir o domínio em intervalos sabendo que o preço é diferente entre determinados valores de consumo de água?

Por vezes, para o valor da abcissa em que se muda de ramo, é possível colocar "=" num ou noutro ramo, se a respetiva imagem não se alterar. Os alunos devem ser encaminhados para perceber esta situação matemática. Nesta tarefa, o critério para colocar "=" no valor da abcissa em que se muda de ramo está no enunciado.

Se os alunos não conseguirem perceber a particularidade da função que definiram, perguntar: "Existem funções cujo domínio pode ser dividido em intervalos e que podem ser definidas de forma diferente em cada um desses intervalos?".

Tempo estimado: 40 minutos

A Tarefa 2 interliga conteúdos (função linear, função quadrática e propriedades destas funções) lecionados em aulas anteriores.
Pretende-se que com a Tarefa 2 os alunos estudem as propriedades das funções definidas por ramos e os vários modos de representação das mesmas, associando tais funções a situações em contexto de semi-realidade ou realidade.

Enfatizar o domínio de cada função que constitui a função definida por ramos, utilizando as perguntas de inquirição para levar os alunos a argumentar e explicitar o seu raciocínio.

Desafio: Dividir a turma em seis grupos de quatro elementos e um grupo de três elementos e atribuir um dos exemplos dados a cada grupo, sugerindo que cada um dos grupos formule um enunciado com uma situação do quotidiano que possa ser representada pela função definida por ramos atribuída a esse grupo. **Materiais:** Caderno, manual escolar e calculadora gráfica.	Colocar algumas perguntas para encaminhar o raciocínio dos alunos. Por exemplo: O Instituto Português do Mar e da Atmosfera fez uma previsão da temperatura em Sintra para que período de tempo do dia?; Como é que se pode determinar o máximo de uma função afim?; Como sabemos em qual dos ramos é que o máximo da função é atingido?

Plano de aula 3

Tópico: Inequações com módulos

Objetivo: Resolver inequações com módulos

Conhecimentos Prévios: Noções de função afim, função por ramos e de função módulo

Formato de Ensino: Ensino exploratório

Tarefa 1: Resolução gráfica de inequações com módulos

1.1. Preenche a seguinte tabela:

	Significado	Representação na reta numérica	Resolução analítica
$\lvert x \rvert < 2$			
$\lvert x \rvert > 1$			

1.2. Para $k \in \mathbb{R}$, discute as soluções da inequação $|x| < k$.

1.3. Para $k \in \mathbb{R}$, discute as soluções da inequação $|x| > k$.

Exploração:

1. Propor à turma o preenchimento da tabela.

2. Desafiar os alunos a explorar situações que verifiquem a condição $|x| < k$.

3. Desafiar os alunos a explorar situações que verifiquem a condição $|x| > k$.

4. Elaborar um quadro-resumo que generalize as situações exploradas pelos alunos.

5. Resolver as seguintes inequações:

a) $|x-1| > 5$ **c)** $|x-1| < -3$ **e)** $|2x+5| < 0$

Comentários

Turma do 10.º ano de escolaridade do curso de Ciências Socioeconómicas

Duração da aula: 90 minutos

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: (i) introdução da tarefa; (ii) exploração da tarefa; (iii) discussão/sistematização de conhecimentos.

Duração: 45 minutos

Pretende-se com a Tarefa 1 que os alunos explorem, de forma autónoma, as inequações dos tipos $|x| < k$ e $|x| > k$, $k \in \mathbb{R}$.

Colocar algumas perguntas aos alunos tomar como, por exemplo: “Como é que poderíamos resolver esta inequação se o sinal fosse menor ou igual?”; “Como é que podemos representar estas inequações e determinar o conjunto-solução na calculadora gráfica?”.

Resolução das inequações no grupo-turma, procurando que todos os alunos

<table>
<tr>
<td>

b) $\left|\frac{2}{3}x-1\right|<5$ **d)** $\left|\frac{1}{3}x+5\right|>-3$ **f)** $|x+5|>0$

Tarefa 2: Inequações com módulo

Considera a função f definida por $f(x)=5-|3-2x|$ e $g(x)=|x^2-4x|$.

2.1. Determina os zeros da função f.

2.2. Determina os valores de x para os quais $f(x)$ é negativa.

2.3. Resolve a inequação $g(x)\leq 8$.

Exploração:

1. Apresentar a Tarefa 2 à turma, garantindo que todos os alunos percebem o enunciado da tarefa.
2. Escolher diferentes alunos para apresentarem as suas resoluções.
3. Promover um momento de discussão sobre as soluções encontradas e estratégias utilizadas.

Síntese: Elabora um resumo sobre o que aprendeste relativamente à resolução de inequações com módulos.

Trabalho de casa:

1. Resolve as inequações:

1.1. $|x-3|\leq 2$

1.2. $|x-2|>1$

1.3. $|1-5x|+3\geq 1$

1.4. $|2x+3|-9>5$

Materiais: Caderno, manual escolar e calculadora gráfica.

</td>
<td>

percebam que o quadro-resumo construído pode ajudar na resolução de todo o tipo de inequações com módulos.

Pretende-se que a seleção das resoluções apresentadas seja feita utilizando como critérios as diferenças nas resoluções, a utilização correta da linguagem matemática e o tipo de estratégia utilizada. Assim, pretende-se escolher dois alunos para cada alínea da Tarefa 1 (caso existam dois alunos com estratégias de resolução diferentes, de forma a promover um "confronto" entre essas estratégias de resolução).

Duração: 30 minutos

A Tarefa 2 permite que os alunos ponham em prática os conhecimentos que acabaram de adquirir.

Colocar algumas perguntas aos alunos como, por exemplo: "Como podemos escrever a alínea 2.2. da Tarefa 2 em linguagem matemática?"; "Que estratégias podemos utilizar para resolver uma inequação com módulo de uma função quadrática?".

O critério de escolha dos alunos a apresentar as suas resoluções é o seguinte: serão escolhidos alunos cujas resoluções estejam corretas e com linguagem matemática adequada, no sentido de chamar a atenção dos restantes alunos para possíveis erros na resolução de inequações com módulos e no emprego da linguagem matemática.

Tarefa retirada da página 89 do manual escolar *Novo Espaço 10 – Parte 2 – Matemática A*

</td>
</tr>
</table>