Universidade do Minho
Instituto de Educação

Sara Cristina Magalhães Gomes Ribeiro

Estudo etnomatemático sobre danças folclóricas: Construção e implementação pedagógica de tarefas matemáticas

julho de 2022

Estudo etnomatemático sobre danças folclóricas: Construção e implementação pedagógica de tarefas matemáticas
Sara Cristina Magalhães Gomes Ribeiro
UMinho | 2022

Este trabalho foi financiado por Fundos Nacionais através da FCT (Fundação para a Ciência e a Tecnologia), mediante a atribuição de uma Bolsa de Doutoramento, com a referência SFRH/BD/131162/2017, e no âmbito dos projetos do CIEC (Centro de Investigação em Estudos da Criança da Universidade do Minho) com as referências UIDB/00317/2020 e UIDP/00317/2020.

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia

Universidade do Minho
Instituto de Educação
Centro de Investigação em Estudos da Criança

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Sara Cristina Magalhães Gomes Ribeiro

Estudo etnomatemático sobre danças folclóricas: Construção e implementação pedagógica de tarefas matemáticas

Tese de Doutoramento
Doutoramento em Ciências da Educação
Especialidade de Educação Matemática

Trabalho efetuado sob a orientação do
Professor Doutor Pedro Manuel Baptista Palhares
e da
Professora Doutora María Jesús Salinas Portugal

julho de 2022

AGRADECIMENTOS

A consecução do presente trabalho de investigação, para além de todo o empenho, determinação e persistência, que foram meus, é resultado da participação, envolvimento e apoio de diversas pessoas, que o permitiram e engrandeceram. A todas essas pessoas, que aqui procurarei elencar, o meu obrigada.

Ao meu orientador, Professor Doutor Pedro Palhares, pelo acompanhamento pleno deste trabalho, pela sua visão crítica e construtiva sobre o mesmo, e, também, pela generosa partilha de conhecimentos.

À minha orientadora, Professora Doutora María Jesús Salinas, pelo suporte pleno à integração num novo contexto, pelas pontes criadas com a Galiza, e pela sua disponibilidade e ânimo para colaborar.

Ao meu querido Cristiano, por ter sido pedra basilar neste projeto, assim como o é, e será sempre, na minha vida. Acompanhando paulatinamente este longo percurso, soube ser tudo no momento certo.

À minha família, e muito particularmente aos meus pais, pelo apoio incondicional ao longo deste caminho longo e absorvente, pela compreensão da minha ausência, e pelo incessante alento e amparo.

Aos meus avós, que teriam tido o maior orgulho em ver-me concluir esta página do meu percurso.

A todos os membros do *Grupo Folclórico de Vila Verde*, especialmente ao Mário Rodrigues e à Patrícia Pereira, e da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*, com destaque para o Miguel Lesta e a Lidia López, por terem aceitado participar nesta investigação, e por todas as informações compartilhadas.

À Professora Lígia Antunes, pelo seu esforço para que a implementação das tarefas matemáticas em contexto escolar pudesse ter tido lugar, e pela sua total disponibilidade ao longo de todo o processo.

Aos alunos das turmas do 6.º, 7.º, e 8.º anos de escolaridade, que integraram esta investigação, e com os quais tive o maior prazer de trabalhar, assim como às Professoras de matemática das turmas, Lara Matos e Teresa Surreira, pela sua colaboração e pelos úteis contributos que aportaram ao trabalho.

Ao Professor Doutor Leandro Almeida, por ter contribuído para a criação de condições de trabalho, por meio do acesso ao Instituto de Educação, num momento crucial da escrita da tese de doutoramento.

À Professora Ondina, pela sua disponibilidade e interesse na partilha de conhecimentos musicais.

Ao Professor Doutor Alejandro Sotelino, pelos saberes partilhados e pelas sugestões bibliográficas.

À Filipa, pela ajuda na revisão do texto, e pelo constante incitamento à finalização deste trabalho.

À Diana, por ter apoiado e valorizado a realização deste trabalho, e pelo seu cuidado de sempre.

À Carla, pela amizade e partilha ao longo desta caminhada, e por toda a coragem que me passou.

À Isaura, a minha companheira de gabinete, que conheci numa fase já avançada deste trabalho, por todas as aconchegantes palavras de encorajamento e motivação, e pela esperança que traz consigo.

Por fim, à Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT), pela concessão da Bolsa de Doutoramento (SFRH/BD/131162/2017), que se revelou essencial ao desenvolvimento deste trabalho de investigação.

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

ESTUDO ETNOMATEMÁTICO SOBRE DANÇAS FOLCLÓRICAS: CONSTRUÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO PEDAGÓGICA DE TAREFAS MATEMÁTICAS

RESUMO

O presente trabalho de investigação centra-se no desenvolvimento de um estudo etnomatemático sobre danças folclóricas, e no seu aproveitamento para o ensino da matemática, através da construção e implementação pedagógica de tarefas matemáticas, acompanhadas por recomendações pedagógicas, que visam a sua futura aplicação generalizada. Os objetivos desta investigação são, por um lado, analisar e compreender aspetos matemáticos inerentes a três elementos que constituem danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza - a coreografia, a música, e os acessórios (Ribas, 1983) -, e por outro lado, construir tarefas matemáticas relacionadas com o estudo etnomatemático realizado sobre as danças. Considerando os objetivos expostos, as questões de investigação que norteiam este estudo são: (I) Que formas e transformações geométricas estão presentes na coreografia de danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza?; (II) Que padrões repetitivos caracterizam a estrutura de músicas que acompanham danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza?; (III) Que padrões geométricos estão presentes nos trajes usados por grupos folclóricos do Norte de Portugal e da Galiza?; (IV) Que semelhanças e diferenças existem entre danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza no que refere aos elementos da dança estudados?; (V) Que tarefas matemáticas é possível construir tendo por base os aspetos matemáticos identificados nos elementos das danças folclóricas estudados?; e (VI) Que recomendações pedagógicas devem acompanhar as tarefas matemáticas construídas? Constituem objeto de estudo etnomatemático, ao nível da coreografia, da música, e dos acessórios, danças características de dois grupos folclóricos: um do Norte de Portugal e outro da Galiza. Por se pretender o estudo de um elemento fundamental da cultura de dois grupos folclóricos - as danças -, a estratégia de investigação usada no primeiro objetivo do estudo aproxima-se da etnografia. A identificação de aspetos matemáticos presentes nas danças funda a base para a construção de tarefas matemáticas, a implementar em sala de aula. Ao nível deste segundo objetivo, a estratégia de investigação utilizada é o *design-based research*. Do desenvolvimento deste trabalho de investigação resultou, para além da descoberta de diversos aspetos matemáticos na coreografia, na música e nos acessórias de danças folclóricas, conjuntos de tarefas matemáticas destinadas ao 6.º, 7.º, e 8.º anos de escolaridade, relacionadas com os elementos da dança estudados. A aplicação dessas tarefas em sala de aula fundamenta a elaboração de recomendações pedagógicas, que poderão constituir um importante suporte para a aplicação das tarefas noutros contextos de ensino.

Palavras-chave: Danças Folclóricas; Educação Matemática; Etnomatemática; Tarefas Matemáticas.

ETHNOMATHEMATICAL STUDY ON FOLK DANCES: DESIGN AND PEDAGOGICAL IMPLEMENTATION OF MATHEMATICAL TASKS

ABSTRACT

This research work focuses on the development of an ethnomathematical study on folk dances, and on its use for mathematics teaching, through the design and pedagogical implementation of mathematical tasks, accompanied by pedagogical recommendations, aiming at their future general application. The objectives of this investigation are, on the one hand, to analyze and understand mathematical aspects inherent to three elements that constitute folk dances from the North of Portugal and Galicia - choreography, music, and accessories (Ribas, 1983) -, and on the other hand, to design mathematical tasks related to the ethnomathematical study carried out on dances. Considering the above objectives, the research questions that guide this study are: (I) What geometric shapes and transformations exist in the choreography of folk dances from the North of Portugal and Galicia?; (II) What repetitive patterns characterize the structure of songs that accompany folk dances from the North of Portugal and Galicia?; (III) What geometric patterns exist in the costumes dressed by folk groups from the North of Portugal and Galicia?; (IV) What similarities and differences exist between folk dances from the North of Portugal and Galicia with regard to the dance elements studied?; (V) What mathematical tasks can be designed based on the mathematical aspects identified in the elements of the folk dances studied?; and (VI) What pedagogical recommendations should accompany the designed mathematical tasks? The objects of ethnomathematical study, in terms of choreography, music, and accessories, are characteristic dances of two folk groups: one from the North of Portugal and the other from Galicia. As we intend to study a fundamental element of the culture of two folk groups - the dances -, the research strategy used in the first objective of the study is close to ethnography. The identification of mathematical aspects presented in the dances grounds the design of mathematical tasks, to be used in the classroom. In terms of this second objective, the research strategy used is design-based research. From the development of this research work resulted, beyond the discovery of various mathematical aspects in choreography, music and accessories of folk dances, sets of mathematical tasks for 6th, 7th, and 8th grades, related to the dance elements studied. The application of these tasks in the classroom grounds the elaboration of pedagogical recommendations, which may constitute an important support for the application of the tasks in other teaching contexts.

Keywords: Ethnomathematics; Folk Dances; Mathematical Tasks; Mathematics Education.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE QUADROS

CAPÍTULO I. INTRODUÇÃO

1.1. Pertinência do tema em estudo

O mundo de hoje está a ser moldado por vários fenómenos, entre os quais o da crescente diversidade cultural ao nível local (Palhares, 2008). Claro está que sempre houve diversidade cultural ao nível global, mas o que cada vez mais se verifica é haver coexistência de variadas culturas, e até línguas, no mesmo espaço territorial (Palhares, 2008). Ora, com o aumento da diversidade étnica e linguística da população escolar, os currículos devem refletir os conhecimentos intrínsecos, sociais e culturais dos vários alunos (Rosa & Shirley, 2016). Por contraste, o currículo de matemática tem sido, mais ou menos, internacionalmente estandardizado; tanto que o que aparece no currículo de matemática nas escolas de um país aparece, de forma praticamente idêntica, nas escolas de todos os outros países (Bishop, 2010). Ora, "uma mudança importante no ensino da matemática precisa de dar resposta às alterações contínuas na demografia dos alunos nas salas de aula de matemática pelo mundo" (Rosa & Gavarrete, 2016, p. 24). Em sociedades multiculturais cada vez mais complexas, "planos e programas de estudos configurados pela uniformização de processos e conteúdos de aprendizagem (...) não respondem às necessidades de todos os educandos, do mesmo modo que não respondem às suas condições de vida." (UNESCO, 2009, p. 16). A promoção do direito à educação para todos e a preservação e promoção da diversidade cultural transformam a pluralidade num requisito fundamental da educação, a qual se opõe à tendência dos sistemas educacionais para se constituírem agentes de uniformização (UNESCO, 2009).

Diante do presente cenário de crescente diversidade cultural e linguística em meio escolar, a educação já não pode ser o que era, especialmente no ensino básico (Palhares, 2008). Mas trata-se, a atual situação, também de uma oportunidade, que deve ser aproveitada para mudar a escola em geral, tornando-a, através de várias formas de ensinar, uma escola mais democrática e plural (Palhares, 2008). O campo da educação, e em particular a educação matemática, tomou consciência da necessidade de prestar atenção a esse fenómeno sociocultural: proporcionar uma educação de qualidade às novas gerações requer considerar a notável diversidade existente nas instituições de ensino e ter em conta as especificidades das origens culturais dos alunos (Knijnik, 2010b). Em prol da educação de qualidade, culturalmente aceitável e adaptada às sociedades em evolução, constitui-se indispensável "elaborar planos e programas de estudo multiculturais e plurilinguísticos, fundados na multiplicidade de pontos de vista e inspirando-se em histórias e culturas de todos os grupos da sociedade." (UNESCO, 2009, p. 16).

A perspetiva que se pretende desenvolver para o papel da disciplina de matemática nas sociedades multiculturais da atualidade implica "procurar uma ideia de matemática que a mostre sensível a fatores socias, e como um conhecimento construído em processos sociais." (Moreira, 2008, p. 54). Parafraseando Powell e Frankenstein (1997f), "a matemática deve ser estudada de uma forma que revele as suas conexões com o desenvolvimento das sociedades humanas" (p. 254). Fasheh (1982) acredita que ensinar matemática sem um contexto cultural, assumindo que a mesma é 'absoluta', 'abstrata' e 'universal', é o principal motivo da alienação e do fracasso da maioria dos alunos na referida disciplina. Ademais, o autor considera que ensinar matemática através da valorização cultural e das experiências pessoais dos alunos é determinante para tornar o ensino da matemática mais significativo e relevante. Ora, precisamente no campo do ensino da matemática, a etnomatemática oferece possibilidades para abordagens educacionais baseadas em pedagogias culturalmente relevantes (Rosa & Gavarrete, 2016).

A etnomatemática proporciona novos tópicos que os alunos desconhecem, demonstrando que é possível encontrar matemática em várias práticas culturais por todo o mundo (Shirley & Palhares, 2016). De acordo com Shirley e Palhares (2016), a utilização de exemplos etnomatemáticos nas salas de aula encontra fundamento em dois objetivos consideráveis, nomeadamente: mostrar a alunos pertencentes a 'culturas sub-representadas' que as suas próprias culturas contribuíram para o pensamento matemático; e expor alunos pertencentes a 'culturas majoritárias' a diversas culturas de todo o mundo, promovendo, assim, o respeito pelos outros e, em geral, contribuindo para a educação global. Para Zaslavsky (1991), a introdução de perspetivas multiculturais no ensino da matemática tem várias vantagens, entre as quais: permite que os alunos tomem consciência do papel da matemática em todas as sociedades, entendendo que as práticas matemáticas emergiram de interesses e necessidades reais; e possibilita que os alunos aprendam a apreciar as contribuições de culturas diferentes da sua, e que se orgulhem da sua própria herança cultural; ora, isto é particularmente relevante no caso da integração da herança cultural de alunos pertencentes a minorias, aumentando a sua autoestima e o seu interesse pela matemática. Frankenstein e Powell (1989) reafirmam a importância da apreciação de diversas contribuições culturais e da afirmação cultural dos vários alunos, e apontam outras razões que legitimam a integração da etnomatemática no ensino da matemática, tais como: os exemplos provindos de povos não-ocidentais fornecem uma fonte rica para ilustrar e aplicar conceitos e teoremas matemáticos, e oferecem um relato mais rigoroso sobre a história da matemática; ademais, os alunos são levados a reconsiderarem o seus conhecimentos matemáticos. Em suma, as abordagens etnomatemáticas destinam-se a tornar a matemática escolar mais relevante e significativa para os alunos, a fim de aumentar a qualidade geral da educação e de afirmar visões da matemática culturalmente mais relevantes (Rosa & Gavarrete, 2016).

1.2. Objetivos e questões da investigação

O presente trabalho de investigação, intitulado *Estudo etnomatemático sobre danças folclóricas: construção e implementação pedagógica de tarefas matemáticas*, foi desenvolvido no âmbito do curso de doutoramento em Ciências da Educação - especialidade de Educação Matemática. O estudo objetiva, por um lado, analisar e compreender aspetos matemáticos inerentes a três elementos que constituem danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza - nomeadamente, a coreografia, a música, e os acessórios (Ribas, 1983) -, e objetiva, por outro lado, construir tarefas matemáticas relacionadas com o estudo etnomatemático realizado sobre as danças, tendo em vista o aproveitamento deste elemento do folclore para o ensino da matemática. Constituem objeto de estudo etnomatemático, ao nível da coreografia, da música, e dos acessórios, danças folclóricas características de um grupo folclórico de Vila Verde - concelho do distrito de Braga, na região do Norte de Portugal - e de um grupo folclórico de Santiago de Compostela - cidade da Galiza. Relativamente à coreografia, pretende-se estudar formas e transformações geométricas presentes nos movimentos que os dançarinos realizam, no plano, ao longo das danças folclóricas. Em relação à música, pretende-se estudar padrões repetitivos que caracterizam a estrutura das músicas que acompanham as danças folclóricas. E, no que concerne aos acessórios, pretende-se estudar padrões geométricos presentes nos trajes usados pelos dançarinos. Em síntese, pretende-se o desenvolvimento de um estudo etnomatemático sobre um elemento particular do folclore - as danças folclóricas - e o seu aproveitamento para o ensino da matemática, através da construção de tarefas matemáticas, e de recomendações pedagógicas, que visam a sua futura aplicação generalizada

Considerando os objetivos do estudo descritos, propõem-se as seguintes questões de investigação:

- **I.** Que formas e transformações geométricas estão presentes na coreografia de danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza?
- **II.** Que padrões repetitivos caracterizam a estrutura de músicas que acompanham danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza?
- **III.** Que padrões geométricos estão presentes nos trajes usados por grupos folclóricos do Norte de Portugal e da Galiza?
- **IV.** Que semelhanças e diferenças existem entre danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza no que refere aos elementos da dança estudados?
- **V.** Que tarefas matemáticas é possível construir tendo por base os aspetos matemáticos identificados nos elementos das danças folclóricas estudados?
- **VI.** Que recomendações pedagógicas devem acompanhar as tarefas matemáticas construídas?

1.3. Estrutura do trabalho

O presente trabalho de investigação é composto por oito capítulos essenciais, doravante descritos.

O **primeiro capítulo**, *Introdução*, corresponde ao capítulo em exposição, e aborda a pertinência do tema em estudo, os objetivos e questões da investigação, e, tal como se constata, a estrutura do trabalho.

O **segundo capítulo**, *O campo da etnomatemática*, abrange a primeira parte do enquadramento teórico, sendo exposta a revisão da literatura desenvolvida sobre o tema estruturante desta investigação: a etnomatemática. Ao longo do capítulo, são desenvolvidos vários tópicos: a introdução do conceito de 'etnomatemática' por Ubiratan D'Ambrosio; a compreensão da matemática como fenómeno cultural; e a exploração da etnomatemática como domínio de investigação, onde se apresenta uma revisão ampla de estudos etnomatemáticos realizados sobre artefactos e sobre práticas ligadas ao movimento corporal.

O **terceiro capítulo**, *Tarefas matemáticas e atividade na sala de aula*, abrange a segunda parte do enquadramento teórico, sendo exposta a revisão de literatura desenvolvida em torno da componente desta investigação diretamente relacionada com a Educação Matemática. Ao longo do capítulo, são desenvolvidos diversos tópicos: as relações entre tarefa, atividade e aprendizagem dos alunos; as tarefas a considerar de qualidade para o ensino-aprendizagem da matemática; a implementação de tarefas de qualidade na sala de aula; a classificação das tarefas matemáticas; o papel prevalecente dos exercícios; e a exposição de práticas tradicionais dos professores na sala de aula, e respetivos motivos subjacentes.

O **quarto capítulo**, *Enquadramento metodológico*, compreende as opções metodológicas tomadas, em primeiro lugar, no âmbito do estudo etnomatemático das danças folclóricas, e, em segundo lugar, no âmbito da construção das tarefas matemáticas, que posteriormente foram aplicadas em sala de aula.

O **quinto capítulo**, *Análise etnomatemática das danças folclóricas*, contempla a apresentação dos resultados decorrentes da análise de cada um dos três elementos que constituem danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza - nomeadamente, a coreografia, a música, e os acessórios (Ribas, 1983).

O **sexto capítulo**, *Construção das tarefas matemáticas*, versa sobre o processo de construção das tarefas matemáticas, e inclui a apresentação das tarefas que resultaram da sua validação e refinamento.

O **sétimo capítulo**, *Análise da implementação pedagógica das tarefas matemáticas*, integra a apresentação dos resultados associados à análise da aplicação das tarefas em contexto de sala de aula.

Para terminar, o **oitavo capítulo**, *Considerações finais*, é dedicado à apresentação das conclusões do estudo realizado, procurando-se dar uma resposta fundamentada e adequada a cada uma das questões de investigação que norteiam o estudo. São, igualmente, elencadas as limitações do estudo e, por fim, explanam-se sugestões para futuras investigações ligadas ao trabalho de investigação realizado.

CAPÍTULO II. O CAMPO DA ETNOMATEMÁTICA

2.1. Etnomatemática: Introdução do conceito por Ubiratan D'Ambrosio

Imbuído em reflexões associadas, por um lado, à história do conhecimento científico e ao processo de desenvolvimento dos países que então se libertavam do regime colonialista, e, por outro lado, aos objetivos da educação matemática nesses 'novos países', por comparação com os países centrais, D'Ambrosio fez sobressair, no âmbito do *Terceiro Congresso Internacional de Educação Matemática* (ICME-3), realizado em 1976, em *Karlsruhe*, na Alemanha, aspetos políticos e socioculturais como sendo fundamentais para se responder à questão 'Porquê ensinar matemática?' (D'Ambrosio, 1991, 1993). "Foram assim lançadas as bases do *Programa Etnomatemática*." (D'Ambrosio, 1993, p. 6).

O posicionamento assumido por D'Ambrosio surge como resultado de uma interrogação às prioridades científicas para os países em desenvolvimento e de um apelo a uma visão não-eurocêntrica sobre a história do conhecimento científico (D'Ambrosio, 1991). À data, o pensamento dominante era o da precisão absoluta, intocável, da Matemática, sem qualquer relacionamento mais estreito com o contexto sociocultural, e muito menos político, e, portanto, intocável por outros fatores que não a própria dinâmica interna da Matemática (D'Ambrosio, 1991, 1993). Quando muito, refere o autor, podiam existir algumas 'concessões' do tipo 'curiosidades', mais como folclore, acerca do modo como 'tribos primitivas' contavam e mediam, da maneira como o 'povo inculto' fazia os seus cálculos e as suas medições, etc.; isto, sobretudo graças às pesquisas de antropólogos, sociólogos e psicólogos (D'Ambrosio, 1991, 1993). É nesse quadro que D'Ambrosio conceptualiza a *etnomatemática* como uma alternativa epistemológica mais adequada à diversidade de realidades socioculturais do que a 'Matemática dominante' - de inspiração e estruturação inteiramente europeias (D'Ambrosio, 1991, 1993). No entendimento do autor, o conceito referido afigura-se mais abrangente face a outras designações que o próprio havia considerado - como por exemplo, 'matemática antropológica', etnografia matemática', 'matemática cultural' -, ou outras propostas que, desde o início do século XX, por meio da expansão das pesquisas antropológicas, destacavam aspetos matemáticos nas culturas dos povos então colonizados (D'Ambrosio, 1991, 1993).

"O termo *etnomatemática* é utilizado para expressar a relação entre cultura e matemática", patenteia D'Ambrosio (2001c, p. 308). De acordo com D'Ambrosio (1985), "a cultura manifesta-se através de jargões, códigos, mitos, símbolos, utopias, e maneiras de raciocinar e inferir. Associado a esses, temos práticas como codificar e contar, medir, classificar, ordenar, inferir, modelar, e assim por diante, as quais constituem a *etnomatemática.*" (p. 46). Ora, a maneira como os grupos culturais realizam essas práticas, isto é, 'matematizam', é diferente em cada grupo cultural (D'Ambrosio, 1986). Quer dizer, cada grupo cultural tem as suas formas particulares de 'matematizar' (D'Ambrosio, 1998). "Ao falar de matemática associada a formas culturais distintas, chegamos ao conceito de *etnomatemática.*" (D'Ambrosio, 1998, p. 17). A *etnomatemática* é, assim, definida como "a matemática praticada por grupos culturais, tais como comunidades urbanas e rurais, grupos de trabalhadores, classes profissionais, crianças de uma certa faixa etária, sociedades indígenas, e tantos outros grupos que se identificam por objetivos e tradições comuns aos grupos." (D'Ambrosio, 2001a, p. 9). "Claro que esse conceito exige uma interpretação mais ampla do que é matemática" (D'Ambrosio, 1985, p. 45). Com efeito, passa a incluir-se, como matemática, uma gama ampla de atividades humanas que, mesmo não tendo atingido esse nível de formalização - isto é, não tendo adquirido o 'estatuto de matemática'-, permanecem vivas em grupos culturalmente identificáveis e constituem rotinas nas suas práticas (D'Ambrosio, 1985). Trata-se de práticas matemáticas identificadas com grupos culturais, as quais são ensinadas, aprimoradas e refletidas num sistema de educação não-formal, e que constituem a essência para a construção de um corpo de conhecimento associado à 'ação', ao 'fazer' (D'Ambrosio, 1986). Somos, portanto, impelidos "a olhar para a história da matemática num contexto mais amplo, de modo a incorporar nela [na matemática] outras formas possíveis de matemática." (D'Ambrosio, 1985, p. 44).

Para D'Ambrosio (2001b), é importante situar as discussões sobre a natureza da *etnomatemática* no âmbito de uma reflexão mais ampla sobre a natureza do conhecimento; mais precisamente, sobre a forma como o conhecimento em geral, e a matemática em particular, se relacionam com o mundo real. A propósito desse tema, alusivo à dimensão conceptual da *etnomatemática*, D'Ambrosio (2001a) explica:

> A matemática, como o conhecimento em geral, é resposta às pulsões de sobrevivência e de transcendência, que sintetizam a questão existencial da espécie humana. A espécie cria teorias e práticas que resolvem a questão existencial. Essas teorias e práticas são as bases de elaboração de conhecimento e decisões de comportamento, a partir de representações da realidade. (...) Em todas as espécies vivas, a questão da sobrevivência é resolvida por comportamentos de resposta imediata, aqui e agora, elaborada sobre o real e recorrendo a experiências prévias [conhecimento] do indivíduo e da espécie [incorporada no código genético]. (...) Na espécie humana, a questão da sobrevivência é acompanhada pela da transcendência: o "aqui e agora" é ampliado para o "onde e quando". A espécie humana transcende espaço e tempo para além do imediato e do sensível. O presente se prolonga para o passado e o futuro, e o sensível se amplia para o remoto. (pp. 27-28)

Do disposto anteriormente ressalta que "o conhecimento é deflagrado a partir da realidade." (D'Ambrosio, 1999, p. 35). Mais precisamente, é resultado dessa dupla necessidade que a espécie humana tem de lidar com situações que a realidade propõe para conseguir 'sobreviver' e, ao mesmo tempo, tentar 'transcender' a sua própria existência (D'Ambrosio, 1991, 1993). "A satisfação da pulsão integrada de sobrevivência e transcendência leva o ser humano a desenvolver modos, maneiras, estilos de explicar, de entender e aprender, e de lidar com a realidade percetível." (D'Ambrosio, 2008, p. 36). Portanto, a realidade informa os indivíduos, que, por consequência, geram conhecimento para explicar, entender e conviver com essa realidade; o conhecimento gerado é, então, organizado intelectualmente, comunicado, socializado, compartilhado e organizado socialmente (D'Ambrosio, 1999). Nesse sentido, pode-se entender que, embora tenha o indivíduo como ponto de partida, o conhecimento organiza-se e consolida-se como um acontecimento social, produto da interação entre indivíduos (D'Ambrosio, 1999).

De acordo com D'Ambrosio (1999), "a geração e o acúmulo de conhecimento obedecem a uma coerência cultural" (p. 35), a qual se repercute, revela o autor citado, numa 'comunalidade de ações'. Mais precisamente, o conhecimento gerado pela interação comum de indivíduos - resultante da comunicação que estabelecem entre si - engloba um conjunto de códigos e de símbolos que são organizados intelectual e socialmente, constituindo um conhecimento compartilhado pelo grupo (D'Ambrosio, 2001a). De igual forma, o comportamento gerado pela interação comum de indivíduos - resultante da comunicação social - está subordinado a um sistema de valores que é comum ao grupo, possibilitando um comportamento compatibilizado (D'Ambrosio, 2001a). Sinteticamente, "o acúmulo de conhecimentos compartilhados pelos indivíduos de um grupo tem como consequência compatibilizar o comportamento desses indivíduos" (D'Ambrosio, 2001a, p. 28). Ora, a associação simbiótica de conhecimentos compartilhados e comportamentos compatibilizados constituem a cultura de um grupo (D'Ambrosio, 2001a). Nessa lógica, a cultura e as suas manifestações dão origem a organizações grupais, como famílias, tribos e comunidades, as quais caracterizam uma sociedade (D'Ambrosio, 1999).

Na incursão anterior pelo que D'Ambrosio (1999) denomina 'ciclo do conhecimento', foi possível apurar que o conhecimento é percecionado como algo que é gerado e organizado intelectualmente pelos indivíduos, em resposta ao ambiente social, cultural e natural, e que, após ser compartilhado - através da comunicação -, e organizado socialmente, se torna algo que faz parte de um grupo - a sua cultura (D'Ambrosio, 2001b). No prosseguimento dessa visão, D'Ambrosio (2001b) explica que observadores, analistas, teóricos, sábios, académicos, profissionais, entre outros 'detentores de poder', 'expropriam', 'classificam' e 'rotulam' esse conhecimento, para que, depois, possa ser 'transmitido' e 'difundido'. Desse modo, surgem 'formas de conhecimento estruturadas' - como por exemplo, línguas, religião, culinária, medicina, valores, ciências, matemática, etc. -, todas inter-relacionadas e produzidas em resposta à maneira como a realidade é compreendida naquele ambiente social, cultural e natural (D'Ambrosio, 2001b). Nessa linha de pensamento, o autor em referência chama a atenção para a possibilidade de existirem 'diferentes formas de conhecimento', que surgem como resultado de respostas diferentes ao ambiente social, cultural e natural. Nas palavras de D'Ambrosio (2001b), "tal como mais do que uma religião, mais do que um sistema de valores, pode haver mais do que uma maneira de explicar, compreender, lidar com a realidade" (p. 68). Ora, as diversificadas manifestações do Homem na tentativa de entender, explicar, manejar a realidade natural para, dessa forma, adquirir conhecimento, são, na conceptualização de D'Ambrosio, o ponto de partida para a *etnomatemática* (D'Ambrosio, 1993).

"Naturalmente, em todas as culturas e em todos os tempos, o conhecimento, que é gerado pela necessidade de uma resposta a problemas e situações distintas, está subordinado a um contexto natural, social e cultural." (D'Ambrosio, 2001a, p. 60). Sob este ponto de vista, D'Ambrosio (1998) concebe a *etnomatemática* como um *Programa* que "visa explicar os processos de geração, organização e transmissão de conhecimento em diversos sistemas culturais e as forças interativas que agem nos e entre os três processos. Portanto, o enfoque é fundamentalmente holístico." (p. 7). De acordo com D'Ambrosio (1991, 1993), uma 'aproximação etimológica' - sustentada nos elementos *etno*, *matema*, e *tica* - demonstrou que, efetivamente, a palavra *etnomatemática* seria o termo mais adequado para esse *Programa* abrangente sobre geração, organização e difusão do conhecimento. *Etno*, então concebido como algo mais amplo do que a sua simples associação a etnias, é referente ao contexto cultural (D'Ambrosio, 1998). Assim sendo, *etno* é utilizado para significar 'ambientes naturais e culturais' (D'Ambrosio, 1999) e como forma de reconhecer a 'dinâmica de diferentes formas de conhecimento' associadas a cada um desses ambientes (D'Ambrosio, 2001b). Sobre isso, D'Ambrosio (2001a) escreve: "a abordagem a distintas formas de conhecer é a essência do *Programa Etnomatemática*." (p. 63). *Matema* aponta no sentido de 'explicar', de 'conhecer', de 'entender' (D'Ambrosio, 1998). E, por fim, *tica* provém do termo grego *techné*, que significa 'arte' ou 'técnica', (D'Ambrosio, 1998), fazendo referência a 'maneiras', 'modos' (D'Ambrosio, 2001a, 2001b), 'habilidades' (D'Ambrosio, 2001a). "Assim, poderíamos dizer que *etnomatemática* é a arte ou técnica de explicar, de conhecer, de entender nos diversos contextos culturais." (D'Ambrosio, 1998, pp. 5-6). No seguimento da definição, é indicado:

> Somos assim levados a identificar técnicas ou mesmo habilidades e práticas utilizadas por distintos grupos culturais na sua busca de explicar, de conhecer, de entender o mundo que os cerca, a realidade a eles sensível e de manejar essa realidade em seu benefício e no benefício de seu grupo. Naturalmente, nos situamos aí no contexto etnográfico. (D'Ambrosio, 1998, p. 6)

O termo *etnomatemática* foi introduzido por Ubiratan D'Ambrosio, na conceção acima, em 1975, e, desde então, tem sido utilizado por inúmeros pesquisadores em todo o mundo (D'Ambrosio, 1998). Importa ressalvar que, embora a mesma palavra - *etnomatemática* - já fosse utilizada antes, principalmente por etnógrafos, a maneira como D'Ambrosio a concebeu, "como uma abreviação da frase *ticas* de *matema* em distintos *etnos* é original." (D'Ambrosio, 2017, p. 664). Compreenda-se que, na conceptualização de D'Ambrosio, a palavra *etnomatemática* não é uma extensão da palavra 'matemática' (D'Ambrosio, 2017). Na realidade, *matema* tem pouco a ver com 'matemática' (D'Ambrosio, 2004b). Por conseguinte, a *etnomatemática* não pode ser interpretada como a conjugação de *etno* e *matemática* (D'Ambrosio, 2017), e, muito menos, confundida com 'matemática étnica' (D'Ambrosio, 2004b, 2017). "Diferentemente do que sugere o nome, *etnomatemática* não é apenas o estudo de 'matemáticas das diversas etnias'." (D'Ambrosio, 2001a, p. 63). Ora, no sentido de evitar as frequentes más interpretações que surgem associadas ao termo *etnomatemática*, D'Ambrosio (2004b, 2017) sugere o uso preferencial do termo *Programa Etnomatemática.* Esse termo enfatiza a aceção de D'Ambrosio, e o facto de se tratar de um programa com caráter dinâmico, que não apresenta uma estrutura definitiva (D'Ambrosio, 2017).

2.2. A matemática como fenómeno cultural: Uma noção precursora da etnomatemática

"As verdades matemáticas residem no mundo externo, para serem descobertas pelo Homem, ou são invenções do próprio Homem? A realidade matemática tem existência e validade independentes da espécie humana ou é meramente uma função do sistema nervoso humano?" (White, 1947, p. 289). Essas duas questões provocatórias, que abrem o artigo de White (1947), constituem o mote para iniciar a reflexão sobre a natureza da atividade matemática, e da própria matemática em si, enquanto produto.

No sentido de dar resposta às questões que o próprio emite, White (1947) afirma: "a matemática na sua totalidade, as suas 'verdades' e as suas 'realidades', é uma parte da cultura humana" (p. 291). Longe de ter uma existência e uma validade à parte da espécie humana, a matemática é, no entendimento do autor, o produto cumulativo de tempos e tempos de empenho intelectual do Homem. Todavia, o facto de os conceitos matemáticos 'entrarem na mente humana' a partir do exterior faz com que geralmente se acredite que advêm do mundo externo, em vez de se crer que têm a sua origem na própria cultura criada pelo Homem (White, 1947). Conforme refere White (1947), a matemática não se originou com Euclides e Pitágoras, nem mesmo com os pensadores do Antigo Egito e da Mesopotâmia. Na visão do antropólogo em referência, "a matemática é um desenvolvimento do pensamento que teve o seu início com a origem do Homem e da cultura há sensivelmente um milhão de anos atrás." (p. 301).

Para Wilder (1950), só o reconhecimento da ‘base cultural da matemática’ permitirá alcançar uma melhor compreensão da sua natureza. O matemático evidencia, no entanto, que encarar a matemática como um elemento cultural não é algo novo. “Os antropólogos têm feito isso, mas como os seus conhecimentos de matemática são, geralmente, muito limitados, as suas reações têm consistido, normalmente, em comentários dispersos sobre tipos de aritmética encontrados em culturas primitivas.” (Wilder, 1950, p. 260). Neste âmbito, Wilder (1950) refere o artigo de White (1947) como uma exceção ao disposto. Expondo aquela que é a sua visão sobre a natureza da matemática, Wilder (1950) declara:

> Como um corpo de conhecimento, a matemática não é algo que eu sei, que vocês sabem, ou que qualquer pessoa sabe: é uma parte da nossa cultura, da nossa propriedade coletiva. Nós até nos podemos esquecer, com o passar do tempo, de algumas das nossas próprias contribuições individuais para a mesma, mas essas podem permanecer, apesar do nosso esquecimento, na corrente da cultura. Tal como no caso de muitos outros elementos culturais, aprendemos matemática desde o momento em que somos capazes de falar e, desde o início, ficamos impressionados com aquilo que denominamos como a sua “verdade absoluta”. (p. 260)

De acordo com Wilder (1950), a partir do momento em que podem existir, e, de facto, têm existido, diferentes culturas, diferentes formas de pensamento e, portanto, diferentes matemáticas, é impossível não considerar a matemática como algo produzido pelo Homem, e que não tem nem mais, nem menos, mas sim o mesmo caráter de ‘necessidade’ ou de ‘verdade’ do que quaisquer outros elementos culturais.

Mais tarde, Wilder (1981) aprofunda as suas ideias relativamente à conceptualização da *matemática como um sistema cultural*, num livro assim mesmo intitulado. Tal como refere Wilder (1981), “o que quer que o futuro possa trazer relativamente a estas questões, parece não haver como negar que aquilo com que estamos a lidar é de natureza cultural. Alguns expressam isto dizendo que ‘a matemática é feita pelo Homem’.” (p. 30). Nessa linha de pensamento, o matemático reforça a ideia de que parece não haver justificação para não incluir a matemática entre as demais formas culturais, no sentido em que a matemática é um dos ‘dispositivos culturais’ que o Homem criou, tanto para fins adaptativos, como para a sua própria satisfação intelectual. Importa fazer, aqui, um breve parêntesis, para estabelecer uma analogia entre o pensamento de Wilder (1981) descrito antes - mais concretamente entre os propósitos adaptativos e intelectuais do ser humano que subjazem à criação da matemática - e as ‘pulsões de sobrevivência e de transcendência’ da espécie humana, teorizadas por D’Ambrosio (2001a).

Wilder (1981) designa a matemática uma ‘subcultura’ da cultura geral, e, em si mesma, um ‘sistema cultural’. Em conformidade com o autor, tal como sucede com a maioria das ‘subculturas’, “a matemática tem estado sujeita, ao longo da sua história, às influências do meio ambiente e, na verdade, deve a sua existência às necessidades das culturas nas quais se originou." (p. 54). Associado a isso, Wilder (1950) reconhece que "nas várias culturas humanas são encontrados certos elementos que designamos matemáticos." (pp. 269-270). Segundo Wilder (1950), nos primeiros tempos da civilização, esses elementos variavam muito de cultura para cultura, de tal forma que o que era tido como 'matemática' numa certa cultura dificilmente seria reconhecido como tal em outras. Ora, com o aumento da difusão, devido, em primeiro lugar, à exploração e à invenção, e, em segundo lugar, à utilização cada vez mais frequente de símbolos adequados, e à sua posterior padronização e disseminação, os elementos matemáticos das culturas mais avançadas, gradualmente, fundiram-se, até que resultou, essencialmente, um elemento comum a todas as culturas civilizadas, conhecido como 'Matemática'; contudo, não se trata de uma entidade fixa, mas antes sujeita a mudanças permanentes (Wilder, 1950). A propósito do disposto, Wilder (1981) refere que uma das vantagens de ter uma 'visão culturológica' da matemática é o desvendamento das forças culturais que controlam a evolução da 'invenção matemática'.

No entendimento de Gerdes (1996), os dois autores supramencionados podem, a par de outros sensivelmente contemporâneos que ele aponta, ser identificados como 'precursores da etnomatemática'; isto, em virtude das reflexões pioneiras acerca do vínculo da matemática com a cultura que protagonizam (Rosa & Orey, 2005, 2006). Mas facto é que as reflexões de White, Wilder, e restantes, não tiveram grande repercussão à data (Gerdes, 1996). A ideia prevalecente durante a primeira metade do século XX "era a de que a matemática era universal e uma forma basicamente apriorística de conhecimento. Uma tendência reducionista imperava na educação matemática, implicando modelos de cognição independentes da cultura." (Gerdes, 1996, p. 107). Nas palavras de Bishop (1988), "a convicção geral era a de que a matemática era um conhecimento 'livre-de-cultura'." (p. 179). Ora, na perspetiva de Gerdes (1996), isso fez com que a *etnomatemática* surgisse mais tarde do que as restantes etnociências.

Só no final da década de setenta e no início da década seguinte é que se começa a verificar uma crescente consciencialização para os aspetos sociais e culturais da matemática e da educação matemática (Gerdes, 1996). A crença generalizada na universalidade da matemática e na sua independência face à cultura começa a ser posta em causa ao surgirem evidências baseadas em estudos antropológicos e transculturais, "que não só apoiam a ideia de que a matemática tem uma história cultural, mas também que, de diferentes histórias culturais, tem resultado o que só pode ser descrito como diferentes matemáticas." (Bishop, 1988, p. 180). Em sentido convergente, D'Ambrosio (1985) faz referência a pesquisas feitas por antropólogos, as quais apresentam evidências de práticas que são tipicamente matemáticas - como por exemplo, contar, ordenar, classificar, medir e pesar -, feitas de maneiras substancialmente diferentes daquelas que são normalmente ensinadas no sistema escolar. Justamente, a *etnomatemática* "nasceu da análise de práticas matemáticas em diversos ambientes culturais" (D'Ambrosio, 1999, p. 36), e inspirada "no reconhecimento de que ideias e as formas de fazer e de saber estão contextualizadas nos ambientes naturais e socioculturais." (D'Ambrosio, 2017, p. 663).

Na sequência do disposto, a teoria então em desenvolvimento é a de que a matemática deve ser entendida como um tipo de conhecimento cultural, que todas as culturas produzem, mas que não precisa, necessariamente, de parecer igual de um grupo cultural para outro (Bishop, 1988). Quer dizer:

> Assim como todas as culturas humanas produzem línguas, crenças religiosas, rituais, técnicas de produção de alimentos, etc., parece que todas as culturas humanas produzem matemática. A matemática é um fenómeno *pan-humano* [*pan* no sentido de universal]. Para além disso, assim como cada grupo cultural produz a sua própria língua, crença religiosa, etc., parece que cada grupo cultural tem a capacidade de produzir a sua própria matemática. (Bishop, 1988, p. 180)

No sentido anterior, a matemática torna-se um 'produto de todas as culturas' (Gerdes, 2000). Ou seja, "a matemática não é o produto de uma esfera cultural particular, mas uma experiência humana comum." (Gerdes, 2000, p. 338). Conforme explica Gerdes (2007a), a atividade matemática é uma atividade humana, logo é uma atividade cultural. "Ideias e métodos matemáticos variam de cultura para cultura, e a nossa compreensão do que é a matemática cresce na medida em que essas ideias e métodos se fertilizam mutuamente." (Gerdes, 2007a, p. 154). Também Powell e Frankenstein (1997d) preconizam que a matemática é um produto cultural e, como tal, é criada pelo ser humano, no seio interligado da cultura em que este se insere. Na mesma linha de pensamento, Bishop (1986) declara que a matemática "é um produto das interações entre o Homem e o respetivo ambiente físico e social, ao longo de muitos anos e em inúmeras sociedades." (p. 31). Nas palavras de Ascher (1998), as 'ideias matemáticas' "existem em todas as culturas, mas quais as que são enfatizadas, a forma como são expressas, e os seus contextos particulares irão variar de cultura para cultura." (p. 187). Portanto, embora a autora supracitada reconheça que 'ideias matemáticas' surgem em todas as culturas, salvaguarda que o mesmo não significa que, entre culturas, as 'ideias matemáticas' sejam as mesmas. "Como um todo, as ideias matemáticas são ricas e multifacetadas. Não existe um caminho particular único ao longo do qual estas devam desenvolver-se em todas as culturas" (Ascher, 1998, p. 185). Ora, tal como sugere Eglash (2000), "assim que nos desprendemos do modelo de desenvolvimento unilinear [da matemática], poderemos, então, ver que uma variedade de ideias matemáticas ocorre em todas as culturas." (p. 15). Afinal de contas, "o pensamento matemático só é inteligível interculturalmente." (Gerdes, 2000, p. 340).

2.2.1. O desenvolvimento da matemática em todas as culturas: seis atividades universais

Baseado numa análise detalhada de estudos culturais e antropológicos, de alguma forma relacionados com a matemática, Bishop (1986, 1988, 1991) determina a existência de seis atividades universais - *contar*, *localizar*, *medir*, *projetar*, *jogar*, e *explicar* -, através das quais a matemática, enquanto produto cultural, se tem desenvolvido, não apenas na nossa cultura, mas em qualquer cultura. Todas essas atividades são incentivadas por - e ajudam a incentivar - alguma necessidade ambiental identificada; todas estimulam - e são estimuladas por - vários processos cognitivos; todas envolvem certos tipos de linguagem e de representações; todas - quer separadamente, como em interação entre si - são significativas para o desenvolvimento de ideias matemáticas em qualquer cultura; em suma, todas contribuem para desenvolver a 'tecnologia simbólica' denominada 'matemática' (Bishop, 1986, 1991). "A matemática, neste contexto, é, portanto, concebida como um produto cultural, que se tem desenvolvido como resultado de várias atividades" (Bishop, 1988, p. 182), que serão descritas a seguir.

Contar é, talvez, a mais óbvia atividade que sugere desenvolvimento matemático e, provavelmente, a mais investigada na literatura cultural (Bishop, 1986, 1991). *Contar* corresponde à utilização de uma forma sistemática de comparar e ordenar fenómenos discretos (Bishop, 1988). "A contagem e a associação de objetos a números têm, claramente, uma longa história, e essa história tem-se tornado bem documentada." (Bishop, 1991, p. 23). "A gama de sistemas de numeração em existência foi, e ainda é, enorme" (Bishop, 1991, p. 24). De facto, ao contrário daquela que costumava ser a visão geral, não existem apenas dois sistemas de numeração - o 'civilizado' e o 'primitivo' -, mas uma diversidade muito rica de sistemas, variando de acordo com a necessidade ambiental - física e social -, e existindo em todas as sociedades (Bishop, 1986, 1991). À medida que o desenvolvimento de sistemas de numeração cresceu, os métodos para simbolizar e documentar números tiveram de se tornar mais sofisticados (Bishop, 1991). Ora, os números são registados de maneiras diferentes em sociedades distintas - por exemplo, com entalhes cortados, com traços feitos a giz, com hieróglifos, com marcas queimadas na madeira, com ábacos, com colares de contas, e até com nós em cordas[1] (Bishop, 1991). Em suma, *contar,* que pode até ser considerada uma atividade importante, mas relativamente simples, é reconhecida, a partir de uma perspetiva cultural, como envolvendo diversos aspetos, com variações no

---

[1] Um interessante exemplo deste método para simbolizar números - com nós em cordas - são os *quipus*, utilizados pelos Incas, e que constituem o objeto do estudo desenvolvido por Ascher e Ascher (1981). Conforme explicam os autores, "os *quipus* são feitos com cordas e espaços entre as cordas" (p. 18). As cordas atadas à corda principal encontram-se no primeiro nível e, a partir dessas, são atadas cordas em níveis secundários; ora, quer os tipos de conexões entre as cordas, como os espaços deixados entre as cordas - isto é, o posicionamento relativo das cordas -, constituem uma parte intencional da construção dos *quipus* (Ascher & Ascher, 1981). A cor das cordas constitui outro aspeto com significância no sistema simbólico dos *quipus* (Ascher & Ascher, 1981). Segundo Ascher e Ascher (1981), "na sua maior parte, as cordas continham nós atados ao longo das mesmas, e os nós representavam números." (p. 21).

tipo de linguagem e nas formas de representação usadas para comunicar os produtos da *contagem,* as quais surgem como resultado de diferentes necessidades ambientais e pressões sociais (Bishop, 1991).

Localizar compreende explorar o ambiente espacial envolvente, e conceptualizar e simbolizar esse ambiente através de modelos, diagramas, desenhos, palavras, entre outros meios (Bishop, 1988). *Localizar* possibilita caracterizar ações relacionadas com orientar-se no espaço, conhecer a zona de habitação, trabalhar a terra, deslocar-se sem se perder, e relacionar objetos entre si (Bishop, 1986). Ora, as exigências de viajar por mar e por terra, de conhecer bem a área de residência, e de procurar alimentos são tão básicas que poderia argumentar-se que *localizar* surgiu antes de *contar* (Bishop, 1991). "Surpreendentemente, em estudos culturais de ideias matemáticas, *localizar* tem recebido relativamente menos atenção do que *contar* e, como resultado, é menos bem documentado." (Bishop, 1991, p. 28). Ainda assim, é possível encontrar dados importantes e interessantes, não só para fundamentar a reivindicação da universalidade dessa atividade, como também para evidenciar a importância de *localizar* para o desenvolvimento matemático (Bishop, 1991). Os dados antropológicos e culturais disponíveis comprovam que a simbolização do ambiente espacial é, à semelhança de *contar*, uma atividade culturalmente especializada (Bishop, 1991). Com efeito, e tal como seria expectável, todas as sociedades têm desenvolvido modos diferentes, mais ou menos sofisticados, para codificar e simbolizar o seu ambiente espacial (Bishop, 1986, 1991). Mais particularmente, sociedades distintas, em localizações geográficas díspares, consideram aspetos diferentes como sendo significativos (Bishop, 1986, 1991). Não podemos esperar que, por exemplo, habitantes rurais se preocupem com os mesmos aspetos espaciais do que grupos urbanos (Bishop, 1986). E, por isso, surgem maneiras diferentes de descrever e de representar localizações, decorrentes de diferentes pressões ambientais e culturais (Bishop, 1991).

Medir consiste em quantificar atributos para os propósitos de comparar e ordenar, utilizando objetos como instrumentos de medida, e tendo unidades de medida ou 'palavras de medição' associadas (Bishop, 1988). *Medir* está relacionado com comparar, ordenar e avaliar atributos que são considerados importantes, que são valorizados, e todas as sociedades valorizam certas coisas (Bishop, 1986, 1991). Quer dizer, "todas as culturas reconhecem a importância de determinadas coisas, mas, uma vez mais, as culturas não valorizam todas as mesmas coisas, na mesma medida. Muito depende do ambiente local e das necessidades que este provoca." (Bishop, 1991, p. 34). Tipicamente, é o ambiente local imediato que fornece os atributos a serem medidos, bem como as unidades de medida; ora, o corpo humano foi, provavelmente, o primeiro instrumento de medida a ser explorado por todas as culturas (Bishop, 1991). *Medir* é outra atividade universal - todas as sociedades se envolvem em atividades de medição -, e significativa para o desenvolvimento de ideias matemáticas (Bishop, 1986, 1991). Contudo, percecionar transculturalmente a atividade de *medir* implica algum cuidado, já que a existência de sistemas de unidades de medida e a precisão não são condições necessárias, nem transversais, a todas as culturas; estas apenas se desenvolvem em função de necessidades ambientais particulares (Bishop, 1986, 1991). Nalgumas culturas, não só não existem unidades de medida independentes, semelhantes às nossas, como o próprio atributo que é do nosso interesse não pode, sequer, ser quantificado (Bishop, 1991). Também a precisão não é, necessariamente, algo que seja profundamente valorizado pelas culturas; isso vai depender do propósito e da importância de *medir* (Bishop, 1986, 1991). Por exemplo, para aqueles, como nós, que vivem numa cultura de tradição matemática e científica, a necessidade imposta pela ciência para haver cada vez mais precisão na medida parece ter-se infiltrado na cultura geral; ora, isso pode levar-nos a uma generalização exagerada da necessidade de *medir* com rigor (Bishop, 1991).

Projetar envolve conceber uma 'forma' ou um 'desenho' para um objeto ou para qualquer parte do ambiente espacial (Bishop, 1988). A atividade de *projetar* concerne todos os objetos e artefactos manufaturados, que todas as culturas constroem para diversos fins, quer sejam a vida doméstica, o comércio, o adorno, a guerra, os jogos, propósitos religiosos, ou outros (Bishop, 1986, 1991). Ademais, *projetar* pode aplicar-se ao espaço em grande escala, isto é, às casas, às vilas, aos jardins, aos campos, às estradas, e até mesmo às cidades (Bishop, 1986, 1991). "Todas as culturas projetam, mas, tal como seria de esperar, aquilo que projetam é diferente, e a elevada quantidade de formas projetadas também difere, acentuadamente, de uma cultura para outra." (Bishop, 1991, pp. 39-40). O que as culturas projetam depende das necessidades identificadas, e também do material disponível no ambiente (Bishop, 1991). Na essência de *projetar* está o processo de transformação de uma parte da natureza, ou seja, de partir de algum fenómeno natural - que pode ser, por exemplo, madeira, argila, ou terra - e de transformá-lo nalguma outra coisa - por hipótese, um ornamento esculpido, um pote para cozinhar, ou um jardim, respetivamente (Bishop, 1986, 1991). Portanto, *projetar* envolve impor uma determinada estrutura à natureza (Bishop, 1986, 1991) e, por isso, oferece a possibilidade de formas e padrões surgirem, intencionalmente, no ambiente natural (Bishop, 1991). Em grande parte, a atividade de *projetar* prende-se com abstrair uma forma do ambiente natural, com elaborar um 'modelo mental' (Bishop, 1986, 1991). Sob o ponto de vista matemático, o produto final não se constitui como o mais importante; o que realmente interessa, matematicamente, é o 'plano', a 'estrutura', a 'forma imaginada', a relação espacial percebida entre o objeto e o propósito a que se destina, a 'forma abstraída' e o 'processo de abstração' (Bishop, 1986, 1991). Precisamente por isso é que o foco da presente atividade surge colocado em *projetar*, mais do que em 'construir' (Bishop, 1986, 1991). Compreenda-se que o 'modelo mental' é, de uma certa forma, representado pelo objeto construído e, por sua vez, um objeto serve, de uma maneira interessante, como representação do 'modelo' pelo qual outros objetos similares podem ser produzidos (Bishop, 1991). Justamente, sabe-se que "a imitação e a cópia são as principais maneiras através das quais formas projetadas são preservadas." (Bishop, 1991, p. 40). Não obstante, o Homem, movido pela necessidade de considerar aspetos da 'forma projetada' sem ter que, necessariamente, construir o objeto em causa, desenvolveu outras formas de representação, tais como desenhar na areia, construir modelos, e, mais tarde, desenhar em papel e em dispositivos eletrónicos; tais formas são especialmente úteis quando se trata de *projetar* objetos de grande escala (Bishop, 1991).

Jogar inclui desenvolver e participar em jogos e passatempos, com regras mais ou menos formalizadas a que os jogadores envolvidos devem obedecer (Bishop, 1988). À partida, pode parecer inesperado incluir *jogar* numa coleção de atividades culturais consideradas relevantes para o desenvolvimento da matemática, mas só até ao momento em que se toma consciência da quantidade imensa de jogos que têm conexões matemáticas (Bishop, 1986, 1991). Incluir essa atividade torna-se ainda mais importante ao abordar a educação matemática de uma perspetiva antropológica e cultural, devido à vasta documentação sobre jogos e *jogar* que existe em todo o mundo (Bishop, 1986, 1991). Por aí, somos levados a compreender quão significativo tem sido *jogar* no desenvolvimento da cultura (Bishop, 1986, 1991). Todas as culturas jogam e, mais importante ainda, levam a atividade de *jogar* muito a sério, tratando-a como um aspeto realmente importante da vida cultural (Bishop, 1986, 1991). Salvaguarde-se que é erróneo pensar em *jogar* como uma atividade que é, exclusivamente, das crianças; é importante reconhecer o *jogar*, também, como uma atividade significativa dos adultos (Bishop, 1991). "Todos os grupos culturais se envolvem em *jogar*, e todos desenvolvem jogos, de diferentes tipos e para diferentes níveis." (Bishop, 1991, p. 44). Paralelamente a isso, é muito curioso perceber quão comuns determinados tipos de jogos são ao redor do mundo inteiro, podendo dizer-se universais (Bishop, 1991). Tal como em *projetar*, a qualidade da forma desenvolvida ao *jogar* torna-se valiosa por si mesma, isto é, adquire interesse em si própria, abrindo lugar à fruição estética e artística (Bishop, 1986, 1991). Ora, os prazeres e satisfações resultantes da apreciação estética e artística devem mesmo poder explicar a popularidade e durabilidade de muitos jogos em todos os grupos culturais (Bishop, 1991). Assim que a 'forma de jogar' se torna o foco do jogo, e um jogo se desenvolve, então, as regras, os procedimentos, as tarefas e os critérios tornam-se formalizados e ritualizados (Bishop, 1986, 1991). Ora, os jogos são, geralmente, valorizados pelos matemáticos, exatamente por causa desse comportamento controlado por regras que é inerente aos mesmos, lembrando a própria matemática (Bishop, 1986, 1991). E, não restam dúvidas de que todas as pessoas, crianças e adultos, de todos os lugares e culturas, apreciam envolver-se nesse comportamento demarcado por regras que caracteriza os jogos (Bishop, 1986, 1991).

Por último, *explicar* traduz-se em encontrar maneiras para esclarecer a existência de fenómenos, quer sejam religiosos, animistas ou científicos (Bishop, 1988). Esta é a atividade que eleva a cognição humana acima do nível em que a mesma é simplesmente associada à experimentação do ambiente (Bishop, 1986, 1991). *Explicar* focaliza-se nas próprias abstrações e formalizações existentes, as quais derivam das outras atividades, e, enquanto essas atividades se relacionam com responder a questões mais simples, como 'Quantos?', 'Onde?', 'Quanto?', 'O quê?' e 'Como?', *explicar* centra-se em dar resposta à complexa questão 'Porquê?' (Bishop, 1991). *Explicar* é a atividade de estabelecer relações entre diferentes fenómenos, para, assim, esclarecer aspetos desses fenómenos (Bishop, 1986, 1991). A relação de explicação mais significativa diz respeito à 'similaridade' (Bishop, 1991) e a linguagem constitui uma 'representação de similaridade' fundamental (Bishop, 1986, 1991). Com efeito, a um nível elementar de *explicação*, os nomes, os adjetivos, os verbos, e os advérbios das nossas línguas, bem como as frases que ligam estes elementos, auxiliam nessa procura por uniformidade no meio da aparente diversidade, ao permitirem estabelecer semelhanças e, dessa forma, classificar (Bishop, 1986, 1991). Todavia, ainda que classificar seja uma atividade universal, as classificações obtidas não o são; isto porque a diversidade linguística traz consigo uma multiplicidade de classificações (Bishop, 1986, 1991). Para além disso, a própria estrutura das classificações também difere entre culturas (Bishop, 1991). Mesmo sendo fundamental e universal, classificar representa, apenas, um tipo simples de explicação (Bishop, 1991). Para *explicar* fenómenos dinâmicos, a representação essencial e universal utilizada é a 'história', que, no caso, deve entender-se no sentido de narrativa (Bishop, 1986, 1991). Ora, cada cultura tem as suas histórias, os seus contos populares, e os seus contadores de histórias (Bishop, 1986, 1991). "A 'história', então, é um fenómeno universal e, do ponto de vista do desenvolvimento de ideias matemáticas, um aspeto interessante é a capacidade da linguagem para conectar o discurso de maneiras ricas e diversificadas." (Bishop, 1991, p. 51), constituindo, assim, um importante recurso para *explicar*. Os conectores lógicos, em particular, têm sido alvo de uma grande atenção em termos investigativos; esses conectores permitem que proposições sejam associadas, contrapostas, ampliadas, restringidas, exemplificadas, detalhadas, etc. (Bishop, 1986, 1991). Porém, à semelhança do que foi anteriormente referido a respeito das classificações, não há razão para se supor, também aqui, que todas as línguas compartilharão essa relação com a lógica formal (Bishop, 1991). Diante do apresentado, cabe a conclusão de que "todas as culturas estruturam a sua língua, todas classificam, todas têm histórias explicativas, todas têm as suas maneiras de conectar ideias através do discurso, e todas têm alguma fonte última de validação de explicações." (Bishop, 1991, p. 54). *Explicar* é tão universal quanto a linguagem e, indiscutivelmente, é uma atividade crítica no desenvolvimento matemático (Bishop, 1991).

Segundo Bishop (1986), a partir do momento em que as seis atividades previamente descritas - *contar*, *localizar*, *medir*, *projetar*, *jogar*, e *explicar* - constituem atividades universais - no sentido em que todos os grupos culturais se envolvem nas mesmas -, então a matemática existe, em alguma forma, até determinado ponto, e com maior ou menor significância para os indivíduos, no seio de todas as culturas. Portanto, a conclusão emergente é a de "que todas as culturas desenvolvem matemática - que a matemática é um fenómeno *pan-cultural.*" (Bishop, 1991, p. 55). Atente-se que, no corolário enunciado por Alan Bishop, está implicado um sentido muito preciso em que a matemática pode dizer-se universal (Barton, 2004; Borba, 1990), que está associado ao facto de a matemática existir em todas as culturas; daí, *pan-cultural* (Bishop, 1991). Mais precisamente, Bishop (1991) atesta que todas as culturas desenvolvem a sua própria 'tecnologia simbólica' de matemática, em resposta às exigências do ambiente envolvente, tal como experienciado através das seis atividades descritas, que estão presentes em todas as culturas, e que constituem, mesmo, as fundações para o desenvolvimento da matemática na cultura. Do disposto pelo autor prévio, sobressai o caráter "universalista e transcultural do conhecimento matemático, uma vez que todas as culturas espalhadas pelo mundo apresentam saberes e comportamentos de natureza matemáticos, embora a especificidade da tecnologia usada na atividade matemática cultural apresente diferenças que podem ser bastante acentuadas." (Moreira, 2008, p. 55).

"A matemática, como conhecimento cultural, deriva dos seres humanos envolvendo-se nessas seis atividades universais, de uma forma sustentada e consciente. As atividades podem ser executadas de uma maneira mutuamente exclusiva, ou, talvez mais significativamente, em interação entre si" (Bishop, 1988, p. 183). Nessa linha de pensamento, Bishop (1988) argumenta que essas seis atividades contribuíram para uma multiplicidade de ideias significativas que fazem parte da Matemática que é geralmente ensinada nas escolas, ou, pelo menos, para o conjunto vário de ideias que o autor enumera. Segundo Bishop (1988), a partir dessas noções básicas, todo o 'conhecimento matemático ocidental' pode ser derivado, sendo que, nessa mesma estrutura, pode, igualmente, ser encontrada evidência de 'outra matemática', desenvolvida por outras culturas, que contribuíram, também, para o conhecimento encapsulado na chamada 'Matemática ocidental' (Bishop, 1988). A esse propósito, Bishop (1991) esclarece que a Matemática, como a disciplina internacionalizada que hoje conhecemos, não é, seguramente, o produto de uma única cultura, nem o resultado das atividades de um só grupo cultural. A Matemática (atente-se, com 'M' maiúsculo) tem um passado deveras multicultural (Bishop, 1991). Essa Matemática não é, simplesmente, um subconjunto de toda(s) a(s) matemática(s) que diferentes culturas desenvolveram; é, antes, uma linha particular de desenvolvimento do conhecimento, que surge como resultado de desenvolvimentos que ocorreram no seio de culturas, e entre culturas (Bishop, 1991).

2.2.2. A etnomatemática e a diversidade cultural da matemática

"A produção de conhecimentos matemáticos ocorre em todas as culturas humanas. Esse é um dos elementos constitutivos do paradigma da *etnomatemática*" (Gerdes, 2007a, p. 42). Por isso é que Alan Bishop - autor que legitima a matemática como um fenómeno *pan-cultural* - é, frequentemente, associado à área da *etnomatemática*, apesar de não escrever diretamente sobre o tema (Barton, 2004). "A *etnomatemática* mostra que ideias matemáticas existem em todas as culturas humanas, nas experiências de todos os povos, de todos os grupos sociais e culturais" (Gerdes, 2007a, p. 156). Subjacente ao disposto está o facto de a matemática ser considerada um produto cultural; assim sendo, cada povo - cada cultura e subcultura - desenvolve a sua própria matemática, de uma maneira particular (Gerdes, 2007a). "O que faz sentido e o que é enfatizado na literatura etnomatemática é a conexão entre cultura e matemática." (Skovsmose, 2004, p. 109). A *Abordagem Etnomatemática* "assume que a matemática é um conhecimento cultural e que a sua origem e o seu desenvolvimento estão vinculados a necessidades humanas." (Knijnik, 1993a, p. 24). Ora, essa interpretação da matemática - enquanto conhecimento intrinsecamente ligado à cultura - opõe-se à conceptualização da matemática como 'ciência neutra', 'livre de valores', e desvinculada do modo como os indivíduos a usam (Knijnik, 1993b). Na conceção de D'Ambrosio (2019), os indivíduos criam e desenvolvem as suas próprias *ticas* de *matema* no respetivo *etno*, e, graças ao instinto gregário da espécie humana, as *ticas* de *matema* socializam-se no grupo cultural, e entre gerações; assim, do individual para o social, o conhecimento é gerado e os comportamentos são adquiridos, compondo a cultura do grupo. Todos do grupo estão no mesmo *etno* e, por isso, vivenciam situações, problemas e experiências comuns (D'Ambrosio, 2019). Nessa lógica, a *etnomatemática* pode ser vista como um campo de conhecimento vinculado a grupos culturais e aos seus interesses, estando, por isso, estreitamente ligada à realidade dos grupos, e sendo expressa através de uma '(etno)linguagem', também ela, umbilicalmente ligada à cultura dos grupos (Borba, 1988, 1993). A *etnomatemática*, assim entendida, é a matemática praticada por grupos culturais (Borba, 1988); é a matemática que se efetiva para resolver 'problemas matemáticos' comuns a um certo grupo, surgidos no quotidiano da sua existência (Borba, 1988); é o conhecimento matemático expresso no código de linguagem específico de um dado grupo sociocultural (Borba, 1988,1990). Nessa aceção, a *etnomatemática* "é vista como uma forma matemática, que expressa traços de uma dada cultura, na tentativa de resolver problemas que são expressão dessa cultura. Essa *etnomatemática* é, então, cultural na sua expressão e na sua génese." (Borba, 1993, p. 56). Por estar ligada à cultura onde o problema foi gerado, é provável que essa *etnomatemática* se torne mais eficiente do que outros modelos presentes nos livros (Borba, 1990). Logo, a "*etnomatemática* não deve ser mal interpretada como matemática 'vulgar' ou 'de segunda classe', mas antes como diferentes expressões culturais de ideias matemáticas." (Borba, 1990, p. 41). Em concordância, Ascher e D'Ambrosio (1994) notam que a *etnomatemática* vem adicionar a ideia de que "expressões de ideias matemáticas têm conteúdo e contexto cultural." (p. 36).

"Enquanto produto cultural, a matemática tem uma história, ou melhor, tem várias histórias." (Gerdes, 2007a, p. 42). Sob determinadas condições culturais, sociais e económicas, a matemática emergiu e desenvolveu-se de uma certa maneira; sob outras condições, a matemática encaminhou-se noutras direções; quer isso dizer que o desenvolvimento da matemática não é unilinear (Gerdes, 2007a). Por outras palavras, "a matemática, em si, não é uma cultura com um discurso" (Wood, 2000, p. 11), já que "existem diferentes maneiras de fazer o equivalente à 'matemática' em diferentes culturas." (D'Ambrosio, 2018b, p. 232). Ora, "as diversas pesquisas em *etnomatemática* têm contribuído para chamar atenção para este novo olhar para a matemática, ou ainda, para novos olhares para as matemáticas." (Conrado, 2004, p. 78). Na verdade, "ao lidar com a matemática, não de uma forma abstrata, mas como um artefacto cultural, diretamente ligado às tradições, aos modos de viver, sentir e produzir significados de diferentes grupos sociais, a *etnomatemática* refere-se à matemática no plural" (Knijnik, 2002, p. 14). Quando etnomatemáticos dizem 'mais do que uma matemática', estão a reconhecer diferentes respostas dos indivíduos e grupos ao ambiente social, cultural e natural (D'Ambrosio, 2001b). Por isso mesmo, D'Ambrosio (2014) refere-se à 'etnomatemática de uma cultura', e não à 'matemática de uma cultura', com o elemento *etno* a fincar, precisamente, essa ligação da matemática a ambientes naturais, sociais e culturais específicos. Posto isto, é importante perceber que, quando falamos de *etnomatemática*, estamos, na verdade, a falar de etnomatemáticas (Conrado, 2004). "Claro, em ambientes diferentes, as etnomatemáticas são diferentes." (D'Ambrosio, 2001a, p. 35). E, como tal, "existem diferentes etnomatemáticas (no plural), cada uma respondendo a um ambiente cultural, natural e social diferente." (D'Ambrosio, 2001b, p. 67). "Naturalmente, as matemáticas praticadas pelas distintas culturas e por povos diferentes nas várias épocas da história, e por muitos ainda hoje praticadas, são etnomatemáticas." (D'Ambrosio, 1999, p. 35). A matemática é, sempre, uma construção social, e, por isso, noções como 'matemática para engenharia', 'matemática para economia', 'matemática na física' e 'matemática na criptografia' representam diferentes ramos de *etnomatemática* - quer dizer, são etnomatemáticas -, assim como 'matemática chinesa', 'matemática dos incas', 'matemática das crianças de rua', etc. (Skovsmose, 2004). Até mesmo a matemática produzida por matemáticos profissionais pode ser vista como uma forma de *etnomatemática*, pois foi produzida por um grupo cultural identificável e não é a única matemática que tem vindo a ser produzida (Borba, 1990).

O que tradicionalmente nominamos 'matemática' é o correspondente à 'Matemática académica'; do ponto de vista da *etnomatemática*, existem outras formas de produzir significados matemáticos - outras etnomatemáticas, que compreendem manifestações simbólicas de outros grupos culturais (Knijnik, 2002). A este propósito, Fernandéz (2004) propõe um interessante desafio, conducente a uma autêntica inversão da perspetiva pela qual observamos 'outras matemáticas'. Ora, conforme menciona o próprio autor, por formação e por hábito, costumamos situar-nos na 'Matemática académica', dá-la por 'su-posta' - isto é, posta debaixo de nós como base fixa - e, a partir aí, contemplamos práticas populares, mais precisamente, modos populares de contar, medir, calcular, etc. Assim colocados, apreciamos os contornos dessas práticas, tomando as nossas como referência; analisamos a distância que separa essas práticas das nossas, isto é, da Matemática - no singular, justamente -, e, em função disso, consideramos que determinadas matemáticas estão mais ou menos avançadas, ou julgamos que, em certos lugares, podemos encontrar vestígios, 'embriões', ou 'intuições' de certas operações e conceitos matemáticos (Fernandéz, 2004). Nessa lógica, as práticas matemáticas dos outros são legitimadas ou deslegitimadas em função, respetivamente, da maior ou da menor semelhança com a 'Matemática académica' (Fernandéz, 2004). Mas, o que acontecerá se invertermos o olhar? - indaga-nos Fernandéz (2004). O que vislumbraremos se, ao invés de olharmos para as práticas populares a partir da Matemática, olharmos para a Matemática a partir das práticas populares? (Fernandéz, 2004). Refletindo sobre as suas próprias interpelações, o autor evidencia que, se alterarmos a perspetiva, seremos levados a pensar a matemática - ou melhor, o que se costuma entender por matemática - como:

> o desenvolvimento de uma série de formalismos característicos da maneira peculiar que tem certa tribo de origem europeia de entender o mundo. Por serem seus praticantes habitantes de cidades ou burgos, poderíamos chamá-la "tribo burguesa". E a sua matemática, "matemática burguesa". Esta matemática burguesa, na qual todos nós (ou talvez somente quase todos) fomos socializados, reflete um modo muito particular de perceber o espaço e o tempo, de classificar e ordenar o mundo, de conceber o que é possível e o que se considera impossível. (pp. 126-127)

Por conseguinte, aquela que é denominada 'matemática burguesa' constitui uma matemática particular, que nasceu ali, num certo lugar, habitado por certas pessoas - uma 'burguesia minoritária' -, com uma maneira muito particular de viver, de pensar, de medir, de raciocinar e de calcular (Fernandéz, 2004). Aquilo que designamos por 'matemática' é um 'constructo ocidental', esclarece D'Ambrosio (2004b). Embora lidando com espacialidade e temporalidade, comparações e classificações, codificações e simbolizações, que são próprios da espécie humana, os códigos e as técnicas utilizadas para expressar e comunicar as reflexões sobre estas categorias são, inegavelmente, contextuais (D'Ambrosio, 2004b). Isso que habitualmente chamamos 'matemática' é uma forma cultural distinta, que tem as suas origens numa maneira particular de trabalhar quantidades, medidas, formas e operações, característica de um modo de pensar, de raciocinar e de uma lógica, enquadrados num sistema de pensamento que é conhecido por 'pensamento ocidental' (D'Ambrosio, 1998). "Naturalmente, grupos culturais diferentes têm uma maneira diferente [dessa] de proceder em seus esquemas lógicos." (D'Ambrosio, 1998, p. 17).

As etnomatemáticas são contextualizadas em diferentes ambientes naturais e culturais; assim, poderíamos referir-nos à 'etnomatemática contextualizada na bacia do Mar Mediterrâneo' como 'etnomatemática mediterrânea', que é o que a tradição académica chama, simplesmente, 'Matemática', omitindo, dessa forma, as suas origens históricas (D'Ambrosio, 2014). De facto, quando nos referimos à Matemática, tomando como referência a ciência académica, estamos a designar (e a privilegiar) o conhecimento que se originou nas regiões banhadas pelo Mar Mediterrâneo (D'Ambrosio, 2004a, 2008). E, mesmo reconhecendo que outras culturas - do Oriente e da África - tiveram influência na evolução dessa forma de conhecimento, a sua organização intelectual e social é devida aos povos dessas regiões (D'Ambrosio, 2004a, 2008). Assim sendo, poderíamos dizer que a 'Matemática académica' ou 'Matemática escolar' é a 'etnomatemática originária da bacia do Mediterrâneo' - a 'etnomatemática do *etno* mediterrâneo' (D'Ambrosio, 2019). Ora, a geopolítica da Antiguidade da bacia do Mediterrâneo reflete uma sucessão de hegemonias, a saber: Egito e Babilónia → Grécia → Roma (D'Ambrosio, 2014). Por razões várias, a 'civilização ocidental', que resultou dessas culturas, impôs-se a todo o mundo e, com ela, a Matemática, cuja origem remonta às civilizações mediterrâneas, mais particularmente à Antiguidade grega, impôs-se ao mundo inteiro (D'Ambrosio, 2004a, 2008). O que hoje se entende por 'matemática', tal como é ensinada nas escolas e praticada pelos matemáticos, é, precisamente, uma evolução desse corpo de conhecimento que se originou na Grécia da Antiguidade, que se desenvolveu na Idade Média e no Renascimento (D'Ambrosio, 1998) e que chegou à forma atual nos séculos XVI e XVII, sendo, a partir de então, levada e imposta a todo o mundo (D'Ambrosio, 2001a, 2004a, 2008). "Com as grandes navegações e os processos de conquista e colonização, a matemática, originariamente grega, universalizou-se e é hoje adotada, na sua íntegra, por todos os povos e todas as culturas que se incorporam ao chamado mundo civilizado." (D'Ambrosio, 1998, pp. 81-82). Hoje, essa matemática adquire um caráter de universalidade (D'Ambrosio, 2001a, 2004a, 2008). Ora, da eficácia da operação mítica de ocultação das origens dessa já denominada 'matemática burguesa' é fruto a sensação hoje dominante de que a matemática sempre foi uma e a mesma, ainda que com diversos graus de evolução, bem como a crença de que essa matemática única tem validez universal e intemporal (Fernandéz, 2004).

A *etnomatemática*, ao colocar o 'conhecimento matemático académico' como uma de muitas formas possíveis de saber, põe em causa a universalidade da 'Matemática académica' (Knijnik, 1996). Em certo sentido, essa matemática até poderia ser considerada internacional, uma vez que é utilizada em muitas partes do mundo; no entanto, a *etnomatemática* mostra que tal matemática não é universal, na medida em que não é independente da cultura (Borba, 1990; Knijnik, 1996). A *etnomatemática* desmistifica o presumido caráter universal, a-histórico da 'Matemática escolar', porque entende a matemática como uma produção cultural, contextualizada (Fantinato, 2004). Nesse sentido, a *etnomatemática* problematiza essa 'grande narrativa' que é a 'Matemática académica' - considerada pela modernidade como a linguagem por excelência para descrever o universo mais próximo e longínquo (Knijnik, 1996, 2002). Ao problematizar essa 'meta-narrativa', a *etnomatemática* traz para discussão uma problemática pouco ou nada presente nos debates em educação matemática (Knijnik, 1996, 2002) - a do universalismo a que a 'Matemática académica', tradicionalmente, é associada (Conrado, 2004). A *etnomatemática* vem, portanto, "confrontar os tabus de que a matemática é um campo de estudo universal, sem tradições e sem raízes culturais." (Rosa & Orey, 2005, p. 6). Ora, um dos constructos basilares da *etnomatemática* - as relações existentes entre *matemática* e *cultura* - contrapõe-se a algo até então considerado indiscutível: o caráter universal da matemática (Conrado, 2004). Precisamente por isso é que um dos grandes questionamentos que a *etnomatemática* propõe é interrogar o "universalismo/absolutismo historicamente associado à matemática." (Conrado, 2004, pp. 77-78). "Parte dos propósitos da *etnomatemática* consiste em desafiar a natureza universal da matemática e em expor diferentes conceções matemáticas." (Barton, 2004, p. 56). A *etnomatemática* tem como uma das suas principais preocupações, justamente, evidenciar aquelas formas matemáticas - distintas da hegemónica - de dar significado à vida (Knijnik, 2010a). Ora, ao considerar 'outras' formas de saber e de produzir matemática, para além da 'Matemática académica', e ao legitimar, como matemática, mais do que simplesmente os produtos intelectuais de criação académica, a *etnomatemática* relativiza a universalidade da 'Matemática académica', e, ademais, questiona a sua própria natureza (Knijnik, 2002).

A *etnomatemática* problematiza a 'cientificidade', 'neutralidade' e 'assepsia' da 'Matemática académica' e, concomitantemente, dá visibilidade a 'outras matemáticas', como sendo uma produção cultural de grupos não-hegemónicos (Knijnik, 2002). A palavra-chave, no caso, é 'alteridade', ao visar-se 'outro' conhecimento matemático, para além do 'conhecimento matemático académico' (Knijnik, 2002). Ora, à medida que o 'conhecimento matemático académico' é relativizado e outros saberes matemáticos são destacados e valorizados, a dimensão política da *etnomatemática* ganha evidência (Conrado, 2004). De facto, na problematização da 'Matemática académica', a *etnomatemática* enfatiza que a matemática é uma construção social, mas, mais do que isso, realça que tal construção decorre num terreno moldado por disputas políticas em torno daquilo que será reconhecido como matemática, de quais serão as formas de pensamento consideradas legítimas, e, portanto, de quais serão os grupos que podem, legitimamente, produzir ciência (Knijnik, 1996, 2002). Nesse caso, "trata-se de problematizar a política do conhecimento dominante" (Knijnik, 2001, p. 18). A *etnomatemática* vem pôr em causa a dicotomia existente entre os conhecimentos instituídos como matemáticos e aqueles praticados por grupos sociais não-hegemónicos, os quais permanecem silenciados e não são considerados ciência (Wanderer, 2004). A *etnomatemática*, ao propor-se analisar as produções culturais desses grupos, destacando os seus modos de lidar matematicamente com o mundo, põe em questão o que tem sido considerado como o 'conhecimento acumulado pela humanidade'; o que está em causa é evidenciar que só um subconjunto muito particular de conhecimentos é reconhecido como parte desse acúmulo (Knijnik, 2004). Os modos de entender o mundo e de produzir conhecimento de outros povos - por exemplo, dos não-europeus, não-brancos, não-urbanos -, são considerados como não-ciência, como não-conhecimento; nessa operação etnocêntrica, tais saberes são desconsiderados, não porque sejam inferiores, do ponto de vista epistemológico, mas porque não fazem parte daqueles que, na sociedade ocidental, são considerados como os que podem, devem e são capazes de produzir ciência (Knijnik, 2004). Ora, "a *etnomatemática* vem quebrar com toda essa lógica academicista. Junto a ela surge um novo olhar, uma postura distinta que flui para a qualidade, para a alteridade, para a descentralização." (Ribeiro & Ferreira, 2004, p. 159). A *etnomatemática* coloca-se numa posição de refutação face ao postulado de que apenas a 'Matemática formal' - aquela que passa pelo crivo institucional - obtém o estatuto de conhecimento (Marafon, 2004). "Com base na *etnomatemática*, é possível ampliar o que tem sido estabelecido como conhecimento matemático." (Marafon, 2004, p. 89). A *etnomatemática* procura resgatar as histórias do presente e do passado, tentando entender a matemática como uma construção dos grupos envolvidos, e valorizando os saberes matemáticos que foram silenciados ao longo da história, tendo sido dominados por saberes hegemónicos, legitimados pela sociedade (Druzzian, 2002). A *etnomatemática* promove uma revisão crítica da história da matemática, pensando-a de um ponto de vista mais cultural, mais político, mais social e, naturalmente, mais humano, o que possibilita a construção de uma nova ideia - mais profunda e abrangente - sobre o conhecimento matemático (Conrado, 2004). Na verdade, dificilmente se poderia incluir o conhecimento reconhecido numa variedade de ambientes culturais na habitual 'classificação académica do conhecimento' (D'Ambrosio, 1995). À vista disso, a *etnomatemática* propõe um enfoque epistemológico associado a uma historiografia mais ampla (D'Ambrosio, 1991, 1993), em prol de uma história da matemática que não venha impregnada de 'determinismo eurocêntrico' (D'Ambrosio, 2004a).

"A história da matemática privilegia os códigos e técnicas desenvolvidos, organizados e formalizados num estilo específico nas academias provenientes da Bacia do Mediterrâneo, que depois se expandiram para o Norte da Europa e para outras partes do mundo." (D'Ambrosio, 2017, p. 663). Na narrativa eurocêntrica, a Europa sempre foi, e atualmente ainda é, considerada o 'Centro superior', a partir do qual o conhecimento, a criatividade, a tecnologia, a cultura, e assim por diante, fluem para a 'Periferia inferior', isto é, para os chamados países subdesenvolvidos (Powell & Frankenstein, 1997a). Veja-se que os grandes heróis da matemática, isto é, aqueles indivíduos que, historicamente, são reconhecidos como os responsáveis pelo avanço e pela consolidação desta ciência - nomeadamente, Tales, Pitágoras, Euclides, Descartes, Galileu, Newton, Leibniz, Hilbert, Einstein, Hawking, entre outros - são identificados, na Antiguidade grega e, mais tarde, na Idade Moderna, nos países centrais da Europa (D'Ambrosio, 2001a, 2004a, 2008). Até às últimas décadas do século XX, a história da matemática praticamente excluiu a matemática de culturas não-europeias; essa rejeição floresceu da 'mentalidade colonial', que, numa lógica de subjugação e domínio, ignorou ou desvalorizou as contribuições dos povos colonizados (Selin, 2000). Embora as civilizações conquistadas, e posteriormente colonizadas, tivessem conhecimento matemático, a atual historiografia é inadequada em reconhecê-lo, e, por isso, a natureza e a história desse conhecimento são quase desconhecidas (D'Ambrosio, 2000). As ideias matemáticas desenvolvidas em regiões como a China, o sul da Índia, a Mesoamérica, e algumas regiões da África e da América do Sul eram muito úteis para os indivíduos que pertenciam aos grupos culturais dessas regiões; porém, devido à globalização colonial, o conhecimento matemático produzido e acumulado por essas culturas não influiu no conhecimento matemático, académico e científico da contemporaneidade (Rosa & Orey, 2005). Efetivamente, no encontro de culturas europeias e não-europeias, a 'fase de colisão, procedida da 'fase de contacto', resultou na negação das formas de conhecimento dos conquistados, e a 'fase de inter-relação', ulterior, foi marcada por um esforço de transferência da 'Matemática europeia' para as colónias (D'Ambrosio, 2000), verificando-se uma imposição deste 'conhecimento dominante' sobre o conhecimento que, então, era considerado inferior ou primitivo (Ribeiro & Ferreira, 2004). Ora, a desconsideração ostentada pelas sociedades coloniais europeias é particularmente irónica, já que os primeiros europeus, os próprios gregos antigos, reconheceram a sua dívida intelectual para com os egípcios; por exemplo, Heródoto e Aristóteles acreditavam que a Geometria teve a sua origem no Egito (Selin, 2000). Inclusivamente, Heródoto anotou, sem preconceitos, determinados conceitos geométricos que aprendeu com os egípcios (Rosa & Orey, 2005). Acerca desse assunto, Powell e Temple (2004) notam que "a negritude dos egípcios pode ajudar a explicar a disposição de rejeição da matemática egípcia e, por comparação, a glorificação da matemática grega" (p. 277), chamando, assim, a atenção para as tradições de pesquisa preconceituosa sobre o Egito Antigo. Powell e Frankenstein (1997e) mencionam que o preconceito eurocêntrico que nega o rigor da 'Matemática egípcia' é justamente o mesmo que considera 'primitivo' o conhecimento matemático de culturas tradicionais, não-alfabetizadas.

Na globalização que resultou das grandes navegações, da conquista e colonização, as ideias e ações dos construtores do conhecimento científico - isto é, de heróis como os que foram referidos - trazem à memória a imagem do 'conquistador', do 'escravista', e a forma de conhecimento que foi construída por ele, 'dominador', e da qual ele se serviu, e se serve, para exercer o seu domínio (D'Ambrosio, 2008). Ora, essa lembrança é parte integrante da história e do imaginário de muitos nativos, ou afro-americanos, ou outros não-europeus, assim como de grupos de trabalhadores oprimidos e de classes marginalizadas (D'Ambrosio, 2008). Na aceção apresentada, o modo científico de pensar é associado a processos de colonialismo, e a Matemática e a educação matemática são percecionadas como elementos de invasão cultural (Skovsmose, 2004). Nesse mesmo quadro, a 'Matemática ocidental' tem sido descrita como 'representante dos valores ocidentais' e como um 'modo dominante de pensar' (Skovsmose, 2004). Diante disso, faz sentido falar de uma 'Matemática dominante', que é um instrumento desenvolvido nos países centrais e muitas vezes utilizado como instrumento de dominação; essa matemática, e os que a dominam, apresentam-se com uma postura de superioridade, com o poder de deslocar, e até mesmo de eliminar, outras produções culturais (D'Ambrosio, 2001a, 2004a, 2008). Essa matemática, com o seu caráter de infalibilidade, de rigor, de precisão, e sendo um instrumento essencial e poderoso no mundo, teve a sua presença firmada, excluindo outras formas de pensamento (D'Ambrosio, 2001a, 2004a, 2008). Há, portanto, um domínio dessa matemática, que se tornou, naquela que Barton (2008) designa a 'Matemática quase universal, convencional' ou 'Matemática QUC'.

A falta de mais uma matemática contemporânea e sofisticada, com o poder equivalente ao que comummente entendemos como 'matemática', embora não implique forçosamente a universalidade da matemática que conhecemos, é determinante para a nossa impressão da sua veracidade (Barton, 2004). Nesse quadro, o reconhecimento de outros sistemas de geração, de organização intelectual e social, e de difusão de formas - *ticas* - de explicar, de entender, de lidar com, e de investigar - *matema* - para além do ambiente natural e sociocultural imediato - *etno* -, afigura-se a única maneira de escapar à arrogância associada ao conceito ocidental de verdade (D'Ambrosio, 2000). Ora, isso traz uma perspetiva clara para a *Abordagem etnomatemática*, que inclui atenção, consciencialização e valorização dos modos de pensar que fazem parte de diferentes grupos culturais (Skovsmose, 2004). D'Ambrosio (2012a) constata que "a negação e a rejeição das culturas da periferia, tão comuns no processo colonial, ainda prevalecem na sociedade moderna." (p. 22). Dessa forma, "há um especial interesse em dar visibilidade às histórias daqueles que têm sido sistematicamente marginalizados por não se constituírem nos setores hegemónicos da sociedade." (Knijnik, 2004, p. 22). Nesse sentido, a *etnomatemática* pode ser vista como um "caminho revelador dos direitos de minorias e, muitas vezes, maiorias marginalizadas e excluídas de um modelo social em que uma verdade pretende ser a verdade. De um modelo social que só pode realizar-se com o silêncio das vozes discordantes." (Monteiro, Orey & Domite, 2004, p. 14). Ora, a *etnomatemática*, não só denuncia a problemática do lugar dos direitos dos marginalizados, excluídos e das minorias em relação à maioria, como invoca uma compreensão holística e dinâmica da realidade, em detrimento de uma compreensão simplista e tranquilizadora, que, pretensiosamente, quer garantir que a verdade existe, e que é possível conhecê-la (Monteiro et al., 2004). Nessa lógica, a *etnomatemática* viabiliza uma práxis transformadora, pois na sua essência está a mudança de um paradigma universalista para um paradigma ético e solidário, aspirando por uma sociedade mais inclusiva (Monteiro et al., 2004).

Desde a fase de origem da investigação etnomatemática, particular destaque é dado, justamente, ao estudo de ideias e práticas matemáticas da periferia - no sentido lato do termo; ideias e práticas desconhecidas, não reconhecidas ou marginalizadas pelas correntes dominantes da prática matemática, da historiografia e da educação matemática (Gerdes, 2007a). Ora, é de esperar que a valorização das experiências - sociais e culturais - e da sabedoria das periferias - eliminadas, oprimidas, marginalizadas, esquecidas, ou menosprezadas - vá inspirar a investigação matemática a nível internacional, contribuindo para o enriquecimento do 'património matemático universal', enquanto acúmulo que é de todos os povos, de todos os tempos (Gerdes, 2007a). Talvez tenham que ser os etnomatemáticos a darem os primeiros passos; outros, incluindo os 'matemáticos profissionais das metrópoles', segui-los-ão (Gerdes, 2007a). É tempo de nos empoderarmos com este conhecimento vital: "a matemática é uma compilação de descobertas e invenções progressivas de culturas de todo o mundo ao longo da história. A sua história e etnografia formam um maravilhoso mosaico de contribuições culturais." (D'Ambrosio, 2001c, p. 310). "Na arte ou técnica de relacionar, compreender, classificar, ordenar, medir, comparar de cada povo, a construção do conhecimento [matemático] vai-se ampliando" (Scandiuzzi, 2004, p. 167). Ora, é com os óculos da 'Matemática académica' que tem sido construído o suposto 'ideal', mas é necessário entender essa Matemática como uma lente, uma possibilidade, uma linguagem que não é o reflexo do mundo, mas que, ao dizer sobre o mundo, acaba por construí-lo e fá-lo de uma forma peculiar (Duarte, 2004). Nesse quadro, a *etnomatemática* constitui-se um meio pelo qual podemos ter uma melhor compreensão do mundo, quer da forma como nós o vemos, quer do modo como outros o veem; o reconhecimento da componente cultural da matemática permite aumentar a nossa apreciação do seu alcance, bem como do potencial da mesma para promover uma visão do mundo interessante, artística e útil (Barton, 2004).

2.3. A etnomatemática como domínio de investigação

"A *etnomatemática* emergiu como uma nova categoria conceptual a partir do discurso sobre a interação entre matemática, educação, cultura e política. Naturalmente, tem várias definições e perspetivas associadas" (Powell & Frankenstein, 1997b, p. 5). Ora, uma das interpretações para a *etnomatemática* - previamente explorada - define-a como a matemática de uma determinada (sub)cultura (Gerdes, 1996). Nessa aceção, até mesmo a 'Matemática académica' constitui, conforme explicitado, um exemplo concreto de *etnomatemática* (Gerdes, 1996). Mas, então, se todas as etnomatemáticas são matemáticas, porquê chamar-lhes *etnomatemática*, e não simplesmente matemática desta ou daquela (sub)cultura? - questiona Gerdes (1996). O autor afirma que, dessa maneira, a *etnomatemática* poderá ser definida num outro nível - em concreto, como domínio de investigação -, que espelha a consciência da existência de inúmeras matemáticas, de certa maneira características de determinadas (sub)culturas.

No nível introduzido pelo autor prévio, Ascher e Ascher (1986) definem a *etnomatemática* como "o estudo das ideias matemáticas de povos não-alfabetizados." (p. 126). Os autores desafiam um conjunto de enunciados que persistiram na literatura matemática a respeito dos povos não-alfabetizados, os quais eram vistos como 'primitivos', 'ancestrais', os 'primeiros representantes vivos' ao longo do percurso unilinear de desenvolvimento das sociedades - produto da 'Teoria Evolucionista Clássica'. Acreditava-se que o pensamento matemático destes povos se limitava aos números; que eram capazes, somente, de usar o pensamento concreto, e, por isso, incapazes ao nível da abstração, da generalização, e do pensamento analítico; que eram de inteligência inferior e desprovidos de raciocínio formal ou lógica (Ascher & Ascher, 1986). Numa declarada proposta de retificação destes enunciados, o trabalho dos autores em referência apresenta um conjunto de evidências detalhadas sobre a presença de 'ideias matemáticas' sofisticadas nos 'povos não-alfabetizados', ideias semelhantes e tão complexas quanto as da 'Matemática ocidental' (Ascher & Ascher, 1986). Ao introduzirem 'ideias matemáticas' de povos que geralmente têm sido excluídos das discussões sobre matemática, Marcia Ascher e Robert Ascher têm contribuído para ampliar a história da matemática, imbuindo-a de uma 'perspetiva multicultural e global' - objetivo declarado da *etnomatemática* na sua abordagem, a par da já referida modificação de suposições erróneas que persistiram no tempo em relação aos 'povos não-alfabetizados' (Ascher, 1998).

Na definição de *etnomatemática* apresentada por Ascher e Ascher (1986), a referência feita às 'ideias matemáticas' dos povos justifica-se pela abrangência pretendida. "Entre as ideias matemáticas, incluímos aquelas que envolvem número, lógica, configuração espacial e, ainda mais importante, a sua combinação ou organização em sistemas ou estruturas. O nosso interesse é esse campo amplo de ideias matemáticas." (Ascher, 1998, p. 2). No livro de Ascher (1998), são exploradas 'ideias matemáticas' relacionadas com: 'números - palavras e símbolos'; 'traçar diagramas na areia'; 'a lógica de relações de parentesco'; 'acaso e estratégia em jogos e puzzles'; 'a organização e modelagem do espaço'; e 'decorações simétricas com fios'. Dado o alcance, os autores optam por falar sobre 'ideias matemáticas', em vez de se referirem, particularmente, à categoria 'matemática', para, assim, evitarem limitações advindas do uso e conotações ocidentais da palavra 'matemática', que a tornam limitada no seu escopo (Ascher, 1998). Não obstante, a definição de *etnomatemática* apresentada por Ascher e Ascher (1986) "restringe as culturas de onde exemplos podem ser retirados" (Barton, 2004, pp. 47-48), pela referência exclusiva - e, ao mesmo tempo, excludente - aos 'povos não-alfabetizados'. A respeito dessa matéria, Powell e Frankenstein (1997b) mencionam que o termo 'povos não-alfabetizados' constitui-se demasiado limitado no que toca a definir o escopo da *etnomatemática*. Nas palavras dos autores, "circunscrever o campo da etnomatemática às ideias matemáticas de povos não-alfabetizados (...) é um círculo demasiado pequeno. O raio deve ser maior, visto que muito se situa no complemento do círculo." (p. 6).

Na conceptualização de Gerdes (2007a), a *etnomatemática* é a área de investigação que estuda as multifacetadas relações e interconexões entre 'ideias matemáticas' e outros elementos e constituintes culturais, como a língua, a arte, o artesanato, a construção, a educação; que estuda os 'conhecimentos matemáticos' dos povos indígenas e, também, os 'saberes' e 'saberes-fazer' matemáticos adquiridos e desenvolvidos na atividade prática, pelos vendedores nas ruas, pelos cesteiros, pelos pintores, pelas costureiras, pelas tecelãs, pelos jogadores de múltiplos desportos, pelas cozinheiras, e assim por diante. De uma forma mais resumida, a *etnomatemática* é "a área de investigação que estuda as ideias matemáticas nos seus contextos histórico-culturais" (Gerdes, 2000, p. 338); daí, compreende um campo de pesquisa que se localiza na confluência da matemática e da antropologia cultural (Gerdes, 1996). Veja-se que o autor em referência não discute a ideia de um 'corpo sistemático de conhecimentos', focalizando-se em 'ideias matemáticas' isoladas, implícitas em exemplos da prática (Barton, 2004). Paulus Gerdes é reconhecido pela densa investigação etnomatemática que desenvolveu, com os seus colaboradores, sobretudo no continente africano. Aí, como a maioria das tradições matemáticas que sobreviveram à colonização e a maioria das atividades matemáticas do quotidiano dos povos não são explicitamente matemáticas - quer dizer, a matemática está parcialmente 'escondida' -, o objetivo maior da investigação foi 'desvendar' ou 'destapar' a matemática 'escondida' ou 'congelada' (Gerdes, 1996). Os resultados desse 'descobrimento' aparecem no livro *Etnogeometria: Cultura e o despertar do pensamento geométrico* (Gerdes, 2012a) - uma versão condensada da tese de doutoramento do autor, intitulada *Sobre o despertar do pensamento* geométrico (originalmente publicada em alemão, em 1985).

Ubiratan D'Ambrosio utiliza o termo *Programa etnomatemática* para designar o programa de pesquisa sobre geração, organização individual e social, transmissão e difusão do conhecimento (D'Ambrosio, 2014). Tais objetivos contemplam disciplinas tradicionais várias, a saber: ciências da cognição (geração do conhecimento), epistemologia (organização intelectual do conhecimento), e história, sociologia, política e educação (transmissão e difusão do conhecimento); mas, diferentemente da abordagem tradicional, o *Programa etnomatemática* estuda essas disciplinas de forma integrada, transdisciplinar e transcultural, sob o marco conceitual do 'ciclo do conhecimento' (D'Ambrosio, 2014). "O *Programa etnomatemática* tem como objetivo entender o ciclo do conhecimento em distintos ambientes." (D'Ambrosio, 2008, p. 37). Metodologicamente, esse *Programa* reconhece que, na sua aventura enquanto espécie planetária, o Homem tem o seu comportamento alimentado pela aquisição de conhecimento, de saber(es) e de fazer(es) que lhe permitem sobreviver e transcender, através de maneiras - *ticas* - de explicar, de entender, de lidar com - *matema* - a realidade natural e sociocultural - *etno* -, na qual ele, Homem, está inserido (D'Ambrosio, 2008). Ora, isso tem resultado em distintos 'corpos de conhecimento' - estabelecidos como sistemas de explicações e maneiras de fazer, que são acumulados, ao longo de gerações, nos vários ambientes naturais e socioculturais (D'Ambrosio, 2014). Esses sistemas de explicações e maneiras de fazer são componentes de uma cultura e estão em permanente transformação, em virtude da dinâmica do encontro de culturas (D'Ambrosio, 2014). Reforçando-se o que já foi dito anteriormente, o *Programa etnomatemática* não se esgota no entender o conhecimento - saber e fazer - matemático das culturas; procura, ademais, entender o ciclo de geração, organização intelectual e social, e difusão desse conhecimento (D'Ambrosio, 2008). Concluindo com as palavras de D'Ambrosio (2018a), "em essência, o *Programa etnomatemática* é uma proposta de teoria do conhecimento (...). Na verdade, poderia igualmente ser denominado Programa Etnociência." (p. 11).

Inspirando-se em alguns dos aportes teóricos de D'Ambrosio, Gerdes e Ascher, Barton (2004) propõe a seguinte definição: a "*etnomatemática* é um programa de pesquisa do modo como grupos culturais entendem, articulam e usam os conceitos e práticas que nós[2] descrevemos como matemáticos, tendo ou não o grupo cultural um conceito de matemática." (p. 53). Tal definição gera quatro implicações (Barton, 2004). A primeira é a de que a *etnomatemática* não é um estudo matemático, tendendo mais para a antropologia e para a história (Barton, 2004). Efetivamente, a *etnomatemática* não consiste nas 'ideias matemáticas' de outras culturas, nem é a representação dessas ideias pela matemática; esses aspetos podem até fazer parte da *etnomatemática*, mas não compõem a sua essência (Barton, 2004).

[2] O 'nós' utilizado na definição de *etnomatemática* apresentada corresponde a "um grupo que partilha um entendimento de matemática e que está interessado em *etnomatemática*." (Barton, 2004, p. 54). O uso do pronome 'nós' assinala que o etnomatemático apresenta um ponto de vista particular (Barton, 2004).

A *etnomatemática* é uma tentativa de descrever e entender as formas pelas quais ideias, ditas 'matemáticas' pelos etnomatemáticos, são compreendidas, articuladas e utilizadas por 'outras pessoas', que não partilham a mesma conceção de matemática (Barton, 2004). Ora, aí reside uma das dificuldades da *etnomatemática* - descrever o mundo 'do outro' com os seus próprios códigos, linguagem e conceitos (Barton, 2004). A segunda implicação é a de que a definição de *etnomatemática,* em si, depende de quem a está a expressar e é culturalmente delimitada, no sentido em que é escrita do ponto de vista de uma cultura ou grupo social, ou seja, uma cultura ou grupo social que possui uma categoria conceitual chamada 'matemática' (Barton, 2004). Ora, não só a definição de *etnomatemática* é construída nos termos de uma cultura específica, como também a própria prática etnomatemática é, à semelhança, culturalmente delimitada, sendo esta a terceira implicação decorrente da definição (Barton, 2004). Efetivamente, estudar a maneira pela qual 'outra cultura' reconhece conceitos e práticas particulares - prática etnomatemática - é um trabalho interpretativo de uma cultura sobre outra, que, necessariamente, envolve usar a forma de discurso do intérprete; no caso, requer usar conceitos da matemática, cujos referentes dependem de quem está a utilizar o termo 'matemática' (Barton, 2004). A última implicação é a de que a *etnomatemática* envolve uma certa forma de relativismo para a matemática (Barton, 2004). Mais do que a matemática ser concebida como um corpo em crescente ampliação, com ideias construídas a partir das já existentes, com novas conceções incluindo e ampliando as ideias anteriores, a *etnomatemática* requer que a matemática admita a possibilidade de existência de outros conceitos matemáticos, não subordinados aos já existentes, ou a alguma generalização nova e mais abrangente (Barton, 2004). Ora, isto não quer dizer que todos os estudos etnomatemáticos produzirão matemáticas alternativas; o que é requerido é a ideia de que isso possa, de facto, acontecer, isto é, que ideias novas possam transformar a maneira como a matemática é concebida (Barton, 2004). Se essa possibilidade não for admitida, então a *etnomatemática* reduz-se ao estudo de práticas culturais particulares, do ponto de vista de um matemático, e torna-se, dessa forma, uma parte não muito relevante da matemática (Barton, 2004). A menos que a matemática possa, realmente, mudar, não parece haver razão para estudar o modo como 'outras pessoas' veem coisas que nós designamos 'matemáticas' (Barton, 2004). Se existisse somente uma visão do fenómeno matemático, que sentido faria tentar encontrar e descobrir um outro? - questiona Barton (2004). É necessário, por isso, que haja um reconhecimento de que a matemática não é a única maneira de ver o mundo, nem a única maneira de ver os aspetos do mundo comummente referidos como matemáticos - aspetos relacionados com números, formas e relações (Barton, 2004). Ademais, é necessário que haja um reconhecimento de que maneiras alternativas de ver esses fenómenos são legítimas e válidas; de outro modo, não faria sentido estudá-las (Barton, 2004).

Aqueles que, tal como nós, cresceram numa 'tradição matemática ocidental' fazem muitas assunções acerca da natureza, estrutura, formas, notações e processos da matemática; mas, contrariamente ao que a hegemonia da matemática que aprendemos e usamos nos leva a pensar, tais assunções não são comuns a todas as mentes humanas, e, por isso, não são universais (Barton, 2008). Se, por via da regra, conseguirmos sair da nossa experiência matemática já é algo extremamente difícil, a 'quase universalidade da matemática' tornou o reconhecimento de ideias matemáticas alternativas ainda mais complexo, porque as nossas experiências da 'Matemática quase universal, convencional' ou 'Matemática QUC' trespassam línguas e fronteiras nacionais (Barton, 2008). Ora, esse é, precisamente, o desafio que a *etnomatemática* tenta defrontar (Barton, 2008). O estudo que a *etnomatemática* faz das práticas matemáticas de comunidades particulares consciencializa-nos para novas ideias, novos conceitos, novos processos que não devem ser encarados como triviais ou simples, e que podem mesmo vir a contribuir para nova matemática, capaz de enriquecer o nosso campo matemático (Barton, 2008).

A investigação etnomatemática tem-se ocupado, maioritariamente, em demonstrar que existem várias formas culturais de matemática, distintas da 'Matemática dominante', 'padronizada', e em analisar essas formas, tentando percebê-las (Gerdes, 1996). "Para tal, diversas abordagens investigativas têm sido desenvolvidas." (Gerdes, 1996, p. 123). Bishop (1994) distingue três importantes abordagens de pesquisa na investigação etnomatemática, cujos focos são os que se listam em seguida:

a) Conhecimento matemático em culturas tradicionais (...). Esta investigação assenta numa abordagem antropológica, enfatizando a singularidade de conhecimentos e práticas particulares, em relação a diferentes culturas. As línguas são, também, significativas nestes estudos, juntamente com os valores e os costumes dos grupos culturais envolvidos no estudo.
b) Conhecimento matemático em sociedades não-ocidentais (...). Esta investigação tem um caráter histórico, baseando-se em documentos antigos, mais do que nas práticas presentes.
c) Conhecimento matemático de diversos grupos na sociedade (...). Esta investigação tem uma ênfase sociopsicológica, em que o foco está nas práticas atuais. O conhecimento matemático particular é construído socialmente pelos grupos que se envolvem em práticas específicas. (p. 15)

Segundo Bishop (1994), subjacente a toda a investigação etnomatemática - seja qual for o foco -, está uma questão epistemológica fundamental: "existe uma só matemática, que aparece em diferentes manifestações e simbolizações, ou existem diferentes matemáticas, que são praticadas com certas semelhanças?" (p. 15). Neste âmbito, as ideias do filósofo Ludwig Wittgenstein proporcionam elementos que sustentam, de um ponto de vista filosófico, a existência de diferentes matemáticas (Knijnik, 2014). Os argumentos do filósofo sobre como funciona a linguagem apontam para a ideia de que não mais é possível falar-se de uma linguagem, mas de linguagens - isto é, de uma grande variedade de usos e de uma pluralidade de funções e papéis, que podem ser vistos como 'jogos de linguagem' (Knijnik, 2012). O trabalho teórico de Wittgenstein - bem como o de alguns autores que analisaram e interpretaram as suas teorizações - permite inferir que os 'jogos de linguagem' e as regras que os constituem são fortemente influenciados pela forma como a linguagem é usada; daí, os 'jogos de linguagem' devem ser entendidos como estando imersos numa 'forma de vida', fortemente ligada a práticas não-linguísticas (Knijnik, 2012). Wittgenstein, ao refutar a existência de uma 'linguagem universal', possibilita-nos questionar a noção de uma 'linguagem matemática universal', o que, por sua vez, nos permite argumentar, sob uma perspetiva filosófica, sobre a existência de diferentes matemáticas (Knijnik, 2012), concebidas como redes de 'jogos de linguagem' associados a diferentes 'formas de vida', que, embora mantendo suas especificidades, apresentam 'semelhanças de família' (Knijnik, 2014). A essas diferentes matemáticas correspondem 'formas de vida' particulares, que põem em ação 'jogos de linguagem' constituídos por regras específicas, os quais formam a sua 'gramática'; ora, cada um desses 'jogos' teria a sua especificidade, mas também manteria, em diferentes graus, 'semelhanças' com outros 'jogos', quer fossem produzidos pela 'forma de vida' a que estão associados ou por outras 'formas de vida' (Knijnik, 2014). Assim, as matemáticas produzidas nas diferentes culturas podem-se considerar, com base na filosofia wittgensteiniana, como conjuntos de 'jogos de linguagem' que se constituem por meio de múltiplos usos, ancorados em distintas 'formas de vida' (Knijnik, Wanderer, Giongo & Duarte, 2012).

Em suma, com base em Wittgenstein, é possível aferir que, de um ponto de vista epistemológico, não existe uma só matemática - aquela que comummente é conhecida como 'a matemática' -, que seria desdobrada e aplicada em múltiplas práticas produzidas pelos diferentes grupos culturais; em vez disso, o pensamento de Wittgenstein é produtivo no sentido de nos fazer pensar em diferentes matemáticas - geradas por distintas 'formas de vida', como as associadas a grupos de crianças, jovens, adultos, trabalhadores de vários setores, académicos, estudantes, etc., - que adquirem significado nos seus usos (Knijnik et al., 2012). Ora, "as ideias de Wittgenstein acima esboçadas possibilitam que sejam atribuídos novos sentidos para o campo etnomatemático" (Knijnik, 2008, p. 145). Inspirando-se nessas ideias e em alguns aportes teóricos do filósofo Michel Foucault, Knijnik (2012) apresenta uma nova perspetiva para a *etnomatemática*, concebendo-a como uma 'caixa de ferramentas teóricas' que possibilita analisar os 'jogos de linguagem' de distintas 'formas de vida' - ou seja, de diferentes matemáticas - e as suas 'semelhanças de família', assim como os discursos eurocêntricos da 'Matemática académica' e os seus efeitos de verdade. Ora, um aporte essencial da teoria de Foucault é a relação que estabelece entre ‘poder’ e ‘verdade’ (Knijnik, 2012). Para Foucault, a ‘verdade’ está vinculada a sistemas de ‘poder’ que a incitam e apoiam, e aos efeitos de poder que induz e que a ampliam; ora, cada sociedade tem a sua ‘política geral de verdade’ - isto é, certos tipos de discurso que aceita e faz funcionar como verdadeiros (Knijnik, 2012). Nessa ótica, os discursos da ‘Matemática académica’ podem ser vistos como instituídos por - e instituindo - essa ‘política geral de verdade’ -, pois muitas das suas técnicas e procedimentos são percebidas como mecanismos únicos para gerarem conhecimentos, num processo de exclusão de outros saberes, classificados como ‘não-matemáticos’, por não usarem as mesmas regras (Knijnik et al., 2012). Nesse quadro, “estudos etnomatemáticos podem ampliar o entendimento (intercultural) do que são as matemáticas. Para uma visão monolítica da matemática não há base.” (Gerdes, 2007a, p. 43). Ora, à medida que o campo da *etnomatemática* se desenvolve, será necessário que continuemos a reinterpretar novos dados relativos ao conhecimento matemático de diversas pessoas e grupos, e que continuemos a descobrir e a disseminar ‘histórias ocultas’ do conhecimento matemático; essa pesquisa irá ampliar e aprofundar o conhecimento que criamos e recriamos acerca do mundo (Powell & Frankenstein, 1997g).

2.3.1. Estudos etnomatemáticos sobre artefactos

Num debate interessante entre Karl Popper e John Eccles - referenciado por Palhares (2010) -, apesar de ambos concordarem com a perspetiva de Popper acerca da realidade, segundo o qual a realidade consiste em três mundos - o ‘mundo das coisas físicas’, o ‘mundo dos estados mentais’ e o ‘mundo dos produtos da mente humana’, incluindo problemas, teorias e cultura, e, portanto, no qual a matemática existe -, as visões dos dois autores em consideração são discordantes no que concerne ao começo deste último mundo. No entendimento de Popper, o ‘mundo dos produtos da mente humana’ teria tido origem com o desenvolvimento da linguagem; já Eccles defende que teria sido com o surgimento de um ‘instrumento cultural’, ainda que o próprio Eccles reconheça que, para se ter um ‘instrumento cultural’, alguma forma de linguagem seria sempre indispensável, uma vez que os processos de fabricação e de utilização de instrumentos teriam que ser transmitidos (Palhares, 2010). Ora, os estudos etnomatemáticos sobre artefactos que, seguidamente, nos propomos apresentar, tendem para a posição adotada por Eccles, fundamentando-se no pressuposto de que os artefactos - aqui entendidos como instrumentos e outros objetos culturais, demarcando-se de outras conceções do termo - “são de grande importância para se descobrirem certas formas de pensamento matemático.” (Palhares, 2010, p. 323).

Enquadrando-se na linha de investigação supracitada, o livro de Ascher e Ascher (1981) representa um estudo em primeira-mão sobre um artefacto que escapou à destruição da Civilização Inca, o *quipu* (figura 1). Conforme evidenciam Ascher e Ascher (1981), "os Incas eram uma cultura, uma civilização e um Estado. Ou seja, a palavra Inca, tal como a utilizamos, aplica-se a formas particulares de associação humana." (p. 1). Os Incas construíram um vasto império na América do Sul, ocupando um território que compreende, atualmente, todo o Perú, e algumas regiões do Equador, da Bolívia, do Chile e da Argentina (Ascher & Ascher, 1981). Ora, aquando da chegada dos invasores espanhóis, no decorrer do século XVI, o Estado Inca já existia há cerca de cem anos; em apenas trinta anos, a Civilização Inca foi destruída (Ascher & Ascher, 1981). Apesar de se tratar de uma civilização relativamente avançada, os Incas não desenvolveram um sistema convencional de escrita - isto é, eles não escreviam do modo como, hoje, nós entendemos essa atividade (Ascher & Ascher, 1981). Em vez disso, os Incas desenvolveram um sistema singular, expresso em arranjos de cordas com nós atados - designados *quipus* - para registarem e transmitirem informações por todo o seu império (Ascher & Ascher, 1981). Os *quipus* constituem, assim, um artefacto que se tornou o meio de expressão para a civilização Inca (Ascher & Ascher, 1981).

Figura 1. *Quipu* (Ascher & Ascher, 1981, p. 10).

É o trabalho de Marcia Ascher - matemática - e Robert Ascher - antropólogo - que vem trazer uma perspetiva nova e mais aprofundada sobre os *quipus*, que, conforme revelam Ascher e Ascher (1981), quando segurados na mão, são muito pouco impressionantes. O estudo dos autores em referência vem demonstrar que os *quipus* constituem um sistema lógico-numérico, expresso em configurações tangíveis. Assim sendo, "os *quipus* estão relacionados com aquela parte do empreendimento intelectual humano geralmente tida como matemática." (Ascher & Ascher, 1981, p. 158). Os conceitos numéricos envolvidos nos *quipus* incluem o sistema posicional de base dez, cálculos aritméticos, razões e proporções. Ora, segundo Ascher e Ascher (1981), a maneira como os conceitos de número, configuração geométrica e lógica foram articulados pelo criador de *quipus* não teve paralelo noutras culturas. Infelizmente, a criação de *quipus* teve um final abrupto no século XVI, e, embora possamos saber onde levaram conceitos matemáticos semelhantes na 'cultura ocidental', não se torna possível saber, na direção a ser seguida pelos Incas, onde teriam levado as 'ideias matemáticas' implícitas nos *quipus* (Ascher & Ascher, 1981).

Curiosamente, Marcia Ascher, num diálogo aberto com D'Ambrosio, revela que a sua iniciação à *etnomatemática* ocorreu, justamente, com a investigação dos *quipus* (Ascher & D'Ambrosio, 1994). 'Existirá algo de matemático neles?', 'o que se pode ver nestes artefactos?' - questões como estas fundaram a investigação desenvolvida, sendo que uma grande parte do trabalho consistiu em descobrir como fazer tal investigação (Ascher & D'Ambrosio, 1994). Com uma formação matemática tradicional, Marcia Ascher não estava convicta de que as ideias expressas em cordas com nós atados - *quipus* - "pudessem ser 'lidas' ou ter significado. Num certo sentido, com artefactos, só se pode lidar com estrutura, isto é, com aspetos formais, tais como lógica interna, coerências e relações, e não com significado." (Ascher & D'Ambrosio, 1994, p. 36). À medida que o trabalho com os *quipus* foi avançando, a matemática constatou que 'muitas coisas' podiam, na verdade, ser 'lidas' a partir de tais artefactos (Ascher & D'Ambrosio, 1994). Ora, um importante aspeto a salientar é que Marcia Ascher não iniciou o trabalho de investigação dos *quipus* com conhecimentos da cultura Inca; ao invés disso, a matemática tentou trabalhar com base, apenas, nos artefactos e na sua manipulação (Ascher & D'Ambrosio, 1994).

Gerdes (2012a), no âmbito da sua investigação, inicia o desenvolvimento de uma metodologia, tornada necessária para 'desvendar' o pensamento geométrico 'escondido' em técnicas de fabricação com uma longa história. Ora, um dos métodos explorados pelo autor pode ser descrito da seguinte forma: o investigador começa por aprender as técnicas de fabricação sobreviventes - por exemplo, as técnicas de entrelaçamento -, de produtos de trabalho tradicionais - artefactos, como cestos, esteiras, potes, nassas, armadilhas, etc. - e, em cada fase do processo de fabricação, o investigador coloca a questão: "que considerações de natureza geométrica desempenham um papel para se chegar à fase seguinte?" (Gerdes, 2012a, p. 195). Dessa forma, encontram-se elementos de um pensamento geométrico 'escondido' ou 'congelado' nos artefactos (Gerdes, 2012a). O investigador, ao aprender as técnicas tradicionais de fabricação de artefactos - e, inclusivamente, ao tentar variar a forma dos artefactos - percebe que essa forma raramente é arbitrária, representando, geralmente, muitas vantagens práticas; na maioria das vezes, corresponde mesmo à única ou à melhor solução possível de um problema de produção (Gerdes, 1988a). A forma tradicional reflete, assim, experiência acumulada e sabedoria; essa forma configura, não só conhecimento físico e biológico acerca dos materiais utilizados, como também conhecimento matemático, designadamente conhecimento sobre as propriedades e relações de ângulos, círculos, retângulos, quadrados, pentágonos regulares, hexágonos regulares, cones, pirâmides, cilindros, etc. (Gerdes, 1988a). Aplicando o método previamente descrito, torna-se possível descobrir muita matemática 'escondida' ou 'congelada' (Gerdes, 1988a). Em conformidade com Gerdes (1988a), o artesão que imita uma certa técnica de fabricação conhecida, normalmente, não está a fazer matemática; no entanto, o artesão que descobriu essa técnica fez matemática - ele estava a pensar matematicamente.

Tendo por base a metodologia de investigação supracitada, Paulus Gerdes desenvolveu, em coordenação com os seus colaboradores, uma multiplicidade de estudos etnomatemáticos sobre artefactos vários. Apresentaremos, em seguida, alguns exemplos ilustrativos dessa extensa investigação. No livro *Mulheres, cultura e geometria na África Austral: Sugestões para pesquisa*, Gerdes (2011) evidencia ideias e aspetos matemáticos incorporados em padrões inventados por mulheres da África Austral, os quais surgem associados a diversas atividades culturais tradicionais. Entre essas atividades, encontra-se a fabricação de 'carteiras de mão entrecruzadas' - os *sipatsi*; no singular, *gipatsi* (figura 2) - pelas mulheres *Tonga*, na província de Inhambane, no sudeste de Moçambique (Gerdes, 2011). Decorrente da sua beleza e utilidade, os *sipatsi* constituem um dos produtos mais apreciados da cestaria moçambicana, não só a nível nacional, como também pelos visitantes de outros países (Gerdes, 2011).

Figura 2. *Gipatsi* (Gerdes, 2011, p. 11).

Quando as cesteiras entrecruzam os seus *sipatsi*, elas repetem o motivo decorativo na posição oblíqua ou diagonal, e, antes mesmo de começarem a entrecruzar, elas têm de realizar vários cálculos mentais; na verdade, para garantirem que cada motivo decorativo aparece um número inteiro de vezes à volta do *gipatsi* - condição a satisfazer para que seja considerado bonito e de boa qualidade -, o número total de tiras deverá ser um múltiplo comum de cada um dos 'períodos dos motivos decorativos' usados (Gerdes, 2011). De acordo com Gerdes (2007a), o contexto dos *sipatsi* previamente referido tem potencial para ser explorado na educação matemática de diversas formas, podendo, por exemplo, constituir um contexto interessante para introduzir e sentir a necessidade do conceito matemático de *mínimo múltiplo comum*, e para refletir sobre maneiras que permitam calcular o m.m.c. de números. Em relação aos motivos decorativos que aparecem nos *sipatsi*, estes denotam uma imensa diversidade, revelando o poder de imaginação e a criatividade artística e geométrica das cesteiras que os produzem. Ademais, esses motivos decorativos afiguram-se muito interessantes sob o ponto de vista dos padrões lineares a que dão origem quando cada motivo é repetido numa fita - no caso, a criatividade das cesteiras expressa-se no facto de elas terem inventado 'padrões-de-fita' de todas as sete classes possíveis de 'padrões-de-fita', estabelecidas com base nos sete diferentes grupos de simetrias teoricamente possíveis (Gerdes, 2011). Ora, a diversidade de 'padrões-de-fita' com que as cesteiras decoram os seus *sipatsi* encontra-se muito bem evidenciada no livro *Sipatsi: Cestaria e geometria na cultura Tonga de Inhambane*, mais precisamente no segundo capítulo desse livro, no qual Gerdes (2003b) apresenta um catálogo composto por mais de trezentos 'padrões-de-fita' provenientes de fitas ornamentadas em *sipatsi*. Segundo Gerdes (2011), "existem muitas possibilidades para o uso matemático e educacional de *sipatsi*" (p. 18). Ora, é justamente nesse sentido que Gerdes (2003b) apresenta, no terceiro e no quarto capítulos do livro referido acima, exemplos e sugestões que visam uma exploração matemática e educacional dos *sipatsi*, sendo apresentados vários problemas e questões para reflexão criados com base nesse artefacto.

Uma outra atividade cultural de tradição feminina na África Austral - igualmente referenciada por Gerdes (2011) - reporta-se às mulheres da Suazilândia - país que, entretanto, passou a chamar-se Essuatíni -, que entrançam 'bacias coloridas' - os *titja*; no singular, *sitja* (figuras 3 e 4) - correspondentes a 'trançados espiralados'. A técnica utilizada pelas cesteiras para a fabricação dos *titja* é a de entrelaçar e coser em espiral; para isso, usam fios de sisal, entrelaçando-os à volta de um núcleo de tiras de planta; para mudarem de cor na decoração dos *titja*, precisam de utilizar fios de cores diferentes (Gerdes, 2011).

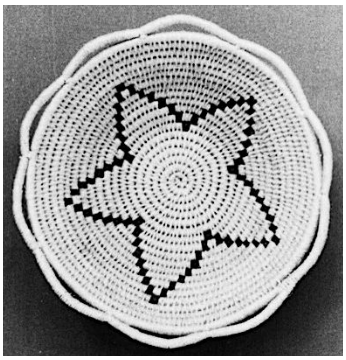


Figura 3. *Sitja* - D_5 (Gerdes, 2011, p. 21).

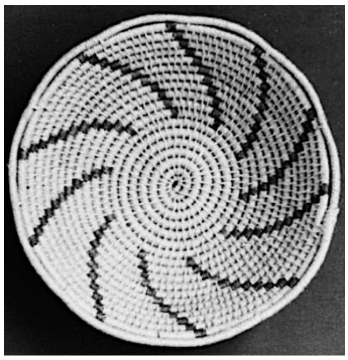


Figura 4. *Sitja* - C_{10} (Gerdes, 2011, p. 25).

No estudo matemático dos desenhos decorativos que fazem parte dos *titja*, Gerdes (2011) constata que a maioria é do tipo D_n - D refere-se a 'diedral', indicando que o desenho tem simetria de reflexão e de rotação de ordem *n* -, tal como ilustra o desenho decorativo presente no *sitja* da figura 3, que é do tipo D_5. Ainda assim, Gerdes (2011) assinala a existência de um pequeno número de *titja* cujos desenhos decorativos têm simetria rotacional, mas não têm simetria de reflexão; estes são do tipo C_n - *C* denota 'cíclico', indicando que o desenho tem, unicamente, simetria de rotação de ordem *n*. É o caso, por exemplo, do desenho decorativo que surge no *sitja* da figura 4, que é do tipo C_{10}. Importa salientar que as cesteiras não decoram os seus *titja* no fim, mas avançam, progressivamente, com a decoração da espiral, circuito por circuito; ora, uma vez que a espiral, em si, não é nem um círculo, nem um conjunto de circunferências concêntricas, o produto final nunca pode ter simetria rotacional exata, mas apenas aproximada (Gerdes, 2011). Mesmo assim, as cesteiras revelam-se capazes de entrelaçar *titja* que têm, ainda que aproximadamente, simetria rotacional de ordem *n*; isso implica que, quando começam a introduzir um motivo decorativo num determinado circuito da espiral, elas consigam, de alguma forma, assegurar que a distância entre pontos correspondentes de cópias sucessivas do motivo seja igual ao comprimento do respetivo circuito dividido pela ordem rotacional pretendida (Gerdes, 2011).

São inúmeros os estudos de Paulus Gerdes que, à semelhança dos anteriores, pretendem contribuir para a compreensão de formas de pensamento geométrico envolvidas na fabricação de objetos entrecruzados - de que são exemplo os *sipatsi* e os *titja*, previamente explorados. Num exemplo distinto, Gerdes (1989) analisa aspetos de aritmética e de ornamentação geométrica de alguns cestos da Amazónia brasileira (figura 5) - correspondentes a 'cestos cilíndricos de fundo quadrado'. O trabalho apresentado tem como foco a seguinte questão: que reflexões de índole matemática podem desempenhar um papel na ornamentação desse tipo de cestos? (Gerdes, 1989). Debruçando-se sobre tal questão, Gerdes (1989) analisa a ornamentação geométrica de cada um dos quatro 'cestos cilíndricos de fundo quadrado' exibidos na figura 5, mais precisamente os padrões que decoram as paredes cilíndricas desses cestos e as suas bases quadradas. Nesse trabalho, torna-se evidente a existência de uma estreita relação entre aritmética e a qualidade da decoração geométrica dos cestos (Gerdes, 1989).

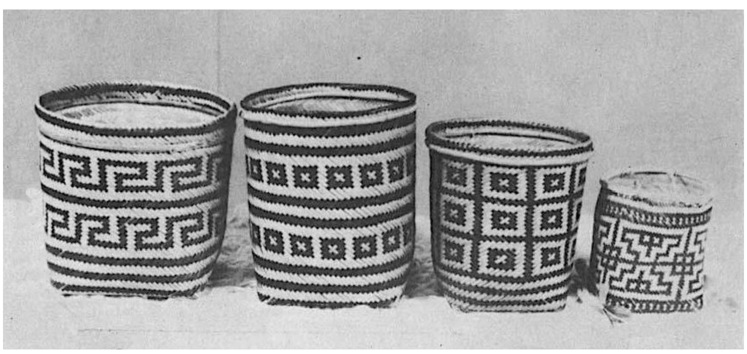


Figura 5. Cestos da Amazónia brasileira (Gerdes, 1989, p. 20).

Gerdes (2003a) analisa aspetos geométricos da cestaria *Bora* na Amazónia peruana, em particular de 'cestos de rebordo circular e de fundo entrecruzado' - os *níjtyubane*; no singular, *níjtyuba* (figura 6). Os *níjtyubane* são utilizados como peneira, joeira, ou tigela, ou como prato de comida ou de secagem (Gerdes, 2003a). No respetivo trabalho, Gerdes (2003a) investiga elementos geométricos, quer da fabricação de *níjtyubane* pelos cesteiros *Bora* - que, em geral, são homens -, como da criação e transformação de padrões geométricos nesses mesmos cestos. Na maioria dos *níjtyubane*, é possível observarem-se 'mariposas' ou 'borboletas' - conforme são designadas pelos cesteiros *Bora* -, constituídas por 'quadrados dentados concêntricos' (Gerdes, 2003a). Ora, a criatividade e imaginação geométrica dos artesãos *Bora* manifesta-se na diversidade de 'mariposas' diferentes encontradas nos *níjtyubane* - um número bastante superior às variantes encontradas noutras culturas (Gerdes, 2003a). Não obstante, raramente aparece uma só 'mariposa' num *níjtyuba*; por norma, os cesteiros *Bora* entrecruzam várias 'mariposas', tecendo-as umas ao lado das outras - o que dá origem a 'padrões planares de mariposas' (Gerdes, 2003a), tal como se pode ver no *níjtyuba* ilustrado na figura 6. Ora, os 'padrões planares compostos por mariposas' encontrados nos *níjtyubane* caracterizam-se, também, pela sua diversidade, a maioria dos quais o autor revela não ter encontrado noutras culturas. Gerdes (2003a) explora, ainda, outros padrões planares existentes nos *níjtyubane*, e analisa as simetrias envolvidas em vários padrões.

Figura 6. *Níjtyuba* (Gerdes, 2013a, p. 37).

No livro *Geometria e cestaria dos Bora na Amazónia peruana*, Gerdes (2013a) analisa aspetos geométricos da fabricação e da decoração de dois tipos de cestos *Bora*. Um desses tipos de cestos corresponde aos *níjtyubane*, em relação aos quais Gerdes (2013a) reintegra os aspetos geométricos analisados no trabalho já descrito de Gerdes (2003a), aprofundando a análise feita e apresentando um maior número de exemplos ilustrativos. O outro tipo de cestos que é alvo de análise por Gerdes (2013a) diz respeito a 'cestos de fundo quadrado e de boca circular', alguns dos quais são compostos por tampa. A par da análise realizada, Gerdes (2013a) avança, no livro supracitado, com algumas sugestões que visam a incorporação, na educação matemática, de determinados aspetos geométricos da cestaria *Bora.*

Gerdes (2004) analisa esteiras entrecruzadas por mulheres *Yombe* da área do Baixo-Congo - província que, entretanto, passou a denominar-se Congo Central -, localizada no extremo oeste da atual República Democrática do Congo. "No final do século XIX e no início do século XX, cada mulher *Yombe* aprendeu a entrançar esteiras e a decorá-las com desenhos." (Gerdes, 2004, p. 82). Na figura 7, pode ver-se um exemplo de uma esteira *Yombe*. As esteiras são usadas para dormir e também para sentar (Gerdes, 2004). No trabalho de Gerdes (2004), o principal tópico sob análise é a interação entre valores culturais e as possibilidades matemático-técnicas permitidas na criação de padrões em esteiras *Yombe*.

Figura 7. Esteira *Yombe* (Gerdes, 2004, p. 84).

Os motivos decorativos presentes nas esteiras *Yombe* são designados *mabuinu* (no singular, *dibuinu*) pelas mulheres *Yombe*, e representam um significado específico nessa cultura (Gerdes, 2004). Ora, certos motivos *mabuinu* com simetria finita têm a forma de 'quadrados dentados'; esses motivos aparecem dispostos nas esteiras de tal modo que cada uma das suas diagonais seja paralela a um dos pares de lados iguais da esteira retangular (Gerdes, 2004), conforme se pode observar na esteira *Yombe* ilustrada na figura 7. Sob o ponto de vista da configuração dos próprios motivos decorativos *mabuinu* nas esteiras *Yombe*, distinguem-se dois tipos: esteiras em que essas unidades de ornamentação se encontram isoladas umas das outas, e esteiras em que tais unidades são contíguas (Gerdes, 2004). Essa maior proximidade na configuração de motivos contíguos - que permite às esteireiras *Yombe* veicularem mais informações nas suas esteiras - tem implicações ao nível das simetrias exibidas pelos *mabuinu*, resultando em perdas de certas simetrias (Gerdes, 2004). Ora, essa aparente falta de riqueza em termos de simetrias é, na verdade, reflexo do aprofundamento da compreensão das esteireiras *Yombe*, que expressam a fertilidade das suas ideias geométricas na invenção de diversos padrões e na sua experimentação ao nível da transformação das simetrias presentes nesses padrões (Gerdes, 2004).

Gerdes (2002) apresenta uma análise comparativa de 'desenhos octogonais' entrecruzados em esteiras e cestos de várias partes do mundo. Tais motivos decorativos - com a forma de 'estrela octogonal' ou de 'flor octogonal' - são bem conhecidos, nas suas múltiplas variações, um pouco por todo o mundo: desde o Egito ao México, da Noruega à China e à Índia, da Turquia aos Estados Unidos da América, de Marrocos à Nova Zelândia, da Indonésia ao Gana, do Senegal ao Brasil, da Tailândia à Tunísia, etc. (Gerdes, 2002). Os 'motivos octogonais' podem aparecer tecidos em têxteis, atados em tapetes, aplicados em madeira, tricotados em camisolas, cosidos em colchas, recortados em couro, bordados em almofadas, e, também, entrançados em esteiras (figura 8) e em cestos (Gerdes, 2002). Ora, é desses dois últimos artefactos que procedem os múltiplos exemplos de octógonos analisados por Gerdes (2002).

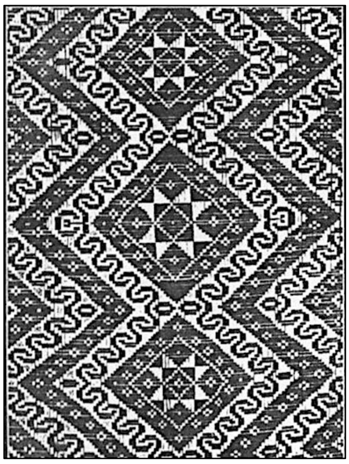


Figura 8. 'Motivos octogonais' entrançados numa esteira da Indonésia (Gerdes, 2002, p. 8).

No livro *Otthava: Fazer cestos e geometria na cultura Makhuwa do nordeste de Moçambique*, Gerdes (2007c) analisa vários artefactos associados a práticas tradicionais da cultura *Makhuwa*, que evidenciam considerações geométricas suscetíveis de exploração matemática (e também educacional). As práticas culturais apresentadas no livro provêm da esfera cultural de *Otthava* - palavra que, na língua materna da população *Makhuwa*, significa tecer, entrecruzar, entrançar; portanto, são práticas ligadas à cestaria e esteiraria (Gerdes, 2007c). Constituem objetos de análise a fabricação de funis (*iheleo*), de chapéus (*ipopera*), de armadilhas de pesca (*ilema*), de recipientes (*mavuku*), de peneiras (*ipadge*), de chocalhos de dança (*marrosula*), de cestos (*ikhapiaka*), de carteiras (*isharutela*), de tranças ou bandas entrecruzadas, de nós (*mallutte*) - quadrados e pentagonais -, e de esteiras circulares (Gerdes, 2007c). Em articulação com a análise das práticas tradicionais da cultura *Makhuwa* supracitadas, Gerdes (2007c) apresenta, ao longo do livro em questão, inúmeras possibilidades para a exploração, científica e didática, dos conhecimentos geométricos inerentes a cada uma das práticas culturais previamente consideradas.

Tangenciando, em certo sentido, a matéria de investigação de Paulus Gerdes antes ilustrada, Costa (2009) analisa a confeção de objetos entrançados, nomeadamente cestos e esteiras, pelo povo *Ticuna*, em especial pelas mulheres da comunidade *Ticuna* de Umariaçu, localizada no extremo oeste do estado do Amazonas, no Brasil. Os cestos e as esteiras produzidos pelas mulheres *Ticuna* caracterizam-se por uma grande variedade de formas, tamanhos e cores (Costa, 2009). Considerando a sua forma, os mais comuns são os 'cestos de fundo e tampa circulares' e as 'esteiras de forma elítica' (Costa, 2009). Partindo de exemplos diversificados de cestos e esteiras *Ticuna* - não só os de formato mais frequente -, a autora evidencia diversas noções matemáticas explícitas e implícitas, respetivamente, nas formas desses artefactos - enquanto objetos acabados -, e nos processos de confeção desses mesmos artefactos. Ora, essas noções matemáticas estão na base das aplicações didáticas desenvolvidas por Costa (2009), que se concretizaram na realização, em contexto escolar, de um conjunto de atividades práticas, construídas a partir de alguns cestos e esteiras produzidos pelos *Ticuna*.

Dias, Costa e Palhares (2017) analisam as experiências geométricas praticadas pelas mulheres *Nyaneka-nkhumbi*, do sudoeste de Angola, evidenciadas no processo de confeção de cestos - com dimensões e formatos diversos, consoante as funções a que eram destinados. Os desenhos que decoram os cestos *Nyaneka-nkhumbi* outrora tinham significado no seio desse grupo étnico; hoje são poucos os autóctones capazes de descreverem a diversidade e o significado de tais desenhos (Dias et al., 2017). No respetivo trabalho, Dias et al. (2017) identificam vários aspetos matemáticos - e, mais concretamente, geométricos e de medida - presentes nos cestos manufaturados pelas mulheres *Nyaneka-nkhumbi*, entre os quais: as formas geométricas - cónicas truncadas e cilíndricas - dos cestos; a 'espiral de Arquimedes' implícita na confeção da base dos cestos; as proporções - iguais e distintas - existentes entre certas medidas dos cestos; o volume dos cestos; as figuras geométricas patentes nos motivos que ornamentam os cestos, e os padrões geométricos criados por esses mesmos motivos; a existência de alguns enfeites que correspondem a frisos; e as transformações geométricas e a simetria da ornamentação dos cestos.

Os resultados apresentados por Dias et al. (2017) fazem parte de uma investigação mais ampla, que está na base da tese de doutoramento concluída por Dias (2015). Nesse trabalho de investigação, que compreende um estudo etnomatemático sobre o grupo étnico *Nyaneka-nkhumbi*, é realizada uma análise e reconstrução de elementos matemáticos presentes na tradição do referido povo (Dias, 2015). No caso, para além da cestaria, constituem objetos de investigação no contexto dos *Nyaneka-nkhumbi*, enfeites típicos criados e usados pelas mulheres, dois jogos da tradição do grupo - *ondjandja* e *owela* -, as tradicionais 'casas de pau-a-pique', uma diversidade de armadilhas construídas e utilizadas pelos caçadores, e ainda, a prática de contagem gestual e o sistema numeração do grupo étnico (Dias, 2015).

A partir dos conhecimentos matemáticos implícitos nas práticas culturais e nos artefactos do grupo étnico *Nyaneka-nkhumbi* analisados, Dias (2015) elabora um conjunto de tarefas para a educação matemática, destinadas ao 1.º ciclo do Ensino Básico, que foram aplicadas em contexto de formação de professores.

Oliveras (2000) investiga aspetos matemáticos ligados ao processo de fabrico de certos objetos artesanais, tradicionais da cultura de Andaluzia - comunidade autónoma de Espanha, localizada na costa sul do país. O objetivo é conhecer as 'etnomatemáticas vivas' num campo representativo da uma parte da cultura andaluza, contextualizadas em determinados produtos culturais que, por transmissão oral e experiencial, persistiram até aos nossos dias, bem como nos seus processos de produção, ainda hoje vigentes (Oliveras, 2000). O campo a investigar é o que pode designar-se 'cultura artesanal andaluza', sendo materializado num conjunto de trabalhos artesanais considerados representativos dessa cultura, entre os quais: a marchetaria; a construção de instrumentos musicais; a empedraria artística granadina; a cerâmica; a carpintaria; o ofício modista - corte e confeção; a escultura e talha em mármore e madeira; a confeção de vários tipos de tapetes; a construção de vitrais e candeeiros; o crochê; a produção de *faroles granadinos;* a forjaria de ferro e cobre; a joalharia; a confeção de bordados em tule com ouro para ornamentos religiosos, trajes de toureiro, e outros; a marroquinaria em couro; etc. (Oliveras, 2000). Tendo por base os ofícios artesanais supracitados, a autora analisa os 'elementos etnomatemáticos' implícitos nos processos de fabricação artesanal, bem como nos artefactos produzidos (Oliveras, 2000).

Sanchéz (2003) realiza uma investigação sobre práticas, consideradas matemáticas, na 'comunidade da Macedónia' - localizada nas margens do rio Amazonas, próximo da cidade de Letícia, na Colômbia. Trata-se de uma comunidade multiétnica, formada por indígenas *Cocamas*, *Yaguas* e *Ticunas*, constituindo, estes últimos, a população maioritária (Sanchéz, 2003). Apoiando-se nos fundamentos teóricos de Alan Bishop, Sanchéz (2003) analisa quatro práticas matemáticas, tidas como universais, realizadas na 'comunidade da Macedónia', designadamente: 'contar', 'explicar', 'medir' e 'projetar'. Atendendo às características da comunidade em questão, o estudo de Sanchéz (2003) privilegia a última atividade mencionada - 'projetar' -, no âmbito da qual o autor analisa a fabricação de pulseiras - denominadas *manillas* pelos artesãos dessa comunidade. Ao nível da confeção de *manillas*, evidenciam-se diferentes padrões de entrelaçamento - sucessões de nós -, aos quais se associam processos de elaboração distintos (Sanchéz, 2003). Mesmo existindo diferentes tipos de nós passíveis de serem utilizados na fabricação de *manillas*, em cada *manilla* é usado sempre o mesmo tipo de nó (Sanchéz, 2003). Para além do tipo de nó empregue, os outros dois elementos variáveis na produção de *manillas* são o número de fibras utilizado e o uso (ou não) de *puntillas* como guias (Sanchéz, 2003). Considerando isso, o autor descreve a elaboração de *manillas* usando terminologia relativa a algoritmos.

Enquadrando-se, também, na linha de investigação de artefactos entrançados, Albanese (2014) conclui uma tese de doutoramento sobre 'artesanato entrançado' no contexto geográfico da Argentina. Em particular, são objeto de análise na investigação de Albanese (2014) artefactos nos quais predomina uma só dimensão, designadamente 'tranças', 'cordões' e 'faixas'. Tendo por base tais artefactos, Albanese (2014) explora, sob o ponto de vista etnográfico, o desenvolvimento do trabalho artesanal, investiga os constructos matemáticos implícitos nesses artefactos, e analisa o seu processo de produção. Para isso, a autora em menção elabora um 'método próprio de análise etnomatemático', ajustado aos objetivos do estudo e à tipologia específica do objeto estudado. O instrumento metodológico criado - *MOMET* - é constituído por duas componentes, a saber: um 'Método de análise ETnográfico' - *MET* - e um 'modelo de análise matemático' ou 'tipo de MOdelação Matemática' - *MOM;* estes dois dão origem à ferramenta metodológica *MOMET*, que permite realizar a investigação do ponto de vista etnográfico e, depois, do ponto de vista da matemática formal - produto e processo, respetivamente (Albanese, 2014). A par da análise dos constructos matemáticos presentes nos artefactos entrançados, Albanese (2014) incide, na segunda parte da sua investigação, sobre as conceções evidenciadas por professores - em formação e no ativo -, acerca da natureza da matemática, através da sua participação em oficinas ligadas à matemática implícita no 'artesanato entrançado'; nessas oficinas, são propostas, aos professores, 'atividades prático-criativas' referentes ao 'artesanato entrançado' como fundamento para a sua reflexão.

Em Portugal, o estudo de artefactos é quase inexistente, sendo esta uma área de investigação a carecer de um maior investimento (Palhares, 2012). Mesmo assim, podem citar-se alguns contributos. Vieira, Palhares e Sarmento (2008) apresentam um estudo sobre aspetos geométricos ligados à cestaria, o qual abrange a parte norte de Portugal Continental e inclui, ainda, uma pequena incursão à Galiza. Nesse estudo, os autores identificam diferentes padrões na tecedura das bases dos cestos analisados, as quais assumem formas geométricas diversas, assim como diferentes tamanhos. Igualmente a respeito dos fundos dos cestos - mais precisamente, dos tipos de simetrias aí presentes -, há a salientar a diversidade e riqueza verificadas, quer em termos de simetria reflexiva, como de simetria rotacional; não obstante, convém ressalvar que, no caso de tais artefactos, as simetrias devem ser encaradas em sentido lato, uma vez que estamos perante produtos que resultam de um trabalho manual (Vieira et al., 2008). No estudo de Vieira et al. (2008) em descrição, é dado particular destaque aos padrões que se encontram nas 'cestas de junco' da zona de Esposende, cuja utilização possibilita a criação de diferentes desenhos, através do uso de junco de diferentes cores. Os motivos decorativos presentes nas paredes laterais dessas cestas formam frisos de tipo variado, tendo sido possível, segundo os autores, verificar, in loco, a existência de cinco dos sete tipos de frisos considerados na classificação de Washburn e Crowe (1988).

Outro destaque vai para as tradicionais ‘tranças de Fafe’, feitas em palha; tais tranças apresentam entre três e sete tiras, cujo entrelaçamento admite padrões diversos (Vieira et al., 2008). Ao nível do conjunto de simetrias dessas tranças, os autores destacam a existência de translações e de reflexões deslizantes.

Sousa, Palhares e Sarmento (2008) analisam a matemática utilizada na construção de barcos por calafates da comunidade piscatória de Câmara de Lobos - freguesia do concelho com o mesmo nome, localizada na ilha da Madeira, Portugal; no contexto considerado, os barcos correspondem a artefactos, construídos artesanalmente. Ora, uma importante distinção feita no estudo refere-se à construção de barcos realizada antes e depois de 1986 - ano que assinala a adesão de Portugal à União Europeia, com subsequentes alterações em algumas regras na atividade piscatória e, também, na construção de barcos (Sousa et al., 2008). Até 1986, os conhecimentos matemáticos dos construtores de barcos de Câmara de Lobos - chamados calafates no seio dessa comunidade - ligavam-se à medida, aos ângulos, e, sobretudo, às proporções (Sousa et al., 2008). Os calafates dessa comunidade, apesar de terem um nível de escolarização limitado, são profissionais com uma ampla experiência na sua arte, tendo herdado, das gerações anteriores, as técnicas e os conhecimentos matemáticos necessários à construção artesanal de barcos, e revelando-se capazes de utilizarem matemática que vai muito além da matemática escolar que aprenderam, como por exemplo o raciocínio proposicional aplicado (Sousa et al., 2008). Depois de 1986, a construção de barcos passa a ser subsidiada pela União Europeia, mediante a apresentação de um projeto da embarcação a construir, e ficando o construtor obrigado a concretizar a construção de acordo com esse projeto (Sousa et al., 2008). Na sequência disso, os calafates passam a estar sujeitos à aplicação de conhecimentos matemáticos relacionados com escalas; ademais, o rigor exigido na construção dos barcos torna-se muito maior do que trabalhando com proporções aproximadas, como previamente faziam (Sousa et al., 2008). A matemática envolvida na construção de barcos pelos calafates de Câmara de Lobos torna-se, assim, mais complexa após o ano de 1986 (Sousa et al., 2008).

Interessado em ampliar e aprofundar o estudo descrito por Sousa et al. (2008) acerca da matemática usada na construção de barcos por calafates da comunidade piscatória de Câmara de Lobos, Sousa (2016) desenvolve uma investigação mais abrangente, que está na base da tese de doutoramento concluída pelo autor. Nessa investigação, Sousa (2016) analisa a matemática usada no quotidiano, quer da comunidade piscatória de Câmara de Lobos, como da comunidade piscatória de Caxinas - pertencente à freguesia de Vila do Conde, Portugal. A partir dos dados obtidos a partir do estudo etnomatemático realizado em contexto piscatório - que se enquadram no tema matemático relacionado com a ‘proporcionalidade’ e o ‘raciocínio proporcional’, Sousa (2016) cria um conjunto de tarefas matemáticas, que foram implementadas em escolas situadas em dois contextos distintivos - um piscatório e outro não.

A etnomatemática nos lenços dos namorados intitula a investigação desenvolvida por Vilela (2012) acerca de um artefacto com uma grande tradição na região do Minho, especialmente em Vila Verde - concelho que mais tem contribuído para a recuperação, preservação, valorização e divulgação dos tradicionais 'Lenços dos Namorados'. Baseada na recolha fotográfica de 'Lenços dos Namorados' característicos de Vila Verde, Vilela (2012) faz uma análise das simetrias existentes nos mesmos, organizando-os em função do seu grupo simétrico. Os lenços surgem categorizados como tendo duas, quatro ou oito simetrias; importa esclarecer que foram efetuados certos cortes nos lenços, de modo que fosse possível considerar, em cada um, o maior número de simetrias possível, que se tornaria muito limitado caso os lenços fossem sempre analisados integralmente Vilela (2012). Verifica-se um predomínio dos 'Lenços dos Namorados' com duas simetrias - Identidade e simetria de reflexão de eixo vertical ou diagonal; ademais, o eixo de reflexão diagonal é o mais frequente - talvez devido ao facto de os lenços, que serviam para pendurar à cintura ou colocar ao pescoço, serem dobrados na diagonal (Vilela, 2012).

Os últimos estudos a referenciar nesta esfera dos estudos etnomatemáticos sobre artefactos, realizados em Portugal, estão umbilicalmente ligados a ofícios e profissões tradicionais. Investigam-se saberes e saberes-fazer na prática de tanoeiros (Costa, Catarino & Nascimento, 2008a), de latoeiros (Costa, Catarino & Nascimento, 2008b), de jugueiros (Costa, Nascimento, Catarino & Fernandes, 2010), de serralheiros (Fernandes & Matos, 2008), e a matemática impregnada nos artefactos que constroem.

Costa et al. (2008a) estudam, na região portuguesa de Trás-os-Montes e Alto Douro, processos matemáticos usados na tanoaria - prática que consiste na produção de vasilhas de aduela em madeira, principalmente destinadas à colheita, transporte e tratamento do vinho. Balseiros, barricas, barris, canecos, celhas, cubas, dornas, engoretas, pipas e tonéis designam algumas das mais usuais vasilhas fabricadas pelos tanoeiros (Costa et al., 2008a). A matemática envolvida na fabricação desses artefactos e, mais genericamente, na arte da tanoaria, é sintetizada pela expressão 'trabalhar o redondo' - palavras dos próprios artesãos -, em virtude da forma arredondada das vasilhas, em que se conjugam formas cilíndricas e cónicas truncadas (Costa et al., 2008a). Desde o dimensionamento das peças que constituem as vasilhas a construir, passando pelas ferramentas e pelos moldes utilizados, até à 'cubicagem' final - cálculo do volume das vasilhas -, são vários os conceitos e os processos matemáticos que aí estão implicados, e que as autoras em referência explicitam e interpretam, e que, para além disso, utilizam como base para a elaboração de algumas propostas que poderão ser aplicadas em sala de aula.

Costa et al. (2008b) efetuam um estudo análogo ao anterior, com foco num outro ofício tradicional do nordeste transmontano português - a latoaria. Nessa arte, os artífices são os latoeiros, que produzem artefactos em folha de flandres, de zinco e de alumínio, e em chapa de cobre e de zinco, destinados a diversas funções; alguns exemplos dos artefactos fabricados são: almotolias, braseiras, bilhas, candeias, canecos, cântaros, enxofradeiras, funis, púcaros, pulverizadores, regadores, etc. (Costa et al., 2008b). Desde logo, as medidas das folhas e das chapas utilizadas pelos latoeiros são de grande importância, pois constituem um referencial, quer para a execução das várias construções geométricas, como para a dimensão pretendida para o produto final (Costa et al., 2008b). Nos procedimentos descritos e realizados pelos latoeiros na construção de artefactos, são identificados vários conceitos matemáticos aí envolvidos, e, no que refere à 'cubicagem' final, são explicitados processos matemáticos de verificação do volume intencionado para certos artefactos (Costa et al., 2008b). A partir dos dados recolhidos e analisados, Costa et al. (2008b) constroem algumas propostas que poderão ser usadas em contexto de sala de aula.

O estudo de Costa et al. (2010), realizado na mesma região do que os dois estudos anteriores, reporta-se aos jugueiros e ao artefacto agrícola fabricado por estes artesãos - o jugo. Trata-se, este último, de uma peça feita de madeira, que é colocada no cachaço dos bois, servindo para atrelar um carro de bois ou um arado a estes animais (Costa et al., 2010). A forma dos jugos portugueses é variável, existindo, essencialmente, dois tipos - os 'jugos de tábua' e os 'jugos de trave'; estes últimos aparecem por todo o país, apresentando particularidades de acordo com as regiões (Costa et al., 2010). Em relação à ornamentação dos jugos, são também reconhecidas variações, existindo jugos mais modestos e outros em que a decoração é mais rica e variada; por norma, nos 'jugos de tábua', os elementos decorativos são mais escassos e, como tal, a análise dos aspetos matemáticos fica mais limitada (Costa et al., 2010). No estudo de Costa et al. (2010), a análise dos processos que jugueiros de zonas distintas da região de Trás-os-Montes e Alto Douro utilizam para a construção de jugos permitiu a identificação de processos matemáticos que, em concreto, usam medições, simetrias e proporções. No final, Costa et al. (2010) relatam uma experiência pedagógica de implementação de tarefas inspiradas na matemática dos jugos.

Por último, Fernandes e Matos (2008) investigam as práticas de ensino-aprendizagem ocorridas numa comunidade de aprendizes de serralheiro, no âmbito de um curso de 'Técnico de Serralharia Civil', decorrido numa Escola de Formação Profissional da ilha da Madeira, Portugal. Ao contrário da tanoaria e da latoaria, que caminham em direção à extinção, a serralharia constitui uma atividade próspera em Portugal, em virtude da crescente utilização do alumínio na construção civil (Fernandes & Matos, 2008). Com base em alguns episódios ocorridos na prática dos aprendizes de serralheiro, associados à construção de alguns artefactos, Fernandes e Matos (2008) mostram como a matemática surge entrelaçada nos procedimentos da prática de serralharia. Não há um ensino explícito e isolado da matemática; os conhecimentos matemáticos em uso emergem dos procedimentos da prática dessa atividade e, por sua vez, são incorporados neles, assim como nos artefactos (Fernandes & Matos, 2008).

Os vários estudos etnomatemáticos sobre artefactos aqui explorados - que representam, simplesmente, uma pequena amostra - demonstram como objetos culturais - que, como vimos, podem ser de natureza muito diversa - podem ser utilizados para descobrir pensamento matemático; mais precisamente, o "pensamento matemático das pessoas que os estavam a projetar ou a construir." (Palhares, 2012, p. 85). Ora, uma conclusão emergente pode ser a de que há pensamento matemático por trás dos diferentes tipos de produtos da atividade humana (Palhares, 2012). A propósito disso, é interessante referir que, classicamente, as culturas dominantes empregam uma 'suposta hierarquia intelectual' para diferenciarem a sua apreciação dos produtos das culturas oprimidas como 'práticos', em contraste com os seus próprios produtos, que proclamam 'teóricos' (Powell & Frankenstein, 1997c). No contexto dessa matéria, D'Ambrosio (2001a) declara artificial a dicotomia 'manual/intelectual', e tantas outras que se impregnaram no conhecimento moderno - 'corpo/mente', 'matéria/espírito', etc. Conforme teorizado por D'Ambrosio (1999), a realidade é constituída por vários tipos de factos. Distinguem-se factos que antecedem a própria existência humana - ditos naturais -, como os astros, as árvores, os seres, e afins, e factos que resultam da intervenção do Homem, podendo tratar-se de 'artefactos' - concretos, reificados -, ou 'mentefactos' - abstratos, não-reificados (D'Ambrosio, 1999). 'Mentefactos' é o neologismo introduzido por D'Ambrosio "para significar todos os produtos da ação intelectual que não se materializam, tais como ideias, conceitos, teorias, reflexões e pensamentos." (D'Ambrosio, 1985, p. 46). Ora, a relação entre 'artefactos' e 'mentefactos' é o que normalmente costuma designar-se por 'símbolo'[3] (D'Ambrosio, 1999). Face ao disposto, é possível constatar que, na teoria elaborada de D'Ambrosio, 'artefactos' configura um termo mais abrangente, quando comparado com interpretação mais habitual do termo, geralmente associado, só, a instrumentos e objetos culturais. Nesse novo sentido do termo, cabem, para além dos distintos artefactos culturais constituídos objetos de investigação nos vários estudos etnomatemáticos anteriormente explorados, e de outros artefactos que facilmente se perceberiam análogos, todos os produtos da criatividade humana convertidos em códigos passíveis de serem comunicados e compartilhados (D'Ambrosio, 2012b). Conforme esclarece D'Ambrosio (2012b), no ato humano de criar, o primeiro estágio, que é o da criação pura, produz 'mentefactos', só acessíveis a quem os produziu; ora, esses produtos da criatividade podem esvair-se no criador caso não sejam partilhados. Por isso, os 'mentefactos' - produto individual - devem originar 'artefactos' - sons, uma pintura ou escultura, um texto, etc. -, que podem ser captados por outras pessoas (D'Ambrosio, 2012b).

---

[3] O 'símbolo' designa um tipo de *signo* em que o *significante* - entidade concreta, percetível - representa um determinado conceito ou ideia - o *significado*. Grosso modo, o *significante* e o *significado* - correspondem, na teorização apresentada por D'Ambrosio, aos 'artefactos' e aos 'mentefactos', respetivamente.

2.3.2. Estudos etnomatemáticos sobre práticas ligadas ao movimento corporal

No âmbito da sua revolucionária 'teoria das inteligências múltiplas', Gardner (1995) define a 'inteligência corporal-cinestésica' - uma das sete inteligências descritas pelo autor - como "a capacidade de resolver problemas ou de elaborar produtos utilizando o corpo inteiro, ou partes do corpo." (p. 15). Embora essa consideração do 'conhecimento corporal-cinestésico' como 'solucionador de problemas' possa, até, ser pouco intuitiva, a verdade é que a capacidade de utilizar o próprio corpo para expressar emoções, como numa dança, ou para jogar jogos, como num desporto, ou até mesmo para criar um novo produto, como no planeamento de uma invenção, constituem evidência dos aspetos cognitivos do uso do movimento corporal, e não há dúvida da sua universalidade entre as culturas (Gardner, 1995). Ora, essas ideias do psicólogo Howard Gardner delineiam um quadro fundamental para a introdução dos estudos etnomatemáticos sobre práticas ligadas ao movimento corporal. Tais estudos têm por base experiências do foro corporal-cinestésico, nas quais, geralmente, a presença da matemática não é óbvia.

Para iniciar, uma nova incursão aos estudos de Paulus Gerdes, que, também, no domínio de investigação sobre práticas ligadas ao movimento corporal lega os seus contributos. Em particular, no livro *Geometria sona de Angola: Matemática de uma tradição africana* - correspondente ao primeiro volume de uma trilogia -, Gerdes (2012b) dedica-se à análise e à reconstrução de elementos matemáticos da tradição *sona*. Essa tradição de desenhos na areia - designados *sona*; no singular, *lusona* (figura 9) - pertence à herança cultural dos *Cokwe* e de povos relacionados que habitam o Nordeste de Angola (Gerdes, 2012b). Tais desenhos "referem-se a provérbios, fábulas, jogos, adivinhas, animais, etc. e desempenham um papel importante na transmissão do conhecimento e da sabedoria de uma geração para a seguinte" (Gerdes, 2012b, p. 23). Cada menino aprende o significado e a execução dos *sona* mais simples durante a fase intensiva 'escolar' dos ritos de iniciação; quanto aos *sona* mais complexos, esses são transmitidos por especialistas - os *akwa kuta sona* - a aprendizes interessados nos *sona* (Gerdes, 2012b). Para facilitar a memorização dos seus padronizados *sona,* os *akwa kuta sona* usam uma interessante técnica mnemónica: depois de limparem e alisarem o chão, marcam uma rede de pontos equidistantes, para, em seguida, desenharem uma figura, constituída por uma ou mais linhas que circundam todos os pontos da rede (Gerdes, 2012b). Ora, "tanto o número de filas e colunas da rede de pontos como as regras de construção do desenho dependem do motivo a ser representado." (Gerdes, 2012b, p. 34). Aplicando o seu método, os *akwa kuta sona* reduzem a memorização de um padrão integral à memorização de dois números - o número de filas e o número de colunas da rede de pontos -, e de um 'algoritmo geométrico' para a execução propriamente dita do desenho (Gerdes, 2012b).

Dependendo do *sona* a ser executado, por vezes é necessário marcar pontos adicionais na rede de pontos de referência (Gerdes, 2013b), tal como ocorre no *lusona* da figura 9 - a rede de pontos sobre a qual foi feito o desenho é de três filas por três colunas, e conta, ainda, com pontos adicionais (figura 10).

Figura 9. *Lusona* referente a um cágado (Gerdes, 2013b, p. 14).

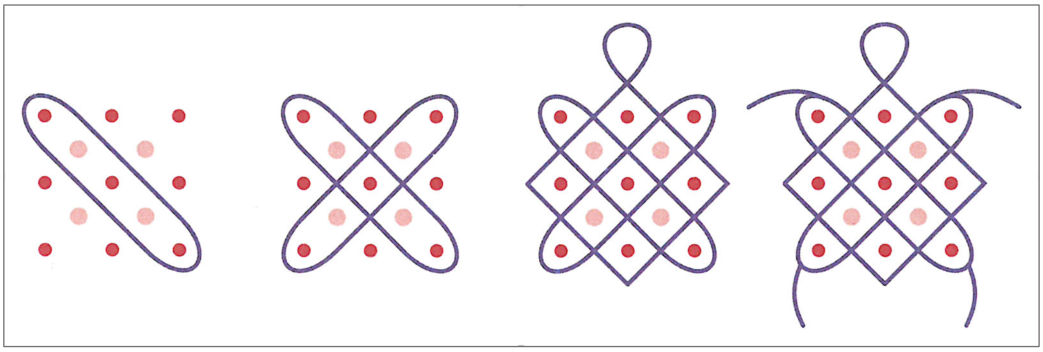


Figura 10. Execução do *lusona* referente a um cágado, com a rede de pontos especificada (Gerdes, 2013b, p. 14).

Na sua maioria, os *sona* são simétricos - têm simetria de reflexão axial, de um ou mais eixos, e/ou simetria rotacional - e são 'monolineares' - quer dizer, são compostos por uma só linha contínua que circunda todos os pontos da rede; de notar que uma parte da linha pode cruzar-se com outras partes, mas, à exceção dos casos de interseção, duas partes da linha nunca se podem tocar (Gerdes, 2012b). A elevada frequência tanto de *sona* simétricos, como de *sona* 'monolineares', expressa a importância da simetria e da 'monolinearidade' como valores culturais salientes no seio dos *Cokwe*; ademais, os dados revelam que, na sua generalidade, os *akwa kuta sona*, 'inventores dos desenhos', preferem padrões concomitantemente 'monolineares' e simétricos, conciliando os dois valores culturais (Gerdes, 2012b). Relativamente ao *lusona* apresentado nas figuras 9 e 10, embora este seja simétrico, não é 'monolinear'; desconsiderando as patas do animal, o desenho é composto por três linhas fechadas (Gerdes, 2013b). Em contraste, na figura 11, pode ver-se um exemplo de um *lusona* formado por uma única linha fechada.

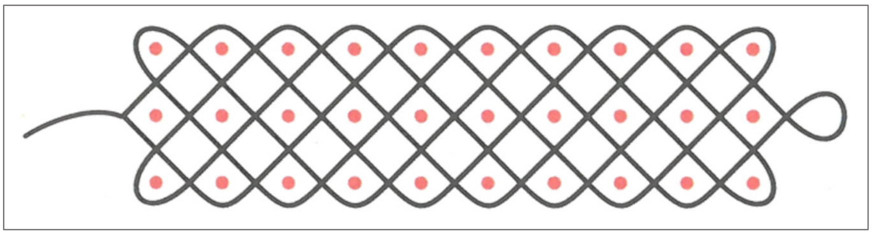


Figura 11. Desenho do *lusona* referente a uma leoa (Gerdes, 2013b, p. 19).

Os *sona* podem ser classificados em várias classes, de acordo com o 'algoritmo geométrico' utilizado para a sua construção (Gerdes, 1990). Por exemplo, o *lusona* ilustrado nas figuras 9 e 10 e o *lusona* da figura 11 pertencem à mesma classe. Apesar da diferença nas dimensões das redes de pontos e no número de linhas fechadas, esses dois desenhos são executados da mesma forma (Gerdes, 2013b). Portanto, variando as dimensões da rede de pontos de referência - mas não de forma arbitrária, porque nem todas as dimensões satisfazem - e aplicando o mesmo 'algoritmo geométrico', o *akwa kuta sona* conseguem obter variadíssimas extensões de um *lusona*, e, assim, gerar diferentes *sona* (Gerdes, 1990).

A classe mais ampla de *sona* é a dos 'padrões-de-esteira-entrecruzada', que se caracteriza pelo facto de as linhas que compõem o desenho corresponderem às tiras de uma esteira entrecruzada, fazendo ângulos de amplitude 45° com a borda (Gerdes, 2012b). Ora, os *sona* ilustrados anteriormente (figuras 9, 10 e 11) são ambos construídos a partir de 'padrões-de-esteira-entrecruzada' (Gerdes, 2012b). Ao longo do seu livro, Gerdes (2012b) analisa as particularidades matemáticas da classe de *sona* supracitada - e respetivas subclasses -, e também de outras classes de *sona*, e, paralelamente, analisa os 'algoritmos geométricos' correspondentes de construção, apresentando vários exemplos ilustrativos. Ainda no mesmo livro, Gerdes (2012b) explora a construção sistemática de *sona* 'monolineares' associada a regras de encadeamento - de padrões 'monolineares', originando novos e maiores padrões 'monolineares' - e, também, a regras de eliminação. Supõe-se que os mestres *akwa kuta sona*, que inventaram e aplicaram tais regras, entendiam o porquê de as mesmas serem válidas (Gerdes, 2012b).

A reconstrução de ideias matemáticas incorporadas na tradição *sona* levou Paulus Gerdes a desenvolver pesquisas matemáticas mais aprofundadas, inspiradas nessa tradição. Nesse âmbito, Gerdes (2007b) analisa uma classe particular de *sona* - cujos elementos são 'curvas-de-espelho' -, e descreve algumas das suas. As 'curvas-de-espelho' correspondem à linha poligonal (em versão arredondada) descrita por um raio de luz emitido a partir de um determinado ponto, sendo esse raio refletido nos lados do retângulo circunscrito à rede de pontos de referência - de modo a formar, antes e depois da reflexão, ângulos de amplitude 45° com o lado do retângulo em causa -, e encontrando, ao longo do seu percurso, um ou mais espelhos de dupla face, dispostos horizontal ou verticalmente

(Gerdes, 2007b). Na figura 12, pode observar-se um exemplo de um *lusona* 'monolinear' pertencente à classe de *sona* supracitada, e, na figura 13, encontra-se assinalada, na rede de pontos de referência, a posição dos espelhos de dupla face de modo a gerarem a 'curva-de-espelho' que caracteriza esse *lusona*.

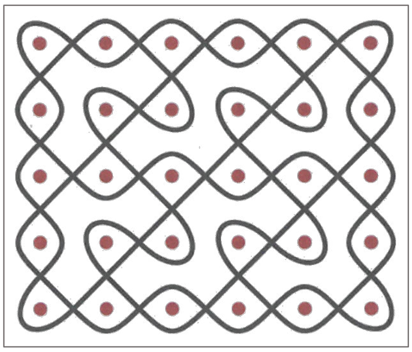


Figura 12. Desenho do *lusona* referente a uma galinha em fuga (Gerdes, 2013b, p. 39).

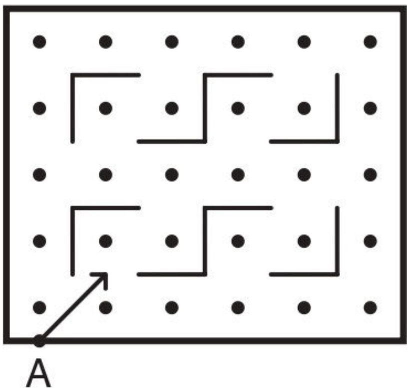


Figura 13. Posição dos espelhos para o *lusona* referente a uma galinha em fuga (Gerdes, 2007b, p. 22).

Desenhando um *lusona* 'monolinear' - como o ilustrado na figura 12 - em papel quadriculado (figura 14), com uma distância de duas unidades quadradas entre dois pontos consecutivos da rede, Gerdes (2007b) evidencia que o *lusona* passa uma única vez em cada quadrado unitário, e que isso torna possível numerar os quadrados unitários pelos quais o *lusona* passa progressivamente (figura 15).

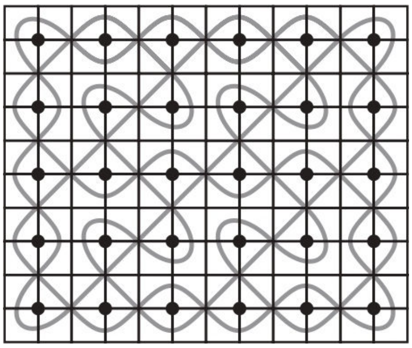


Figura 14. Desenho, em quadriculado, do *lusona* referente a uma galinha em fuga (Gerdes, 2007b, p. 13).

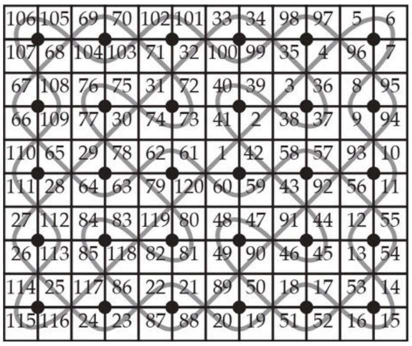


Figura 15. Quadrados numerados no desenho do *lusona* referente a uma galinha em fuga (Gerdes, 2007b, p. 14).

Em continuidade, Gerdes (2007b) evidencia que se pode enumerar módulo 4, e até mesmo módulo 2 - isto é, com recurso a apenas dois elementos (0 e 1) -, os quadrados unitários pelos quais o *lusona* vai sucessivamente passando, ou, em alternativa, pode-se pintar, de forma alternada, cada um desses quadrados unitários, com duas cores - preto e branco. Ora, ao tipo de 'padrões a preto e branco' que se obtêm da maneira previamente descrita, Gerdes (2007b) atribuiu a designação de *lunda-designs*. Na figura 16, apresenta-se o *lunda-design* correspondente ao *lusona* que tem vindo a servir de exemplo.

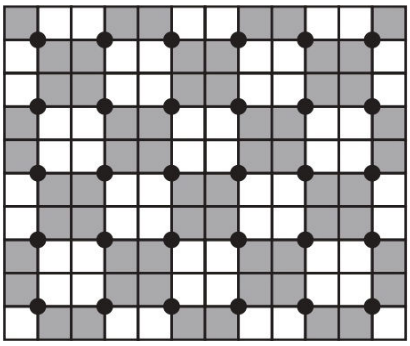


Figura 16. *Lunda-design* subjacente ao *lusona* referente a uma galinha em fuga (Gerdes, 2014, p. 82).

Outras 'curvas-de-espelho' - igualmente 'monolineares', mas não regulares - permitem gerar 'padrões a preto e branco' diferentes - quer dizer, outros *lunda-designs* (Gerdes, 2007b). No seu livro, Gerdes (2007b) apresenta variados exemplos de *lunda-designs*. Ainda no mesmo livro, o autor explora as simetrias dos *lunda-designs*, os quais gozam de propriedades de simetria muito interessantes, a saber: em cada linha, e em cada coluna, o número de quadrados unitários pretos é sempre igual ao número de quadrados unitários brancos; dos dois quadrados unitários que estão no limite de cada ponto da rede na primeira ou última linha, ou na primeira ou última coluna, um é sempre preto e o outro é branco; e, dos quatro quadrados unitários que se encontram entre quaisquer dois pontos consecutivos da rede, dois são sempre pretos e os outros dois são brancos. Para além disso, Gerdes (2007b) explora algumas generalizações dos *lunda-designs*, como por exemplo os *lunda-k-designs* e os *lunda-designs* hexagonais.

Gerdes (2007b) mostra que o conceito *lunda-design* pode ser generalizado de diversas formas, e que, nesse sentido, os *lunda-designs* permitem o estabelecimento de conexões com outras áreas de pesquisa. Ora, as novas áreas de investigação de 'curvas-de-espelho' e de *lunda-designs*, provenientes da pesquisa etnomatemática sobre a tradição *sona*, tornaram-se férteis enquanto áreas de investigação matemática, cativando um número cada vez maior de investigadores de diversas regiões do mundo (Gerdes, 2007a).

A par da investigação etnomatemática sobre a tradição *sona*, e das investigações matemáticas subsequentes, Paulus Gerdes explora o potencial didático dos *sona*. Nesse contexto, Gerdes (1988b) sugere possíveis utilizações desses desenhos tradicionais dos *Cokwe* nas aulas de matemática, que, conforme salienta o autor, não precisa, nem deve, restringir-se às salas de aula de matemática de Angola. No livro *Lusona: Recreações geométricas de África - problemas e soluções*, Gerdes (2012c) apresenta problemas geométricos inspirados na tradição *sona*. Nesses problemas, são expostas séries de figuras - correspondentes a *sona* tradicionais ou a novas figuras criadas pelo autor, inspirado na tradição *sona* -, que têm diferentes tamanhos, mas que são construídas segundo uma mesma regra de construção, e a tarefa consiste em descobrir outras figuras do mesmo tipo que faltam na série dada (Gerdes, 2012c). Outras possibilidades para a incorporação dos *sona* na educação matemática são apresentadas no livro *Geometria sona de Angola: Explorações educacionais e matemáticas de desenhos africanos na areia* - correspondente ao segundo volume de uma trilogia já indicada antes -, no qual Gerdes (2014) reintegra os exemplos expostos no artigo de Gerdes (1988b) e no livro de Gerdes (2012c) - ambos referidos imediatamente acima -, e apresenta outros exemplos conducentes à exploração educacional dos *sona*. Num livro especialmente direcionado para crianças, intitulado *Viver a Matemática: Desenhos de Angola*, Gerdes (2013b), após uma pequena introdução à cultura *Cokwe* e aos *sona,* apresenta uma série de atividades que exemplificam como os *sona* podem ser explorados num contexto matemático-educacional.

Para dar continuidade à exploração dos estudos etnomatemáticos sobre práticas ligadas ao movimento corporal, convocam-se investigações cujo objeto de estudo é a dança. Ora, "à primeira vista, pode parecer que a matemática, esse domínio de racionalidade, e a dança, essa arte de expressão física e emocional, têm pouco em comum (...), no entanto, os dois assuntos estão intrinsecamente ligados." (Schaffer, Stern & Kim, 2016, p. 5). As evidências de uma ligação entre a matemática e várias formas de arte - entre as quais, a dança -, admita-se, não são óbvias, e facto é que a matemática e a dança seguiram caminhos separados até recentemente, com pouco reconhecimento das suas inter-relações (Thie, 2018). Ao longo dos anos, a sociedade tem considerado a matemática e a dança como sendo, praticamente, polos opostos (Wasilewska, 2012). Na sua forma mais complexa e abstrata, a matemática parece estar muito longe da dança ou de qualquer outra coisa física e concreta (Schaffer et al., 2016).

Aparentemente, a dança e a matemática nada têm em comum, mas só até investigações evidenciarem as muitas conexões e semelhanças existentes (Wasilewska, 2012). Existem ligações mais superficiais, como por exemplo contar passos ou identificar formas, mas também conexões de âmbito mais profundo, tais como: conceitos matemáticos que surgem naturalmente na dança, matemática que inspira a dança, ou a utilização da matemática para a resolução de problemas coreográficos (Belcasto & Schaffer, 2011). Várias ideias matemáticas permeiam a dança; são, até, intrínsecas à dança (Belcasto & Schaffer, 2011).

Na visão de Watson (2005), existem pelo menos quatro aspetos da matemática que podem ser relacionados com a dança, designadamente: a exploração espacial, o ritmo, a estrutura e a simbolização. Para Wasilewska (2012), a matemática está presente na dança e a geometria é, provavelmente, o subdomínio da matemática cuja presença na dança é mais evidente. Podem-se considerar "as formas, os padrões, os ângulos, e a simetria de muitos aspetos diferentes da dança" (Wasilewska, 2012, p. 453). No seu trabalho, Wasilewska (2012) apresenta alguns exemplos de interação entre matemática e dança, focando-se, sobretudo, nas propriedades geométricas que, em diferentes níveis, se podem procurar e reconhecer na dança. A autora conclui que "a geometria na dança é inevitável." (p. 455). Não obstante, Wasilewska (2012) reconhece que a geometria não é o único conceito matemático infiltrado na dança; devido ao simples facto de que os dançarinos mudarem de posição no espaço ao longo do tempo, o conjunto pode ser visto como um 'sistema dinâmico multidimensional', e, considerando-se a posição de cada dançarino como os elementos, pode-se explorar o comportamento desse sistema no tempo. Belcasto e Schaffer (2011) evidenciam a simetria como uma ideia matemática saliente na dança. Segundo esses autores, a simetria, e os padrões de movimento, podem assumir formas locais e globais: a um nível local, os movimentos de um só corpo podem, individualmente, ser simétricos, e um dançarino pode realizar um padrão de movimento que se repete; na escala global, há simetrias entre grupos de dançarinos em movimento quando, por exemplo, os movimentos de um grupo são simétricos aos movimentos de um outro grupo, ou quando os dançarinos são dispostos simetricamente no palco. Ora, há muitas mais possibilidades de padrões na escala global do que numa escala local (uma pessoa) (Belcasto & Schaffer, 2011). De acordo com os autores em referência, certas formas de dança usam, regularmente, simetrias específicas; por exemplo, no 'dueto de flamenco', dois dançarinos rodeiam-se um ao outro proximamente com simetria rotacional de $180°$, criando uma dinâmica de oposição íntima. Para além da simetria, Belcasto e Schaffer (2011) reconhecem outras ideias matemáticas como estando envolvidas na dança. Pode-se, por exemplo, prestar atenção à geometria do corpo de um dançarino em movimento, à topologia das ligações entre os dançarinos durante certos movimentos, aos percursos executados pelos dançarinos, à interação dos dançarinos com adereços, etc. (Belcasto & Schaffer, 2011).

De acordo com Thie (2018), embora conceitos geométricos intrínsecos à dança (em geral) já tenham sido explorados e divulgados - como por exemplo nos trabalhos anteriormente enunciados -, existem conceitos algébricos e aritméticos que permanecem relativamente inexplorados nesse âmbito. Ora, tais conceitos constituem, precisamente, o objeto de estudo do livro publicado por Thie (2018). Nesse livro, o autor começa por focalizar-se nas características dos ritmos e no modo como tais características podem ser analisadas quantitativamente, para posteriormente aplicar um tipo de análise semelhante à dança, considerando as suas propriedades, nomeadamente as que são relativas à categoria espaço-tempo. O tempo e os indicadores numéricos de posições dos dançarinos são algumas das propriedades propostas por Thie (2018) para se efetuar a análise matemática de danças e, assim, poder ser feita a sua notação em termos quantitativos. Conforme refere Thie (2018), a complexidade de analisar danças - ou partes de danças - torna-se evidente quando comparada com a análise de ritmos. No caso das danças, o grau de dificuldade encontrado para alcançar resultados satisfatórios é notório (Thie, 2018). No seu livro, Thie (2018) apresenta alguns métodos - de natureza quantitativa - de análise de danças, os quais se cingem à sequência e interligação de movimentos realizados, não se verificando uma relação desses movimentos com outras propriedades da dança, tais como a música, os trajes, etc. A exploração de aspetos algébricos e aritméticos das danças torna-se visível, também, no trabalho de Schaffer, Thie e Williams (2018). Tais autores fundamentam-se numa sugestão apresentada por Wasilewska (2012) a respeito da análise de danças considerando o 'centro de atenção de massa' (CAM), o qual pode ser quantitativamente calculado, captando e quantificando informações sobre o foco do coreógrafo e do público durante a performance de dança. Partindo dessa ideia, Schaffer et al. (2018) exploram métodos de cálculo e de exibição do 'centro de atenção' (CA) ao nível das danças, demonstrando uma variedade de medições que se podem obter a partir de um foco quantitativo no CA, e referem, ainda, algumas possibilidades de aplicação desse tipo de análise de danças na sala de aula. A propósito desse foco didático, Schaffer et al. (2016) apresentam, no seu livro, um conjunto diversificado de atividades - combinando matemática e dança -, que podem ser utilizadas em contexto de sala de aula (mas não só). Em cada capítulo desse livro, propõem-se séries de atividades, começando pelas mais simples até às mais complexas, as quais são referentes a tópicos matemáticos específicos, incluindo: aritmética, procedimentos de álgebra, simetria, geometria de polígonos e de poliedros, probabilidades, combinatória, entre outros tópicos (Schaffer et al., 2016). As atividades propostas combinam uma primeira parte ligada ao movimento corporal - domínio da dança -, e uma segunda parte mais reflexiva e analítica - domínio da exploração matemática -, que pretende que os alunos reflitam sobre a experiência tida, discutindo questões e conceitos, de acordo com as orientações dadas no livro (Schaffer et al., 2016).

Contrastando com o painel de investigações sobre a matemática na dança até aqui descritas, outras investigações focam-se no estudo, não da dança na sua generalidade, mas de determinadas danças em particular, sob o ponto de vista da etnomatemática. Curiosamente, o próprio autor reconhecido pela introdução do termo *etnomatemática* - Ubiratan D'Ambrosio - manifesta que a dança (e o canto) estão intimamente relacionados com representações matemáticas de espaço e tempo (D'Ambrosio, 2001a). Enquadrando-se nas investigações etnomatemáticas sobre danças, Cruz (2010) analisa vestígios matemáticos presentes na prática da 'Dança Esportiva em Cadeira de Rodas' (DECR), a qual se caracteriza por ser uma dança que junta uma pessoa com problemas motores e outra pessoa sem problemas motores. Mais precisamente, a autora explora os movimentos isométricos realizados pelos atletas na 'dança do ChaChaCha', apresentando fotografias ilustrativas dos pares de dançarinos durante a execução de movimentos isométricos de translação, reflexão, rotação e reflexão deslizante. Dessa forma, Cruz (2010) evidencia a presença de aspetos matemáticos relativos às isometrias do plano, que caracterizam algumas das figuras construídas ao dançar o 'ChaChaCha' na modalidade de DECR. Uma outra investigação é a de Latorre (2008), que explora aspetos geométricos de várias danças que fazem parte dos Bailes Religiosos do norte do Chile, procurando identificar conexões, no âmbito da geometria plana, entre as coreografias dessas danças e as transformações geométricas - em particular, as isometrias. Através de esquemas representativos e descritivos da sequência de movimentos realizados pelos dançarinos em diversas danças religiosas do folclore do norte chileno, a autora identifica diferentes transformações isométricas associadas aos movimentos executados pelos dançarinos em cada uma dessas danças, e utiliza essas isometrias para descrever tais movimentos. Latorre (2008) conclui, assim, a existência de uma relação entre as danças religiosas do norte do Chile investigadas e a matemática, estabelecida com base nas isometrias que caracterizam os movimentos dos dançarinos nessas danças. A investigação realizada por Sardella (2004) evidencia a presença de geometria em danças folclóricas argentinas, as quais se caracterizam pela movimentação dos dançarinos em pares soltos - compostos por um homem e uma mulher -, sendo as evoluções dos seus movimentos geralmente independentes. *El gato*, *La Chacarera* e *La Zamba* designam as três danças de pares soltos integradas na investigação de Sardella (2004). Ora, uma análise dos esquemas elaborados por Sardella (2004) para representar os movimentos realizados pelos pares de dançarinos em cada uma dessas danças folclóricas argentinas, complementados pela descrição dos movimentos representados, possibilita identificar as diferentes formas geométricas que regem tais movimentos, as quais são devidamente evidenciadas pelo autor. Dessa maneira, Sardella (2004) expõe 'geometria oculta' nos movimentos executados pelos dançarinos em certas danças folclóricas argentinas, tornando evidentes relações dessas danças com a matemática.

Albanese e Perales (2014) analisam o modo como futuros professores, no último ano de formação, compreendem conceitos matemáticos quando estudam um determinado signo cultural, como são as danças folclóricas. Para o efeito, os referidos autores apresentam exemplos concretos do trabalho por 'Microprojetos Etnomatemáticos' desenvolvido num curso de formação de professores na região do Chaco, na Argentina, descrevendo as relações que esses futuros professores reconheceram entre a matemática escolar e o contexto da dança - em particular, das danças folclóricas típicas da sua região. Albanese e Perales (2014) constatam que os conceitos matemáticos que mais chamaram a atenção dos futuros professores foram os relacionados com a geometria plana e, mais precisamente, com algumas formas geométricas. Ora, esse resultado vai ao encontro da investigação de Sardella (2004), já descrita. Não obstante, as conexões matemáticas encontradas por Sardella (2004) são ampliadas no estudo de Albanese e Perales (2014), tendo havido evidência de outras ideias matemáticas observadas pelos futuros professores, nomeadamente relacionadas com sistemas de referência, de medição, e ângulos. No trabalho de Albanese (2015), são apresentados os resultados de um 'Microprojeto Etnomatemático' em particular, que foi desenvolvido por um grupo de professores do curso de formação supramencionado e que se reporta à 'dança do Malambo'. Esse grupo de futuros professores revelou-se bem-sucedido, quer a identificar conceitos matemáticos que são significativos para os bailarinos da referida dança - nomeadamente, o conceito de circunferência -, como a relacionar o uso desses conceitos no contexto da dança com a sua definição ao nível do currículo escolar (Albanese (2015). Ademais, os autores desse 'Microprojeto Etnomatemático' conceberam, com sucesso, uma atividade para a sala de aula relacionada com o respetivo contexto cultural e capaz de promover uma aprendizagem construtiva (Albanese, 2015). Ora, o aproveitamento, em termos pedagógicos, das relações extraídas entre a matemática e a dança é um aspeto proeminente no estudo desenvolvido por Mbusi (2011). Nesse trabalho, Mbusi (2011) parte da exploração de ideias e conceitos matemáticos incorporados nas 'danças tradicionais Xhosa' - cultura africana - para o desenho, implementação e avaliação de um programa de aprendizagem de matemática destinado ao 7.º ano de escolaridade, que se baseia nessas danças e respetivos elementos matemáticos. Por fim, o trabalho de investigação recentemente realizado por Martínez (2019) centra-se na exploração de conexões entre danças tradicionais e criativas e a matemática, tendo em vista finalidades educativas. Nesse trabalho investigativo - correspondente à tese de doutoramento da autora -, Martínez (2019), inspirada por diferentes aspetos de danças tradicionais - portuguesas e internacionais - e criativas, desenvolve um conjunto de tarefas para abordar conteúdos matemáticos no 3.º ano de escolaridade. Essas tarefas incluíam a aprendizagem ativa das danças e convocavam a matemática nelas presente, visando o seu descobrimento e aprendizagem de forma significativa e contextualizada (Martínez, 2019).

2.4. Síntese

Embora já fosse utilizado antes, o termo *etnomatemática*, definido como a arte ou técnica - *tica* - de explicar, de conhecer, de entender - *matema* - num dado contexto cultural - *etno* -, foi introduzido por Ubiratan D'Ambrosio, em 1975, e desde aí, o campo da *etnomatemática* tem-se ampliado e adensado. Ideias consideradas precursoras da *etnomatemática* reconhecem a matemática como fenómeno cultural. De um *corpus* de conhecimento independente da cultura, a matemática passa, na segunda metade do século XX, a ser vista como um tipo de conhecimento que todas as culturas geram, não necessariamente de forma igual. O reconhecimento da matemática como produto cultural é corroborado por Alan Bishop, que determina a existência de seis atividades universais - *contar*, *localizar*, *medir*, *projetar*, *jogar*, e *explicar* -, através das quais a matemática se tem desenvolvido, e existe, no seio de todas as culturas. Pela conexão indissociável que a matemática assume face à cultura em que é gerada, a *etnomatemática* surge definida como a matemática praticada por determinados grupos culturais. Associado ao disposto, vem o reconhecimento da existência de diversas *etnomatemáticas*, enquanto expressão das matemáticas praticadas por grupos culturais distintos, isto é, como expressão da diversidade cultural da matemática. Nesse quadro, a Matemática, na forma que a conhecemos e que pensamos universal, é não mais do que uma matemática gerada num determinado *etno* e que, por razões várias, se disseminou pelo mundo. Ora, a *etnomatemática*, ao colocar a Matemática que conhecemos como uma de muitas formas possíveis de saber, põe em causa a universalidade e o valor absoluto que, normalmente, lhe são reconhecidos. Numa aceção diferente da matemática de uma determinada (sub)cultura, a *etnomatemática* aparece definida como domínio de investigação, fundamentalmente centrada em demonstrar que existem várias formas culturais de matemática - distintas da Matemática padronizada - e em estudar essas formas. Ora, no horizonte da investigação etnomatemática, encontram-se, entre outros, estudos etnomatemáticos sobre vários artefactos culturais oriundos das mais diversas culturas e regiões do mundo, nos quais moram elementos matemáticos de índole e complexidade variadas. Na conceção de Ubiratan D'Ambrosio sobre o termo 'artefactos', poder-se-iam incluir, não só objetos culturais, como todos os produtos da criatividade humana convertidos em códigos passíveis de serem partilhados - por exemplo, uma música. A investigação etnomatemática encontra expressão, também, em estudos etnomatemáticos sobre práticas ligadas ao movimento corporal, como as danças. Ora, ainda que à partida as conexões existentes entre a matemática e a dança sejam pouco evidentes, um número significativo de estudos é revelador de vários conceitos e ideias matemáticas intrínsecas à dança em geral, e a certas danças em particular. Da investigação etnomatemática brotam possibilidades valiosas para o seu aproveitamento pedagógico.

CAPÍTULO III. TAREFAS MATEMÁTICAS E ATIVIDADE NA SALA DE AULA

3.1. Relações entre tarefa, atividade e aprendizagem dos alunos

Embora os conceitos *tarefa* e *atividade* sejam, frequentemente, tratados como sinónimos, julgamos que uma certa diferenciação se afigura necessária na abordagem da problemática em questão.

De acordo com Christiansen e Walther (1986) a *atividade* surge como resultado do envolvimento dos alunos em *tarefas*, tratando-se de duas categorias didáticas básicas distintas. As *tarefas* propostas "tornam-se o objeto para a *atividade* do aluno, e a aprendizagem e o desenvolvimento irão ter lugar." (Christiansen & Walther, 1986, p. 260). Mason e Johnston-Wilder (2006), seguindo o postulado dos autores previamente referidos, defendem que "o objetivo de uma *tarefa* é iniciar a *atividade* dos alunos. Nessa *atividade*, os alunos constroem e agem sobre objetos, quer físicos, mentais ou simbólicos, relativos a um tópico matemático." (p. 5). Assumindo um ponto de vista semelhante, Sullivan, Knott e Yang (2015) escrevem: "as *tarefas* impelem *atividade*, que oferece aos alunos oportunidades para encontrarem conceitos, ideias e estratégias matemáticas." (p. 83). Nesse sentido, as *tarefas* podem ser entendidas como "pretextos de interação e colaboração entre alunos e professor, funcionando, por isso, como 'motores' que promovem a aprendizagem e o desenvolvimento do conhecimento matemático." (Bispo, Ramalho & Henriques, 2008, p. 4). Sob o ponto de vista prático, as *tarefas* são o alicerce do trabalho na sala de aula, as 'coisas a fazer'; numa visão cultural, as *tarefas* moldam a experiência matemática dos alunos e a sua compreensão da natureza da atividade matemática; e, de uma perspetiva cognitiva, as *tarefas* têm um efeito significativo na *atividade* que iniciam, e na aprendizagem (Watson & Ohtani, 2015).

"As *tarefas* matemáticas são centrais para a aprendizagem dos alunos" (Henningsen & Stein, 1997, p. 525). Para Doyle (1988), o trabalho que os alunos desenvolvem na aula de matemática é, em grande medida, definido pelas *tarefas* que os professores propõem. A partir de *tarefas*, os alunos podem envolver-se em *atividades* matematicamente ricas e produtivas, refere Ponte (2005). Segundo este autor, as *tarefas* podem surgir de diversos modos: podem ser formuladas pelo professor e propostas aos alunos, podem ser da iniciativa dos próprios alunos, ou até resultar de uma negociação professor-aluno. Para além disso, as *tarefas* podem ser enunciadas, explicitamente, logo no início do trabalho em sala de aula, ou irem sendo constituídas de modo implícito à medida que o trabalho vai evoluindo (Ponte, 2005). As *tarefas* podem, ainda, ser de vários tipos: mais desafiadoras ou mais acessíveis; mais abertas ou mais fechadas; relativas a contextos reais ou formuladas em termos puramente matemáticos (Ponte, 2005).

Portanto, existem diferentes tipos de *tarefas* matemáticas, que despoletam diferentes tipos de *atividade* (Horoks & Robert, 2007). "As *tarefas* utilizadas nas aulas de matemática têm uma forte influência no tipo de processos de pensamento nos quais os alunos se envolvem, que, por sua vez, influenciam os resultados de aprendizagem dos alunos" (Stein, Grover & Henningsen, 1996, p. 462). As *tarefas* matemáticas estão, por isso, 'no coração' do ensino e da aprendizagem da matemática (Hart, 2014). São um elemento fundamental pois determinam, em grande medida, as oportunidades de aprendizagem proporcionadas aos alunos (Ponte, 2005). No entanto, não basta selecionar boas *tarefas* (Ponte, 2005).

As *tarefas*, em si mesmas, não 'contêm' conceitos ou estruturas matemáticas, não 'incluem' ou 'transmitem', de forma canónica ou *a priori*, a *atividade* pretendida, em termos de ações e de aprendizagem (Christiansen & Walther, 1986). Dito de outra forma, "as *tarefas* não têm ação. As *tarefas* não provocam comportamento mais do que um martelo provoca marteladas. Elas [as *tarefas*] não estimulam o pensamento mais do que um parágrafo de texto o faz." (Thompson, Carlson & Silverman, 2007, p. 416). Dessa forma, é impossível determinar aquilo que um aluno irá aprender como consequência de se envolver numa dada *tarefa* (Prestage & Perks, 2007). "A análise da matemática da *tarefa* poderá, apenas, fornecer uma descrição do potencial para aprendizagem. (...) É somente a interação entre o aluno, o professor e a matemática que poderá ajudar a maximizar o potencial de qualquer *tarefa* matemática." (Prestage & Perks, 2007, p. 385). A este propósito, Doyle (1986) concebe que "o conceito de *tarefa* tem duas componentes: (a) um estado de objetivo ou produto final a ser alcançado; e (b) um espaço problemático, isto é, um conjunto de instruções, condições e recursos disponíveis para alcançar o estado de objetivo." (p. 394). Desse ponto de vista, as ações do professor são percecionadas como tentativas de reunir e utilizar recursos para cumprir a tarefa de alcançar fins educativos, num dado meio social (Doyle, 1986). Portanto, apesar de a atenção concedida à natureza das *tarefas* ser importante, a atenção aos processos da sala de aula em torno das *tarefas* matemáticas é igualmente necessária (Henningsen & Stein, 1997). Nesse âmbito, Mason e Johnston-Wilder (2006) chamam a atenção para duas noções fundamentais: "as *tarefas* tornam-se veículos de aprendizagem por causa da qualidade e natureza das interações e das *atividades* decorrentes das mesmas" (p. 6); e "a aprendizagem tem lugar num dado meio, isto é, num ambiente de forças sociais e práticas em sala de aula" (p. 6), que Brousseau (1997) designou por *milieu*. "Numa situação de *atividade*, tudo o que atua sobre o aluno ou sobre o qual ele atua" faz parte do *milieu* (Brousseau, 1997, p. 9). O *milieu* inclui: "o *ethos* da sala de aula e as formas de trabalhar características; o grau em que alunos e professores são responsáveis por garantir a aprendizagem; as organizações da sala de aula (estrutura social, recursos, e assim por diante)." (Mason & Johnston-Wilder, 2006, p. 35). Para Watson & Mason (2007), “a noção de *milieu* é particularmente útil, porque inclui as possibilidades e constrangimentos intelectuais da *tarefa*.” (p. 207). Com base no disposto, é possível compreender que, embora as *tarefas* sejam inseparáveis do uso e dos objetivos pretendidos para as mesmas, são também inseparáveis do contexto - o *milieu* - em que são usadas (Liljedahl, Chernoff & Zazkis, 2007). Leikin (2004) reforça a ideia anterior quando escreve: “as *tarefas* matemáticas que os professores selecionam, bem como os contextos nos quais os alunos são presentes às *tarefas*, determinam a qualidade do ensino da matemática.” (p. 209).

As *tarefas* são interpretadas pelos alunos sob a influência de vários fatores, e a *atividade* que delas resulta é condicionada pelas ações do professor, que, por sua vez, são também realizadas e interpretadas sob a influência de determinadas atitudes e conceções do professor e do aluno, respetivamente (Christiansen & Walther, 1986). Na ótica de Christiansen e Walther (1986), a complexidade da educação matemática revela-se quando o ensino é percecionado “como um processo de interação entre o professor e o aluno - e entre os alunos -, no qual o professor tenta proporcionar aos alunos acesso ao conhecimento e capacidades matemáticas, em conformidade com determinadas intenções.” (p. 247). De acordo com os autores citados, esse processo é influenciado por um conjunto de aspetos e fatores sociais que apenas podem ser parcialmente controlados. De facto, a interação professor-aluno não é condicionada, apenas, pelas decisões oficiais referentes aos objetivos, conteúdos, métodos, avaliação e estrutura escolar, mas está, também, fortemente dependente de aspetos mais subtis, como as conceções dos professores sobre a matemática, o ensino e a aprendizagem, e as conceções emergentes dos alunos nestes domínios (Christiansen & Walther, 1986). Tais fatores evidenciam a complexidade das relações implicadas na interação entre o professor e os alunos no contexto de uma dada *tarefa* (Christiansen & Walther, 1986).

“Uma vez que a mútua dependência existente entre *tarefa* e *atividade* é de natureza indireta, e devido ao caráter relativo de ambos os conceitos, a aprendizagem não pode ser garantida simplesmente por *tarefas*.” (Christiansen & Walther, 1986, p. 254). De facto, “trabalhar em *tarefas* pode falhar na produção da aprendizagem pretendida de variadas formas.” (Mason & Johnston-Wilder, 2006, p. 29). Mason e Johnston-Wilder (2006) explicam que a principal intenção dos alunos pode ser, simplesmente, executar a *tarefa* dada pelo professor, ao invés de se preocuparem em aprender alguma coisa. E mesmo quando os alunos concebem a sua *atividade* em termos de tentarem aprender algo, eles podem ter consideráveis dificuldades em perceber aquilo que o professor deseja que eles, efetivamente, aprendam (Mason & Johnston-Wilder, 2006). Para além disso, acrescentam os autores em referência, os alunos geralmente ficam absorvidos no ‘fazer’ a *tarefa*; eles estão a ser ativos, estão envolvidos na *atividade*, contudo, eles podem não estar a aprender o que é pretendido. Em virtude das discrepâncias que podem existir entre a maneira como os alunos e o professor veem a *tarefa*, Mason e Johnston-Wilder (2006) destacam como fundamental levar os alunos a refletirem sobre o que foi feito e aprendido. A conceção de Doyle (1988) acerca da problemática em discussão vai ao encontro das ideias dos autores prévios. Segundo Doyle (1988), "uma *tarefa* existe em diversos níveis ao mesmo tempo. Há a *tarefa* conforme anunciada pelo professor, a *tarefa* tal como ouvida e interpretada por cada aluno, e a *tarefa* como refletida nos produtos aceites pelo professor." (p. 170). De acordo com o autor, uma *tarefa* pode assumir propriedades bastante diferentes em cada um dos três níveis supramencionados. Por exemplo, um professor pode focalizar as estratégias de resolução de problemas durante a fase de ensino, mas concentrar-se na exatidão das respostas dos alunos ao avaliar o trabalho que realizaram (Doyle, 1988). Ao mesmo tempo, nem sempre se torna possível perceber se os alunos resolveram as *tarefas* da forma prevista (Doyle, 1988). Por vezes, os alunos contornam o que é pedido nas *tarefas*, copiando o trabalho pelos pares ou adivinhando as respostas; num nível mais grave, alguns alunos interpretam mal as *tarefas* ou usam estratégias inadequadas e informações imprecisas para realizarem o trabalho (Doyle, 1988). Do disposto sobressai o papel vital do professor em relação ao objeto real do seu trabalho - "alunos em *atividade* com *tarefas* matemáticas" (Christiansen & Walther, 1986, p. 302) -, de forma a assegurar-se que determinadas ações inerentes a uma *atividade* são realizadas, e que através da sua interação com os alunos durante o desempenho dessas ações, os potenciais de aprendizagem são devidamente aproveitados (Christiansen & Walther, 1986). Quer dizer, "os professores devem estar cientes de como as *tarefas* podem ser interpretadas pelos alunos e saber como apoiar a *atividade* deles, de tal maneira que a experiência possa resultar em aprendizagem apropriada." (Mason & Johnston-Wilder, 2006, p. 8).

A predominância de uma conceção superficial e isolada dos conceitos *tarefa* e *atividade* está na origem de múltiplas dificuldades relacionadas com estas duas categorias didáticas fundamentais (Christiansen & Walther, 1986). Uma visão demasiado simplista das relações entre *tarefa* e *atividade*, no ensino e na aprendizagem, facilmente incorre no erro de acreditar que as *tarefas per se* servem para promover determinados propósitos pedagógicos, o que, por sua vez, pode resultar em '*atividade* cega' (Christiansen & Walther, 1986). Neste contexto, a tese que os autores em alusão defendem, e que nós seguimos, é a de que os alunos, por meio de *tarefas*, podem ser iniciados num espectro apropriado de *atividade* matemática. Contudo, são necessárias várias ações, por parte do professor, para garantir que a *atividade* em questão resulta em aprendizagem conforme pretendida (Christiansen & Walther, 1986). É infrutífero tentar elaborar '*tarefas* à prova de professor'; as *tarefas* só poderão ser usadas eficazmente se o professor estiver consciente do seu potencial e for capaz de explorá-lo (Mason & Johnston-Wilder, 2006). Como tal, o professor será sempre um ator central e indispensável no processo, e parte do seu trabalho não pode nunca ser formalizado (Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira & Varandas, 1999, p. 149).

3.2. Tarefas para o ensino-aprendizagem da matemática

As tarefas matemáticas são unidades apropriadas para organizar o ensino da matemática, e devem apresentar uma certa riqueza e qualidade (Krainer, 1993). As tarefas diferem nas exigências cognitivas que colocam aos alunos, e, ao envolverem e desenvolverem estruturas cognitivas distintas, induzem diferentes tipos de aprendizagem (Bell, 1993; Hiebert & Wearne, 1993; Stein et al., 1996). Nesse sentido, são necessárias tarefas específicas para motivar determinados tipos de atividade, que, por sua vez, contribuirão para diferentes tipos de aprendizagem, e em diferentes níveis cognitivos (Christiansen & Walther, 1986). Põe-se, então, a questão de saber aquilo que é esperado que os alunos, efetivamente, aprendam em matemática. Quais são, afinal, os objetivos para o ensino da matemática? Ademais, como é que as tarefas matemáticas a considerar de qualidade se enquadram nesses objetivos?

3.2.1. Conceptualizações da matemática

De acordo com Schoenfeld (1992/2016), os objetivos para o ensino da matemática dependem da conceptualização acerca do que é a matemática e do que significa compreender matemática. Conforme refere o autor, essas conceptualizações variam amplamente. Numa extremidade do espectro, o conhecimento matemático é visto como um sistema absoluto e estruturado de factos e procedimentos; em conformidade com essa perspetiva, saber matemática significa dominar esse *corpus* (Schoenfeld, 1992/2016). No outro extremo do espectro, a matemática é entendida como a 'ciência dos padrões' - uma disciplina que enfatiza a procura de padrões com base em evidências empíricas (Schoenfeld, 1992/2016). No entendimento do autor, a primeira perspetiva descrita trivializa a matemática. Ou seja, "um currículo baseado em dominar um *corpus* de factos e procedimentos matemáticos encontra-se altamente empobrecido - praticamente da mesma maneira que um currículo de inglês seria considerado pobre se se focasse maioritariamente, se não exclusivamente, nas questões gramaticais." (Schoenfeld, 1992/2016, p. 1). Como tal, Schoenfeld (1992/2016) é apoiante de uma noção mais dinâmica, exploratória e em evolução da matemática, que versa sobre o outro extremo do espectro. Para o autor, uma componente fundamental do ensino da matemática deve ser ajudar os alunos a adquirirem um 'ponto de vista matemático', isto é, a verem o mundo da maneira que os matemáticos o fazem. Ora, isso implica uma valorização dos processos de raciocínio matemático, que são característicos da atividade de 'fazer matemática', a saber: a observação e exploração de padrões, a formulação de conjeturas, a justificação, a interpretação, a generalização, a abstração, e assim por diante (Schoenfeld, 1992/2016).

Segundo Krainer (1993) diferentes conceptualizações da matemática estão na origem de um dilema estruturante para o ensino desta disciplina. Por um lado, a matemática é vista como uma ciência altamente complexa e desenvolvida, que oferece, ainda assim, um conjunto estável e polido de ideias e teorias, em áreas que são compreensíveis para os alunos (Krainer, 1993). Desse ponto de vista, é fácil criar percursos de ensino da matemática 'bem estabelecidos', 'seguros' (Krainer, 1993). Por outro lado, sabe-se que os alunos trazem, para a sala de aula, uma variedade de experiências práticas relevantes, associações e intuições relacionadas com a matemática, que abrem caminho à criatividade e espontaneidade dos alunos (Krainer, 1993). Ora, para que isso possa, efetivamente, acontecer é necessário conceber uma certa 'insegurança' nos percursos de ensino da disciplina (Krainer, 1993). Esse dilema no ensino da matemática é descrito pelo autor, precisamente, como um dilema de 'segurança' *versus* 'insegurança'. Krainer (1993) acrescenta que a situação permanece conflitante ao perceber-se que os dois extremos do dilema incorporam exigências significativas distintas: por um lado, a exigência da eficiência, de caminhos seguros e bem desenvolvidos para o ensino da matemática, e, por outro lado, a exigência de que os alunos devem investigar e descobrir por si mesmos, e devem ter liberdade para 'pavimentar' os seus próprios caminhos. Na opinião de Krainer (1993), "os alunos não devem ser considerados apenas como consumidores, mas também como produtores de conhecimento." (p. 68). Nessa lógica, a tarefa do professor é, no entendimento do autor em referência, organizar uma confrontação ativa dos alunos com a matemática, por meio daquilo que designou por 'tarefas poderosas'.

À semelhança dos autores anteriores, Freudenthal (1968, 1973) contesta a imposição, aos alunos, de uma 'matemática-pronta', em que a atividade dos alunos consiste, essencialmente, em reproduzi-la. Na perspetiva do autor, aquilo que os alunos têm de aprender "não é a matemática como um sistema fechado, mas antes como uma atividade, [isto é] o processo de matematizar" (Freudenthal, 1968, p. 7). Portanto, 'ensinar matemática útil' implica ter como fundamento a atividade de matematizar em si, e não os seus resultados (Freudenthal, 1968), que enformam uma 'ciência pronta' (Freudenthal, 1973). O autor considera uma 'inversão antididática' o ensino da matemática que começa pela introdução do conteúdo pronto para, em seguida, ser 'aplicado', e defende que o percurso didático deveria ser o oposto. Conforme escreve, "ao invés de se partir do próprio problema e investigá-lo em termos matemáticos, a matemática vem primeiro, enquanto o problema em si surge depois como uma 'aplicação'." (Freudenthal, 1973, p. 132). A respeito do disposto, Goldenberg (1999) faz uma interessante observação de que, na vida real, os problemas também não surgem justamente depois de termos estudado o modo de os resolvermos, ou de termos acabado de ler um exemplo prático; os problemas são problemas, precisamente porque não os sabemos resolver e, por isso, temos que, em primeiro lugar, investigá-los.

Na continuidade do seu pensamento, Freudenthal (1973) evidencia que o que resta, para os problemas, é uma 'matemática simulada', já que a oportunidade de os alunos se envolverem, de forma autêntica, com a matemática é impedida no momento em que a mesma é introduzida como uma 'ciência pronta'. Na opinião do autor suprarreferido, o processo de ensino-aprendizagem da matemática deve incluir fases de 'invenção direcionada', não no sentido objetivo, mas subjetivo - visto da perspetiva do aluno -, de modo a criar possibilidades para os alunos (re)inventarem a matemática através da sua própria atividade.

É hoje bem aceite que os alunos constroem o seu próprio conhecimento matemático, em vez de o receberem sob uma forma final através do professor ou do manual escolar (Hiebert & Carpenter, 1992). No quadro teórico de Hiebert e Carpenter (1992), isso significa que "os alunos criam as suas próprias representações internas das suas interações com o mundo, e constroem as suas próprias redes de representações." (p. 74). Nesse contexto, "o desenvolvimento do conhecimento matemático pode ser entendido como um processo de construção de representações internas de informação e, por sua vez, de conexão dessas representações para formar redes organizadas" (Hiebert & Carpenter, 1992, p. 80). Para os autores em menção, um objetivo fundamental do ensino da matemática deve ser o de os alunos adquirirem conhecimento com compreensão, a qual pode ser entendida, no quadro da representação e da conexão do conhecimento, como o processo de fazer conexões ou estabelecer relações, quer seja entre o conhecimento já representado internamente, ou entre as redes pré-existentes e nova informação.

Pólya (1945/1995) é o matemático mais bem conhecido pela sua conceptualização da matemática como resolução de problemas e pelo seu intento de tornar a resolução de problemas o foco do ensino da matemática. No seu livro mais famoso - *How to solve it* -, o autor introduz o conceito 'heurística moderna' para descrever a arte de resolver problemas e, mais especificamente, as operações mentais típicas desse processo. Nesse âmbito, Pólya (1945/1995) chama a atenção para dois aspetos distintos que a matemática tem: por um lado, é a rigorosa ciência de Euclides, dedutiva e sistemática; por outro lado, a matemática em desenvolvimento exibe-se como uma ciência indutiva, experimental. Conforme explana o autor, esses dois "aspetos são tão antigos quanto a própria ciência. Mas o segundo aspeto é novo sob um certo ponto de vista: a matemática *in statu nascendi*, no processo de ser inventada, jamais foi apresentada exatamente desta maneira aos estudantes" (p. VI). Ora, o ensino-aprendizagem da matemática baseado na resolução de problemas evidencia esse segundo aspeto da matemática (Pólya, 1945/1995). Segundo o autor, o professor de matemática tem, em si, uma grande oportunidade: se ele ocupar o tempo com tarefas rotineiras, destrói o interesse dos alunos, e inibe o desenvolvimento intelectual deles; porém, se ele desafiar a curiosidade dos alunos, propondo-lhes problemas compatíveis com os seus conhecimentos, e auxiliando-os por meio de questões estimulantes, poderá suscitar-lhes o gosto pelo raciocínio matemático autónomo, e proporcionar-lhes meios para alcançarem esse objetivo. De acordo com Pólya (1945/1995), o professor que pretende que os alunos desenvolvam a capacidade de resolução de problemas deve despertar-lhes um certo interesse por problemas, e proporcionar-lhes muitas oportunidades de pática. Isto porque, elucida o autor, a resolução de problemas é uma habilitação prática, e, como qualquer outra competência dessa natureza, é adquirida através da prática. Convocando as célebres palavras de Pólya (1945/1995), "aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os." (p. 3).

De acordo com Lave, Smith e Butler (1990), a caraterização da educação matemática em termos de resolução de problemas reflete uma nova tendência, que, ao mesmo tempo, é uma reação às conceptualizações da matemática como um conjunto de factos, procedimentos e conhecimentos a serem dominados mecanicamente. Segundo os autores, o interesse na 'resolução de problemas como prática' trouxe um novo objetivo para o ensino-aprendizagem da matemática: que os alunos possam aprender tornando-se 'matemáticos aprendizes' a fazerem aquilo que os matemáticos fazem na sua prática diária.

Essa noção mais dinâmica da atividade matemática que aqui se tem vindo a discutir, e que reúne um grande consentimento, tem implicações nas ideias acerca do que os alunos precisam de aprender e dos tipos de atividades nos quais devem envolver-se (Henningsen & Stein, 1997). Há uma manifesta concordância em relação à ideia de que as práticas matemáticas e as formas de pensamento matemático a serem incentivadas nos alunos devem retratar as práticas dos matemáticos (Breen & O'Shea, 2010). A aprendizagem da matemática não deve, portanto, ser encarada como um processo em que os alunos apenas têm contacto com o 'produto final'; ao invés disso, deve incluir oportunidades para os alunos se envolverem em momentos genuínos de atividade matemática (Silva, Veloso, Porfírio & Abrantes, 1999). "O objetivo é fazer com que os alunos tomem a iniciativa e tratem a matemática como uma atividade construtiva e criativa." (Mason & Johnston-Wilder, 2006, p. 40). Acredita-se que "a capacidade de pensar matematicamente é, pelo menos, tão importante como o domínio de conhecimentos matemáticos específicos." (Oliveira, Segurado & Ponte, 1999b, p. 204). Ora, para desenvolver as capacidades dos alunos para 'fazerem matemática', as salas de aula devem tornar-se ambientes nos quais os alunos possam envolver-se ativamente em *atividade* matemática rica e significativa (Henningsen & Stein, 1997). Segundo Bell (1993), as principais experiências dos alunos na sala de aula de matemática "devem ser atividades matemáticas genuínas e substanciais, que mobilizam estratégias matemáticas gerais, tais como abstrair, representar, simbolizar, generalizar, provar e formular novas questões." (p. 7). Ora, para motivar esses tipos de *atividade*, são necessárias tarefas específicas (Christiansen & Walther, 1986). Nesse sentido, urge investigar as tarefas capazes de estimular esses tipos de *atividade*, tidos como desejáveis. Que tarefas para a sala de aula poderão, sob esse ponto de vista, considerar-se de qualidade?

3.2.2. Tarefas matemáticas de qualidade

Os resultados da investigação de Hiebert e Wearne (1993) sugerem que determinados tipos de tarefas - e de discurso - na sala de aula promovem formas de pensamento mais produtivas nos alunos. De entre as turmas investigadas pelos autores, as que receberam menos problemas, mas os quais requeriam outras representações alternativas para além da manipulação escrita de símbolos -, que despenderam mais tempo em cada problema, e que o usaram para responder mais questões, as quais solicitavam que eles descrevessem as suas estratégias de resolução e que explicassem a razão pela qual essas estratégias funcionavam -, mostraram níveis de desempenho mais elevados e progrediram mais desde o início até ao final do ano, na maior parte dos itens avaliados. Segundo Hiebert e Wearne (1993), o tipo de tarefas usado nessas turmas - assim como o discurso - apoiou um pensamento mais reflexivo e analítico por parte dos alunos, em detrimento de um pensamento mais procedimental e mecânico. Fundamentando-se nos resultados da investigação, Hiebert e Wearne (1993) concluem que, quer os tipos de tarefas usados na sala de aula, como a natureza do discurso, têm influência na aprendizagem, ao afetarem os tipos de processos cognitivos nos quais os alunos se envolvem. A propósito desta matéria, Mary Kay Stein e os seus colaboradores (Smith & Stein, 1998; Stein et al., 1996; Stein & Smith, 1998) apresentam uma taxonomia de tarefas matemáticas baseada nas exigências cognitivas das tarefas, ou seja, no tipo e no nível de processos de pensamento implicados na sua resolução. Conforme explanam Stein et al. (1996), uma importante distinção a fazer é entre "tarefas que envolvem os alunos num nível superficial e tarefas que envolvem os alunos num nível mais profundo" (p. 459). Mais detalhadamente, os processos cognitivos implicados na resolução de tarefas matemáticas podem variar entre a memorização, a utilização de procedimentos e algoritmos (com ou sem conexões aos conceitos, à compreensão, ou ao significado), até à aplicação de estratégias complexas de raciocínio, características de 'fazer matemática', tais como conjeturar, justificar, interpretar, etc. (Smith & Stein, 1998; Stein et al., 1996; Stein & Smith, 1998). Nesse âmbito, as tarefas matemáticas 'boas' são percebidas como "tendo o potencial para envolverem os alunos em pensamento de nível superior" (Smith & Stein, 1998, p. 344). Também Doyle (1988) realça a importância das tarefas que exigem processos cognitivos superiores. Conforme esclarece o autor, "processos cognitivos superiores envolvem decisões sobre como usar conhecimentos e habilidades em circunstâncias específicas para interpretar problemas e gerar respostas." (p. 170). Com efeito ao disposto, o foco das tarefas envolvendo processos cognitivos de nível superior é a compreensão, a interpretação, a aplicação flexível de conhecimentos e capacidades, e a associação de informações provenientes de várias fontes para a concretização do trabalho (Doyle, 1988).

Nesse tipo de tarefas - que requerem processos cognitivos superiores - a previsibilidade é baixa, e as exigências, quer cognitivas, quer emocionais, são elevadas, porque há uma ambiguidade considerável em relação aos produtos, e um certo grau de risco de que as respostas estejam incorretas (Doyle, 1988).

Krainer (1993) utiliza o conceito 'tarefas poderosas' - já referenciado anteriormente -, e descreve dois pares de propriedades que essas tarefas devem apresentar. O primeiro par de propriedades incorpora o dilema 'segurança' *versus* 'insegurança' concebido pelo autor: por um lado, as tarefas devem estar bem interligadas com outras tarefas - conexão horizontal de tarefas -, o que pode ser visto como uma contribuição para a 'segurança' da disciplina de matemática; por outro lado, as tarefas devem facilitar a geração de outras questões interessantes - extensão vertical de tarefas -, o que se pode encarar, neste caso, como um contributo para a 'insegurança' da matemática. O segundo par de propriedades definido pelo autor incorpora, desta vez, duas propriedades complementares, ao invés de conflitantes - um elevado nível de atuação e um elevado nível de reflexão - que se espera que as tarefas estimulem. Tarefas matemáticas poderosas, na conceção de Zaslavsky, Chapman e Leikin (2003), são esperadas como sendo problemas abertos, não-rotineiros, que impliquem lidar com uma certa incerteza e dúvida, e que possibilitem diversas abordagens na sua resolução. Ruthven (2015), ao ponderar os critérios para conceber uma 'tarefa produtiva', estipula que a "tarefa deve representar algum tipo de problema a ser resolvido; um problema que admite uma série de soluções; soluções essas que tipicamente diferem no nível de sofisticação matemática" (p. 314). Também Lampert (1990) coloca ênfase nos problemas que possibilitam múltiplos caminhos para uma solução, nos quais os alunos são chamados a planear - em parte ou na totalidade - o processo de resolução. Segundo a autora, a tarefa dos alunos é descobrirem como resolver o problema proposto pelo professor, ou seja, é encontrarem uma estratégia matematicamente válida para o resolverem. Conforme elucida Lampert (1990), é nas estratégias desenvolvidas pelos alunos, mais do que nas respostas, que se encontra o 'argumento matemático'. Para a autora, desenvolver uma estratégia e argumentar pela sua legitimidade é revelador do que o aluno sabe sobre matemática. Ora, é nesse sentido que Lampert (1990) faz a interessante afirmação de que "o problema não é a questão e a resposta não é a solução" (p. 40). A autora vê como essencial que os alunos desenvolvam e defendam estratégias, que formulem hipóteses, e que respondam ao desafio de articular e defender as suas conjeturas - essas são atividades de interesse, que as tarefas devem motivar.

Na publicação *Princípios para a Ação* do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) (2014), são enunciadas oito práticas de ensino fundamentais para promover uma aprendizagem profunda da matemática. Uma dessas práticas consististe em "implementar tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas." (NCTM, 2014, p. 10). Em conformidade com o NCTM (2014), "o ensino efetivo da matemática envolve os alunos na resolução e discussão de tarefas que promovem o raciocínio matemático e a resolução de problemas, e que permitem múltiplas abordagens e estratégias de resolução variadas." (p. 10). Com efeito, nas aulas de matemática, os alunos devem ter experiências que lhes permitam envolverem-se regularmente em tarefas desafiadoras, que requerem a construção ativa de sentido, e que suportam uma aprendizagem significativa (NCTM, 2014). O que é crucial, segundo o NCTM (2014), é que as tarefas forneçam aos alunos a oportunidade de se envolverem ativamente no raciocínio, na construção de sentido, e na resolução de problemas, para que, dessa forma, eles desenvolvam uma compreensão profunda da matemática. Convém ressalvar, no entanto, que as tarefas que se focam na aprendizagem e na aplicação de procedimentos também têm um lugar no currículo, e são necessárias para desenvolver a fluência (NCTM, 2014). "Essas tarefas, contudo, não devem dominar o ensino e impedir o uso de tarefas que promovem o raciocínio." (NCTM, 2014, p. 23). Uma visão confluente com a anterior é apresentada por Palhares, Gomes, Carvalho e Cebolo (2009), ao afirmarem que, embora os exercícios tenham lugar no ensino da matemática, é a resolução de problemas que deve ser a componente fundamental. De acordo com Holding (1991) há uma consciencialização crescente de que não só é importante e educacionalmente desejável que os alunos compreendam, valorizem e sejam capazes de aplicar os conteúdos matemáticos, como também se afigura fulcral que a aquisição de pensamento especializado e de habilidades práticas seja incentivada por atividades de resolução de problemas. Fundamentado na abordagem da resolução de problemas para a sala de aula, Holding (1991) inclui, no seu livro, quarenta investigações, com comentários referentes à sua aplicação em sala de aula. Ora, todas essas investigações derivam de um problema inicial - o 'ponto de partida' -, que, em conformidade com o autor, deve apresentar um conjunto de características: ser compreensível; criar desafio; oferecer uma certa dificuldade, no sentido de a solução não ser imediatamente acessível; e implicar alguma discriminação entre possíveis cursos de ação na respetiva abordagem (Holding, 1991).

Segundo Ponte, Matos e Abrantes (1998), num contexto favorável, em que sejam propostas aos alunos tarefas desafiadoras, eles tendem a adquirir capacidades notáveis de raciocínio, de resolução de problemas, de utilização da matemática em situações da vida real, bem como uma visão mais alargada desta ciência, e uma atitude mais favorável em relação à disciplina. Nas palavras de Ponte et al. (1999), "uma aula de matemática bem-sucedida baseia-se, necessariamente, em tarefas matemáticas válidas e envolventes" (p. 149). De acordo com os autores em alusão, o professor deve ser capaz de construir um ambiente de aprendizagem estimulante e de criar várias oportunidades de discussão e de reflexão entre os alunos, mas isso não será suficiente se as tarefas propostas não constituírem um terreno propício para uma exploração matematicamente rica, ou se as mesmas não forem suficientemente desafiadoras.

Conforme referem Holton et al. (2009), se os alunos (em especial os mais hábeis) não forem desafiados, podem ficar desmotivados e desinteressados com demasiada facilidade nas 'salas de aula rotineiras'. Na perspetiva dos autores aludidos, as tarefas desafiadoras desempenham um papel essencial, ajudando "os alunos a compreender melhor o que é a matemática e como é que a matemática se desenvolve." (p. 207). Na mesma linha de pensamento, Stigler e Hiebert (1999), no âmbito de uma análise comparativa e intercultural de aulas de matemática em três países distintos - Estados Unidos da América, Alemanha e Japão -, evidenciam: "se o conteúdo é rico e desafiador, é mais provável que os alunos tenham oportunidade de aprender mais matemática e de aprendê-la com maior profundidade" (p. 57). Os autores consideram que são criadas oportunidades de aprendizagem mais ricas se forem apresentados aos alunos problemas desafiadores, e se eles forem encorajados a desenvolverem as suas próprias estratégias de resolução, e a discutirem as vantagens relativas das diferentes estratégias. Segundo os autores, "este é um lugar onde os alunos podem participar em 'fazer matemática'." (p. 69). Barbeau (2009) reitera a importância do desafio nas salas de aula de matemática, declarando que a exposição dos alunos a desafios matemáticos promove uma aprendizagem mais rica dos conteúdos, possibilita a exploração de conexões, permite aos alunos reconhecerem e desenvolverem as suas capacidades matemáticas, e pode ajudar os alunos a enfrentarem desafios futuros, ao contribuir para o desenvolvimento de atributos desejáveis, como a paciência, a persistência e a flexibilidade. Para o autor, "um bom desafio normalmente envolve explicação, questionamento e conjetura, múltiplas abordagens, avaliação de soluções em termos de efetividade e elegância, e criação e avaliação de exemplos." (p. 5). Também Stillman et al. (2009) advogam o uso regular de tarefas desafiadoras nas aulas de matemática. Os autores explicitam três razões para tal. Em primeiro lugar, através de tarefas desafiadoras, os alunos podem desenvolver uma compreensão mais completa dos vários aspetos de um conceito matemático, alcançando uma compreensão mais profunda desse conceito; em segundo lugar, as tarefas desafiadoras baseadas em situações da vida real permitem, por um lado, tornar os desafios mais significativos para a vida quotidiana dos alunos, e, por outro lado, oferecem aos alunos a possibilidade de abordarem os desafios em diferentes níveis de matematização; por último, quando os alunos se envolvem na resolução de tarefas matemáticas desafiadoras, eles são colocados na fronteira entre a sua zona de conforto e a tomada de risco, o que faz com que os alunos aprendam a lidar com a incerteza (Stillman et al., 2009).

Na perspetiva de Mason e Johnston-Wilder (2006), "a característica mais importante de uma tarefa é que contenha algum desafio, sem ser demasiado exigente." (p. 52). Tal como esclarecem os autores, tarefas insuficientemente desafiadoras requerem pouco raciocínio por parte dos alunos, enquanto tarefas excessivamente desafiadoras significam que eles vão precisar de suporte. Ora, em nenhum desses casos se afigura provável que os alunos aprofundem o seu conhecimento das ideias matemáticas implícitas, nem que aprendam de forma efetiva (Mason & Johnston-Wilder, 2006). Para os autores em referência, aprender efetivamente através da prática pode ser promovido por meio de tarefas que envolvam 'desafios' ou 'explorações'. Isto porque, os alunos mantêm-se ativos e com a sua atenção focada na descoberta e na exploração, mas acabam por, durante o processo, exercitar habilidades específicas, de tal forma que essas habilidades são autonomizadas, e os alunos tornam-se competentes nas técnicas, sem pensarem que estão 'simplesmente a fazer exercícios rotineiros' (Mason & Johnston-Wilder, 2006). Em convergência com o pensamento dos autores supracitados, Powell et al. (2009) consideram que "para um desafio ter um efeito positivo na aprendizagem, não deve ser demasiado difícil, mas deve estar ligeiramente 'fora do alcance'. Isto é, deve estar dentro da 'zona de desenvolvimento proximal'" (p. 148), nos termos delineados por Vygotsky (1998/1978)[4]. Também Barbeau (2009) refere que os desafios propostos devem ser adequados aos alunos a que se destinam. Segundo o autor, um 'bom desafio' é aquele para o qual o aluno tem a experiência matemática ou a habilidade lógica necessária, mas precisa de utilizá-la de uma maneira inovadora, não-padronizada. Entre os princípios para uma 'tarefa ideal' concebidos por Fujii (2015), encontra-se, igualmente, o de a tarefa ter um nível de dificuldade apropriado. Para além deste princípio, que tem vindo a ser focado pelos autores previamente citados, Fujii (2015) refere, ainda, outros princípios, a saber: a tarefa é apropriada e matematicamente útil em termos dos objetivos da aula; interessa aos alunos; pode ser resolvida de diversas maneiras; pode aplicar-se a outros problemas matemáticos ou da vida real; e tem potencial para induzir conhecimento matemático de valor.

Para terminar o quadro de asserções teóricas relativo às tarefas de qualidade que tem vindo a ser desenvolvido, convocamos Kadijević e Marinković (2006), que dão a conhecer a experiência frutífera e bem-sucedida do clube de matemática sérvio 'Arquimedes', e apresentam, com observações didáticas, algumas tarefas desta organização, as quais têm como propósito, uma vez mais, o desafio matemático, no caso, dentro e fora da sala de aula. Nesse âmbito, os autores sistematizam algumas características a considerar no momento de desenvolver ou de selecionar tarefas desafiadoras, nomeadamente: existe uma boa ideia matemática subjacente à tarefa; a tarefa não é rotineira; a tarefa é interessante ao nível da formulação e do conteúdo; a tarefa tem uma solução 'boa', e possivelmente inesperada; a tarefa requer que o aluno amplie o seu raciocínio matemático; e a resolução da tarefa possibilita ao aluno utilizar os conhecimentos e as capacidades normalmente desenvolvidos na sala de aula de matemática.

[4] Vygotsky (1998/1978) define a 'zona de desenvolvimento proximal' como a distância entre o nível de desenvolvimento real da criança, que se costuma determinar através da resolução independente de problemas, e o seu nível de desenvolvimento potencial, determinado através da resolução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com outos colegas mais competentes. A 'zona de desenvolvimento proximal' caracteriza o desenvolvimento mental prospectivamente, definindo aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em pleno processo de maturação (Vygotsky, 1998/1978).

3.3. Implementação de tarefas de qualidade na sala de aula

"Criar e implementar desafios matemáticos é ambicioso e exigente. É difícil criar um ambiente de aprendizagem que envolva os alunos num desafio e estimule o desenvolvimento das suas habilidades de raciocínio matemático." (Bussi et al., 2009, p. 177). Embora a seleção de tarefas que promovam o raciocínio matemático e a resolução de problemas seja um primeiro passo crítico, apresentar a tarefa aos alunos não garante que eles realmente se envolvam na tarefa num nível sofisticado de pensamento (NCTM, 2014). "Tarefas desafiadoras na sala de aula não desafiam necessariamente os alunos, uma vez que isso depende de vários fatores, como a sua implementação." (Stillman et al., 2009, p. 276). Assim sendo, é útil distinguir as possibilidades oferecidas por uma tarefa das oportunidades reconhecidas e aproveitadas pelos professores e alunos: uma tarefa pode ter várias possibilidades, mas estas podem não ser identificadas como oportunidades a explorar (Mason & Johnston-Wilder, 2006). Não é a tarefa, por si só, que cria oportunidades, mas sim a situação geral: "as possibilidades oferecidas por uma dada tarefa ou tipo de tarefa, as formas de trabalho estabelecidas na sala de aula e as propensões do professor e dos alunos, todos influenciam as oportunidades disponíveis." (Mason & Johnston-Wilder, 2006, p. 53).

De acordo com Doyle (1986), as tarefas que envolvem processos cognitivos superiores de compreensão, raciocínio e formulação de problemas apresentam uma elevada ambiguidade e risco inerentes para os alunos. Isto é, "uma vez que a natureza precisa das respostas corretas não pode ser prevista e preparada com antecedência, a possibilidade de fracasso é elevada." (Doyle, 1986, 406). Conforme menciona Doyle (1988), por vezes os alunos respondem à ambiguidade e risco envolvidos nesse tipo de tarefas "negociando diretamente com os professores para aumentarem a clareza das especificações do produto." (p. 174). No que respeita aos professores, o que por vezes acontece é que, para nem terem que lidar com os constrangimentos e as exigências que esse tipo de tarefas impõe à gestão do trabalho em sala de aula, eles optam, simplesmente, por excluí-las (Doyle, 1988). Na maioria das vezes, contudo, os professores respondem às pressões no fluxo do trabalho em sala de aula criadas por essas tarefas, redefinindo ou simplificando as exigências das tarefas e diminuindo a responsabilidade assumida pelos alunos na sua resolução (Doyle, 1988). Dessa forma, "tarefas que, à superfície, parecem requerer compreensão ou capacidades analíticas (...) são frequentemente realizadas em circunstâncias que modificam fundamentalmente o caráter das suas exigências sobre os alunos." (Doyle, 1988, p. 174).

Segundo Stein e Smith (1988), a natureza das tarefas geralmente muda à medida que estas passam da 'fase de configuração' para a 'fase de implementação'. Ora, esta transição constitui o objeto principal das investigações empíricas desenvolvidas por Stein et al. (1996) e Henningsen e Stein (1997).

Stein et al. (1996) analisam uma amostra ampla de tarefas matemáticas, quer em termos das características das tarefas - número de estratégias de resolução; número e tipo de representações; e requisitos de comunicação matemática -, como também em termos das exigências cognitivas solicitadas pelas tarefas - por exemplo, a memorização, o uso de procedimentos e algoritmos (com ou sem conexões aos conceitos, à compreensão, ou ao significado), o 'fazer matemática'. Com isso, os autores pretendem compreender até que ponto é que as tarefas matemáticas implementadas se mantêm consistentes com a maneira como foram estabelecidas. Ora, os resultados obtidos por Stein et al. (1996) sugerem que, de uma forma geral, as características das tarefas, durante a implementação, tendem a permanecer consistentes com a sua configuração. Mais especificamente, as tarefas que previam uma ou várias estratégias de resolução levaram à utilização, pelos alunos, de, respetivamente, um único ou múltiplos métodos de resolução. Ainda assim, as tarefas criadas para promover o uso de mais do que uma estratégia de resolução tiveram uma relação ligeiramente menos consistente durante a implementação, sugerindo ser mais difícil concretizar várias abordagens a uma tarefa. No que respeita às representações, verificou-se uma grande consistência entre os aspetos requeridos na formulação da tarefa e o modo como foram realizados aquando da implementação. Por último, em relação à comunicação, as tarefas que requeriam poucas justificações e explicações - ou até mesmo nenhumas -, assim permaneceram na 'fase de implementação'. A solicitação de justificações e explicações como parte da tarefa na sua configuração não garantiu, por sua vez, que estas fossem produzidas no decurso da implementação, denotando-se, nestes casos, uma menor consistência. Em contraste com as características das tarefas, que, em geral, permaneceram consistentes entre a 'fase de configuração' e a 'fase de implementação', os resultados alcançados por Stein et al. (1996) sugerem que as exigências cognitivas das tarefas tendem a manter-se ou a diminuir de uma fase para a outra. Genericamente, quanto mais elevadas as exigências cognitivas das tarefas na sua configuração, menor a percentagem de tarefas que assim permaneceu durante a implementação, verificando-se declínios. Portanto, as tarefas que se advogam como sendo as mais apropriadas para desenvolverem as capacidades dos alunos de pensar matematicamente são, justamente, as que os alunos têm mais dificuldades de realizar de forma consistente (Stein et al., 1996).

Face aos resultados dispostos anteriormente, o segundo propósito do estudo de Stein et al. (1996) prende-se com a análise dos fatores que, durante a implementação das tarefas que pressupunham exigências cognitivas elevadas, surgem associados aos casos em que estas foram implementadas de tal forma que os alunos se envolveram com as tarefas no nível visado, e os casos em que isso não ocorreu. Em relação aos fatores que influenciaram o declínio das exigências cognitivas requeridas pelas tarefas da 'fase de configuração' para a 'fase de implementação', o que teve maior expressão foi a remoção dos aspetos desafiadores da tarefa, quer porque os alunos pressionavam o professor no sentido de ele reduzir a complexidade da tarefa, explicitando os passos da resolução, quer porque os próprios professores assumiam o controlo dos aspetos desafiadores da tarefa e resolviam-na pelos alunos ou indicavam-lhes como fazê-lo, retirando-lhes, dessa forma, a oportunidade de descobrirem e progredirem por si mesmos. Outro fator bastante frequente foi a inadequação da tarefa aos alunos, baseada em diferentes motivos, a saber: falta de interesse, de motivação, ou de conhecimento prévio dos alunos. Outros dois fatores preponderantes foram a tendência dos professores para, durante a 'fase de implementação', mudarem o foco nos processos de resolução, na compreensão e na construção de sentido para a correção e rigor das respostas apresentadas, e o facto de providenciarem um tempo desadequado à exploração da tarefa. Relativamente aos fatores implicados nas tarefas cujas exigências cognitivas se mantiveram estáveis da 'fase de configuração' para a 'fase de implementação', o mais frequente foi a adequação da tarefa ao conhecimento prévio dos alunos. Outros dois fatores com grande ocorrência foram a adequação do tempo concedido aos alunos para explorarem a tarefa, e o facto de o 'desempenho competente' na tarefa ter sido modelado pelo professor ou por um aluno mais hábil, que expôs a sua resolução em plenário. Um incentivo contínuo, por parte dos professores, para os alunos formularem justificações e explicações foi apurado como outro fator predominante. Por fim, evidências de 'scaffolding'[5] foram constatadas na maior parte das tarefas em que os alunos se mantiveram envolvidos em níveis sofisticados de raciocínio. A esse respeito, importa salientar que o apoio facultado aos alunos não diminuiu o desafio ou a complexidade da tarefa, tendo apenas sido o suficiente para permitir que eles mantivessem o progresso.

Seguindo a mesma linha da investigação previamente analisada, o trabalho desenvolvido por Henningsen e Stein (1997) tem como foco a análise dos fatores da sala de aula que surgem associados ao declínio e à manutenção do envolvimento dos alunos em níveis altos de raciocínio aquando da implementação das tarefas. Todavia, no que refere ao declínio, as autoras em causa exploram a prevalência relativa dos fatores associados a três tipos de declínio, ao invés de elencarem os fatores de declínio sem diferenciação, como fizeram Stein et al. (1996). Em particular, Henningsen e Stein (1997) analisam, em separado, os fatores que influenciaram o declínio das tarefas de 'fazer matemática' para: (1) o uso de procedimentos sem conexões aos conceitos, à compreensão, ou ao significado'; (2) uma exploração não-sistematizada; e (3) uma atividade não-matemática. A cada um desses três tipos de declínio ficou associado um perfil distinto de fatores predominantes. Ora, o único fator predominante que

[5] 'Scaffolding' é um termo originalmente introduzido por Wood, Bruner e Ross (1976), com estreitas relações com as ideias de Vygotsky (1998/1978) referentes à 'zona de desenvolvimento proximal'. Wood et al. (1976) definem 'scaffolding' como um processo no qual a intervenção ou apoio do professor possibilita ao aluno resolver com sucesso uma dada tarefa ou alcançar um determinado objetivo que estaria para além dos seus 'esforços não-assistidos', ou seja, que o aluno não seria capaz de concretizar por si só. 'Scaffolding' funciona como uma estrutura temporária de suporte ao aluno, a qual pode ser reduzida gradualmente, e eventualmente removida na totalidade, assim que o aluno se mostre capaz de realizar a *performance* autonomamente (Pea, 2004).

ocorreu nos três tipos de declínio foi a quantidade inadequada de tempo concedida aos alunos para a exploração das tarefas, quer por ter sido insuficiente, como por ter sido em demasia. Tal resultado indicia que planear uma duração apropriada para a exploração das tarefas e ter flexibilidade nas decisões relativas ao tempo à medida que a fase de implementação se desenvolve é essencial para evitar declínios dos três tipos. Em dois dos três tipos de declínio surgiram outros dois fatores preponderantes: a remoção dos aspetos desafiadores da tarefa e a inadequação da tarefa aos alunos, por uma variedade de razões, como falta de interesse, de motivação, de conhecimento prévio dos alunos, ou de expectativas adequadas da tarefa. A prevalência dos fatores supracitados foi também encontrada no estudo de Stein et al. (1996). Quanto aos fatores associados à manutenção do envolvimento dos alunos no nível 'fazer matemática', os resultados de Henningsen e Stein (1997) são análogos aos de Stein et al. (1996), tendo sobressaído os mesmos cinco fatores já elencados nesse estudo, ainda que com uma ordem de frequência diferente. Para concluir, os resultados da investigação de Henningsen e Stein (1997) reforçam e ampliam os de Stein et al. (1996). Nesses dois estudos, os fatores que apareceram como sendo as principais influências no declínio e na manutenção dos altos níveis cognitivos configurados nas tarefas são convergentes, fornecendo uma base empírica útil relativa aos sucessos e desafios da implementação desse tipo de tarefas na sala de aula (Stein et al., 1996). Os resultados coincidentes dos dois estudos em consideração têm implicações para o papel no professor nas salas de aula de matemática nas quais se espera que os alunos se envolvam ativamente em 'fazer matemática'; para além de selecionar tarefas matemáticas de qualidade, o professor deve apoiar, de forma consistente e proativa, a atividade cognitiva dos alunos, sem reduzir ou anular a complexidade e as exigências cognitivas das tarefas (Henningsen & Stein, 1997).

Compreende-se que seja tentador para os professores procurarem estruturar as tarefas de tal modo que qualquer aluno consiga perceber o que tem de fazer e possa proceder sem constrangimentos (Mason & Johnston-Wilder, 2006). No entanto, tal como advertem Mason e Johnston-Wilder (2006), "quanto mais detalhadamente o professor estrutura a tarefa, menos provável é que os alunos obtenham algo da sua exploração" (p. 34). De acordo com os autores em referência, um dos efeitos da excessiva estruturação das tarefas é esvaziar todo o entusiasmo e o interesse experimentado por quem desenhou a tarefa, de tal forma que o que os alunos experienciam é uma mera sequência de instruções. Portanto, sempre que os professores estruturam as tarefas em subtarefas, ou sempre que, no decorrer da exploração de tarefas pelos alunos, eles lhes fornecem demasiadas pistas e sugestões, fazem com que o estímulo criado pela tarefa se transforme numa série de instruções (Mason & Johnston-Wilder, 2006).

Brousseau (1997) refere que existe um 'contrato didático' implícito entre o professor e os alunos: os professores propõem tarefas e os alunos envolvem-se nas mesmas, sendo a aprendizagem o resultado pretendido. No entanto, isso coloca os professores diante de uma 'injunção paradoxal': todos os esforços que empreendem no sentido de os alunos apresentarem o comportamento que esperam deles numa dada tarefa tendem a privar os alunos de alcançarem a aprendizagem pretendida; por outras palavras, quanto mais os professores esclarecem o que pretendem que os alunos façam numa determinada tarefa, mais riscos correm de perder a hipótese de os alunos conseguirem alcançar a aprendizagem pretendida (Brousseau, 1997). Portanto, o importante facto a reter é que a ajuda do professor pode ter o efeito de reduzir a qualidade do trabalho dos alunos (Horoks & Robert, 2007), comprometendo o sucesso da implementação de tarefas de qualidade. Neste sentido, a tarefa do professor é tanto desafiar os alunos, introduzindo 'bons problemas matemáticos', como manter uma cultura de sala de aula que incentive e facilite uma aprendizagem efetiva (Becker & Selter, 1996). Conforme escrevem Sullivan et al. (2015), "estabelecer uma cultura de sala de aula positiva é um pré-requisito para o uso eficaz de alguns tipos de tarefas." (p. 106). A investigação demostra, contudo, que é mais fácil mudar as tarefas do que a gestão da sala de aula: por vezes, os professores propõem boas tarefas, mas não está claro que escolham uma gestão apropriada para que os alunos trabalhem, de forma efetiva, nas mesmas (Horoks & Robert, 2007).

3.4. Classificação das tarefas matemáticas: Diversidade em espectro(s)

Ponte (2005) estabelece duas dimensões fundamentais para classificar as tarefas matemáticas: o 'grau de desafio matemático' e o 'grau de estrutura'. O 'grau de desafio matemático' relaciona-se com a perceção da dificuldade de uma tarefa para os alunos, e varia entre os polos 'desafio reduzido' e 'desafio elevado' (Ponte, 2005). A este propósito, convém notar que o facto de uma tarefa constituir um desafio para um determinado aluno ou grupo de alunos depende da sua experiência matemática (Barbeau, 2009; Powell et al., 2009). Conforme esclarece Ponte (2005), a questão essencial é perceber se o(s) aluno(s) dispõe(m), ou não, de um processo imediato para resolver(em) a tarefa em consideração. Nesse sentido, uma dada tarefa constitui um desafio em relação a um indivíduo ou a um grupo apenas num determinado momento (Holton et al., 2009). Segundo Ponte (2005), o 'grau de desafio matemático' representa uma dimensão usada há muito tempo para classificar as tarefas que se propõem aos alunos; já o 'grau de estrutura' constitui uma dimensão que só há pouco tempo começou a ser alvo de enfoque, e varia entre os polos 'aberto' e 'fechado'. Numa tarefa fechada, encontra-se explicitado o que é dado e o que é pedido, pelo que o aluno pode iniciar a exploração da tarefa sem muito planeamento; ao invés, numa tarefa aberta existe um grau de indeterminação significativo no que é dado e/ou no que é pedido (Ponte, 2005).

As duas dimensões das tarefas consideradas por Ponte (2005) - 'grau de desafio matemático' e 'grau de estrutura' - compreendem dois espectros de variação possível das tarefas matemáticas. Ora, intersetando esses dois espectros, o autor elabora um quadro organizador dos diversos tipos de tarefas (figura 17). Os quatro quadrantes presentes no quadro da figura 17 sistematizam uma classificação que abrange quatro tipos de tarefas: 'exercícios', 'problemas', 'explorações' e 'investigações' (Ponte, 2005). Os 'exercícios' são tarefas fechadas e de desafio reduzido; os 'problemas' também são tarefas fechadas, mas de desafio elevado; as 'explorações' e as 'investigações' são tarefas abertas, mas as primeiras são relativamente fáceis e as segundas comportam um grau de desafio elevado (Ponte, 2005). Ainda assim, Ponte (2005) refere que a linha de demarcação entre os quatro tipos de tarefas muitas vezes não é clara.

Figura 17. Diversos tipos de tarefas, em função do grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005).

A respeito dos 'exercícios', Ponte (2005) refere que são tarefas de natureza acessível, que servem, essencialmente, um propósito de consolidação de conhecimentos, em que o aluno é convidado a pôr em prática conhecimentos já adquiridos. No entendimento do autor, reduzir o ensino da matemática à resolução de exercícios acarreta sérios riscos ao nível do empobrecimento dos desafios propostos aos alunos e da sua consequente desmotivação; para a maior parte dos alunos, fazer séries de exercícios nas aulas de matemática não é uma atividade muito estimulante. É nesse sentido que Ponte (2005) declara que 'exercícios' têm um lugar muito particular no ensino da matemática. Quer os 'exercícios' como as 'explorações' por serem tarefas de natureza mais acessível, permitem aos alunos em geral alcançarem um elevado grau de sucesso, contribuindo para o desenvolvimento da sua autoconfiança (Ponte, 2005). Relativamente às tarefas de natureza mais desafiante - 'investigações' e 'problemas' -, essas constituem-se indispensáveis para que os alunos possam ter uma efetiva experiência matemática (Ponte, 2005). Tanto a resolução de 'problemas' como as 'investigações' implicam, da parte dos alunos, imaginação e criatividade (Ponte, 2007). Esses dois tipos de tarefas "requerem habilidades que vão muito além do simples cálculo e memorização de definições e de procedimentos." (Ponte, 2007, p. 421).

As tarefas de cariz mais aberto - 'explorações' e 'investigações' - afiguram-se essenciais para o desenvolvimento de determinadas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas, entre outras (Ponte, 2005). Apesar da linha pouco clara que existe entre 'explorações' e 'investigações' - que faz com que esses dois termos sejam, muitas vezes, utilizados indistintamente -, a ideia fundamental, em ambos os casos, é que o problema não está completamente formulado à partida, e os alunos têm um papel a desempenhar ao nível da formulação das questões matemáticas que eles mesmos irão resolver (Ponte, 2007). Portanto, nas propostas de cunho exploratório e investigativo, as questões iniciais caracterizam-se por serem abertas, pouco estruturadas, e, ao serem desenvolvidas pelos alunos, eles podem seguir caminhos inesperados (Tudella et al., 1999).

A ideia de que aprender matemática é, essencialmente, 'fazer matemática' tem contribuído para fazer sobressair o papel das tarefas de natureza investigativa e exploratória nas aulas de matemática (Abrantes, 1999). Conforme refere Goldenberg (1999), há pelo menos uma razão evidente para incluir 'explorações' e 'investigações' nas aulas da matemática, e essa razão está especificamente relacionada com a natureza da matemática. Segundo Abrantes, Ponte, Fonseca e Brunheira (1999), a incorporação, nas aulas e nos currículos de matemática, desse tipo de tarefas justifica-se por diversas razões, a saber: (1) estão intimamente relacionadas com a natureza da atividade matemática e com os processos de produção de conhecimento nesta disciplina; (2) favorecem o envolvimento dos alunos, contribuindo para uma aprendizagem significativa; (3) fornecem múltiplos pontos de entrada para alunos com diferentes níveis de competência matemática, podendo ser exploradas de diversas formas e em distintos graus de profundidade; (4) estimulam um pensamento globalizante, que ultrapassa a aplicação de conhecimentos ou procedimentos pré-estabelecidos e isolados, e que implica a mobilização e a conexão de vários tópicos matemáticos; (5) representam um tipo de trabalho que assume um caráter transversal na disciplina de matemática, podendo ser introduzidas, naturalmente, em qualquer parte do currículo de matemática; e (6) lidam com processos complexos de pensamento e de raciocínio matemático, mas, ainda assim, reforçam as aprendizagem de factos, conceitos e procedimentos, contribuindo para a sua consolidação. Numa linha de ideias convergente com a dos autores anteriores, Silva et al. (1999) declaram que as tarefas investigativas e exploratórias lidam com o essencial da natureza da atividade matemática - formulação e resolução de problemas -, permitem uma melhor compreensão da natureza dos processos de 'fazer matemática' - exploração de situações e ideias, identificação de padrões, formulação e teste de conjeturas, generalização e demonstração -, estimulam um pensamento globalizante - relacionando tópicos matemáticos -, permitem um trabalho diferenciado aos alunos com diferentes competências e estilos cognitivos, e promovem o desenvolvimento integrado de atitudes, capacidades e conhecimentos.

Fundamentados nos argumentos supracitados, os autores acreditam que esse tipo de tarefas pode potenciar o desenvolvimento matemático dos alunos, devendo ser integradas nas aulas de matemática. Oliveira et al. (1999b) enfatizam a ideia de que as tarefas de exploração e de investigação, ao permitirem o estabelecimento de ligações entre diversos tópicos matemáticos, dão uma perspetiva mais coerente e integrada da matemática, totalmente diferente da visão compartimentada que os alunos tendem a exibir. Para Ponte (2005), os principais argumentos utilizados para justificar a importância da incorporação das 'explorações' e das 'investigações' no ensino da matemática são análogos aos dos 'problemas', ressalvando-se o facto de os dois primeiros tipos de tarefas, mais do que os 'problemas', promoverem o envolvimento dos alunos, porque requerem a sua participação ativa desde a primeira fase do processo - a formulação das questões a resolver -, e não apenas aquando da elaboração de estratégias de resolução.

Porfírio e Oliveira (1999) chamam a atenção para a importância de os enunciados das tarefas conterem indicações explícitas sobre a natureza da atividade que é esperada que os alunos desenvolvam. Por exemplo, ainda que ambas as frases imperativas 'indica se existem características comuns...' e 'investiga se existem características comuns...' possam dar origem à mesma atividade, o facto de na segunda formulação estar presente a palavra 'investiga' dará indicação ao aluno que se pretende que ele explore a situação em múltiplas direções e que não se limite a dar uma resposta afirmativa ou negativa (Porfírio & Oliveira, 1999). De acordo com os autores, a utilização, nos próprios enunciados das tarefas, de termos conotados com as investigações tem a dupla vantagem de esses termos passarem a fazer parte do vocabulário dos alunos, e de ajudar os alunos a perceberem o tipo de atividade de que se trata.

Para além do 'grau de desafio matemático' e do 'grau de estrutura', Ponte (2005) estabelece outras duas dimensões fundamentais para classificar as tarefas matemáticas: a 'duração' e o 'contexto'. A 'duração' das tarefas permite definir um espectro que varia entre os polos 'curta' e 'longa' duração (figura 18), no seio do qual Ponte (2005) inscreve os quatro tipos de tarefas previamente estipulados - 'exercícios', 'problemas', 'explorações' e 'investigações' - e, ainda inclui os 'projetos', que exemplificam tarefas de longa duração. Mesmo reconhecendo que estas últimas tarefas podem levar a aprendizagens profundas e relevantes, o autor lembra que tais tarefas comportam um risco elevado de os alunos dispersarem, entrarem num impasse, perderem tempo com pormenores irrelevantes, ou até desistirem.

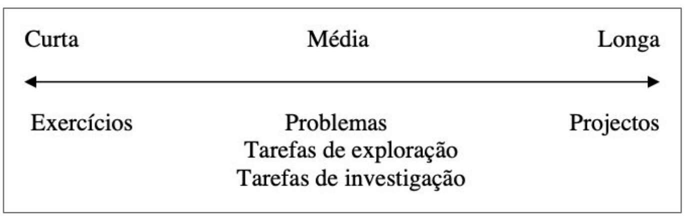


Figura 18. Diversos tipos de tarefas, em função da duração (Ponte, 2005).

Considerando o ‘contexto’ das tarefas, Ponte (2005) define um novo espectro de variação possível das tarefas (figura 19), que varia entre dois polos: tarefas enquadradas na ‘realidade’ e tarefas baseadas em ‘matemática pura’. Note-se que, no caso, ‘exercícios’, ‘problemas’, ‘explorações’ e ‘investigações’ poderão surgir, tanto em contextos reais, como puramente matemáticos, ou intermédios (Ponte, 2005). Segundo Ponte (2005), para que os alunos compreendam o modo como a matemática é usada em muitos contextos e possam tirar partido do seu conhecimento de alguns desses contextos, é essencial que lhes sejam propostas tarefas enquadradas em contextos reais. Contudo, os alunos podem sentir-se igualmente desafiados por tarefas formuladas em contextos puramente matemáticos, cuja exploração lhes permite compreender como se desenvolve a atividade dos matemáticos profissionais (Ponte, 2005).

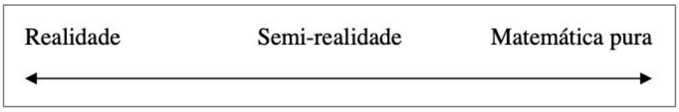


Figura 19. Diversos tipos de tarefas, em função do contexto (Ponte, 2005).

Em forma de conclusão, Ponte (2005) enfatiza que a diversificação das tarefas é indispensável, porque cada um dos tipos de tarefas que foram sendo considerados desempenha um papel particular para alcançar determinados objetivos de aprendizagem. No entendimento de Horoks e Robert (2007), a diversidade de tarefas com as quais os alunos lidam pode contribuir para produzir ‘movimentos’ no pensamento matemático dos alunos, que normalmente se revelam úteis na resolução de problemas, e que os autores acreditam que favorecem a aprendizagem da matemática. Segundo os mesmos autores, da variedade de tarefas resultam múltiplos métodos de resolução que ficam disponíveis para os alunos, e o hábito de os alunos serem confrontados com diferentes formas de utilizarem os seus conhecimentos.

Não obstante ao disposto, a questão da seleção e articulação das tarefas não se esgota na sua diversificação (Ponte, 2005). Conforme refere Ponte (2005), mais do que tarefas matemáticas isoladas, o professor deve organizar sequências de diferentes tipos de tarefas, devidamente articuladas entre si. Ora, embora essa seja uma consideração óbvia ao conceber manuais escolares, a questão da criação de sequências de tarefas estende-se por todo o campo relativo à criação de tarefas (Watson et al., 2014). É imprescindível que as tarefas, no seu conjunto, proporcionem um percurso de aprendizagem coerente, que possibilite aos alunos construírem conceitos, compreenderem procedimentos, dominarem notações e formas de representação relevantes, assim como estabelecerem conexões dentro e fora da matemática (Ponte, 2005). Para isso, é necessário fazer escolhas, tomadas ao nível da gestão curricular, procurando estabelecer um percurso de ensino caracterizado por tarefas cuidadosamente selecionadas e articuladas, bem como privilegiar um modo adequado de construção do conhecimento na sala de aula (Ponte, 2005).

3.5. O papel prevalecente dos exercícios

Embora uma grande parte da investigação em educação matemática aborde temas e questões que parecem gerar implicações diretas para o ensino da matemática, a verdade é que essa investigação tem tido um impacto bastante limitado a esse nível, tendo havido relativamente pouco progresso na aplicação do conhecimento produzido no sentido de melhorar o ensino da matemática (Carpenter, 1990).

Na tentativa de descreverem a tradição prevalecente, Christiansen e Walther (1986) explanam uma sequência que acreditam retratar aquilo que se poderá observar numa aula de matemática comum:

> - O professor especifica um ou mais exercícios para serem explorados pelos alunos, normalmente no seguimento de explicações e demonstrações de procedimentos [matemáticos], os quais se encontram ligados a um exemplo que se destina a servir de modelo;
> - Os alunos aprendem através do seu trabalho (individual ou em grupos) com a tarefa, mas a sua atividade de aprendizagem da matemática é predominantemente limitada ao treino e à prática relacionada com os conceitos e os procedimentos previamente descritos;
> - Os resultados são controlados, e, possivelmente, discutidos, com toda a turma;
> - Se o professor considerar que o *feedback* dos passos anteriores é negativo, ele normalmente regressa ao procedimento padronizado: mais explicações - mais treino; [ao invés,] se o professor avaliar o *feedback* como positivo, o padrão descrito é continuado por 'novos' exercícios. (p. 245)

De acordo com Christiansen e Walther (1986), as conceções de aprendizagem e das relações professor-aluno estão, na tradição prevalecente, próximas do padrão explanado acima. Nesse padrão, com grande foco nos exercícios e na prática, o estabelecimento de tarefas pelo professor consiste no uso de exemplos retirados do manual, como base para explicar aos alunos os procedimentos que devem usar na prática de exercícios semelhantes (Christiansen & Walther, 1986). Conforme notam os autores, conceções básicas sobre o que é a matemática, o que é a aprendizagem, o que é ser um bom aluno, um bom professor, são formadas no e por esse padrão. Por exemplo, "ser 'um bom professor' significa, nessa tradição, providenciar aos alunos boas bases para o estádio de treino e prática independentes" (Christiansen & Walther, 1986, p. 292). Os autores em alusão evidenciam que o trabalho com exercícios ocupa um lugar central em todos os níveis de ensino da matemática, e entendem que o uso privilegiado de exercícios deriva de uma diferenciação inadequada das relações entre os conceitos *tarefa* e *atividade*, a qual também está na origem de uma sobrevalorização dos produtos em detrimento dos processos na aprendizagem da matemática e de formas rígidas de planeamento da atividade por parte dos professores.

Em conformidade com Doyle (1988), os professores costumam privilegiar um sistema de trabalho fluido na sala de aula, orientado para a produção eficiente de trabalho pelos alunos e para a correção das suas respostas - ênfase nos produtos. Ora, essas condições, que muitas vezes indiciam um ambiente de sala de aula bem gerido, são criadas com foco no 'trabalho familiar' (Doyle, 1988). Segundo o autor, essas 'aulas de alta-produção' geralmente organizam-se em torno de padrões de trabalho rotinizados - como séries de exercícios práticos -, e o trabalho tipicamente é definido de forma bastante explícita. Normalmente, as tarefas propostas pelos professores são familiares para os alunos, pelo que eles raramente são impelidos a pôr em prática informações ou procedimentos por vias que ainda não tenham sido previamente demonstradas; para muitas tarefas, os alunos, inclusivamente, sabem, de antemão, os procedimentos que devem usar na sua resolução (Doyle, 1988). De acordo com o autor em referência, o 'trabalho familiar' - bastante comum nas salas de aula de matemática - determina exigências mínimas aos alunos para que interpretem situações ou tomem decisões no âmbito de um conteúdo matemático. Parafraseando Doyle (1988), "há pouca ambiguidade acerca do que fazer e de como fazer" (p. 173). Em concordância com o autor, são pelo menos três os efeitos diretos das práticas supracitadas sobre a aprendizagem da matemática. Em primeiro lugar, ao 'suavizarem' o currículo, os professores removem o seu conteúdo inerentemente problemático, e reforçam a ideia de que as tarefas devem ser resolvidas rapidamente; em segundo lugar, ao fornecerem, aos alunos, inúmeras sugestões - para manterem altas as taxas de produção de trabalho -, os professores limitam as oportunidades de os alunos desenvolverem capacidades de aprendizagem autónomas e reforçam a sua dependência face ao professor; por último, a 'familiarização do trabalho' - promovendo a associação de algoritmos a determinados enunciados dos problemas - parece impedir o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas (Doyle, 1988).

Educadores e professores, tipicamente, concebem e tratam a matemática como a paradigmática 'disciplina bem-estruturada' (Resnick, 1990). À vista disso, a matemática é, comummente, vista e ensinada como uma área sem questões abertas e sem argumentos; um domínio no qual as afirmações têm significados inequívocos, em que há uma hierarquia clara de conhecimentos, e onde a gama de ações possíveis em resposta a uma dada tarefa é restrita e previamente bem-definida (Resnick, 1990). Como resultado disso, muitos alunos passam a pensar a matemática como uma coleção de regras de manipulação de símbolos, e de alguns 'truques' para resolver problemas estereotipados (Resnick, 1990). Em linha de convergência com o disposto anteriormente, Lampert (1990) patenteia como as experiências escolares dos alunos moldam as existentes convicções cultuais de que "fazer matemática significa seguir as regras estabelecidas pelo professor; saber matemática significa recordar e aplicar a regra correta quando o professor faz uma pergunta; e a verdade matemática é determinada quando a resposta é validada pelo professor." (p. 32). De acordo com a autora, nas salas de aula convencionais, o professor e o manual escolar são as autoridades, e a matemática não é concebida como uma disciplina para ser criada ou explorada. Nas aulas de matemática, a verdade é veiculada nas explicações dos professores; são eles que dizem se as respostas estão certas ou não (Lampert, 1990). Não há lugar para a elaboração de conjeturas, para a discussão de argumentos destinados à sua validação, e dificilmente se poderá escutar a palavra 'talvez'; a matemática aparece, neste contexto, associada a 'certeza' (Lampert, 1990).

Na sua revisão histórica da resolução de problemas, Stanic e Kilpatrick (1990) identificam três temas principais relativos à sua utilização, designadamente: 'resolução de problemas como contexto'; 'resolução de problemas como capacidade'; e 'resolução de problemas como arte'. No primeiro tema, os autores distinguem cinco funções que os problemas desempenham enquanto meios para atingir outros fins de revelo. Tem-se a resolução de problemas como: 'justificação' para o ensino da matemática; 'motivação' para os alunos aprenderem conteúdos matemáticos interessantes; 'atividade lúdica'; 'veículo' para aprender novos conceitos e capacidades; e como 'prática' (Stanic & Kilpatrick, 1990). Considerando os cinco subtemas supracitados, os autores denotam o último - 'resolução de problemas como prática' - tem tido a maior influência no currículo de matemática. No caso, os problemas servem, acima das outras quatro funções identificadas, para providenciar a 'prática' necessária "para reforçar capacidades e conceitos ensinados diretamente." (Stanic & Kilpatrick, 1990, p. 14). Os autores atestam, assim, que, regra geral, os problemas usados na sala de aula nada mais são do que exercícios; os alunos aprendem um certo conteúdo ou procedimento e, a seguir, são-lhes dados 'problemas' para 'praticarem'.

Bell (1993) considera que a maior parte das utilizações da matemática contempla um ciclo de: (1) 'matematização', (2) 'manipulação' e (3) 'interpretação'. Mais precisamente, inclui (1) reconhecer, numa dada situação, a relevância de alguma relação matemática, e expressar a relação simbolicamente; (2) manipular a expressão simbólica para revelar algum aspeto novo; e (3) interpretar esse novo aspeto, ou dar alguma nova visão sobre o mesmo na situação em causa (Bell, 1993). Diante disso, o autor lamenta que, no ensino tradicional da matemática, a parte do processo acima descrito que mais tem vindo a ser enfatizada seja a parte intermédia - (2) manipulação. De acordo com Bell (1993), as aulas de matemática tradicionais consistem, habitualmente, na demonstração de um método único, seguido de prática, com vários números diferentes do exemplificado. Segundo o autor, quando a estrutura da tarefa varia em relação ao modelo-padrão, presume-se que é necessário mais ensino específico, ao invés da extensão ou adaptação da ideia básica pelos próprios alunos, para aplicarem à situação alterada. Recorrendo a uma analogia, "a ênfase tem sido em aprender a usar ferramentas e não em fazer móveis; e, quando se tenta este último, exige capacidades (...) que não foram desenvolvidas." (Bell, 1993, p. 7).

Swan (2007) reforça a evidência de que as práticas pedagógicas nas salas de aula de matemática seguem um padrão comum: os professores começam por apresentar uma 'explicação' em plenário, seguindo-se a demonstração de um ou mais 'exemplos' e, posteriormente, a prática de 'exercícios' presentes em fichas ou no usual livro de exercícios. De acordo com o autor, os professores, tipicamente: presumem que os alunos têm pouco ou nenhum conhecimento prévio; optam por ensinar os tópicos matemáticos isoladamente, praticamente ignorando as conexões; selecionam e propõem as tarefas aos alunos por ordem de dificuldade, e com pouco desafio; e privilegiam a modalidade de trabalho individual. Na mesma linha de ideias do autor precedente, Ponte et al. (1998) mencionam que as práticas de ensino da matemática continuam a ser dominadas pelo 'paradigma clássico', de acordo com o qual o aluno aprende por ouvir e observar, passivamente, o professor a explicar conceitos e a apresentar exemplos, e por praticar, em seguida, a resolução de numerosos exercícios de aplicação desses mesmos conceitos. Também Protasov et al. (2009) evidenciam que, nas salas de aula tradicionais, a maior parte do tempo é ocupado com o ensino de métodos padronizados e com a aplicação dos mesmos a situações-padrão. Para os autores, é compreensível, por consequência do disposto, que os alunos não reconheçam o significado do trabalho, e que não sejam capazes de integrá-lo, nem de utilizá-lo com eficácia mais tarde. Conforme declaram Romberg e Carpenter (1986), "a matemática ensinada é vista como um corpo fixo de conhecimento, e é ensinada sob o pressuposto de que os alunos absorvem aquilo que foi abordado." (p. 868). Como tal, nas salas de aula tradicionais, as aulas diárias são visivelmente orientadas para a absorção, pelos alunos, daquilo que outras pessoas fizeram, e não para a investigação, que permita aos alunos terem as suas próprias experiências de produção de conhecimento (Romberg & Carpenter, 1986).

A partir dos resultados da sua investigação, Bispo et al. (2008) concluem que a maioria das tarefas propostas aos alunos assenta em objetivos cognitivos de baixo nível, que implicam, apenas, a reprodução de técnicas e algoritmos básicos pré-estabelecidos; tais tarefas caracterizam-se por: lidarem com informação familiar, fornecerem instruções explícitas, e implicarem raciocínios diretos e interpretações literais, sem qualquer ligação ao mundo real - aspetos que representam os exercícios. Para Ponte (2005), os exercícios têm tido um papel tão marcante nas aulas de matemática, que, muitas vezes, o professor nem se apercebe que existem outros tipos de tarefas. Acerca deste assunto, Mason (1998) nota que os alunos solicitados a fazer exercícios tendem a dedicar muita atenção a cada exercício, e, por norma, não revelam nenhum reconhecimento de conformidade, tipo, ou método geral; isto, apesar de os professores acreditarem que é por fazerem muitos exercícios que os alunos praticam para o domínio, e que integram a técnica numa habilidade para ser usada noutras situações. Séries de exercícios rotineiros, na verdade, atraem a atenção dos alunos para 'o fazer' e para longe 'da construção' do conhecimento (Mason, 1998).

3.6. Práticas tradicionais dos professores na sala de aula: Motivos subjacentes

As práticas de ensino vigentes nas salas de aulas que permanecem dominadas pela visão tradicional parecem indiciar, de uma maneira geral, que os professores "estão a fazer uma escolha didática, designadamente a favor do ensino de uma matemática pronta e não-relacionada, e contra o ensino de um tipo de matemática que o aluno seria capaz de aplicar." (Freudenthal, 1973, p. 156). Segundo Brophy e Good (1986), aquilo que determina um comportamento adequado dos professores ao nível do ensino na sala de aula varia em função dos seus objetivos e intenções. Portanto, quando os professores definem como suficiente que os alunos sejam capazes de reproduzir conhecimento no momento, então as tarefas de rotina realizadas no próprio lugar, assim como os testes, parecem bastar (Brophy & Good, 1986). Ora, no entendimento de Holton et al. (2009), o facto explanado anteriormente pode ser motivado pela ausência, por parte dos professores, de uma visão geral da matemática que encara o processo de construção do conhecimento como significativo. Os autores em questão explanam duas razões possíveis para tal ausência, a saber: ou essa visão da matemática nunca foi apresentada aos professores, ou os próprios professores não foram capazes de compreender a sua real importância. Os mesmos autores acrescentam, ainda, que uma outra razão possível para o disposto pode estar relacionada com a visão geral que os professores têm de que os seus alunos têm baixo desempenho, e, por consequência, os professores têm baixas expectativas em relação a eles. Ora, um exemplo dessa visão geral dos professores emerge na investigação desenvolvida por Leikin e Levav-Waynberg (2007). Conforme apuraram os autores, todos os professores integrados na investigação concordaram que resolver problemas de diferentes formas pode ter um efeito positivo na aprendizagem, mas, apesar disso, muitos professores expressaram dúvidas em relação à eficácia de tarefas que possibilitam diversas estratégias de resolução quando usadas com 'alunos de baixo nível de desempenho', manifestando, dessa maneira, a sua crença de que só os alunos mais capacitados poderão beneficiar dessa abordagem. A propósito dessa temática, Mason e Johnston-Wilder (2006) mencionam que, se os professores considerarem que as tarefas que envolvem pensamento matemático são apropriadas, exclusivamente, para 'os alunos com alto desempenho', então, o que poderá suceder, como resultado disso, é que, aos 'alunos com baixo desempenho', sejam destinadas, somente, séries de tarefas rotineiras e repetitivas, nas quais esses alunos já demonstraram o seu 'baixo desempenho'. Por sua vez, se os professores tratarem os alunos em geral como detentores "dos poderes necessários para pensar matematicamente, e se esses poderes forem convocados, desenvolvidos e aperfeiçoados, os então denominados 'alunos com baixo desempenho' poderão transcender as expectativas." (Mason & Johnston-Wilder, 2006, p. 42).

De acordo com Leikin e Levav-Waynberg (2007), "as práticas dos professores na sala de aula, normalmente, estão fundamentadas na sua compreensão do currículo e do seu papel no processo de aprendizagem." (p. 366). Ora, a maneira como os professores concebem o currículo não é homogénea:

> Para alguns [professores], o currículo é um documento com força de lei, cuja letra é preciso respeitar, sobretudo no que se refere aos conteúdos a lecionar. Para outros, é mais um documento orientador que é preciso saber adaptar às circunstâncias concretas em que se trabalha e, muito especialmente, às características e interesses dos alunos. Para alguns professores um currículo é algo para seguir à risca, enquanto que outros concedem a si mesmos uma considerável margem de autonomia na sua interpretação, adaptação e até recriação. (Oliveira, Ponte, Santos & Brunheira, 1999a, p. 99)

Acerca do disposto, os resultados de Leikin e Levav-Waynberg (2007) atestam que a maior parte dos professores compreende o currículo escolar como as fontes prescritas de conhecimento. E, portanto, aí fundamentam a sua prática pedagógica: num currículo que não oferece lugar ao desafio matemático (Holton et al., 2009), e no qual o papel dos problemas é, sobretudo, 'instrucional', no sentido em que "os problemas são veículos para ensinar ou praticar ideias." (Leikin & Levav-Waynberg, 2007, p. 366). Segundo Oliveira et al. (1999a), um professor que dê especial ênfase aos conteúdos curriculares terá, à partida, menor propensão para valorizar um trabalho do tipo exploratório e investigativo na sala de aula do que outro professor que privilegie o desenvolvimento de diversos tipos de competências matemáticas. Além disso, os professores são afetados pela pressão de 'cumprirem o programa' (Abrantes et al., 1999). Outro fator que influencia as práticas dos professores na sala de aula é a avaliação (Holton et al., 2009). De acordo com os autores, nomeadamente nos anos de escolaridade em que os alunos têm provas de avaliação externa, os professores podem sentir que não devem perder tempo com tarefas que se afastem muito dos tipos de tarefas que podem aparecer nessas provas, e para as quais os alunos devem treinar.

Na perspetiva de Oliveira et al. (1999b), as ideias subjacentes à reforma curricular da matemática, que preconizam uma nova visão da matemática e do que deve ser o ensino da disciplina, ainda apresentam uma expressão reduzida nas práticas pedagógicas, em grande medida devido a dificuldades relacionadas com o saber-fazer dos professores. Conforme explicam os autores, uma coisa é reconhecer a importância de um conjunto de princípios sobre o ensino da matemática; outra coisa, bem diferente e mais complexa, é operacionalizar esses princípios nas práticas da sala de aula, em condições muitas vezes adversas: em salas de aula sobrelotadas, que não dispõem dos materiais necessários, e perante alunos normalmente desmotivados em relação à disciplina e pouco recetivos a experiências inovadoras.

Na investigação de Leikin e Levav-Waynberg (2007), por exemplo, os professores que fizeram parte da mesma foram unânimes no reconhecimento do potencial das tarefas que possibilitam várias estratégias de resolução; contudo, eles mostraram-se incertos em relação aos aspetos práticos da implementação dessas tarefas nas suas salas de aula, considerando ser um 'ambiente inseguro' e mais difícil de ensinar. É evidente que um ensino direto de conteúdos e procedimentos requer menos conhecimento e habilidade por parte do professor do que organizar processos de aprendizagem por descoberta (Holton et al., 2009).

Em conformidade com Stigler e Hiebert (1999), os professores são envolvidos num persistente dilema: embora recebam, frequentemente, conselhos e recomendações para modificarem e melhorarem o ensino, e até tenham consciência de que algumas dessas mudanças provavelmente beneficiariam os alunos, eles não têm oportunidades de aprendizagem necessárias para estudarem as recomendações em questão, para decidirem que mudanças seriam significativas, e para aprenderem a implementá-las. No entendimento dos autores, um exemplo desse dilema tem sido desencadeado pelas recomendações subjacentes à reforma curricular da matemática. As recomendações em voga solicitam aos professores que ensinem de uma forma mais 'aventureira e ambiciosa': ao invés de demonstrarem procedimentos de resolução e depois apresentarem aos alunos séries de exercícios para praticarem, os professores devem propor, aos alunos problemas desafiadores, e incentivá-los a desenvolverem os seus próprios métodos de resolução; no seguimento, os professores devem envolver os alunos em momentos de discussão reflexiva acerca do trabalho matemático que desenvolveram (Stigler & Hiebert, 1999). Segundo os autores, a estratégia de ensino descrita, quando bem concretizada, tem-se revelado bastante eficaz. No entanto, a menos que se saiba, exatamente, o que esperar dos alunos, essa afigura-se uma 'maneira assustadora de ensinar', visto que o sucesso depende de o professor tomar muitas decisões, no próprio momento, acerca de quais as sugestões dos alunos que deve seguir e as que deve ignorar, e, para além disso, o que os alunos aprendem durante a aula parece depender de eles descobrirem métodos de resolução que contribuam para discussões produtivas em plenário (Stigler & Hiebert, 1999). Os professores poderão sentir que perderam o controlo da aula; no entanto, as orientações vão mesmo no sentido de eles 'abraçarem a incerteza', porque é assim que, recomendavelmente, é melhor ensinar (Stigler & Hiebert, 1999). À vista do disposto, os professores, frequentemente, põem em causa a sua capacidade para dirigirem essas aulas em que constantemente surgem novas situações, e nas quais é muito difícil preverem aquilo que os alunos conseguirão fazer no tempo disponível (Abrantes et al., 1999).

É amplamente aceite que os professores em formação não ingressam no programa de formação *tabulae rasae*; eles trazem consigo conhecimentos, crenças e atitudes prévias sobre a matemática e sobre o ensino, que foram desenvolvendo ao longo dos anos enquanto alunos (Brown & Borko, 1992).

No entendimento de Becker e Selter (1996), apesar de existirem algumas exceções, na formação dos professores - inicial e também em serviço -, não lhes são dadas oportunidades suficientes para se prepararem adequadamente para ensinar matemática de um modo consistente com aquilo que tem vindo a ser defendido na reforma do ensino da disciplina. Como resultado, esses professores acabam por ir para a sala de aula ensinar como foram ensinados (Becker & Selter, 1996; Brown & Borko, 1992). Conforme ilustra Ball (1990), derivado do tipo de aprendizagem que os professores tiveram, a sua compreensão substantiva da matemática - limitada por regras e compartimentada - não permite que eles se distanciem das abordagens tradicionais de ensino por tópicos compartimentados, sem conexões. Justamente, Thompson et al. (2007) referem que, se as estruturas conceptuais de um professor incluem factos e procedimentos sem conexões, é provável que as suas práticas de ensino também se foquem em factos e procedimentos desconexos; pelo contrário, se as estruturas conceptuais de um professor compreendem uma rede organizada e interligada de ideias matemáticas e formas de pensamento compatíveis, será pelo menos possível que ele procure desenvolver essas estruturas nos seus alunos. Nesse sentido, as experiências anteriores dos professores revelam-se no seu ceticismo face às mudanças nas práticas tradicionais da sala de aula (Leikin, 2004). Como tal, a formação inicial de professores tem como objetivo principal preparar os futuros professores para ensinarem de maneiras diferentes das que aprenderam enquanto alunos, e a formação contínua visa desenvolver a proficiência dos professores para ensinarem de formas distintas das que aprenderam e, provavelmente, já ensinaram (Leikin, 2004). Sobre isso, Brown e Borko (1992) escrevem que os professores que experimentaram, enquanto alunos, anos de ensino tradicional, podem ser socializados para esta abordagem de ensino e, por essa razão, torna-se muito difícil desenhar experiências, tanto para os professores recém-formados como para os mais experientes, que os ajudem a desenvolver conceções diferentes acerca do ensino da matemática. Nessa linha de pensamento, Stigler e Hiebert (1999) conceptualizam o ensino como uma atividade cultural e, como tal, consideram que o ensino é, à semelhança de todas as atividades desta natureza, aprendido através de uma contínua e prolongada participação informal numa determinada cultura. Ora, no entendimento de Stigler e Hiebert (1999), as crenças e expectativas culturais compartilhadas que sustentam o ensino estão de tal forma integradas nas conceções dos professores que eles não conseguem percecioná-las como mutáveis. De acordo com os autores, quanto mais amplamente compartilhada for uma determinada crença, menos provável é que essa crença seja questionada - e até mesmo percebida - pelos professores. Ora, esse facto contribui para naturalizar os aspetos mais comuns do ensino, a ponto de os professores deixarem de conceber alternativas para as práticas na sala de aula, mesmo que pretendam, de facto, transformar a tradição dominante nas escolas (Stigler & Hiebert, 1999).

3.7. Síntese

Os conceitos *tarefa* e *atividade* não são sinónimos. As *tarefas* - na sua multiplicidade - constituem o objeto para a *atividade* dos alunos, funcionando como veículos para a sua aprendizagem. Incontestavelmente, as *tarefas* são centrais para a aprendizagem dos alunos. No entanto, é igualmente certo que selecionar boas tarefas não é suficiente para garantir, aos alunos, sucesso na aprendizagem. As relações entre *tarefa* e *atividade* não são simples, nem diretas. Selecionar tarefas de qualidade não elimina, nem reduz, o papel essencial do professor na gestão do trabalho desenvolvido em sala de aula.

Os objetivos para o ensino da matemática dependem da conceptualização da própria matemática: num extremo, está um corpo fixo de conhecimento, e, no extremo oposto, está uma versão mais dinâmica da atividade matemática, a qual tem reunido uma vasta aceitação e consenso. Ora, isso chama a atenção para a natureza das tarefas matemáticas a privilegiar na sala de aula. É recomendável que as tarefas sejam desafiadoras e significativas para os alunos; que exijam processos cognitivos de nível superior; que forneçam aos alunos oportunidades para se envolverem ativamente no raciocínio matemático e na resolução de problemas; que favoreçam a comunicação matemática; que possibilitem diversas abordagens de resolução, e, no seguimento, discussões produtivas sobre as estratégias e os raciocínios; e, para além disso, que contribuam para o desenvolvimento de uma conceção autêntica da matemática.

Apesar do disposto, a implementação do tipo de tarefas sugerido enfrenta várias dificuldades, que, uma vez mais, enfatizam o papel fundamental do professor no sentido de garantir que os alunos se mantêm envolvidos em atividade matemática rica e significativa ao longo da implementação das tarefas.

Contrastando com a variedade das tarefas matemáticas, está o papel prevalecente dos exercícios, ligado a uma valorização dos produtos, em detrimento dos processos, na aprendizagem da matemática. As aulas de matemática continuam a reproduzir um modelo comum: explicação - demonstração - prática. Uma panóplia de motivos fundamenta o facto de as práticas pedagógicas dos professores continuarem, na sua maioria, ancoradas na visão tradicional de ensino da matemática. Alguns desses motivos estão relacionados com as conceções dos professores acerca dos alunos. Outros prendem-se com a relação dos professores com o currículo. As provas de avaliação externa veiculam, também, uma mensagem clara sobre a natureza da matemática que se espera ver treinada nas aulas. Um outro motivo tem a ver com a autoconfiança dos professores para porem em prática, na sala de aula, o tipo de trabalho que é recomendado. Ora, perante a indeterminação inerente às novas abordagens de ensino, os professores vão para as salas de aula ensinar tal qual foram ensinados, moldados assim por conhecimentos, crenças e atitudes embutidas num empreendimento cultural complexo, que foram adquirindo ao longo do tempo.

CAPÍTULO IV. ENQUADRAMENTO METODOLÓGICO

4.1. Natureza da metodologia de investigação

Em conformidade com Amado (2014b), num trabalho investigativo, "a função mais imediata e pragmática da formulação do problema é a de explicitar o que se pretende aprender ou entender, e ajudar a estruturar as linhas mestras da estratégia a seguir." (p. 119). No sentido do disposto, a formulação do problema de investigação constitui-se fundamental na definição do caminho a tomar em termos de metodologia de pesquisa, já que as opções metodológicas se farão em função da natureza da realidade em análise e do problema que se pretende investigar (Amado, 2014b). Portanto, o que pode levar a optar por uma determinada metodologia não é um motivo de cariz meramente pragmático (como, por exemplo, a preferência do investigador), mas sim "a ponderação da natureza 'objetiva' ou 'subjetiva' do objeto a investigar (critérios epistemológicos e teóricos), do acervo de dados empíricos a construir e dos propósitos heurísticos" a alcançar com a pesquisa (Amado, 2014b, p. 119). Ora, o presente trabalho de investigação objetiva, por um lado, analisar e compreender aspetos matemáticos inerentes a três elementos que constituem danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza - nomeadamente, a coreografia, a música, e os acessórios (Ribas, 1983) -, e objetiva, por outro lado, construir tarefas matemáticas relacionadas com o estudo etnomatemático realizado sobre as danças folclóricas, tendo em vista o aproveitamento deste elemento do folclore para o ensino da matemática. Assegurada a definição do problema que fundamenta o trabalho de investigação em referência, e considerados os objetivos que norteiam esta pesquisa, determina-se que a metodologia a utilizar é de natureza qualitativa.

Bogdan e Biklen (1994) usam a expressão 'investigação qualitativa' como um termo genérico que agrega uma diversidade de estratégias de investigação que compartilham determinadas características. Na definição dos referidos autores, a 'investigação qualitativa' apresenta cinco características essenciais, a saber: a fonte direta de dados é o ambiente natural e o investigador é o principal instrumento de recolha dos dados, deslocando-se e frequentando, sempre que possível, o local de estudo, pela relevância que o contexto assume na construção de significados; os dados recolhidos - em forma de palavras ou imagens, e não de números - são ricos em pormenores descritivos, e o investigador tenta analisá-los em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto possível, a forma em que estes foram registados ou transcritos; há uma ênfase no processo, em detrimento da ênfase colocada apenas nos produtos e nos resultados; os dados são analisados de forma indutiva, pelo que o investigador não recolhe dados com o objetivo de confirmar ou revogar hipóteses previamente elaboradas, mas sim com o intuito de construir abstrações à medida que os dados particulares que foi recolhendo se vão associando com sentido; por fim, o significado assume uma importância vital na abordagem qualitativa, havendo um enorme interesse do investigador em tentar compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências. Não obstante, Bogdan e Biklen (1994) notam que nem todos os estudos que classificariam como sendo 'qualitativos' patenteiam as cinco características anteriormente enunciadas com a mesma eloquência. Na definição de Denzin e Lincoln (1994), "a investigação qualitativa é 'multimétodo' em foco, envolvendo uma abordagem interpretativa e naturalista do seu objeto de estudo." (p. 2). Quer isso dizer que os investigadores qualitativos estudam os acontecimentos nos seus contextos naturais, procurando dar sentido ou interpretar os fenómenos em termos dos significados que as pessoas atribuem aos mesmos (Denzin & Lincoln, 1994). Privilegiando uma denominação diferente, Erickson (1986) adota o termo 'investigação interpretativa', considerando que essa expressão evita a definição das diversas abordagens abrangidas na expressão como sendo, essencialmente, não quantitativas - conotação que, por sua vez, é veiculada pelo termo 'qualitativo'. Ademais, a expressão 'investigação interpretativa' faz sobressair, enquanto característica-chave da família de abordagens abrangida na expressão, o interesse fundamental da investigação no significado humano conferido pelos 'atores' às 'ações' nas quais se envolveram, e, ainda, na elucidação e exposição desses significados pelo investigador (Erickson, 1986). Parafraseando Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (2005), a "investigação qualitativa interpretativa tem como objetivo a compreensão do significado ou da interpretação dada pelos próprios sujeitos inquiridos, com frequência implicitamente, aos acontecimentos que lhes dizem respeito e aos 'comportamentos' que manifestam (que são definidos em termos de 'ações')." (p. 175). Reforçando a ideia da essencialidade do significado, Amado (2014a) afirma que, independentemente das estratégias e técnicas escolhidas na elaboração de um plano de investigação qualitativa, o investigador permanecerá sempre em torno do universo subjetivo dos participantes que integram a sua pesquisa, numa tentativa de compreender o significado que eles dão às suas ações, as interpretações que fazem de situações em que estão ou estiveram envolvidos, etc.

Uma vez definido o problema de investigação e avaliada a sua natureza 'ontológica' - no caso de uma investigação de natureza qualitativa, tendo apurado tratar-se de uma realidade caracterizada pela "dimensão subjetiva, traduzida em 'significações', 'interpretações', 'representações', 'emoções', etc. -, chegou o momento de desenhar um projeto de investigação que passa pela seleção de uma estratégia ampla e pela escolha de diversas técnicas de recolha e análise de dados" (Amado, 2014b, pp. 119-120). Ora, no caso da presente investigação, a cada um dos seus dois objetivos fundamentais corresponderão estratégias de investigação e técnicas de recolha e análise de dados distintas, seguidamente explicitadas.

4.2. Estudo etnomatemático das danças folclóricas: Opções metodológicas

O primeiro objetivo do presente trabalho de investigação consiste em analisar e compreender aspetos matemáticos inerentes a três elementos - a coreografia, a música, e os acessórios (Ribas, 1983) - que constituem danças folclóricas características de um grupo folclórico de Vila Verde - concelho do distrito de Braga, na região do Norte de Portugal - e de um grupo folclórico de Santiago de Compostela - cidade da Galiza. Ora, ao pretender-se um "estudo descritivo da cultura de uma comunidade, ou de algum dos seus aspetos fundamentais" (Báztan, 1995, p. 3) - no caso, as danças características de dois grupos folclóricos -, a estratégia de investigação a usar neste primeiro objetivo aproxima-se da etnografia.

Segundo Amado e Silva (2014), a etnografia representa "um esquema de pesquisa desenvolvido pelos antropólogos para estudar a cultura e a sociedade. Etimologicamente, a palavra 'etnografia' significa descrição de uma cultura." (p. 145). Em conformidade com os autores citados, os antropólogos costumam empregar o termo etnografia, essencialmente, em dois sentidos: para nomear um conjunto de técnicas utilizadas para recolher dados acerca dos comportamentos, hábitos, valores e crenças de um dado grupo social; e para designar o relato escrito que resulta desse trabalho. A propósito do referido, Báztan (1995) refere que, no estudo etnográfico de uma comunidade, é possível fazer uma distinção entre o 'processo' - realização do trabalho de campo durante um tempo considerável e junto de uma amostra significativa, mas não demasiado numerosa, de indivíduos da comunidade - e o 'produto' ou 'monografia etnográfica', através da qual a cultura da comunidade estudada é reconstruída e estruturada. Tal como descrito por Woods (1987), a etnografia interessa-se pelo que "as pessoas fazem, como se comportam, como interagem. Propõe-se descobrir as suas crenças, valores, perspetivas, motivações, e o modo como tudo isso se desenvolve ou modifica ao longo do tempo ou de uma situação para outra." (p. 18). Nas palavras de Sarmento (2002), "a etnografia visa apreender a vida, tal qual ela é quotidianamente conduzida, simbolizada e interpretada pelos atores sociais nos seus contextos de ação." (p. 17). De uma forma mais sintética, Freebody (2003) escreve: "a etnografia (...) destina-se a descrever e a analisar as práticas e crenças de culturas e comunidades." (p. 75). Ora, a presente investigação, objetivando, por um lado, analisar e descrever, em termos matemáticos, uma prática da cultura de dois grupos folclóricos - as danças -, compreende um estudo com características etnográficas, não se pretendendo, no entanto, realizar uma descrição densa desse elemento da cultura dos grupos folclóricos.

De acordo com Sarmento (2002), a etnografia impõe orientar o olhar investigativo para os símbolos, interpretações, crenças e valores que integram a vertente cultural das dinâmicas de ação que ocorrem em diversos contextos, o que implica a utilização de métodos convergentes com tal orientação.

Na mesma linha de pensamento, Willis e Trondman (2008) postulam que o mais importante na definição do termo etnografia "é que se trata de uma família de métodos que envolvem um contacto social direto e sustentado com agentes, escrevendo ricamente o encontro, respeitando, registando, representando, pelo menos em parte, a irredutibilidade da experiência humana, nos seus próprios termos." (p. 211). Geertz (1989) fala da 'natureza microscópica' da etnografia, evidenciando que os 'achados' do etnógrafo se caracterizam pela sua 'circunstancialidade' e 'especificidade complexa', sendo resultantes de "um trabalho de campo quase obsessivo de peneiramento, a longo prazo, (...) altamente participante" (p. 33). Em sentido confluente, Atkinson, Coffey, Delamont, Lofland e Lofland (2002) referem que as tradições etnográficas "estão fundamentadas num compromisso com a experiência direta e a exploração de um certo ambiente social ou cultural, baseada (ainda que não exclusivamente) na observação participante." (p. 4). A observação e a participação constituem, assim, traços característicos da abordagem etnográfica (Atkinson et al., 2002). Conforme declaram Amado e Silva (2014), o objeto e os objetivos da etnografia impelem, desde logo, à consideração de que "o método etnográfico implica uma aproximação muito grande do investigador em relação ao observado; fala-se, mesmo, na necessidade de 'tomar o papel do outro', ou da necessidade de participar na vida do observado" (p. 150). Em conformidade com o disposto, Coutinho (2011) refere que "a etnografia envolve a observação prolongada e participante do investigador no dia-a-dia do grupo que analisa" (p. 305). Caria (2014) firma a indissociabilidade do método etnográfico em relação à pessoa do investigador/etnógrafo, do qual é diretamente dependente. Conforme explica o autor em causa, o etnógrafo poderá até utilizar meios de objetivação da observação ou do discurso, tais como grelhas e guiões, mas no cerne do método etnográfico está a observação participante: o etnógrafo "estar com as pessoas do grupo vivendo o seu quotidiano durante um tempo prolongado, pelo menos até ao momento [em] que a sua presença deixe de ser um constrangimento para os membros" (p. 46).

No sentido do referido anteriormente, o estudo etnomatemático das danças folclóricas de dois grupos folclóricos incluiu um contacto direto, regular e contínuo com cada um dos grupos folclóricos, designadamente o *Grupo Folclórico de Vila Verde* - grupo do concelho de Vila Verde, distrito de Braga, Portugal - e a *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* - grupo da cidade de Santiago de Compostela, comunidade autónoma da Galiza, Espanha. Uma vez estabelecidos os contactos com os diretores dos grupos folclóricos e obtidos os consentimentos informados dos membros dos grupos folclóricos para participarem na investigação, a imersão em cada um dos contextos aconteceu em tempos assíncronos. No que refere ao *Grupo Folclórico de Vila Verde*, a permanência no contexto do grupo decorreu entre abril de 2018 e junho de 2018. A permanência no contexto da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* teve, sensivelmente, a mesma duração, tendo decorrido entre outubro de 2018 e dezembro desse ano.

Em ambos os grupos folclóricos, a investigadora acompanhou todas as reuniões/ajuntamentos habituais realizados por cada um dos dois grupos folclóricos, que, no *Grupo Folclórico de Vila Verde*, tinham lugar uma vez por semana, e na *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos,* ocorriam duas vezes por semana. Para além disso, a investigadora acompanhou os grupos folclóricos nas suas participações em festivais de dança folclórica, e outros eventos públicos, que tiveram lugar durante a sua permanência no contexto de cada um dos grupos folclóricos, mas também fora desse período. A recolha de dados decorreu, assim, em ambiente natural (Bogdan & Biklen, 1994), tendo a investigadora - o principal instrumento de recolha de dados - passado um tempo considerável com os dois grupos folclóricos, nos seus contextos naturais.

A observação participante constituiu a técnica de recolha de dados, por excelência, no estudo etnomatemático das danças folclóricas dos dois grupos folclóricos referenciados. Conforme declaram Lessard-Hébert et al. (2005), a observação participante é uma técnica de investigação adequada para um "investigador que deseja compreender um meio social que, à partida, lhe é estranho ou exterior e que lhe vai permitir integrar-se progressivamente nas atividades das pessoas que nele vivem." (p. 155). Na observação participante, o investigador tem a possibilidade de compreender o mundo social a partir do interior, pois partilha a condição humana dos indivíduos que observa (Lessard-Hébert et al., 2005). Em conformidade com Amado e Silva (2014), a observação participante tem como princípio fundamental a necessidade de o pesquisador manter sempre algum grau de interação com a situação estudada, pelo que a expressão 'participante' deve entender-se, no mínimo, em dois sentidos: no sentido em que o observador deve participar na vida do observado, o que exige uma permanência considerável no contexto investigado, e no sentido em que os observados devem participar na investigação enquanto informantes. Dessa forma, a participação, isto é, a interação observador-observados, está ao serviço da observação, visando recolher dados aos quais um observador exterior não teria acesso (Lessard-Hébert et al., 2005).

A observação participante "pode ser vista como natural, quando o observador é parte do grupo que investiga, ou artificial, quando o observador se integra no grupo com o propósito de realizar a investigação" (Rebolo, 2021, p. 93). No estudo sobre danças folclóricas, a observação participante do *Grupo Folclórico de Vila Verde* e da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* - caracterizada, nos termos acima dispostos, como 'artificial' - permitiu recolher dois tipos de dados: os dados registados em vídeo/fotografia (auxiliares documentais) e os 'dados registados em notas de trabalho de campo' (Lessard-Hébert et al., 2005). Em particular, para o estudo da coreografia das danças folclóricas, foi utilizado equipamento videográfico, para filmar, sob diferentes perspetivas, os movimentos que os dançarinos realizam, no plano, ao longo de várias danças características de cada um dos grupos folclóricos, a fim de analisar formas e transformações geométricas presentes na coreografia das danças.

Para o estudo dos acessórios, foi utilizado equipamento fotográfico, para fotografar os trajes utilizados pelos dançarinos dos dois grupos folclóricos, com o propósito de analisar padrões geométricos presentes nos trajes, e em certas peças dos trajes em particular. Normalmente, os trajes só eram vestidos pelos dançarinos em atuações públicas - facto que limitou as possibilidades de recolha de dados neste domínio. Para o estudo da música, foi utilizado o mesmo equipamento videográfico usado ao nível da coreografia, que permitiu, em simultâneo, fazer o registo das músicas que acompanhavam as danças folclóricas de cada um dos grupos folclóricos; para além disso, foram recolhidas, sempre que existentes, as partituras das músicas, com o intuito de analisar padrões repetitivos que caracterizam a estrutura dessas músicas. A análise documental constituiu, assim, uma outra técnica de recolha de dados que foi utilizada no estudo das danças folclóricas, enquanto "forma complementar para obtenção da informação necessária no processo de investigação" (Silva, 2021, p. 105). De acordo com Lessard-Hébert et al. (2005), a "análise documental, espécie de análise de conteúdo que incide sobre documentos relativos a um local ou a uma situação, corresponde, do ponto de vista técnico, a uma observação de artefactos escritos" (p. 143). Ora, no caso da presente investigação, a análise documental, para além das partituras das músicas que acompanham as danças folclóricas, incluiu outras fontes, como documentos escritos e audiovisuais - alguns disponibilizados pelos indivíduos dos grupos folclóricos e outros recolhidos pela própria investigadora em bibliotecas e museus/centros etnográficos de cada uma das regiões -, relativos ao folclore coreográfico de cada um dos grupos, e que forneceram dados complementares à investigação. A análise documental teve, dessa maneira, uma função de complementaridade na investigação, por ter sido utilizada para 'triangular' os dados obtidos através das outras técnicas (Lessard-Hébert et al., 2005). Ora, "a triangulação, suscetível de verificar a convergência dos dados" (Amado & Silva, 2014, p. 163), estabelece "uma das estratégias fundamentais para a validação de um estudo" (Amado, 2014c, p. 206).

Uma vez recolhido o material, é altura de iniciar o processo de análise dos dados (Amado, 2014d). Segundo Bogdan e Biklen (1994), a análise de dados qualitativos corresponde ao processo sistemático de procura e de organização dos materiais que foram sendo recolhidos e acumulados pelo investigador ao longo de todo o processo de trabalho de campo, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão sobre esses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que descobriu. Para os autores em referência, a análise de dados pode definir-se, de maneira sucinta, como "a tarefa de interpretar e tornar compreensíveis os materiais recolhidos" (p. 205). A tarefa analítica envolve o trabalho com os dados, a sua organização, a divisão dos mesmos em unidades manipuláveis, a sua síntese, a procura de padrões, a descoberta dos aspetos relevantes e do que deve ser aprendido, e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros - isto é, os produtos finais (Bogdan e Biklen, 1994).

Em sentido convergente, Brandão, Ribeiro e Costa (2021) definem a análise qualitativa de dados como "o processo que procura dar sentido à experiência humana, reduzindo, identificando padrões e dando sentido a grandes quantidades de informação, muitas vezes de fontes diferentes." (p. 129). Ora, em qualquer uma das definições apresentadas, "a ideia de análise sugere algum tipo de transformação" (Gibbs, 2009, p. 16). Quer dizer, o investigador começa com alguma recolha de dados qualitativos - muitas vezes volumosa -, e depois processa-os, por meio de procedimentos analíticos criados para lidar com a grande quantidade de dados criada com a pesquisa qualitativa, até que os dados se transformem numa análise clara, compreensível, criteriosa, confiável e até original (Gibbs, 2009). Ora, não existe uma maneira única ou correta de analisar e apresentar dados qualitativos; o modo como o investigador o faz deve respeitar a questão da adequação ao propósito da investigação (Cohen, Manion & Morrison, 2007).

No estudo das danças folclóricas em descrição, os dados recolhidos para análise corresponderam, na sua maioria, a elementos visuais (fotografias e vídeos). Conforme refere Campos (2011), "pela riqueza e extensão da informação prestada, e pela relativa facilidade de aplicação, a fotografia e o vídeo adquirem uma utilidade crescente" (p. 238). A tendência é, cada vez mais, a de vulgarização do uso do audiovisual, tornando a máquina fotográfica e a câmara de vídeo aparatos tão vulgares com o bloco de notas e o lápis (Campos, 2011). De acordo com Sarmento (2014), a fotografia e o vídeo proporcionam "importante informação visual para análise e interpretação." (p. 210). Collier (1957) refere que o material obtido com fotografias e vídeos é preciso e, por vezes, até enciclopédico. Para o autor, a câmara é um dispositivo automático capaz de compensar, de várias formas, as falhas da impressão humana: o olho mecânico da lente e a memória automática do filme são recursos da câmara que permitem uma reportagem precisa. Não obstante, os materiais registados mecanicamente (fotografias e vídeos) "são revistos na sua totalidade pelo investigador, sendo o entendimento que este tem deles o instrumento-chave de análise." (Bogdan & Biklen, 1994, p. 48). Segundo Sarmento (2014), a metodologia de análise de conteúdo constitui-se adequada para a triagem, a codificação, a organização do material e a interpretação das fotografias, vídeos e outros suportes visuais. No mesmo sentido, Rodrigues, Alzás e Costa (2021) escrevem: "a análise de conteúdo é um dos métodos utilizados para explorar dados visuais" (p. 169). De acordo com Bardin (2011), "a análise de conteúdo aparece como um conjunto de técnicas de análise das comunicações que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens." (p. 44). Esse conjunto de técnicas aplica-se a 'discursos' muito diversificados, sendo que "o fator comum dessas técnicas (...) é uma hermenêutica controlada, baseada na dedução: a inferência." (p. 15). Enquanto esforço de interpretação - 'tarefa paciente de desocultação' - a análise de conteúdo oscila entre o 'polo do rigor da objetividade' e o 'polo da fecundidade da subjetividade' (Bardin, 2011).

Na definição apresentada por Esteves (2006), a análise de conteúdo é a "expressão genérica utilizada para designar um conjunto de técnicas possíveis para tratamento de informação previamente recolhida. Os dados a sujeitar a uma análise de conteúdo podem ser de origem e de natureza diversas" (p. 107). Trata-se, segundo a autora em referenciação, de um trabalho de economia, de redução da informação, de acordo com determinadas regras, ao serviço da compreensão dessa informação (Esteves, 2006). Esteves (2006) identifica a 'categorização' como a operação central da análise de conteúdo, definindo-a como a operação através da qual os dados, depois de terem sido identificados como relevantes, são classificados e reduzidos, de forma a reconfigurar o material ao serviço dos objetivos de investigação. Para Bardin (2011), a 'categorização' é uma operação de classificação de elementos de um conjunto, e as categorias são as classes que reúnem um grupo de elementos. Ora, a partir do momento em que a análise de conteúdo decide codificar o seu material, deve ter um sistema de categorias (Bardin, 2011). As categorias são a estrutura básica da análise de dados qualitativos; os investigadores qualitativos dão sentido aos dados através do estudo das categorias presentes nos dados (Johnson & Christensen, 2014).

Toda a análise de conteúdo é decorrente de uma ou mais perguntas que o investigador formula - caso contrário, seria um exercício desprovido de sentido -, bem como da natureza dos dados com que o investigador lida; por relação a isso, surgem diferentes formas de tratamento do material (Esteves, 2006). Considerando que, na investigação sobre danças folclóricas, os dados recolhidos compreenderam, essencialmente, materiais visuais, não se tornou possível realizar a sua 'transcrição', entendida como o processo de transformação de dados de pesquisa em texto digitado (Johnson & Christensen, 2014). Ainda assim, no estudo da coreografia das danças folclóricas dos dois grupos envolvidos, a transcrição dos dados videográficos envolveu a elaboração de esquemas - gráficos e numéricos -, que retratam os movimentos de troca de posições realizados pelos dançarinos ao longo das danças folclóricas estudadas. Ora, nessa tarefa exaustiva de observação e de representação das movimentações efetuadas pelos dançarinos, os vídeos foram elementos imprescindíveis, ao possibilitarem a visualização da informação recolhida um número ilimitado de vezes, mantendo sempre intacta essa informação. Para além disso, existe uma variedade de opções técnicas oferecidas pelos vídeos - nomeadamente, reproduzir, repetir, colocar em movimento lento e fazer *zoom*, que são bastante úteis, porque permitem que os "movimentos sejam observados com um detalhe que não é acessível sequer aos próprios atores. Por essa razão, o vídeo tem sido apropriadamente comparado a um 'microscópio'." (Knoblauch & Tuma, 2011, p. 417). Ademais, a elaboração dos esquemas para cada dança folclórica analisada apoiou-se na observação comparativa de, pelo menos, dois registos videográficos da mesma dança, captados em diferentes ocasiões, de modo a conferir maior veracidade, fiabilidade e rigor ao tratamento e análise da informação.

Os esquemas que retratam os movimentos de troca de posições realizados pelos dançarinos ao longo de várias danças folclóricas dos dois grupos constituíram a base da análise realizada, a partir dos quais se procedeu à 'codificação' dos dados, e à sua posterior 'categorização' (Johnson & Christensen, 2014). Sendo que a categorização tem como principal objetivo fornecer, por condensação, uma representação simplificada dos dados brutos (Bardin, 2011), esse processo permitiu a identificação de várias formas geométricas nas configurações assumidas pelos dançarinos no decorrer da coreografia das danças folclóricas, bem como a identificação de diversas transformações geométricas na coreografia das danças. O estudo da música serviu-se, essencialmente, das partituras das músicas que acompanham danças folclóricas dos dois grupos, as quais foram disponibilizadas por elementos dos próprios grupos folclóricos. A análise das partituras recolhidas foi baseada no trabalho de Garland e Kahn (1995), segundo os quais a repetição, com variações, de determinadas sequências de notas ao longo de uma peça musical, está relacionada com as quatro isometrias do plano (translação, reflexão axial, reflexão deslizante, e rotação). Com efeito, a análise das partituras recolhidas junto dos dois grupos folclóricos permitiu identificar aplicações dessas quatro isometrias nas músicas que acompanham as danças folclóricas dos grupos. Ora, a identificação de aplicações musicais das isometrias foi reforçada pela representação de algumas das partituras das músicas - ou de trechos das partituras - em gráficos, tendo-se seguido a metodologia sugerida por Carvalho, Bassanezi e Pompeu Junior (2015), e posteriormente utilizada por Misura (2016). Para o estudo dos acessórios, foram utilizadas, essencialmente, as fotografias dos trajes utilizados pelos dançarinos dos dois grupos folclóricos, as quais foram captadas pela própria investigadora em contexto. Tal como refere Rodrigues et al. (2021), os investigadores dispõem, atualmente, de um conjunto de dados em suporte visual, tais como fotografias, que permitem a introdução de novos elementos interpretativos que enriquecem a análise e o entendimento do objeto de estudo. "A imagem informa, elucida, documenta, acrescenta valor e sentido ao fenómeno em si." (Rodrigues et al., 2021, p. 164). Na presente investigação, a produção de fotografias dos trajes serviu como elemento de estudo pela investigadora, tendo sido realizada a 'codificação' e subsequente 'categorização' do material fotográfico. Isso permitiu a identificação de distintos padrões geométricos nos trajes, quando percecionados de forma global, e em certas peças dos trajes em particular, nomeadamente elementos decorativos exibindo simetrias várias, bem como frisos de vários tipos, partindo da classificação de Washburn e Crowe (1988).

Da análise e interpretação dos dados concernentes a três elementos que constituem danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza - nomeadamente, a coreografia, a música, e os acessórios (Ribas, 1983) - decorreu a apresentação dos resultados, sustentados pela integração de materiais visuais, e que compreendem a identificação de aspetos matemáticos presentes nas danças folclóricas estudadas.

4.3. Construção de tarefas matemáticas: Opções metodológicas

O segundo objetivo do presente trabalho de investigação - decorrente do primeiro -, consiste em construir tarefas matemáticas relacionadas com o estudo etnomatemático realizado sobre as danças folclóricas, tendo em vista o aproveitamento deste elemento do folclore para o ensino da matemática. Ora, a identificação de aspetos matemáticos presentes em danças folclóricas dos dois grupos - resultado da concretização do primeiro objetivo da investigação - constitui a base para a consecução do segundo objetivo da investigação, que visa a construção de tarefas matemáticas a implementar em sala de aula. Ao nível deste segundo objetivo, a estratégia de investigação a utilizar é o *design-based research*, visto que se pretende explorar possibilidades para a criação, utilização e pesquisa de novos ambientes de ensino-aprendizagem, em contextos reais, através de ciclos contínuos de desenho, análise e redesenho (Design-Based Research Collective, 2003). De acordo com Collins, Joseph e Bielaczyc (2004), o termo *design research* foi concebido para designar uma forma de realizar pesquisas formativas no sentido de testar a aperfeiçoar projetos educacionais. Essa abordagem de refinamento progressivo do *design* envolve apresentar e aplicar uma primeira versão de um *design* para ver como é que o mesmo funciona; no seguimento disso, o *design* é constantemente revisto com base na experiência (Collins et al., 2004). Nesta investigação, as tarefas matemáticas inicialmente construídas foram sujeitas a um processo de revisão por um painel de especialistas dos domínios científico, pedagógico, e cultural, no seguimento do qual se procedeu à reestruturação das tarefas, e ao que se seguiu a sua implementação em sala de aula. Ao analisar um projeto educacional na prática, tendo em vista o seu refinamento progressivo, é possível desenvolver projetos mais consistentes ao longo do tempo (Collins et al., 2004). Wang e Hannafin (2005) definem o *design-based research* como uma "metodologia sistemática, mas flexível, destinada a melhorar as práticas educacionais através de análise iterativa, desenho, desenvolvimento e implementação, com base na colaboração entre pesquisadores e profissionais em ambientes reais, e levando a princípios e teorias sensíveis ao contexto" (pp. 6-7). O *design-based research* constitui um paradigma emergente para o estudo da aprendizagem em contexto, através do desenho e estudo sistemáticos de estratégias e ferramentas de ensino (Design-Based Research Collective, 2003). De acordo com o coletivo de autores, é importante salientar que o *design-based research* vai além de simplesmente desenhar e testar intervenções particulares, já que as intervenções incorporam afirmações teóricas específicas sobre o ensino e a aprendizagem, e refletem um compromisso com a compreensão das relações entre a teoria, os artefactos desenhados, e a prática. "Ao mesmo tempo, pesquisas sobre intervenções particulares podem contribuir para teorias de ensino-aprendizagem." (Design-Based Research Collective, 2003, p. 6).

4.4. Síntese

A presente investigação utiliza uma metodologia de natureza qualitativa, objetivando, por um lado, analisar e compreender aspetos matemáticos inerentes a três elementos que constituem danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza - nomeadamente, a coreografia, a música, e os acessórios (Ribas, 1983) -, e, por outro, construir tarefas matemáticas relacionadas com o estudo etnomatemático realizado sobre as danças folclóricas, tendo em vista o seu aproveitamento para o ensino da matemática. Considerando o primeiro objetivo da investigação, este envolveu a análise e compreensão de aspetos matemáticos inerentes à coreografia, à música, e aos acessórios de danças folclóricas características de um grupo folclórico do concelho de Vila Verde - *Grupo Folclórico de Vila Verde* - e de um grupo folclórico da cidade de Santiago de Compostela - *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*. Ora, por se pretender o estudo de um elemento fundamental da cultura de dois grupos folclóricos - as danças -, a estratégia de investigação utilizada no primeiro objetivo da investigação aproxima-se da etnografia, não se objetivando realizar uma descrição densa desse elemento da cultura dos grupos. A observação participante constituiu a técnica de recolha de dados, por excelência, no estudo etnomatemático das danças folclóricas, tendo a investigadora estabelecido um contacto direto, regular e contínuo com os grupos, o que permitiu recolher dados registados em vídeo/fotografia, e em notas de trabalho de campo, concernentes à coreografia, à música e aos acessórios de danças características de cada um dos grupos. A análise documental teve uma função de complementaridade na investigação, por ter sido usada para 'triangular' os dados anteriores. Os dados recolhidos - correspondentes, na sua maioria, a elementos visuais (fotografias e vídeos) - foram transcritos, codificados e categorizados tendo em consideração a sua natureza, a partir da análise de conteúdo. Dessa análise, decorreu a apresentação dos resultados, que compreendem a identificação de aspetos matemáticos presentes na coreografia, na música e nos acessórios de danças folclóricas características de cada um dos grupos que integraram a investigação. A identificação desses aspetos matemáticos constituiu a base para a consecução do segundo objetivo da investigação, que envolveu a construção de tarefas matemáticas a implementar em sala de aula. Ora, a estratégia de investigação utilizada neste segundo objetivo da investigação é o *design-based research*, por se pretender explorar novos ambientes de ensino-aprendizagem, em contextos reais, através de ciclos contínuos de desenho, análise e redesenho (Design-Based Research Collective, 2003). Na investigação, após a construção da primeira versão das tarefas matemáticas, estas foram alvo de um processo de revisão por um painel de especialistas dos domínios científico, pedagógico, e cultural, no seguimento do qual se procedeu à reestruturação das tarefas, e ao que se seguiu a sua implementação em sala de aula.

CAPÍTULO V. ANÁLISE ETNOMATEMÁTICA DAS DANÇAS FOLCLÓRICAS

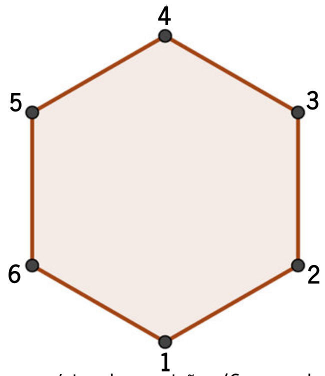
5.1. A coreografia das danças folclóricas

A análise da coreografia de danças folclóricas características do *Grupo Folclórico de Vila Verde* e da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* envolve a elaboração de esquemas que retratam os movimentos de troca de posições realizados pelos dançarinos ao longo das danças folclóricas estudadas. Para além de esquemas gráficos, representativos das sucessivas trocas de posições ocorridas na dança, elaboraram-se esquemas numéricos, que traduzem a sucessão de posições ocupadas pelos dançarinos. Constituíram objeto de análise, ao nível da coreografia, cinco danças folclóricas características dos dois grupos envolvidos na investigação, cujo esquemas gráficos e numéricos serão doravante apresentados, com o intuito de analisar formas e transformações geométricas presentes na coreografia dessas danças.

5.1.1. Chula da Ribeira de Neiva - Grupo Folclórico de Vila Verde

A *chula* é uma dança popular portuguesa muito antiga (Ribas, 1974, 1983). Trata-se de uma dança tipicamente nortenha, bailada do Minho à Beira Alta, que tem um cantador ou cantadeira ao desafio, mas cujo refrão é só instrumental (Ribas, 1974, 1983). A dança *Chula da Ribeira de Neiva* (figura 20) - ou simplesmente *Chula da Ribeira*, como é vulgarmente designada -, que faz parte do repertório de danças do *Grupo Folclórico de Vila Verde*, é uma dança de roda, composta por meias voltas e voltas inteiras, dançada num ritmo vivo, com os pares - um homem e uma mulher - sempre agarrados (Grupo Folclórico de Vila Verde, 2008). É proveniente da região da Ribeira de Neiva, localizada a noroeste do concelho de Vila Verde (GFVV, 2008) - facto que determinou a designação *Chula da Ribeira de Neiva.*

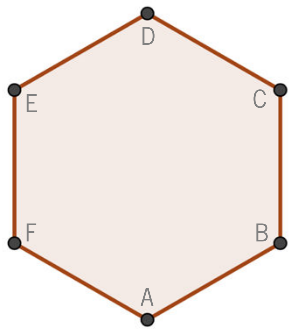
Figura 20. *Chula da Ribeira de Neiva* (GFVV, 2008, p. 41).



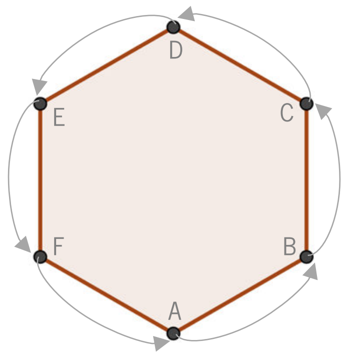
Identificação numérica das posições (6 pares de dançarinos)

a) Esquema gráfico representativo das trocas de posições ocorridas ao longo da dança

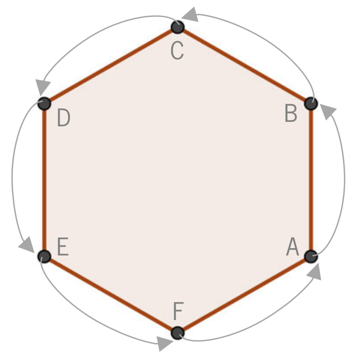
I



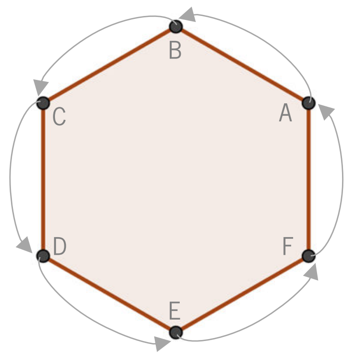
II



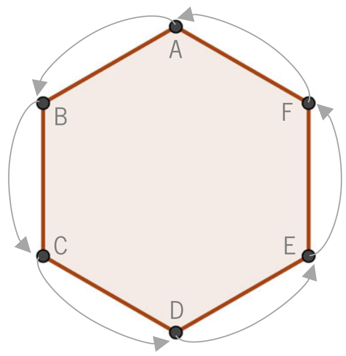
III



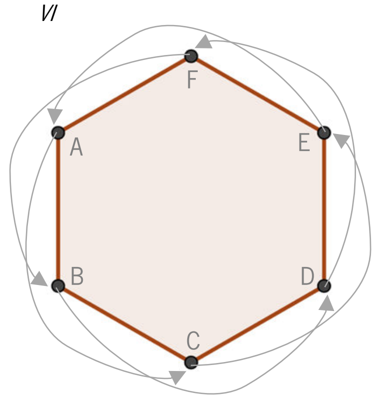
IV



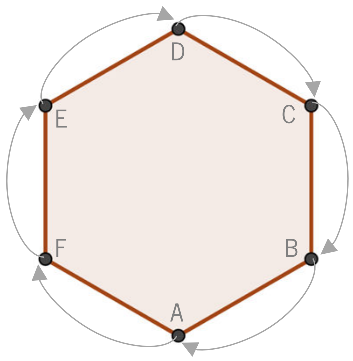
V



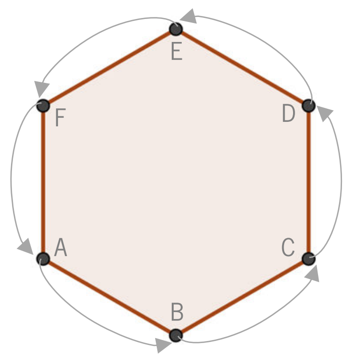
VI



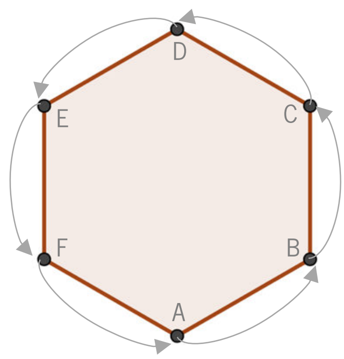
VII



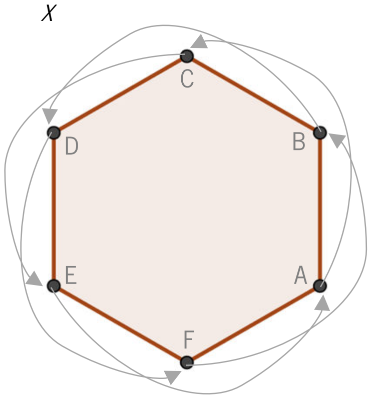
VIII



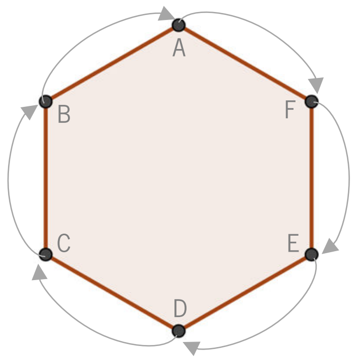
IX



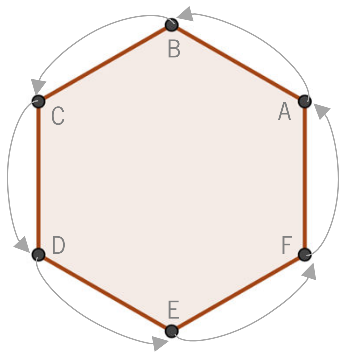
X



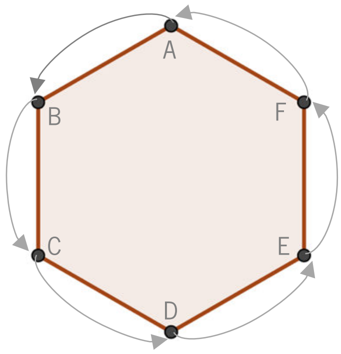
XI



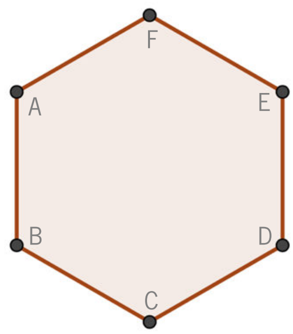
XII



XIII



XIV



b) *Esquema numérico representativo das trocas de posições ocorridas ao longo da dança*

A	B	C	D	E	F
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1
3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3
5	6	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6
6	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1
4	5	6	1	2	3
3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3
5	6	1	2	3	4

c) Formas e transformações geométricas presentes na coreografia

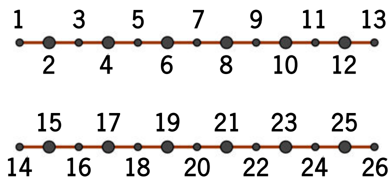
A dança *Chula da Ribeira de Neiva* caracteriza-se por ser uma dança de roda, sendo essa configuração mantida durante a coreografia. A movimentação dos pares - um homem e uma mulher -, sempre juntos, forma, no plano, uma circunferência que é conservada ao longo de toda a coreografia, inclusivamente no decorrer dos movimentos de troca de posições ocorridos entre os pares de dançarinos.

Dispostos em circunferência, os pares, agarrados, iniciam a dança com o 'serrar', realizando movimentos compassados laterais, ora para um lado, ora para o outro, sem saírem das suas posições (GFVV, 2008). A partir das suas posições iniciais, os pares, girando sobre si próprios e mantendo-se sempre agarrados, trocam de posições entre si, efetuando sucessivos movimentos rotacionais, intercalados pela realização do 'movimento de serrar'. Enquanto elemento comum às rotações que caracterizam os movimentos de troca de posições realizados pelos pares ao longo da coreografia, há a evidenciar o centro da rotação - correspondente ao centro da circunferência formada pela movimentação dos pares. No que refere à amplitude do ângulo associado ao movimento de rotação e ao sentido do movimento de rotação existem diferenças a assinalar. Tendo esses elementos como referência, são três as diferentes isometrias que caracterizam os movimentos de troca de posições que ocorrem na coreografia, nomeadamente: rotação de amplitude $60°$ no sentido positivo *(esquemas II a V; VIII a IX;* e *XII* a *XIII)*; rotação de amplitude $120°$ no sentido positivo *(esquemas VI* e *X)*; e, ainda, rotação de amplitude $60°$ no sentido negativo *(esquemas VII* e *XI)*. Note-se que as rotações previamente definidas são referentes à coreografia da dança *Chula da Ribeira de Neiva* executada por seis pares - conforme representado nos esquemas - gráfico e numérico - previamente expostos. Não obstante, a mesma dança pode ser executada por cinco pares, trazendo alterações à amplitude dos ângulos associados aos movimentos de rotação anteriormente descritos. Ainda que o 'desenvolvimento plástico dos movimentos' (Ribas, 1983) seja idêntico, por se tratar da mesma dança, ao ser executada por cinco pares - ao invés de seis -, as três diferentes isometrias que caracterizam os movimentos de troca de posições que ocorrem na coreografia passam a ser diferentes das anteriores, tendo-se: rotação de amplitude $72°$ no sentido positivo, rotação de amplitude $144°$ no sentido positivo e rotação de amplitude $72°$ no sentido negativo. O facto de a dança *Chula da Ribeira de Neiva* ser executada por seis ou por cinco pares determina, também, distintas formas geométricas formadas pelas posições dos pares. No caso de a dança ser executada por seis pares, é possível definir um hexágono, unindo as posições dos seis pares - vértices. Se, por sua vez, a dança for executada por cinco pares, a figura geométrica em questão é o pentágono. Não obstante ao disposto, os movimentos rotacionais realizados pelos pares descrevem circunferências.

5.1.2. Vira Velho de Vila Verde - Grupo Folclórico de Vila Verde

O *vira* é uma dança de tradição minhota, embora se baile, de maneira diferente, também na Nazaré e no Ribatejo, e se baile à maneira do Minho praticamente em todo o país (Ribas, 1974, 1983). Em geral, o *vira* é a dança popular portuguesa mais característica e popularizada (Ribas, 1974, 1983). Existem inúmeras variantes do *vira*, quer em termos musicais, como coreográficos (Ribas, 1974, 1983). A dança *Vira Velho de Vila Verde* (figura 21) - ou simplesmente *Vira de Vila Verde* -, que faz parte do repertório de danças do *Grupo Folclórico de Vila Verde*, é uma dança em linha e de perfil (GFVV, 2008). Tal dança é considerada um dos ex-libris do folclore do concelho de Vila Verde, sendo comum, na região, afirmar-se que 'quem não sabe dançar o *Vira de Vila Verde* não sabe dançar'. Trata-se, por isso, de uma dança de cariz obrigatório na aprendizagem de danças folclóricas características da região (GFVV, 2008). Com origem numa faixa compreendida entre a Galiza e o Baixo Minho, a dança *Vira Velho de Vila Verde* é também considerada *Fandango* - denominado *Minhoto-Galaico* -, pela influência que a Galiza empresta à região de Vila Verde, e que se torna evidente, na coreografia, no momento em que os dançarinos se encontram frente a frente, na posição de 'serrar' (GFVV, 2008). Não obstante, a designação *Fandango Minhoto-Galaico* foi e continua a ser pouco utilizada pelos habitantes do concelho de Vila Verde, que continuam a preferir designar a dança por *Vira Velho de Vila Verde* ou, simplesmente, *Vira de Vila Verde*.

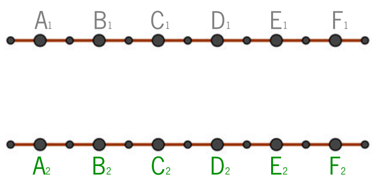
Figura 21. *Vira Velho de Vila Verde* (GFVV, 2008, p. 40).



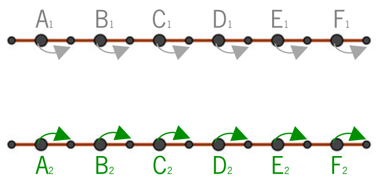
Identificação numérica das posições (12 dançarinos)

a) Esquema gráfico representativo das trocas de posições ocorridas ao longo da dança

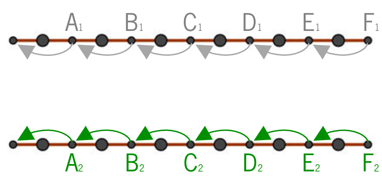
I



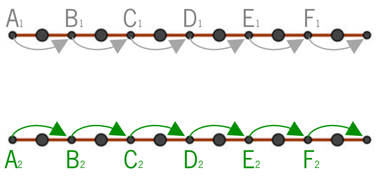
II



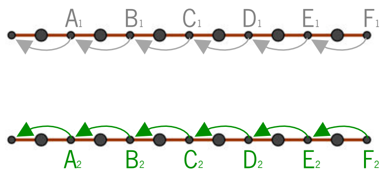
III



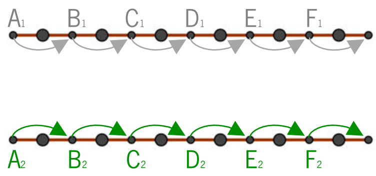
IV



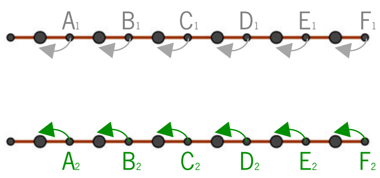
V



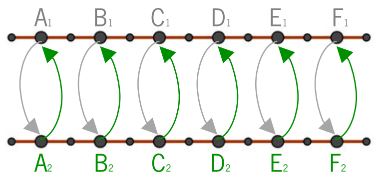
VI



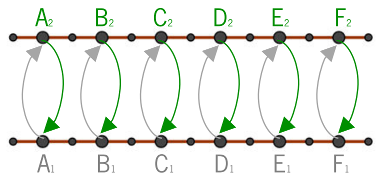
VII



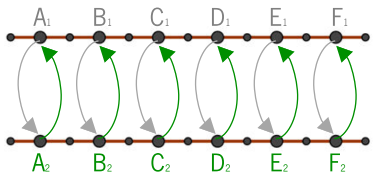
VIII



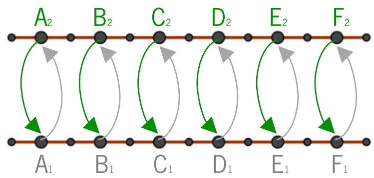
IX



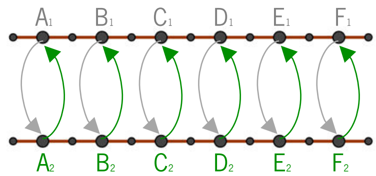
X



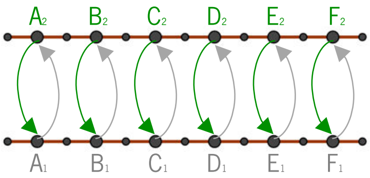
XI



XII



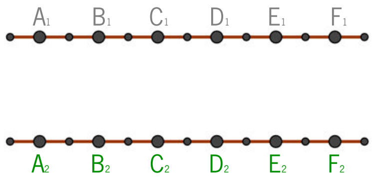
XIII



XIV

Repetição dos diagramas *II* a *XIII*.

XXVI



b) *Esquema numérico representativo das trocas de posições ocorridas ao longo da dança*

A_1	A_2	B_1	B_2	C_1	C_2	D_1	D_2	E_1	E_2	F_1	F_2
2	15	4	17	6	19	8	21	10	23	12	25
3	16	5	18	7	20	9	22	11	24	13	26
1	14	3	16	5	18	7	20	9	22	11	24
3	16	5	18	7	20	9	22	11	24	13	26
1	14	3	16	5	18	7	20	9	22	11	24
3	16	5	18	7	20	9	22	11	24	13	26
2	15	4	17	6	19	8	21	10	23	12	25
15	2	17	4	19	6	21	8	23	10	25	12
2	15	4	17	6	19	8	21	10	23	12	25
15	2	17	4	19	6	21	8	23	10	25	12
2	15	4	17	6	19	8	21	10	23	12	25
15	2	17	4	19	6	21	8	23	10	25	12
2	15	4	17	6	19	8	21	10	23	12	25
3	16	5	18	7	20	9	22	11	24	13	26
1	14	3	16	5	18	7	20	9	22	11	24
3	16	5	18	7	20	9	22	11	24	13	26
1	14	3	16	5	18	7	20	9	22	11	24
3	16	5	18	7	20	9	22	11	24	13	26
2	15	4	17	6	19	8	21	10	23	12	25
15	2	17	4	19	6	21	8	23	10	25	12
2	15	4	17	6	19	8	21	10	23	12	25
15	2	17	4	19	6	21	8	23	10	25	12
2	15	4	17	6	19	8	21	10	23	12	25
15	2	17	4	19	6	21	8	23	10	25	12
2	15	4	17	6	19	8	21	10	23	12	25

c) *Formas e transformações geométricas presentes na coreografia*

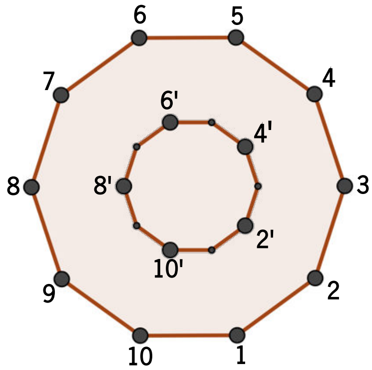
A dança *Vira Velho de Vila Verde* caracteriza-se por ser uma dança em linha e de perfil, sendo essa configuração mantida durante a coreografia. A disposição inicial dos pares - um homem e uma mulher, colocados frente a frente - permite definir, no plano, duas linhas paralelas - uma composta por homens e outra composta por mulheres -, as quais são conservadas praticamente ao longo de toda a coreografia.

Dispostos em duas linhas paralelas, os pares, com homens e mulheres colocados frente a frente, iniciam a dança com o 'serrar', realizando uma série de movimentos compassados, sem saírem dos seus lugares (GFVV, 2008). A sequência de movimentações dos pés dos dançarinos durante o 'serrar' apresenta uma regularidade, facilitando a sua aprendizagem e execução. No desenvolvimento dos passos que caracterizam o 'serrar', os pares, colocados frente a frente, concretizam movimentos simétricos, podendo considerar-se a existência de um eixo de simetria entre as duas linhas paralelas de dançarinos. Seguem-se movimentações laterais dos pares, em três tempos, tanto para um lado, como para o outro, no decorrer das quais os dançarinos de cada par ficam colocados em posição de perfil (GFVV, 2008). Nessas movimentações laterais *(esquemas I* a *VII)*, os dançarinos giram sobre si próprios, em movimento simultâneo, efetuando partes de voltas, ou voltas inteiras, primeiro para um lado, e que posteriormente são desfeitas em sentido inverso. À semelhança do 'serrar', pode considerar-se, na parte da coreografia referente às movimentações laterais dos dançarinos, a existência de um eixo de simetria entre as duas linhas paralelas de dançarinos, já que o homem e a mulher de cada par executam movimentos simétricos. Ora, esse eixo de simetria afigura-se único, não podendo ser considerados eixos de simetria, por exemplo, entre cada um dos pares de dançarinos, uma vez que os movimentos entre pares não são simétricos. Em seguida, os pares efetuam o 'trespasse' *(esquemas VIII* a *XIII)*, que corresponde a uma troca simultânea de posições entre os homens e as mulheres colocados frente a frente nas duas linhas (GFVV, 2008). Em cada 'trespasse', os dançarinos de cada par passam uns pelos outros, invertendo as suas posições nas linhas. No caso, pode considerar-se a reflexão axial como sendo a isometria que transforma as posições ocupadas pelos dançarinos antes e depois da concretização do 'trespasse'. Qualquer que seja o 'trespasse', o eixo que caracteriza a reflexão axial associada à transformação das posições dos dançarinos é o mesmo, estando definido no meio das duas linhas de dançarinos, e sendo paralelo a estas. Durante a coreografia, o 'trespasse' é executado quatro vezes consecutivas, o que faz com que os dançarinos voltem às suas posições iniciais. Ora, isso só acontece porque o 'trespasse' é realizado um número par de vezes, o que faz com que a inversão de posições ocorrida num 'trespasse' seja anulada aquando da concretização do 'trespasse' subsequente. De outro modo, tal não aconteceria.

5.1.3. Malhão de Ir ao Meio - Grupo Folclórico de Vila Verde

O *malhão* é uma dança muito antiga, tipicamente minhota, do Minho Litoral, semelhante à *chula* (Ribas, 1974, 1983). Tal como a *chula*, o *malhão* tem acompanhamento musical de instrumento e canto (Ribas, 1974, 1983). Parafraseando Mello (1901), "o *malhão* é a bandeira coreográfica do Baixo Minho" (p. 83). Conforme esclarece o autor, tal afirmação não implica excluir essa dança de outras províncias, até porque, como bem se sabe, o *malhão* também aparece no Alto Minho e no Douro. Contudo, é no Baixo Minho, que o *malhão* assume uma posição predominante entre as danças da região (Mello, 1901). O Baixo Minho tem, como padrão máximo, o *malhão*, que adquire vários nomes (Mello, 1901). A dança *Malhão de Ir ao Meio* (figura 22), que faz parte do repertório de danças do *Grupo Folclórico de Vila Verde*, é uma dança de roda, à semelhança de todos os malhões dançados pelo grupo folclórico (GFVV, 2008). A coreografia da dança *Malhão de Ir ao Meio*, por força dos movimentos realizados, reflete a importância que os malhadores do meio tinham nas malhadas, residindo aí a origem do nome atribuído ao *malhão* (GFVV, 2008). A propósito do disposto, Ribas (1983) refere que é possível encontrar, no povo português, 'danças de caráter laboral ou de trabalho', como por exemplo o *malhão*, que tem sido relacionado como dança das malhadas e dos malhadores. Ora, tal facto exemplifica a ruralidade do concelho de Vila Verde.

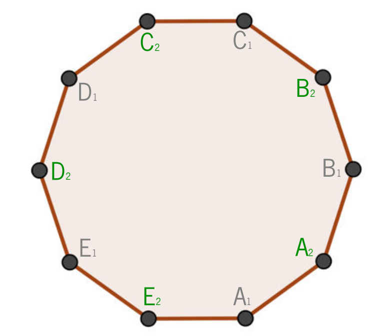
Figura 22. *Malhão de Ir ao Meio* (GFVV, 2008, p. 33).



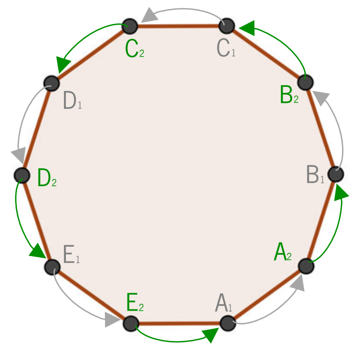
Identificação numérica das posições (10 dançarinos)

a) Esquema gráfico representativo das trocas de posições ocorridas ao longo da dança

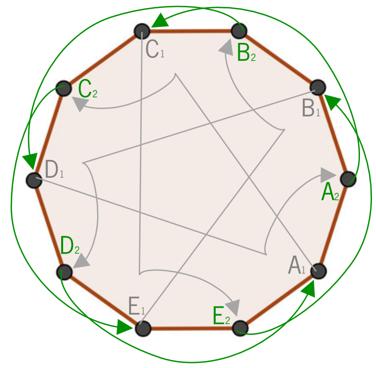
I



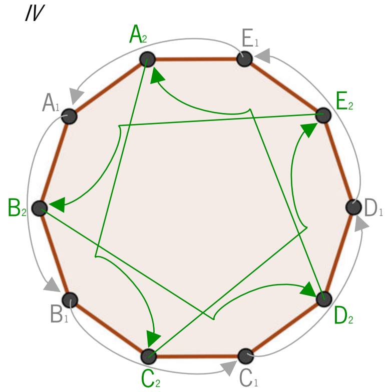
II



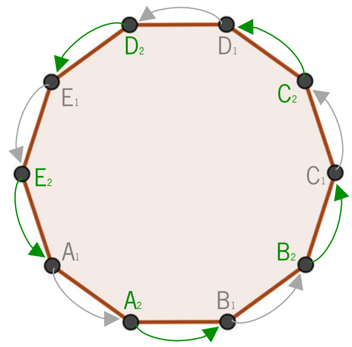
III



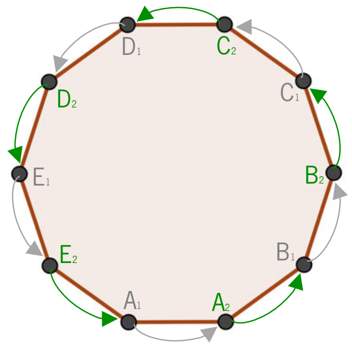
IV



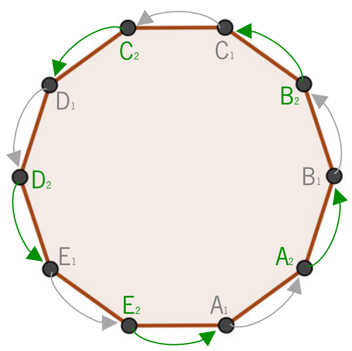
V



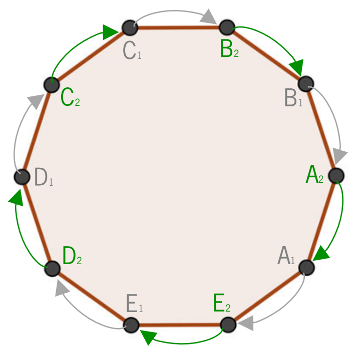
VI



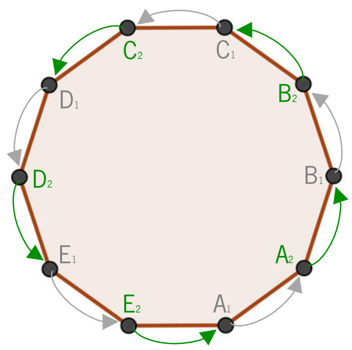
VII



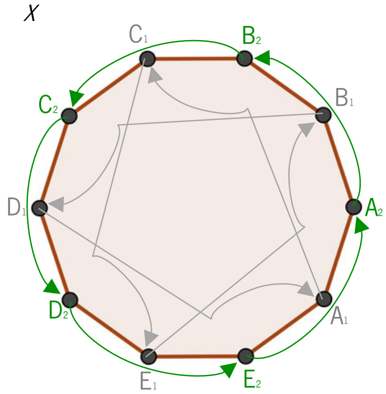
VIII



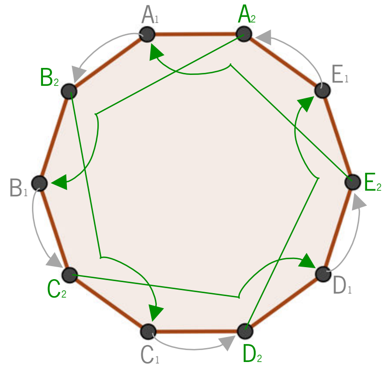
IX



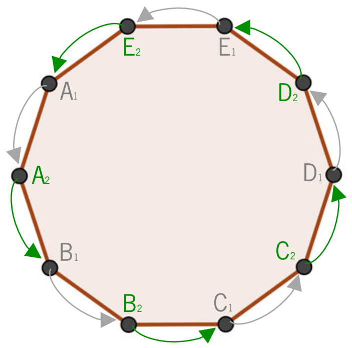
X



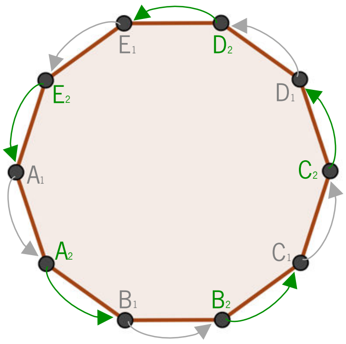
XI



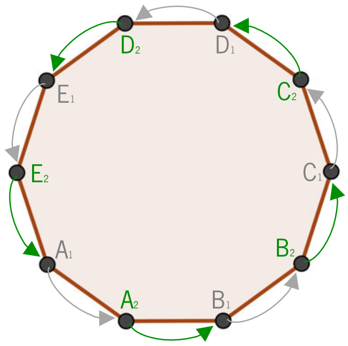
XII



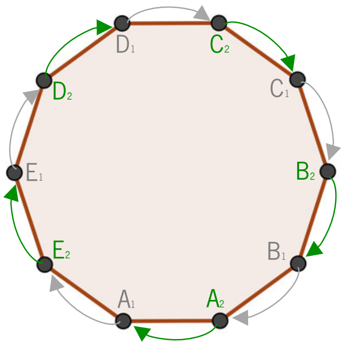
XIII



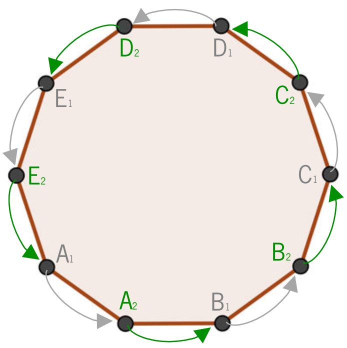
XIV



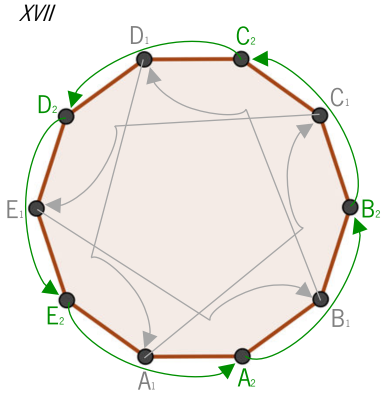
XV



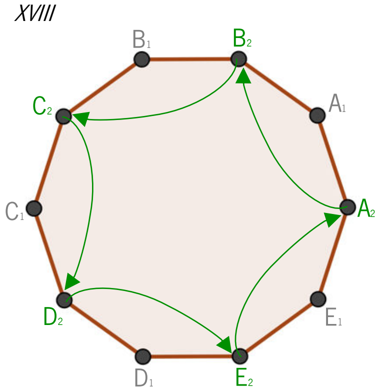
XVI



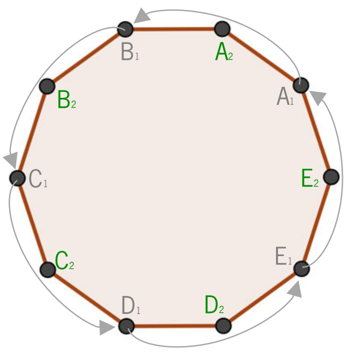
XVII



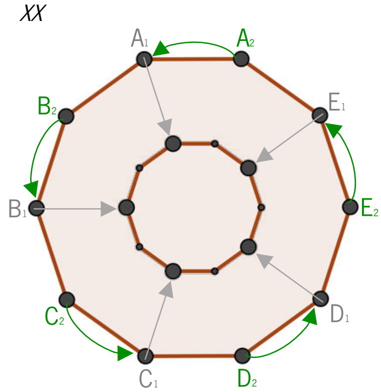
XVIII



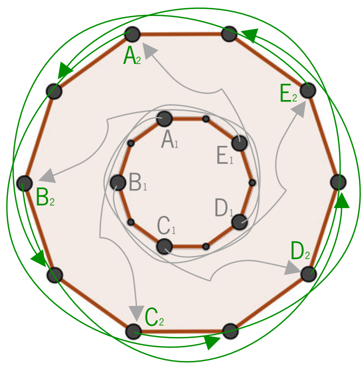
XIX



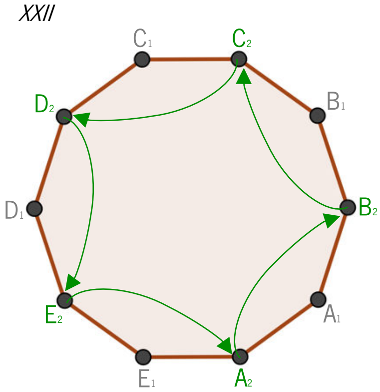
XX



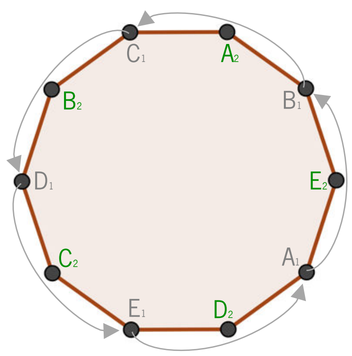
XXI



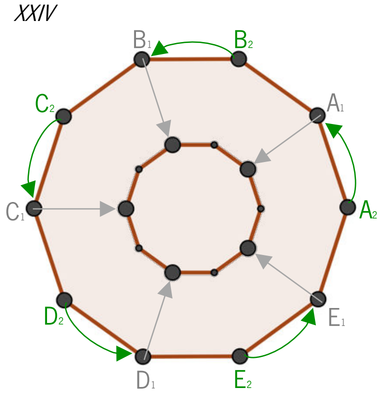
XXII



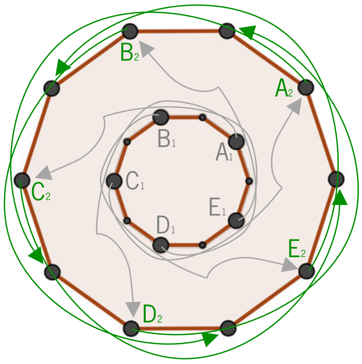
XXIII



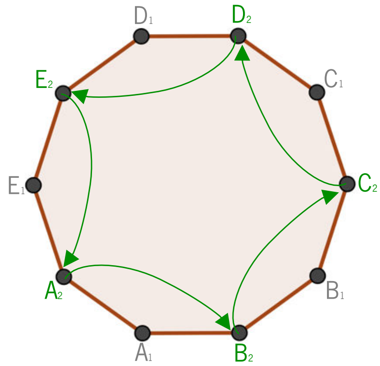
XXIV



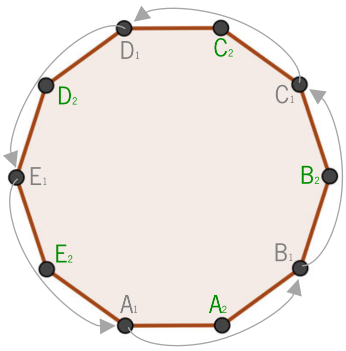
XXV



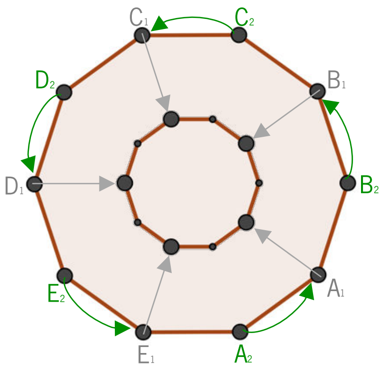
XXVI



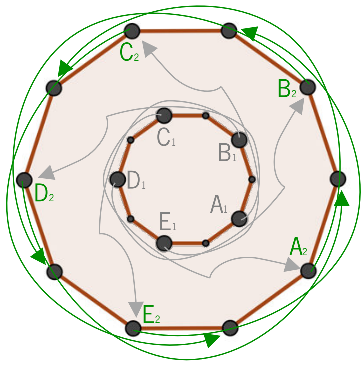
XXVII



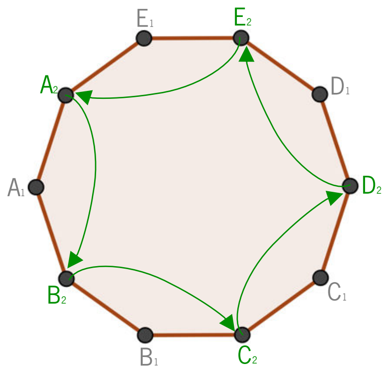
XXVIII



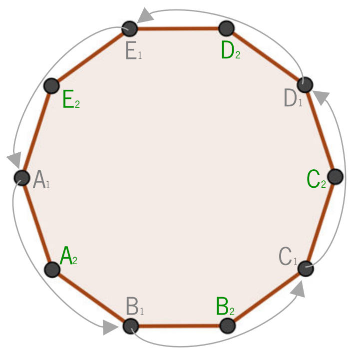
XXIX



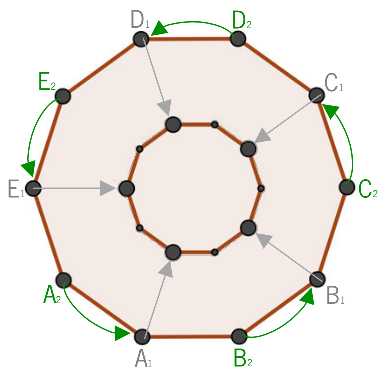
XXX



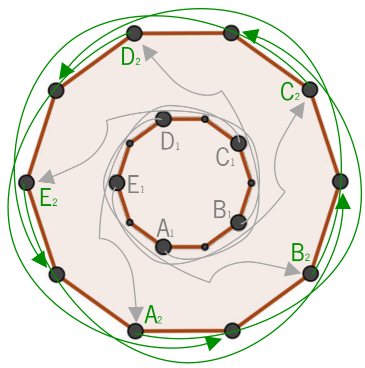
XXXI



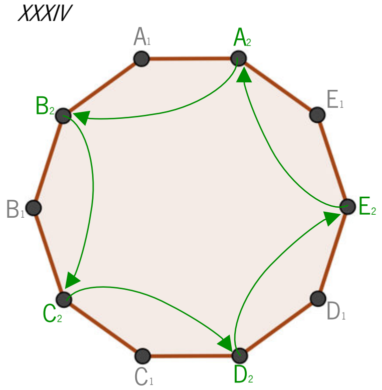
XXXII



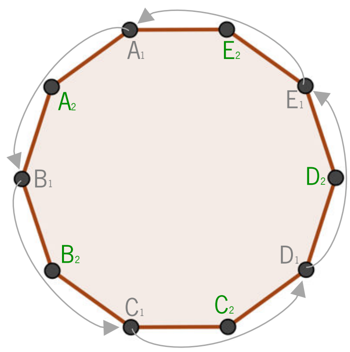
XXXIII



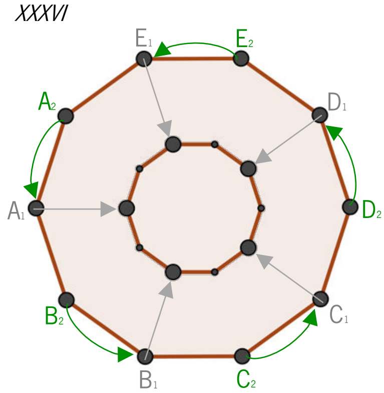
XXXIV



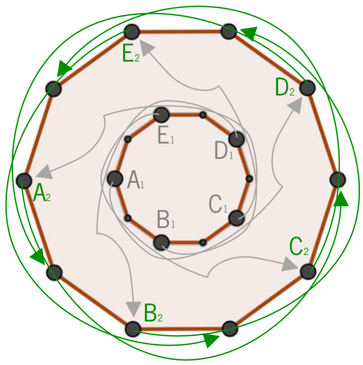
XXXV



XXXVI



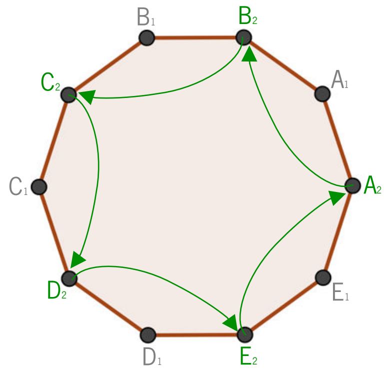
XXXVII



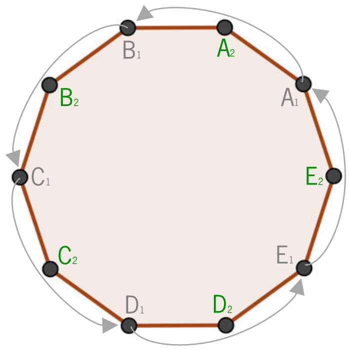
XXXVIII

Repetição dos diagramas *XVIII* a *XXXVII*.

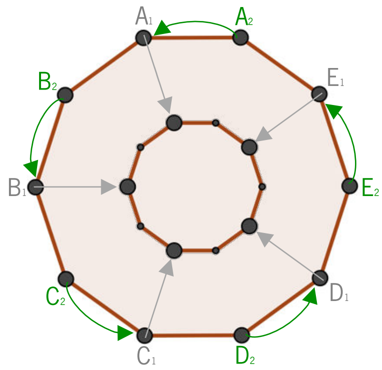
LVIII



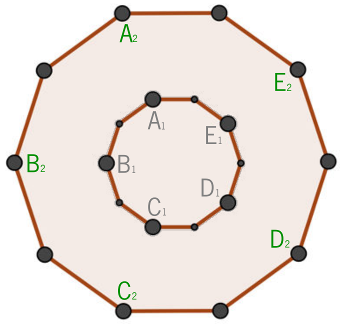
LIX



LX



LXI



b) *Esquema numérico representativo das trocas de posições ocorridas ao longo da dança*

A_1	A_2	B_1	B_2	C_1	C_2	D_1	D_2	E_1	E_2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
7	6	9	8	1	10	3	2	5	4
9	10	1	2	3	4	5	6	7	8
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
6	5	8	7	10	9	2	1	4	3
7	8	9	10	1	2	3	4	5	6
8	9	10	1	2	3	4	5	6	7
9	10	1	2	3	4	5	6	7	8
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	10	1	2	3	4	5	6	7	8

10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	3	6	5	8	7	10	9	2	1
4	5	6	7	8	9	10	1	2	3
6	5	8	7	10	9	2	1	4	3
6'	6	8'	8	10'	10	2'	2	4'	4
2	1	4	3	6	5	8	7	10	9
2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
4	3	6	5	8	7	10	9	2	1
4'	4	6'	6	8'	8	10'	10	2'	2
10	9	2	1	4	3	6	5	8	7
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	4	3	6	5	8	7	10	9
2'	2	4'	4	6'	6	8'	8	10'	10
8	7	10	9	2	1	4	3	6	5
8	9	10	1	2	3	4	5	6	7
10	9	2	1	4	3	6	5	8	7
10'	10	2'	2	4'	4	6'	6	8'	8
6	5	8	7	10	9	2	1	4	3
6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
8	7	10	9	2	1	4	3	6	5
8'	8	10'	10	2'	2	4'	4	6'	6
4	3	6	5	8	7	10	9	2	1
4	5	6	7	8	9	10	1	2	3
6	5	8	7	10	9	2	1	4	3
6'	6	8'	8	10'	10	2'	2	4'	4
2	1	4	3	6	5	8	7	10	9
2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
4	3	6	5	8	7	10	9	2	1
4'	4	6'	6	8'	8	10'	10	2'	2
10	9	2	1	4	3	6	5	8	7
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	4	3	6	5	8	7	10	9
2'	2	4'	4	6'	6	8'	8	10'	10
8	7	10	9	2	1	4	3	6	5
8	9	10	1	2	3	4	5	6	7
10	9	2	1	4	3	6	5	8	7
10'	10	2'	2	4'	4	6'	6	8'	8
6	5	8	7	10	9	2	1	4	3
6	7	8	9	10	1	2	3	4	5

8	7	10	9	2	1	4	3	6	5
8'	8	10'	10	2'	2	4'	4	6'	6
4	3	6	5	8	7	10	9	2	1
4	5	6	7	8	9	10	1	2	3
6	5	8	7	10	9	2	1	4	3
6'	6	8'	8	10'	10	2'	2	4'	4

c) Formas e transformações geométricas presentes na coreografia

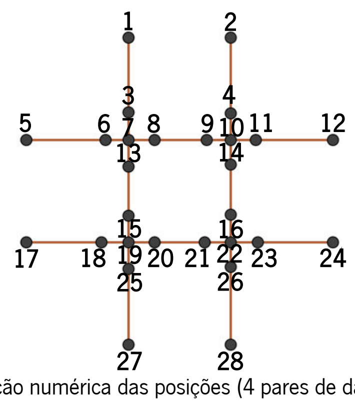
A dança *Malhão de Ir ao Meio* caracteriza-se por ser uma dança de roda, sendo essa configuração alterada, pontualmente, durante a coreografia. A disposição inicial dos pares - um homem e uma mulher, colocados alternadamente - permite definir, no plano, uma circunferência. Ora, em determinadas partes da coreografia, mais precisamente nos momentos em que os homens 'vão ao meio' (GFVV, 2008), a circunferência original dá lugar a duas circunferências concêntricas - uma circunferência menor, que é possível definir a partir das posições e movimentações dos homens 'no meio', e a circunferência original, que é possível definir a partir das posições e movimentações, nesse caso, exclusivamente das mulheres.

Dispostos em circunferência, os pares, com homens e mulheres colocados alternadamente, iniciam a dança com o 'serrar', realizando uma série de movimentos compassados, virando-se ora para o dançarino anterior, ora para o dançarino seguinte, sem saírem das suas posições (GFVV, 2008). Durante o 'serrar', os dançarinos executam movimentos simétricos, podendo considerar-se a existência de diversos eixos de simetria - um entre cada um dos dançarinos - homens e mulheres -, dispostos de forma alternada na circunferência. No momento seguinte da coreografia *(esquemas II* a *XVIII)*, os pares realizam vários movimentos em torno do centro da circunferência formada pelas suas posições iniciais. A determinada altura, os homens, circulando por trás das mulheres *(esquema XIX)*, 'vão ao meio' *(esquema XX)*, e depois ambos prosseguem com movimentos de rotação em torno do centro das circunferências *(esquema XXI)*, verificando-se então o regresso dos homens à circunferência original, e, por fim, a passagem das mulheres pela frente dos homens *(esquema XXII)*. Estes últimos movimentos - 'idas ao meio' - são continuamente repetidos até ao final da coreografia. Ora, considerando a execução da coreografia por dez dançarinos - conforme representado nos esquemas - gráfico e numérico - previamente expostos -, é possível definir, no momento em os homens estão 'no meio', dois pentágonos concêntricos, unindo as posições dos cinco homens (pentágono menor) e as posições das cinco mulheres (pentágono maior), podendo assumir-se uma relação homotética entre esses dois pentágonos.

5.1.4. Vira ao Castelo - Grupo Folclórico de Vila Verde

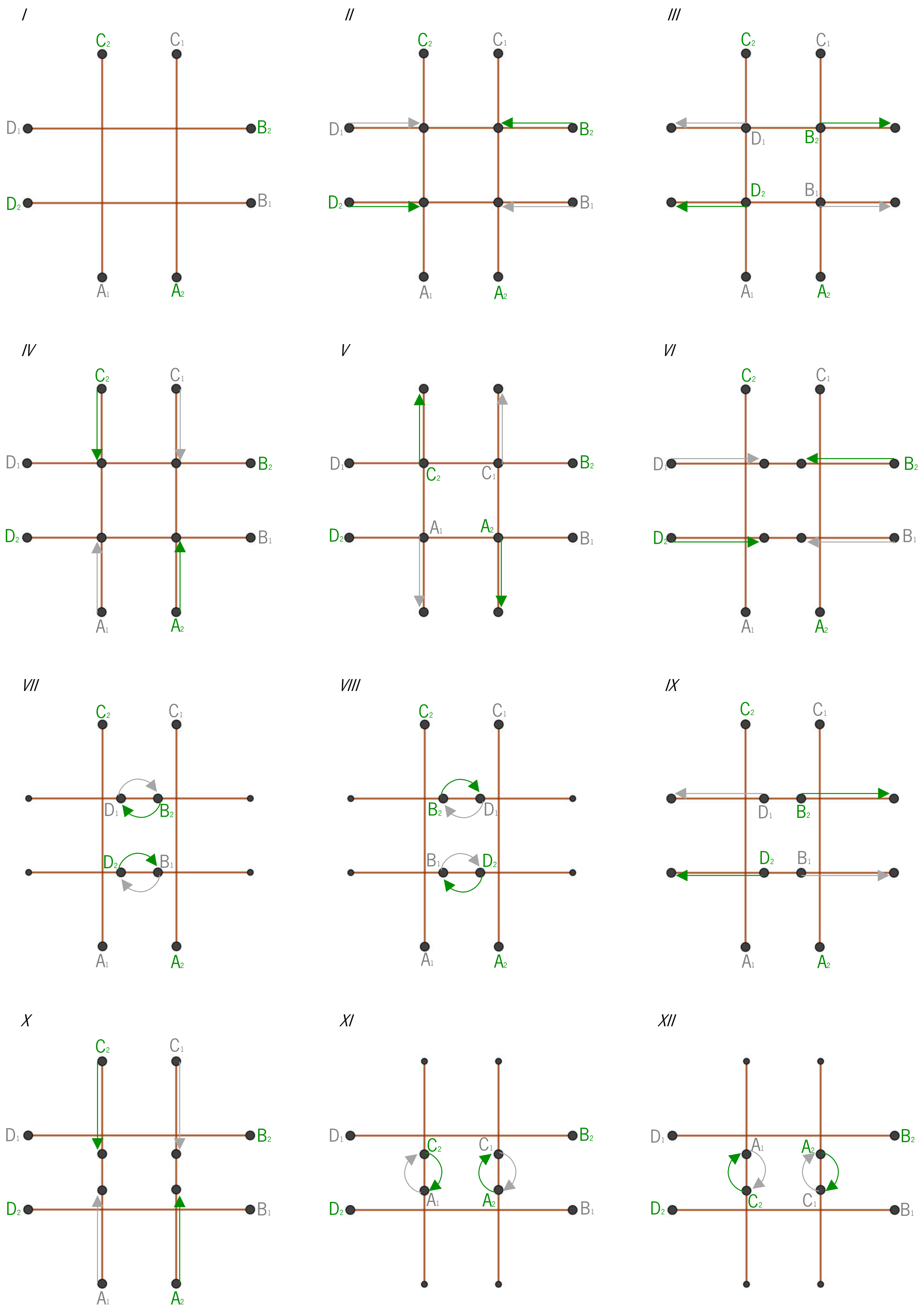
O *vira* constitui, tal como já referido anteriormente, uma dança de tradição minhota, embora se baile também na Nazaré e no Ribatejo, e se baile à maneira do Minho praticamente em todo o país (Ribas, 1974, 1983). Em geral, o *vira* é a dança popular portuguesa mais característica e popularizada (Ribas, 1974, 1983). Existem inúmeras variantes do *vira*, quer em termos musicais, como coreográficos (Ribas, 1974, 1983). Tal variedade é visível no folclore coreográfico do *Grupo Folclórico de Vila Verde*, cujo repertório de danças abrange mais do que uma variante do *vira*. A dança *Vira ao Castelo* (figura 23), que, a par da dança *Vira Velho de Vila Verde* - já analisada anteriormente -, faz parte do repertório de danças do *Grupo Folclórico de Vila Verde*, é um *vira* 'trespassado', dançado por um ou dois grupos de quatro pares de dançarinos, colocados em 'forma de cruz' (GFVV, 2008). Trata-se de uma dança de movimentos variados, mas suaves, cuja origem se situa na freguesia da Lage - pertencente ao concelho de Vila Verde - e que se pensa que tenha alguma ligação ao Castelo dos Mouros, que parece ter existido, outrora, na freguesia de Barbudo - igualmente pertencente ao concelho de Vila Verde. Segundo descrição histórica da dança *Vira ao Castelo*, esta seria dançada no caminho que levava a freguesia da Lage ao já referido Castelo dos Mouros, que se acredita ter existido na vizinha freguesia de Barbudo (GFVV, 2008).

Figura 23. *Vira ao Castelo* (GFVV, 2008, p. 39).

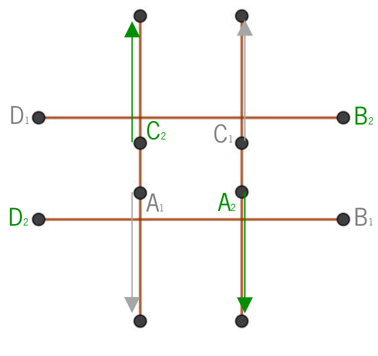


Identificação numérica das posições (4 pares de dançarinos)

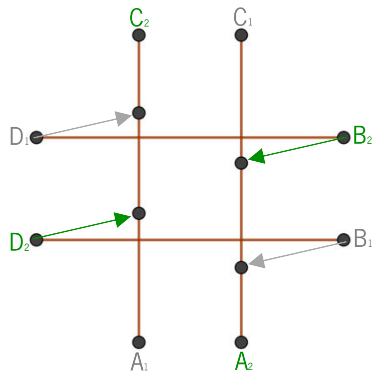
a) *Esquema gráfico representativo das trocas de posições ocorridas ao longo da dança*



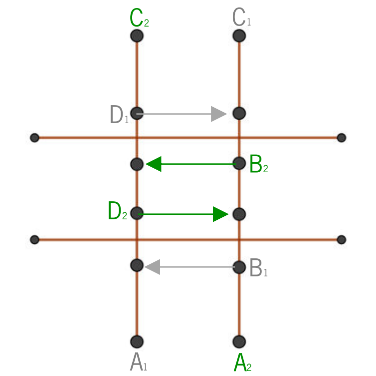
XIII



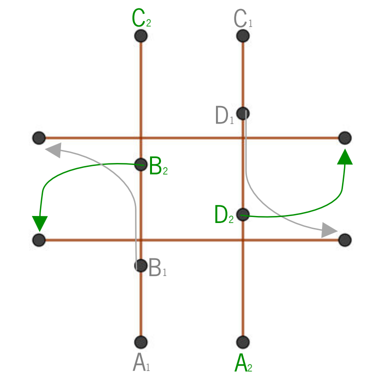
XIV



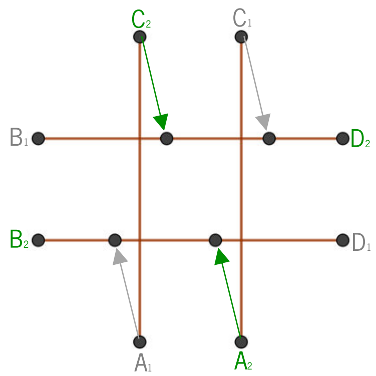
XV



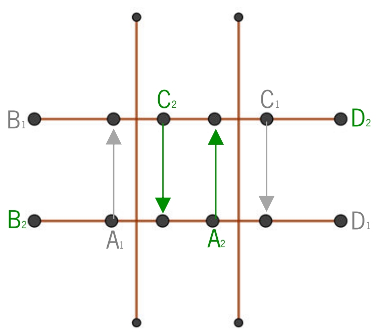
XVI



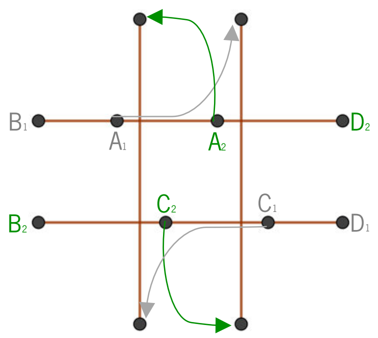
XVII



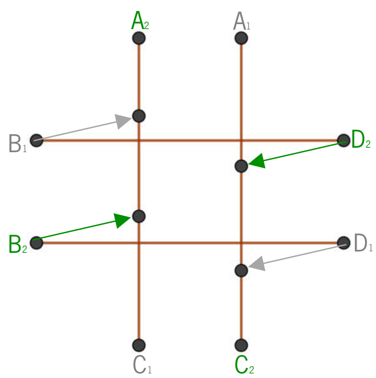
XVIII



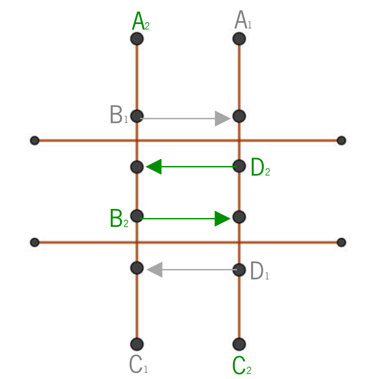
XIX



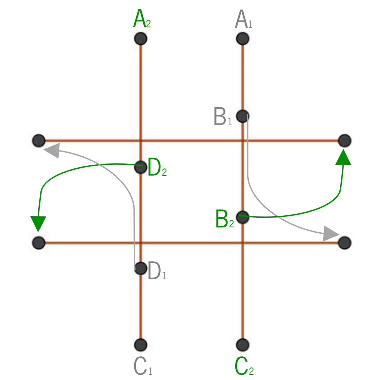
XX



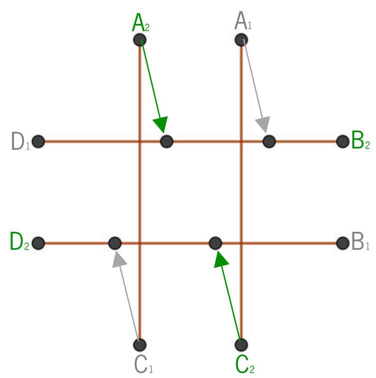
XXI



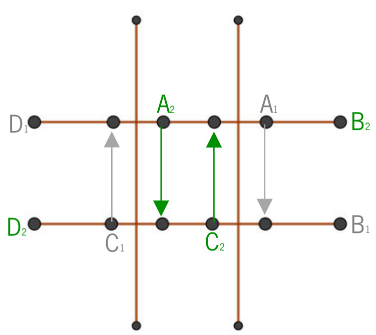
XXII



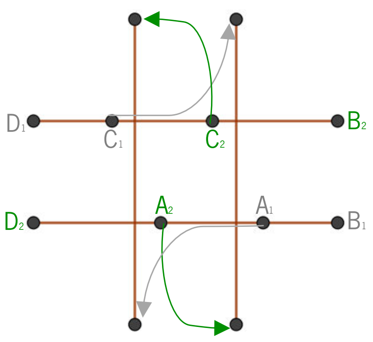
XXIII



XXIV



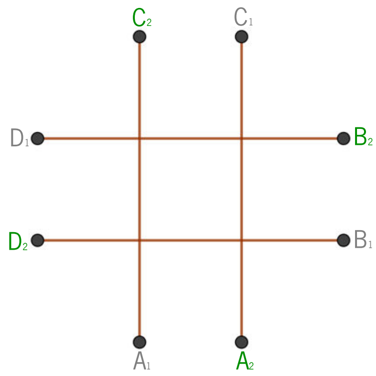
XXV



XXVI

Repetição dos diagramas *II* a *XXV*.

L



b) *Esquema numérico representativo das trocas de posições ocorridas ao longo da dança*

A_1	A_2	B_1	B_2	C_1	C_2	D_1	D_2
27	28	24	12	2	1	5	17
27	28	22	10	2	1	7	19
27	28	24	12	2	1	5	17
19	22	24	12	10	7	5	17
27	28	24	12	2	1	5	17
27	28	21	9	2	1	8	20
27	28	20	8	2	1	9	21
27	28	21	9	2	1	8	20
27	28	24	12	2	1	5	17
15	16	24	12	14	13	5	17
13	14	24	12	16	15	5	17
15	16	24	12	14	13	5	17
27	28	24	12	2	1	5	17
27	28	26	14	2	1	3	15
27	28	25	13	2	1	4	16
27	28	5	17	2	1	24	12
18	21	5	17	11	8	24	12
6	9	5	17	23	20	24	12
2	1	5	17	27	28	24	12
2	1	3	15	27	28	26	14
2	1	4	16	27	28	25	13
2	1	24	12	27	28	5	17
11	8	24	12	18	21	5	17
23	20	24	12	6	9	5	17
27	28	24	12	2	1	5	17

27	28	22	10	2	1	7	19
27	28	24	12	2	1	5	17
19	22	24	12	10	7	5	17
27	28	24	12	2	1	5	17
27	28	21	9	2	1	8	20
27	28	20	8	2	1	9	21
27	28	21	9	2	1	8	20
27	28	24	12	2	1	5	17
15	16	24	12	14	13	5	17
13	14	24	12	16	15	5	17
15	16	24	12	14	13	5	17
27	28	24	12	2	1	5	17
27	28	26	14	2	1	3	15
27	28	25	13	2	1	4	16
27	28	5	17	2	1	24	12
18	21	5	17	11	8	24	12
6	9	5	17	23	20	24	12
2	1	5	17	27	28	24	12
2	1	3	15	27	28	26	14
2	1	4	16	27	28	25	13
2	1	24	12	27	28	5	17
11	8	24	12	18	21	5	17
23	20	24	12	6	9	5	17
27	28	24	12	2	1	5	17

c) Formas e transformações geométricas presentes na coreografia

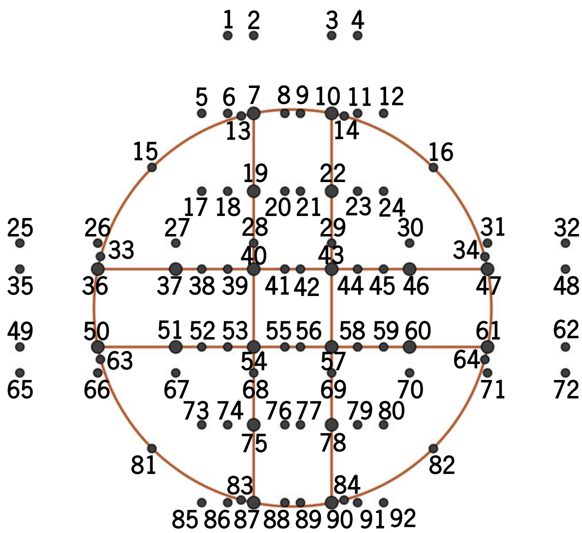
A dança *Vira Velho de Vila Verde* caracteriza-se por ser uma dança com uma configuração marcadamente distinta, na qual um ou dois grupos de quatro pares de dançarinos surgem dispostos em 'forma de cruz' (GFVV, 2008). Tal configuração pode ser visualizada se imaginadas duas linhas perpendiculares entre si, que unem, em cada grupo de quatro pares de dançarinos, os dois pares que se encontram frente a frente. Durante a coreografia, a disposição dos pares em 'forma de cruz' torna-se, em certas ocasiões, mais explícita, nomeadamente quando os pares se movimentam na direção dos eixos perpendiculares definidos. Ou seja, quando dois dos pares colocados frente a frente se deslocam na direção de um eixo, aproximando-se e depois recuando até ao ponto de partida, dando lugar à movimentação dos outros dois pares que se encontram frente a frente, na direção do eixo perpendicular.

Dispostos em ‘forma de cruz’, quatro (ou oito) pares de dançarinos iniciam a dança com o ‘serrar’ (GFVV, 2008). O movimento de ‘serrar’ é executado por todos os dançarinos em simultâneo, com o homem e a mulher de cada par voltados um para o outro. No momento seguinte da coreografia, tem início a movimentação, dois a dois, dos pares colocados frente a frente em cada grupo de quatro pares. Em primeiro lugar *(esquemas II* e *III)*, avançam, simultaneamente, dois dos pares dispostos frente a frente, recuando, em seguida, até ao ponto de partida. Depois, avançam e recuam os segundos pares *(esquemas IV* e *V)*. Os movimentos de avanço e recuo realizados, alternadamente, pelos primeiros e pelos segundos pares correspondem a movimentos retilíneos, realizados em direções perpendiculares. Tais movimentos podem ser descritos por translações. No caso dos primeiros pares, as translações que descrevem os movimentos de avanço e recuo realizados por cada par estão associadas a dois vetores que têm comprimento e direção iguais, mas sentidos opostos. O mesmo se verifica em relação aos movimentos de avanço e recuo realizados pelos segundos pares. Contudo, os dois vetores simétricos associados aos movimentos de translação realizados pelos primeiros pares e os dois vetores simétricos associados aos movimentos de translação realizados pelos segundos pares apresentam diferentes direções, tratando-se de vetores não colineares. Como tal, são necessários quatro vetores para representar os movimentos de avanço e recuo realizados pelos quatro pares. Na parte da coreografia que se segue *(esquemas VI* a *IX)*, partem os mesmos dois pares que iniciaram os movimentos anteriores para, desta vez, avançarem, rodopiarem na zona central, e depois recuarem. Logo que os primeiros pares atingem o ponto de partida, os outros dois pares repetem esses movimentos *(esquemas X* a *XII)*. Os movimentos de avanço e recuo realizados nesta parte da coreografia são iguais aos anteriores; contudo, a sua execução, desta vez, é intercalada por um movimento de rodopio. Ora, o tipo isometria que permite descrever o movimento de rodopio é a rotação. Enquanto elementos comuns às rotações que caracterizam os movimentos de rodopio realizados pelos quatro pares, há a evidenciar a amplitude do ângulo associado ao movimento de rotação ($360°$) e o sentido negativo do movimento. Os centros de rotação diferem. Na última parte da coreografia *(esquemas XIV* a *XVI)*, os mesmos dois pares que iniciaram os movimentos nas outras partes da coreografia, avançam para, desta vez, cruzarem uns pelos outros, dando-se o ‘trespasse’, isto é, a passagem dos pares de um lado para o outro (GFVV, 2008). Seguidamente, o ‘trespasse’ é executado pelos segundos pares *(esquemas XVII* a *XIX)*. No seguimento, dá-se a repetição do movimento de ‘trespasse’, quer pelos primeiros pares *(esquemas XX a XXII)*, quer pelos segundos pares *(esquemas XXIII a XXV)*, de modo que os pares voltem às suas posições iniciais. Em contraste com os restantes movimentos da dança - de avanço, de recuo e de rodopio -, a descrição do movimento de ‘trespasse’ requer a composição de dois tipos de isometrias - a translação e a rotação.

5.1.5. Maneo de Verdillo - Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos

O *maneo* é uma variante da *jota* - dança com muita expressão na Galiza -, sendo característico das zonas de *Bergantiños* e de *Ordes* (Rodríguez, 2012), localizadas na província da Corunha. A principal particularidade que distingue o *maneo* das outras *jotas* é o facto de, nos *'puntos'* - uma das duas partes que compõem a dança -, serem executados uns característicos "arrastados", da frente para trás (Rodríguez, 2012). No *maneo*, existe somente um guia, que introduz a combinação de passos a executar, e a dança é realizada em duas filas - uma composta por homens e outra por mulheres (Rodríguez, 2012). Esta dança é acompanhada unicamente por pandeiretas, existindo duas partes bem diferenciadas na dança - os *'puntos'* e as *'vueltas'* -, que se sucedem várias vezes ao longo da coreografia, e cujas transições são marcadas por "golpes" consecutivos nas pandeiretas (Rodríguez, 2012). A dança *Maneo de Verdillo* (figura 24), que integra o repertório de danças da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*, é típica do município de *Carballo* - capital da *Comarca de Bergantiños,* situada na província da Corunha.

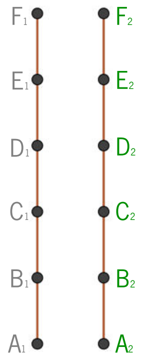
Figura 24. *Maneo de Verdillo* (GFVV, 2008).



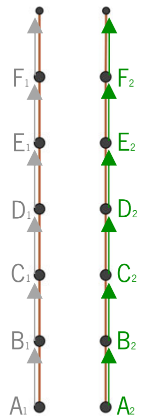
Identificação numérica das posições (12 dançarinos)

a) Esquema gráfico representativo das trocas de posições ocorridas ao longo da dança

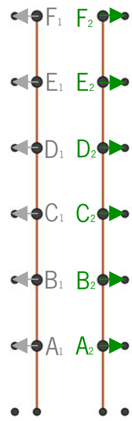
I



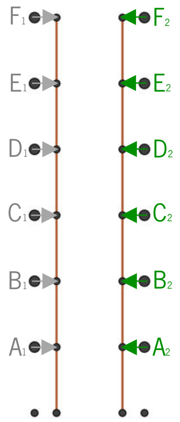
II



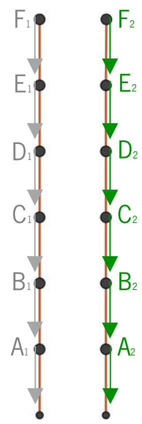
III



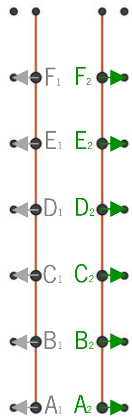
IV



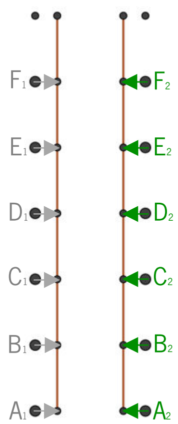
V



VI



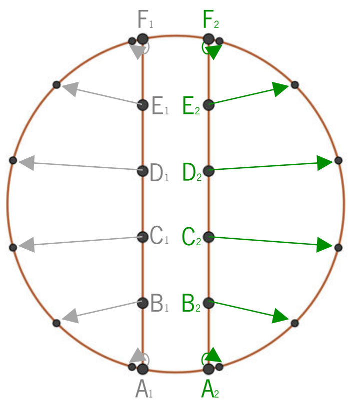
VII



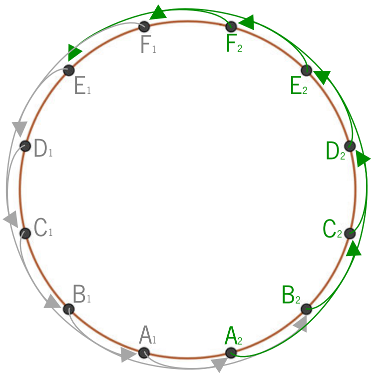
VIII

Dupla repetição dos diagramas *II* a *VII*.

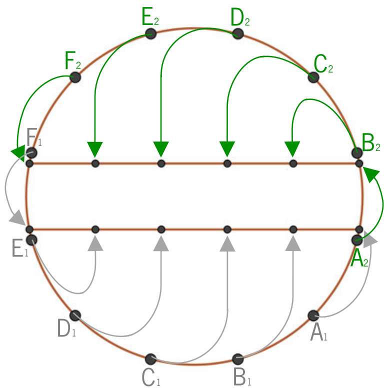
XX



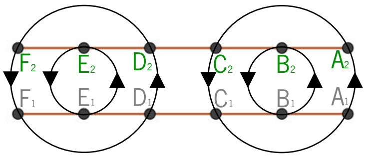
XXI



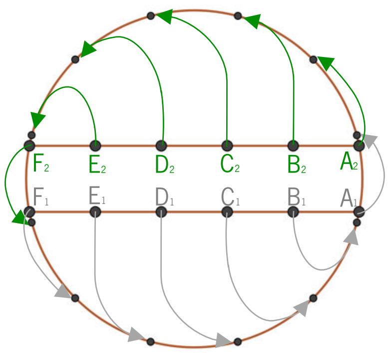
XXII



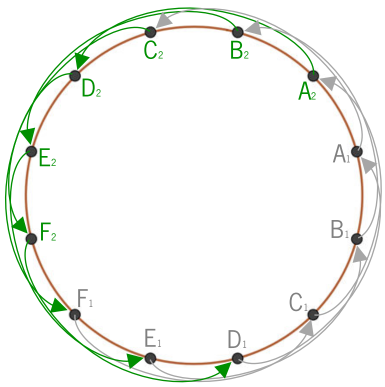
XXIII



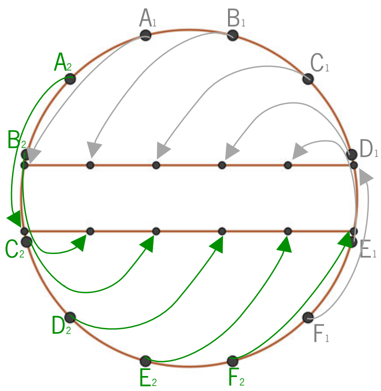
XXIV



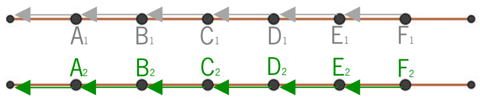
XXV



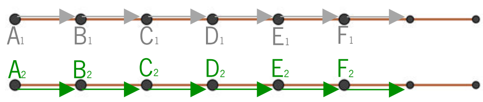
XXVI



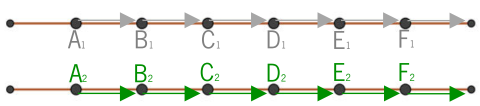
XXVII



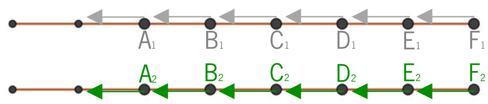
XXVIII



XXIX



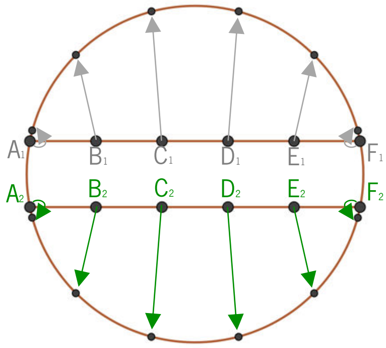
XXX



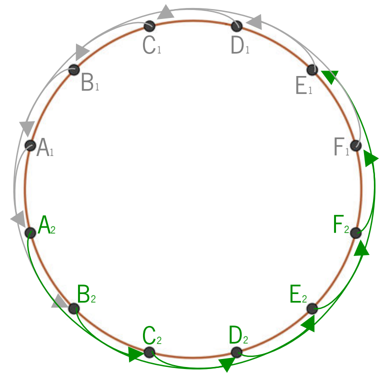
XXXI

Repetição dos diagramas *XXVII* a *XXX*.

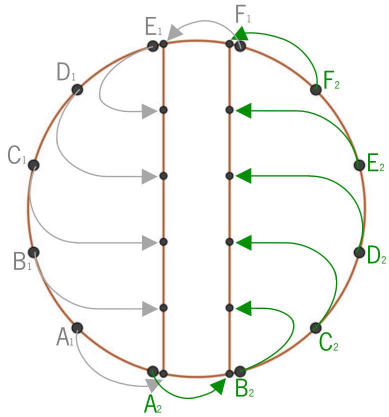
XXXV



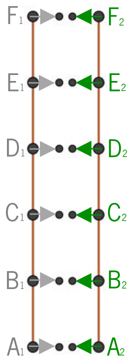
XXXVI



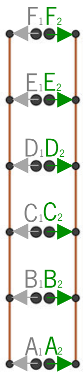
XXXVII



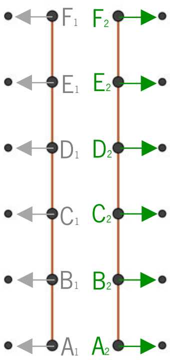
XXXVIII



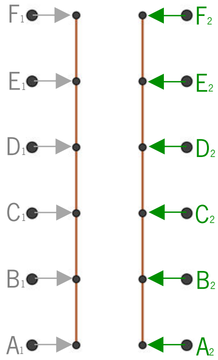
XXXIX



XL



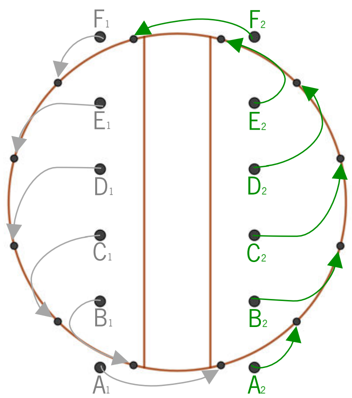
XLI



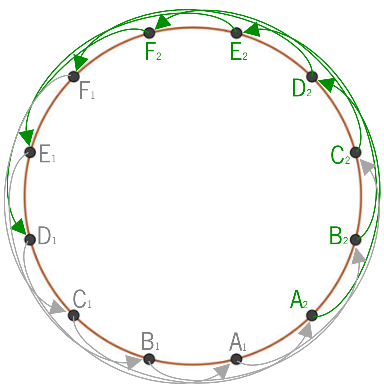
XLII

Repetição dos diagramas *XXXVIII* a *XL*.

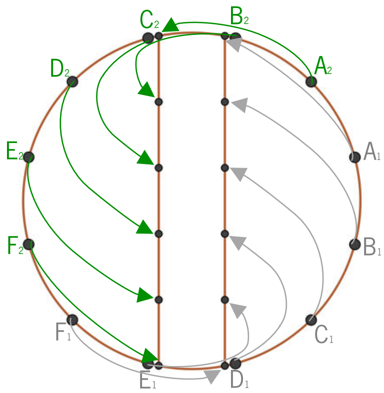
XLV



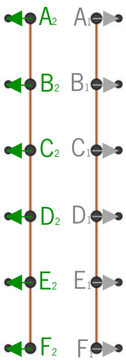
XLVI



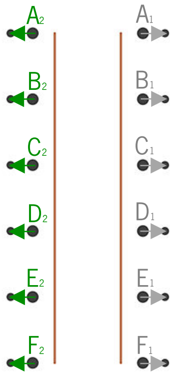
XLVII



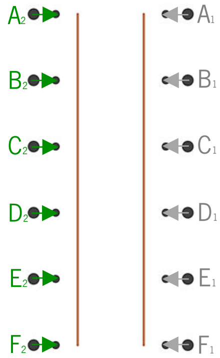
XLVIII



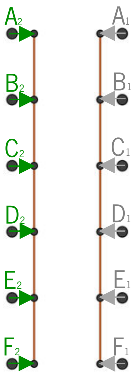
XLIX



L



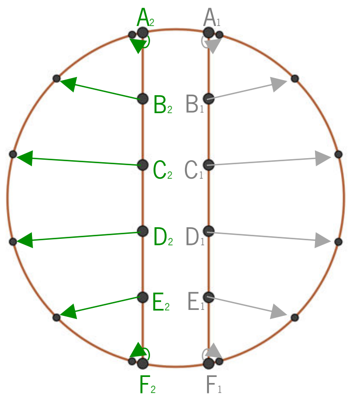
LI



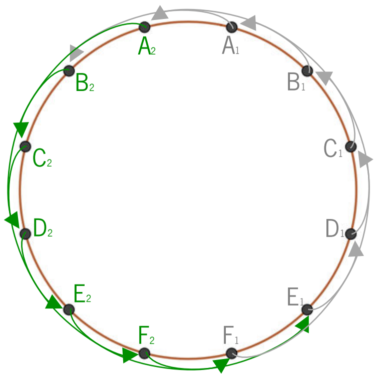
LII

Repetição dos diagramas *XLVIII* a *LI*.

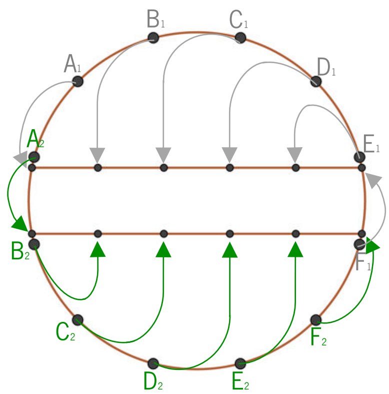
LVI



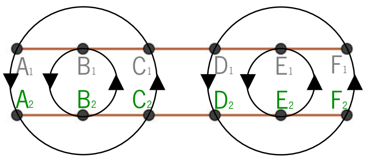
LVII



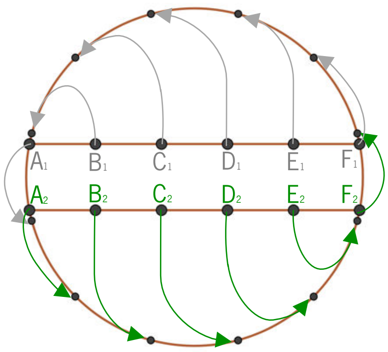
LVIII



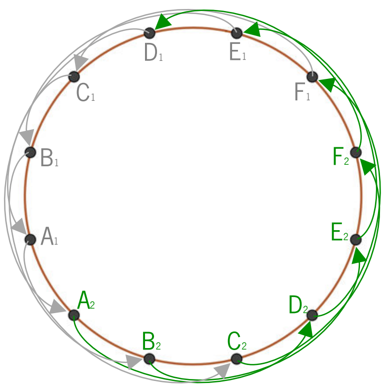
LIX



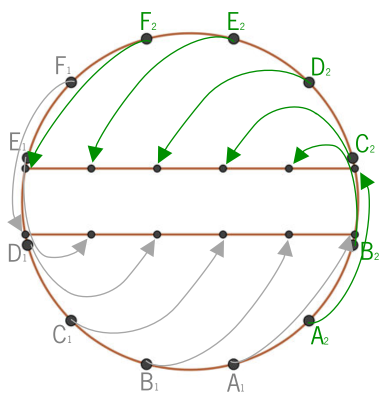
LX



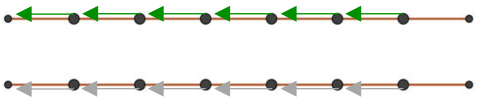
LXI



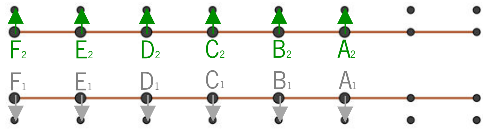
LXII



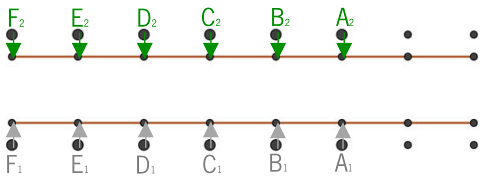
LXIII



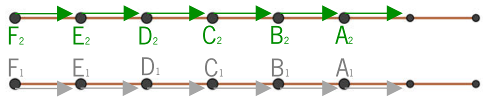
LXIV



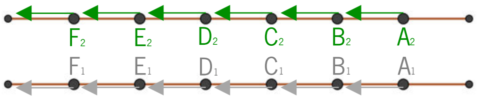
LXV



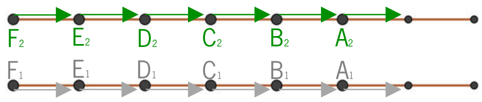
LXVI



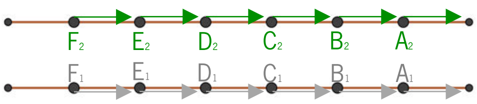
LXVII



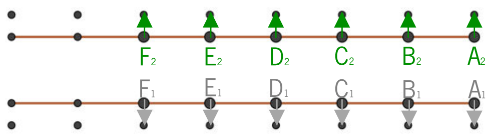
LXVIII



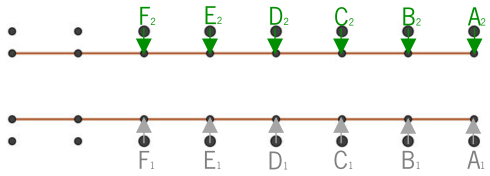
LXIX



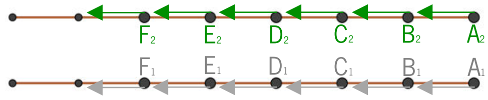
LXX



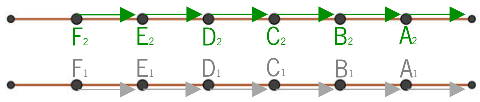
LXXI



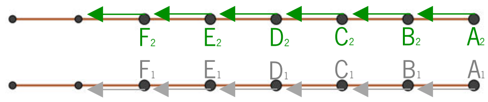
LXXII



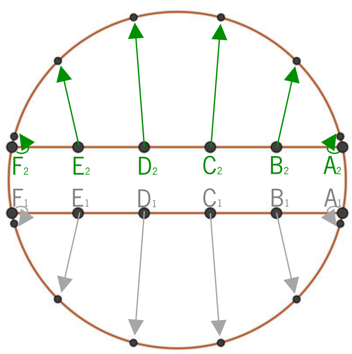
LXXIII



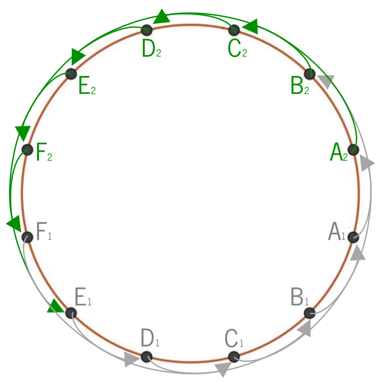
LXXIV



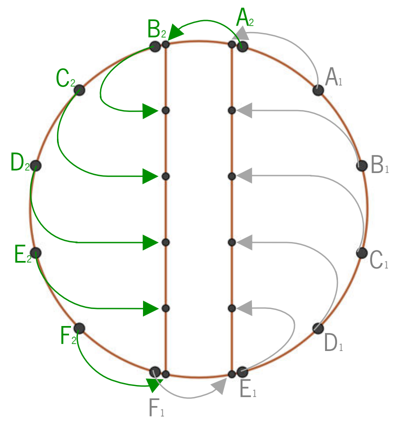
LXXV



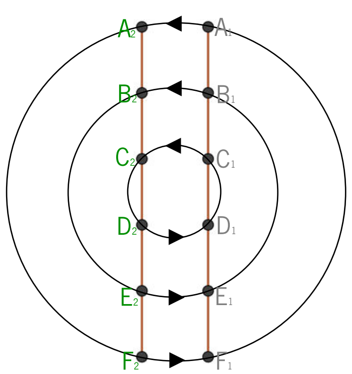
LXXVI



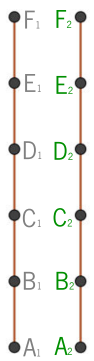
LXXVII



LXXVIII



LXXIX



b) Esquema numérico representativo das trocas de posições ocorridas ao longo da dança

A_1	A_2	B_1	B_2	C_1	C_2	D_1	D_2	E_1	E_2	F_1	F_2
87	90	75	78	54	57	40	43	19	22	7	10
75	78	54	57	40	43	19	22	7	10	2	3
74	79	53	58	39	44	18	23	6	11	1	4
75	78	54	57	40	43	19	22	7	10	2	3
87	90	75	78	54	57	40	43	19	22	7	10
86	91	74	79	53	58	39	44	18	23	6	11
87	90	75	78	54	57	40	43	19	22	7	10
75	78	54	57	40	43	19	22	7	10	2	3
74	79	53	58	39	44	18	23	6	11	1	4
75	78	54	57	40	43	19	22	7	10	2	3
87	90	75	78	54	57	40	43	19	22	7	10
86	91	74	79	53	58	39	44	18	23	6	11
87	90	75	78	54	57	40	43	19	22	7	10
75	78	54	57	40	43	19	22	7	10	2	3
74	79	53	58	39	44	18	23	6	11	1	4
75	78	54	57	40	43	19	22	7	10	2	3
87	90	75	78	54	57	40	43	19	22	7	10
86	91	74	79	53	58	39	44	18	23	6	11
87	90	75	78	54	57	40	43	19	22	7	10
83	84	81	82	63	64	33	34	15	16	13	14
82	64	84	34	83	16	81	14	63	13	33	15
61	47	60	46	57	43	54	40	51	37	50	36
61	47	60	46	57	43	54	40	51	37	50	36
34	16	64	14	82	13	84	15	83	33	81	63
13	15	14	33	16	63	34	81	64	83	82	84
36	50	37	51	40	54	43	57	46	60	47	61
35	49	36	50	37	51	40	54	43	57	46	60
36	50	37	51	40	54	43	57	46	60	47	61
37	51	40	54	43	57	46	60	47	61	48	62
36	50	37	51	40	54	43	57	46	60	47	61
35	49	36	50	37	51	40	54	43	57	46	60
36	50	37	51	40	54	43	57	46	60	47	61
37	51	40	54	43	57	46	60	47	61	48	62
36	50	37	51	40	54	43	57	46	60	47	61
33	63	15	81	13	83	14	84	16	82	34	64
81	83	63	84	33	82	15	64	13	34	14	16

87	90	75	78	54	57	40	43	19	22	7	10
88	89	76	77	55	56	41	42	20	21	8	9
87	90	75	78	54	57	40	43	19	22	7	10
85	92	73	80	52	59	38	45	17	24	5	12
87	90	75	78	54	57	40	43	19	22	7	10
88	89	76	77	55	56	41	42	20	21	8	9
87	90	75	78	54	57	40	43	19	22	7	10
85	92	73	80	52	59	38	45	17	24	5	12
84	82	83	64	81	34	63	16	33	14	15	13
34	16	64	14	82	13	84	15	83	33	81	63
10	7	22	19	43	40	57	54	78	75	90	87
11	6	23	18	44	39	58	53	79	74	91	86
12	5	24	17	45	38	59	52	80	73	92	85
11	6	23	18	44	39	58	53	79	74	91	86
10	7	22	19	43	40	57	54	78	75	90	87
11	6	23	18	44	39	58	53	79	74	91	86
12	5	24	17	45	38	59	52	80	73	92	85
11	6	23	18	44	39	58	53	79	74	91	86
10	7	22	19	43	40	57	54	78	75	90	87
14	13	16	15	34	33	64	63	82	81	84	83
15	33	13	63	14	81	16	83	34	84	64	82
36	50	37	51	40	54	43	57	46	60	47	61
36	50	37	51	40	54	43	57	46	60	47	61
63	81	33	83	15	84	13	82	14	64	16	34
84	82	83	64	81	34	63	16	33	14	15	13
61	47	60	46	57	43	54	40	51	37	50	36
60	46	57	43	54	40	51	37	50	36	49	35
70	30	69	29	68	28	67	27	66	26	65	25
60	46	57	43	54	40	51	37	50	36	49	35
61	47	60	46	57	43	54	40	51	37	50	36
60	46	57	43	54	40	51	37	50	36	49	35
61	47	60	46	57	43	54	40	51	37	50	36
62	48	61	47	60	46	57	43	54	40	51	37
72	32	71	31	70	30	69	29	68	28	67	27
62	48	61	47	60	46	57	43	54	40	51	37
61	47	60	46	57	43	54	40	51	37	50	36
62	48	61	47	60	46	57	43	54	40	51	37
61	47	60	46	57	43	54	40	51	37	50	36
64	34	82	16	84	14	83	13	81	15	63	33

16	14	34	13	64	15	82	33	84	63	83	81
10	7	22	19	43	40	57	54	78	75	90	87
87	90	75	78	54	57	40	43	19	22	7	10

c) Formas e transformações geométricas presentes na coreografia

A dança *Maneo de Verdillo* caracteriza-se por ser uma dança que combina distintas configurações. A disposição inicial dos pares - um homem e uma mulher, colocados frente a frente - permite definir, no plano, duas linhas paralelas - uma composta por homens e outra composta por mulheres -, sendo essa configuração continuamente alterada ao longo da coreografia. Em diversas partes da coreografia, as duas linhas paralelas de dançarinos "desfazem-se" para dar origem a uma circunferência, a partir da qual são geradas, de novo, duas linhas paralelas, cuja direção - vertical e horizontal - vai sendo, também, variável.

Na dança *Maneo de Verdillo*, existem duas partes bem diferenciadas - os *'puntos'* e as *'vueltas'* -, que se sucedem várias vezes ao longo da coreografia (Rodríguez, 2012). Dispostos em duas linhas paralelas, os pares, com homens e mulheres colocados frente a frente, iniciam a dança com a realização do *'punto'* (Rodríguez, 2012). Depois, os pares saem para bailar a *'vuelta'*, isto é, um conjunto de movimentos de volta ao *'punto'.* Durante a coreografia, são realizados quatro *'puntos'* e quatro *'vueltas'*, que se alternam sucessivamente. Os quatro *'puntos' (esquemas I a XIX; XXVII a XXXIV; XLVIII a LV;* e *LXIII a LXXIV)* são caracterizados, no geral, pela execução de movimentos laterais e de movimentos de avanço e recuo. Tais movimentos podem ser descritos por translações. As quatro *'vueltas'* - realizadas no seguimento de cada *'punto'* - são distintas do ponto de vista do tipo de movimentos desenvolvidos. Na primeira, na terceira e na quarta *'vueltas' (esquemas XXIII; LIX;* e *LXXVIII*, respetivamente), os pares, organizados em linhas paralelas, executam movimentos de rotação, que adquirem a designação de *'tablóns'* (Rodríguez, 2012). Os *'tablóns'* da primeira e terceira *'vueltas'* são iguais, caracterizando-se pela existência de dois centros de rotação, em torno dos quais os pares efetuam rotações de amplitude $360°$ no sentido positivo, dando origem, no plano, a quatro circunferências, concêntricas duas a duas. Por sua vez, o *'tablón'* da quarta *'vuelta'* caracteriza-se pela existência de um só centro de rotação, em torno do qual os pares efetuam uma rotação de amplitude $180°$ no sentido positivo, gerando, no plano, três circunferências concêntricas. Em relação à segunda *'vuelta' (esquemas XXXVIII a XLIV)*, os pares, organizados em linhas paralelas, realizam os designados *'embotados'*, que correspondem a passos saltados para a frente e para trás, marcando exageradamente o ritmo. Tais movimentos, ao longo dos quais as duas linhas paralelas ora se aproximam, ora se distanciam, podem ser descritos por translações.

5.2. A música das danças folclóricas

A análise das músicas que acompanham danças folclóricas características do *Grupo Folclórico de Vila Verde* e da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* envolve a identificação de aplicações das isometrias do plano (translação, reflexão axial, reflexão deslizante, e rotação) nas partituras das músicas, baseando-se no trabalho de Garland e Kahn (1995). A identificação dessas aplicações musicais das isometrias é complementada pela representação de algumas partituras - ou de trechos das partituras - em gráficos, seguindo-se a metodologia sugerida por Carvalho, Bassanezi e Pompeu Junior (2015), e posteriormente utilizada por Misura (2016). Constituíram objeto de análise, ao nível da música, três músicas que acompanham danças folclóricas características dos dois grupos envolvidos na investigação, cujas partituras com a identificação de aplicações musicais das isometrias do plano serão doravante apresentadas, e reforçadas pela representação das respetivas partituras - ou de trechos das partituras - em gráficos, com o objetivo de analisar padrões repetitivos que caracterizam a estrutura dessas músicas.

5.2.1. Regadinho - Grupo Folclórico de Vila Verde

a) Partitura da música com a identificação de aplicações musicais das isometrias

Figura 25. Análise da partitura da música que acompanha a dança *Regadinho*.

b) Representação gráfica da partitura da música

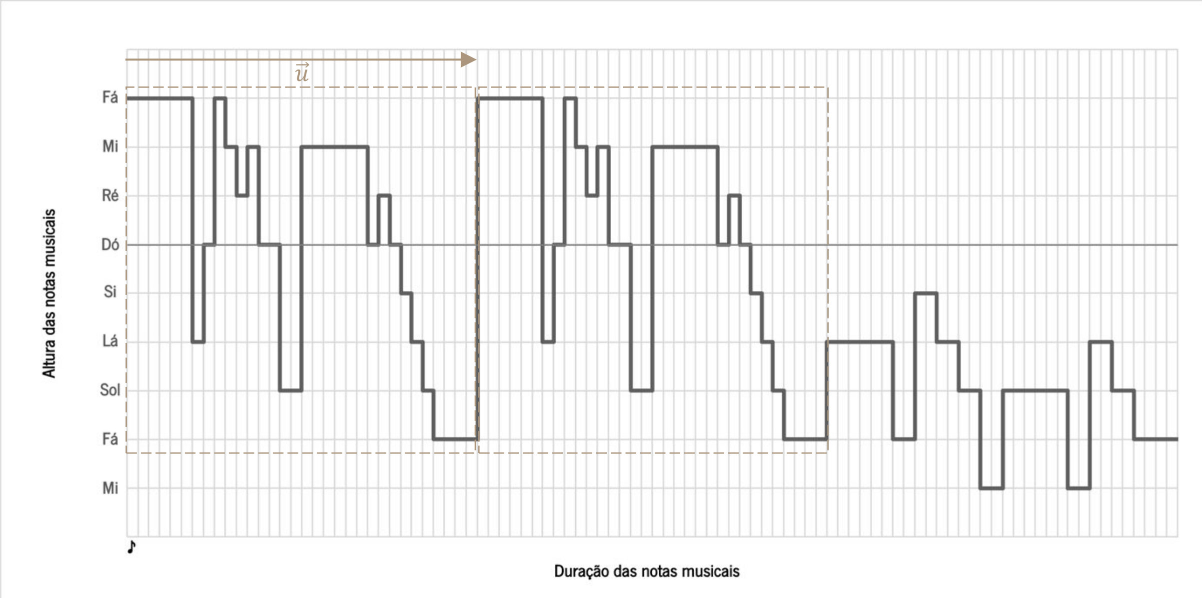


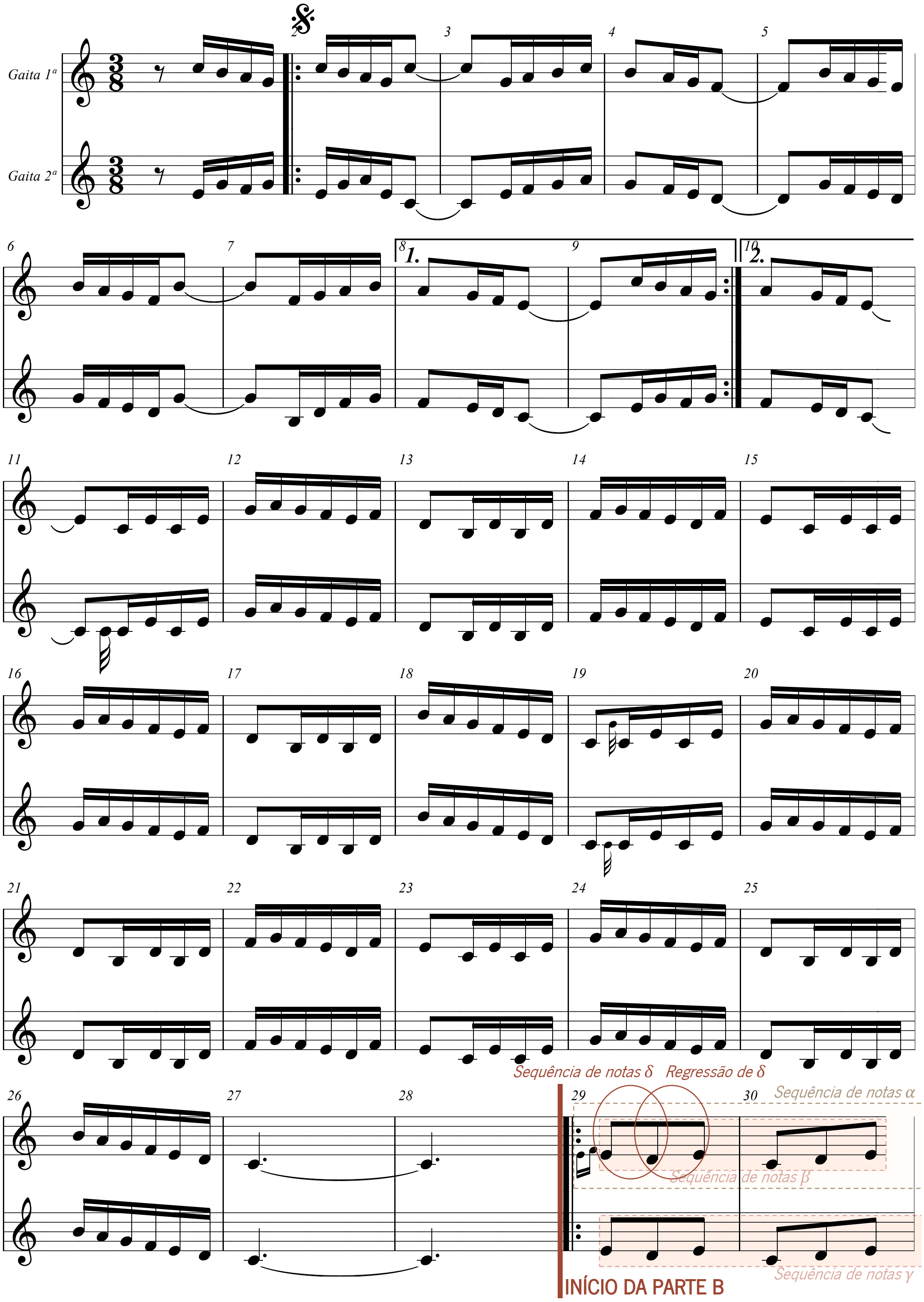
Figura 26. Gráfico que representa a música que acompanha a dança *Regadinho*.

c) Padrões repetitivos que caracterizam a estrutura da música

A música que acompanha a dança *Regadinho* apresenta ritmo quaternário $\left(\frac{4}{4}\right)$. A estrutura da música caracteriza-se pela existência de duas frases que se repetem. As sequências de notas α e β, assinaladas na figura 25, surgem exatamente iguais noutro momento da partitura. Um padrão desse tipo adquire a designação de 'repetição', e corresponde à aplicação musical mais simples da translação (Garland & Kahn, 1995). No gráfico da figura 26, a 'repetição' dessas duas frases está evidenciada, denotando uma aplicação à música da translação, no caso associada ao vetor $\vec{u}$. Outra aplicação musical da translação é designada 'transposição' (Garland & Kahn, 1995), e está igualmente presente na música: as sequências de notas γ e δ (figura 25) surgem noutra parte da partitura, sendo que, desta vez, ocorre o movimento dessas sequências de notas para outra localização na escala, e não apenas no tempo (Garland & Kahn, 1995). Outro padrão existente na música, a visualizar nas curtas sequências de notas θ e λ (figura 25) corresponde a uma aplicação musical da reflexão axial, e é denominado 'regressão' (Garland & Kahn, 1995). Na sequência de notas θ, há a subida e depois descida de meio tom da nota Mi, e, na sequência de notas λ, há a descida e depois subida de um tom da nota Dó. Apesar da diferença, as sequências de notas θ e λ representam, ambas, aplicações à música da reflexão axial de eixo vertical.

5.2.2. Jota de Pol - Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos[6]

a) Partitura da música com a identificação de aplicações musicais das isometrias (na parte B)



[6] A música que acompanha a dança *Jota de Pol* é composta por várias partes, apresentando-se a análise da parte B da música, identificada na figura 27. Nessa análise, e em particular na representação da parte B da música nos gráficos das figuras 28 e 29, foram desconsideradas as apogiaturas da partitura.

Figura 27. Análise da partitura da música que acompanha a dança *Jota de Pol*.

b) Representação gráfica da partitura da música (parte B; 1.ª Gaita)

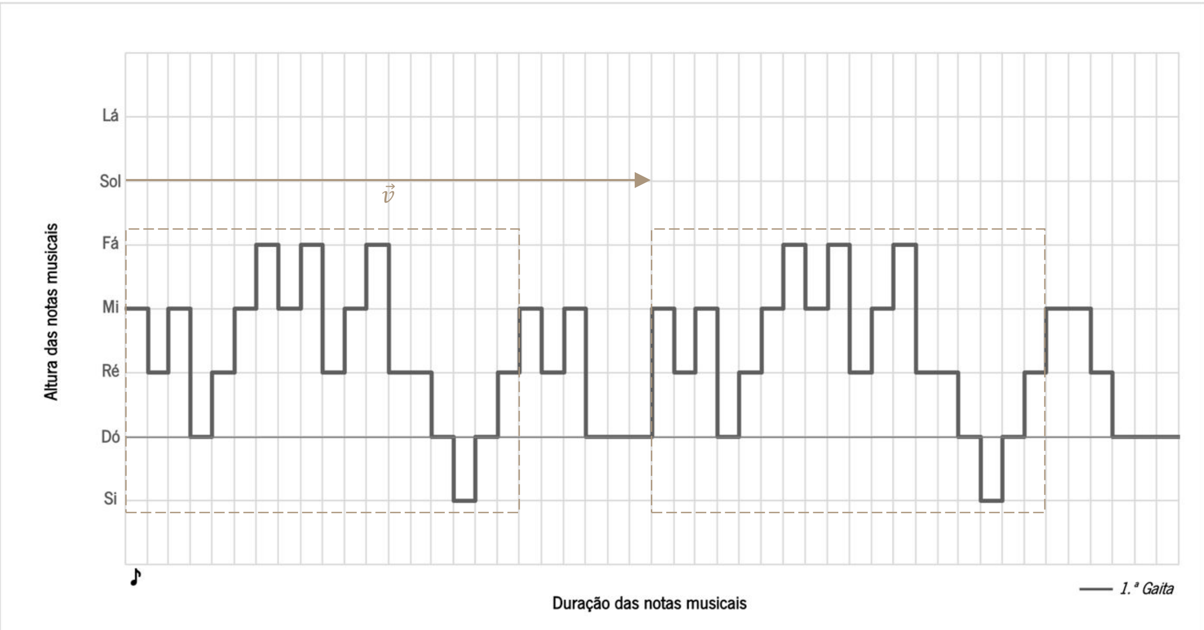


Figura 28. Gráfico que representa a parte B da música que acompanha a dança *Jota de Pol* (1.ª Gaita).

c) Representação gráfica da partitura da música (parte B; 1.ª e 2.ª Gaitas)

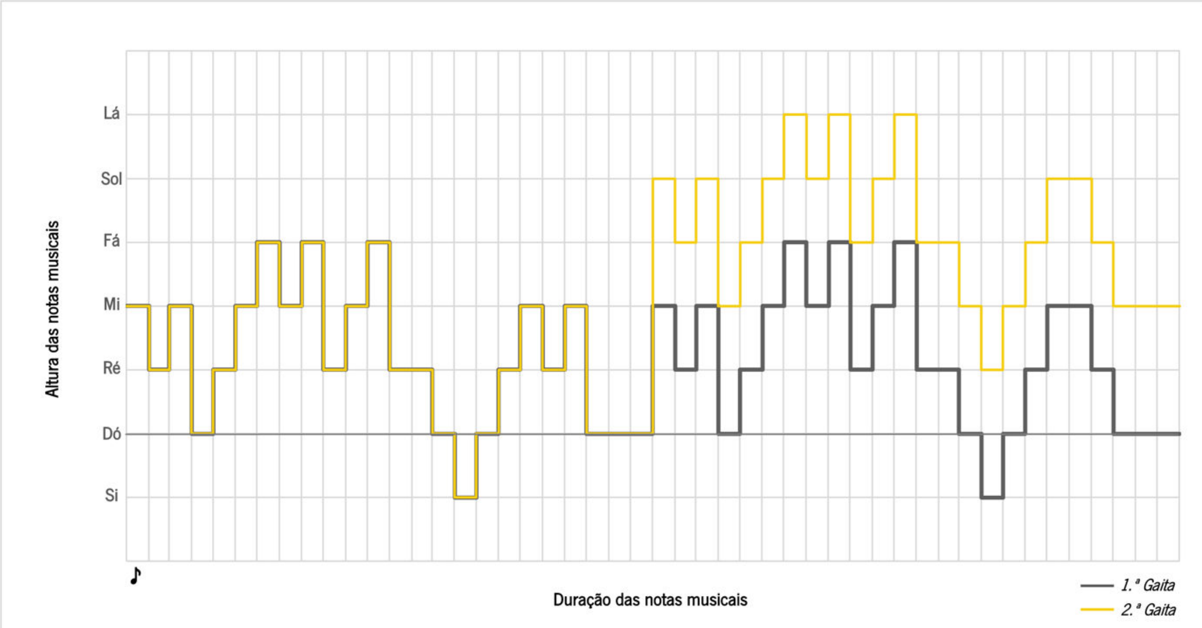


Figura 29. Gráfico que representa a parte B da música que acompanha a dança *Jota de Pol* (1.ª e 2.ª Gaitas).

d) Padrões geométricos que caracterizam a estrutura da música (parte B)

A música que acompanha a dança *Jota de Pol* apresenta ritmo ternário simples $\left(\frac{3}{8}\right)$. Ao nível da estrutura, a parte B da música (1.ª Gaita) caracteriza-se pela 'repetição' da sequência de notas α, marcada na figura 27, que surge exatamente igual noutro momento da partitura (Garland & Kahn, 1995). No gráfico da figura 28, a 'repetição' dessa sequência de notas encontra-se evidenciada, denotando uma aplicação à música da translação, no caso associada ao vetor $\vec{v}$. Na sequência de notas α, salienta-se a sequência de notas β (figura 27), que é movida para outra localização na escala, e não apenas no tempo, tratando-se de uma 'transposição' - outra aplicação à música da translação (Garland & Kahn, 1995). Essa mesma aplicação musical pode ser visualizada na sequência de notas γ (figura 27), mais longa do que a anterior, e referente, agora, à 2.ª Gaita. Outro padrão existente na parte B da música, a visualizar nas sequências de notas δ, θ, λ, π e ρ (figura 27) corresponde a uma aplicação musical da reflexão axial de eixo vertical, e é denominado 'regressão' (Garland & Kahn, 1995). Em todas essas sequências de notas, ocorre a descida e depois subida da altura da(s) nota(s), à exceção das sequências de notas π e ρ, nas quais sucede o inverso. No gráfico da figura 29, é evidenciada a regularidade existente na melodia da 1.ª e da 2.ª Gaitas, que, de início, é igual, e, depois, a 2.ª Gaita é tocada duas notas acima.

5.2.3. Muiñeira de Pol - Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos[7]

a) Partitura da música com a identificação de aplicações musicais das isometrias

Figura 30. Análise da partitura da música que acompanha a dança *Muiñeira de Pol*.

[7] A análise da música que acompanha a dança *Muiñeira de Pol* contempla a identificação de aplicações musicais das isometrias ao longo de toda a partitura. Já a representação feita no gráfico da figura 31 é referente à parte A da música (compassos 1 a 9), tendo sido desconsideradas as apogiaturas da partitura.

b) Representação gráfica da partitura (parte A)

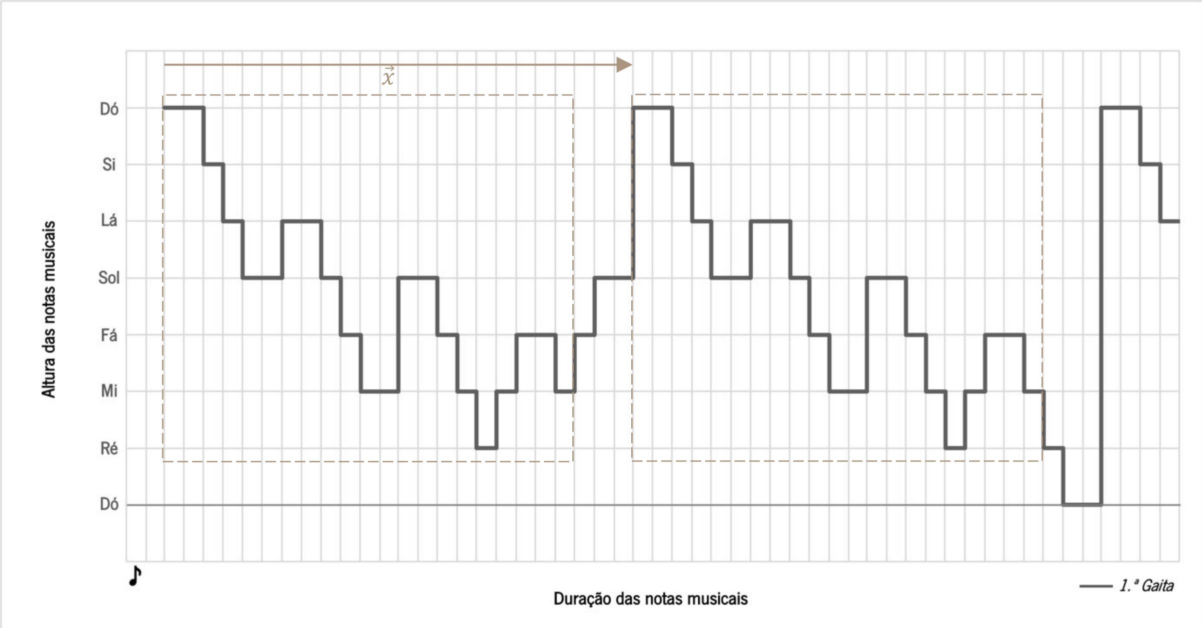


Figura 31. Gráfico que representa a parte A da música que acompanha a dança *Muiñeira de Pol* (1.ª Gaita).

c) Padrões geométricos que caracterizam a estrutura da música

A música que acompanha a dança *Muiñeira de Pol* apresenta ritmo binário composto $\left(\frac{6}{8}\right)$. Ao nível da estrutura, a música caracteriza-se pela 'repetição' das sequências de notas α e γ, na 1.ª Gaita, e da sequência de notas β, na 2.ª Gaita, que se encontram assinaladas na figura 30, surgindo exatamente iguais noutro momento da partitura (Garland & Kahn, 1995). No gráfico da figura 31, está evidenciada a 'repetição' da sequência de notas α, integrada na parte A da música, ilustrando uma aplicação musical da translação, no caso associada ao vetor $\vec{x}$. A outra aplicação à música da translação é a 'transposição', e pode ser visualizada nas sequências de notas δ, θ, λ e π (figura 30), verificando-se a movimentação de cada uma dessas sequências de notas para outra localização na escala, e não apenas no tempo (Garland & Kahn, 1995). As sequências de notas ρ, σ, τ e υ (figura 30) constituem exemplos da aplicação à música da reflexão axial de eixo vertical, denominada 'regressão' (Garland & Kahn, 1995). Na maioria dessas sequências de notas, ocorre a subida e depois descida da altura da(s) nota(s), excetuando-se ρ, em que sucede o oposto. Outro padrão existente na música, a visualizar nas sequências de notas φ e ω (figura 30), é denominada 'inversão', e corresponde a uma aplicação musical da reflexão deslizante, que é uma combinação de duas isometrias - a reflexão e a translação (Garland & Kahn, 1995).

5.3. Os acessórios das danças folclóricas

A análise dos acessórios de danças folclóricas características do *Grupo Folclórico de Vila Verde* e da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* envolve a identificação de padrões geométricos nos trajes utilizados por cada um dos grupos folclóricos - ou em certas peças desses trajes -, sustentada pela apresentação de fotografias correspondentes. Constituíram objeto de análise, ao nível dos acessórios, diferentes tipos de trajes utilizados por cada um dos dois grupos envolvidos na investigação, os quais serão doravante apresentados, com o propósito de analisar padrões geométricos presentes nesses trajes.

5.3.1. Trajes do Grupo Folclórico de Vila Verde

Os trajes do *Grupo Folclórico de Vila Verde* refletem a realidade social e económica dessa região no século XIX e no início do século XX. Com base nisso, o grupo exibe, no geral, quatro tipos de traje, a saber: o 'Traje de Encosta', o 'Traje de Noivos', o 'Traje da Ribeira', e o 'Traje de Trabalho' (GFVV, 2008).

O 'Traje de Encosta' - vulgarmente designado por 'Traje de Festa' ou 'Traje Domingueiro' - que se expandiu por todo o concelho de Vila Verde, é o traje por excelência do referido concelho (GFVV, 2008). Nas versões masculina e feminina, o 'Traje de Encosta' era utilizado, respetivamente, pelos homens e pelas mulheres em dias de festa, nas romarias, sendo depois guardado para a mortalha (GFVV, 2008). Na figura 32, está representado o 'Traje de Encosta' - masculino e feminino. Nas figuras 33 e 34, pode observar-se, com maior pormenor, cada uma das versões - masculina e feminina - do 'Traje de Encosta'.

Figura 32. 'Traje de Encosta' - masculino e feminino (GFVV, 2008, p. 58).

Figura 33. ‘Traje de Encosta’ - masculino (GFVV, 2008, p. 69).

Figura 34. ‘Traje de Encosta’ - feminino (GFVV, 2008, p. 62).

Tal como se pode verificar nas figuras 32, 33 e 34, o ‘Traje de Encosta’ - masculino e feminino - apresenta, em termos globais, simetria de reflexão de eixo vertical. Contudo, existem certos elementos que anulam essa simetria. Na versão feminina do ‘Traje de Encosta’, o *lenço de pedido* ou *lenço de namorados*, colocado no lado direito da cintura da mulher, constitui o elemento que, de forma saliente, anula a simetria que o traje globalmente apresenta. De igual forma, os elementos decorativos que fazem parte do *lenço de tapete*, colocado de forma simétrica nos ombros da mulher, quebram essa simetria. Em contraste, as *peças de ouro* que a mulher leva ao peito, assim como o *lenço de cinta*, parecem ter sido deliberadamente dispostos, tendo em vista a simetria da figura do traje. Na versão masculina do ‘Traje de Encosta’, existem, também, certos elementos que constituem exceções à figura simétrica do traje, sendo o mais evidente o *pau (de lodo, de junco ou de marmeleiro)* que o homem segura na mão. Outro elemento, menos óbvio, pode ser o *lenço de pedido* que o homem enverga aos ombros (figura 35).

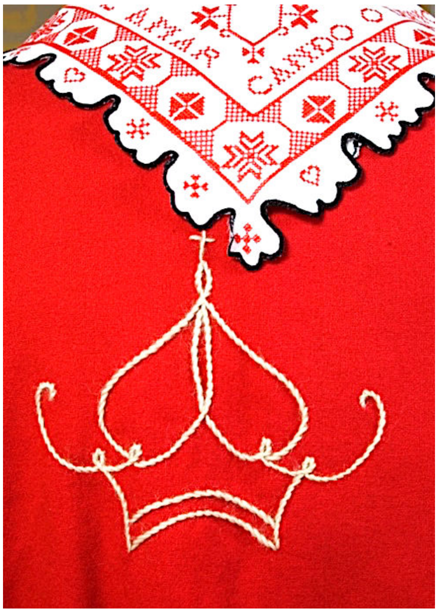


Figura 35. *Lenço de pedido* integrado no 'Traje de Encosta' - masculino (GFVV, 2008, p. 70).

Conforme se pode observar na figura 35, o *lenço de pedido*, colocado nos ombros do homem após ter sido dobrado sobre uma das suas diagonais, embora crie, à primeira vista, uma imagem verticalmente simétrica, apresenta elementos que não cumprem essa simetria, designadamente as frases de amor bordadas no lenço, assim como o bordado presente nas partes laterais que o limitam. Outro exemplo de *lenço de pedido* integrado no 'Traje de Encosta' - masculino - pode ser observado na figura 36. Esse lenço, tal como anterior, dobrado sobre uma das suas diagonais, aparentemente exibe simetria de reflexão em relação à sua outra diagonal, conservando a simetria que o traje globalmente apresenta. Contudo, existem vários detalhes no bordado do *lenço de pedido* que quebram essa simetria.

Figura 36. *Lenço de pedido* integrado no 'Traje de Encosta' - masculino (GFVV, 2008, p. 68).

Um exemplo de uma *camisa de linho* bordada a vermelho no colarinho e no peito (bem como nos punhos e nos ombros), que compõe o 'Traje de Encosta' - masculino - pode ser visualizada, com detalhe, na figura 37. O bordado vermelho que decora essa camisa apresenta-se, em termos globais, verticalmente simétrico, sobressaindo o motivo floral bordado na zona central, que quebra essa simetria. O motivo floral em causa, apresentado com maior ampliação na figura 38, não cumpre a simetria de reflexão de eixo vertical que caracteriza o bordado vermelho presente no colarinho e no peito da camisa, e que caracteriza, no geral, o 'Traje de Encosta' - masculino. Em contraste, esse motivo floral apresenta, de uma maneira global, simetria de reflexão de eixo horizontal, conforme ilustrado na figura 38. Considerando que, do 'Traje de Encosta' - masculino -, faz parte, também, o *colete preto de pelúcia*, envergado por cima da *camisa de linho*, o motivo floral verticalmente assimétrico em causa só seria visível caso o homem utilizasse o colete desabotoado. De outro modo, esse bordado permaneceria oculto, o que talvez possa justificar o facto de o mesmo não satisfazer a simetria vertical que o 'Traje de Encosta' - masculino - globalmente exibe. De referir, ainda, que o bordado presente nas zonas laterais da camisa apresentada na figura 37 não é exatamente simétrico, existindo falhas, como a assinalada nessa figura. Ora, esse tipo de falhas compreende-se natural, atendendo a que os bordados eram feitos manualmente. No motivo floral bordado na zona central da camisa, destaca-se, a par de algumas falhas que também aí se revelam, a parte assinalada na figura 38, por não cumprir a simetria de reflexão de eixo horizontal.

Figura 37. *Camisa de linho* do 'Traje de Encosta' - masculino.

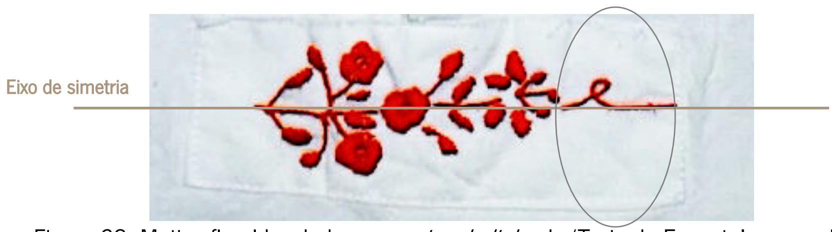


Figura 38. Motivo floral bordado na *camisa de linho* do 'Traje de Encosta' - masculino.

O ‘Traje de Noivos’ constitui uma variante do ‘Traje de Encosta’, com determinadas alterações. No dia da boda, a mulher utilizava um *véu de tule de algodão* na cabeça - em vez do *lenço de tapete* colocado nos ombros -, um *ramo de flores de laranjeira com grandes fitas de seda* pendentes sobre o lado esquerdo, um *xaile de seda* pendurado no braço, e, em certas ocasiões, também uma *sombrinha* (GFVV, 2008). No caso do homem, o preto era a cor privilegiada, contrastando com a *camisa de linho* bordada a branco - em substituição da *camisa de linho* bordada a vermelho (GFVV, 2008). Na figura 39, está representado o ‘Traje de Noivos’ - masculino e feminino -, podendo observar-se os elementos citados.

Figura 39. ‘Traje de Noivos’ - masculino e feminino (GFVV, 2008, p. 63).

Tratando-se de uma variante do ‘Traje de Encosta’, o ‘Traje de Noivos’ - masculino e feminino - apresenta, igualmente, simetria de reflexão de eixo vertical, percecionada do ponto de vista global, conforme se pode comprovar na figura 39. Na versão feminina do ‘Traje de Noivos’, os quatro elementos substituídos ou acrescentados ao traje, e que o demarcam do ‘Traje de Encosta’ - feminino -, são, justamente, os que anulam a simetria de eixo vertical que o traje globalmente apresenta, à exceção do *véu de tule de algodão* bordado a linhas brancas, que a mulher utiliza na cabeça. A disposição intencionalmente simétrica das *peças de ouro* que a mulher leva ao peito torna-se ainda mais evidente no ‘Traje de Noivos’ - feminino. Ainda que as *peças de ouro* apresentem formatos distintos, parece haver uma tentativa deliberada de disposição dessas peças num formato simétrico. Na versão masculina do ‘Traje de Noivos’, os elementos que constituem exceções à figura simétrica do traje são praticamente inexistentes, podendo referir-se os botões do *colete preto de pelúcia*, que, uma vez abotoados, formam duas linhas verticais de botões, sendo que uma delas coincide, aproximadamente, com o eixo de simetria da figura, mas a outra não, criando assimetria. Não obstante, com a *jaqueta preta de fazenda de lã* devidamente colocada por cima do *colete preto*, fica visível, somente, a linha de botões que é simétrica.

Um exemplo de uma *camisa de linho* bordada a branco, que compõe o 'Traje de Noivos' - masculino - pode ser visualizada, com detalhe, na figura 40. Nessa camisa, é possível identificar vários motivos bordados, que apresentam uma distribuição que cumpre a simetria de reflexão vertical do traje. Não obstante ao disposto, diferentes motivos que surgem bordados na camisa exibem simetrias distintas. Exemplo disso são os motivos 1, 2, e 3, assinalados na figura 40, os quais se encontram apresentados, com maior ampliação, na figura 41. O motivo 1 tem dez simetrias de rotação (associadas aos ângulos $36°$, $72°$, $108°$, $144°$, $180°$, $216°$, $252°$, $288°$, $324°$, $360°$) e não apresenta simetrias de reflexão. O motivo 2 tem duas simetrias de rotação (associadas aos ângulos $180°$ e $360°$) e também não tem nenhuma simetria de reflexão. Atente-se que o motivo 1 está integrado no motivo 2, pelo que as duas simetrias que fazem parte do grupo simétrico do motivo 2 fazem parte do grupo simétrico do motivo 1. O motivo 3 não tem simetrias de rotação, apresentando simetria de reflexão de eixo horizontal. De referir que as simetrias elencadas estão sempre sujeitas às falhas associadas à confeção dos bordados à mão.

Figura 40. *Camisa de linho* do 'Traje de Noivos' - masculino (GFVV, 2008, p. 70).

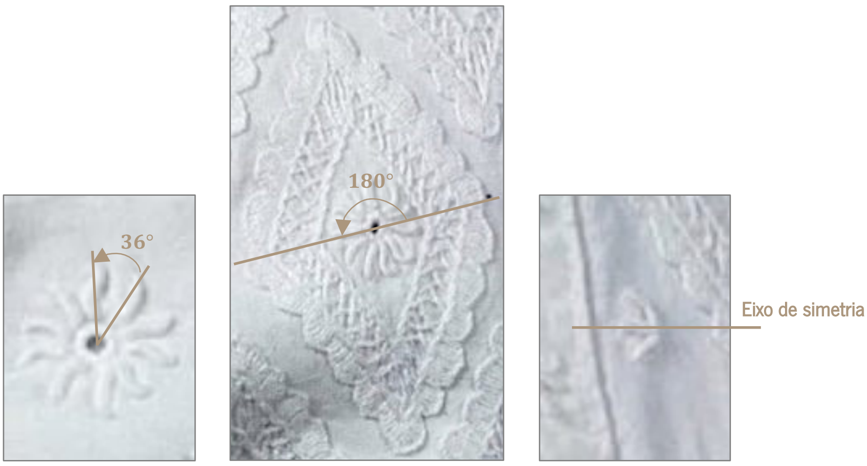


Figura 41. Motivos bordados na *camisa de linho* do 'Traje de Noivos' - masculino.

O ‘Traje da Ribeira’ - também designado por ‘Traje de Lavradeira’ ou ‘Traje de Feira’ - é o segundo traje mais representativo do concelho de Vila Verde (GFVV, 2008), sucedendo ao ‘Traje de Encosta’, analisado antes. Nas versões masculina e feminina, o ‘Traje da Ribeira’ era utilizado, respetivamente, pelos homens e pelas mulheres, nos dias de ir à feira, ou noutros momentos comunitários (GFVV, 2008).

A versão masculina do ‘Traje da Ribeira’, se comparada com a do ‘Traje de Encosta’ varia, essencialmente, ao nível das cores utilizadas e da riqueza dos bordados. Se, no ‘Traje de Encosta’ - masculino -, a cor predominante era o preto, no ‘Traje da Ribeira’ - masculino -, a *jaqueta*, o *chapéu*, as *calças*, e o *colete* - que pode ter as costas lisas ou aos quadrados - são, tipicamente, castanhos, conforme ilustra o ‘Traje da Ribeira’ - masculino - representado na figura 42. Igualmente saliente na figura 42 é a *camisa de linho com peitilho, colarinho e punhos riscados* - geralmente, com riscas verticais -, e que não apresenta quaisquer motivos bordados. O pau (de lodo, de junco ou de marmeleiro) permanece enquanto exceção à figura simétrica que o ‘Traje da Ribeira’ - masculino -, de uma forma global, também evidencia.

Figura 42. ‘Traje da Ribeira’ - masculino (GFVV, 2008, p. 70).

A versão feminina do ‘Traje da Ribeira’ distingue-se da do ‘Traje de Encosta’, essencialmente pela vivacidade de cores importada pelos novos elementos que o compõem, designadamente o *cachené* ou *lenço chinês* colocado na cabeça, o *lenço* a cobrir o busto (elemento que poderia ser utilizado ou não), e o *corpete* - preto ou de linho bordado a gosto. Em contraste com o ‘Traje da Ribeira’ - masculino -, a versão feminina do ‘Traje da Ribeira’ exibe bastante riqueza em termos de bordados e padrões decorativos. Na figura 43, está representado o ‘Traje de Ribeira’ - feminino -, no qual a mulher enverga, entre outros elementos do traje, *cachené* garrido e *corpete preto*, mas não utiliza *lenço* a cobrir o busto.

Figura 43. 'Traje da Ribeira' - feminino (GFVV, 2008, p. 57).

O 'Traje de Ribeira' - feminino - também exibe, de uma forma global, simetria de reflexão vertical. A forma como o *cachené* é colocado na cabeça da mulher, assim como a disposição das *peças de ouro* que a mulher leva ao peito procuram satisfazer essa simetria. A pretensão de simetria de reflexão vertical é igualmente evidente nas costas do *corpete preto* utilizado pela mulher, o qual pode ser visualizado na figura 44. Esse corpete encontra-se guarnecido com vidrilhos pretos, que pretendem criar uma imagem simétrica, ainda que isso não se verifique em pleno, tal como demonstra a falha assinalada na figura 44. Não obstante, parece evidente a intenção de exibir uma figura verticalmente simétrica, quer seja vista de frente, como de trás - algo que é notório no *corpete de linho* bordado a gosto, que se expõe na figura 45.

Figura 44. *Corpete preto* integrado no 'Traje da Ribeira' - feminino (GFVV, 2008, p. 64).

Figura 45. *Corpete de linho* integrado no 'Traje da Ribeira' - feminino (GFVV, 2008, p. 64).

A simetria vertical do 'Traje de Ribeira' - feminino - contrasta com a diversidade de motivos que adornam os *cachenés* usados pelas mulheres à cabeça, ainda que este elemento do traje seja colocado de maneira a satisfazer essa mesma simetria, quer na parte da frente do traje, como na parte de trás. Desde motivos assimétricos até motivos com várias simetrias - de cariz floral, mas não só -, a diversidade decorativa encontrada nesse elemento distintivo do 'Traje de Ribeira' - feminino - é extremamente vasta.

Dois elementos que constituem exceções à simetria vertical do 'Traje de Ribeira' - feminino - são a *algibeira* - feita com os mesmos materiais que adornam o corpete -, que é colocada de um dos lados da cintura da mulher, e o *saco* transportado pela mulher, os quais podem ser visualizados na figura 46.

Figura 46. 'Traje da Ribeira' - feminino (GFVV, 2008, p. 65).

Ainda na figura 46, pode ser visualizada a decoração, com vidrilhos pretos, presente na *saia* e no *avental*, ambos de cor preta, que compõem o 'Traje de Ribeira' - feminino. A disposição dos vidrilhos origina diferentes frisos, três dos quais se apresentam, com maior ampliação, nas figuras 47, 48, e 49.

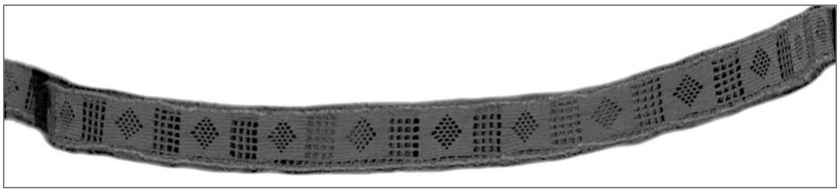


Figura 47. Friso presente no *avental* do 'Traje da Ribeira' - feminino.

Figura 48. Friso presente no *avental* do 'Traje da Ribeira' - feminino.

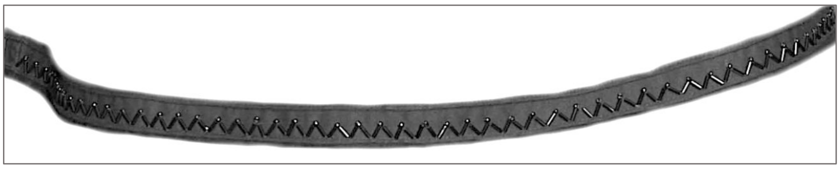


Figura 49. Friso presente no *avental* do 'Traje da Ribeira' - feminino.

Os três exemplos de frisos presentes no *avental preto* do 'Traje de Ribeira' - feminino -, ilustrados nas figuras 47, 48, e 49 apresentam distintas simetrias. O friso representado na figura 47, para além de simetria de translação, tem simetria de reflexão de eixo vertical, simetria de reflexão de eixo horizontal, e simetria de rotação de meia-volta. O friso exposto na figura 48 tem, somente, simetria de translação. Por último, o friso exibido na figura 49 tem, para além de simetria de translação, simetria de reflexão de eixo vertical, e simetria de rotação de meia-volta. Na classificação de "padrões planos monocromáticos" proposta por Washburn e Crowe (1988, p. 83), os frisos anteriormente apresentados correspondem a três tipos diferentes de frisos, dos sete tipos reconhecidos pelos autores. Considerando o fluxograma de Washburn e Crowe (1988), é possível classificar os frisos ilustrados nas figuras 47, 48, e 49 como sendo, respetivamente, do tipo *pmm2*, *p111*, *pma2*. De referir que, para além desses tipos de frisos, foram encontrados, nos *aventais* e *saias* do 'Traje da Ribeira'- feminino - e, também, do 'Traje de Encosta' - feminino -, frisos do tipo *pm11.* Os restantes tipos de frisos - *p1m1*, *p1a1*, e *p112* - não foram encontrados, o que não quer dizer que os mesmos não existam nessas ou noutras peças dos dois trajes.

O 'Traje de Trabalho' - igualmente designado por 'Traje de uso geral' ou 'Traje de uso comum' - não apresenta uma definição própria, sendo composto pelas roupas mais usadas e/ou mais resistentes (GFVV, 2008). Nas versões masculina e feminina, o 'Traje de Trabalho' era utilizado, respetivamente, pelos homens e pelas mulheres, nos trabalhos agrícolas realizados no dia-a-dia. O 'Traje de Trabalho' era proveniente do 'Traje da Ribeira', podendo ser considerado, até, uma variante do mesmo, pela reutilização de algumas das suas peças já gastas, conjugadas com outras mais resistentes (GFVV, 2008).

Na figura 50 está representado o 'Traje de trabalho' - feminino. Tal como se pode observar na figura 50, a mulher utiliza, em vez do *avental preto* de veludo ou cetim, um *avental* mais grosseiro e resistente, e, em vez da *camisa bordada e/ou rendada com linho fino*, uma *blusa* de confeção simples, sem bordados ou rendas. A *saia* utilizada pela mulher é, igualmente, de confeção simples. Ademais, a mulher utiliza um *lenço* de algodão ou lã na cabeça, que pode ter cor diversa, mas cuja diversidade decorativa é praticamente inexistente. Também neste traje se verifica que o *lenço* é colocado na cabeça de maneira que a figura exibida seja verticalmente simétrica, conforme se pode visualizar na figura 50. O *corpete* evidencia-se como o elemento do 'Traje de trabalho' - feminino - que apresenta maior diversidade de motivos decorativos, provavelmente por se tratar de uma peça que, geralmente, é reutilizada do 'Traje da Ribeira' - feminino -, e que, por isso, mantém a sua típica riqueza de ornamentos.

Figura 50. 'Traje de Trabalho' - feminino (GFVV, 2008, p. 57).

Para concluir, uma breve menção ao 'Traje de Trabalho' - masculino -, que se caracteriza por uma verdadeira ausência de padrões decorativos nas suas peças. A limitada diversidade decorativa, já percetível no 'Traje da Ribeira' - masculino -, fica em plena evidência no 'Traje de Trabalho' - masculino.

5.3.2. Trajes da Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos

O traje tradicional galego, quer feminino como masculino, começou a ser usado na segunda metade do século XVIII, verificando-se a utilização de algumas peças do traje ainda durante o século XX (Laxe, 2003; Pérez, 2005). Uma característica essencial do traje tradicional galego é não ser uniforme, denotando, antes, uma riquíssima variedade (Fraguas y Fraguas, 1985). Em contraposição, também se poderia falar de um traje tradicional único, já que as peças mais usuais, tanto nos trajes masculinos, como nos trajes femininos, eram praticamente as mesmas (Fernández, 2011). Mesmo sendo bastante semelhantes e parecendo estar subordinados a um tipo comum, os trajes galegos variam de região para região, não só ao nível da confeção, como também em termos das cores dos panos (Pérez, 2005). Daí que se possa deduzir que nunca existiu um traje típico galego, senão variantes mais ou menos idênticas (Pérez, 2005). A criação das atuais províncias da Galiza - Corunha, Lugo, Ourense e Pontevedra -, sem outro fundamento que não o administrativo, instigou a procura de um traje típico de cada uma delas, mas tampouco existe um traje que seja único e exclusivo de qualquer uma das províncias (Pérez, 2005).

Não obstante à inequívoca variedade de trajes tradicionais galegos, é possível definir, basicamente, três classes de traje, a saber: o 'Traxe de Festa', o 'Traxe de Feira', e o 'Traxe de Decotío' (Pérez, 2005). Cada uma dessas três classes de traje têm representação na *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos.*

O 'Traxe de Festa' - que também pode ser designado por 'Traxe de Garda' ou 'Traxe de Gala' - representa o traje mais luxuoso (Pérez, 2005), utilizado, apenas, em dias de celebrações importantes. Na figura 51, encontra-se apresentado um 'Traxe de Festa' - feminino -, típico de Santiago de Compostela.

Figura 51. 'Traxe de Festa' - feminino.

Visto de forma global, o ‘Traxe de Festa’ - feminino -, representado na figura 51, apresenta simetria de reflexão de eixo vertical, embora essa simetria seja comprometida pela forma como o *mantón de la* surge colocado sobre o busto da mulher. Os restantes elementos visíveis nesse traje, nomeadamente o *pano de pescozo*, o *mandil* (semelhante a um avental), e a *vasquiña* (saia exterior), cumprem tal simetria. O mesmo sucede com as *peças de ouro* exuberantes que a mulher leva ao peito. De referir, acerca disso, que o ‘Traxe de Festa’ - particularmente o feminino -, era revelador da riqueza da pessoa, que, nos dias de festa, exibia todo o seu ouro, tornando o traje um autêntico indicador da posição social (Pérez, 2005).

Na figura 52, é possível observar, com maior pormenor e clareza, o *mantón de la* integrado no ‘Traxe de Festa’ - feminino - representado na figura 51. Esse *mantón de la*, de tamanho considerável, encontra-se dobrado em forma de triângulo, ilustrando a maneira como era colocado sobre os ombros da mulher, com a função de protegê-la do frio (Laxe, 2003). O bordado floral que decora o *mantón de la* estende-se pelas costas da mulher, quando ela enverga esta peça do traje. Esse bordado floral, que surge ampliado na figura 53, apresenta simetria de reflexão de eixo vertical, satisfazendo a simetria que o ‘Traxe de Festa’ - feminino - globalmente exibe. Ainda que existam pequenas falhas, como a assinalada na figura 53, parece evidente a pretensão de que o bordado floral ostentado seja verticalmente simétrico.

Figura 52. *Mantón de la* do ‘Traxe de Festa’ - feminino.

Figura 53. Bordado presente no *mantón de la* integrado no ‘Traxe de Festa’ - feminino.

O *mandil* constitui outra peça com bastante saliência no 'Traxe de Festa' - feminino. Na figura 54, está representado um *mandil de festa*, típico de Santiago de Compostela, à semelhança do exposto na figura 51. O *mandil de festa*, geralmente confecionado em pano negro, destaca-se pelo seu tamanho reduzido e pela riqueza dos seus adornos, quase sempre feitos em azeviche (mineral negro), e de acordo com o gosto de quem produzia ou de quem utilizava essa peça (Laxe, 2003; Fraguas y Fraguas, 1985).

Figura 54. *Mandil* do 'Traxe de Festa' - feminino.

Conforme se pode observar na figura 54, a decoração do *mandil* é continuamente realizada na direção de cada uma das extremidades da peça, à exceção do limite que fica situado na zona da cintura. De notar que esse tipo de decoração - tomando a direção dos limites da peça - é algo distintivo nessa e noutras peças do traje. Os motivos que decoram o *mandil,* feitos com *cortadillo plateado e azul* (e não com azeviche) originam dois frisos, os quais se apresentam, com maior ampliação, nas figuras 55 e 56.

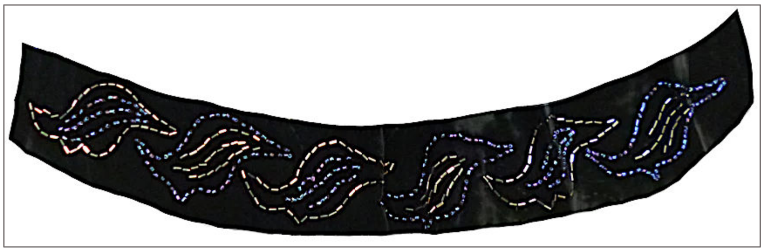


Figura 55. Friso presente no *mandil* do 'Traxe de Festa' - feminino.

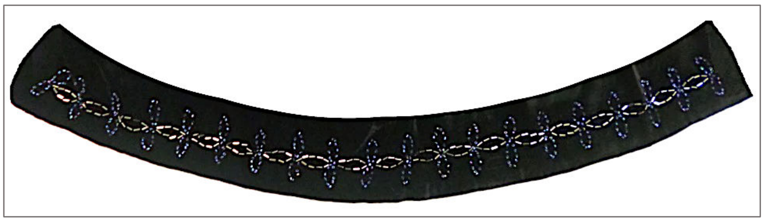


Figura 56. Friso presente no *mandil* do 'Traxe de Festa' - feminino.

O friso representado na figura 55 apresenta, somente, simetria de translação. Por sua vez, o friso exposto na figura 56, para além de simetria de translação, apresenta simetria de reflexão de eixo vertical, simetria de reflexão de eixo horizontal, e simetria de rotação de meia-volta. Tendo por base a classificação de "padrões planos monocromáticos" proposta por Washburn e Crowe (1988, p. 83), os frisos ilustrados nas figuras 55 e 56, são, respetivamente, do tipo *p111* e *pmm2*. Por ter simetria de reflexão vertical, o friso exposto na figura 56 reforça a simetria vertical que o 'Traxe de Festa' - feminino - exibe na sua globalidade. O mesmo não acontece com o friso exposto na figura 55, que não tem simetria vertical. Ainda assim, o motivo que dá origem a esse friso (por sucessivas translações) surge presente, também, em dois desenhos verticalmente simétricos do *mandil de festa*, o que contribui para reforçar a imagem simétrica do *mandil*, e do traje em geral, atenuando a quebra, nessa simetria, gerada pelo respetivo friso.

A *chaqueta* é uma das peças mais vistosas e elegantes do 'Traxe de Festa' - feminino -, levando adornos de azeviche e passamanaria (Laxe, 2003). Na figura 57, pode observar-se um exemplo de um 'Traxe de Festa' - feminino -, igualmente típico de Santiago de Compostela, no qual a mulher está a usar uma *chaqueta*. Essa peça do traje era usada pelas mulheres, essencialmente, no inverno (Pérez, 2005). De referir que, no 'Traxe de Festa' - feminino -, representado na figura 57, a mulher não utiliza *mandil*. Em vez disso, ela utiliza um *mantelo*, que é uma espécie de *mandil* de grandes dimensões (Laxe, 2003). O *mantelo* é aberto atrás e, em comprimento, fica sensivelmente um palmo acima da peça que vai por baixo, o que possibilita que as duas peças brilhem (Fraguas y Fraguas, 1985; Laxe, 2003). Geralmente, o *mantelo* apresenta uma faixa de veludo ou cetim preto que o bordeia, e é adornado de passamanaria e enfeites de azeviche (Laxe, 2003), conforme se vê no *mantelo* que integra o traje exibido na figura 57.

Figura 57. *Chaqueta* e *mantelo* integrados no 'Traxe de Festa' - feminino.

Na figura 58, encontra-se representada uma *chaqueta de festa*, com um corte e uma decoração distintos dos da *chaqueta* integrada no 'Traxe de Festa' - feminino - representado na figura 57. A *chaqueta* exibida na figura 58 encontra-se ampliada do lado direito, onde pode percecionar-se a existência de um motivo floral que se repete ao longo dos contornos da peça, e que surge, também, nos respetivos punhos. A decoração assim distribuída na *chaqueta* goza de simetria de reflexão de eixo vertical, satisfazendo a simetria vertical do 'Traxe de Festa' - feminino. A repetição do bordado floral ao longo da abertura frontal da *chaqueta* pode ser gerada por sucessivas translações. Por sua vez, na linha da cintura, o motivo floral que dá continuidade à decoração presente na abertura frontal da *chaqueta*, embora seja o mesmo, assume um aspeto diferente, que é o resultado da rotação de $90°$ do motivo floral originalmente considerado. Nesse caso, seria necessária a composição de duas isometrias - a rotação e a translação - para transformar o motivo considerado original no seu transformado, que depois se prolonga ao longo da linha de cintura da *chaqueta*, também este, por translações sucessivas. Do grupo simétrico do motivo floral que decora a *chaqueta*, que surge ampliado na figura 59, fazem parte duas simetrias de reflexão (de eixo vertical e de eixo horizontal) e duas simetrias de rotação (associadas aos ângulos $180°$ e $360°$).

Figura 58. *Chaqueta* do 'Traxe de Festa' - feminino (ampliada do lado direito).

Figura 59. Motivo presente na *chaqueta* do 'Traxe de Festa' - feminino.

Na figura 60, está representado um 'Traxe de Festa' - masculino -, típico de Santiago de Compostela. A simetria vertical que caracteriza o traje na sua globalidade é quebrada, essencialmente, por dois elementos, a saber: a *faixa* - colocada na cintura do homem - e a *monteira* (espécie de chapéu). Os restantes elementos visíveis no 'Traxe de Festa' - masculino - da figura 60, designadamente a *camisa*, o *chaleco* (igual a colete), e as *polainas* (proteção que se levava nas canelas) cumprem a simetria vertical.

Figura 60. 'Traxe de Festa' - masculino.

Trata-se, a *faixa*, de uma peça de uso geral, que não se diferenciava de uns lugares para os outros, variando, unicamente, a sua "categoria", que poderia ser mais ou menos luxuosa e de cor diferente (Fraguas y Fraguas, 1985). A *faixa* é uma banda feita de lã, que tem um comprimento variável - dependendo da zona -, e que apresenta as bordas terminadas em franjas (Laxe, 2003; Pérez, 2005). Essa peça do traje é enrolada por cima da *camisa* e do *calzón*, sendo dadas tantas voltas em torno da cintura quantas as que fossem possíveis, e deixando as franjas da *faixa* caídas sobre o lado esquerdo (Laxe, 2003). Ora, são, justamente, as franjas da *faixa* penduradas de um só lado que quebram a simetria vertical do traje, conforme se pode observar no 'Traxe de Festa' - masculino - representado na figura 60.

A *monteira* é o toucado masculino de todo o traje tradicional galego, embora o seu aspeto seja diferente consoante as zonas (Laxe, 2003). Tal como acontece com outras peças do traje galego, existem muitas variantes da *monteira*, ao nível do tamanho, da cor, do número de pontas, desde *monteiras* que não são mais do que simples casquetes, até *monteiras* altas, de várias pontas, com rebordos e plumas (Pérez, 2005). A *monteira* integrada no 'Traxe de Festa' - masculino - representado na figura 60 constitui outro elemento que, pelo seu formato e decoração, quebra a simetria que o traje globalmente apresenta.

Na figura 61, é possível observar, com detalhe, um exemplo de uma *monteira* distinta da integrada no 'Traxe de Festa' - masculino - representado na figura 60. Embora diferentes, essas duas *monteiras* (figuras 60 e 61) encontram-se decoradas com diversos motivos, bordados com várias cores - característica típica da decoração das *monteiras* em Santiago de Compostela. Esses diversos motivos apresentam diferentes simetrias (alguns até são assimétricos), não parecendo haver uma pretensão deliberada de disposição de tais motivos na *monteira* de maneira que a mesma ostente simetria vertical.

Figura 61. *Monteira* do 'Traxe de Festa' - masculino.

Na figura 62, está representado, com detalhe, um outro exemplo de uma *monteira* que é, também, um modelo de Santiago de Compostela. Contrariamente às duas anteriores, a *monteira* representada na figura 62 não se encontra decorada com vários motivos independentes. Em vez disso, é possível observar, nessa *monteira*, um conjunto de frisos que a ornamentam. Ora, mesmo tratando-se de três *monteiras* santiaguenses, a decoração desta última *monteira* (figura 62) demarca-se da das anteriores, confirmando a variedade existente ao nível deste elemento emblemático do 'Traxe de Festa' - masculino.

Figura 62. *Monteira* do 'Traxe de Festa'- masculino.

Nas figuras 63, 64 e 65, é possível observar três frisos que decoram a *monteira* representada na figura 62. O friso representado na figura 63 apresenta simetria de translação e simetria de reflexão de eixo horizontal. Os frisos representados nas figuras 64 e 65, para além de simetria de translação, têm simetria de reflexão de eixo vertical e simetria de rotação de meia-volta. Tendo por base a classificação de "padrões planos monocromáticos" proposta por Washburn e Crowe (1988, p. 83), os frisos ilustrados nas figuras 63, 64 e 65, são, respetivamente, do tipo *p1m1*, *pma2* e *pma2.* Ainda que os frisos expostos nas figuras 64 e 65 apresentem simetria reflexão de eixo vertical, o modo como surgem bordados na *monteira* não contribui para a simetria vertical que o 'Traxe de Festa' - masculino - globalmente exibe. Como tal, quer a forma, quer a decoração da *monteira* exposta na figura 62, são aspetos que quebram a simetria vertical do traje, fazendo com que a *monteira* se torne um elemento ainda mais proeminente.

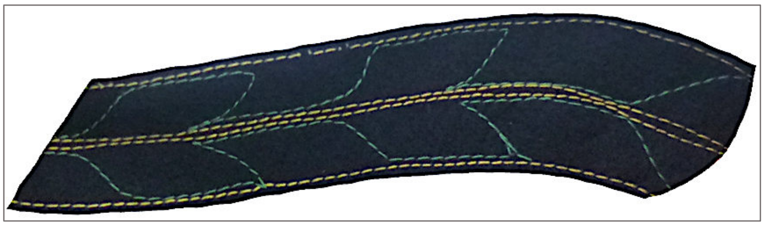


Figura 63. Friso presente na *monteira* do 'Traxe de Festa' - masculino.

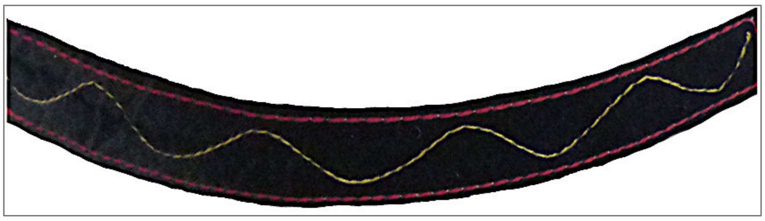


Figura 64. Friso presente na *monteira* do 'Traxe de Festa' - masculino.

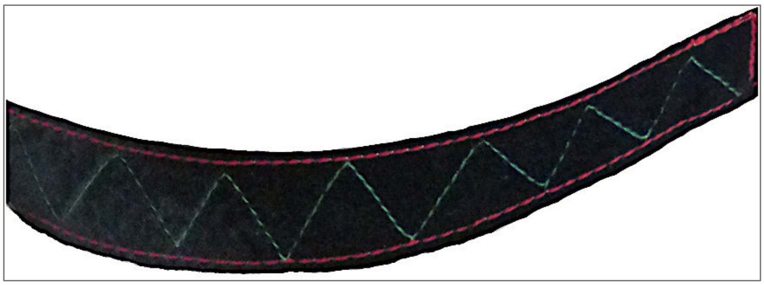


Figura 65. Friso presente na *monteira* do 'Traxe de Festa' - masculino.

Ainda sobre o 'Traxe de Festa' - feminino e masculino -, importa referir que o mesmo só era utilizado em determinadas datas do ano, como por exemplo a festa da paróquia, e também na ocasião de uma celebração ou ato importante, como o casamento, incluindo algumas peças novas (Pérez, 2005).

O 'Traxe de Feira' - que também pode ser designado por 'Traxe de Media Festa' - representa um intermédio entre o 'Traxe de Festa' e o 'Traxe de Decotío' (Pérez, 2005). Em relação ao 'Traxe de Festa', o 'Traxe de Feira' é muito mais singelo, liso e apresenta escassos motivos ornamentais (Pérez, 2005). O 'Traxe de Feira' era utilizado para ir à feira, à vila, e também se envergava aos domingos (Pérez, 2005). Nas figuras 66 e 67, encontram-se representados, respetivamente, um 'Traxe de Feira' - feminino - e um 'Traxe de Feira' - masculino -, ambos típicos de Santiago de Compostela. A simplicidade dos trajes representados nas figuras 66 e 67 é evidente quando comparados com os respetivos 'Traxes de Festa'.

Figura 66. 'Traxe de Feira' - feminino.

Figura 67. 'Traxe de Feira' - masculino.

As figuras exibidas pelo 'Traxe de Feira' - feminino - e pelo 'Traxe de Feira' - masculino - representados nas figuras 66 e 67, respetivamente, revelam-se verticalmente simétricas, existindo escassos elementos que comprometem essa simetria, muito em parte devido ao facto de esses trajes estarem praticamente desprovidos de padrões decorativos. No caso do 'Traxe de Feira' - feminino -, exposto na figura 66, a simetria vertical do traje é quebrada pela forma como o *mantón de caxemira* surge colocado sobre o busto da mulher. Os restantes elementos visíveis nesse traje, designadamente o *pano de pescozo*, o *mandil de liño* (semelhante a um avental, mas, desta vez, mais comprido), e a *saia de pano negro* cumprem a simetria. Em relação ao 'Traxe de Feira' - masculino -, exposto na figura 67, a exceção à simetria de reflexão vertical são as franjas da *faixa*, que ficam penduradas, unicamente, do lado esquerdo, tal qual se verificava no 'Traxe de Festa' - masculino. Os restantes elementos que se observam no 'Traxe de Feira' - masculino - da figura 67, nomeadamente o *chapeu* (em vez da exuberante *monteira*), a *camisa*, o *chaleco* (igual a colete), e as *calzas* (em vez do *calzón*) satisfazem a dita simetria.

Na figura 68, encontra-se apresentado, com maior ampliação, o *mantón de caxemira* integrado no 'Traxe de Feira' - feminino - representado na figura 66. O *mantón de caxemira* - também nomeado *pano de oito puntas* - é muito xaile muito vistoso, que apresenta, na sua decoração, motivos ornamentais que imitam os desenhos orientais próprios dos xailes de caxemira originários da Índia (daí o seu nome), e que se encontra delimitado, a toda a volta, por uma faixa preta (Laxe, 2003; Pérez, 2005). Trata-se de uma peça forânea, embora o seu uso se tivesse generalizado em toda a Galiza, e até na Península Ibérica (Laxe, 2003). O *mantón de caxemira* exibido na figura 68 tem forma quadrangular e, para ser colocado, é dobrado sobre uma das suas diagonais, não formando, no caso, duas partes simétricas, uma vez que as diagonais do *mantón* não são eixos de simetria do mesmo. Ademais, quando o *mantón* é colocado sobre os ombros da mulher, a forma triangular que fica visível nas suas costas não exibe simetria vertical.

Figura 68. *Mantón de caxemira* do 'Traxe de Feira' - feminino.

Na figura 69, apresenta-se uma fotografia de duas mulheres envergando o 'Traxe de Feira' - feminino -, nas quais é possível identificar, entre outros elementos, a utilização do *mantón de caxemira.*

Figura 69. 'Traxe de Feira' - feminino (Fraguas y Fraguas, 1985, p. 53).

Para terminar, o 'Traxe de Decotío' - que também pode adquirir a designação de 'Traxe do Traballo de todos os Días' - dependia da profissão/ocupação da pessoa e variava em função da estação do ano (Pérez, 2005). Relativamente ao 'Traxe de Feira', o 'Traxe de Decotío' é mais pobre e desparamentado (Pérez, 2005). A título de exemplo, apresenta-se, na figura 70, um 'Traxe de Decotío' - feminino -, quase sem ornamentação, e no qual a mulher utiliza um *pano de cabeza*, que servia para se proteger do calor.

Figura 70. 'Traxe de Decotío' - feminino.

5.4. Síntese

A análise etnomatemática de danças folclóricas características do *Grupo Folclórico de Vila Verde* e da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* envolveu a exploração dos três elementos da dança investigados - a coreografia, a música, e os acessórios (Ribas, 1983) - e a apresentação dos resultados.

Ao nível da coreografia, constituíram objeto de análise cinco danças: quatro características do *Grupo Folclórico de Vila Verde* - *Chula da Ribeira de Neiva*, *Vira Velho de Vila Verde*, *Malhão de ir ao Meio*, e *Vira ao Castelo* -, e uma característica da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* - *Maneo de Verdillo.* Para cada uma dessas danças, foram elaborados esquemas gráficos, que representam os movimentos de troca de posições realizados pelos dançarinos no decorrer das danças, bem como esquemas numéricos, que traduzem a sucessão de posições ocupadas pelos dançarinos ao longo das danças. Tendo por base esses esquemas, foi possível reconhecer diferentes formas associadas às configurações assumidas pelos dançarinos nas danças, muitas das quais eram modificadas durante a coreografia. Ademais, tornou-se possível identificar distintas isometrias associadas à movimentação dos dançarinos ao longo das danças, entre as quais a rotação e a translação (mais frequentes) e, ainda, a reflexão axial.

Ao nível da música, constituíram objeto de análise três músicas: uma que acompanha uma dança característica do *Grupo Folclórico de Vila Verde* - *Regadinho* -, e duas que acompanham duas danças características da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* - *Jota de Pol* e *Muiñeira de Pol*. As partituras dessas músicas foram base para a identificação de aplicações musicais da translação (a 'repetição' e a 'transposição'), da reflexão axial de eixo vertical (a 'regressão'), e da reflexão deslizante (a 'inversão'), tendo por base o trabalho de Garland e Kahn (1995). A identificação das aplicações musicais de cada uma dessas isometrias foi complementada e reforçada, visualmente, pela representação de algumas partituras - ou de trechos das partituras - em gráficos, tendo-se seguido a metodologia sugerida por Carvalho, Bassanezi e Pompeu Junior (2015), e posteriormente utilizada por Misura (2016). A exploração descrita permitiu a identificação de padrões repetitivos na estrutura de cada uma das músicas estudadas.

Ao nível dos acessórios, constituíram objeto de análise distintos tipos de trajes utilizados pelo *Grupo Folclórico de Vila Verde* - o 'Traje de Encosta', o 'Traje de Noivos', o 'Traje da Ribeira', e o 'Traje de Trabalho' - e diferentes classes de trajes utilizadas pela *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* - o 'Traxe de Festa', o 'Traxe de Feira', e o 'Traxe de Decotío'. A partir da apresentação de imagens representativas desses trajes, tornou-se possível identificar padrões geométricos de simetria existentes nos trajes, quando percecionados de forma global. Foram exploradas, também, certas peças dos trajes, identificando, num nível mais particular, diversos padrões geométricos aí presentes, entre os quais frisos.

CAPÍTULO VI. CONSTRUÇÃO DAS TAREFAS MATEMÁTICAS

6.1. O processo de construção das tarefas matemáticas

Tendo por base os aspetos matemáticos identificados na coreografia, nos acessórios, e na música de danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza, foi elaborado um conjunto de tarefas matemáticas, destinadas a diferentes níveis de ensino. Tal definição baseou-se numa análise comparativa entre os aspetos matemáticos descobertos nas danças e os conteúdos previstos nos documentos curriculares de referência para a disciplina de Matemática, da autoria do Ministério da Educação e Ciência (MEC), e que à data, estavam vigentes em Portugal - nomeadamente, o *Programa de matemática para o Ensino Básico* (MEC, 2013) e as *Metas curriculares de matemática do Ensino Básico* (MEC, 2012) -, tendo sido, na sequência disso, construídas tarefas destinadas ao 6.°, 7.°, e 8.° anos de escolaridade do Ensino Básico. Os conteúdos matemáticos subjacentes às tarefas construídas fazem parte, essencialmente, do domínio de *Geometria e Medida*, sendo, no entanto, estabelecidas várias conexões com outros domínios, como por exemplo: *Números e Operações*, *Álgebra*, e *Organização e Tratamento de Dados* (MEC, 2012, 2013).

Finda a construção da primeira versão das tarefas matemáticas, foi operacionalizada a primeira fase de validação das tarefas, as quais foram remetidas para um painel constituído por especialistas dos domínios científico (professores universitários), pedagógico (professores universitários e professores do Ensino Básico) e cultural (pessoas que tinham feito/faziam parte de grupos folclóricos). Do painel composto por dez especialistas, somente dois revisores é que não responderam à proposta endereçada, tendo os restantes remetido as suas contribuições através do preenchimento de um inquérito (anexo 1). Sempre que algum membro do painel considerou necessário e útil, foram estabelecidas linhas de comunicação mais diretas com os próprios, no sentido de facilitar a partilha e o esclarecimento de ideias.

Na sequência da primeira fase de validação das tarefas matemáticas, foi realizada a restruturação das mesmas. Essa reestruturação fundamentou-se nas múltiplas observações, recomendações, e sugestões de melhoria enunciadas pelo painel de especialistas. Da reestruturação feita resultaram dez conjuntos de tarefas matemáticas, que, num momento posterior, foram implementados em sala de aula. Em termos de estrutura, cada conjunto de tarefas encontra-se organizado em função do elemento da dança - coreografia, música, ou acessórios - que é proposto explorar nas respetivas tarefas, e de acordo com o ano de escolaridade - 6.°, 7.°, ou 8.° ano - a que se destinam. Ademais, cada conjunto de tarefas propõe a exploração, apenas, de uma dança, de uma música, ou dos trajes de um único grupo folclórico.

6.2. As tarefas matemáticas

No quadro 1, encontram-se designados os dez conjuntos de tarefas matemáticas construídos, identificando-se, para cada um desses conjuntos, o elemento das danças folclóricas dos grupos que é proposto explorar nas respetivas tarefas, bem como o ano de escolaridade a que as tarefas se destinam.

Quadro 1. Tarefas matemáticas construídas e elementos das danças folclóricas a explorar.

Coreografia		
6.º ano	▪ **As voltas da Chula**	Dança: *Chula da Ribeira de Neiva* - *Grupo Folclórico de Vila Verde*.
	▪ **Vira e volta a virar**	Dança: *Vira Velho de Vila Verde* - *Grupo Folclórico de Vila Verde*.
7.º ano	▪ **Malhão em roda(s)**	Dança: *Malhão de Ir ao Meio* - *Grupo Folclórico de Vila Verde*.
8.º ano	▪ **Vira e revira a cruz**	Dança: *Vira ao Castelo* - *Grupo Folclórico de Vila Verde*.
	▪ **Vamos bailar o "Maneo"**	Dança: *Maneo de Verdillo* - *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*.
Música		
6.º ano	▪ **Rega rega, Regadinho**	Música que acompanha a dança: *Regadinho* - *Grupo Folclórico de Vila Verde*.
8.º ano	▪ **Ao ritmo da "[R]ota"**	Música que acompanha a dança: *Jota de Pol* - *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*.
	▪ **A harmonia da "Muiñeira"**	Música que acompanha a dança: *Muiñeira de Pol* - *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*.
Acessórios		
6.º ano	▪ **À moda de Vila Verde**	Trajes: *Grupo Folclórico de Vila Verde*.
8.º ano	▪ **Diz-me o que vestes, dir-te-ei de onde és...**	Trajes: *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*.

Nas páginas que se seguem, apresenta-se cada um dos conjuntos de tarefas matemáticas anteriormente designado. Importa salientar que as tarefas serão apresentadas respeitando, integralmente, os aspetos gráfico e escrito com que, *a posteriori*, foram implementadas em contexto de sala de aula, e onde funcionaram como instrumentos de recolha de dados, aplicados pela investigadora.

Nome: ____

AS VOLTAS DA CHULA

"Chula da Ribeira de Neiva", ***Grupo Folclórico de Vila Verde***

"Chula da Ribeira de Neiva", ou apenas "Chula da Ribeira", é uma das danças que faz parte do repertório do Grupo Folclórico de Vila Verde. É oriunda da parte noroeste do concelho, confinante com Ponte de Lima. Esta chula dança-se em roda, num ritmo vivo, com os pares (homem e mulher) de mãos agarradas e segurando-se discretamente pela cintura.

Visualiza o vídeo da dança "Chula da Ribeira de Neiva" para te ajudar a resolver as tarefas propostas.

1. Na figura 1, estão representadas as posições iniciais dos pares na dança. Considerou-se que as suas posições são equidistantes de O e dos dois pares consecutivos.

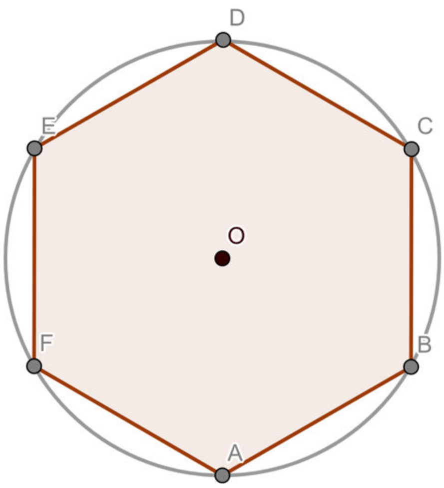


Figura 1

1.1. Como descreverias esta figura a um amigo que não a está a ver?

____

____

____

Em roda, os pares iniciam a coreografia com movimentos compassados laterais, ora para um lado, ora para o outro, sem saírem dos seus lugares. Desse movimento de "serrar", os pares, girando sobre si próprios e mantendo-se sempre agarrados, trocam de posições entre si, "serrando" entre estas trocas.

2. Considera o **primeiro movimento** de troca de posições ocorrido entre os pares na coreografia.

2.1. Representa esse movimento no esquema da figura 2, a partir das posições iniciais dos pares. Podes utilizar desenhos e/ou palavras.

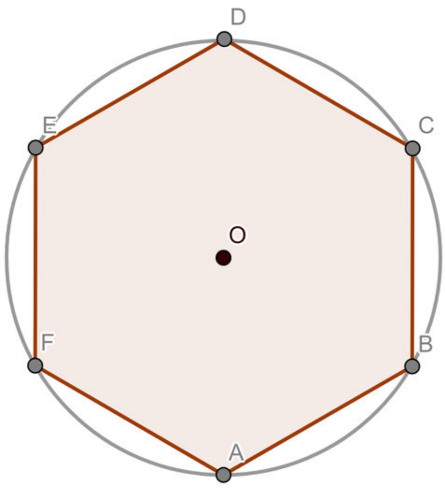


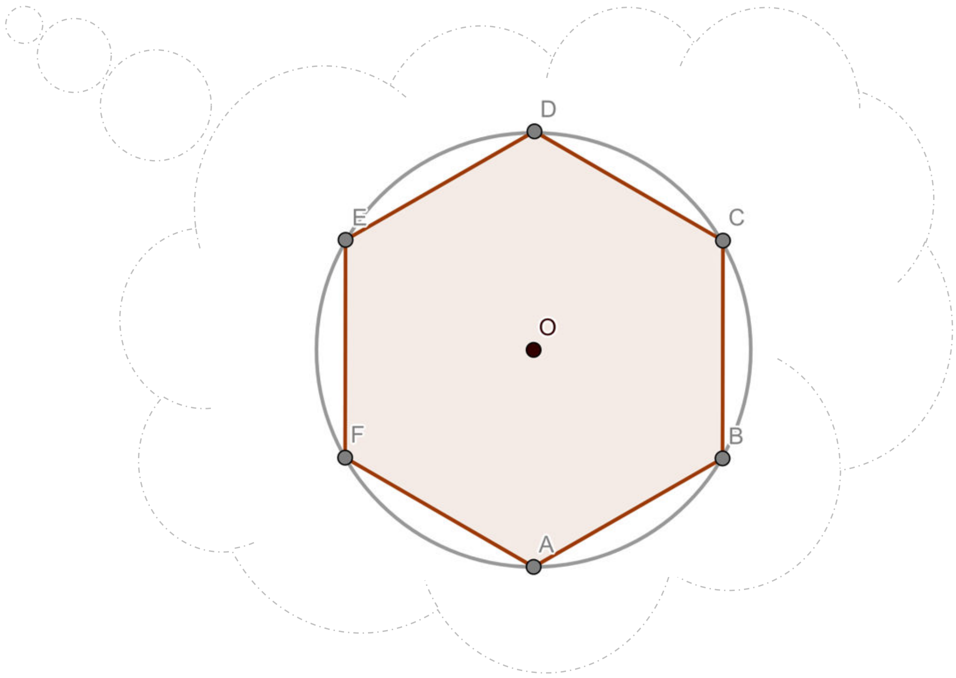
Figura 2

2.2. Identifica e caracteriza a isometria que está associada a esse movimento.

3. Apesar de todos os movimentos de troca de posições ocorridos entre os pares na coreografia estarem associados ao mesmo tipo de isometria, esta transformação geométrica não é sempre igual nas várias trocas, tornando a dança muito mais cativante.

3.1. Descobre que diferentes isometrias caracterizam os diversos movimentos de troca de posições da dança. Para te ajudar, podes elaborar esquemas e/ou desenhos.

4. Ao pensar sobre os vários movimentos de troca ocorridos na coreografia, o Leonardo afirmou: «Independentemente das trocas de posições efetuadas entre os pares, as suas posições formam sempre um polígono coincidente com $[ABCDEF]$.».



4.1. Concordas com o Leonardo? Justifica a tua resposta.

4.2. Descobre o número de simetrias de reflexão e de rotação do polígono $[ABCDEF]$.

5. No referencial cartesiano da figura 3, está assinalada a posição inicial A de um par, bem como as posições que este pode assumir no decurso das trocas entre pares ocorridas na dança.

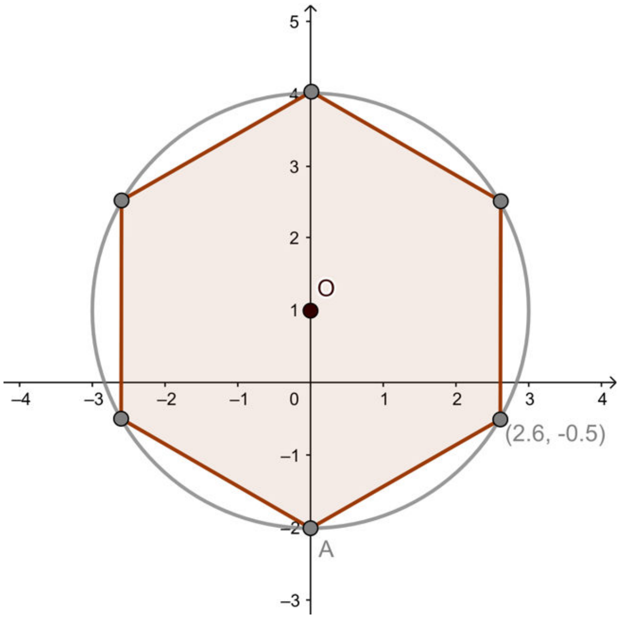


Figura 3

5.1. Determina as sucessivas coordenadas das posições ocupadas pelo par no decorrer da dança, a partir da sua posição inicial A até ter passado por todas as posições assinaladas acima.

5.2. Caracteriza as isometrias associadas aos movimentos para as sucessivas posições do par, que apontaste anteriormente.

5.3. Determina o comprimento total do percurso efetuado pelo par.

Notas: Considera $1\ m$ como a unidade de medida do referencial cartesiano da figura 3. Utiliza $3{,}14$ para o valor aproximado de π. Nos cálculos intermédios, não efetues arredondamentos. Apresenta todos os cálculos que efetuares e o resultado arredondado às centésimas.

6. Lê com atenção a descrição da sequência de movimentos do par ao longo de toda a coreografia, a partir da sua posição inicial A, assinalada na figura 4.

- $\frac{4}{6}$ *da circunferência no sentido positivo*;
- $\frac{1}{3}$ *da circunferência no sentido positivo*;
- $\frac{1}{6}$ *da circunferência no sentido negativo*;
- $\frac{2}{6}$ *da circunferência no sentido positivo*;
- $\frac{1}{3}$ *da circunferência no sentido positivo*;
- $\frac{1}{6}$ *da circunferência no sentido negativo*;
- $\frac{2}{6}$ *da circunferência no sentido positivo*.

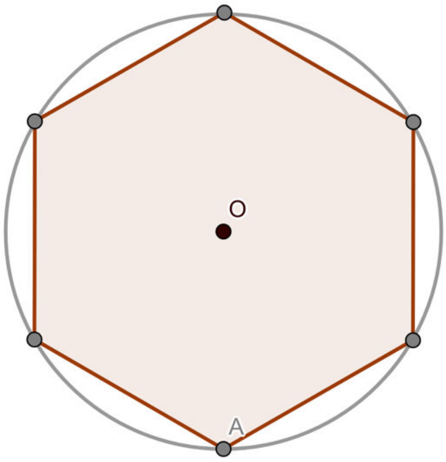


Figura 4

6.1. Descobre a posição A', assumida pelo par no final da coreografia, e assinala-a na figura 4.

6.2. Mostra que o deslocamento do par desde a sua posição inicial A até à posição em que terminou foi $1\frac{2}{3}$ *da circunferência*. Podes utilizar cálculos e/ou desenhos.

Visualiza o novo vídeo da dança "Chula da Ribeira" para te ajudar a resolver as tarefas que se seguem.

7. Considera os dois exemplos de execução da dança folclórica "Chula da Ribeira" que já visualizaste.

7.1. Qual é a principal diferença existente entre a disposição dos dançarinos neste vídeo e no que visualizaste anteriormente da mesma dança?

____

____

7.2. Elabora um esquema que represente as posições iniciais dos dançarinos nesta dança.

7.3. Tendo em consideração o esquema, descobre se as rotações que caracterizam os movimentos dos pares serão ou não iguais às do vídeo anterior. Se não forem iguais, explica o que muda.

____

____

____

Nome: ____

VIRA E VOLTA A VIRAR

"Vira Velho de Vila Verde", ***Grupo Folclórico de Vila Verde***

"Vira Velho de Vila Verde", também designado "Fandango Minhoto-Galaico", pela influência que a Galiza oferece à região, é uma das danças mais emblemáticas do repertório do Grupo Folclórico de Vila Verde. Aqui costuma dizer-se que quem não sabe dançar o "Vira de Vila Verde" não sabe dançar. Este vira é dançado em duas linhas, uma composta por homens e outra por mulheres.

Visualiza o vídeo da dança "Vira Velho de Vila Verde" para te ajudar a resolver as tarefas propostas.

1. No quadriculado da figura 5, estão representadas algumas posições iniciais dos dançarinos na dança. Observa que as posições de homens e mulheres estão assinaladas com cores diferentes.

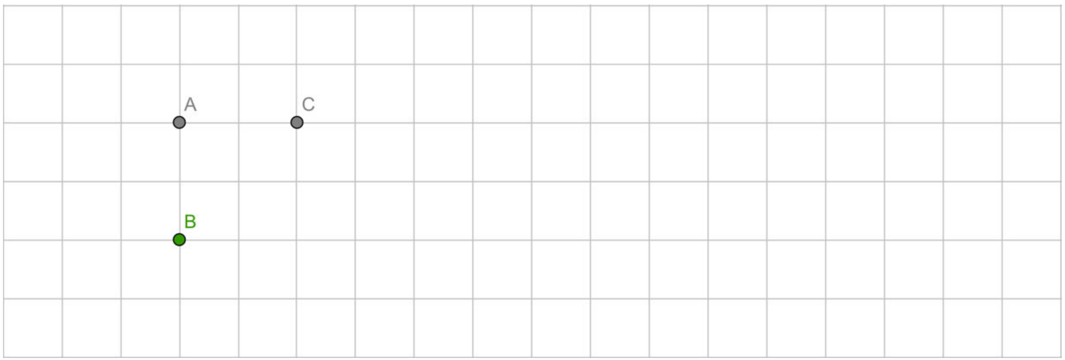


Figura 5

1.1. Completa a representação das posições iniciais dos dançarinos na figura 5, mantendo as cores.

1.2. Se unires os pontos com a mesma cor, obténs dois segmentos de reta. Qual é a posição relativa desses segmentos de reta? Justifica a tua resposta.

____

____

A coreografia inicia-se com o “serrar”, uma série de movimentos executados pelos dançarinos de cada par quando estão colocados frente a frente, mantendo-se, todavia, nos seus lugares. O “serrar” é bastante típico do folclore coreográfico de Vila Verde, estando presente não apenas nesta dança, como em muitas outras danças do grupo.

2. Na figura 6, está representada a sequência de movimentações dos pés de <u>**um dançarino**</u> no “serrar”.

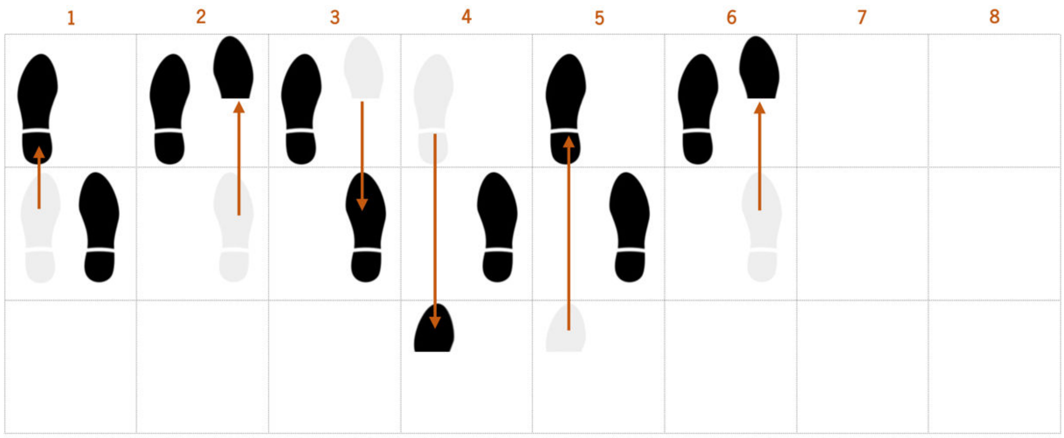


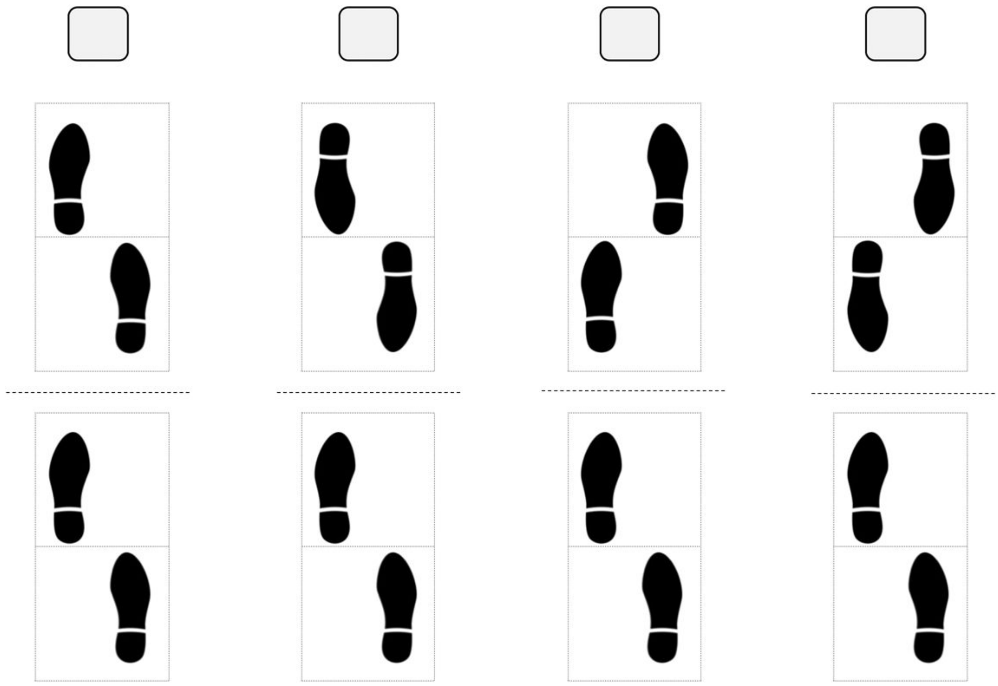
Figura 6

2.1. Completa a figura 6 com os dois movimentos de pés que se seguem.

3. Como já te deves ter apercebido, existe uma regularidade no movimento de “serrar”, tornando-o mais fácil de aprender pelos dançarinos.

3.1. <u>Sem desenhar</u>, descobre a que número da figura 6 corresponde o 20.º termo da sequência de movimentações dos pés de um dançarino no “serrar”. Mostra como chegaste à tua resposta.

4. Assinala com um **X** o esquema que reproduz corretamente a posição dos pés de um **par de dançarinos** colocados frente a frente durante o movimento de “serrar”.



5. Desenha a sequência de movimentações dos pés representada na figura 6, agora realizada pelo **par desse dançarino,** que se encontra à sua frente.

Após o “serrar”, os pares movimentam-se, tanto para um lado, como para o outro, sendo que, nessas ocasiões, os dançarinos de cada par ficam colocados em posição lateral ou de perfil. Apesar desses movimentos, as duas linhas que caracterizam a dança mantêm-se.

6. Observa a figura 7, que retrata um dos momentos da coreografia em que os dançarinos de cada par se encontram em posição de perfil.

Figura 7

6.1. Quantos eixos de simetria poderiam ser traçados no chão da figura 7, considerando o movimento dos dançarinos nesta parte da coreografia? Justifica a tua resposta.

____

____

Na última parte da coreografia, os dançarinos executam o “trespasse”, uma troca de posições entre os homens e as mulheres que se encontram frente a frente nas duas linhas. Em cada “trespasse”, os dançarinos de cada par passam uns pelos outros, invertendo as suas posições nas linhas.

7. Considera o primeiro movimento de “trespasse” realizado pelos dançarinos.

7.1. Identifica a isometria que transforma as posições iniciais dos dançarinos nas posições que resultam do “trespasse”.

____

____

7.2. Elabora um esquema que represente este movimento, considerando a resposta anterior.

8. Na parte da coreografia que visualizaste, o “trespasse” ocorreu 6 vezes, terminando com os dançarinos nas posições iniciais.

8.1. Se este movimento fosse realizado 100 vezes, os dançarinos também voltariam às posições iniciais? Justifica a tua resposta.

____

____

Nome: ____

MALHÃO EM RODA(S)

"Malhão de Ir ao Meio", ***Grupo Folclórico de Vila Verde***

O "malhão" é uma das danças mais características do folclore de Vila Verde. Aqui, todos os "malhões" são dançados em roda. A dança "Malhão de Ir ao Meio" reflete a importância que os malhadores do meio tinham nas "malhadas" - trabalho agrícola que consistia em usar o "malho" (alfaia agrícola) para debulhar cereais como o milho ou o trigo -, exemplificando a ruralidade deste concelho.

Visualiza o vídeo da dança "Malhão de Ir ao Meio" para te ajudar a resolver as tarefas propostas.

1. Na figura 8, estão representadas as posições iniciais dos dançarinos na dança. Considerou-se que as suas posições são equidistantes de O e dos dois dançarinos consecutivos. Observa que as posições de homens e mulheres estão assinaladas com cores diferentes.

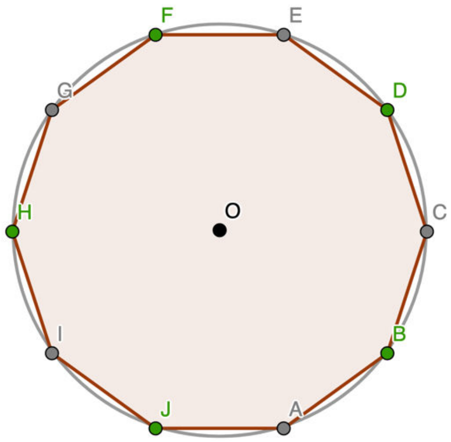


Figura 8

1.1. Descreve esta figura.

____

____

____

Uma vez dispostos em roda, os pares, com homens e mulheres colocados alternadamente, “serram”, isto é, realizam movimentos compassados laterais, ora para um lado, virando-se para o dançarino anterior, ora para o outro, virando-se para o dançarino seguinte, sem saírem das suas posições. Este movimento de “serrar” é bastante típico das danças deste grupo folclórico.

2. Observa a figura 9, que retrata um dos momentos da coreografia em que os dançarinos realizam o movimento de “serrar”.

Figura 9

2.1. Quantos eixos de simetria poderiam ser traçados no chão da figura 9, considerando o movimento dos dançarinos nesta parte da coreografia? Justifica a tua resposta.

____

____

3. Considera o movimento de "serrar", já descrito anteriormente, durante o qual cada dançarino efetua rotações sobre si próprio, virando-se ora para um dos dançarinos que está ao seu lado, ora para o outro, sem chegar a completar meia-volta em cada rotação.

3.1. Atendendo ao descrito, assinala, na figura 10, os ângulos associados ao movimento de "serrar" realizados por cada dançarino e descobre as respetivas amplitudes aproximadas.

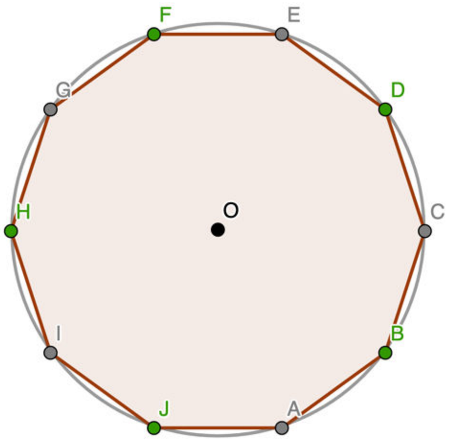


Figura 10

No momento seguinte da coreografia, os pares movimentam-se em torno do centro da circunferência. A determinada altura, os homens, passando por trás das mulheres, “vão ao meio”, onde batem com o pé esquerdo no chão, enquanto as mulheres efetuam uma volta sobre si próprias, e depois ambos prosseguem os movimentos de rotação. Estas idas ao meio repetem-se até ao final da dança.

4. Na figura 11, estão assinaladas as posições dos dançarinos no primeiro momento em que os homens “vão ao meio”. O ponto O é o centro das duas circunferências. Considerou-se que as posições das dançarinas B, D, F, H e J são equidistantes de O e das duas dançarinas consecutivas. O mesmo se verifica em relação às posições dos dançarinos A, C, E, G e I.

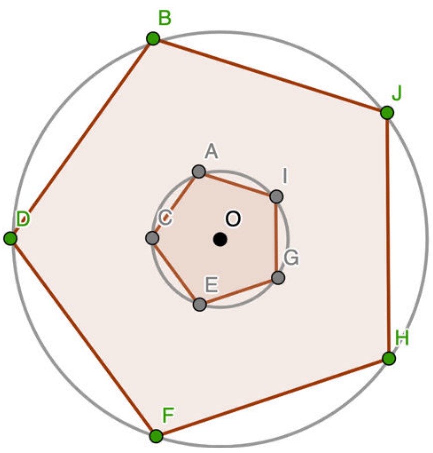


Figura 11

4.1. Sem ter quaisquer outras informações, é possível afirmar que o polígono $[BDFHJ]$ e o polígono $[ACEGI]$ são semelhantes? Justifica a tua resposta.

___

___

___

4.2. Explora o que é igual e o que é diferente entre o polígono $[BDFHJ]$ e o polígono $[ACEGI]$.

4.3. Considerando que, na figura 11, a distância entre duas dançarinas consecutivas é, aproximadamente, $2{,}1\ m$, e a distância entre dois dançarinos consecutivos é, sensivelmente, $0{,}7\ m$, caracteriza a homotetia que transforma o polígono $[BDFHJ]$ no polígono $[ACEGI]$. Mostra como chegaste à tua resposta.

4.4. Se, na figura 12, a dançarina na posição J fica a, aproximadamente, $1{,}8\ m$ do centro O, a que distância é que se encontrará do dançarino na posição I? Mostra como chegaste à tua resposta.

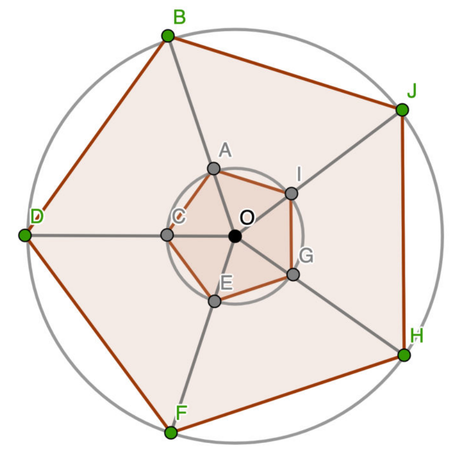


Figura 12

4.5. Completa as igualdades seguintes, considerando o Teorema de Tales.

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OF}} = \frac{\dots}{\overline{OH}} = \frac{\overline{EG}}{\dots} = \ \cdots$$

4.6. Descobre a razão entre o perímetro do polígono $[ACEGI]$ e o perímetro do polígono $[BDFHJ]$. Mostra como chegaste à tua resposta.

4.7. Descobre a razão entre a área do polígono $[ACEGI]$ e a área do polígono $[BDFHJ]$. Mostra como chegaste à tua resposta.

Nota: Se necessário, utiliza $1{,}5\ m$ para o valor aproximado do apótema do polígono $[BDFHJ]$.

4.8. Compara a razão entre os perímetros dos polígonos e a razão entre as áreas dos polígonos, que descobriste nas duas perguntas anteriores. O que podes conjeturar?

Nome: ____

VIRA E REVIRA A CRUZ

"Vira ao Castelo", ***Grupo Folclórico de Vila Verde***

O "vira" é umas das danças predominantes de Vila Verde. "Vira ao Castelo", um dos "viras" que faz parte do seu folclore, é dançado por um ou dois grupos de quatro pares de dançarinos, colocados em forma de "cruz". Pensa-se que esta dança tenha alguma ligação ao Castelo dos Mouros, que parece ter existido outrora na freguesia de Barbudo, pertencente ao concelho de Vila Verde.

Visualiza o vídeo da dança "Vira ao Castelo" para te ajudar a resolver as tarefas propostas.

1. No quadriculado da figura 13, estão representadas algumas posições iniciais dos dançarinos na dança. Observa que as posições de homens e mulheres estão assinaladas com cores diferentes.

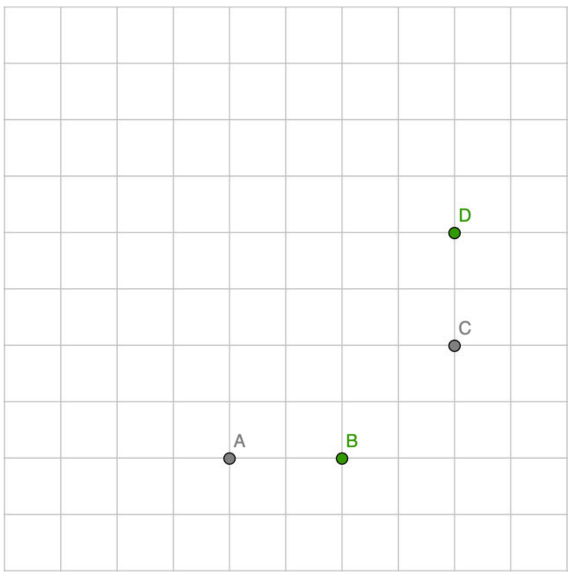


Figura 13

1.1. Completa a representação das posições iniciais dos pares de dançarinos na figura 13, mantendo as cores, e respeitando a configuração de "cruz" que assumem nesta dança.

A coreografia inicia-se com o “serrar”, uma série de movimentos executados pelos dançarinos de cada par quando estão colocados frente a frente, e que é bastante típico das danças do concelho. Enquanto dois dos pares que estão frente a frente continuam o “serrar”, os outros dois avançam em direção à zona central e depois recuam até à posição inicial. A seguir, invertem-se os movimentos.

2. No quadriculado da figura 14, estão representadas as posições iniciais dos dançarinos, bem como as posições que estes podem assumir no decurso dos seus movimentos de avanço e recuo.

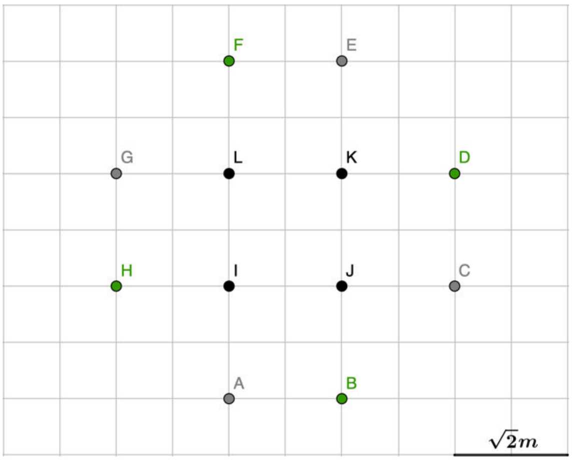


Figura 14

2.1. Descobre o **<u>número mínimo de vetores</u>** que são necessários para representar os movimentos de avanço e recuo dos quatro pares e desenha-os na figura 14.

2.2. Compara os vetores que desenhaste anteriormente, atendendo à direção, sentido e comprimento dos mesmos, e classifica-os em função dessas propriedades.

2.3. Investiga os quadriláteros formados pelos movimentos de avanço e recuo de **um dos pares**.

Sugestões de exploração: Nomeia o quadrilátero com maiores e com menores dimensões que é possível formar. Explora a variação do comprimento dos lados dos quadriláteros e a respetiva variação da área. Será que os quadriláteros formados pelos movimentos dos diferentes pares são semelhantes?

2.4. Identifica e calcula **a maior e a menor distâncias** entre dois dançarinos de pares diferentes, durante os movimentos de avanço e recuo que realizam ao mesmo tempo.

No momento seguinte da coreografia, os mesmos dois pares que iniciaram anteriormente os movimentos de avanço e recuo avançam novamente para, desta vez, rodopiarem na zona central e depois recuarem até à posição inicial. Enquanto isso, os outros dois pares prosseguem no movimento de “serrar”. Mais uma vez, a seguir, dá-se a inversão dos movimentos realizados pelos pares.

3. No quadriculado da figura 15, está assinalado, a vermelho, o caminho percorrido pelos **primeiros pares** nos movimentos de avanço, rodopio e recuo que realizam a partir das suas posições iniciais.

Nota: Os pontos W e X não representam posições de dançarinos.

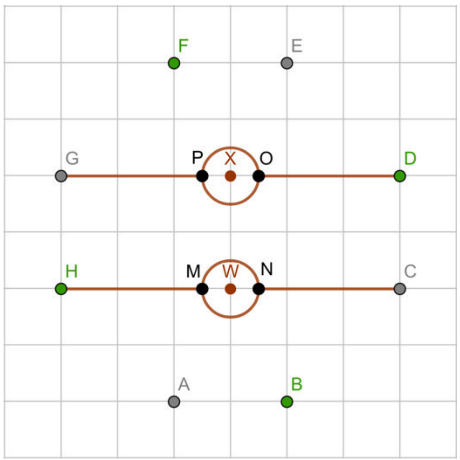


Figura 15

3.1. Completa o quadro 1 com as isometrias que descrevem os movimentos realizados por um par.

Dançarino que parte da posição inicial *G*

Avanço: ____

Rodopio: ____

Recuo: ____

Dançarino que parte da posição inicial *H*

Avanço: ____

Rodopio: ____

Recuo: ____

Quadro 1

4. Considera o referencial cartesiano da figura 16 e responde às questões acerca dos movimentos de avanço, rodopio e recuo realizados pelos **segundos pares**, a partir das suas posições iniciais.

Nota: Os pontos Y, Z, Q e R não representam posições de dançarinos.

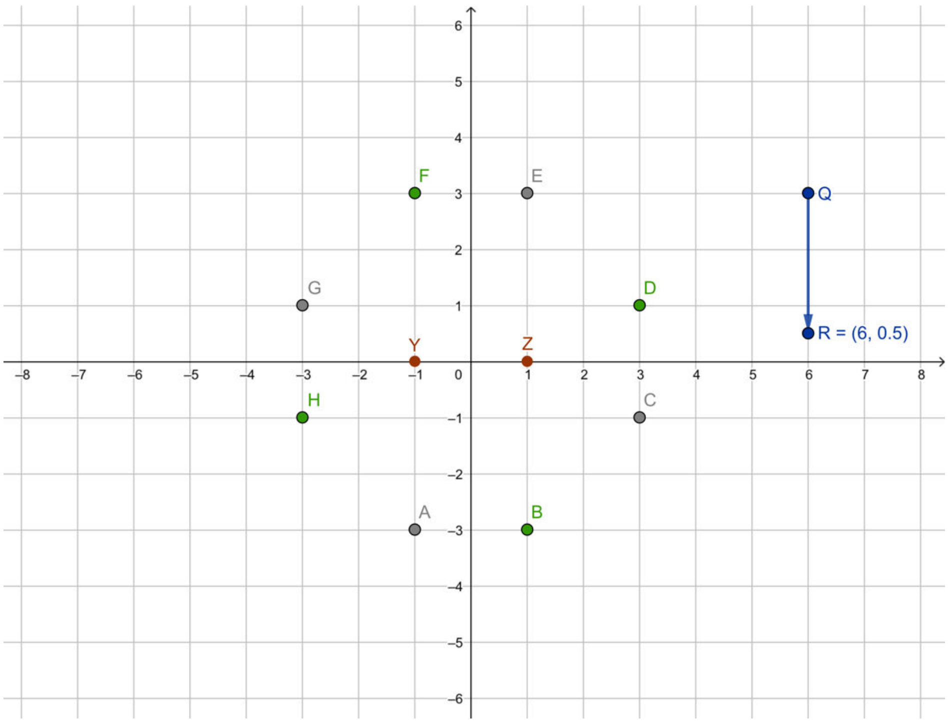


Figura 16

4.1. Indica as coordenadas de F e dos seus transformados, F', F'', F''' e F'''', pelas isometrias que descrevem os movimentos de avanço, rodopio e recuo realizados pelo dançarino.

$F(\_\_\_\_,\_\_\_\_)$

$\Downarrow \; T_{\overrightarrow{QR}}$

$F'(\_\_\_\_,\_\_\_\_)$

$\Downarrow \; R_{(Y,-180°)}$

$F''(\_\_\_\_,\_\_\_\_)$

$\Downarrow \; R_{(Y,-180°)}$

$F'''(\_\_\_\_,\_\_\_\_)$

$\Downarrow \; T_{\overrightarrow{-QR}}$

$F''''(\_\_\_\_,\_\_\_\_)$

4.2. Associa os movimentos de avanço, rodopio e recuo realizados pelos dançarinos que partem das **posições iniciais** $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{E}$ aos pontos simétricos de F', F'', F''' e F'''', em relação:

Ao eixo dos yy:

- Dancarino que parte da posição inicial _____

Ao eixo dos xx:

- Dançarino que parte da posição inicial _____

À origem do referencial:

- Dançarino que parte da posição inicial _____

4.3. Calcula a distância percorrida por **um dançarino** após efetuar os movimentos de avanço, rodopio e recuo.

Notas: Considera $1\ m$ como a unidade de medida do referencial cartesiano da figura 16. Utiliza $3{,}1416$ para o valor aproximado de π. Nos cálculos intermédios, não efetues arredondamentos. Apresenta todos os cálculos que efetuares e o resultado arredondado às milésimas.

Na parte final da coreografia, os mesmos dois pares que iniciaram sempre os movimentos realizam o "trespasse". Ou seja, há uma troca de posições entre os homens e as mulheres que ficam frente a frente quando avançam. Aquando disso, os outros dois pares "serram". A seguir, invertem-se os movimentos. Esta inversão ocorre duas vezes mais para os quatro pares voltarem às posições iniciais.

5. No quadriculado da figura 17, está representada, com vetores, uma parte do caminho percorrido pelos **<u>primeiros pares</u>** durante o "trespasse".

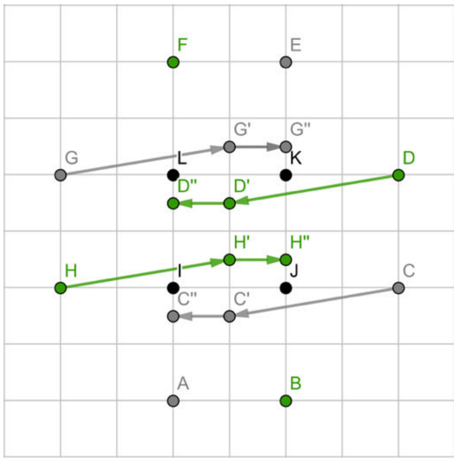


Figura 17

5.1. Ao refletirem sobre a adição dos vetores associados ao movimento de cada um dos dançarinos, a Maria e o Mateus revelaram opiniões discordantes. Lê os seus comentários.

Maria: «É fácil! Por exemplo, a adição dos vetores $\overrightarrow{GG'}$ e $\overrightarrow{G'G''}$ é o vetor $\overrightarrow{GG''}$. Este vetor tem a origem do primeiro vetor e a extremidade do segundo vetor.»

Mateus: «Atenção Maria! Também está correto se disser que essa adição resulta no vetor $\overrightarrow{HH''}$. São iguais!»

5.2. Qual é a tua opinião em relação aos comentários? Justifica a tua resposta.

5.3. Preenche o quadro 2, assinalando com um **X** o(s) vetor(es) que resulta(m) de cada uma das adições de vetores apresentadas.

	$\overrightarrow{CC'}$	$\overrightarrow{C'C''}$	$\overrightarrow{DD'}$	$\overrightarrow{D'D''}$	$\overrightarrow{GG'}$	$\overrightarrow{G'G''}$	$\overrightarrow{HH'}$	$\overrightarrow{H'H''}$	$\vec{0}$
$\overrightarrow{GL} + \overrightarrow{LG'}$									
$\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{JC'}$									
$\overrightarrow{H'H''} + \overrightarrow{D'D''}$									
$\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IC'}$									
$\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{CC'}$									
$\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{C'C''}$									

Quadro 2

5.4. Completa as igualdades relativas aos movimentos de translação executados pelos dançarinos.

$G + \overrightarrow{GG'} =$ ____	$T_{\overrightarrow{G'G''}}(G') =$ ____
____ $+ \overrightarrow{GG'} = H'$	$H' +$ ____ $= H''$
$T_{\overrightarrow{\_\_\_}}(D) = D'$	$T_{-\overrightarrow{H'H''}}($____$) = D''$
$\left(T_{\overrightarrow{C'C''}} \circ T_{\overrightarrow{CC'}}\right)(C) =$ ____	
$(T_{___} \circ T_{___})($____$) =$ ____	

6. No quadriculado da figura 18, está representada a totalidade do caminho percorrido pelos **<u>segundos pares</u>** durante o “trespasse”.

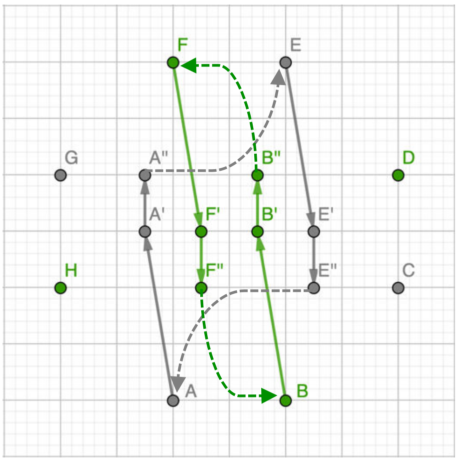


Figura 18

6.1. Escolhe **<u>um dos pares</u>** e explora as isometrias capazes de transformar as posições iniciais destes dançarinos nas suas posições finais, decorrentes do movimento de “trespasse”.

<u>Nota</u>: Se necessário, podes marcar outros pontos na figura 18.

Nome: ____

VAMOS BAILAR O “MANEO”

“Maneo de Verdillo”, ***Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos***

O “maneo” é uma variante da “jota”, uma dança com muita expressão na Galiza (Espanha). É típico de alguns municípios da província da Corunha, como o município de Carballo, de onde é oriundo o “Maneo de Verdillo”. Os bailarinos iniciam esta dança dispostos em duas linhas, uma composta por homens e outra por mulheres, mas esta configuração muda ao longo da coreografia.

Visualiza o vídeo da dança “Maneo de Verdillo” para te ajudar a resolver as tarefas propostas.

1. Como tiveste oportunidade de visualizar, os dançarinos não mantêm a mesma configuração com que iniciaram a dança.

1.1. Discute as diferentes configurações dos dançarinos que se podem identificar nesta dança. Podes utilizar desenhos e/ou palavras.

A dança é formada por "puntos" e "voltas", que se sucedem várias vezes, e cuja transição é marcada por "golpes" nas pandeiretas. A coreografia inicia-se com os bailarinos dispostos em duas linhas a realizarem o "punto", sob a orientação de um guia, que introduz a combinação de passos a executar. Depois, saem para bailar a "volta", isto é, um conjunto de movimentos de "volta" ao "punto".

2. Nas figuras 19 e 20, estão representados dois momentos que fazem parte de duas "voltas" da dança. Como pudeste visualizar, estas figuras remetem para movimentos de rotação que são realizados pelos bailarinos organizados em linhas paralelas, e adquirem a designação de "tablóns".

Figura 19

Figura 20

2.1. Explora o que é igual e o que é diferente nos movimentos de rotação ("tablóns") sugeridos nas figuras 19 e 20.

2.2. Investiga as linhas geradas pelos movimentos de rotação dos dançarinos sugeridos nas figuras 19 e 20. O que resultará, **no plano**, do percurso efetuado pelos dançadores em cada "tablón"? Para te ajudar, podes elaborar esquemas e/ou desenhos.

3. Na dança “Maneo de Verdillo”, existem quatro “voltas”. Três dessas “voltas” (1.ª, 3.ª e 4.ª) correspondem à realização de “tablóns”, que exploraste anteriormente. Na outra “volta” (2.ª), os dançarinos, organizados em duas linhas, realizam “embotados”, ou seja, passos saltados para a frente e para trás, marcando exageradamente o ritmo. Dessa forma, nos “embotados”, as duas linhas de dançarinos ora se aproximam, ora se afastam.

3.1. Identifica a isometria envolvida na realização dos “embotados” pelos dançarinos.

____

____

3.2. Considerando a resposta anterior, elabora um esquema que represente os movimentos dos dançarinos quando realizam os “embotados”.

4. Conforme já sabes, a dança “Maneo de Verdillo” compõe-se de “puntos” e de “voltas”, havendo, entre estes, curtos momentos de transição em que os bailarinos se movimentam sobre uma circunferência. Até ao momento, tiveste oportunidade de explorar isometrias associadas ao movimento dos dançarinos nas “voltas”.

4.1. Investiga, agora, outros exemplos de isometrias associados ao movimento dos dançarinos que surgem nas restantes partes da dança.

Nome: ____

REGA REGA, REGADINHO

"Regadinho", ***Grupo Folclórico de Vila Verde***

O "Regadinho" é uma dança de roda, do grupo das danças generalizadas, que se tornou muito popular em Vila Verde. O acompanhamento musical desta dança é feito pela Tocata Tradicional de Vila Verde, que inclui vários instrumentos: a concertina, o cavaquinho, a viola braguesa, o violão, a flauta de cana, o reque-reque, os ferrinhos e o bombo. O ritmo musical é o quaternário $\left(\frac{4}{4}\right)$.

Começa por ouvir e ficar a conhecer a música que acompanha a dança "Regadinho".

1. A composição de uma peça de música envolve, frequentemente, o uso de padrões. Determinadas sequências de notas repetem-se nas músicas, com ou sem variações.

1.1. Observa, na figura 21, a partitura da música que acompanha a dança "Regadinho", e tenta identificar frases que se repetem.

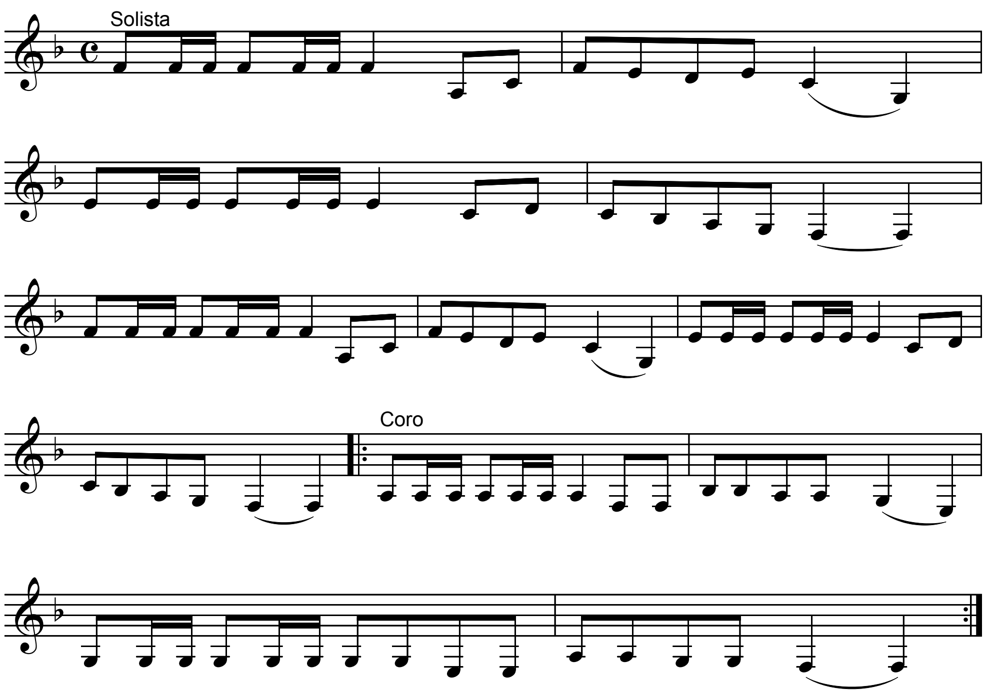


Figura 21

2. No gráfico 1, está representada a **<u>primeira linha da partitura</u>** da música (figura 22). Na representação gráfica adotada, o eixo das ordenadas refere-se à altura das notas musicais, tendo como referência o Dó central, e o eixo das abcissas corresponde à duração das notas musicais.

Figura 22

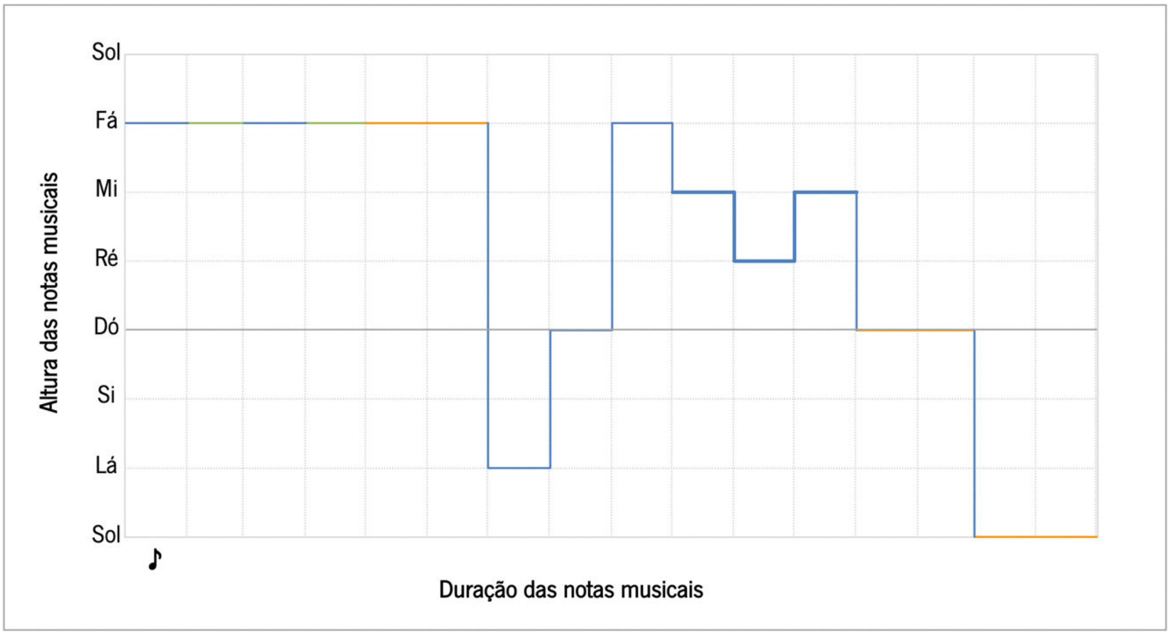


Gráfico 1

2.1. Explica a utilização de cores diferentes na linha que representa o gráfico 1.

____

____

2.2. Observa a parte em que a linha que representa o gráfico 1 está destacada com maior espessura. Que isometria é possível identificar nessa parte? Justifica a tua resposta.

____

____

2.3. Completa o gráfico 2, representando a **<u>segunda linha da partitura</u>** desta música (figura 23).

<u>Nota</u>: Mantém o código de cores que foi utilizado na representação da primeira linha da partitura.

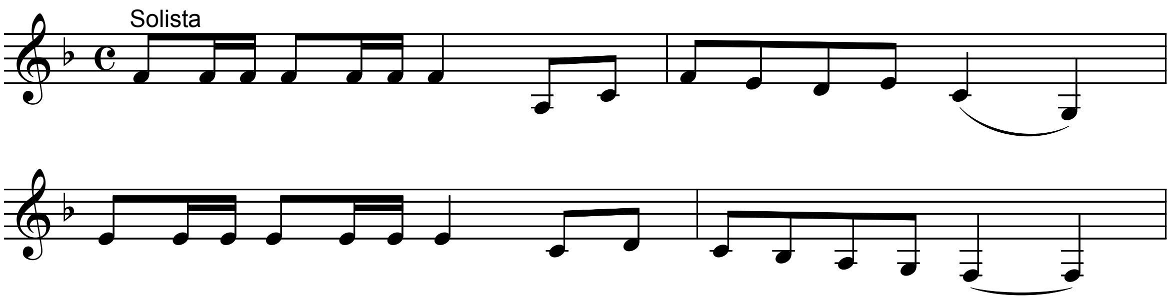


Figura 23

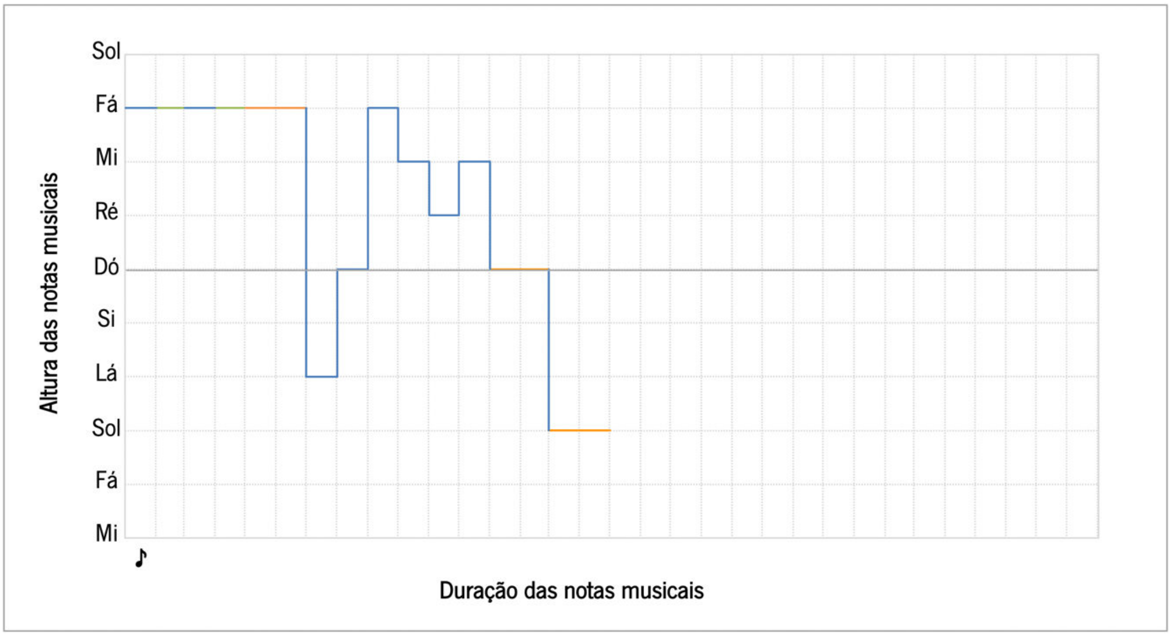


Gráfico 2

2.4. Identifica, na segunda linha da partitura que acabaste de representar no gráfico, **<u>outro exemplo</u>** do mesmo tipo de isometria identificado em 2.2.

2.5. Que diferença existe entre os dois exemplos identificados? Justifica a tua resposta.

3. No gráfico 3, está representada a partitura da música, até **ao momento em que se inicia o coro**. À semelhança dos gráficos anteriores, o eixo das ordenadas refere-se à altura das notas musicais, tendo como referência o Dó central, e o eixo das abcissas corresponde à duração das notas musicais.

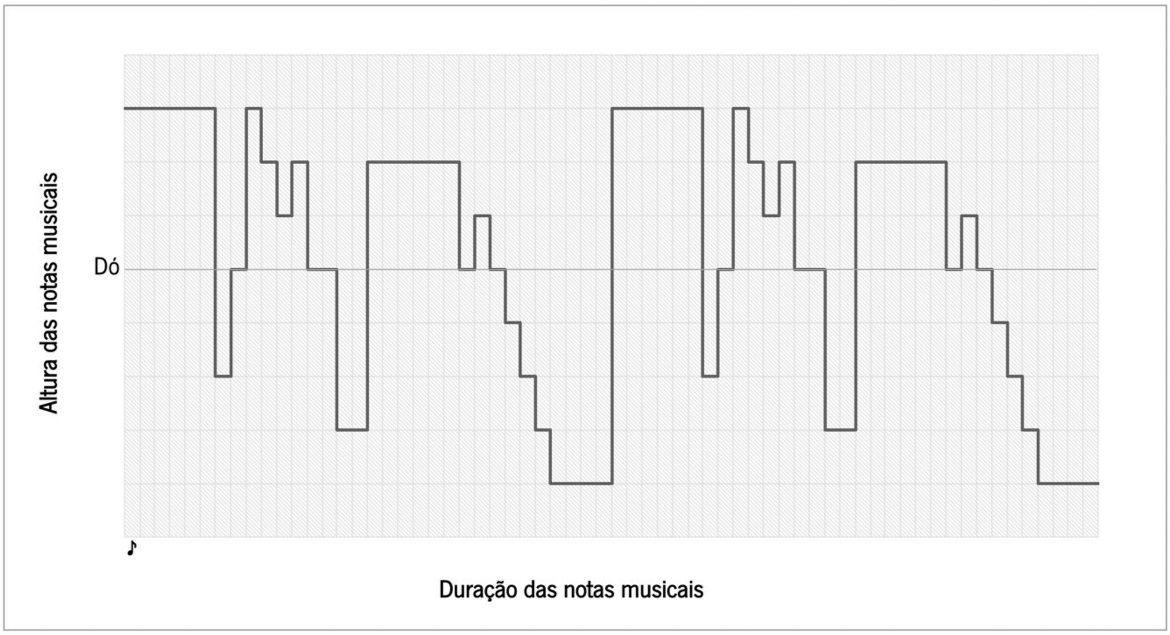


Gráfico 3

3.1. Explora os padrões (ou regularidades) existentes na parte da partitura representada.

Nome: ____

AO RITMO DA "[R]OTA"

"Jota de Pol", ***Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos***

A "Jota" é, talvez, a dança menos galega, mas uma das mais populares na Galiza (Espanha), adquirindo os costumes próprios de cada zona. No caso, a "Jota de Pol" é típica de Pol, um município da província de Lugo. O acompanhamento musical desta dança é feito por vários instrumentos como a gaita galega, o clarinete, o tambor e o bombo. O ritmo musical é o ternário simples $\left(\frac{3}{8}\right)$.

Começa por ouvir e ficar a conhecer a música que acompanha a dança "Jota de Pol".

1. Na figura 24, apresenta-se um trecho da partitura da música que acompanha a dança "Jota de Pol", tocada a duas gaitas. A parte sombreada corresponde à parte B da música.

Figura 24

1.1. Cada linha da parte B da música (figuras 25 a 28) foi representada nos gráficos 4, 6, 8 e 10 para a *Gaita 1ª*, ignorando-se as apogiaturas. Nestes gráficos, o eixo das ordenadas refere-se à altura das notas musicais, tendo como referência o Dó central, e o eixo das abcissas corresponde à duração das notas musicais. Constrói os gráficos 5, 7, 9 e 11 para a *Gaita 2ª*.

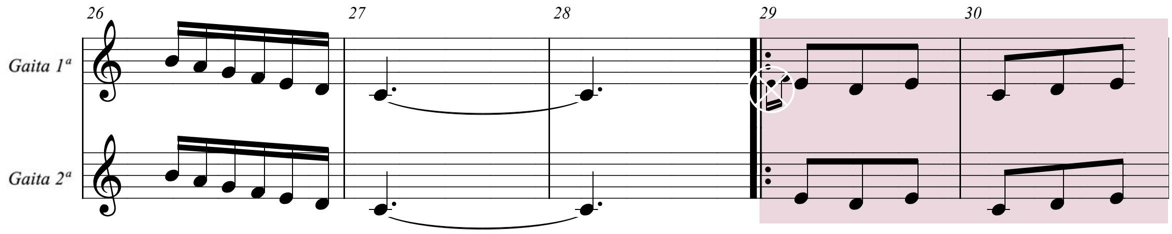


Figura 25

Gaita 1ª

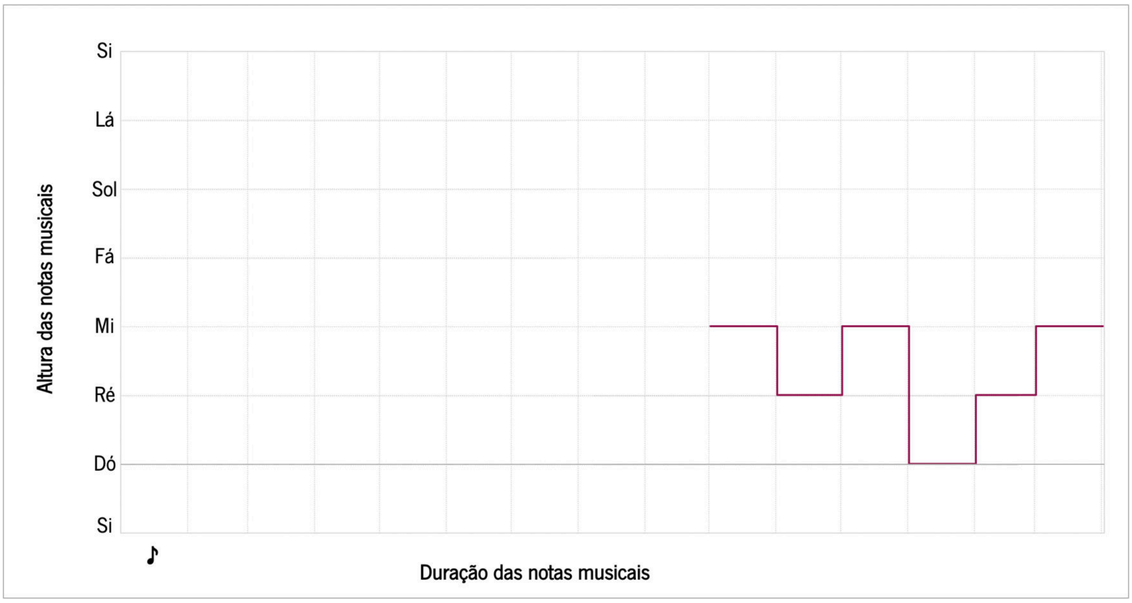


Gráfico 4

Gaita 2ª

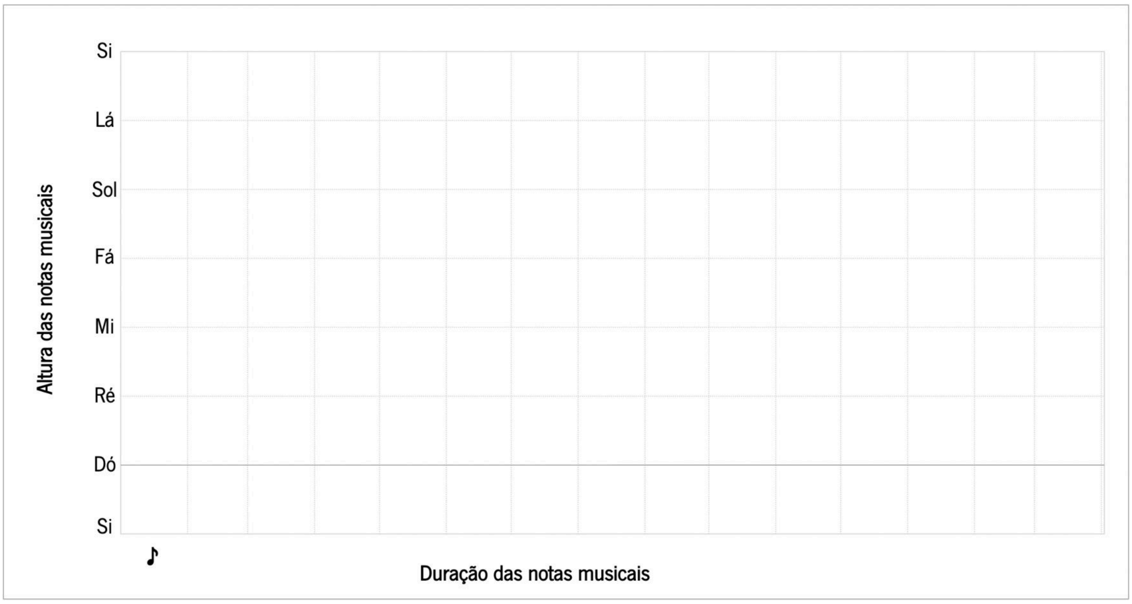


Gráfico 5

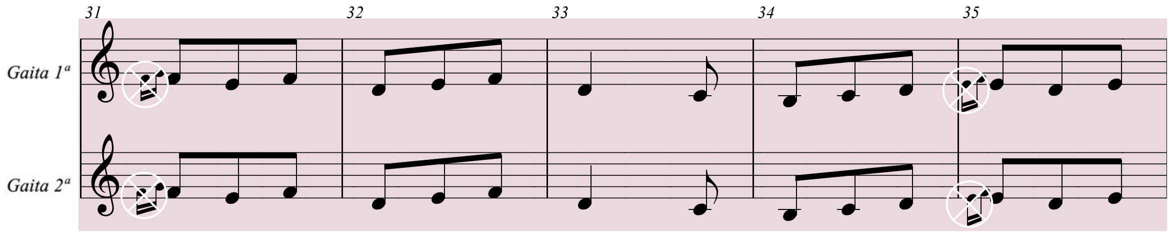


Figura 26

Gaita 1ª

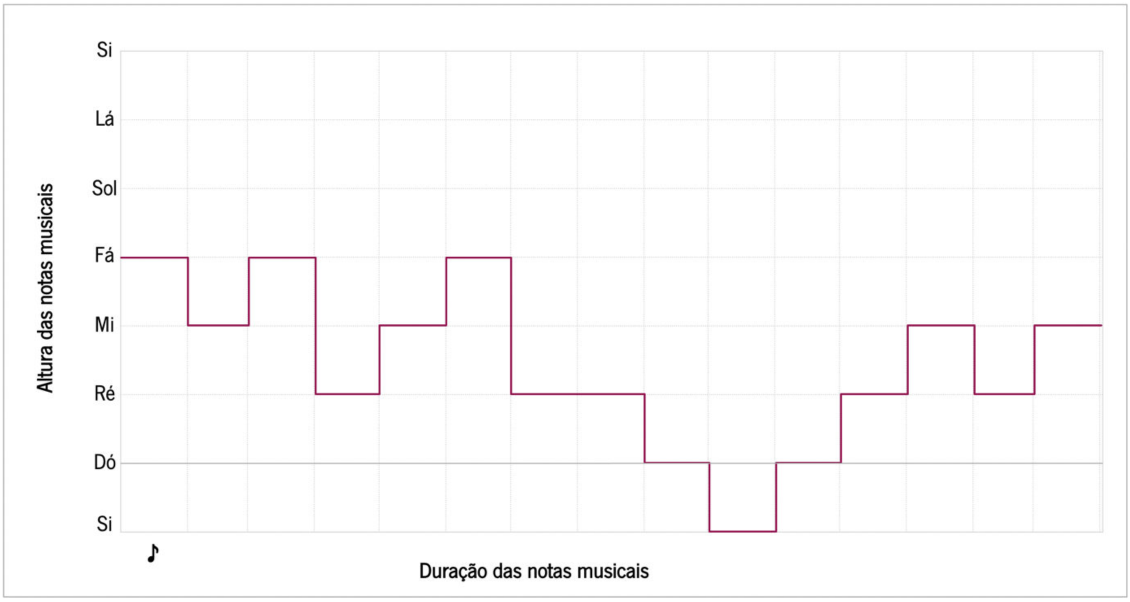


Gráfico 6

Gaita 2ª

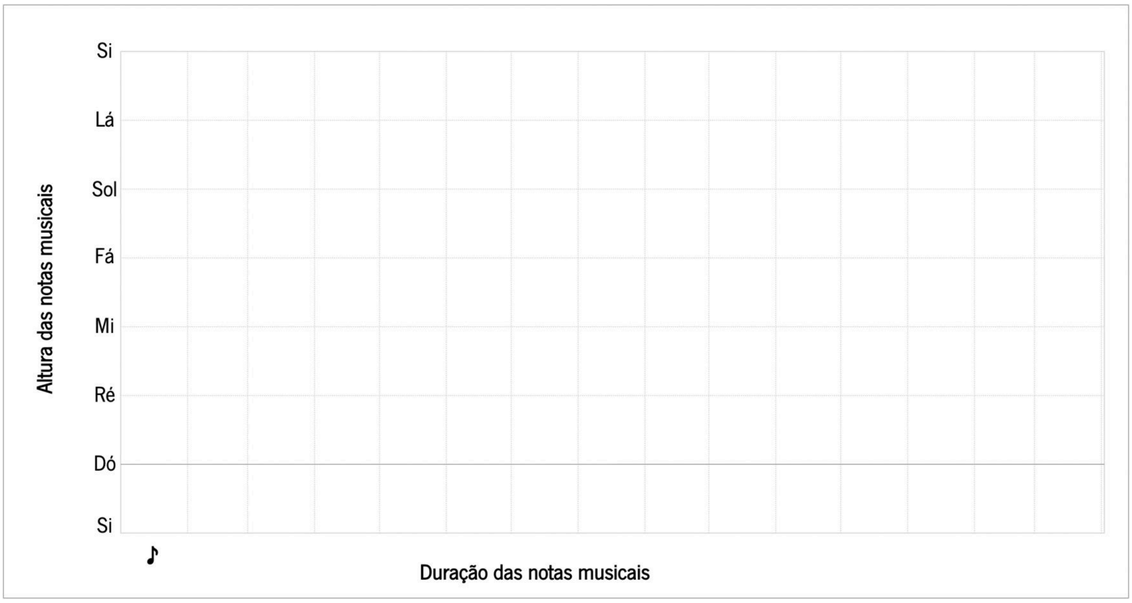


Gráfico 7

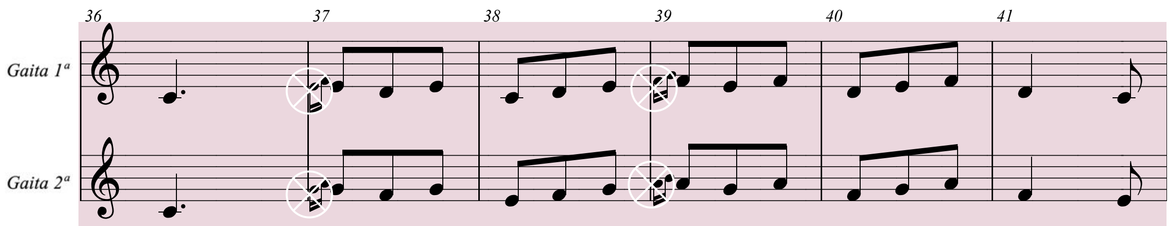


Figura 27

Gaita 1ª

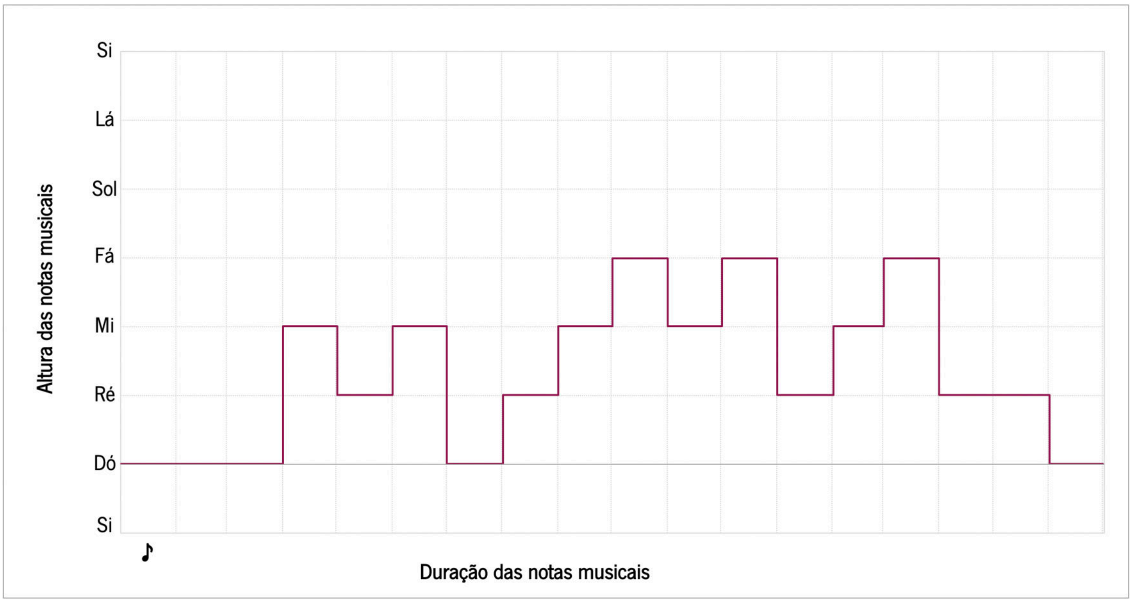


Gráfico 8

Gaita 2ª

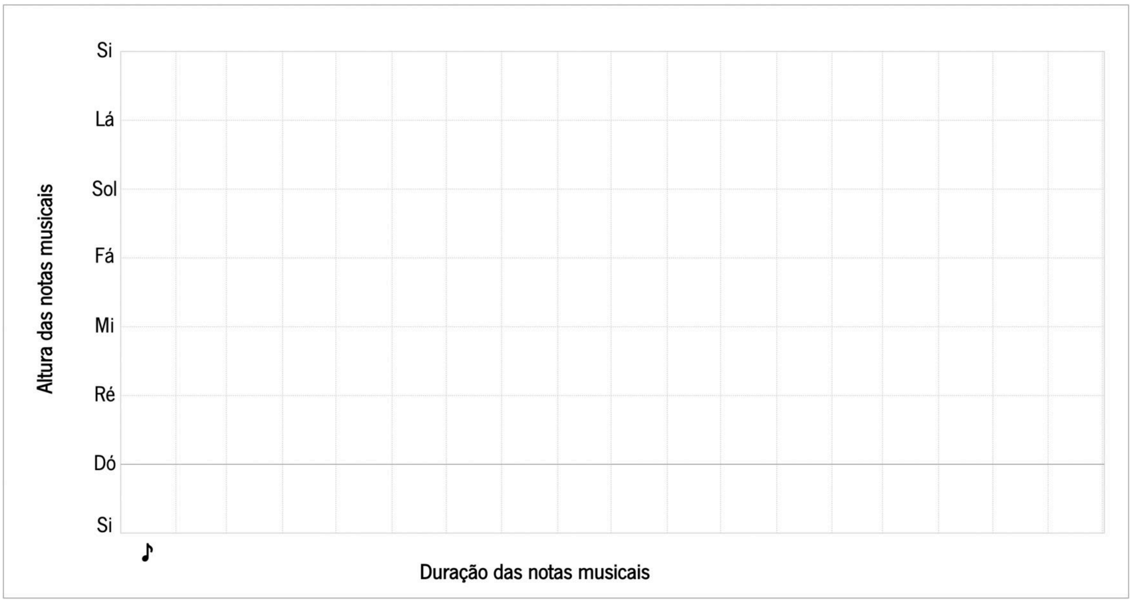


Gráfico 9

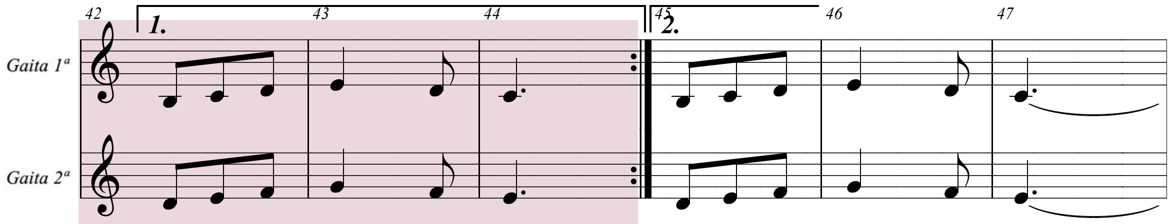


Figura 28

Gaita 1ª

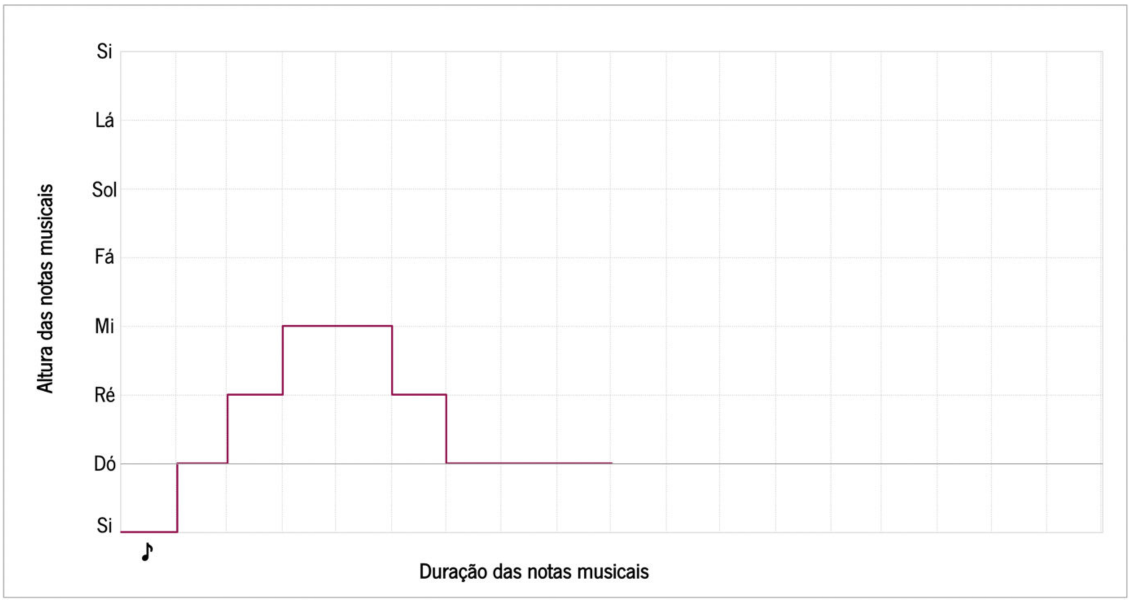


Gráfico 10

Gaita 2ª

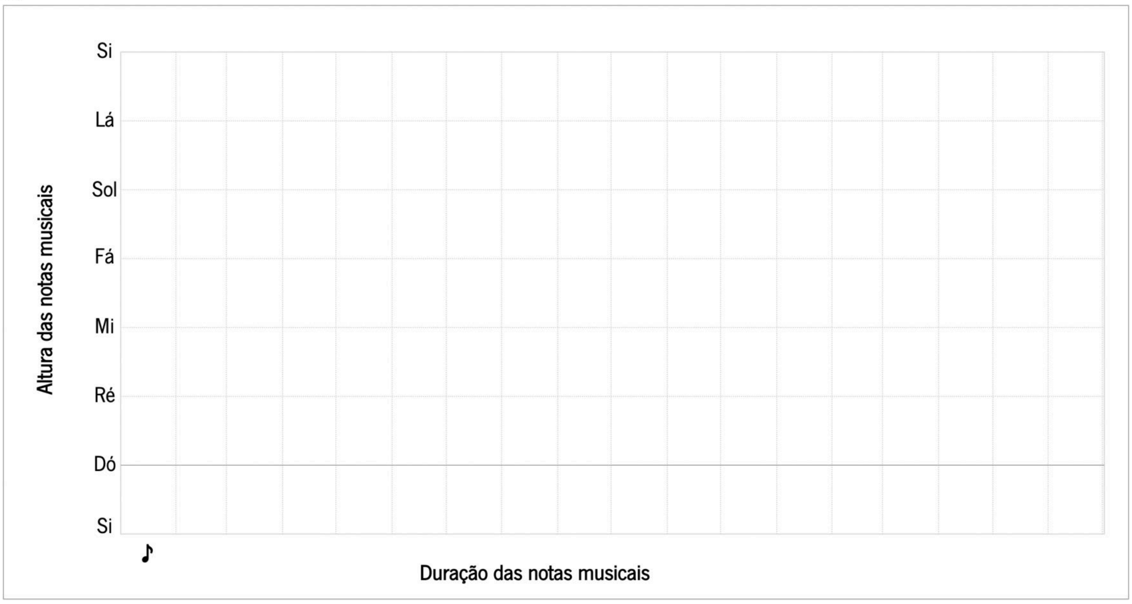


Gráfico 11

1.2. Compara os gráficos que elaboraste para a *Gaita 2ª* com os gráficos relativos à *Gaita 1ª*, para cada linha da partitura, explorando as semelhanças e as diferenças existentes.

Nota: Apresenta as tuas conclusões junto de cada um dos pares de gráficos das páginas anteriores.

2. No gráfico 12, está representada toda a parte B da música, para a *Gaita 1ª*.

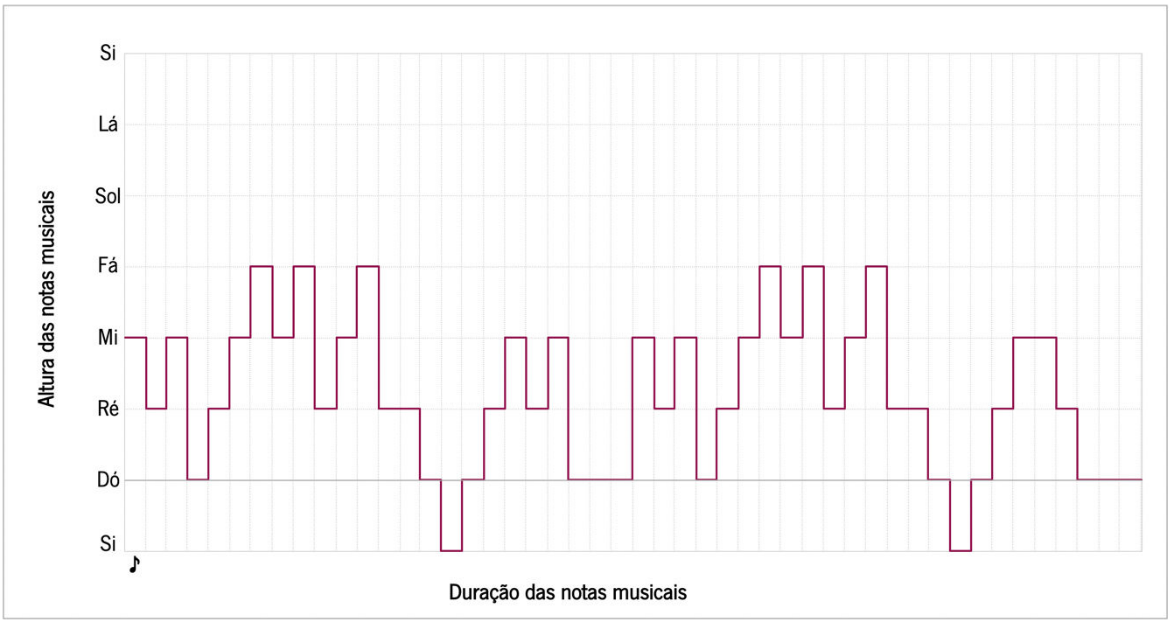


Gráfico 12

2.1. Explora os padrões existentes na melodia representada e as isometrias que estão associadas.

Sugestão de exploração: Começa por identificar diferentes motivos que surgem repetidos no gráfico.

Nome: ____

A HARMONIA DA "MUIÑEIRA"

"Muiñeira de Pol", ***Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos***

A "Muiñeira" é a dança característica da Galiza (Espanha), a mais tradicional do seu folclore. É a viva manifestação da alegria, da festa galega. A "Muiñeira de Pol" é típica de Pol, um município da província de Lugo. O acompanhamento musical desta dança é feito por vários instrumentos, como a gaita galega, o clarinete, o tambor e o bombo. O ritmo musical é o binário composto $\left(\frac{6}{8}\right)$.

Começa por ouvir e ficar a conhecer a música que acompanha a dança "Muiñeira de Pol".

1. A existência de padrões nas peças musicais é frequente. Estes padrões podem ser associados a diferentes isometrias, que os compositores utilizam mais ou menos conscientemente.

1.1. Observa, na figura 29, um trecho inicial da partitura da música que acompanha a dança "Muiñeira de Pol", e compara as sequências de notas assinaladas.

Figura 29

1.2. Conforme verificaste, as sequências de notas assinaladas anteriormente são iguais. Este padrão designa-se por **repetição**. Trata-se da aplicação musical mais simples da translação, na qual uma sequência de notas da partitura surge exatamente igual noutra parte. Explora outros exemplos de repetição na partitura completa da música, apresentada na figura 30.

Figura 30

2. Uma aplicação mais complexa da translação é a **transposição**. Nestes casos, há o movimento de uma sequência exata de notas da partitura para outra localização na escala (e não só no tempo).

2.1. Observa, na figura 31, um exemplo de transposição, em que se verifica a descida de dois tons e meio (intervalo melódico de 4.ª justa). Explora outros exemplos de transposição na partitura.

Figura 31

3. Para além da translação, existem outras isometrias que são usadas na composição musical, e que se podem visualizar nas partituras das músicas. A **regressão** e a **inversão** são outros exemplos de aplicações musicais de isometrias diferentes.

3.1. Observa, na figura 32, um exemplo de **regressão** assinalado numa linha da partitura da música que acompanha a dança "Muiñeira de Pol".

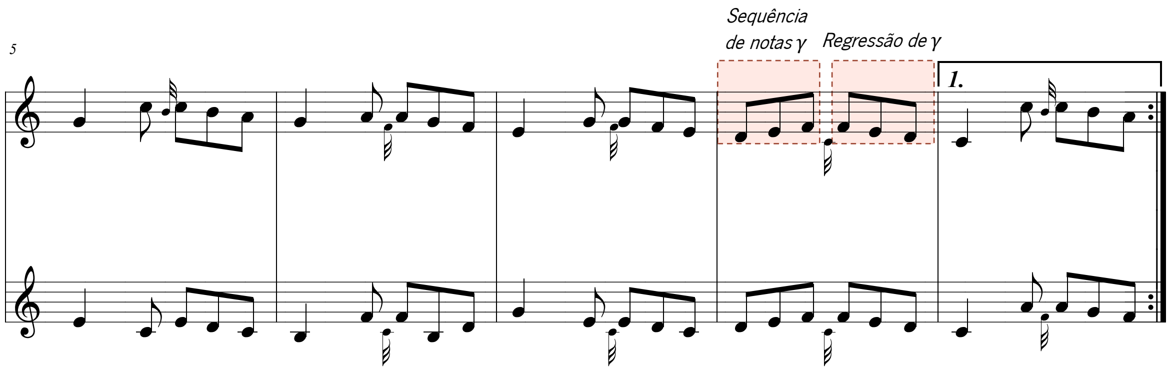


Figura 32

3.2. Descobre a isometria que está associada à regressão.

___

3.3. Observa, na figura 33, um exemplo de **inversão** assinalado noutra linha da mesma partitura.

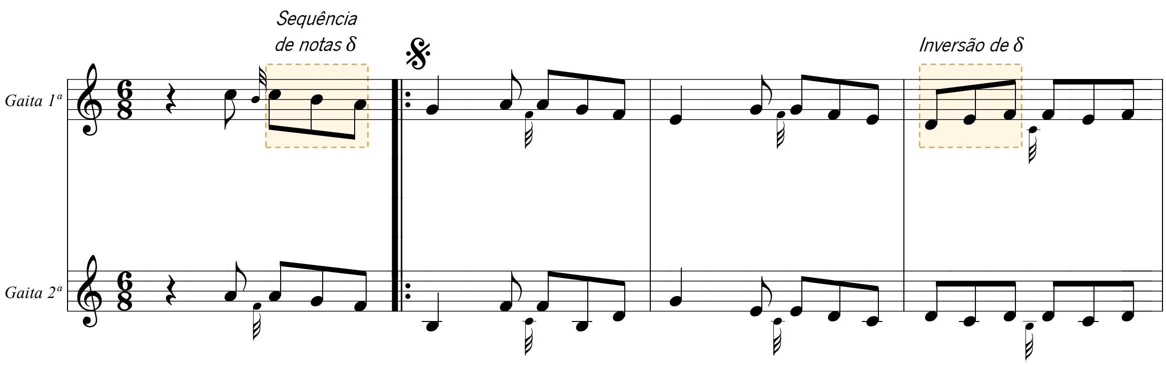


Figura 33

3.4. Descobre a isometria que está associada à inversão.

___

3.5. Explora outros exemplos de regressão e de inversão na partitura completa da música, apresentada na figura 34.

Notas: Os exemplos de regressão e de inversão são menos frequentes. As sequências de notas podem ser diferentes das assinaladas. Podes utilizar outras letras para identificar as sequências de notas.

Figura 34

Nome: ____

À MODA DE VILA VERDE

Trajes do *Grupo Folclórico de Vila Verde*

Os trajes do Grupo Folclórico de Vila Verde refletem a realidade social e económica dessa região no séc. XIX e início do séc. XX. O "Traje de Encosta" evidencia-se como o mais representativo de Vila Verde, servindo também como "Traje de Noivos", com algumas alterações nos adereços utilizados. O "Traje da Ribeira" e o "Traje de Trabalho" são também distinguidos neste concelho.

1. Nas figuras 35 a 38, está representado o "Traje de Encosta" (masculino e feminino), que os homens e as mulheres utilizavam nos dias de festa, nas romarias, ou ao domingo para irem à missa. Observa que, neste traje, as mulheres utilizavam os *lenços de tapete* nos ombros (figuras 35 e 36), ou os *véus de tule de algodão* na cabeça (figura 37).

Figura 35

Figura 36

Figura 37

Figura 38

1.1. Conforme pudeste verificar, os trajes apresentados nas figuras 35 a 38, têm simetria. No entanto, existem adereços e utensílios que anulam esta simetria. Identifica estes elementos no traje masculino e no traje feminino.

2. A figura 39 apresenta parte de uma *camisa de linho* bordada a vermelho, que integra o “Traje de Encosta” (masculino).

Figura 39

2.1. Identifica a simetria presente no bordado da *camisa*, representando na figura algo que a identifique, e assinala a(s) parte(s) do bordado que não satisfaz(em) essa simetria.

3. Um dos elementos característicos do “Traje de Encosta” é o *Lenço de Pedido* ou *Lenço de Namorados*, que era bordado por cada moça a partir de um pano quadrado de linho, e depois era entregue a um rapaz como pedido de namoro. Se ele aceitasse, colocava-o no seu traje, tal como está retratado na figura 40.

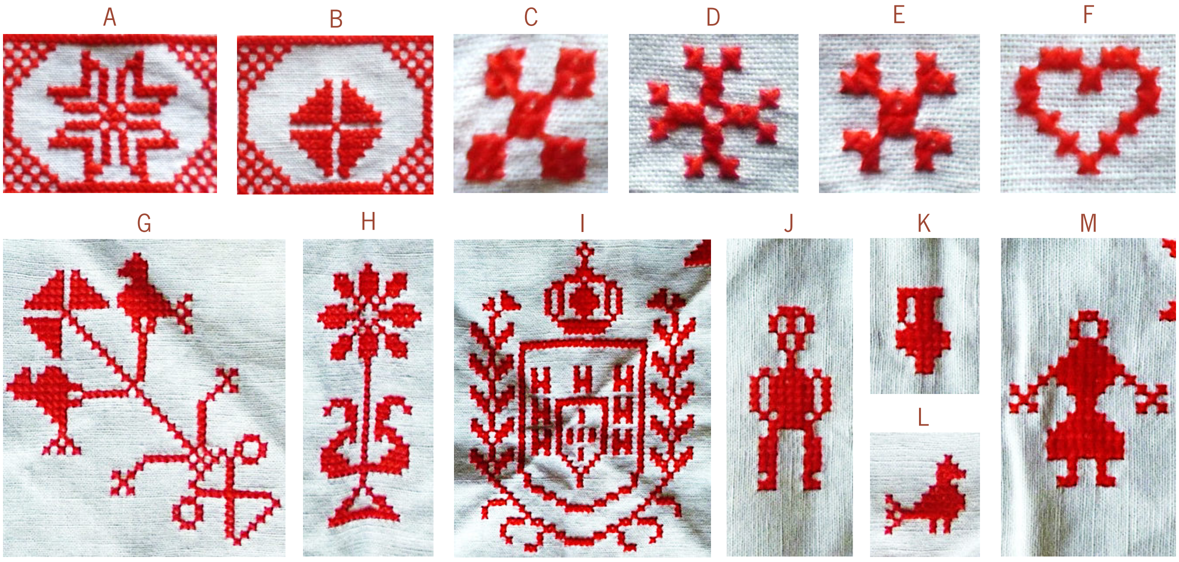
Figura 40

3.1. Observa, na figura 41, o *Lenço de Pedido* colocado no traje do dançarino da figura anterior. Para além das frases de amor bordadas, que outros elementos teriam que ser retirados do *lenço* para que as retas r e s fossem eixos de simetria do mesmo?

<u>Notas</u>: Lembra-te que os *Lenços de Pedido* eram feitos à mão pelas bordadeiras e, por isso, podem apresentar algumas imperfeições ao nível da simetria pretendida para os mesmos. Deves ignorar estas irregularidades ao realizar a tarefa.

Figura 41

3.2. No *Lenço de Pedido* anterior existem vários símbolos, que apresentam diferentes simetrias. Agrupa os símbolos selecionados, de acordo com o conjunto de simetrias de cada símbolo (grupo simétrico).



3.3. Atenta nas frases de amor escritas no *lenço*, que se caracterizam pelos erros ortográficos que normalmente têm. Quais das letras utilizadas apresentam simetria de reflexão? E de rotação?

4. Na figura 42, está representado o "Traje de Noivos", que é uma variante do "Traje de Encosta". No dia da boda, a mulher usava o *véu de tule de algodão* e adicionava alguns elementos ao traje: um *ramo de flores com fitas pendentes*, um *xaile* pendurado no braço e uma *sombrinha*. No traje masculino, o preto era a cor privilegiada, contrastando com a *camisa de linho* bordada a branco.

Figura 42

4.1. Analisa o modo como estão colocadas as *peças de ouro* utilizadas pela mulher. Será que a sua disposição é aleatória? Justifica a tua resposta.

4.2. Observa, na figura 43, a *camisa de linho* bordada a branco, utilizada pelo noivo. Descreve a(s) simetria(s) que observas em cada um dos motivos bordados na *camisa* que se encontram rodeados na figura.

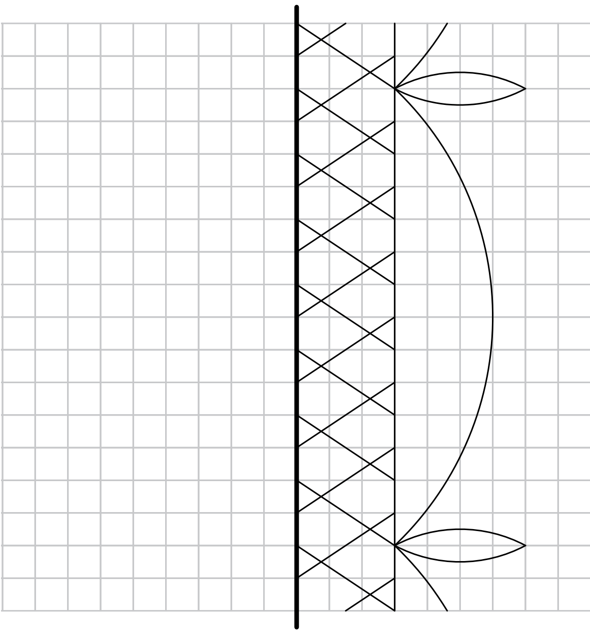
Figura 43

5. Nas figuras 44 e 45, está representado o "Traje de Trabalho" (feminino). Crê-se que este traje não tem uma definição própria, sendo constituído pelas roupas mais usadas e/ou mais resistentes.

Figura 44

Figura 45

5.1. Completa o bordado presente no *corpete* da figura 45, considerando o eixo de simetria representado.



5.2. Observa, na figura 46, o bordado colorido presente no *corpete* da figura 45. Desenha o eixo de simetria do bordado e encontra as irregularidades existentes no mesmo, rodeando-as.

Figura 46

5.3. Cria uma figura simétrica que gostasses de ver bordada na mesma peça do traje e identifica as simetrias presentes na tua construção.

6. Nas figuras 47 e 48, está representada uma parte do "Traje da Ribeira" (feminino). Este traje afigura-se como um meio-termo entre o "Traje de Encosta" e o "Traje de Trabalho". Era usado em dias de feira ou noutros momentos comunitários.

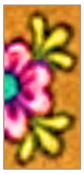
Figura 47

Figura 48

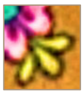
6.1. Observa o motivo floral presente no *cachené* da figura 48. Imagina que querias fazer um carimbo para formar esse motivo. Qual seria o desenho mais pequeno que poderias colocar no carimbo? Escolhe uma das três possibilidades apresentadas e justifica a tua resposta.

A

B



C



____

____

6.2. Assinala com um **X** a opção que **<u>não pode corresponder</u>** à amplitude de um ângulo de simetria de rotação do motivo floral assinalado na figura 48.

- [ ] $45°$
- [ ] $90°$
- [ ] $180°$
- [ ] $270°$

7. Na figura 49 está representada a parte inferior do "Traje da Ribeira" (feminino). Conforme podes observar, a *saia* e o *avental* que compõem o traje estão guarnecidos com vidrilhos que formam diferentes tipos de frisos.

Figura 49

7.1. Observa, na figura 50, a representação de parte de um friso presente no *avental* deste traje. Analisa as simetrias presentes neste friso.

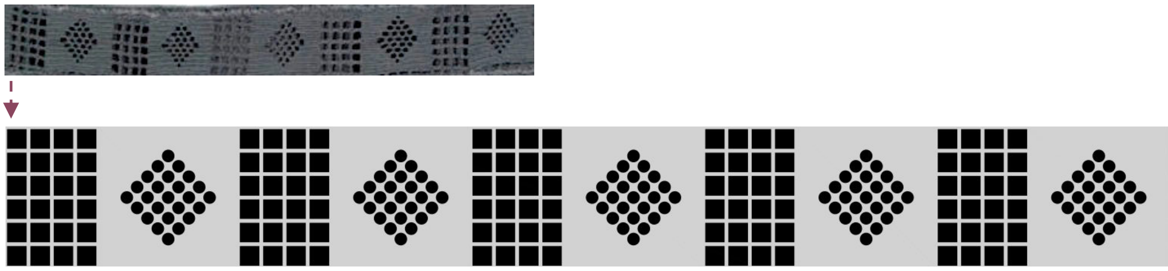


Figura 50

7.2. Observa, nas figuras 51 e 52, a representação incompleta de parte de outros dois frisos presentes na mesma peça do traje. Completa estes dois frisos.

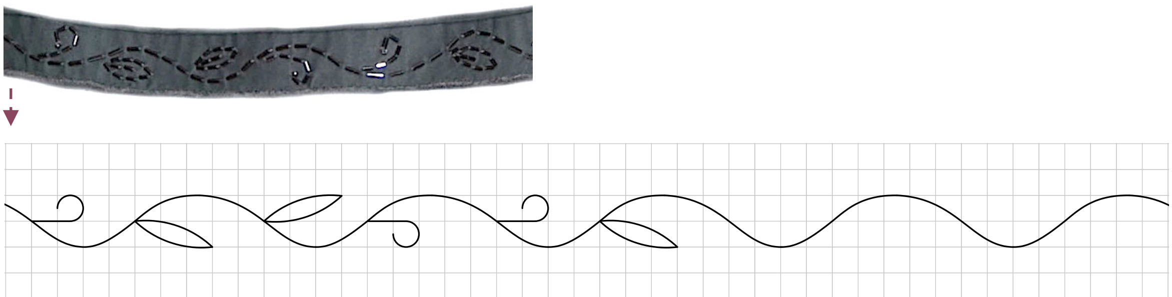


Figura 51

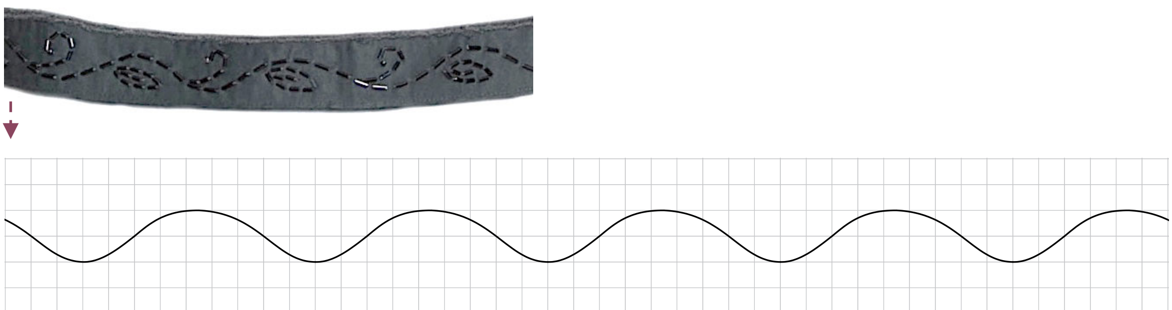
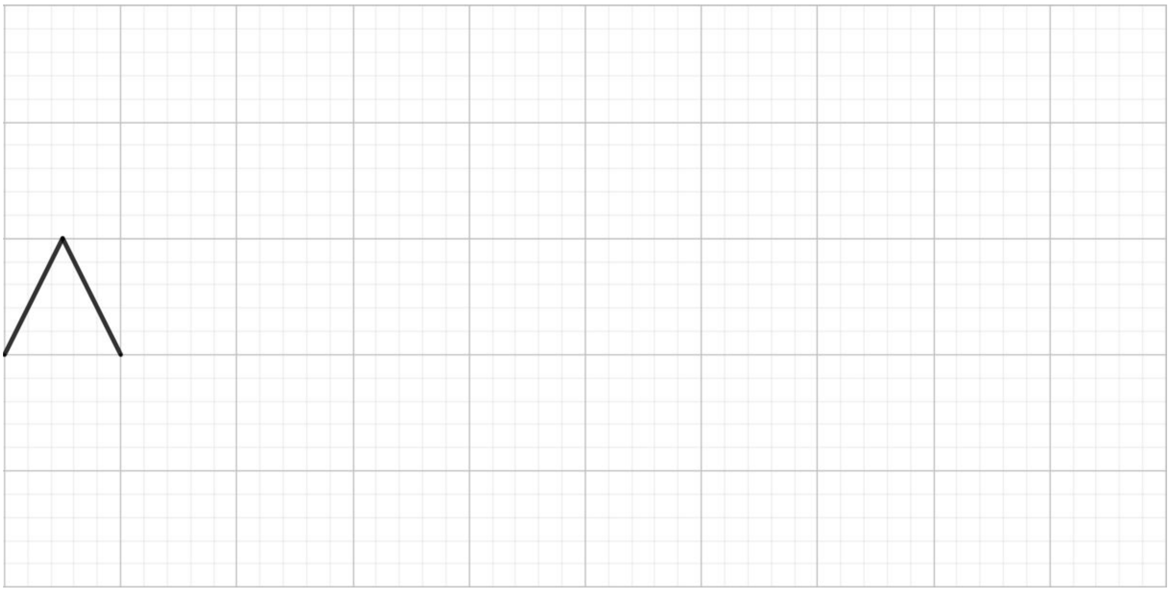


Figura 52

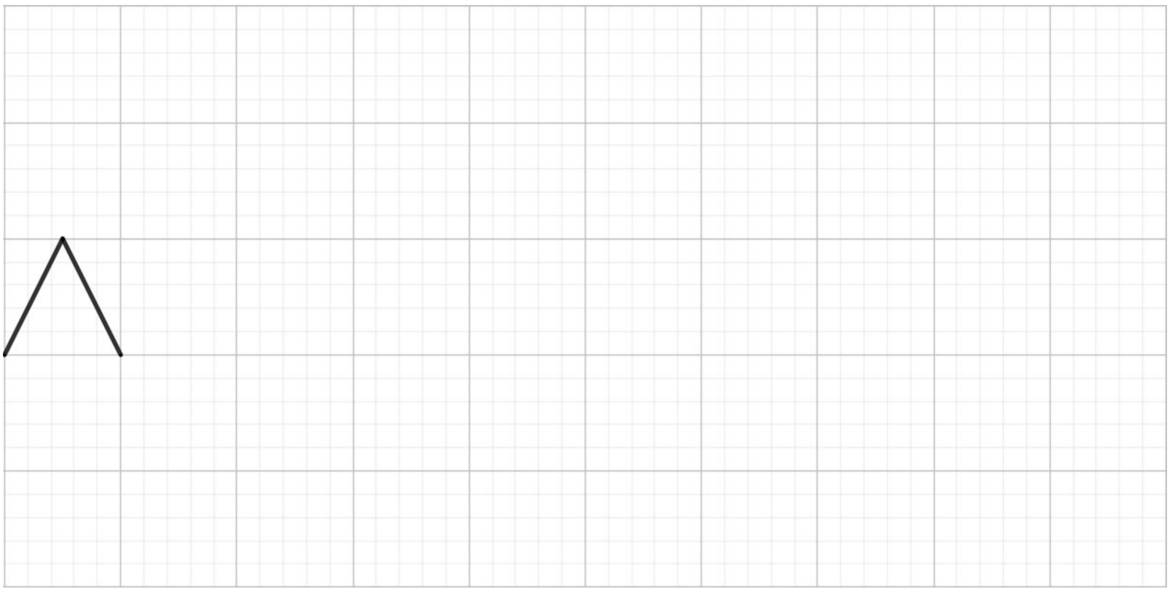
7.3. Observa, na figura 53, parte de outro friso visível no *avental* do “Traje da Ribeira”. Este friso é construído a partir de um motivo que se repete várias vezes. Utilizando o motivo representado, cria dois frisos diferentes e indica as simetrias presentes nos frisos que elaboraste.

Figura 53

Friso 1



Friso 2



Nome: ____

DIZ-ME O QUE VESTES, DIR-TE-EI DE ONDE ÉS...

Trajes da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*

O traje tradicional galego, que apresenta várias variações regionais, começou a utilizar-se na segunda metade do século XVIII, verificando-se o uso de algumas peças ainda no século XX. Existiam, basicamente, três classes de traje: o "Traxe de Decotío", que dependia da ocupação da pessoa, o "Traxe de Feira", usado para ir à vila ou à feira, e o "Traxe de Festa ou Gala", que era o mais luxuoso.

1. Na figura 54, está representado um "Traxe de Gala" (feminino), com algumas peças identificadas. Este traje, típico de Santiago de Compostela, só era utilizado em dias de celebrações importantes.

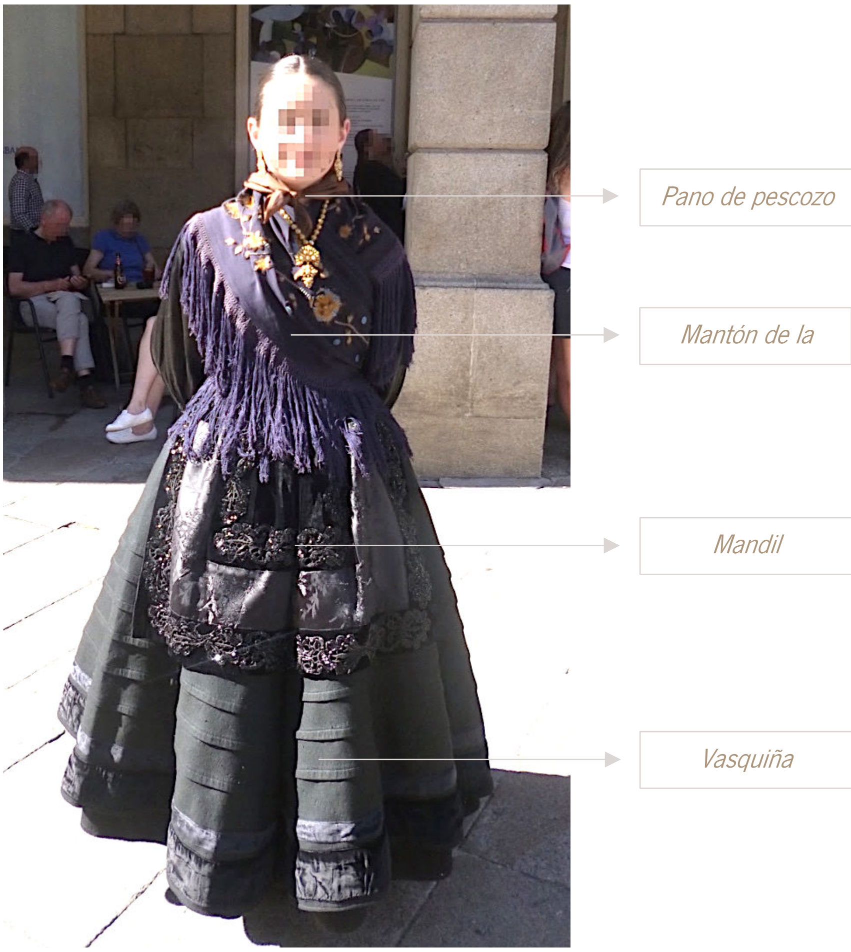


Figura 54

1.1. Observa, na figura 55, o *mantón de la* presente no traje feminino da figura 54. Habitualmente, esta peça era usada por cima dos ombros, para as mulheres se protegerem do frio, tal como representa a dançadora da figura 54. É curioso que esta peça perdurou até aos dias atuais. Analisa, na figura 56, a simetria do bordado floral que decora este *mantón*, identificando-a e assinalando as falhas existentes.

Figura 55

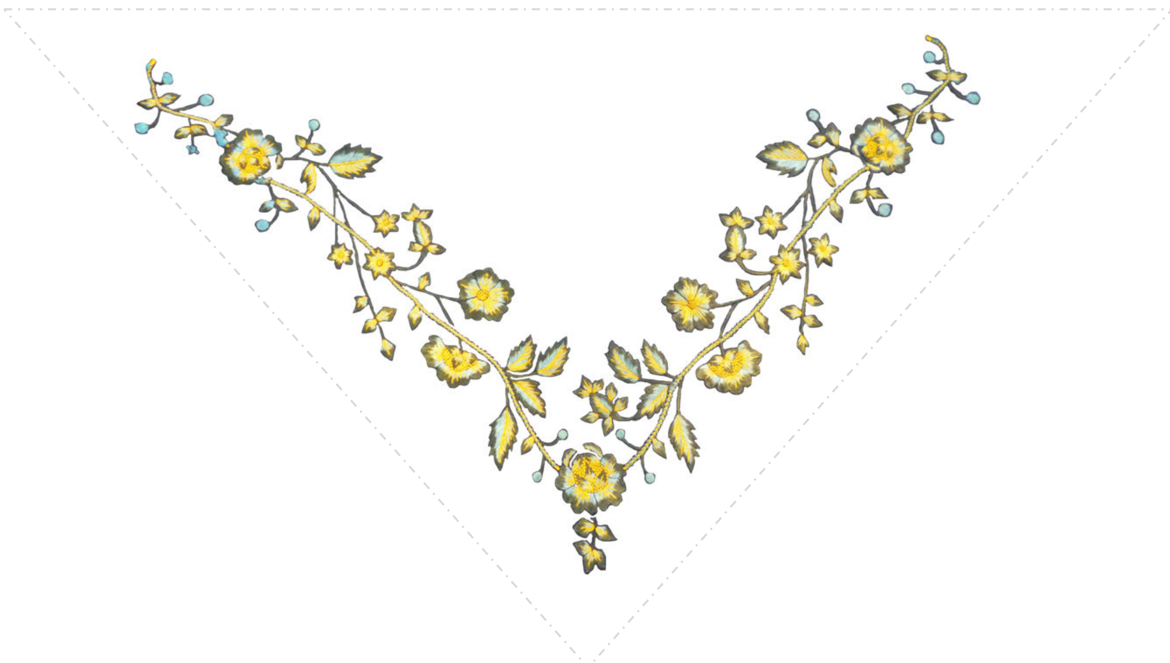


Figura 56

2. Na figura 57, está representado um *mandil* de gala, diferente do exposto no traje feminino da figura 54, mas que poderia estar a ser utilizado por essa dançadora, por ser igualmente típico de Santiago de Compostela. O *mandil* de gala é geralmente confecionado em pano negro e apresenta adornos que o decoram e enriquecem.

Figura 57

2.1. Observa, na figura 58, a representação de parte de um friso que decora o *mandil* anterior. Analisa as simetrias presentes neste friso.

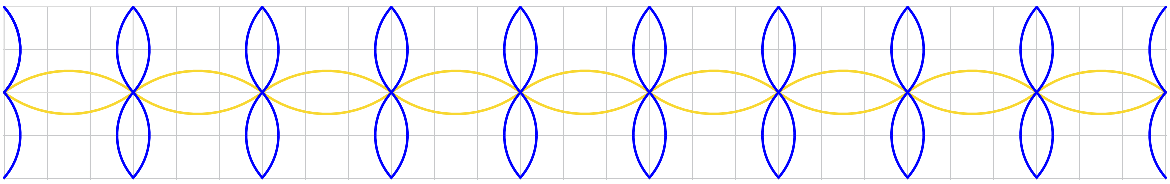


Figura 58

3. A *chaqueta* é considerada uma peça de gala, usada pelas mulheres preferencialmente no inverno. Na figura 59, está representado um exemplo desta peça, que surge ampliada do lado direito.

Figura 59

3.1. Observa, na figura 60, a representação do motivo floral que, repetidamente, decora a *chaqueta*. Estuda o conjunto de simetrias deste motivo (grupo simétrico).

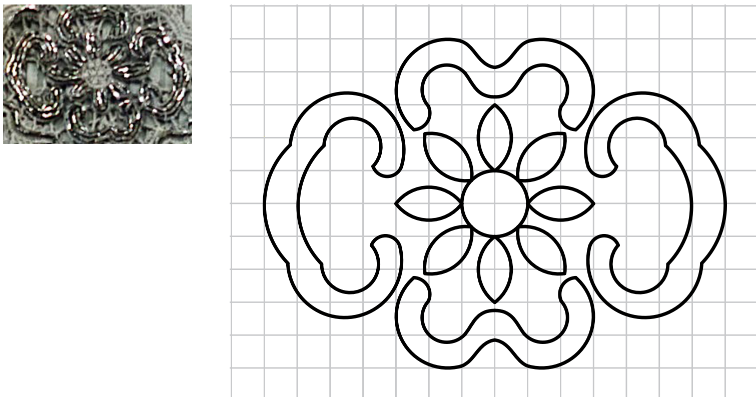


Figura 60

3.2. Pinta, na figura 61, o **menor número** de partes do motivo floral, de modo a torná-lo assimétrico.

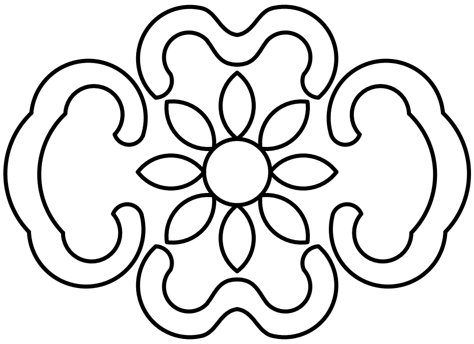


Figura 61

3.3. Observa, na figura 62, a representação de parte do bordado presente num dos lados da parte da frente da *chaqueta*. Caracteriza a(s) isometria(s) necessária(s) para formar este padrão.

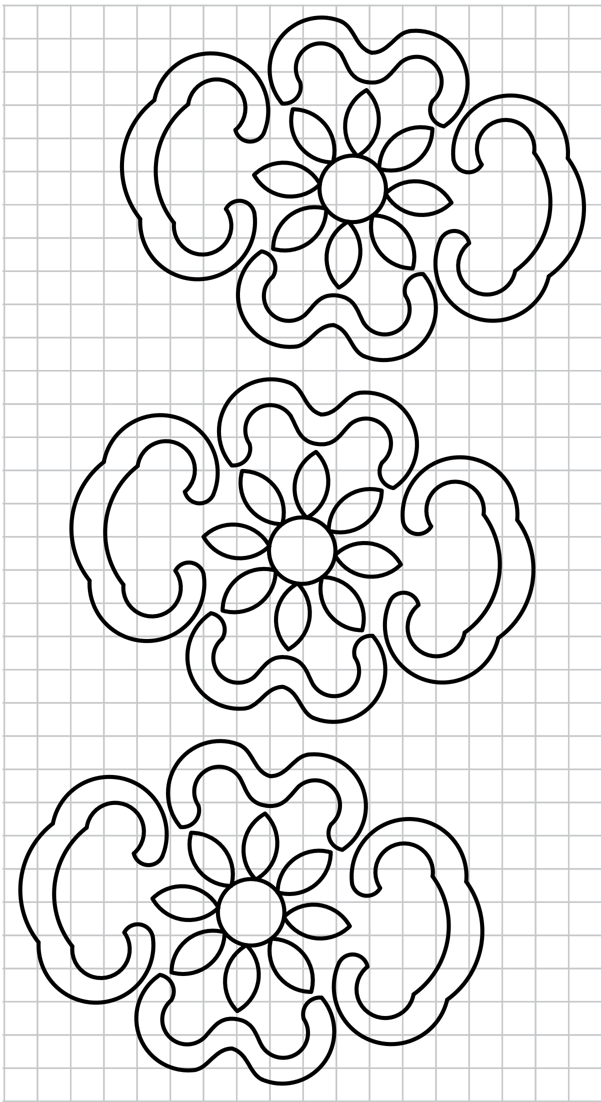


Figura 62

3.4. Observa, na figura 63, os motivos florais que se encontram destacados na parte inferior da *chaqueta*. Na figura 64, foi feita a representação desses motivos. Que isometria(s) permite(m) transformar o motivo 1 no motivo 2?

Nota: Para descreveres a(s) isometria(s), podes marcar pontos, eixos ou vetores na figura 64.

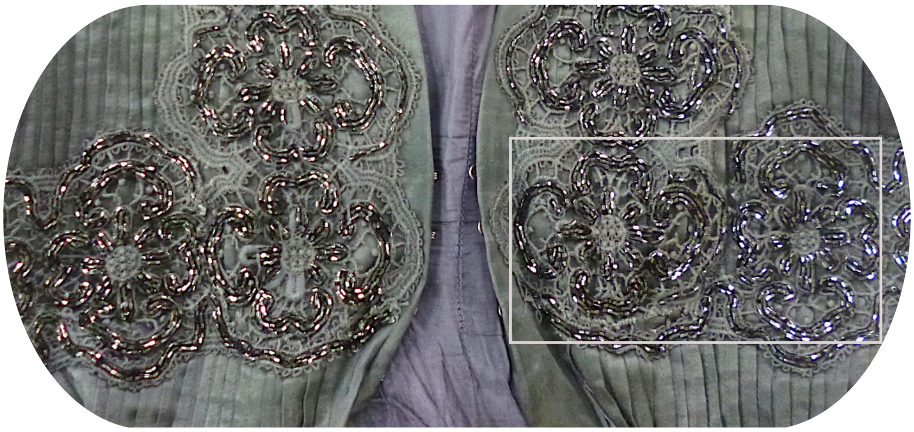


Figura 63

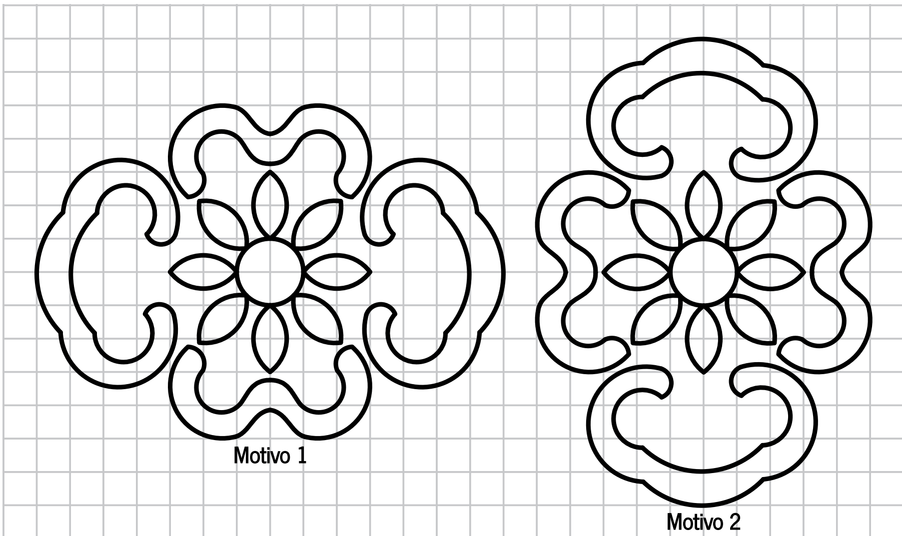


Figura 64

4. Na figura 65, está representado um “Traxe de Gala” (masculino), com as principais peças identificadas. Este traje é característico de Santiago de Compostela. Tal como acontecia com o “Traxe de Gala” feminino, este traje era utilizado, apenas, em datas importantes, como o dia da festa da paróquia, ou nalguma celebração ou ato importante, como o casamento.

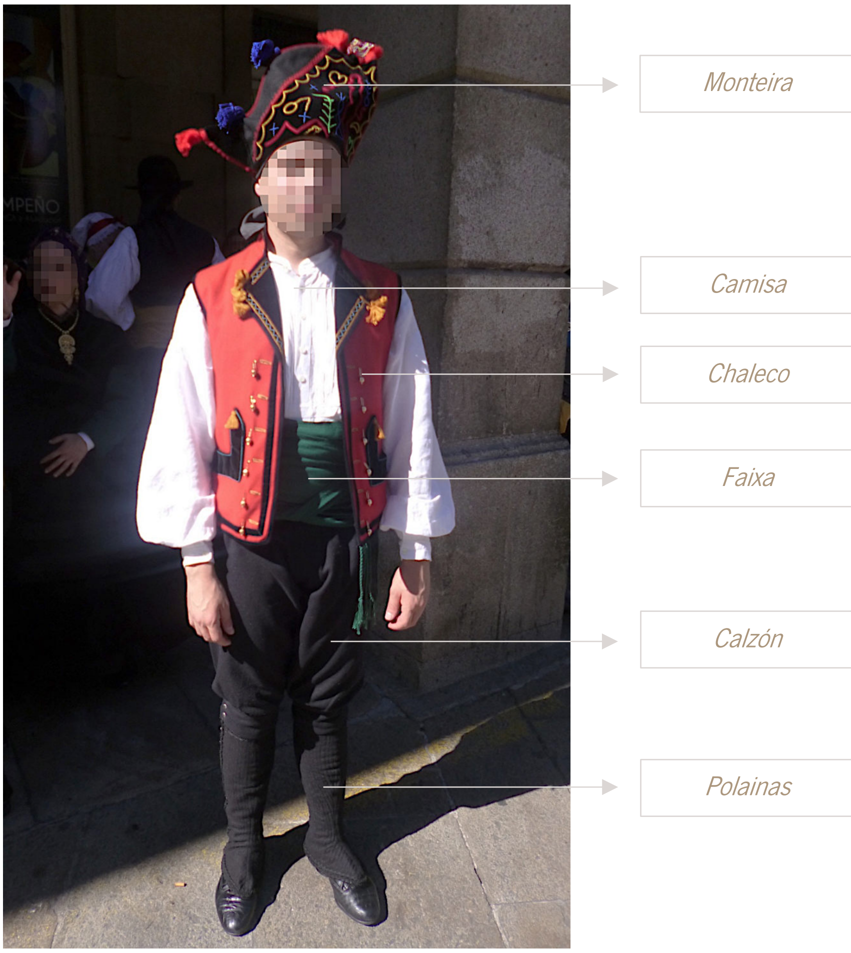


Figura 65

4.1. Analisa o traje em termos de simetria. A figura exibida é simétrica? Justifica a tua resposta.

5. A *monteira* é um elemento emblemático do traje galego. As *monteiras* podem apresentar vários formatos e a sua decoração também é diversa. Na figura 66, apresenta-se um exemplo, com uma decoração diferente da *monteira* usada pelo dançador da figura 65.

Figura 66

5.1. Observa, nas figuras 67 a 69, a representação de três frisos presentes na *monteira* acima. Como terá sido construído cada um destes frisos, considerando o seu motivo mínimo? Completa o quadro 3.

Friso 1

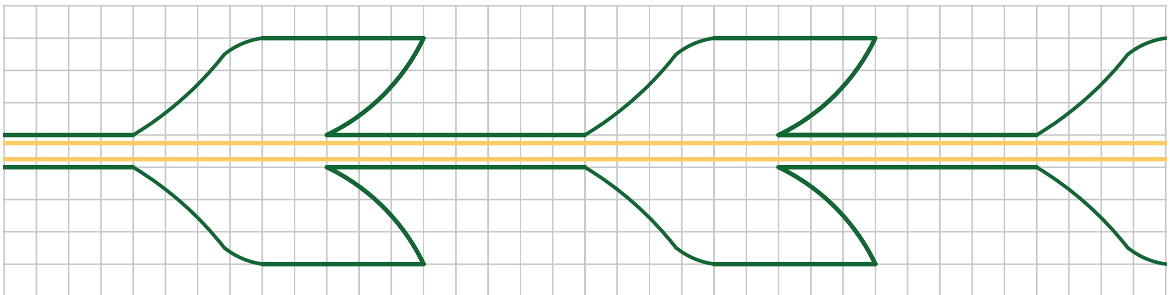


Figura 67

Friso 2

Figura 68

Friso 3

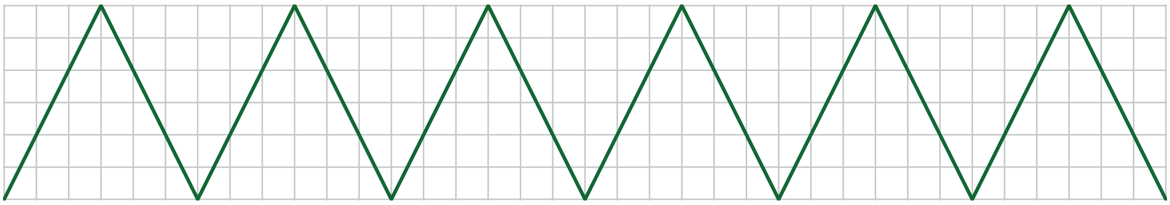
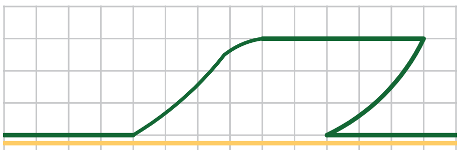
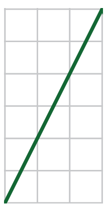


Figura 69

	Isometrias que geram o friso
Motivo mínimo do friso 1 	
Motivo mínimo do friso 2	
Motivo mínimo do friso 3 	

Quadro 3

5.2. A mesma *monteira* aparece também decorada por um friso formado por triângulos vermelhos, representado na figura 70. Utilizando o mesmo motivo inicial, cria frisos que satisfaçam as condições apresentadas.

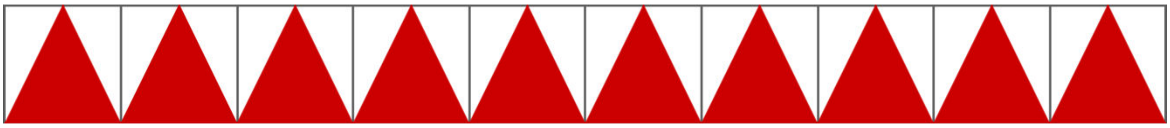
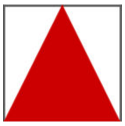
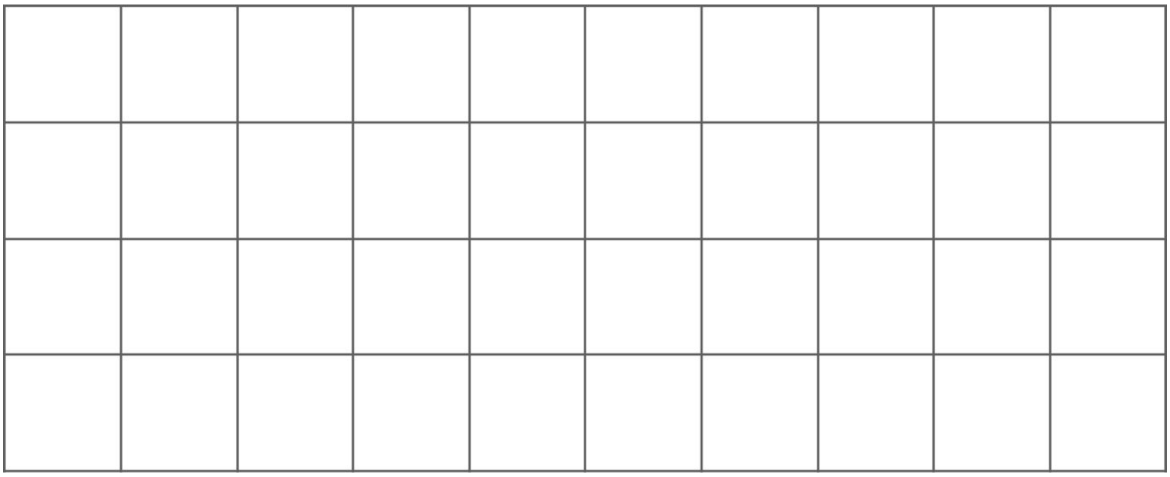


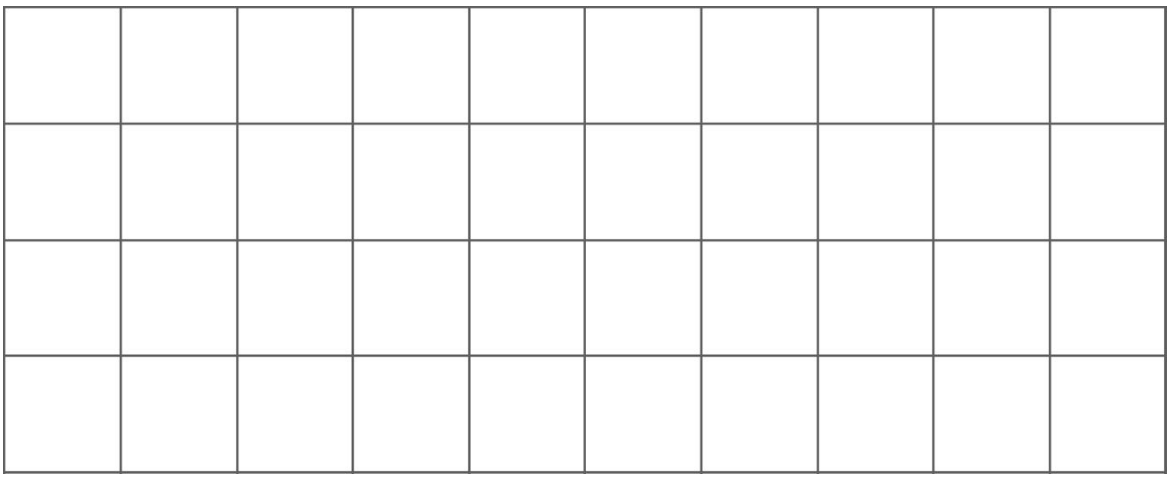
Figura 70



Apenas com simetrias de rotação e reflexão deslizante



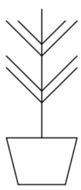
Com os 4 tipos de simetrias



6. Na figura 71, apresenta-se outro exemplo de uma *monteira*, cuja decoração é diferente da das anteriores, mostrando a diversidade que caracteriza este elemento do traje.

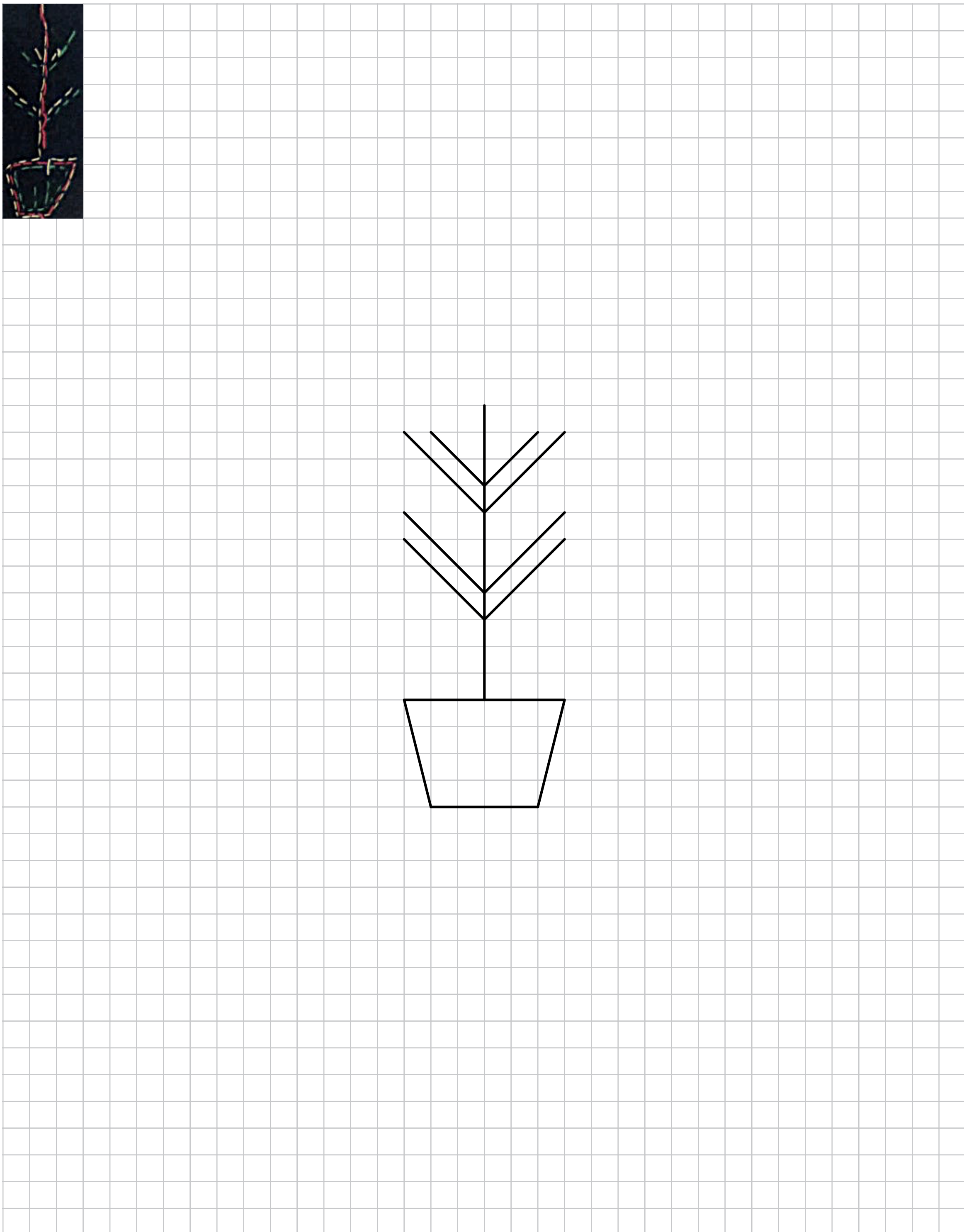
Figura 71

6.1. Conforme podes observar, esta *monteira* está decorada com diversas figuras. Seleciona, entre essas figuras, pelo menos uma para cada propriedade apresentada no quadro 4. Vê o exemplo.

Sem simetria	**Com simetria**	
	Apenas de reflexão	De rotação
		

Quadro 4

6.2. No quadriculado abaixo, está representada uma das figuras que decora a *monteira* anterior. Escolhe uma isometria (reflexão, rotação ou translação) e constrói o transformado dessa figura. No final, descreve a isometria que utilizaste.

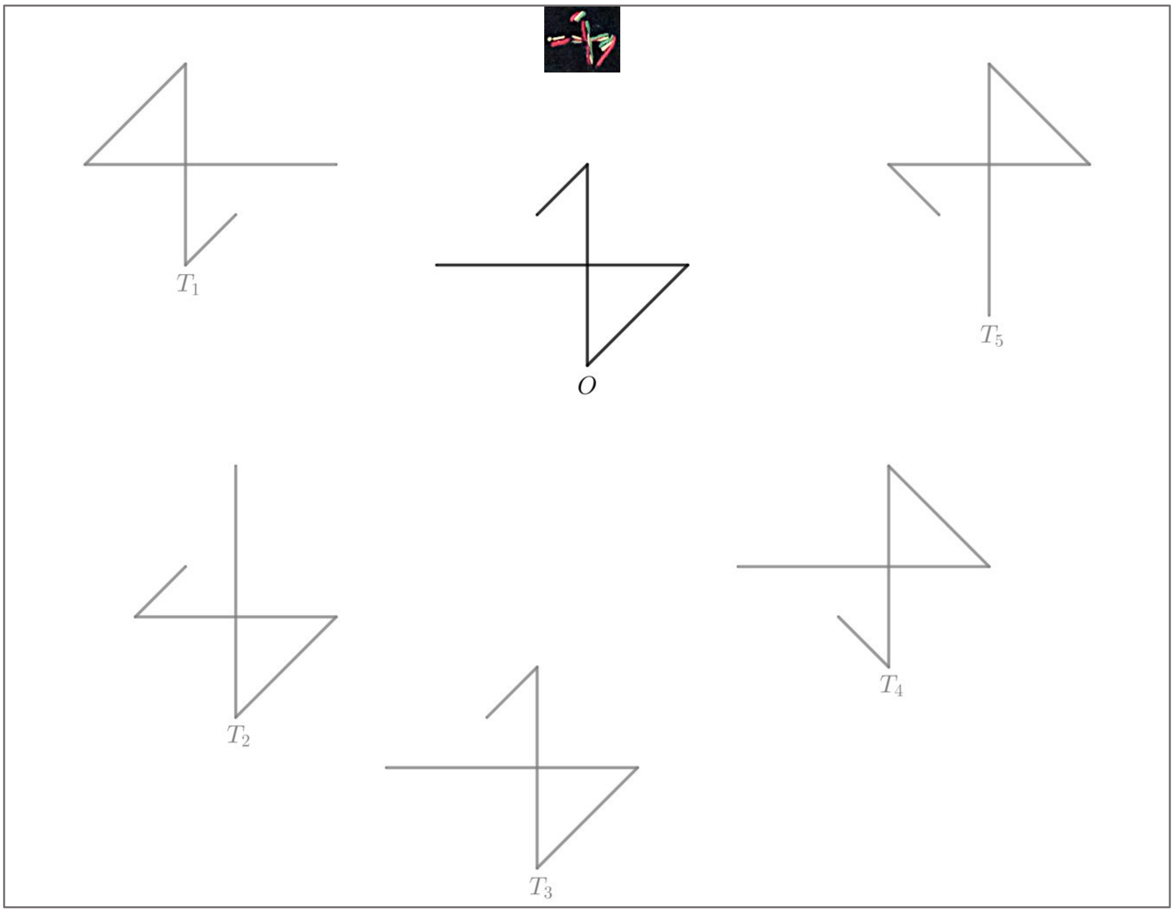


6.3. Enquanto resolviam a tarefa 6.2., a Eva disse ao Lourenço:

«Já escolhi a minha isometria. Só te digo que nenhum ponto ficará fixo.».

Será que o que a Eva disse é suficiente para o Lourenço perceber qual a isometria que ela escolheu? Justifica a tua resposta.

6.4. Descobre as isometrias que transformam a figura original da *monteira* (O), em cada um dos seus transformadas (T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5).



7. Na figura 72, está representado um "Traxe de Feira" (feminino), com a maioria das peças identificadas. Este traje, próprio de Santiago de Compostela, era utilizado para ir à feira, à vila, ou mesmo à missa, aos domingos. É o intermédio entre o "Traxe de Gala" e o "Traxe de Decotío". Em relação ao "Traxe de Gala", este é muito mais singelo, liso e apresenta escassos motivos ornamentais, tal como podes verificar comparando o traje da figura abaixo com o da figura 54.

Figura 72

7.1. O "Traxe de Feira" apresenta simetria de reflexão, à exceção de **um elemento** que quebra esta simetria. Consegues identificá-lo?

7.2. Observa, na figura 73, o *mantón de caxemira* que surge no "Traxe de Feira" da figura anterior. Tal como o *mantón de la*, veste-se cruzado e é usado pela mulher com a mesma finalidade: proteger-se do frio. O *mantón de caxemira* adquire essa designação porque é decorado com figuras que imitam os desenhos orientais próprios dos xailes de caxemira, originários da Índia. Para ser usado, o *mantón* da figura 73, que tem forma quadrangular, é dobrado segundo uma das suas diagonais. **Será que as duas partes formadas são simétricas?** Analisa que diferentes **maneiras de dobrar** o *mantón* existem, de forma que as partes resultantes sejam simétricas.

Figura 73

CAPÍTULO VII. ANÁLISE DA IMPLEMENTAÇÃO PEDAGÓGICA DAS TAREFAS MATEMÁTICAS

7.1. Contexto de implementação pedagógica

As tarefas matemáticas construídas com base no estudo etnomatemático das danças folclóricas - já apresentadas no capítulo anterior - foram posteriormente implementadas em contexto de sala de aula. Em virtude da situação de pandemia de COVID-19, e das subsequentes medidas de confinamento, que ditaram que as atividades letivas no Ensino Básico (assim como no Pré-escolar e no Ensino Secundário) fossem realizadas em regime não presencial desde março de 2020, a implementação pedagógica das tarefas matemáticas não pôde ocorrer no período temporal que havia sido inicialmente estabelecido, tendo sofrido um atraso considerável. Ainda em pleno contexto pandémico, mas já com as aulas do Ensino Básico a decorrerem presencialmente, viria a tornar-se possível realizar a implementação das tarefas matemáticas numa escola do Norte de Portugal, durante o 3.º Período do ano letivo 2020/2021. Dada a situação epidemiológica causada pela doença COVID-19, não houve possibilidade de concretizar a implementação em escolas da Galiza - algo que estava inicialmente previsto no plano da investigação.

A implementação das tarefas ocorreu em diferentes turmas do 6.º, 7.º, e 8.º anos de escolaridade de uma escola artística especializada no ensino da música, situada no concelho de Braga, tendo tido lugar entre os dias 24 de maio de 2021 e 21 de junho do mesmo ano. Numa fase anterior, foram lidos e distribuídos aos alunos do 6.º, 7.º, e 8.º anos de escolaridade os respetivos consentimentos informados (anexos 2, 3 e 4), os quais foram, depois, remetidos para os Encarregados de Educação, para que tomassem conhecimento do trabalho de investigação em curso e autorizassem (ou não) a participação dos seus educandos no mesmo - algo que foi aceite pela generalidade. Conforme referido anteriormente, a implementação pedagógica decorreu em contexto de pandemia, pelo que a aplicação das tarefas em contexto de sala de aula esteve sujeita a várias medidas excecionais de controlo da pandemia, decretadas pelo Governo português. Entre as regras de contenção do surto previstas para as escolas, e em particular para o desenvolvimento do trabalho em sala de aula, há a evidenciar a impossibilidade que houve de os alunos trabalharem em grupo, o que obrigou a que todas as tarefas fossem exploradas individualmente.

No contexto de sala de aula, as tarefas matemáticas funcionaram como instrumentos de recolha de dados, tendo sido aplicadas pela investigadora. A partir dos dados recolhidos através da resolução das tarefas pelos alunos, e mediante o contacto direto da investigadora com os alunos durante a exploração das tarefas, foi desenvolvida a análise dos dados, tendo por referência a análise de conteúdo.

7.2. Aplicação das tarefas matemáticas em sala de aula

7.2.1. As voltas da Chula

O conjunto de tarefas matemáticas *As voltas da Chula* foi implementado numa turma do 6.º ano de escolaridade - turma γ - de uma escola artística especializada no ensino da música, situada em Braga.

No início da implementação pedagógica, com a duração total de 100 minutos, introduziu-se a dança folclórica a investigar - *Chula da Ribeira de Neiva*, do *Grupo Folclórico de Vila Verde*. Em plenário, leu-se a informação relativa a essa dança, que surge apresentada antes das tarefas *As voltas da Chula*, entretanto distribuídas aos alunos. Em seguida, visualizou-se o vídeo da dança em plenário, não tendo sido veiculadas, no momento, quaisquer informações explicativas sobre a coreografia. Posteriormente, os alunos iniciaram a resolução das tarefas. Face ao cenário de pandemia causado pela COVID-19, e em consequência das medidas escolares de prevenção da proliferação do vírus, as tarefas tiveram que ser exploradas individualmente pelos alunos, já dispostos em mesas individuais. Apesar disso, as interações entre os alunos da turma no decorrer da sua atividade aconteceram espontaneamente, verificando-se, frequentemente, trocas de ideias e confrontos de pensamentos entre os pares de alunos em proximidade.

A descrição da figura exibida na tarefa **1.**, de um modo geral, não ofereceu dificuldades aos alunos. Apesar de alguma diversidade nas respostas dadas em **1.1.**, em geral todos os alunos foram capazes de comunicar matematicamente, por escrito, as propriedades que permitem caracterizar a figura em causa.

Na transição para a tarefa **2.**, houve necessidade de visualizar, de novo, o vídeo da dança, em plenário, de modo que os alunos pudessem compreender melhor a informação relativa à descrição da coreografia que antecede essa tarefa, e que cada um deles leu individualmente. Através da participação, da interação e do confronto de ideias entre os alunos, distinguiram-se, em plenário, as partes da coreografia correspondentes ao movimento de "serrar" e as partes da coreografia respeitantes aos movimentos de troca de posições ocorridos entre os pares de dançarinos. Ora, uma vez diferenciados tais movimentos, chamou-se a atenção dos alunos para a identificação, em particular, do primeiro movimento de troca de posições ocorrido entre os pares na dança, o qual foi reconhecido com sucesso no decurso de uma nova visualização do vídeo. Tendo compreendido qual o movimento de que se tratava, os alunos foram capazes de representá-lo com êxito em **2.1.**, descrevendo, por palavras, o movimento em causa, ou, mais frequentemente, desenhando - na maior parte das vezes, setas - na figura dada, ou, até mesmo, combinando ambas as estratégias de resolução - palavras e desenhos (figura 71). De realçar que as discussões conduzidas em plenário acerca da coreografia foram essenciais à atividade dos alunos.

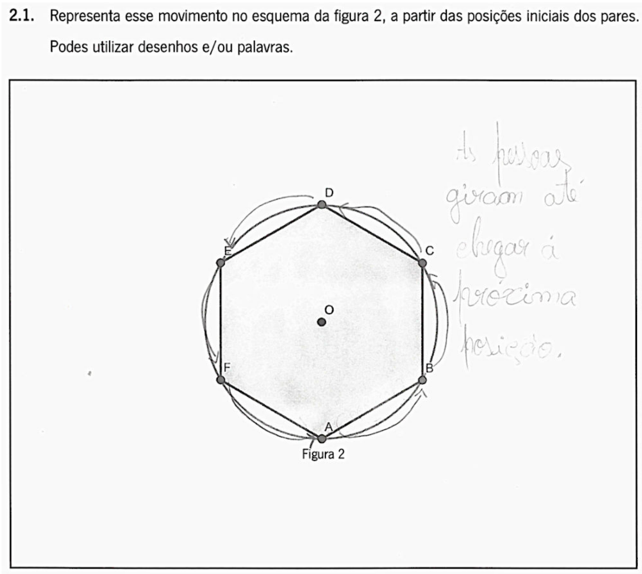
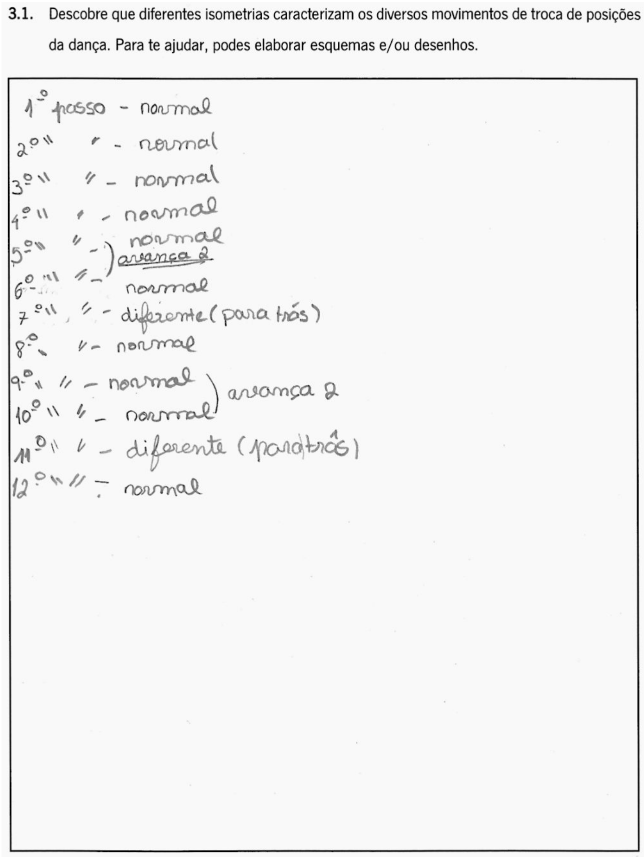


Figura 71. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno EP do 6.º ano, turma γ.

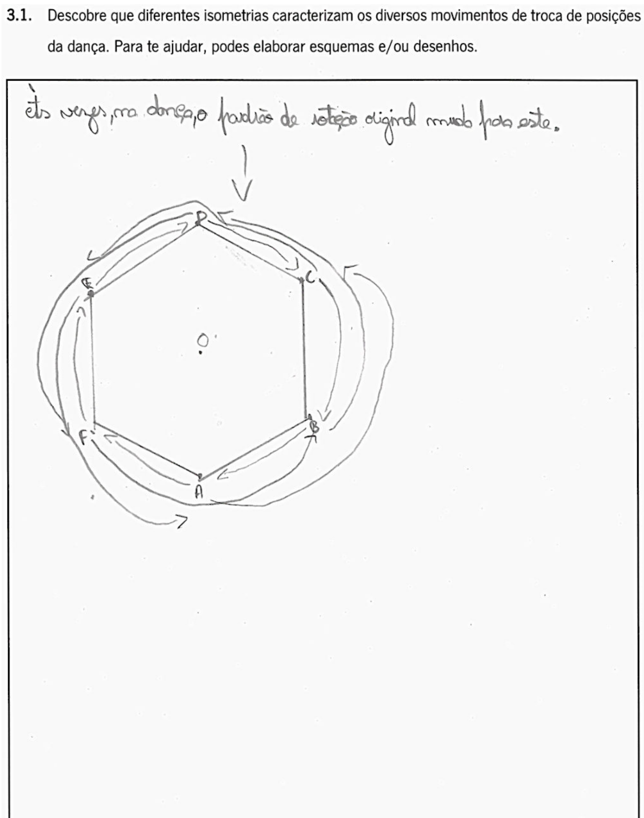
Apesar de os alunos, na sua maioria, terem conseguido representar corretamente o primeiro movimento de troca de posições ocorrido na dança, nenhum aluno foi capaz, na tarefa **2.2.**, de identificar, logo à partida, a isometria associada a esse movimento. Tal dificuldade foi transversal ao grupo-turma, que solicitava explicações adicionais e se mostrava incapaz de progredir na sua atividade. Diante disso, houve necessidade de promover um momento de discussão em plenário. Visto que os conteúdos programáticos referentes às 'isometrias do plano' (MEC, 2012, 2013) já tinham sido lecionados nos dois períodos letivos anteriores - e parte deles durante o período de confinamento -, optou-se por questionar diretamente os alunos acerca das isometrias que haviam estudado, visando a recuperação desse tópico matemático. Ora, no momento em que eram recordadas as isometrias já estudadas - reflexão axial, reflexão central e rotação -, houve um aluno que, em voz alta, comentou que, nesse caso, em **2.2.**, a isometria em causa só poderia ser a rotação. De forma inevitável, todos os alunos concordaram e apreenderam a resposta então partilhada ao coletivo. Mesmo assim, houve necessidade, depois, de chamar a atenção dos alunos para o facto de a identificação da isometria não bastar em **2.2.**; ao contrário do que a maioria dos alunos inicialmente se limitou a fazer - designar a isometria rotação -, o enunciado da tarefa **2.2.** requeria, também, que eles caracterizassem tal isometria. E, novamente, a globalidade dos alunos estagnou a sua atividade, demonstrando não saber como caracterizar uma dada rotação. Ora, por se tratar de uma dúvida comum, seguiu-se um novo momento de discussão em grande grupo, visando a recuperação, pelos alunos, dos elementos necessários para caracterizar uma dada rotação - centro de rotação, amplitude do ângulo associado ao movimento de rotação, e sentido do movimento -, os quais foram registados no quadro. Esse momento de partilha de conhecimento tornou-se essencial para a continuação da atividade dos alunos. De referir que, em **2.2.**, a identificação do centro de rotação O foi acessível à maioria dos alunos, tal como a referência ao sentido do movimento. Já a determinação da medida de amplitude do ângulo de rotação $\left(\frac{360°}{6} = 60°\right)$ criou maiores dificuldades a alguns alunos.

No avanço para a tarefa **3.**, procedeu-se, de novo, à visualização do vídeo da dança, em plenário. Inicialmente, tornou-se confuso para os alunos distinguirem, nos termos matemáticos propostos em **3.1.**, os diversos movimentos de troca de posições ocorridos entre os pares durante a coreografia da dança. Uma tendência geral foi a de os alunos considerarem que todos esses movimentos - e as isometrias associadas - eram diferentes entre si, porque, em todos, os pares mudavam, efetivamente, de posição. Ora, uma vez que os movimentos de troca de posições entre pares se sucedem continuamente na dança, a uma determinada altura, os alunos já não conseguiam acompanhar todos esses movimentos que iam visualizando no vídeo, tendo começado a colocar perguntas, a pedir para o vídeo ser interrompido, etc. Por essa razão, antes de se passar a uma nova visualização do vídeo em plenário, colocaram-se questões orientadoras da atenção dos alunos, como por exemplo: *'Será que todos os movimentos de troca de posições ocorridos entre os pares ao longo da dança são iguais ao primeiro movimento de troca, que vocês analisaram anteriormente?'*, *'Ou será que existem movimentos de troca que são diferentes desse?'*. As reações que surgiram por parte de vários alunos após a colocação de tais perguntas denotaram que muitos deles começaram a compreender do que se tratava; outros foram-se apercebendo ao longo das subsequentes visualizações do vídeo. Ora, uma vez que o vídeo era visualizado pela turma toda em simultâneo, pediu-se aos alunos que não interrompessem a visualização logo à partida, e que fossem, antes, tomando anotações acerca dos diferentes movimentos de troca de posições que iam identificando, e que, na visualização seguinte, confirmassem e/ou completassem essas anotações. Ora, nalguns casos, as anotações feitas pelos alunos acerca dos sucessivos movimentos de troca de posições que ocorrem na dança acabaram mesmo por constituir as suas respostas em **3.1.** (figura 72). Mesmo estando corretas e demonstrando compreensão da parte dos alunos em causa, tais anotações não são suficientes para resolver a tarefa. A este propósito, importa salientar que a quase generalidade dos alunos da turma, em **3.1.**, não explicitou as diferentes isometrias que caracterizam os diferentes movimentos de troca de posições ocorridos entre os pares na dança. Em muitos casos, os alunos limitaram-se a representar, usando desenhos e/ou palavras, os diferentes movimentos de troca que haviam identificado (figura 73), não se referindo, explicitamente, às isometrias - no caso, três rotações com características distintas - que caracterizam tais movimentos, mesmo tendo-se chamado a atenção da turma para tal. Outros alunos, perante tais recomendações, foram capazes de progredir na atividade e, recuperando os elementos necessários para caracterizar uma rotação, conseguiram resolver a tarefa com pleno sucesso (figura 74).



3.1. Descobre que diferentes isometrias caracterizam os diversos movimentos de troca de posições da dança. Para te ajudar, podes elaborar esquemas e/ou desenhos.

Figura 72. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno EP do 6.º ano, turma γ.



3.1. Descobre que diferentes isometrias caracterizam os diversos movimentos de troca de posições da dança. Para te ajudar, podes elaborar esquemas e/ou desenhos.

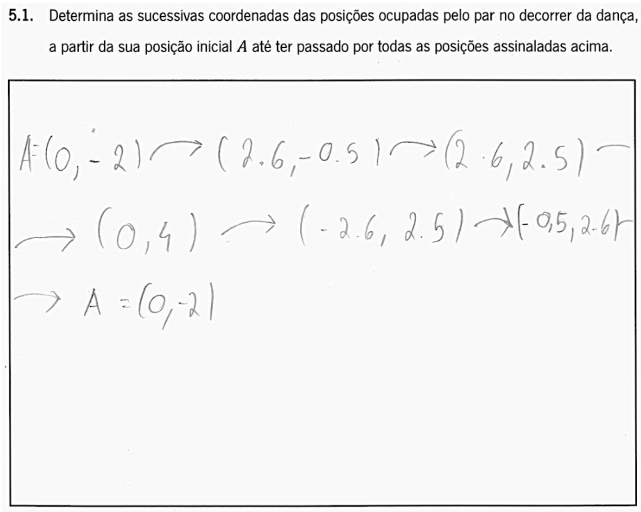
Figura 73. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno AP do 6.º ano, turma γ.

Figura 74. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno DA do 6.° ano, turma γ.

Na tarefa **4.**, os alunos da turma, de um modo geral, revelaram compreender a afirmação feita pelo Leonardo, não tendo sido registadas dificuldades ao nível da compreensão do conceito matemático aí presente - 'polígono coincidente'. Na tarefa **4.1.**, a maioria dos alunos foi bem-sucedida, ao concordar com a afirmação em causa. No entanto, a justificação dessa resposta trouxe obstáculos para diversos alunos, que solicitaram apoio nessa parte da tarefa **4.1.**, demonstrando dificuldades ao nível da comunicação matemática, nomeadamente na explicitação do próprio raciocínio, que se revelava correto.

No que refere à tarefa **4.2.**, e sendo esta uma tarefa matemática a que provavelmente os alunos estariam acostumados, a maioria deles respondeu prontamente, e com correção, sem revelar constrangimentos na identificação do número de simetrias de rotação e de reflexão da figura em causa.

Na tarefa **5.**, a professora de matemática da turma, deparando-se com o conteúdo da mesma, considerou que os alunos não poderiam resolver a tarefa, uma vez que eles só estariam familiarizados com o primeiro quadrante do referencial cartesiano, onde as coordenadas são sempre números positivos. Ora, atendendo a que o referencial cartesiano que surge exposto em **5.** envolve os quatro quadrantes - que, alegadamente, só é introduzido no 7.° ano de escolaridade -, foi recomendado pela professora de matemática que os alunos não resolvessem o problema **5.1.**, o que acabou mesmo por suceder. Ainda assim, é importante referir que alguns alunos, entretanto, já tinham começado a resolver a tarefa, e as poucas resoluções disponíveis sugerem que esses alunos estariam a resolvê-la com sucesso (figura 75). Como tal, restam dúvidas relativamente ao facto de os alunos da turma não poderem resolver a tarefa.


5.1. Determina as sucessivas coordenadas das posições ocupadas pelo par no decorrer da dança, a partir da sua posição inicial A até ter passado por todas as posições assinaladas acima.

A=(0,-2) → (2.6,-0.5) → (2.6,2.5) → (0,4) → (-2.6, 2.5) → (-0,5,2.6) → A=(0,-2)

Figura 75. Resolução da tarefa **5.1.** pelo aluno JP do 6.º ano, turma γ.

Na tarefa **5.2.**, os alunos demonstraram facilidade, e alguns deles até um pouco de insatisfação, devido ao facto de a tarefa, de certa forma, ser um pouco repetitiva. Isto porque, em **3.1.**, os alunos já tinham explorado as diferentes isometrias - rotações - associadas aos diversos movimentos de troca de posições ocorridos entre os pares ao longo de toda a coreografia e, como tal, em **5.2.**, eles só tinham que ver quais dessas isometrias - rotações - eram correspondentes à sequência de movimentos descrita por um dado par, que parte da posição A - algo que tornou a tarefa pouco desafiante para alguns alunos. Ainda sobre a tarefa **5.2.**, e visto que os alunos não exploraram o problema **5.1.**, convém esclarecer que foi necessário chamar a atenção dos alunos para o facto de que seriam considerados os movimentos do par que parte da posição A até ter passado por todas as posições possíveis. Ora, a totalidade dos alunos considerou apenas seis movimentos, que, sucessivamente, correspondem a cinco rotações de centro O e amplitude $60°$ no sentido positivo e uma rotação de centro O e amplitude $120°$ no sentido positivo. Os alunos compreenderam que, dessa forma, o par passa por todas as posições assinaladas, mesmo que, numa delas, não pare. Contudo, pelo facto, exatamente, de o par não parar numa dessas posições, poderia ter acontecido que alguns alunos considerassem, para além dos seis movimentos supracitados, mais um movimento final - rotação de centro O e amplitude $60°$ no sentido negativo -, mas não ocorreu.

A exploração das tarefas **5.1.** e **5.2.** tem influência direta na resolução da tarefa **5.3.**, visto que, para determinarem, nesta última, o comprimento total do percurso efetuado pelo par, os alunos precisam de definir esse percurso. Ora, conforme já referido, todos os alunos assumiram que o par que parte da posição A e passa por todas as posições - mesmo não parando numa delas - dá uma volta inteira na circunferência representada na figura da tarefa **5.**; no entanto, determinar, em **5.3.**, o comprimento deste percurso circular criou dificuldades variadas. Na sua maioria, os alunos não foram capazes de associar o comprimento desse percurso ao perímetro do círculo, tendo sido necessário, ao fim de algum tempo, fornecer pistas e sugestões que pudessem auxiliar os alunos a refletirem sobre a figura geométrica que é gerada pelo movimento do par, desde que parte da posição A, até que aí chega de novo. Houve casos em que os alunos, em vez de considerarem que o movimento do par gerava uma circunferência como a representada na figura da tarefa **5.**, entenderam que originava uma linha poligonal como a que limita o pentágono inscrito nessa circunferência, e, daí, calcularam o perímetro desse polígono, tendo sido interpelados em relação a esse raciocínio, que subentendia um movimento retilíneo por parte do par, destoante da exploração matemática da dança até aí realizada. Quanto aos alunos que conseguiram perceber - logo à partida, ou após intervenções - tratar-se do comprimento de uma circunferência, uma grande parte deles manifestou não saber como calcular o perímetro, tendo solicitado ajuda nesse sentido. Mesmo o facto de, na tarefa **5.3.**, ser referido, em nota, o valor aproximado de π a usar não foi suficiente para que tais alunos recordassem a fórmula para calcular o perímetro do círculo - conteúdo programático abordado no mesmo ano letivo. Outra dificuldade enfrentada pelos alunos ocorreu na determinação do raio/diâmetro da circunferência representada na figura da tarefa **5.**, que vários alunos não souberam determinar a partir dos dados facultados pelo referencial cartesiano - com quatro quadrantes - da figura.

Na tarefa **6.**, não foi muito claro, para alguns alunos, que os movimentos aí descritos se sucediam uns aos outros, tendo sido necessário providenciar esclarecimentos nesse sentido. Para além disso, em **6.1.**, muitos alunos experimentaram dificuldades relacionadas com a representação de cada uma das posições resultantes dos sucessivos movimentos do par, que obstaculizaram a sua exploração da tarefa. A maioria dos alunos tentou descobrir a posição final A' sem realizar marcações intermédias das sucessivas posições assumidas pelo par, ou realizando marcações bastante confusas, que fizeram com que muitos deles incorressem em erros, que, de outro modo, seriam evitáveis. Mediante tal facto, sugeriu-se a vários alunos que representassem por A_1, A_2, A_3, A_4,... as sucessivas posições do par, para que, assim, conseguissem descobrir, de uma forma mais organizada, a posição final A' assumida pelo par no final da coreografia. Conforme se pretendia, essa sugestão, na maioria dos casos, permitiu que os alunos estruturassem melhor o seu pensamento, conseguindo evitar incorreções como as acima referidas, e alcançando resoluções corretas do problema **6.1.** (figura 76). Mais ainda, tal sugestão possibilitou que os alunos explicitassem o seu raciocínio, não se tendo limitado a assinalar, como pedido, a posição final A' assumida pelo par, e tendo tornado mais evidente o modo como chegaram à resposta.

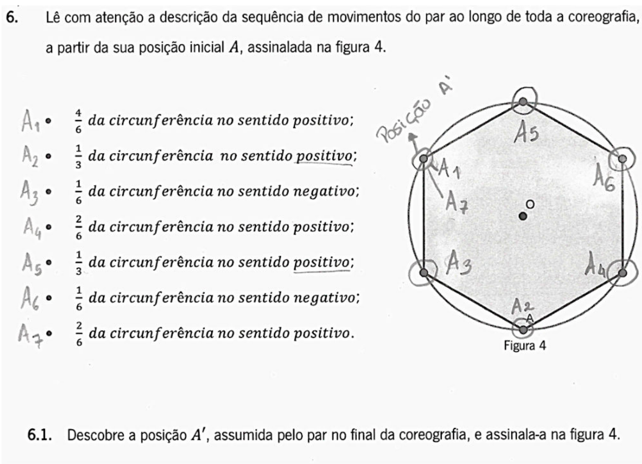


Figura 76. Resolução da tarefa **6.1.** pelo aluno MA do 6.º ano, turma γ.

Apesar de, em **6.1.**, não se terem notado dificuldades significativas dos alunos no que toca ao raciocínio com as frações que descrevem os movimentos rotacionais do par, ainda se registaram, mesmo assim, algumas dúvidas, quer em relação às partes da circunferência correspondentes às frações dadas, quer ao nível do sentido dos movimentos de rotação aí descritos - dois dos quais, em sentido negativo. Na resolução da tarefa **6.1.** pelo aluno SR (figura 77), estão presentes erros dos dois tipos antes referidos: em primeiro lugar, o aluno, ao representar a posição A_4 desconsidera o sentido negativo do movimento e prossegue como se de um movimento de sentido positivo se tratasse; a seguir, ao representar as posições A_5 e A_6, ele erra em relação às partes da circunferência correspondentes, respetivamente, a $\frac{2}{6}$ e $\frac{1}{3}$, e, por fim, ao representar a penúltima posição A_7, erra, de novo, devido ao sentido do movimento.

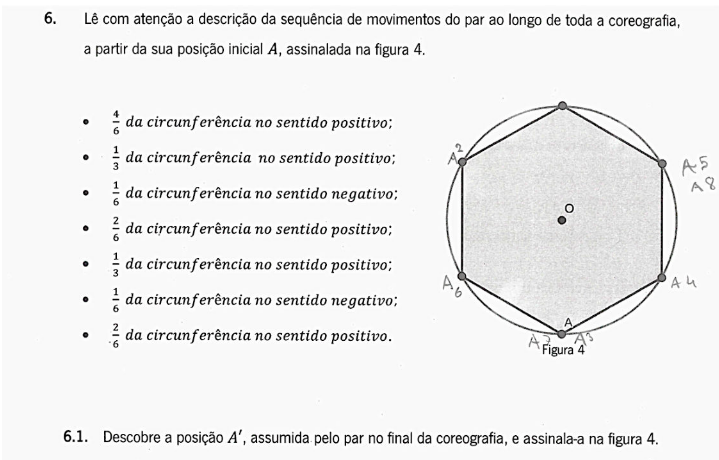


Figura 77. Resolução da tarefa **6.1.** pelo aluno SR do 6.º ano, turma γ.

Ainda que erros como os anteriormente descritos se tenham verificado no decurso da exploração da tarefa **6.1.**, estes não foram muito frequentes. Conforme já sugerido atrás, a maioria das incorreções observadas nas resoluções da tarefa **6.1.** exibidas pelos alunos foi resultado da falta de uma estratégia adequada, por parte dos alunos, que os auxiliasse na descoberta da posição final A' assumida pelo par.

Os alunos que resolveram corretamente a tarefa **6.1.**, em geral, não demonstraram dificuldades na exploração da tarefa subsequente. A maioria desses alunos conseguiu resolver a tarefa **6.2.** com êxito, tendo recorrido a uma estratégia de resolução numérica (figura 78), ou a uma estratégia de cariz mais geométrico (figura 79), ou, até mesmo, comunicando, por palavras, o raciocínio seguido (figura 80). Conforme se pode comprovar nas resoluções da tarefa **6.2.** apresentadas nas figuras 78, 79 e 80, o numeral misto $1\frac{2}{3}$ não ofereceu constrangimentos aos alunos, que, habilmente, o transformaram numa fração imprópria, ou vice-versa, e demostraram, de diferentes maneiras, que o deslocamento do par desde a sua posição inicial A até à sua posição final A' foi $1\frac{2}{3}\ da\ circunferência$, confirmando, assim, a posição final A' que haviam descoberto e assinalado na tarefa prévia.

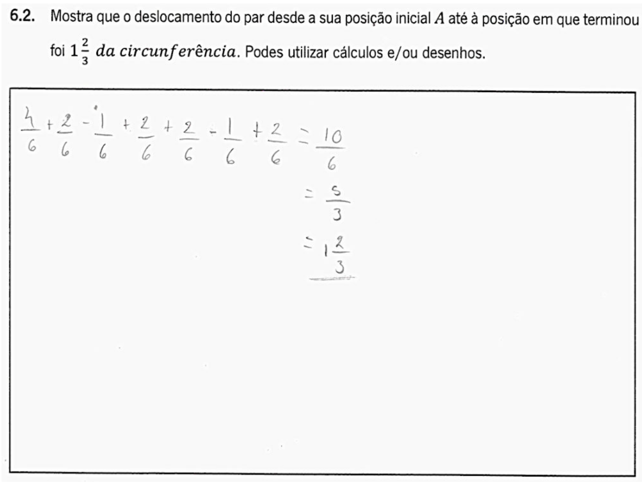


Figura 78. Resolução da tarefa **6.2.** pelo aluno MJ do 6.º ano, turma γ.

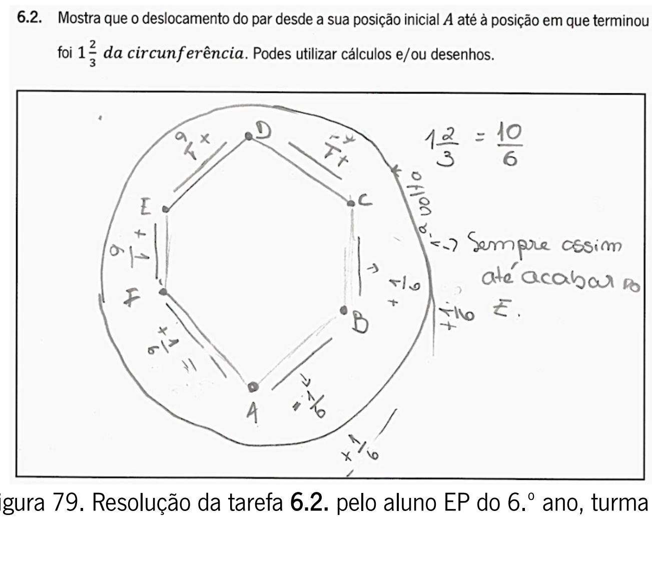
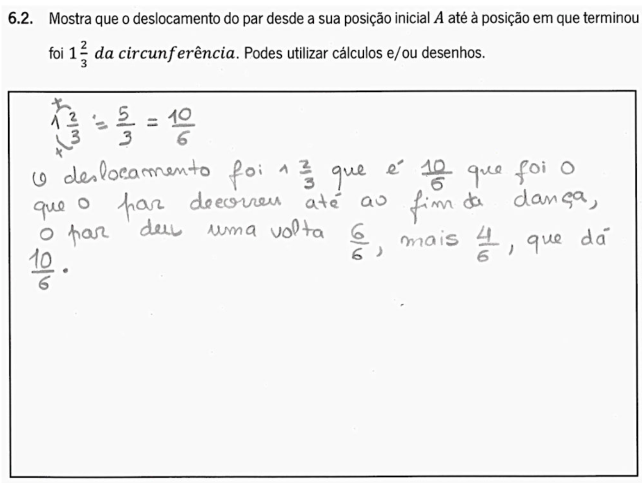


Figura 79. Resolução da tarefa **6.2.** pelo aluno EP do 6.º ano, turma γ.

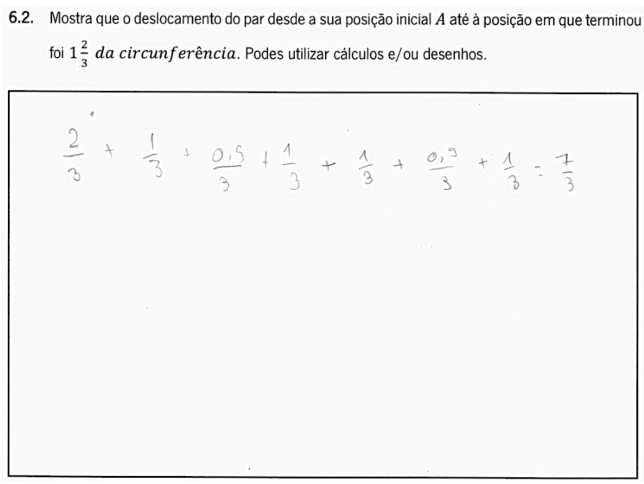

6.2. Mostra que o deslocamento do par desde a sua posição inicial A até à posição em que terminou foi $1\frac{2}{3}$ $da\ circunferência$. Podes utilizar cálculos e/ou desenhos.

$1\frac{2}{3} = \frac{5}{3} = \frac{10}{6}$

O deslocamento foi $1\frac{2}{3}$ que é $\frac{10}{6}$ que foi o que o par decorreu até ao fim da dança, o par deu uma volta $\frac{6}{6}$, mais $\frac{4}{6}$, que dá $\frac{10}{6}$.

Figura 80. Resolução da tarefa **6.2.** pelo aluno MA do 6.º ano, turma γ.

Os alunos que, em **6.1.**, não tinham identificado corretamente a posição final A' assumida pelo par viram-se confrontados, em **6.2.**, com o facto de o deslocamento do par, nesse caso, não corresponder a $1\frac{2}{3}\ da\ circunferência$. Daí, alguns desses alunos não desenvolveram nenhuma resolução em **6.2.**, ou apagaram-na. Outros alunos resolveram a tarefa **6.2.**, tendo na sua maioria reiterado o mesmo tipo de erros da tarefa anterior. Veja-se, por exemplo, a resolução da tarefa **6.2.** pelo aluno SR (figura 81). Esse aluno, que, na tarefa prévia, tinha considerado todos os movimentos rotacionais do par em sentido positivo, em **6.2.**, adicionou todas as frações e obteve a fração $\frac{7}{3}$; tal resultado é coerente com posição final A_8 que ele tinha apontado em **6.1.** (figura 77), mas não equivale ao da demonstração, em **6.2.**, do deslocamento do par. Mesmo diante dessa incongruência, o aluno não foi capaz de analisar criticamente a sua resposta, e, daí, repensar as resoluções das duas tarefas. Outro erro visível na resolução da tarefa **6.2.** pelo aluno SR é a utilização de números decimais nas frações já reduzidas ao mesmo denominador.


6.2. Mostra que o deslocamento do par desde a sua posição inicial A até à posição em que terminou foi $1\frac{2}{3}$ $da\ circunferência$. Podes utilizar cálculos e/ou desenhos.

$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{0,5}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{0,5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

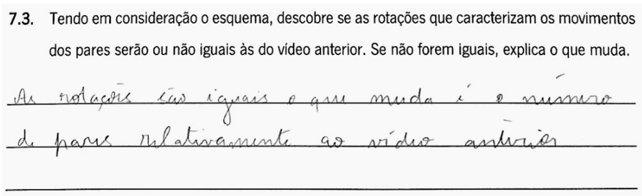
Figura 81. Resolução da tarefa **6.2.** pelo aluno SR do 6.º ano, turma γ.

A transição para a tarefa **7.** gerou alguns constrangimentos ao nível da gestão do trabalho na sala de aula. Derivado, uma vez mais, do facto de o vídeo da dança ser projetado para todos os alunos em simultâneo, e sendo que apenas um número restrito de alunos já tinha concluído a resolução das tarefas até à **7.**, cuja exploração implica a visualização de um novo vídeo da dança *Chula da Ribeira de Neiva*, o sucedido foi que esses alunos pretendiam avançar na atividade - e, para isso, visualizar o novo vídeo da dança -, e os restantes não, por ainda não terem concluído a exploração de todas as tarefas anteriores. Face à situação, aguardou-se mais algum tempo até que, pelo menos, a maioria dos alunos da turma conseguisse concluir a exploração das tarefas até à **7.**, e só então se procedeu à visualização do novo vídeo da dança, já conhecida pelos alunos. Aquando desse momento, os alunos que, mesmo depois do tempo dado, não conseguiram terminar a exploração das tarefas, também avançaram para a tarefa **7.**, tendo ficado algumas das tarefas anteriores por resolver, já que eles acabaram por não voltar mais atrás.

Após a visualização do novo vídeo da dança, não foi imediato para os alunos perceberem, em **7.1.**, que a principal diferença existente entre a disposição dos dançarinos neste vídeo e no que tinham visualizado anteriormente da mesma dança era que, no primeiro vídeo, existiam seis pares na dança e, neste último, apenas cinco pares. Embora essa diferença pareça imediata, a verdade é que os alunos focalizaram mais a sua atenção na procura de diferenças ao nível da coreografia e, mais concretamente, dos movimentos de troca de posições ocorridos entre os pares, pensando que poderiam ser diferentes. Constatando-se que a generalidade dos alunos tentava encontrar diferenças a esse nível, chamou-se a atenção dos alunos para o facto de que, tratando-se da mesma dança, a interligação e o desenvolvimento dos passos e movimentos - que correspondem à coreografia - teria, evidentemente, que ser igual em ambas as danças, pertencentes ao mesmo grupo folclórico - algo que os alunos já estavam a concluir. Após esse alerta dado à turma, os alunos, visualizando, de novo, ora um vídeo, ora outro, começaram a atentar mais na disposição dos dançarinos - conforme é referido na tarefa **7.1.** - e, aí, aperceberam-se que a diferença estava relacionada com o número de pares de dançarinos que integrava a coreografia.

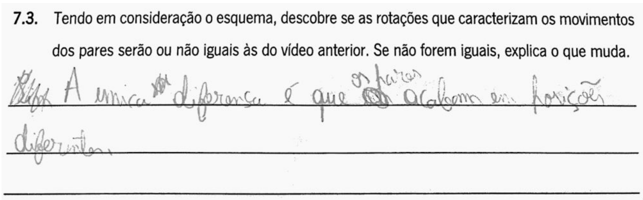
De forma mais ou menos imediata, todos os alunos acabaram por percecionar a diferença enunciada, e, no seguimento, todos eles foram capazes, ao nível da tarefa **7.2.**, de elaborar, com sucesso e sem grandes dificuldades, esquemas representativos das posições iniciais dos dançarinos na dança, tendo, em particular, desenhado um pentágono com as posições dos pares correspondentes aos vértices. Em contraste, na tarefa **7.3.**, nenhum aluno conseguiu, desde logo, compreender devidamente o cerne de problema e resolvê-lo em conformidade. O entendimento geral dos alunos da turma foi que as rotações que caracterizam os movimentos dos pares nos dois vídeos da dança *Chula da Ribeira de Neiva* que haviam visualizado seriam iguais. Apesar de tal uniformidade, os raciocínios seguidos pelos alunos, em

7.3., foram distintos: alguns consideraram que as rotações eram iguais, por se tratar exatamente dos mesmos movimentos de troca de posições tanto numa coreografia como na outra, tendo usado um esclarecimento que tinha sido dado à turma aquando da exploração da tarefa **7.1.**; outros alunos assumiram que as rotações eram iguais, alegando que, de um vídeo da dança para o outro, só mudava o número de pares (figura 82) ou o facto de os pares terminarem em posições diferentes (figura 83); outros alunos, ainda, referiram que as rotações eram iguais, sem explicarem o seu raciocínio (figura 84). Em contraste com os demais, um número restrito de alunos, em **7.3.**, entendeu que as rotações que caracterizam os movimentos dos pares nos dois vídeos eram diferentes, mas falhou na justificação, ao argumentar com base no distinto número de simetrias de rotação e de reflexão dos polígonos que representam as posições dos pares em cada um dos vídeos - um hexágono e um pentágono (figura 85).


7.3. Tendo em consideração o esquema, descobre se as rotações que caracterizam os movimentos dos pares serão ou não iguais às do vídeo anterior. Se não forem iguais, explica o que muda.

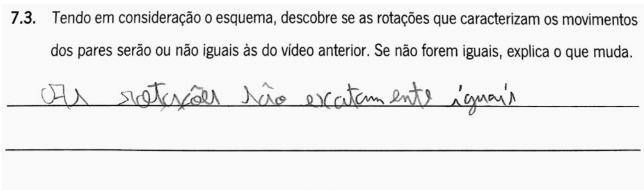
As rotações são iguais o que muda é o número de pares relativamente ao vídeo anterior

Figura 82. Resolução da tarefa **7.3.** pelo aluno MR do 6.º ano, turma γ.


7.3. Tendo em consideração o esquema, descobre se as rotações que caracterizam os movimentos dos pares serão ou não iguais às do vídeo anterior. Se não forem iguais, explica o que muda.

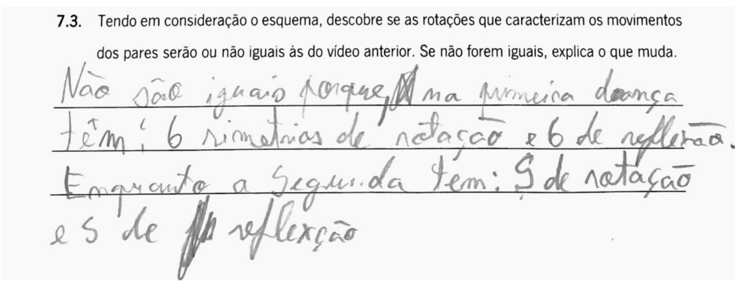
A única diferença é que os pares acabam em posições diferentes.

Figura 83. Resolução da tarefa **7.3.** pelo aluno AB do 6.º ano, turma γ.


7.3. Tendo em consideração o esquema, descobre se as rotações que caracterizam os movimentos dos pares serão ou não iguais às do vídeo anterior. Se não forem iguais, explica o que muda.

As rotações são exatamente iguais

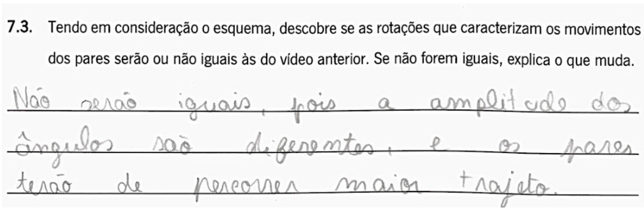
Figura 84. Resolução da tarefa **7.3.** pelo aluno GS do 6.º ano, turma γ.


7.3. Tendo em consideração o esquema, descobre se as rotações que caracterizam os movimentos dos pares serão ou não iguais às do vídeo anterior. Se não forem iguais, explica o que muda.

Não são iguais porque na primeira dança têm: 6 simetrias de rotação e 6 de reflexão. Enquanto a segunda têm: 5 de rotação e 5 de reflexão

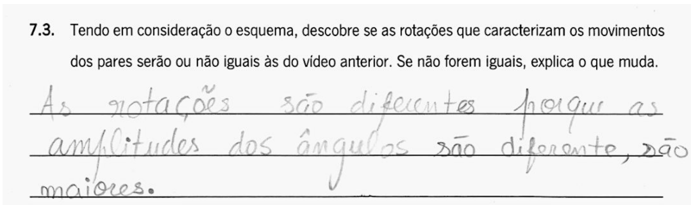
Figura 85. Resolução da tarefa **7.3.** pelo aluno PM do 6.º ano, turma γ.

Perante o sucedido na exploração da tarefa **7.3.** pelos alunos, foi necessário intervir, num primeiro momento individualmente, interpelando diferentes alunos em função do raciocínio que expressavam. Depois, a discussão passou para plenário, onde foi possível que os alunos da turma confrontassem as suas ideias a propósito da questão central do problema - se, do ponto de vista matemático, as rotações que caracterizam os movimentos de troca de posições ocorridos entre os pares neste novo vídeo eram, ou não, iguais às do vídeo anterior, e, não sendo, que elemento(s) caracterizador(es) das rotações é que, afinal, mudavam. Ora, essa discussão final levou os alunos a refletirem sobre os seus raciocínios iniciais, e, daí, a reformularem as respostas dadas à tarefa **7.3.**, tendo mostrado compreensão (figuras 86 e 87).


7.3. Tendo em consideração o esquema, descobre se as rotações que caracterizam os movimentos dos pares serão ou não iguais às do vídeo anterior. Se não forem iguais, explica o que muda.

Não serão iguais, pois a amplitude dos ângulos são diferentes, e os pares terão de percorrer maior trajeto.

Figura 86. Resolução da tarefa **7.3.** pelo aluno MB do 6.º ano, turma γ.


7.3. Tendo em consideração o esquema, descobre se as rotações que caracterizam os movimentos dos pares serão ou não iguais às do vídeo anterior. Se não forem iguais, explica o que muda.

As rotações são diferentes porque as amplitudes dos ângulos são diferente, são maiores.

Figura 87. Resolução da tarefa **7.3.** pelo aluno MA do 6.º ano, turma γ.

No final, recolheu-se o conjunto de tarefas matemáticas *As voltas da Chula*, tendo sido dada oportunidade aos alunos para partilharem algum comentário/observação face ao trabalho desenvolvido.

Ponderando a atividade dos alunos ao longo da implementação pedagógica, pode-se constatar que, de um modo geral, a aplicação das tarefas matemáticas em articulação com a visualização do vídeo da dança folclórica foi cativante para os alunos, que, na sua maioria, se demonstraram empenhados e envolvidos na resolução das mesmas. Desde logo, uma questão que merece reflexão é o facto de não ter sido possível que os alunos desenvolvessem a sua atividade em grupo. Realmente, a exploração individual das tarefas em causa - com um certo grau de abertura e um grau de desafio considerável - restringiu as interações entre os alunos, tornando a experiência menos proveitosa nesse sentido. Associado a isso, houve várias situações em que, perante várias dificuldades exibidas pelos alunos, se tornou necessário promover momentos de discussão em plenário, que levaram a que os alunos, por vezes, partilhassem, em voz alta, as suas ideias e inferências, pondo fim ao desafio oferecido pela tarefa.

Se os alunos estivessem a trabalhar em grupo, talvez tivesse sido possível providenciar, a cada grupo, uma resposta mais restrita e adaptada à especificidade das dúvidas manifestadas pelos alunos de cada grupo, evitando-se alguns dos esclarecimentos realizados em plenário, que levaram, em certas ocasiões, à uniformização das ideias e resoluções dos alunos da turma. Uma outra questão a refletir prende-se com o facto de o vídeo da dança ter que ser projetado para todos os alunos da turma ao mesmo tempo. Conforme se pôde verificar, isso criou dificuldades ao nível da gestão do trabalho em sala de aula e, nalguns momentos, interferiu mesmo no ritmo individual de trabalho dos alunos, fazendo com que alguns avançassem para tarefas posteriores sem terem concluído a exploração das tarefas até aí apresentadas. Caso as tarefas tivessem sido exploradas em grupo, cada grupo de trabalho formado na sala de aula, desejavelmente, teria à sua disponibilidade pelo menos um dispositivo digital, a partir do qual os alunos de cada grupo poderiam visualizar, em tempos diferenciados e com focos de atenção distintos, o vídeo da dança folclórica, usufruindo de uma maior autonomia no desenvolvimento da atividade colaborativa. Todavia, uma vez que as tarefas tiveram, necessariamente, que ser exploradas individualmente, conseguir que todos os alunos da turma tivessem acesso a um dispositivo digital onde pudessem visualizar o vídeo era mais complicado, pelo que a projeção em plenário se tornou a alternativa possível.

Analisando a atividade dos alunos aquando da exploração das diferentes tarefas matemáticas, é possível perceber que as tarefas que ofereceram maiores dificuldades aos alunos foram, precisamente, as que requeriam o estudo, sob o ponto de vista matemático, da coreografia da dança. Isso tornou-se visível, desde logo, na tarefa **2.1.**, cuja resolução implicava analisar a dança, e mais precisamente, compreender os dois tipos de movimentos - o de "serrar" e as trocas de posições - que compõem a respetiva coreografia. Situação semelhante aconteceu nas tarefas **2.2.** e **3.1.**, em que os alunos tinham que aplicar os seus conhecimentos relativos às isometrias do plano aos movimentos de trocas de posições ocorridos entre os pares ao longo da dança. Também na tarefa **4.1.**, a dificuldade de alguns alunos, mesmo tendo percebido que o polígono formado pelas posições dos pares seria sempre coincidente com o polígono apresentado, foi conseguir comunicar o seu raciocínio tendo por base a dança e o desenvolvimento dos movimentos aí ocorridos. Mais evidente, ainda, foi ao nível da tarefa **5.3.**, que requeria que os alunos determinassem o comprimento total do percurso efetuado por um par de dançarinos, ao longo do seu movimento circular criando uma circunferência completa. Ora, os alunos, apoiados na visualização do movimento do par em causa, experimentaram fortes constrangimentos na perceção da linha gerada pelo movimento do par, bem como na determinação do respetivo comprimento. E certos alunos chegaram mesmo a efetuar cálculos irrefletidamente - como no caso dos alunos que, no início, calcularam o perímetro do pentágono -, desconsiderando o movimento circular descrito pelo par.

Dados como os até então descritos indicam que a maioria dos alunos da turma revelou dificuldades em aplicar conteúdos matemáticos já estudados - como as isometrias do plano ou o perímetro do círculo - a práticas do mundo real - no caso, aos movimentos realizados na coreografia de uma dança folclórica. Tais ocorrências poderão ser reveladoras da desconexão existente entre os conteúdos matemáticos lecionados em sala de aula e práticas e experiências vivenciadas na realidade. A exploração, pelos alunos, da tarefa **7.3.** vem reforçar a interpretação anteriormente enunciada, pois, uma vez mais, e mesmo depois de uma significativa exploração da dança folclórica em causa, os alunos mostraram-se incapazes de, observando as rotações efetuadas pelos pares num novo vídeo da dança, aplicarem os seus conhecimentos acerca desta isometria - a rotação - e resolverem a tarefa em conformidade com isso. Em vez disso, os alunos focaram-se, predominantemente, na concretização observável dos movimentos de troca de posições ocorridos entre os pares, não se demonstrando capazes de os interpretar e analisar sob o ponto de vista da matemática que se aí se encontra implicada, e que já havia sido explorada antes.

Em contraste com a génese das dificuldades experimentadas pelos alunos na exploração das tarefas elencadas anteriormente, um outro tipo de constrangimento pode ter ficado a dever-se, no caso específico das tarefas **6.**/**6.1.**, à formulação do próprio enunciado. Realmente, os dados recolhidos sugerem que a enunciação dos dados do problema, em **6.**, poderá não ter facilitado o entendimento dos alunos - no caso, relativamente ao facto de os movimentos de um par de dançarinos que aí surgem descritos se sucederem uns aos outros ordenadamente. Isso, por sua vez, dificultou a exploração dos alunos em **6.1.**, por não terem designado cada um dos sucessivos movimentos do par, e por não terem tentado, a partir de uma representação das consecutivas posições, encontrar a posição final A' do par.

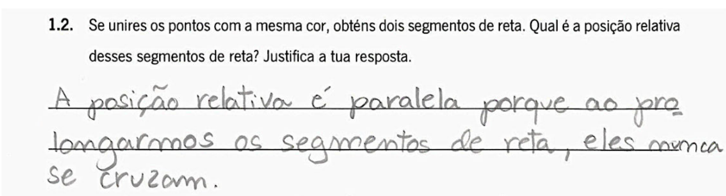
Apreciando a duração da implementação pedagógica - no total, 100 minutos -, entende-se que o tempo em consideração foi suficiente para que a maioria dos alunos da turma - mas não todos - conseguisse concluir a exploração do conjunto de tarefas matemáticas *As voltas da Chula*. Recorde-se, contudo, que a tarefa **5.1.** não chegou a ser explorada pelos alunos, devido ao referencial cartesiano com quatro quadrantes que aparece integrado na mesma, ainda desconhecido pelos alunos da turma. Atendendo ao disposto, talvez tivesse sido necessário conceder mais tempo aos alunos, caso se pretendesse uma exploração integral das tarefas, por todos os alunos ou, pelo menos, por um número maior de alunos. Ora, a consideração anterior, veja-se, tem como referência o trabalho individual desenvolvido pelos alunos; adotando outra modalidade de trabalho em sala de aula - nomeadamente, em pequeno grupo, conforme era pretendido -, não se pode aferir se o tempo de exploração das tarefas pelos alunos seria, ou não, equivalente ao utilizado pelos alunos no decurso da sua atividade individual.

7.2.2. Vira e volta a virar

O conjunto de tarefas matemáticas *Vira e volta a virar* foi implementado numa turma do 6.° ano de escolaridade - turma α - de uma escola artística especializada no ensino da música, situada em Braga.

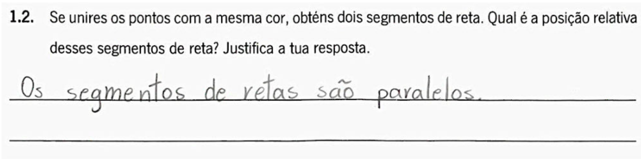
No início da implementação pedagógica, com a duração total de 100 minutos, introduziu-se a dança folclórica a investigar - *Vira Velho de Vila Verde*, do *Grupo Folclórico de Vila Verde*. Em plenário, leu-se a informação relativa a essa dança, que surge apresentada antes das tarefas *Vira e volta a virar,* entretanto distribuídas aos alunos. Em seguida, visualizou-se o vídeo da dança em plenário, não tendo sido adiantados quaisquer esclarecimentos acerca da coreografia. Posteriormente, os alunos iniciaram a exploração das tarefas. Conforme já tinha sido mencionado na análise do conjunto de tarefas anterior, não houve possibilidade, em virtude das medidas escolares de prevenção da proliferação do coronavírus, que os alunos explorassem as tarefas em grupo; ao invés, os alunos, já dispostos em mesas individuais, desenvolveram a sua atividade individualmente, tendo-se verificado, ainda assim, o estabelecimento de interações, trocas de ideias, e confronto de pensamentos entre os pares situados em mesas adjacentes.

Na tarefa **1.**, os alunos compreenderam a figura correspondente à representação de algumas posições iniciais dos dançarinos na dança, e, em **1.1.**, conseguiram completar essa figura com sucesso, acrescentando as posições iniciais dos dançarinos em falta. De notar que alguns alunos expressaram a necessidade de uma nova visualização do vídeo da dança - ou, pelo menos, da parte inicial do vídeo -, para confirmarem o número total de homens e mulheres que integrava a coreografia e as suas posições. Em **1.2.**, a maior parte dos alunos não teve dificuldades, reconhecendo, quase de imediato, que os segmentos de reta em causa eram paralelos e justificando, adequadamente, a sua resposta (figura 88). Outros alunos, apesar de terem reconhecido, corretamente, o paralelismo dos segmentos de reta em questão, não justificaram a resposta dada (figura 89), apresentando uma resolução incompleta da tarefa. Houve, ainda, um pequeno número de alunos que, no princípio, declarou não se recordar da designação atribuída à posição relativa desses segmentos de reta. Alguns desses alunos acabaram por, mais tarde, se lembrar da designação correta - segmentos de reta paralelos. Outros responderam, incorretamente, segmentos de reta perpendiculares, mas a justificação que formularam denota compreensão (figura 90).


1.2. Se unires os pontos com a mesma cor, obténs dois segmentos de reta. Qual é a posição relativa desses segmentos de reta? Justifica a tua resposta.

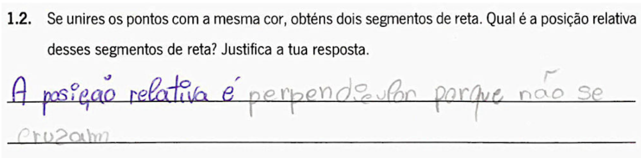
A posição relativa é paralela porque ao prolongarmos os segmentos de reta, eles nunca se cruzam.

Figura 88. Resolução da tarefa **1.2.** pelo aluno MS do 6.° ano, turma α.


1.2. Se unires os pontos com a mesma cor, obténs dois segmentos de reta. Qual é a posição relativa desses segmentos de reta? Justifica a tua resposta.

Os segmentos de retas são paralelos.

Figura 89. Resolução da tarefa **1.2.** pelo aluno ML do 6.º ano, turma α.


1.2. Se unires os pontos com a mesma cor, obténs dois segmentos de reta. Qual é a posição relativa desses segmentos de reta? Justifica a tua resposta.

A posição relativa é perpendicular porque não se cruzam

Figura 90. Resolução da tarefa **1.2.** pelo aluno SP do 6.º ano, turma α.

Na transição para a tarefa **2.**, os alunos visualizaram, de novo, a parte inicial do vídeo da dança, correspondente ao momento em que os dançarinos executam o movimento de "serrar", o qual foi identificado pelos próprios alunos, tendo por base a descrição desse movimento que surge apresentada antes da tarefa. Em **2.**, a representação da sequência de movimentações dos pés de um dançarino durante o "serrar" foi bem compreendida pela generalidade dos alunos da turma. De um modo geral, todos os alunos se aperceberam do padrão de repetição aí existente, o que lhes permitiu, em **2.1.**, completarem, autonomamente e com êxito, os dois movimentos de pés do dançarino que se seguiam (figura 91). No entanto, um número residual de alunos da turma não resolveu a tarefa **2.1.** com sucesso, evidenciando falhas na compreensão do padrão repetitivo que caracteriza o movimento (figuras 92 e 93). Tais alunos, na sua resolução da tarefa **2.1.**, não completaram os dois movimentos de pés em falta na sequência com os movimentos identificados com os números 3 e 4, os quais respeitavam a regularidade existente no movimento de "serrar"; em vez disso, o aluno MD (figura 92), repetiu/juntou os movimentos 2, 3 e 4 - conforme evidencia na sua resolução -, e o aluno SP (figura 93), repetiu os movimentos 5 e 6.

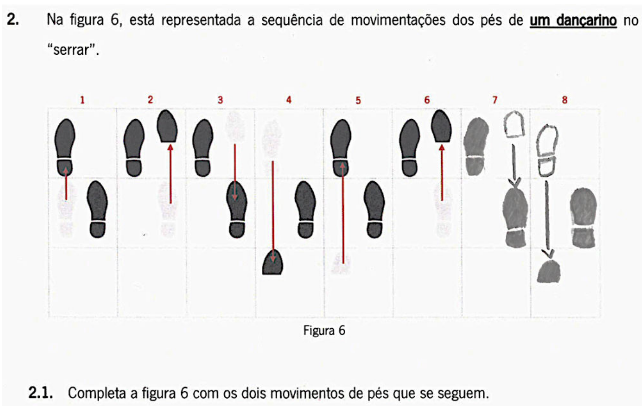


Figura 91. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno CF do 6.º ano, turma α.

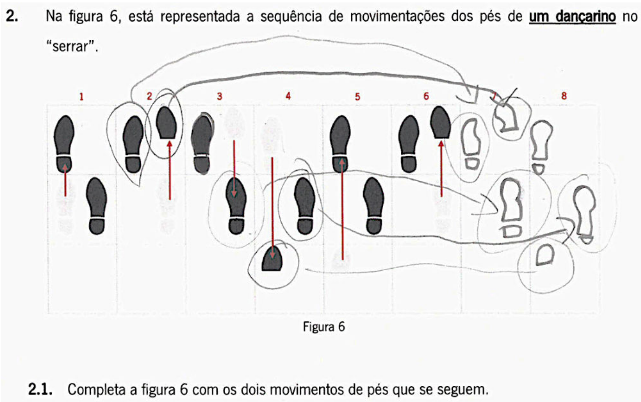


Figura 92. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno MD do 6.º ano, turma α.

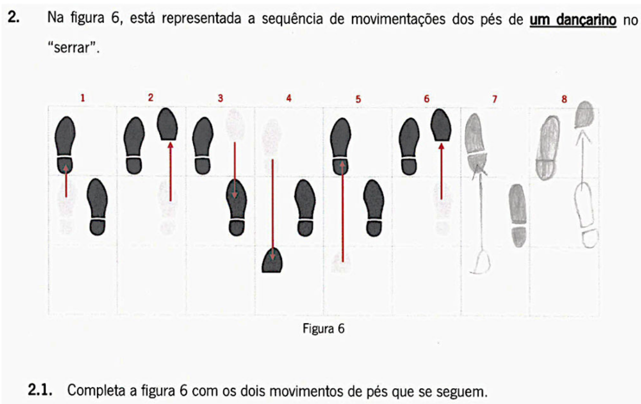
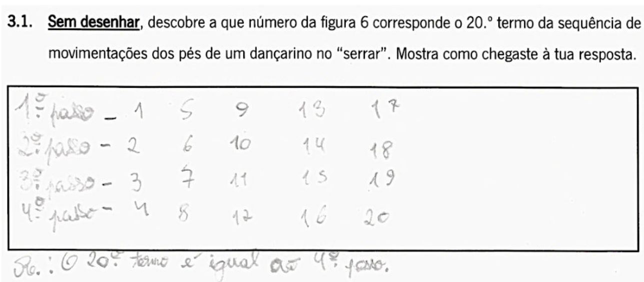


Figura 93. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno SP do 6.º ano, turma α.

Avançando para a tarefa **3.**, os alunos, que de um modo geral tinham compreendido a regularidade existente no movimento de "serrar", experimentaram, apesar disso, alguns constrangimentos, em **3.1.**, ao tentarem descobrir, sem desenhar, o vigésimo termo da sequência de movimentações dos pés de um dançarino no "serrar". A exploração da tarefa **3.1.** não foi, por isso, tão imediata para os alunos da turma, tendo-lhes oferecido maiores dificuldades. Alguns alunos manifestaram, desde logo, dúvidas relacionadas com a interpretação do próprio enunciado da tarefa e com o que era solicitado na mesma, pelo que foi necessário providenciar esclarecimentos nesse sentido. Outros alunos, por sua vez, mostraram-se mais autónomos, iniciando a exploração da tarefa sem requererem explicações adicionais. Considerando as resoluções apresentadas pelos alunos na tarefa **3.1.**, é possível perceber-se uma grande diversidade de estratégias de resolução. Nesse quadro, pode constatar-se que alguns alunos percorreram, um a um, os sucessivos termos da sequência de movimentações dos pés de um dançarino no "serrar" até chegarem ao vigésimo termo, e, tendo percebido o padrão de repetição existente em tal movimento, conseguiram descobrir, corretamente, o número da figura que identificava o movimento de pés correspondente ao vigésimo termo (figuras 94, 95 e 96). Note-se que, apesar de nessas três resoluções estar implicado o mesmo tipo de estratégia, as resoluções são visivelmente distintas entre si.

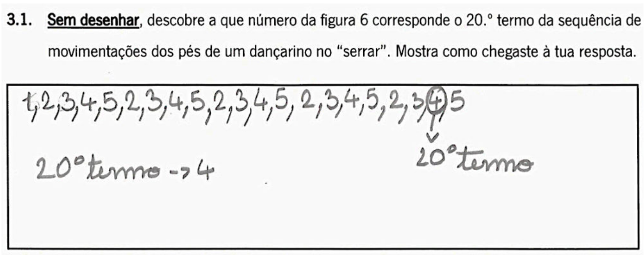
Ademais, importar considerar que, apesar de esse tipo de estratégia de resolução se ter demonstrado útil e adequado perante os dados facultados na tarefa **3.1.**, o mesmo não aconteceria caso se tratasse, por exemplo, de um termo de ordem superior, como fosse o centésimo. Mas, atendendo a que o termo da sequência requerido em **3.1.** era o vigésimo, tornou-se possível, para os alunos, passarem pelos sucessivos termos da sequência até ao pretendido, tal qual os alunos anteriormente referidos fizeram. Outros alunos, ao perceberem que a sequência de movimentações dos pés de um dançarino no "serrar" seguia um certo padrão, adotaram estratégias de resolução mais condensadas (figuras 97, 98 e 99), que não passaram, como haviam feito os alunos anteriores, por explorar todos os termos da sequência, mas que lhes permitiram, à semelhança desses alunos, serem bem-sucedidos na resolução da tarefa. Em contraste com os dois grupos referidos anteriormente, um conjunto pequeno de alunos da turma percecionou, erroneamente, que a sequência de movimentações dos pés de um dançarino no "serrar" se repetia a cada cinco termos - ao invés de quatro termos -, o que fez com que eles resolvessem incorretamente a tarefa (figuras 100 e 101), mesmo tendo usado uma estratégia de resolução adequada.


3.1. **Sem desenhar**, descobre a que número da figura 6 corresponde o 20.º termo da sequência de movimentações dos pés de um dançarino no "serrar". Mostra como chegaste à tua resposta.

1.º passo - 1 5 9 13 17
2.º passo - 2 6 10 14 18
3.º passo - 3 7 11 15 19
4.º passo - 4 8 12 16 20

R.: O 20.º termo é igual ao 4.º passo.

Figura 94. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno RR do 6.º ano, turma α.

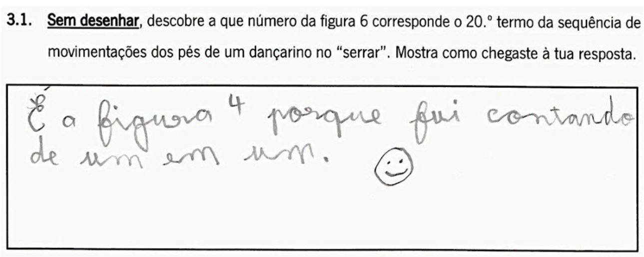

3.1. **Sem desenhar**, descobre a que número da figura 6 corresponde o 20.º termo da sequência de movimentações dos pés de um dançarino no "serrar". Mostra como chegaste à tua resposta.

1,2,3,4,5,2,3,4,5,2,3,4,5,2,3,4,5,2,3,4,5

20º termo

20º termo -> 4

Figura 95. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno CF do 6.º ano, turma α.


3.1. **Sem desenhar**, descobre a que número da figura 6 corresponde o 20.º termo da sequência de movimentações dos pés de um dançarino no "serrar". Mostra como chegaste à tua resposta.

É a figura 4 porque fui contando de um em um.

Figura 96. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno AP do 6.º ano, turma α.

3.1. <u>**Sem desenhar**</u>, descobre a que número da figura 6 corresponde o 20.° termo da sequência de movimentações dos pés de um dançarino no "serrar". Mostra como chegaste à tua resposta.

8+8=16.º
16º+4=20º=4 passo

Figura 97. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno DB do 6.° ano, turma α.

3.1. <u>**Sem desenhar**</u>, descobre a que número da figura 6 corresponde o 20.° termo da sequência de movimentações dos pés de um dançarino no "serrar". Mostra como chegaste à tua resposta.

$\underbrace{2^{\circ}=6^{\circ}}_{+4}$ $6^{\circ}=10^{\circ}=14^{\circ}=18^{\circ}=22^{\circ}=2^{\circ}$ termo
22º=2º
20º=4º termo

Figura 98. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno AM do 6.° ano, turma α.

3.1. <u>**Sem desenhar**</u>, descobre a que número da figura 6 corresponde o 20.° termo da sequência de movimentações dos pés de um dançarino no "serrar". Mostra como chegaste à tua resposta.

8 Corresponde ao 4 ~~termo~~ porque 8 x 3 = 24
24º Termo - 8
8-4=4
24-4=20

Figura 99. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno GS do 6.° ano, turma α.

3.1. <u>**Sem desenhar**</u>, descobre a que número da figura 6 corresponde o 20.° termo da sequência de movimentações dos pés de um dançarino no "serrar". Mostra como chegaste à tua resposta.

Se a coreografia tem 5 passos repetindo e 5 é multiplo de 20, por isso o 20º termo da sequencia corresponde ao 5º passo

Figura 100. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno JD do 6.° ano, turma α.

3.1. <u>**Sem desenhar**</u>, descobre a que número da figura 6 corresponde o 20.° termo da sequência de movimentações dos pés de um dançarino no "serrar". Mostra como chegaste à tua resposta.

5, porque 20÷5=4. Ou seja, faço 4 vezes a sequência e vei, quando chegar ao 20, estar no 5.

Figura 101. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno TA do 6.° ano, turma α.

Na tarefa **4.**, os alunos tinham que selecionar, entre quatro opções, o esquema que reproduzia corretamente a posição dos pés de um par de dançarinos colocados frente a frente durante o movimento de "serrar". Ora, ainda que a tarefa em causa aparentasse oferecer um baixo grau de dificuldade aos alunos, a verdade é que não foi imediato para uma grande parte dos alunos da turma perceberem que o movimento de "serrar" efetuado pelos pares de dançarinos colocados frente a frente era simétrico, tratando-se, por isso, da última opção. Na sua maioria, os alunos mostravam-se indecisos entre a segunda e a última opções. A primeira e a terceira opções foram facilmente excluídas pelos alunos, porque, nesses esquemas, os pés dos dançarinos aparecem virados para o mesmo lado, o que não seria possível, já que os pares de dançarinos, ao executarem o movimento de "serrar", estão colocados frente a frente, e, como tal, voltados uns para os outros. Em relação à segunda e à última opções, não foi assim tão simples para os alunos discernirem, e, portanto, foram vários os alunos da turma que, num primeiro momento, escolheram a opção errada. Atendendo a isso, e visto que a opção selecionada na tarefa **4.** tinha influência direta na resolução da tarefa seguinte, houve necessidade de intervir atempadamente juntos desses alunos, questionando-os acerca da opção que haviam assinalado, e sugerindo-lhes que atentassem, de novo, no vídeo da dança, que seria novamente projetado em plenário. Mesmo tendo-se proporcionado aos alunos novas oportunidades para visualizarem a parte do vídeo da dança correspondente à execução do movimento de "serrar", alguns deles permaneceram, ainda assim, fixos às suas ideias. Ora, é possível que a movimentação contínua dos dançarinos na dança, e a ocorrência, até, de algumas imprecisões na execução dos passos pelos dançarinos durante o "serrar" tenha dificultado a perceção dos alunos em relação à simetria presente nos movimentos efetuados pelos pares colocados frente a frente, levando-os a selecionarem e a insistirem numa opção que não era a correta. A esse conjunto de alunos, foram dadas sugestões mais concretas, propondo-se, por exemplo, que observassem o pé com que os pares de dançarinos colocados frente a frente iniciam a dança, e, mais concretamente, o movimento de "serrar"; note-se que este havia sido um método seguido por alguns alunos para determinarem, em **4.**, a opção correta. Outra estratégia usada para auxiliar esses alunos foi mesmo parar a projeção do vídeo da dança num momento em que a posição dos pés dos pares de dançarinos colocados frente a frente era visivelmente simétrica, e, com isso, incitar os alunos à reflexão.

A continuação para a exploração da tarefa **5.** pelos alunos foi tendo lugar em tempos diferentes, em consequência das dificuldades que eles experimentaram aquando da resolução da tarefa anterior. Houve diversos casos em que os alunos, tendo selecionado uma opção incorreta na tarefa **4.**, iniciaram a resolução da tarefa **5.**, e, como tal, após terem sido desafiados a refletir sobre a opção que tinham escolhido em **4.** e, entretanto, mudarem de opinião, tiveram que reformular, na tarefa **5.**, a sua resolução.

Mas, independentemente disso, a tarefa **5.** revelou-se bastante exigente para a generalidade dos alunos, tendo sido, de entre todas as tarefas, a que implicou maior tempo de atividade. A complexidade da tarefa, segundo as opiniões manifestadas pelos alunos, começava, desde logo, pelo facto de o motivo utilizado para representar as movimentações dos pés - pegada completa ou parcial - não ser fácil de reproduzir, exigindo muita concentração da parte dos alunos de forma a conseguirem um desenho bem-sucedido. Mais exigente ainda era o facto de os alunos, antes de poderem concretizar o desenho da(s) pegada(s), terem que, mentalmente, conceber a sequência simétrica de movimentações dos pés do dançarino tido como referência, já que se tratava das movimentações dos pés efetuadas pelo par desse dançarino. Tudo isso tornou a tarefa extremamente desafiante para os alunos da turma, que, de uma forma geral, se mantiveram empenhados na sua atividade, esforçando-se por conseguirem resolvê-la com sucesso. Vários alunos solicitaram auxílio durante resolução da tarefa, deixando patente a dificuldade da mesma.

Apesar da declarada exigência da tarefa **5.**, vários alunos da turma conseguiram explorá-la com sucesso, exibindo resoluções corretas (figuras 102, 103 e 104), marcadas por particularidades distintas. Veja-se, por exemplo, que os alunos AM e RR concretizaram, de forma diferente, o desenho da sequência de movimentações dos pés efetuadas pelo par do dançarino tido como referência. No caso do aluno AM (figura 102), ele elaborou o desenho perspetivando que o par do dançarino se encontrava à frente deste, e, como tal, o aluno inverteu a posição dos pés do dançarino cuja sequência de movimentações surge representada na figura da tarefa **2.**, tornando explícita a orientação dos pés desse dançarino em relação ao seu par. Já o aluno RR (figura 103) desconsiderou esse detalhe relativo à orientação relativa dos pés do dançarino, o que não o impediu de desenhar corretamente a sequência de movimentações requerida, ainda que sem considerar essa especificidade. Ora, atendendo a que as informações dadas no enunciado da tarefa **5.** não restringem a exploração no que refere à orientação dos pés a representar, a resolução do aluno RR (figura 103), assim como outras resoluções semelhantes, devem ser consideradas corretas. Em relação à resolução da tarefa **5.** pelo aluno JL (figura 104), esta revela-se extremamente interessante, já que o aluno decidiu localizar a sequência de movimentações dos pés num sistema de coordenadas, elucidando, de forma muito curiosa, a questão relativa à orientação dos pés de um par de dançarinos; para além disso, o aluno JL evidenciou a simetria de reflexão existente nas movimentações realizadas pelo par de dançarinos, identificando, no seu desenho, o eixo r, que representa o eixo dessa simetria. Ainda a respeito dessa mesma resolução, convém destacar que aluno JL não introduziu, no seu desenho, as setas indicativas do movimento dos pés do dançarino - falha muito frequente entre os alunos da turma. Ora, a omissão das setas no desenho elaborado pelo aluno JL dificulta a perceção das movimentações aí representadas, mesmo tendo o aluno assinalado, adequadamente, o sombreado concernente aos pés.

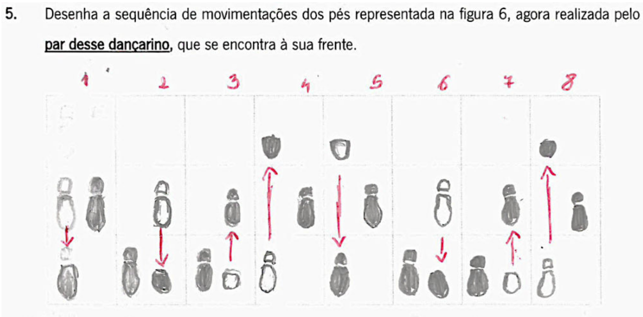


Figura 102. Resolução da tarefa **5.** pelo aluno AM do 6.° ano, turma α.

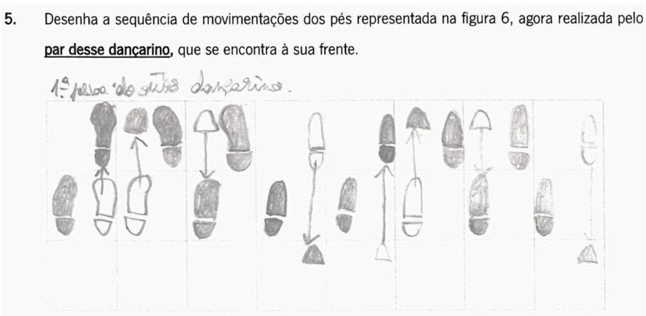


Figura 103. Resolução da tarefa **5.** pelo aluno RR do 6.° ano, turma α.

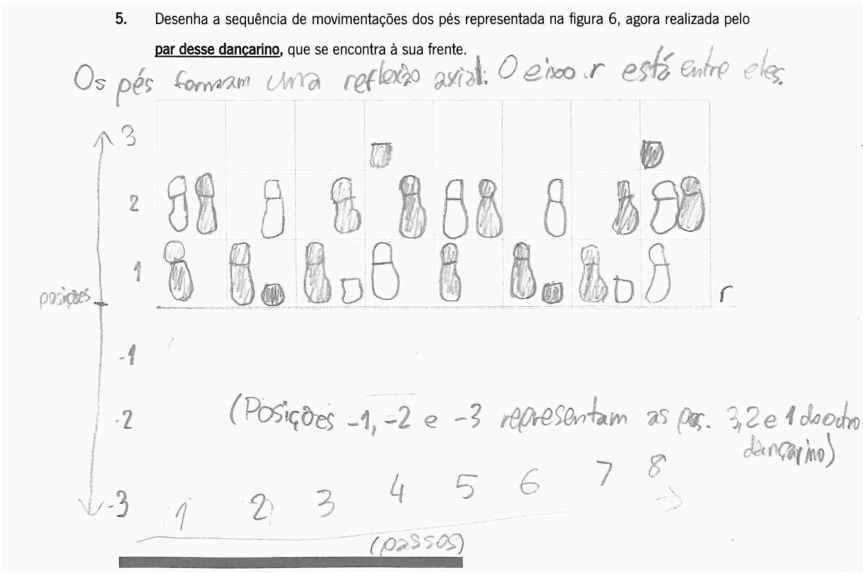


Figura 104. Resolução da tarefa **5.** pelo aluno JL do 6.° ano, turma α.

Por oposição aos anteriores, outros alunos não conseguiram ser bem-sucedidos na exploração da tarefa, expondo resoluções incorretas (figuras 105, 106 e 107), as quais configuram erros diferentes. Por exemplo, no caso da resolução da tarefa **5.** pelo aluno JC (figura 105), o aluno copiou, exatamente, a mesma sequência de movimentações dos pés de um dançarino que surge representada na figura da tarefa **2.**, o que sugere que ele, ou não compreendeu que a sequência de movimentações requerida na tarefa era a do par desse dançarino, ou que percecionou, erroneamente, que as movimentações dos pés realizadas por um par de dançarinos colocados frente a frente são iguais. Já no caso da resolução da tarefa **5.** pelo aluno RB (figura 106), o aluno copiou, para os espaços de desenho correspondentes, todos os motivos da sequência de movimentações que surge representada na figura da tarefa **2.**, limitando-se a inverter a orientação dos pés do dançarino, bem como o sentido das setas aí presentes. Logo à partida, essa resolução denota falta de reflexão e de sentido crítico por parte do aluno RB, já que, na sequência de movimentações que ele desenhou, o dançarino inicia o movimento de "serrar" com um pé à frente e o outro atrás - algo que não se verifica no ponto de partida desse movimento, várias vezes visualizado pelos alunos; a par desta, são várias as inconsistências presentes na sequência de movimentações desenhada pelo aluno, decorrentes da utilização de uma estratégia de resolução inapropriada. Num outro caso, o da resolução da tarefa **5.** pelo aluno DB (figura 107), o aluno concretizou a sequência de movimentações como se ambos os dançarinos de um par que ficam colocados frente a frente realizassem os movimentos simultâneos com o mesmo pé, ao invés de esse movimento ser simétrico. Ora, este erro está diretamente relacionado com a escolha de uma opção incorreta - a segunda opção - na tarefa **4.**, a qual não foi devidamente reconsiderada pelo aluno DB aquando das chamadas de atenção realizadas nesse sentido, resultando, assim, numa exploração indevida da tarefa **5.** nos termos descritos. No caso, ainda, de outras resoluções, igualmente incorretas, não se torna evidente o modo como os alunos raciocinaram, uma vez que a representação das movimentações dos pés efetuadas pelo par do dançarino tido como referência é feita de forma inconsistente e mostra-se muito incompleta (figura 108).

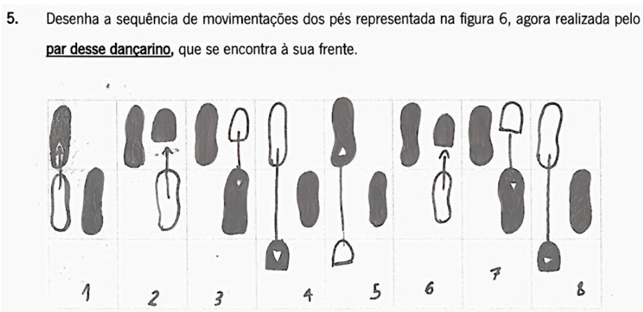


Figura 105. Resolução da tarefa **5.** pelo aluno JC do 6.° ano, turma α.

Figura 106. Resolução da tarefa **5.** pelo aluno RB do 6.° ano, turma α.

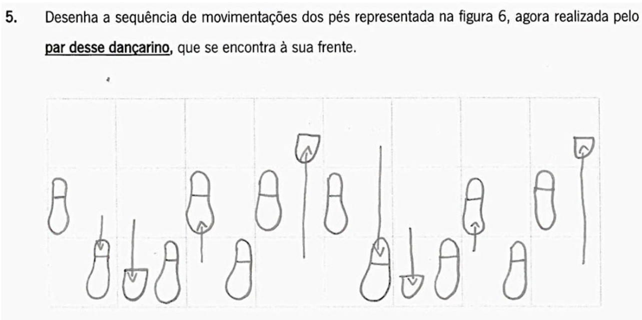


Figura 107. Resolução da tarefa **5.** pelo aluno DB do 6.º ano, turma α.

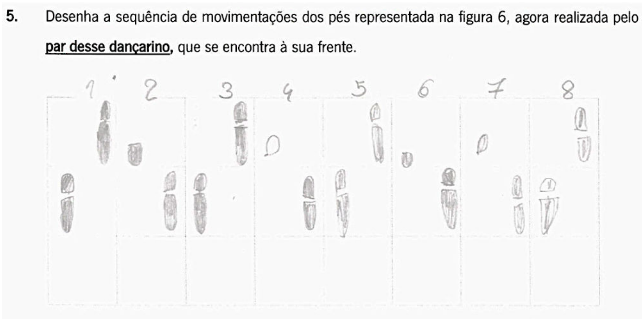


Figura 108. Resolução da tarefa **5.** pelo aluno SP do 6.º ano, turma α.

Para outros alunos, a tarefa **5.** ofereceu um nível de desafio demasiado elevado, tanto que, após várias tentativas, esses alunos acabaram por desistir, não apresentando qualquer resolução na tarefa. Um aluno deixou mesmo explicitamente declarado o facto de não conseguir resolver a tarefa (figura 109).

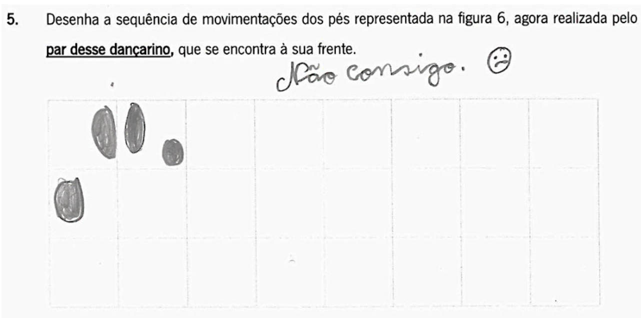
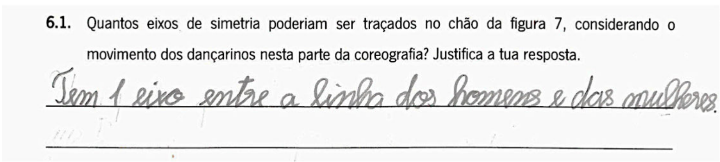


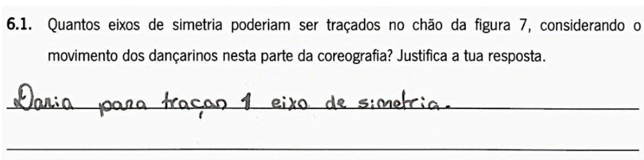
Figura 109. Resolução da tarefa **5.** pelo aluno AP do 6.º ano, turma α.

Prosseguindo para a tarefa **6.**, os alunos, tendo lido a informação que descreve os movimentos efetuados pelos dançarinos após o "serrar", observaram a figura apresentada na tarefa, que retrata um dos momentos dessa parte da coreografia, no qual os dançarinos se encontram em posição de perfil. Focando a sua atenção nessa figura, e considerando o movimento dos dançarinos nessa parte da dança, os alunos exploraram a tarefa **6.1.**, tentando descobrir o número de eixos de simetria existentes na figura. Logo à partida, a tendência geral dos alunos foi a de apontarem um número de eixos de simetria superior ao efetivo - apenas um eixo -, baseando o seu raciocínio no número de pares presente na dança - seis. Mediante isso, tornou-se necessário interrogar os alunos acerca das suas ideias e do modo como estariam a pensar sobre o problema, levando-os a refletirem e a repensarem as suas respostas iniciais. Durante esse processo, sugeriu-se aos alunos que traçassem, na figura dada, os eixos de simetria que haviam pensado e que, a partir daí, averiguassem a simetria do movimento dos dançarinos retratado nessa figura; ora, isto fez com que se tornasse mais percetível, para os alunos, que a maior parte dos eixos que tinham considerado não verificava a simetria, levando-os a reconsiderarem as suas resoluções. Esse revelou-se, por isso, um meio eficaz no suporte fornecido aos alunos perante as suas ideias iniciais. Mesmo assim, a parte da tarefa **6.1.** relativa à justificação da resposta ofereceu bastantes dificuldades aos alunos, que, na sua maioria, evidenciaram não saber como poderiam justificar as suas respostas. Ora, tal dificuldade surge espelhada nas resoluções da tarefa **6.1.**, já que, a maior parte dos alunos da turma respondeu corretamente um eixo de simetria, mas não elaborou qualquer justificação (figura 110). Note-se que, na resolução do aluno DB (figura 110), ele explicitou qual o eixo de simetria que considerou; contudo, a maior parte dos alunos não o fez na formulação da sua resposta (figura 111), tendo, antes, traçado o eixo de simetria na figura dada, ou tendo-se limitado a responder que seria só um eixo, sem o identificar. Outros alunos, que também determinaram, corretamente, a existência de um eixo de simetria, apresentaram justificações ineficazes (figuras 112 e 113) ou basearam a sua justificação no facto de os eixos entre os pares - que os alunos haviam considerado no início - não serem, afinal, eixos de simetria (figura 114). Um número residual de alunos insistiu naquela que tinha sido a tendência inicial dos alunos, tendo considerado a existência de seis eixos de simetria, e tendo justificado a sua resposta erradamente (figura 115). Em contraste com todos os anteriores, um pequeno número de alunos da turma foi capaz de alcançar uma exploração plena da tarefa, indicando uma resposta e justificação corretas (figura 116).


6.1. Quantos eixos de simetria poderiam ser traçados no chão da figura 7, considerando o movimento dos dançarinos nesta parte da coreografia? Justifica a tua resposta.

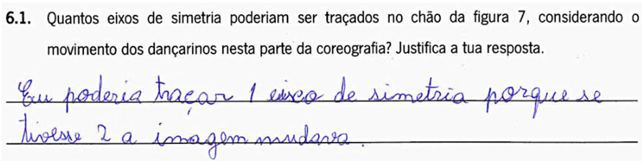
Tem 1 eixo entre a linha dos homens e das mulheres.

Figura 110. Resolução da tarefa **6.1.** pelo aluno DB do 6.º ano, turma α.


6.1. Quantos eixos de simetria poderiam ser traçados no chão da figura 7, considerando o movimento dos dançarinos nesta parte da coreografia? Justifica a tua resposta.

Daria para traçar 1 eixo de simetria.

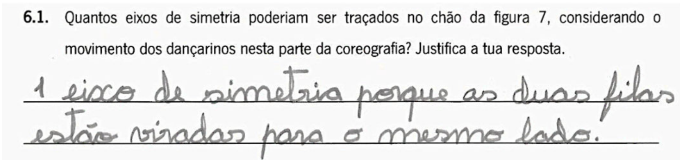
Figura 111. Resolução da tarefa **6.1.** pelo aluno JC do 6.º ano, turma α.



6.1. Quantos eixos de simetria poderiam ser traçados no chão da figura 7, considerando o movimento dos dançarinos nesta parte da coreografia? Justifica a tua resposta.

Eu poderia traçar 1 eixo de simetria porque se tivesse 2 a imagem mudava.

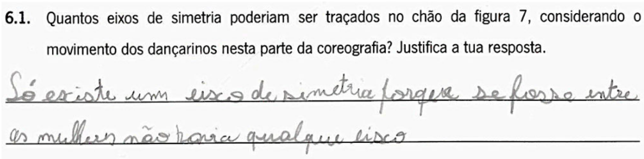
Figura 112. Resolução da tarefa **6.1.** pelo aluno GS do 6.º ano, turma α.



6.1. Quantos eixos de simetria poderiam ser traçados no chão da figura 7, considerando o movimento dos dançarinos nesta parte da coreografia? Justifica a tua resposta.

1 eixo de simetria porque as duas filas estão viradas para o mesmo lado.

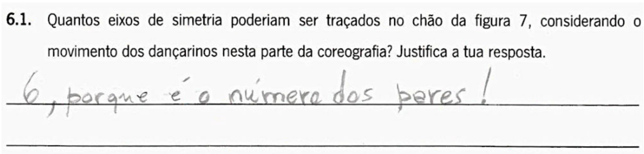
Figura 113. Resolução da tarefa **6.1.** pelo aluno CF do 6.º ano, turma α.



6.1. Quantos eixos de simetria poderiam ser traçados no chão da figura 7, considerando o movimento dos dançarinos nesta parte da coreografia? Justifica a tua resposta.

Só existe um eixo de simetria porque se fosse entre as mulheres não havia qualquer eixo

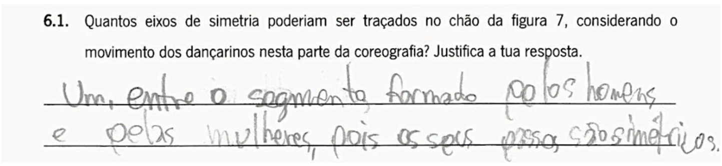
Figura 114. Resolução da tarefa **6.1.** pelo aluno JD do 6.º ano, turma α.



6.1. Quantos eixos de simetria poderiam ser traçados no chão da figura 7, considerando o movimento dos dançarinos nesta parte da coreografia? Justifica a tua resposta.

6, porque é o número dos pares!

Figura 115. Resolução da tarefa **6.1.** pelo aluno TA do 6.º ano, turma α.

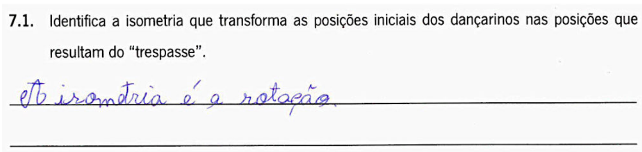


6.1. Quantos eixos de simetria poderiam ser traçados no chão da figura 7, considerando o movimento dos dançarinos nesta parte da coreografia? Justifica a tua resposta.

Um, entre o segmento formado pelos homens e pelas mulheres, pois os seus passos são simétricos.

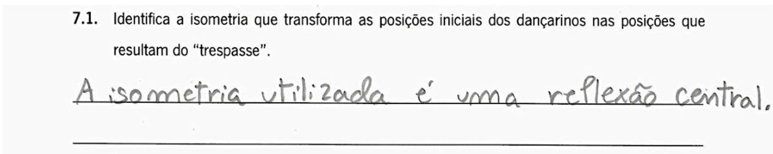
Figura 116. Resolução da tarefa **6.1.** pelo aluno JL do 6.º ano, turma α.

No avanço para a tarefa **7.**, os alunos leram a informação relativa à descrição do movimento de "trespasse", que surge apresentada antes da tarefa. Adicionalmente, considerou-se útil que os alunos visualizassem, de novo, a parte da coreografia em que os dançarinos executam, várias vezes seguidas, o "trespasse". Como tal, o vídeo da dança foi, novamente, projetado em plenário, tendo-se solicitado aos alunos que identificassem, com base na informação lida, a execução desse movimento pelos dançarinos. Ao reconhecerem, corretamente, o "trespasse", os alunos prosseguiram na exploração das tarefas, individualmente. Logo na tarefa **7.1.**, foram vários os alunos da turma que expressaram dificuldades, demonstrando não terem compreendido o que era requerido na tarefa. Nalguns casos, essa falta de entendimento estava relacionada com a interpretação do próprio enunciado da tarefa; noutros casos, tinha a ver com o facto de os alunos não estarem recordados das 'isometrias do plano' (MEC, 2012, 2013) - conteúdo que já havia sido lecionado nesse ano letivo. Ora, não se tratando, esta última, de uma problemática afeta à maioria dos alunos da turma, optou-se por uma intervenção individual junto dos alunos que necessitavam de rememorar o tópico matemático em causa. Na resolução da tarefa **7.1.**, nenhum aluno considerou a reflexão axial como sendo a isometria que transforma as posições iniciais dos dançarinos nas posições que resultam do "trespasse". Em vez dessa isometria, os alunos indicaram, ou a rotação (figura 117), ou a reflexão central (figura 118), como estando implicada no posicionamento diferenciado dos dançarinos antes e após terem executado o "trespasse". Ora, essa ocorrência pode ter ficado a dever-se ao facto de os alunos terem tomado como foco o movimento de "trespasse", na forma como é executado pelos dançarinos, ao invés de se focarem, simplesmente, nas posições assumidas pelos dançarinos antes e depois do "trespasse" - tal como se encontra referido no enunciado da tarefa.


7.1. Identifica a isometria que transforma as posições iniciais dos dançarinos nas posições que resultam do "trespasse".

A isometria é a rotação.

Figura 117. Resolução da tarefa **7.1.** pelo aluno GS do 6.º ano, turma α.


7.1. Identifica a isometria que transforma as posições iniciais dos dançarinos nas posições que resultam do "trespasse".

A isometria utilizada é uma reflexão central.

Figura 118. Resolução da tarefa **7.1.** pelo aluno MS do 6.º ano, turma α.

Na tarefa **7.2.**, os alunos elaboraram esquemas representativos do movimento de "serrar" diversos. A maior parte dos alunos da turma representou com pontos - de cores diferentes ou não -, as posições dos dançarinos - homens e mulheres - na dança, e utilizou setas para representar o movimento que esses dançarinos realizam no "serrar" (figura 119). Esse tipo de esquema mostra-se congruente com a representação das posições iniciais dos dançarinos que surge apresentada na figura da tarefa **1.**, o que sugere que os alunos recuperaram e ajustaram essa representação para resolverem a atual tarefa. Ainda assim, é preciso notar que várias resoluções desse tipo contêm incoerências. Veja-se, por exemplo, que, na resolução da tarefa **7.2.** pelo aluno GS (figura 120), a colocação das setas no esquema não está correta, já que os dançarinos homens, quando se encontram naquela linha da dança, passam pelas dançarinas com quem fazem par pelo lado direito, e não pelo lado esquerdo como aí surge representado. Ora, essas pequenas falhas - ainda que não tenham sido reconhecidas no imediato - apareceram com alguma frequência nas resoluções dos alunos. Ainda a este propósito, convém clarificar que, no "trespasse", o mais habitual é que os dançarinos de cada par avancem pelo lado direito; no entanto, há um movimento de "trespasse" excecional, no qual os pares de dançarinos avançam pelo lado esquerdo. Contudo, neste "trespasse" singular, os homens não se encontram na linha em que o aluno GS os situou. Já em resoluções como a do aluno JF (figura 121) não é possível discernir acerca da falha anterior, já que, no esquema, o aluno não distingue, com cores distintas, as posições dos homens e das mulheres.

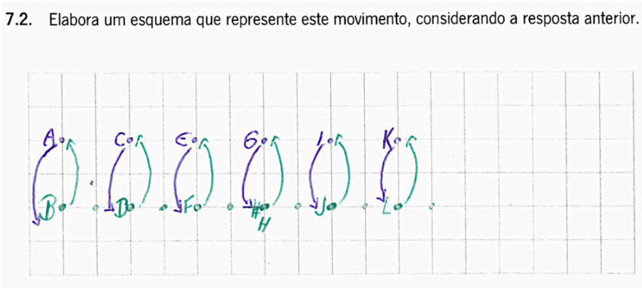


Figura 119. Resolução da tarefa **7.2.** pelo aluno DB do 6.° ano, turma α.

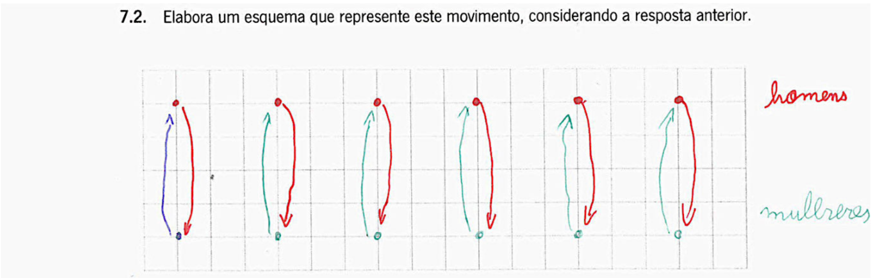


Figura 120. Resolução da tarefa **7.2.** pelo aluno GS do 6.° ano, turma α.

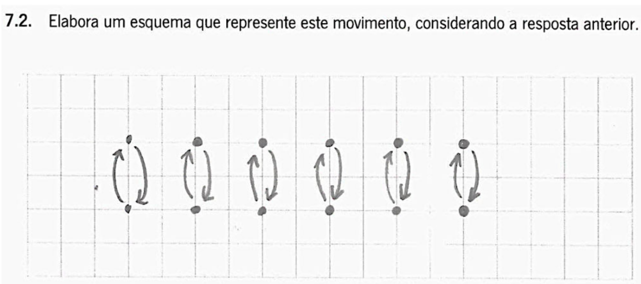


Figura 121. Resolução da tarefa **7.2.** pelo aluno JF do 6.° ano, turma α.

Outros alunos, em vez de representarem as posições dos dançarinos com pontos, como todos os anteriores, desenharam figuras ilustrativas dos próprios dançarinos, distinguindo homens e mulheres (figura 122). Noutros casos, os alunos elaboraram um esquema no qual representam as posições dos dançarinos após a execução de um "trespasse", que pode ser o primeiro, o terceiro ou o quinto, já que as posições dos homens e das mulheres antes de iniciarem o "trespasse" surgem invertidas (figura 123).

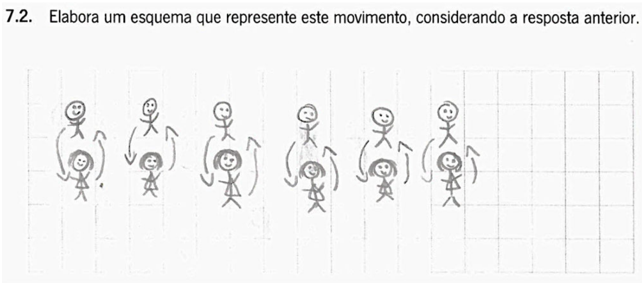


Figura 122. Resolução da tarefa **7.2.** pelo aluno AS do 6.º ano, turma α.

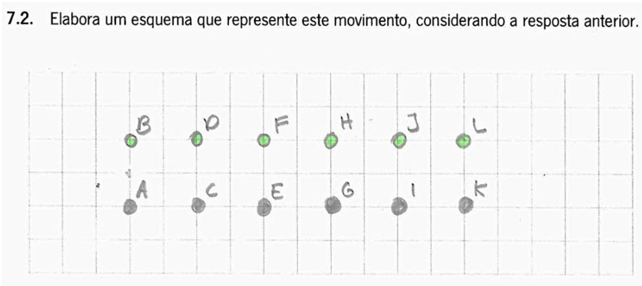
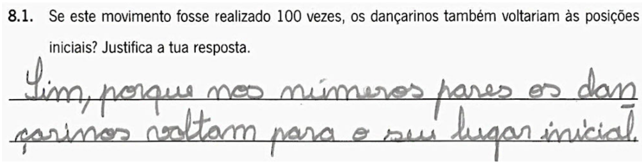


Figura 123. Resolução da tarefa **7.2.** pelo aluno MS do 6.º ano, turma α.

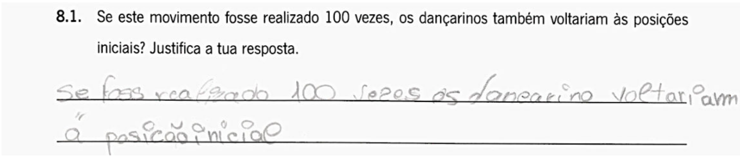
Importa destacar que esquemas como o último não estabelecem uma representação consistente do movimento de "serrar", no sentido em que não são elucidativos do movimento que é, efetivamente, realizado. Por outro lado, esse tipo de esquema parece ter sido o pensamento mais próximo que os alunos tiveram em relação à possibilidade de existência de um eixo de reflexão no meio das duas linhas de dançarinos consideradas, o qual, em cada "trespasse" executado, daria origem à transformação das posições dos homens e das mulheres. Não obstante, esse raciocínio não parece ter sido alcançado por nenhum aluno da turma no decurso da sua atividade de exploração da tarefa **7.2.**; ou, pelo menos, nenhum aluno comunicou tal pensamento, nem oralmente, nem nas diversas resoluções desenvolvidas.

Na tarefa **8.**, os alunos, tendo na sua maioria compreendido que o "trespasse", ao ser realizado seis vezes na dança, termina com os dançarinos nas suas posições iniciais, foram capazes de inferir que, sempre que tal movimento for realizado um número par de vezes, os dançarinos terminariam assim. Daí, a maior parte dos alunos da turma alcançou uma exploração bem-sucedida da tarefa **8.1.**, tendo determinado que, caso os dançarinos executassem o "trespasse" cem vezes na dança, eles voltariam às suas posições iniciais, já que cem - o número de repetições desse movimento - é par (figura 124). Contudo, houve alguns alunos que, mesmo tendo compreendido e respondido assertivamente que os dançarinos voltariam às suas posições iniciais, não apresentaram qualquer justificação da sua resposta (figura 125). Em contraste com os anteriores, um pequeno número de alunos da turma apresentou uma resolução incorreta na tarefa **8.1.**, tendo determinado que os dançarinos, após realizarem o "trespasse" cem vezes, não voltariam às posições iniciais, e apontando uma justificação errónea para tal (figura 126).


8.1. Se este movimento fosse realizado 100 vezes, os dançarinos também voltariam às posições iniciais? Justifica a tua resposta.

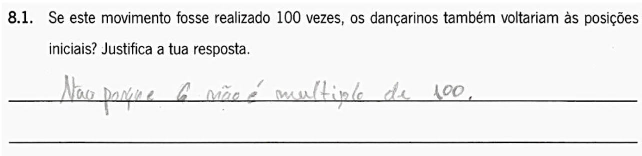
Sim, porque nos números pares os dan çarinos voltam para o seu lugar inicial.

Figura 124. Resolução da tarefa **8.1.** pelo aluno CF do 6.º ano, turma α.


8.1. Se este movimento fosse realizado 100 vezes, os dançarinos também voltariam às posições iniciais? Justifica a tua resposta.

se foss realizado 100 vezes os dançarino voltariam à posição inicial

Figura 125. Resolução da tarefa **8.1.** pelo aluno SP do 6.º ano, turma α.


8.1. Se este movimento fosse realizado 100 vezes, os dançarinos também voltariam às posições iniciais? Justifica a tua resposta.

Nao porque 6 não é multiplo de 100.

Figura 126. Resolução da tarefa **8.1.** pelo aluno GM do 6.º ano, turma α.

No final, recolheu-se o conjunto de tarefas matemáticas *Vira e volta a virar*, tendo sido dada oportunidade aos alunos para partilharem algum comentário/observação face ao trabalho desenvolvido.

Considerando a atividade dos alunos ao longo da implementação pedagógica, pode-se concluir que a exploração matemática desenvolvida a partir da visualização do vídeo da dança folclórica se revelou motivante para os alunos, os quais se envolveram, de forma ativa e interessada, na resolução das tarefas. Uma primeira apreciação a fazer é que os alunos da turma, tal como previsto nas normas vigentes, desenvolveram a sua atividade de forma individual, não se tendo verificado o estabelecimento de interações persistentes entre eles. Em consequência dessa reduzida troca de ideias entre os alunos, houve uma maior disparidade na resolução das tarefas - conforme se pôde notar ao longo da análise -, e, a par disso, as solicitações dos alunos com vista ao esclarecimento de dúvidas foram mais frequentes. Ora, isso fez com que fosse necessário dedicar uma atenção considerável aos vários alunos da turma, de forma a acompanhar o trabalho desenvolvido por cada um deles, e a intervir, adequadamente, perante as diferentes dificuldades que os alunos iam experimentando e transmitindo durante a sua atividade. Neste âmbito, a modalidade de trabalho em grupo teria, provavelmente, favorecido a criação de um ambiente de aprendizagem mais interativo, no qual os alunos seriam estimulados a comunicar uns com os outros, podendo exprimir os seus pensamentos e questionar as ideias apresentadas pelos seus pares. Associado ao disposto, o facto de o vídeo da dança ter que ser projetado para todos os alunos da turma em simultâneo fez com que eles tivessem menor possibilidade de autogerirem a sua própria atividade, já que a exploração das tarefas pelos alunos requeria, muitas vezes, a visualização de partes específicas da coreografia, que tinham que ser introduzidas e identificadas por todos os alunos ao mesmo tempo. Nalgumas ocasiões, as dificuldades experimentadas por um determinado conjunto de alunos fizeram com que fosse necessário repetir, várias vezes, a projeção de uma parte do vídeo da dança, afetando, dessa forma, todos os alunos, que acabavam por interromper a sua atividade para também visualizarem.

Analisando a atividade dos alunos no decorrer da exploração das diferentes tarefas matemáticas, é possível asseverar que a tarefa **5.** - desenhar a sequência de movimentações dos pés do par de um dançarino tomado como referência - foi, de todas, aquela que ofereceu maiores dificuldades aos alunos. Ora, os constrangimentos sentidos pela globalidade dos alunos aquando do desenvolvimento dessa tarefa parecem estar relacionados com as exigências que a mesma acarreta ao nível da visualização espacial. O facto de os alunos terem que, mentalmente, conceber e manipular imagens das sucessivas movimentações dos pés do par do dançarino - capacidades relacionadas com a visualização espacial -, para, depois, desenharem tais movimentos, parece ter imposto à tarefa um grau de dificuldade elevado. Nalguns casos, o nível de desafio revelou-se excessivo e levou mesmo à desistência de certos alunos. Ainda sobre a tarefa **5.**, convém considerar que, em virtude de esta não conter qualquer indicação que defina a orientação dos pés do par do dançarino, tornou-se necessário validar resoluções distintas, associadas a perspetivas diferentes dos alunos, que emergiram durante a exploração da tarefa. Isto é, nalguns casos, os alunos tiveram em consideração a orientação simétrica dos pés dos pares de dançarinos colocados frente a frente, e, por isso, inverteram a posição dos pés do dançarino cuja sequência de movimentações surge representada na figura da tarefa **2.**; contudo, noutros casos, eles desconsideraram isso, focando-se, somente, no desenho da sequência de movimentações dos pés do par do dançarino tido como referência. Ora, não sendo acrescentada qualquer outra informação à tarefa, ambos os tipos de resoluções da tarefa **5.** anteriormente descritos se tornam aceitáveis. Importa notar, ainda, que o sucesso na exploração da tarefa **5.** fica, também, determinado pela correta resolução da tarefa **4.** - identificar o esquema ilustrativo da posição dos pés de um par de dançarinos colocados frente a frente durante o movimento de "serrar". No caso, houve vários alunos da turma que assinalaram um esquema incorreto, o que, por sua vez, conduziu a uma exploração incorreta da tarefa **5.**, subsequente. Ora, as dificuldades sentidas pelos alunos no reconhecimento da posição relativa dos pés de um par de dançarinos no "serrar" podem ter sido causadas pela incapacidade de os alunos percecionarem a posição dos pés dos dançarinos no espaço, ou podem simplesmente ter tido origem no facto de os passos executados pelos dançarinos, por vezes, serem um pouco imprecisos, equivocando os alunos. Daí, tornou-se indispensável repetir a projeção da parte do vídeo referente à execução desse movimento.

Outras tarefas, para além das supraditas, ofereceram outro tipo de constrangimentos aos alunos. Foi o caso das tarefas **6.1.**, **7.1.**, e **7.2.**, cuja exploração requeria uma análise mais evidente da matemática presente em determinadas partes da coreografia da dança folclórica. Acerca da tarefa **6.1.**, foi, desde logo, notória a complexidade que os alunos sentiram na identificação do número de eixos de simetria existente numa figura que retratava um dado momento da coreografia; e, mais complexo ainda foi elaborarem uma justificação para essa resposta. A tendência inicial da maioria dos alunos, em **6.1.**, foi a de considerarem um número de eixos de simetria igual ao número de pares da dança - seis -, focando-se nesse dado evidente da dança, e desconsiderando a imagem exibida pelos pares aquando da realização do movimento retratado na figura - aspeto essencial para a definição dos eixos de simetria. Justificar o número de eixos de simetria existente na figura com base na simetria do movimento realizado pelos dançarinos foi ainda menos acessível para os alunos, tendo sido muito raras essas formulações. Em **7.1.**, a identificação da isometria que transforma as posições iniciais dos dançarinos nas posições que resultam do "trespasse" - troca de posições entre os homens e as mulheres que se encontram frente a frente nas duas linhas da dança - não foi devidamente percecionada pelos alunos, que se focaram mais no movimento que é executado do que nas posições dos dançarinos antes e após o "trespasse" - tal como aparece referido no enunciado da tarefa. Por esse motivo, os alunos apontaram isometrias menos plausíveis - nomeadamente, a rotação e a reflexão central - para explicar a transformação das posições dos dançarinos após o "trespasse". Mesmo apesar de grande parte dos alunos da turma ter acabado por, em **6.1.**, determinar, com êxito, a existência de um só eixo de simetria no meio das duas linhas de dançarinos - uma formada por homens e outra por mulheres -, eles não foram capazes de relacionar esse conhecimento, falhando na análise do "trespasse" sob o ponto de vista da matemática. Como resultado, em **7.2.**, a representação, pelos alunos, do movimento de "trespasse" considerando a resposta dada na tarefa anterior não integrou, em nenhum caso, o desenho de um eixo de simetria. Dados como os supracitados indiciam dificuldades, por parte dos alunos, em aplicar tópicos matemáticos já estudados - como as simetrias de uma figura e as isometrias do plano - a práticas com movimento - no caso, aos movimentos realizados numa dança folclórica. Tais evidências remetem para uma provável desconexão existente entre a matemática que é ensinada na sala de aula e práticas vividas na realidade.

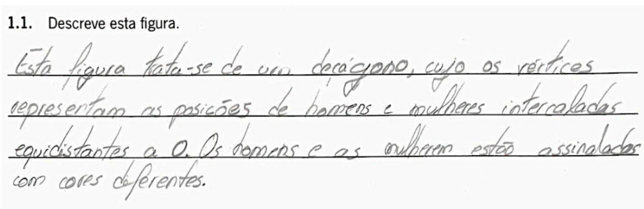
Por fim, há a evidenciar a tarefa **3.1.**, pela diversidade de estratégias de resolução que os alunos desenvolveram, as quais evidenciam a mobilização de ideias diferentes na exploração do mesmo problema. Apesar de a duração da implementação pedagógica - no total, 100 minutos -, não ter permitido a realização de um momento final de discussão em plenário, tendente à partilha e ao confronto dessas várias estratégias de resolução, a valorização do trabalho realizado pelos alunos é vista como essencial.

7.2.3. Malhão em roda(s)

O conjunto de tarefas matemáticas *Malhão em roda(s)* foi implementado numa turma do 7.º ano de escolaridade - turma β - de uma escola artística especializada no ensino da música, situada em Braga.

No início da implementação pedagógica, com a duração total de 100 minutos, introduziu-se a dança folclórica a investigar - *Malhão de Ir ao Meio*, do *Grupo Folclórico de Vila Verde*. Posteriormente, foi lida a informação relativa a essa dança, que surge apresentada antes das tarefas *Malhão em roda(s)*, entretanto distribuídas aos alunos. Após visualizarem o vídeo da dança, os alunos, já dispostos em mesas independentes, iniciaram a exploração das tarefas individualmente, por força das medidas de prevenção e controlo da COVID-19 determinadas para os estabelecimentos de ensino, a fim de evitar a propagação da doença. Durante a exploração das tarefas pelos alunos, a professora de matemática da turma interveio na atividade individual dos alunos, na medida em que, para cada uma das primeiras tarefas, tomou a iniciativa de ler os respetivos enunciados e atribuir um tempo específico aos alunos para as resolverem.

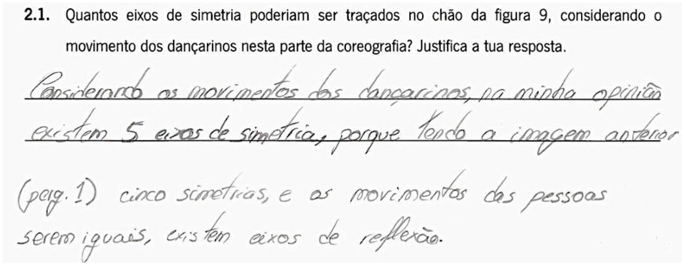
A descrição da figura exposta na tarefa **1.** não ofereceu dificuldades assinaláveis aos alunos. Apesar de alguma diversidade nas respostas dadas em **1.1.**, de um modo geral, todos os alunos foram capazes de comunicar matematicamente, por escrito, propriedades que descrevem a figura em causa. Uma questão emergente foi a designação atribuída a um polígono com dez lados - decágono -, que grande parte dos alunos da turma não se recordava, mas via como essencial para descrever a figura. Perante esse constrangimento, foi recomendado aos alunos que, mesmo que não conseguissem referir explicitamente o conceito, designassem as características às quais se refere o mesmo. Importa salientar que vários alunos, ao descreverem a figura em **1.1.**, não se limitaram à descrição puramente geométrica da figura, mas, curiosamente, associaram certas propriedades geométricas da figura à dança folclórica. Por exemplo, certos alunos explicitaram a ligação existente entre os vértices do decágono representado na figura em causa e as distintas posições dos dançarinos - homens e mulheres - na dança (figura 127). Na resolução do aluno HL em particular, ele não indica que o polígono está inscrito numa circunferência; ora, isso pode ditar uma falha ao nível da descrição da figura, ou, eventualmente, pode ter sido resultado do facto de ele não ter reconhecido nenhuma ligação dessa propriedade da figura à dança, ignorando-a.


1.1. Descreve esta figura.

Esta figura trata-se de um decágono, cujo os vértices representam as posições de homens e mulheres intercaladas equidistantes a O. Os homens e as mulheres estão assinalados com cores diferentes.

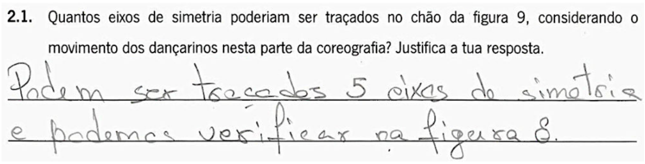
Figura 127. Resolução da tarefa **1.1.** pelo aluno HL do 7.º ano, turma β.

No prosseguimento para a tarefa **2.**, a professora de matemática da turma voltou a dirigir a atividade dos alunos. Como tal, leu a informação que surge antes da tarefa - acerca dos movimentos efetuados pelos pares de dançarinos durante o "serrar" -, esclareceu os alunos sobre esses movimentos, e, na continuação, leu o enunciado das tarefas **2.**/**2.1.**, concedendo-lhes um tempo para a exploração. Os alunos, observando a figura presente na tarefa **2.**, que retrata um dos momentos da coreografia em que os pares de dançarinos "serram", e considerando o movimento dos dançarinos aí ilustrado, começaram a explorar a tarefa **2.1.**, tentando descobrir o número de eixos de simetria existente na figura. Durante o processo exploratório, foram vários os alunos da turma que questionaram se poderiam traçar os eixos de simetria na figura, argumentando que, dessa forma, se tornaria mais fácil descobrirem todos os eixos de simetria existentes na mesma. Ora, apesar de no enunciado da tarefa não ser introduzida tal sugestão - eventualmente em forma de nota -, considerou-se essa uma boa estratégia para auxiliar os alunos na resolução da tarefa, pelo que foi permitida e reforçada positivamente junto de cada um deles. No entanto, essa estratégia trouxe dificuldades aos alunos, devido à perspetiva da imagem em causa, que não favorece o desenho de eixos de simetria no chão da figura, dada a sua posição oblíqua. Ora, perante tal constrangimento, diversos alunos da turma sentiram necessidade de se apoiarem na figura exibida na tarefa **1.**, referente à representação das posições iniciais dos dançarinos na dança; esta é feita de uma perspetiva superior ao espaço onde os dançarinos se posicionam, e paralela ao plano do solo. O recurso a tal figura serviu como um importante auxílio na análise, pelos alunos, dos eixos de simetria existentes na figura apresentada na tarefa **2.**, contribuindo para que a maioria dos alunos, em **2.1.**, conseguisse determinar, corretamente, a existência de cinco eixos de simetria na figura (figura 128). Ainda assim, a parte da tarefa **2.1.** relativa à justificação da resposta criou dificuldades aos alunos, tendo sido muito raros os alunos que conseguiram justificar a sua resposta de um modo matematicamente válido. A maioria dos alunos que, em **2.1.**, respondeu corretamente cinco eixos de simetria não foi capaz de elaborar nenhuma justificação para essa afirmação (figura 129). Outros alunos, que também determinaram corretamente a existência de cinco eixos de simetria, apresentaram justificações ineficazes (figuras 130 e 131), não estabelecendo as conexões necessárias entre as propriedades matemáticas e as figuras dos dançarinos naquele momento da coreografia, de forma a elaborarem justificações válidas. Em contraste com os alunos referidos anteriormente, certos alunos, que também se apoiaram na figura exibida na tarefa **1.** para resolverem a tarefa **2.1.**, responderam, incorretamente, dez eixos de simetria (figura 132), porque desenvolveram o seu raciocínio com base nas simetrias patentes no polígono regular que representa as posições iniciais dos dançarinos na dança - decágono -, falhando na exploração do problema, ao desconsiderarem o movimento dos dançarinos que está retratado na imagem em análise.


2.1. Quantos eixos de simetria poderiam ser traçados no chão da figura 9, considerando o movimento dos dançarinos nesta parte da coreografia? Justifica a tua resposta.

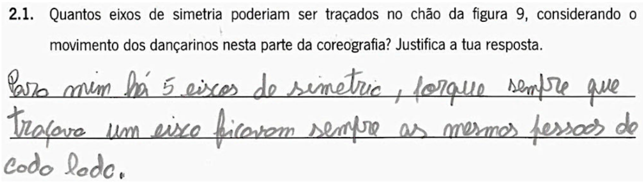
Considerando os movimentos dos dançarinos, na minha opinião existem 5 eixos de simetria, porque tendo a imagem anterior (pág. 1) cinco simetrias, e os movimentos das pessoas serem iguais, existem eixos de reflexão.

Figura 128. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno HL do 7.º ano, turma β.


2.1. Quantos eixos de simetria poderiam ser traçados no chão da figura 9, considerando o movimento dos dançarinos nesta parte da coreografia? Justifica a tua resposta.

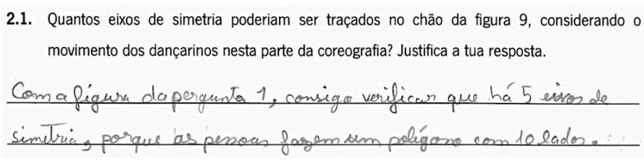
Podem ser traçados 5 eixos de simetria e podemos verificar na figura 8.

Figura 129. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno MF do 7.º ano, turma β.


2.1. Quantos eixos de simetria poderiam ser traçados no chão da figura 9, considerando o movimento dos dançarinos nesta parte da coreografia? Justifica a tua resposta.

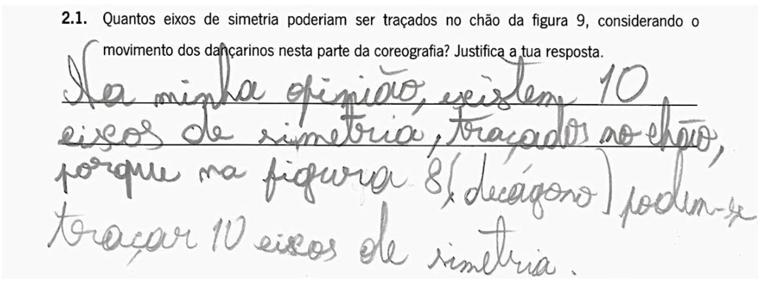
Para mim há 5 eixos de simetria, porque sempre que traçava um eixo ficavam sempre as mesmas pessoas de cada lado.

Figura 130. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno FD do 7.º ano, turma β.


2.1. Quantos eixos de simetria poderiam ser traçados no chão da figura 9, considerando o movimento dos dançarinos nesta parte da coreografia? Justifica a tua resposta.

Com a figura da pergunta 1, consigo verificar que há 5 eixos de simetria, porque as pessoas fazem um polígono com 10 lados.

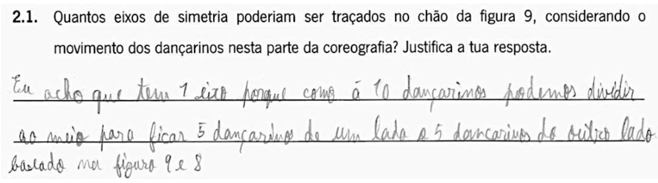
Figura 131. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno JP do 7.º ano, turma β.


2.1. Quantos eixos de simetria poderiam ser traçados no chão da figura 9, considerando o movimento dos dançarinos nesta parte da coreografia? Justifica a tua resposta.

Na minha opinião, existem 10 eixos de simetria, traçados no chão, porque na figura 8 (decágono) podem-se traçar 10 eixos de simetria.

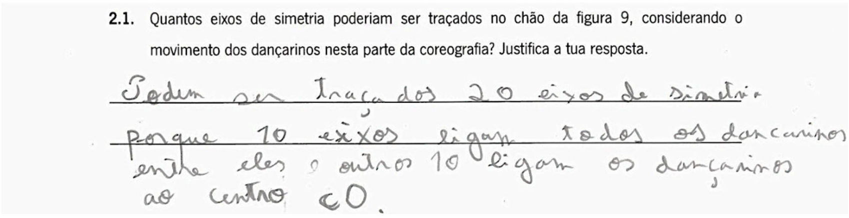
Figura 132. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno MC do 7.º ano, turma β.

Ainda acerca da tarefa **2.1.**, um conjunto minoritário de alunos desenvolveu resoluções erróneas, determinando um número incorreto de eixos de simetria - desde um eixo de simetria (figura 133), passando por 20 eixos de simetria (figura 134), até infinitos eixos de simetria (figura 135) -, e utilizando argumentos inválidos para a justificação das suas respostas. Ora, todas essas resoluções expressam uma fraca compreensão, por parte dos alunos, da situação problemática apresentada na tarefa. Por fim, há a salientar a resolução singular apresentada por um aluno na tarefa **2.1.** (figura 136), que determinou a não existência de eixos de simetria na figura, apresentando como justificação o facto de o aspeto exterior dos dançarinos ser diferente, impossibilitando, nesse sentido, a existência de eixos de simetria.


2.1. Quantos eixos de simetria poderiam ser traçados no chão da figura 9, considerando o movimento dos dançarinos nesta parte da coreografia? Justifica a tua resposta.

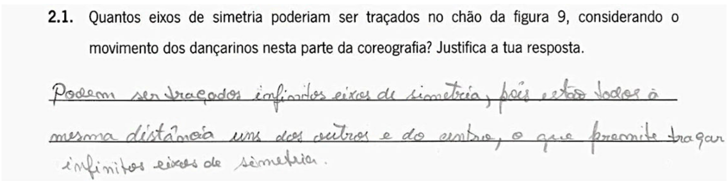
Eu acho que tem 1 eixo porque como á 10 dançarinos podemos dividir ao meio para ficar 5 dançarinos de um lado e 5 dançarinos do outro lado baseado na figura 9 e 8

Figura 133. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno DA do 7.º ano, turma β.


2.1. Quantos eixos de simetria poderiam ser traçados no chão da figura 9, considerando o movimento dos dançarinos nesta parte da coreografia? Justifica a tua resposta.

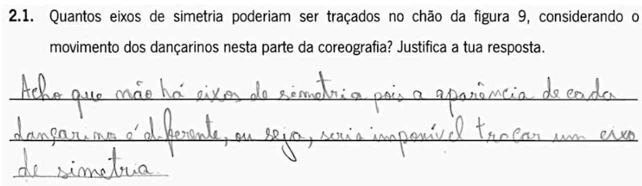
Podem ser traçados 20 eixos de simetria porque 10 eixos ligam todos os dançarinos entre eles e outros 10 ligam os dançarinos ao centro cO.

Figura 134. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno AS do 7.º ano, turma β.


2.1. Quantos eixos de simetria poderiam ser traçados no chão da figura 9, considerando o movimento dos dançarinos nesta parte da coreografia? Justifica a tua resposta.

Podem ser traçados infinitos eixos de simetria, pois estão todos à mesma distância uns dos outros e do centro, o que permite traçar infinitos eixos de simetria.

Figura 135. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno IO do 7.º ano, turma β.


2.1. Quantos eixos de simetria poderiam ser traçados no chão da figura 9, considerando o movimento dos dançarinos nesta parte da coreografia? Justifica a tua resposta.

Acho que não há eixos de simetria pois a aparência de cada dançarino é diferente, ou seja, seria impossível traçar um eixo de simetria

Figura 136. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno MK do 7.º ano, turma β.

O avanço para a tarefa **3.** foi coordenado, uma vez mais, pela professora de matemática da turma. Findo o tempo que havia concedido para a resolução da tarefa precedente, e tendo verificado que a generalidade dos alunos já tinha terminado a respetiva resolução, a professora de matemática prosseguiu para a leitura do enunciado das tarefas **3./3.1.**, concedendo-lhes, de novo, um certo tempo para a atividade. Uma vez que alguns alunos solicitaram esclarecimentos adicionais acerca do movimento de "serrar" - abordado nessas tarefas -, considerou-se importante repetir a projeção da parte do vídeo em que os dançarinos "serram", de forma a ajudar os alunos a analisar os ângulos associados a esse movimento. Logo no princípio da atividade exploratória, uma das dúvidas colocadas por alguns alunos foi se o ângulo associado ao movimento de “serrar” corresponderia a todo o movimento de rotação de um dançarino sobre si mesmo, desde que se vira para um dos dançarinos que está ao seu lado, até que se vira para o que está do outro lado, ou se esse ângulo diria respeito, apenas, a metade do movimento descrito. Perante o exposto, e presumindo-se que essa poderia, eventualmente, ser uma dúvida comum a vários alunos da turma, aptou-se por esclarecer, em plenário, que o movimento de “serrar” deveria ser percecionado como contínuo, compreendendo a amplitude total do movimento realizado por cada um dos dançarinos quando efetuam rotações sobre si mesmos, virando-se ora para um dos dançarinos que está ao seu lado, ora para o outro, sem chegarem a completar meia-volta em cada uma dessas rotações. Tal esclarecimento foi acompanhado por uma nova visualização, em plenário, da parte da dança relativa à execução do movimento de “serrar”, proporcionando aos alunos uma melhor compreensão do referido. Após esse momento elucidativo, os alunos, de um modo geral, demonstraram maior facilidade em identificar, na figura exibida na tarefa **3.1.**, os diferentes ângulos associados ao movimento de “serrar”, revelando, na sua maioria, terem compreendido esse movimento, tal como é realizado pelos dançarinos. Contudo, houve certos alunos que, mesmo assim, expressaram incertezas no momento de assinalarem, na figura dada na tarefa, os ângulos associados ao movimento de “serrar”, tendo solicitado validação. Ainda na tarefa **3.1.**, a determinação das amplitudes aproximadas dos ângulos associados ao movimento de “serrar” - entretanto já assinalados pelos alunos na figura exposta na tarefa -, não foi de resolução imediata para os alunos, tendo-os desafiado a pensarem sobre estratégias para resolverem o problema. Ora, uma das estratégias de resolução utilizadas por alguns alunos teve por base a decomposição do decágono regular inscrito numa circunferência - figura exposta na tarefa - em dez triângulos isósceles com vértice no centro O, e no estudo da amplitude dos ângulos internos desses triângulos (figura 137). Mais especificamente, esses alunos começaram por calcular a amplitude dos ângulos ao centro $(360° \div 10 = 36°)$; a seguir, reconhecendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso, chegaram à amplitude conjunta dos dois ângulos restantes de cada triângulo isósceles $(180° - 36° = 144°)$ e, depois, compreendendo que esses dois ângulos de cada triângulo isósceles eram geometricamente iguais, dividiram essa medida por dois $(144° \div 2 = 72°)$; por fim, os alunos, percebendo que a amplitude dos ângulos associados ao movimento de “serrar” correspondia, aproximadamente, à amplitude dos ângulos adjacentes a um dos dois lados iguais de cada triângulo isósceles, e sendo esses dois ângulos iguais, duplicaram essa medida de amplitude $(72° \times 2 = 144°)$. A utilização, por alguns alunos da turma, da estratégia de resolução descrita permitiu-lhes resolverem a tarefa **3.1.** com sucesso. De notar que, alguns deles, ao perceberem que as duas últimas operações anulavam o efeito uma da outra, por serem inversas, suprimiram esses passos na resolução (figura 138).

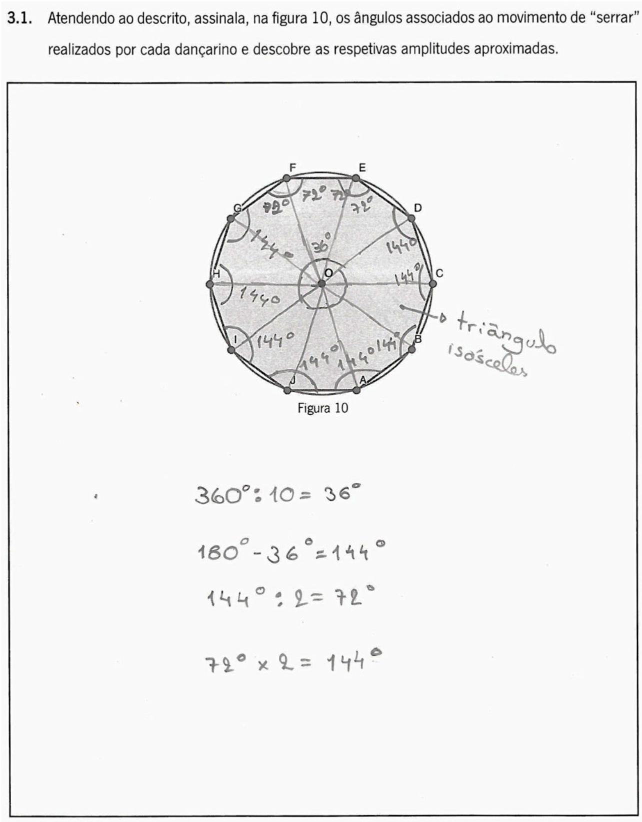


Figura 137. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno CG do 7.º ano, turma β.

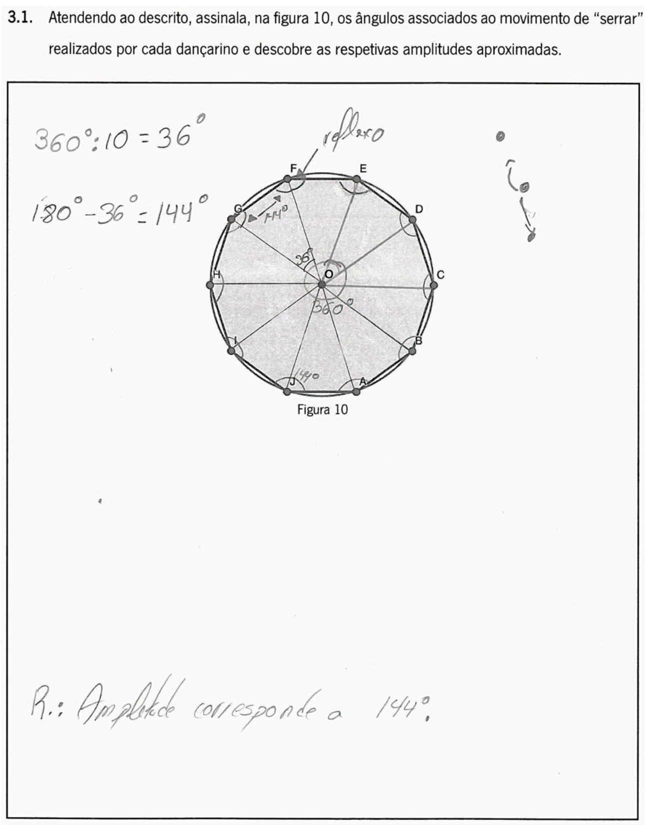


Figura 138. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno HL do 7.º ano, turma β.

Por oposição aos alunos que, em **3.1.**, usaram a estratégia de resolução explanada anteriormente, alcançando, por meio da sua atividade individual, uma exploração bem-sucedida da tarefa, os restantes alunos da turma não se mostraram capazes de resolver a tarefa autonomamente, tendo solicitado ajuda. Em parte, as solicitações dos alunos estavam relacionadas com o facto de eles não saberem como descobrir a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos do decágono - polígono integrado na figura exposta na tarefa -, o que os impedia de progredir na sua atividade, já que essa seria a estratégia a aplicar para descobrirem a amplitude dos ângulos associados ao movimento de "serrar". Sobre isto, convém referir que o conteúdo matemático em questão - 'soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono' (MEC, 2012, 2013) -, previsto para o 7.º ano de escolaridade, já tinha sido lecionado na turma, durante esse mesmo ano letivo; mesmo assim, os alunos não foram capazes de o recuperar. Noutros casos, os pedidos de apoio por parte dos alunos eram motivados pelo facto de eles não conseguirem definir uma estratégia de resolução para o problema, mesmo tendo percebido os dados. Perante o cenário descrito, a professora de matemática da turma considerou oportuno fazer uma intervenção em plenário, a fim de recuperar a fórmula para calcular a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um polígono. A fórmula foi registada no quadro da sala, da seguinte forma: $(n-2)\times 180°$, tendo a professora clarificado que n correspondia ao número de lados do polígono. Para que os alunos pudessem compreender melhor a fórmula dada, desenhou-se um decágono - aproximadamente regular - no quadro, e, a partir de um dos seus vértices, decompôs-se esse decágono em oito triângulos, escrevendo-se, no interior de cada um desses triângulos, a respetiva soma dos ângulos internos - $180°$, independentemente do triângulo -, que foi enunciada pelos próprios alunos. Após esse momento explicativo, no decorrer do qual acabou por, de certa forma, se sugerir, à turma, uma estratégia de resolução para o problema proposto em **3.1.**, os alunos prosseguiram a sua atividade. Curiosamente, alguns dos alunos que tinham aplicado/planeado a outra estratégia de resolução decidiram, nessa altura, expressar isso mesmo, declarando que tinham feito/pensado de uma maneira diferente da que havia sido explanada em plenário, e questionaram, ainda, se tinham que resolver o problema utilizando a fórmula dada. Ora, tais dúvidas foram prontamente esclarecidas junto dos alunos em causa, tendo-se, inclusive, reforçado positivamente o facto de eles terem raciocinado de outra forma.

À exceção dos alunos que usaram a outra estratégia de resolução, os restantes alunos da turma acabaram mesmo por se servir da fórmula para tentarem resolver o problema apresentado em **3.1.**, ainda que isso não tenha sido suficiente para garantir, a todos, uma resolução bem-sucedida do mesmo. Na verdade, apenas alguns conseguiram resolver corretamente a tarefa **3.1.** (figura 139), tendo realizado, de forma sequencial, os dois passos seguintes: cálculo da soma dos ângulos internos do decágono, através da aplicação da fórmula $[(10-2) \times 180° = 1440°]$; e cálculo da amplitude de cada um dos ângulos internos do decágono regular, dada pelo quociente da soma dos ângulos internos do decágono - anteriormente calculada - pelo número de ângulos internos desse polígono $(1440° \div 10 = 144°)$. Ora, os alunos que, em **3.1.**, desenvolveram a sua resolução conforme descrito acima, regra geral, conseguiram descobrir, corretamente, a amplitude aproximada dos ângulos associados ao movimento de "serrar", equivalente à amplitude de cada um dos ângulos internos do decágono regular $(144°)$. Houve apenas alguns alunos que, por terem cometido erros nos cálculos intermédios, obtiveram um resultado errado em **3.1.**, mesmo tendo exibido um raciocínio correto, análogo ao descrito (figura 140). Por oposição aos anteriores, houve certos alunos que, em **3.1.**, se limitaram, apenas, a aplicar a fórmula para calcular a soma dos ângulos internos do decágono $[(10-2) \times 180° = 1440°]$ - primeiro passo do processo de resolução antes descrito -, não tendo conseguido resolver a tarefa com êxito (figura 141). Mesmo tendo aplicado corretamente a fórmula - partilhada em plenário - na sua resolução, os alunos em causa não se mostraram capazes de atribuir significado ao resultado obtido, e, como tal, não deram continuidade ao processo resolutivo, apresentado um resultado sem sentido no contexto do problema. Tal ocorrência sugere que esses alunos não compreenderam, plenamente, a aplicabilidade da fórmula dada na resolução do problema, tendo-a usado sem estabelecerem ligações com os dados do problema.

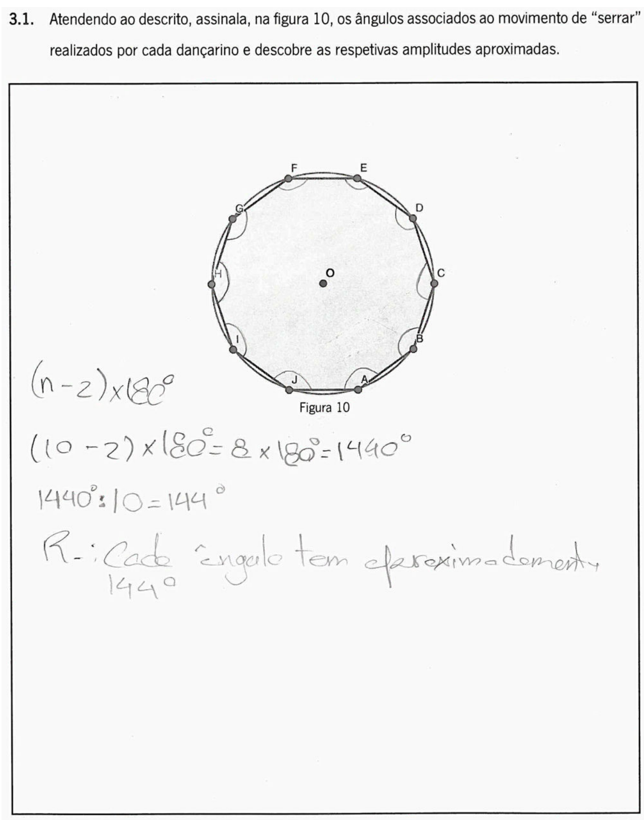


Figura 139. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno MF do 7.º ano, turma β.

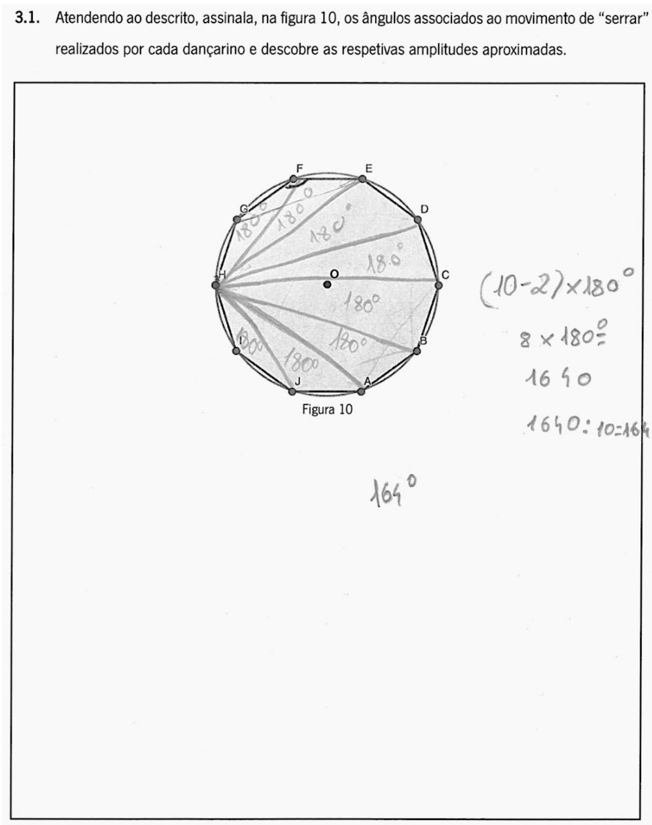


Figura 140. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno DC do 7.º ano, turma β.

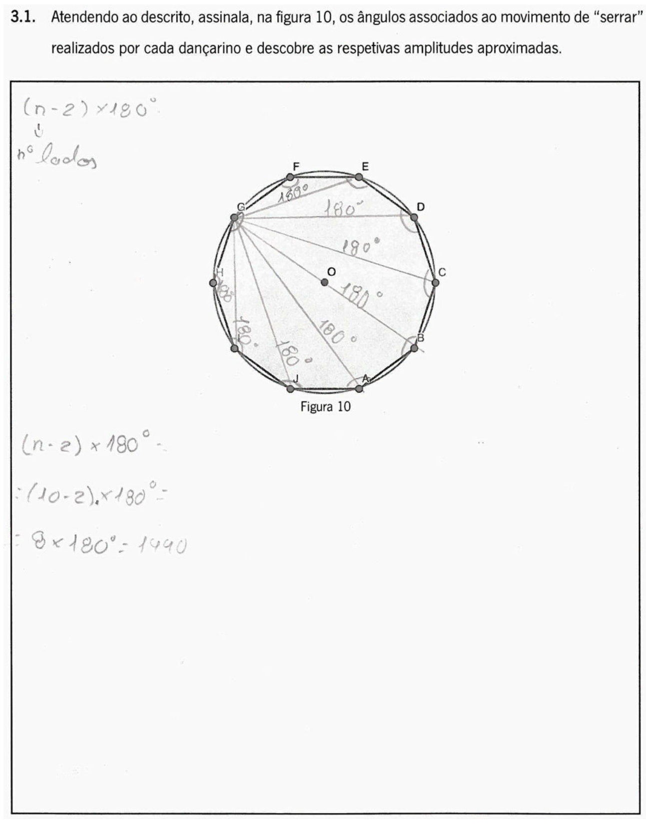


Figura 141. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno RC do 7.º ano, turma β.

Ainda sobre a tarefa **3.1.**, há a registar um pequeno número de alunos que não apresentou qualquer resolução. Apesar de a professora de matemática ter partilhado, com o grupo-turma, a fórmula para calcular a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um polígono, esses alunos não mostraram, na sua resolução, terem tentado usar a informação fornecida para resolver o problema. Para terminar, há a destacar a resolução particular apresentada por um aluno na tarefa **3.1.** (figura 142), que fez uma estimativa para o valor da amplitude dos ângulos associados ao movimento de "serrar", e justificou essa resposta com base na sua perceção da situação, comprometendo a validade da resolução.

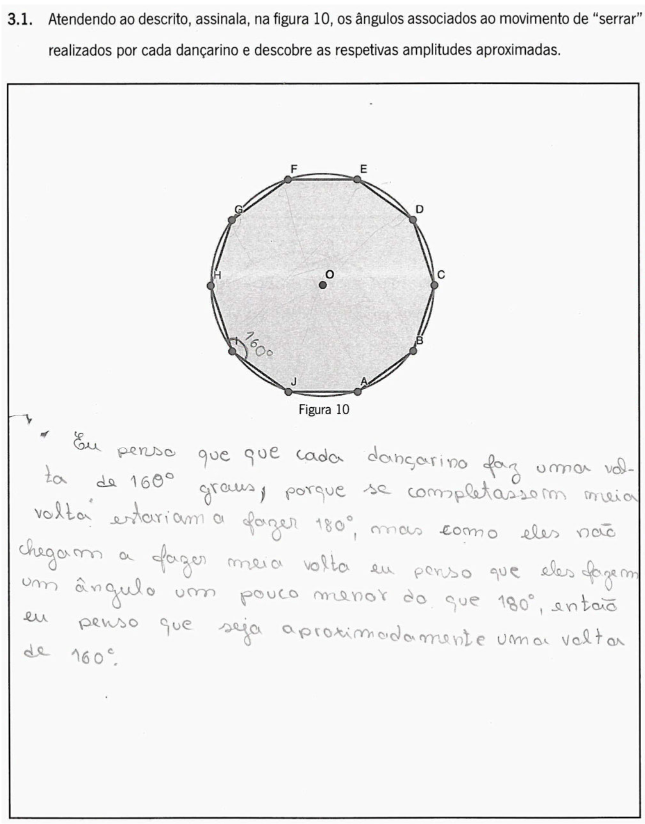
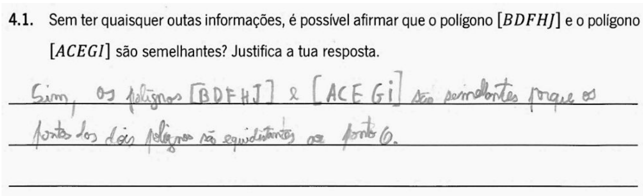

3.1. Atendendo ao descrito, assinala, na figura 10, os ângulos associados ao movimento de "serrar" realizados por cada dançarino e descobre as respetivas amplitudes aproximadas.

Figura 10

Eu penso que que cada dançarino faz uma volta de 160° graus, porque se completassem meia volta estariam a fazer 180°, mas como eles não chegam a fazer meia volta eu penso que eles fazem um ângulo um pouco menor do que 180°, então eu penso que seja aproximadamente uma volta de 160°.

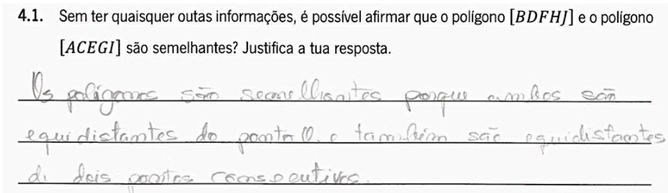
Figura 142. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno EF do 7.° ano, turma β.

Após os alunos da turma, de uma forma geral, terem concluído a exploração da tarefa **3.1.**, a professora de matemática introduziu a tarefa subsequente. Para isso, leu a informação que se encontra antes da tarefa - relativa à descrição os movimentos dos dançarinos na parte seguinte da coreografia -, e, no seguimento, leu o enunciado das tarefas **4.**/**4.1.**, tendo estipulado um tempo para a exploração. Para que os alunos pudessem ter uma melhor compreensão da informação enunciada, procedeu-se a uma nova visualização, em plenário, dessa parte da coreografia, em torno da qual se desenvolveriam, não só as tarefas **4.**/**4.1.**, como todas as restantes. Durante a visualização, chamou-se a atenção dos alunos, particularmente, para os segmentos da coreografia em que os homens "vão ao meio", não só por serem bastante significativos nessa dança - daí advém a própria designação *Malhão de Ir ao Meio* -, como também por se tratar do foco da exploração a desenvolver pelos alunos nas tarefas subsequentes. Para além disso, e em virtude do facto de as movimentações dos dançarinos nessa parte da coreografia tomarem um ritmo acelerado, após a visualização do vídeo da dança, parou-se a projeção num dos momentos em que os homens “estão no meio”, para que os alunos, olhando para a imagem da tela, tivessem oportunidade de analisar melhor as posições de todos os dançarinos - homens e mulheres -, numa desses momentos característicos da dança - as “idas ao meio”. No seguimento da sua atividade, os alunos não evidenciaram dificuldades em compreender a figura apresentada na tarefa **4.**, correspondente à representação das posições dos dançarinos - homens e mulheres - no primeiro momento em que os homens “vão ao meio”, tendo iniciado a exploração da tarefa **4.1.** autonomamente. Em **4.1.**, a quase totalidade dos alunos da turma considerou que, a partir das informações facultadas, era possível, sim, afirmar que o polígono $[BDFHJ]$ - formado pelas posições das mulheres - e o polígono $[ACEGI]$ - formado pelas posições dos homens - eram semelhantes, tendo respondido corretamente. Não obstante, as justificações apresentadas pelos alunos não se pautaram pela mesma homogeneidade. Vários alunos da turma justificaram a resposta dada em **4.1.** unicamente com base no facto de os vértices do polígono $[BDFHJ]$ e os vértices do polígono $[ACEGI]$ serem equidistantes do ponto O (figura 143), utilizando, assim, um argumento inválido para comprovar que esses dois polígonos são semelhantes, uma vez que dois polígonos inscritos em circunferências de centro O não são, necessariamente, semelhantes, mesmo que os vértices de cada polígono estejam todos à mesma distância do centro O. Outros alunos, para além de usarem argumento anterior - equidistância dos vértices de cada um dos polígonos ao ponto O -, fazem referência à equidistância dos próprios vértices de cada um dos polígonos (figura 144), exibindo também uma justificação inválida, que dois polígonos inscritos em circunferências de centro O, mesmo tendo cada um deles os lados todos iguais, podem não ser polígonos semelhantes. Outro argumento frequentemente utilizado pelos alunos foi a congruência dos ângulos dos dois polígonos (figura 145), o que, por si só, não é suficiente para garantir que tais polígonos sejam semelhantes, pois não são dadas quaisquer garantias em relação à proporcionalidade dos lados desses mesmos polígonos. Por fim, um pequeno número de alunos da turma apresentou uma justificação baseada no facto de ambos os polígonos serem pentágonos e terem todos os seus lados geometricamente iguais (figura 146), a qual retrata a justificação mais adequada, próxima de mostrar tratar-se de dois pentágonos regulares. Houve, ainda, um aluno que, para resolver a tarefa **4.1.**, não se cingiu às informações facultadas em **4.**, tendo utilizado dados fornecidos numa das tarefas subsequentes - mais concretamente, a medida do lado do polígono $[BDFHJ]$ e a do polígono $[ACEGI]$ - para calcular a razão de semelhança entre os polígonos e, a partir daí, justificar a sua afirmação referente à semelhança desses polígonos (figura 147). Por oposição aos anteriores, um número diminuto de alunos da turma considerou que as informações facultadas em **4.** não eram suficientes para afirmar a semelhança dos polígonos $[BDFHJ]$ e $[ACEGI]$ em **4.1.**, tendo dado uma resposta errada nesta tarefa. Os alunos em causa apresentaram como justificação o facto de ser necessária informação adicional, como por exemplo, a medida de um lado de cada um desses polígonos (figura148), ou a própria razão de semelhança entre os polígonos (figura 149).


4.1. Sem ter quaisquer outras informações, é possível afirmar que o polígono $[BDFHJ]$ e o polígono $[ACEGI]$ são semelhantes? Justifica a tua resposta.

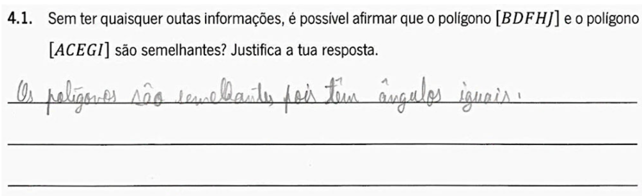
Sim, os polígonos [BDFHJ] e [ACEGi] são semelhantes porque os pontos dos dois polígonos são equidistantes ao ponto O.

Figura 143. Resolução da tarefa **4.1.** pelo aluno RG do 7.º ano, turma β.


4.1. Sem ter quaisquer outras informações, é possível afirmar que o polígono $[BDFHJ]$ e o polígono $[ACEGI]$ são semelhantes? Justifica a tua resposta.

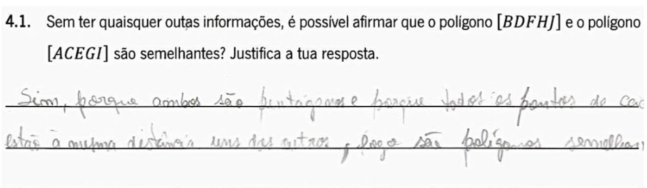
Os polígonos são semelhantes porque ambos são equidistantes do ponto O e também são equidistantes di dois pontos consecutivos.

Figura 144. Resolução da tarefa **4.1.** pelo aluno MM do 7.º ano, turma β.


4.1. Sem ter quaisquer outras informações, é possível afirmar que o polígono $[BDFHJ]$ e o polígono $[ACEGI]$ são semelhantes? Justifica a tua resposta.

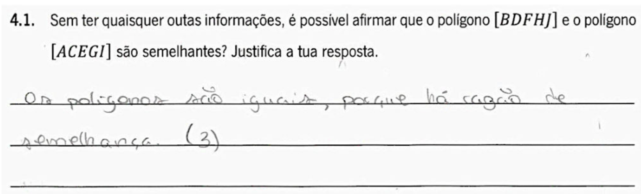
Os polígonos são semelhantes pois têm ângulos iguais.

Figura 145. Resolução da tarefa **4.1.** pelo aluno DA do 7.º ano, turma β.


4.1. Sem ter quaisquer outras informações, é possível afirmar que o polígono $[BDFHJ]$ e o polígono $[ACEGI]$ são semelhantes? Justifica a tua resposta.

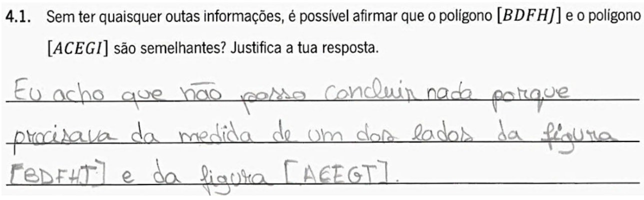
Sim, porque ambos são pentágonos e porque todos os pontos de ca
estão à mesma distância uns dos outros, logo são polígonos semelhan

Figura 146. Resolução da tarefa **4.1.** pelo aluno IO do 7.º ano, turma β.


4.1. Sem ter quaisquer outras informações, é possível afirmar que o polígono $[BDFHJ]$ e o polígono $[ACEGI]$ são semelhantes? Justifica a tua resposta.

Os polígonos são iguais, porque há razão de semelhança. (3)

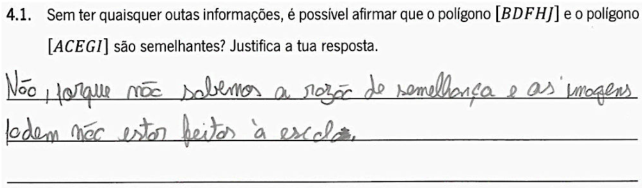
Figura 147. Resolução da tarefa **4.1.** pelo aluno LG do 7.º ano, turma β.



4.1. Sem ter quaisquer outras informações, é possível afirmar que o polígono $[BDFHJ]$ e o polígono $[ACEGI]$ são semelhantes? Justifica a tua resposta.

Eu acho que não posso concluir nada porque precisava da medida de um dos lados da figura [BDFHJ] e da figura [ACEGI].

Figura 148. Resolução da tarefa **4.1.** pelo aluno SC do 7.° ano, turma β.



4.1. Sem ter quaisquer outras informações, é possível afirmar que o polígono $[BDFHJ]$ e o polígono $[ACEGI]$ são semelhantes? Justifica a tua resposta.

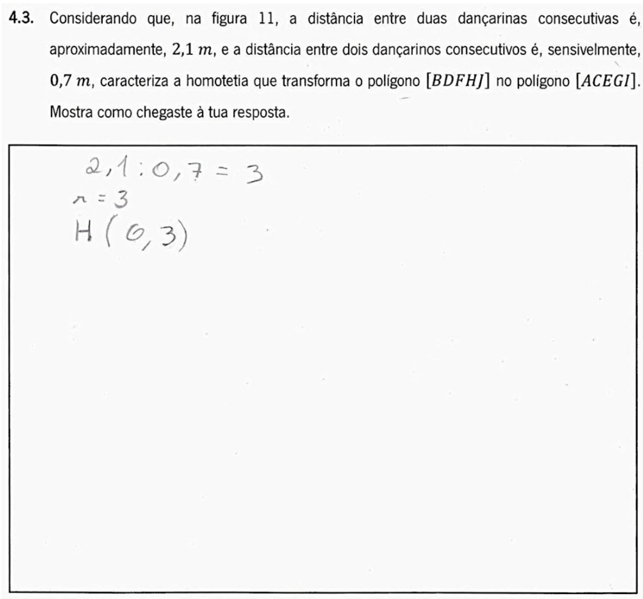
Não, porque não sabemos a razão de semelhança e as imagens podem não estar feitas à escala.

Figura 149. Resolução da tarefa **4.1.** pelo aluno FD do 7.° ano, turma β.

A progressão dos alunos para a exploração da tarefa **4.2.** foi tendo lugar em tempos diferentes, sendo que, a partir daí, os alunos puderam desenvolver a sua atividade de forma autónoma e seguir o seu próprio ritmo de trabalho, não ficando dependentes da introdução das tarefas em plenário - até então realizada pela professora de matemática -, nem do respetivo tempo de exploração que ia sendo definido. A tarefa **4.2.**, de um modo geral, não ofereceu dificuldades aos alunos. A maioria dos alunos da turma foi capaz de reconhecer, quer semelhanças, quer diferenças, entre os polígonos $[BDFHJ]$ e $[ACEGI]$. Entre as propriedades comuns aos dois polígonos que foram apresentadas pelos alunos em **4.2.**, encontram-se as seguintes, por ordem decrescente de frequência: a amplitude dos ângulos internos; o facto de serem pentágonos; o número de lados; os vértices serem equidistantes do ponto O; o centro dos polígonos ser O; o facto de serem polígonos regulares; o número de vértices; o número de ângulos; os vértices serem equidistantes entre si; e, por último, o facto de estarem inscritos em circunferências. No que refere às propriedades distintas entre os dois polígonos que foram registadas pelos alunos na resolução da tarefa **4.2.**, sumariam-se as que se seguem, novamente da maior para a menor frequência: a área; o comprimento dos lados; a distância ao centro O; a distância entre dois pontos consecutivos; o perímetro; e, por fim, o facto de estarem inscritos em circunferências de tamanho diferente. Importa, ainda, fazer menção a determinadas características - iguais e diferentes - entre os polígonos, que os alunos nomearam incorretamente, a saber: o facto de ambos os polígonos terem duas dançarinas consecutivas (recorde-se que um dos polígonos é formado pelas posições das mulheres e o outro é formado pelas posições dos homens); e o facto de os polígonos terem um número diferente de lados. Foram, também, registadas, pelos alunos, semelhanças/diferenças entre os dois polígonos consideradas inválidas, por definirem uma relação entre os polígonos e não constituírem, propriamente, características desses polígonos, designadamente: o facto de os polígonos terem os lados correspondentes paralelos, de serem polígonos semelhantes, e de um dos polígonos ser uma ampliação/redução do outro polígono. Concluindo, os alunos da turma, globalmente, foram bem-sucedidos na exploração do que era igual e diferente entre os polígonos $[BDFHJ]$ e $[ACEGI]$, tendo sido capazes de apresentar, na sua resolução da tarefa **4.2.**, pelo menos, uma semelhança e uma diferença de entre as anteriormente elencadas. Houve, no entanto, um pequeno número de alunos da turma que apresentou uma resolução incompleta da tarefa **4.2**, por ter referido só características diferentes ou só características iguais entre os polígonos. E há, ainda, a registar um número reduzido de alunos que não apresentou qualquer resolução na tarefa.

Ao longo da exploração da tarefa **4.3.** pelos alunos, notaram-se várias dificuldades, que se traduziram em solicitações mais frequentes por parte dos alunos em geral. Desde logo, não foi imediato para a maioria dos alunos perceberem que as medidas fornecidas na tarefa para a distância entre duas dançarinas - $2{,}1\ m$ - e para a distância entre dois dançarinos - $0{,}7\ m$ - correspondiam, respetivamente, ao comprimento dos lados do polígono $[BDFHJ]$ e ao comprimento dos lados do polígono $[ACEGI]$. Visto que os alunos, por si mesmos, não eram capazes de encontrar uma forma de representação funcional para a informação dada na tarefa, propôs-se que realizassem uma nova leitura/interpretação dos dados à luz da figura apresentada em **4.**, de modo que conseguissem relacionar as ideias em causa. Uma vez ultrapassado o obstáculo anterior, os alunos avançaram na resolução da tarefa, regra geral tentando determinar a razão de semelhança que transforma o polígono $[BDFHJ]$ no polígono $[ACEGI]$. Aí, as dificuldades manifestadas pelos alunos foram diversas. Alguns alunos, em vez de calcularem a razão de semelhança que transforma o polígono $[BDFHJ]$ no polígono $[ACEGI]$, determinando o quociente de $0{,}7\ m$ por $2{,}1\ m$ - medidas de comprimento dos lados correspondentes dos polígonos -, calcularam a razão de semelhança que transforma o segundo no primeiro, determinando o quociente de $2{,}1\ m$ por $0{,}7\ m$ (figura 150). Provavelmente, esse erro foi propiciado pelo facto de, no segundo caso, o cálculo da razão de semelhança r ser mais simples e ter como resultado um número inteiro ($r = 3$). Mediante o resultado obtido, os alunos não se mostraram capazes de o analisar criticamente e de perceberem a inadequação do mesmo, o qual pressupõe tratar-se de uma ampliação, já que $r > 1$. Ora, caso tivessem refletido sobre a razoabilidade do resultado, eles facilmente descobririam o erro, pois a transformação do polígono $[BDFHJ]$ no polígono $[ACEGI]$ corresponde, nitidamente, a uma redução. Outros alunos, mesmo tendo determinado, corretamente, a divisão de $0{,}7\ m$ por $2{,}1\ m$ para o cálculo da razão de semelhança que transforma $[BDFHJ]$ em $[ACEGI]$, apresentaram um resultado errado (figura 151). Isto sucedeu porque os alunos, tendo recorrido à calculadora para efetuarem a divisão, obtiveram o quociente na forma de dízima infinita $[0{,}7\ m \div 2{,}1\ m = 0,(3)]$ e, incorretamente, igualaram essa dízima infinita periódica $[0,(3)]$ ao número decimal $0{,}3$ e/ou à fração decimal $\frac{3}{10}$.

Houve, no entanto, outros alunos, que tendo também utilizado a calculadora para efetuarem a divisão de $0,7\ m$ por $2,1\ m$, apresentaram corretamente o resultado, na forma de dízima infinita periódica (figura 152). No que respeita aos alunos que, para determinarem o quociente de $0,7\ m$ por $2,1\ m$, transformaram os valores em frações decimais e operaram com as frações, foram todos bem-sucedidos, tendo efetuado os cálculos corretamente, e tendo obtido um resultado certo para a razão de semelhança entre os polígonos, que apresentaram na forma de fração irredutível (figura 153). Importa notar que, nalguns casos, os alunos apresentaram a mesma fração irredutível como resultado da já referida divisão, porém não explicitaram os cálculos efetuados, não sendo óbvia a forma como chegaram a esse resultado.



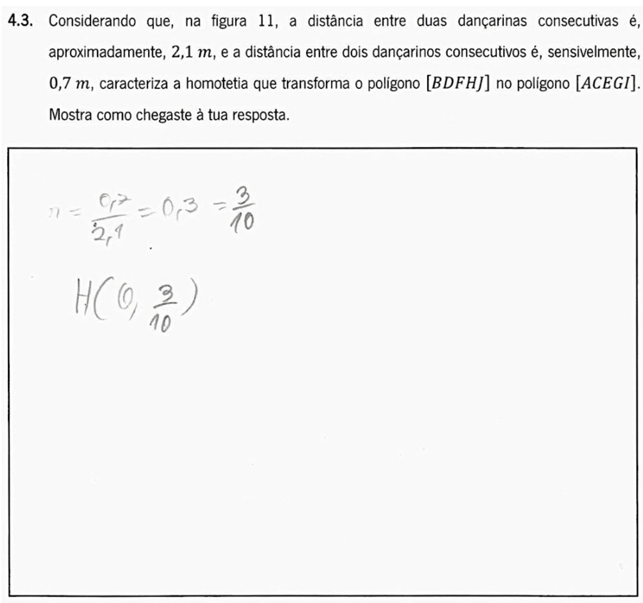
4.3. Considerando que, na figura 11, a distância entre duas dançarinas consecutivas é, aproximadamente, $2,1\ m$, e a distância entre dois dançarinos consecutivos é, sensivelmente, $0,7\ m$, caracteriza a homotetia que transforma o polígono $[BDFHJ]$ no polígono $[ACEGI]$. Mostra como chegaste à tua resposta.

$2,1 : 0,7 = 3$

$r = 3$

$H(O, 3)$

Figura 150. Resolução da tarefa **4.3.** pelo aluno JB do 7.º ano, turma β.

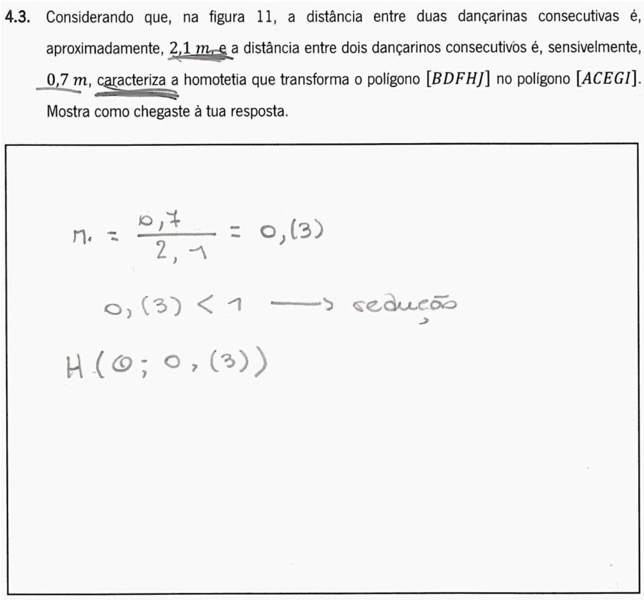


4.3. Considerando que, na figura 11, a distância entre duas dançarinas consecutivas é, aproximadamente, $2,1\ m$, e a distância entre dois dançarinos consecutivos é, sensivelmente, $0,7\ m$, caracteriza a homotetia que transforma o polígono $[BDFHJ]$ no polígono $[ACEGI]$. Mostra como chegaste à tua resposta.

$r = \frac{0,7}{2,1} = 0,3 = \frac{3}{10}$

$H(O, \frac{3}{10})$

Figura 151. Resolução da tarefa **4.3.** pelo aluno MM do 7.º ano, turma β.



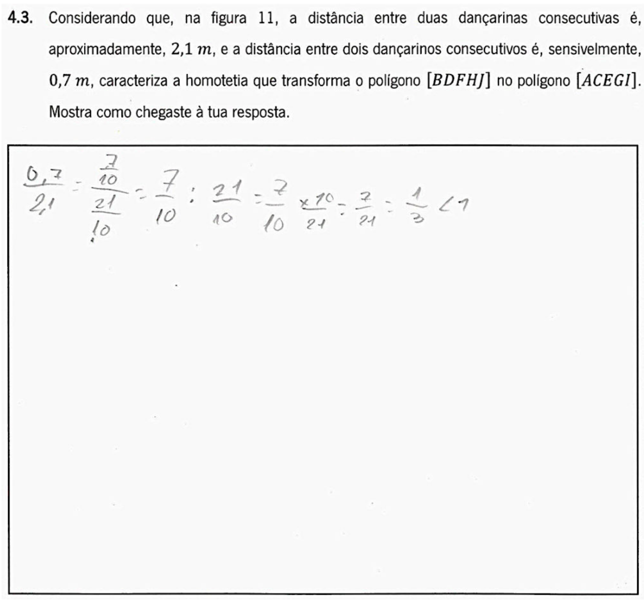
4.3. Considerando que, na figura 11, a distância entre duas dançarinas consecutivas é, aproximadamente, $2{,}1\ m$, e a distância entre dois dançarinos consecutivos é, sensivelmente, $0{,}7\ m$, caracteriza a homotetia que transforma o polígono $[BDFHJ]$ no polígono $[ACEGI]$. Mostra como chegaste à tua resposta.

$r = \frac{0{,}7}{2{,}1} = 0{,}(3)$

$0{,}(3) < 1 \longrightarrow$ redução

$H(O; 0{,}(3))$

Figura 152. Resolução da tarefa **4.3.** pelo aluno BR do 7.° ano, turma β.



4.3. Considerando que, na figura 11, a distância entre duas dançarinas consecutivas é, aproximadamente, $2{,}1\ m$, e a distância entre dois dançarinos consecutivos é, sensivelmente, $0{,}7\ m$, caracteriza a homotetia que transforma o polígono $[BDFHJ]$ no polígono $[ACEGI]$. Mostra como chegaste à tua resposta.

$\frac{0{,}7}{2{,}1} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{21}{10}} = \frac{7}{10} : \frac{21}{10} = \frac{7}{10} \times \frac{10}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} < 1$

Figura 153. Resolução da tarefa **4.3.** pelo aluno RC do 7.° ano, turma β.

Independentemente do desempenho dos alunos na determinação da razão de semelhança entre os polígonos, nenhum aluno se mostrou capaz de, por si próprio, definir a homotetia que transforma o polígono $[BDFHJ]$ no polígono $[ACEGI]$. Na resolução da tarefa **4.3.**, os alunos, de um modo geral, cingiram-se ao cálculo da razão de semelhança que transforma o polígono $[BDFHJ]$ no polígono $[ACEGI]$, considerando ser suficiente para responder ao problema, ou não sabendo como prosseguir. Como tal, e apesar de os conteúdos programáticos relativos a 'paralelismo, congruência e semelhança' (MEC, 2012, 2013) - onde aparece o tópico das homotetias - terem sido lecionados recentemente na turma, foi imprescindível recordar esse tópico matemático em plenário, proporcionando aos alunos informação útil para a resolução da tarefa. Para esse efeito, foram colocadas perguntas aos alunos, procurando-se envolvê-los mais na atividade, em vez de lhes ser apresentada diretamente a informação. Após esse momento, a maioria dos alunos da turma foi capaz de completar a resolução da tarefa **4.3.**, realizando a caracterização da homotetia que transforma o polígono $[BDFHJ]$ no polígono $[ACEGI]$ a partir de dois elementos, a saber: o centro O da homotetia e a razão da homotetia (por vezes, incorreta). Ora, as resoluções da tarefa **4.3.** exibidas nas figuras 150, 151 e 152 constituem três exemplos do disposto, no sentido em que os alunos, na sequência do momento de partilha de informação em plenário, definiram - corretamente ou não - o centro e a razão da homotetia envolvida na transformação de $[BDFHJ]$ em $[ACEGI]$, tendo, assim, caracterizado essa homotetia, tal como era solicitado na tarefa. Alguns alunos, considerando o valor absoluto da razão da homotetia em causa, ainda classificaram essa homotetia como uma redução, conforme se pode ver na resolução da tarefa **4.3.** exposta na figura 152. Por oposição aos anteriores, outros alunos, mesmo depois de, no momento em plenário, terem sido, indiretamente, fornecidas pistas para a resolução da tarefa **4.3.**, não deram continuidade à resolução - no sentido da caracterização da homotetia -, tendo-se limitado à determinação da razão de semelhança entre os polígonos. Veja-se, como exemplo do referido, a resolução da tarefa **4.3.** patente na figura 153. Importa, ainda, tomar nota de um número minoritário de alunos da turma que não se revelou capaz de explorar a tarefa **4.3.**, não tendo desenvolvido qualquer resolução. É possível que os alunos em causa tenham considerado a tarefa demasiado difícil e, por consequência, não se dispuseram a trabalhar nela.

Na tarefa **4.4.**, os alunos, de uma forma geral, conseguiram compreender os dados apresentados, tendo iniciado, autonomamente, a resolução do problema. Provavelmente, a figura exibida na tarefa - referente à representação das posições dos dançarinos num momento particular da dança - ajudou os alunos a concretizarem a informação fornecida no enunciado, facilitando a compreensão da mesma. Ainda assim, nem todos os alunos foram capazes de explorar devidamente o problema proposto em **4.4.**, cuja resolução envolvia a execução de dois passos. Ou seja, para conseguirem descobrir a distância entre a dançarina na posição J e o dançarino na posição I, os alunos, sabendo que a dançarina na posição J fica a, aproximadamente, $1{,}8\ m$ do centro O, teriam que, em primeiro lugar, calcular a distância do dançarino na posição I ao centro O e, com essa medida, calcular a distância entre J e I. Ora, uma grande parte dos alunos da turma, na resolução da tarefa **4.4.**, efetuou, apenas, o primeiro passo da resolução - descrito acima -, apresentando uma resolução incompleta do problema (figura 154). Atente-se que, na resolução da tarefa **4.4.** pelo aluno SC (figura 154), ele calculou corretamente a distância do dançarino na posição I ao centro O, e respondeu em conformidade com isso, o que mostra que esse aluno - e outros com resoluções similares - falhou na compreensão do que era pedido na tarefa.

Essa falha na interpretação da pergunta colocada na tarefa **4.4.** tornou-se evidente em outras resoluções de alunos que - tal como o aluno SC - só efetuaram o primeiro passo da resolução do problema, tendo dado respostas que, mesmo com o conteúdo correto, não iam ao encontro do que era pedido na tarefa. Por oposição aos anteriores, outros alunos, na resolução da tarefa **4.4.**, efetuaram os dois passos de resolução previstos (ler atrás), patenteando uma resolução completa do problema (figura 155). É curioso que, na resolução da tarefa **4.4.** pelo aluno JB (figura 155), ele usou, para a razão de semelhança que transforma $[BDFHJ]$ em $[ACEGI]$, o valor errado que tinha calculado na tarefa **4.3.** - 3, em vez de $\frac{1}{3}$; no entanto, ao calcular a distância entre os pontos I e O, a partir da distância conhecida entre os pontos J e O - $1{,}8\ m$ -, o aluno, em vez de multiplicar esta medida pelo valor da razão da semelhança, dividiu, talvez porque, visualmente, ele constatou que $\overline{IO}$ seria três vezes menor do que $\overline{JO}$, e não maior. Assim, o aluno JB foi capaz de, em **4.4.**, contornar um erro que advinha da tarefa anterior - algo que ocorreu em muitas outras resoluções de alunos que também tinham errado no valor da razão de semelhança. Em **4.4.**, certos alunos, para calcularem $\overline{IO}$ - primeiro passo da resolução do problema -, em vez de utilizarem o valor da razão de semelhança entre os polígonos, recuperaram as medidas dadas em **4.3.** - $2{,}1\ m$ e $0{,}7\ m$ para o comprimento dos lados do polígono $[BDFHJ]$ e $[ACEGI]$, respetivamente -, e usaram a regra de três simples, estabelecendo uma correspondência correta entre lados proporcionais; depois, eles completaram a resolução do problema, através da realização do segundo passo (figura 156).

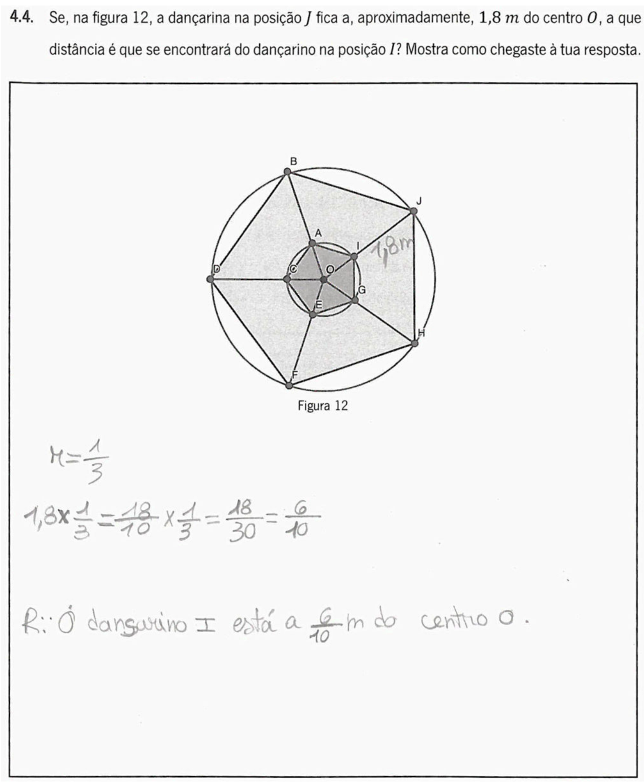
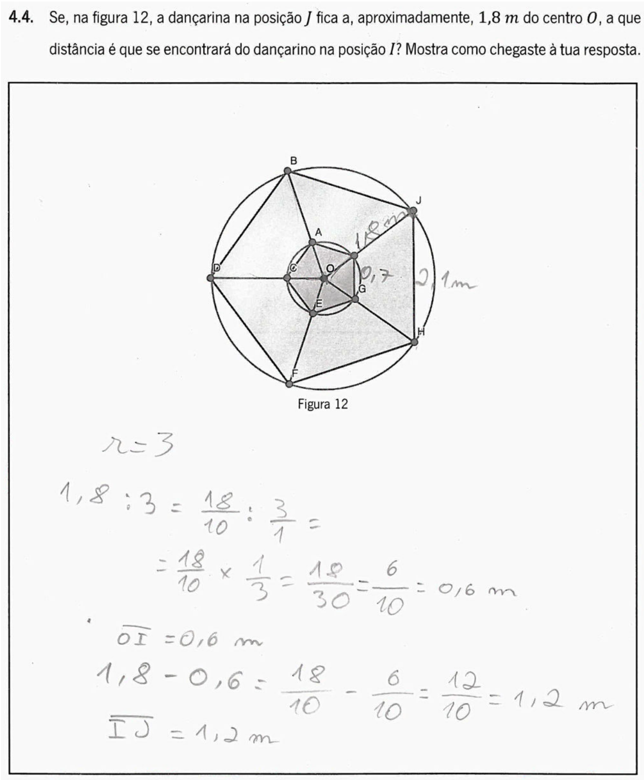


Figura 154. Resolução da tarefa **4.4.** pelo aluno SC do 7.º ano, turma β.



4.4. Se, na figura 12, a dançarina na posição J fica a, aproximadamente, $1{,}8\ m$ do centro O, a que distância é que se encontrará do dançarino na posição I? Mostra como chegaste à tua resposta.

$r = 3$

$1{,}8 : 3 = \frac{18}{10} : \frac{3}{1} =$

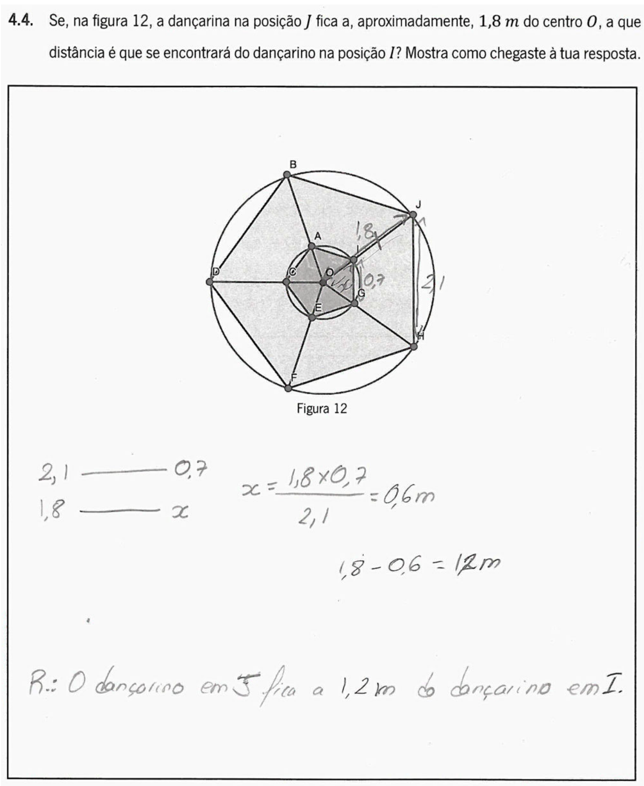
$= \frac{18}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{18}{30} = \frac{6}{10} = 0{,}6\ m$

$\overline{OI} = 0{,}6\ m$

$1{,}8 - 0{,}6 = \frac{18}{10} - \frac{6}{10} = \frac{12}{10} = 1{,}2\ m$

$\overline{IJ} = 1{,}2\ m$

Figura 155. Resolução da tarefa **4.4.** pelo aluno JB do 7.º ano, turma β.



4.4. Se, na figura 12, a dançarina na posição J fica a, aproximadamente, $1{,}8\ m$ do centro O, a que distância é que se encontrará do dançarino na posição I? Mostra como chegaste à tua resposta.

2,1 ——— 0,7
1,8 ——— x

$x = \frac{1{,}8 \times 0{,}7}{2{,}1} = 0{,}6m$

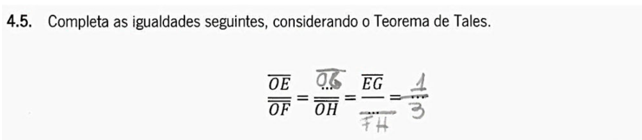
$1{,}8 - 0{,}6 = 1{,}2m$

R.: O dançarino em J fica a 1,2m do dançarino em I.

Figura 156. Resolução da tarefa **4.4.** pelo aluno HL do 7.º ano, turma β.

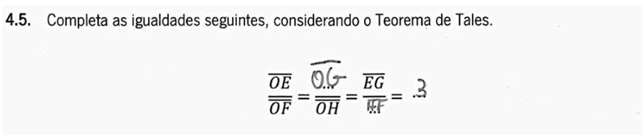
Ainda acerca da tarefa **4.4.**, importa tomar nota de alguns alunos que não resolveram o problema.

Na tarefa **4.5.**, os alunos da turma, regra geral, não demonstraram dificuldades em completar as igualdades apresentadas, alusivas às condições de proporcionalidade envolvidas no Teorema de Tales. Salvo algumas exceções de alunos que não completaram ou que completaram mal, todos os alunos conseguiram preencher, corretamente, as igualdades relativas aos lados correspondentes proporcionais. Quanto à última igualdade - a completar com a constante de proporcionalidade -, esta não foi tão linear. Certos alunos indicaram, corretamente, a constante de proporcionalidade $\frac{1}{3}$, resolvendo a tarefa **4.5.** com êxito (figura 157). Porém, outros alunos, na indicação da constante de proporcionalidade, reiteraram o valor incorreto da razão de semelhança que haviam calculado em **4.3.**, e, por esse motivo, não conseguiram resolver a tarefa **4.5.** com total correção (figuras 158 e 159). O mesmo aconteceu com os alunos que, para a constante de proporcionalidade, usaram o resultado obtido na resolução do primeiro passo do problema anterior, não demonstrando compreensão da igualdade definida (figura 160). Há, ainda, a registar, o caso de um aluno que, na última igualdade, em vez de indicar o valor da constante de proporcionalidade, apresentou uma correspondência de outros dois lados proporcionais (figura 161). E, para terminar, houve alguns alunos que não preencheram o valor da constante de proporcionalidade.


4.5. Completa as igualdades seguintes, considerando o Teorema de Tales.

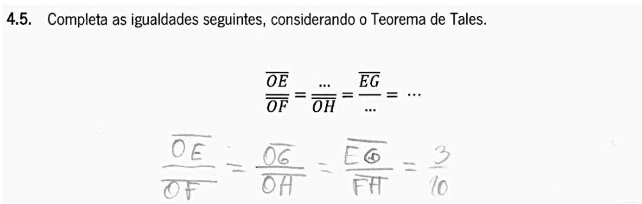
$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{OG}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{EG}}{FH} = \frac{1}{3}$$

Figura 157. Resolução da tarefa **4.5.** pelo aluno CM do 7.º ano, turma β.


4.5. Completa as igualdades seguintes, considerando o Teorema de Tales.

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{OG}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{EG}}{FH} = 3$$

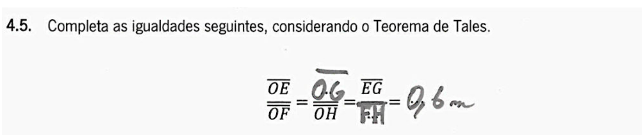
Figura 158. Resolução da tarefa **4.5.** pelo aluno JB do 7.º ano, turma β.


4.5. Completa as igualdades seguintes, considerando o Teorema de Tales.

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OF}} = \frac{\ldots}{\overline{OH}} = \frac{\overline{EG}}{\ldots} = \ldots$$

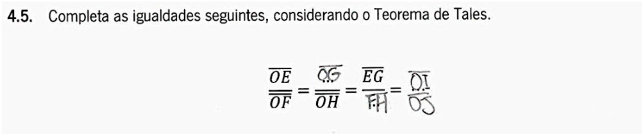
$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{OG}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{FH}} = \frac{3}{10}$$

Figura 159. Resolução da tarefa **4.5.** pelo aluno MM do 7.º ano, turma β.


4.5. Completa as igualdades seguintes, considerando o Teorema de Tales.

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{OG}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{EG}}{FH} = 0,6\ m$$

Figura 160. Resolução da tarefa **4.5.** pelo aluno MC do 7.º ano, turma β.


4.5. Completa as igualdades seguintes, considerando o Teorema de Tales.

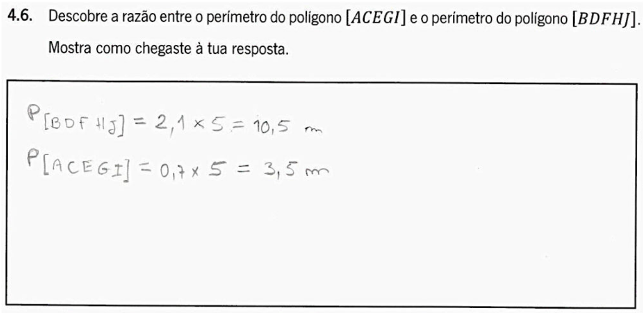
$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{OG}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{FH}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OJ}}$$

Figura 161. Resolução da tarefa **4.5.** pelo aluno MK do 7.º ano, turma β.

Nas tarefas **4.6.** e **4.7.**, nenhum aluno da turma apresentou uma resposta imediata, relacionando, respetivamente, a razão entre perímetros de figuras semelhantes e a razão entre áreas de figuras semelhantes, com a razão de semelhança entre as figuras. Os alunos, no seu todo, tanto para descobrirem a razão entre os perímetros dos polígonos $[ACEGI]$ e $[BDFHJ]$, em **4.6.**, como para descobrirem a razão entre as áreas dos polígonos $[ACEGI]$ e $[BDFHJ]$, em **4.7.**, efetuaram cálculos, não tendo estabelecido relações com a razão de semelhança entre os polígonos, que já conheciam. Ora, é importante mencionar que o tópico 'perímetros e áreas de figuras semelhantes' (MEC, 2012, 2013) havia sido lecionado, na turma, nas aulas de matemática que antecederam a implementação pedagógica.

Na resolução da tarefa **4.6.**, os alunos da turma puseram em evidência dificuldades variadas. Alguns alunos calcularam corretamente o perímetro dos polígonos $[ACEGI]$ e $[BDFHJ]$, mas não determinaram a razão entre esses perímetros, apresentando uma resolução incompleta da tarefa **4.6.** (figura 162). Outros alunos também calcularam corretamente o perímetro dos polígonos, mas, ao determinarem a razão entre os perímetros de $[ACEGI]$ e de $[BDFHJ]$, inverteram os termos da razão, tendo obtido um resultado errado em **4.6.**, correspondente ao inverso da razão prevista (figura 163). Houve dois casos excecionais em que os alunos também determinaram a razão inversa entre os perímetros dos polígonos, mas, ao contrário dos anteriores, eles erraram no cálculo dos perímetros, porque usaram medidas incorretas - $1{,}8\,m$ e $0{,}6\,m$ - para o comprimento dos lados dos polígonos (figura 164). Por se tratar de duas medidas proporcionais dos polígonos - implicadas na resolução da tarefa **4.4.** -, não é notada qualquer diferença na razão determinada por esses dois alunos na tarefa **4.6.**; no entanto, ao usarem essas medidas na resolução da tarefa **4.6.**, os alunos demostram falta de atenção durante a atividade e/ou falta de compreensão relativamente aos dados facultados nas várias tarefas. Outros alunos, mesmo tendo calculado corretamente o perímetro dos polígonos $[ACEGI]$ e $[BDFHJ]$, e tendo, depois, indicado devidamente a razão entre os perímetros, apresentaram um resultado errado (figura 165), evidenciando um erro que já tinha acontecido, em **4.3.**, no cálculo da razão de semelhança. Em concreto, esses alunos, em vez de escreverem o resultado da razão entre os perímetros $[0,(3)]$ como uma dízima infinita periódica, erradamente apresentaram como resultado o número decimal $0{,}3$. Vários alunos conseguiram resolver a tarefa **4.6.** com pleno sucesso, calculando, corretamente, não só o perímetro dos polígonos $[ACEGI]$ e $[BDFHJ]$, como também a respetiva razão (figuras 166 e 167).

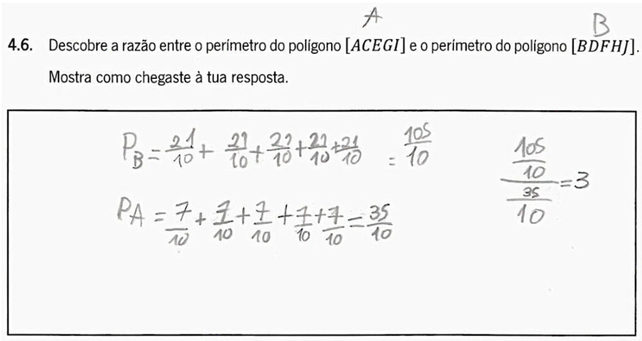
A maioria desses alunos apresentou o resultado da razão entre os perímetros na forma de fração, tal como fez o aluno CG (figura 167), não tendo explicitado, na resolução, a maneira como chegou à fração. Há a referir, por fim, um número diminuto de alunos que não desenvolveu qualquer resolução na tarefa.



4.6. Descobre a razão entre o perímetro do polígono $[ACEGI]$ e o perímetro do polígono $[BDFHJ]$.
Mostra como chegaste à tua resposta.

$P_{[BDFHJ]} = 2,1 \times 5 = 10,5$ m
$P_{[ACEGI]} = 0,7 \times 5 = 3,5$ m

Figura 162. Resolução da tarefa **4.6.** pelo aluno EF do 7.º ano, turma β.



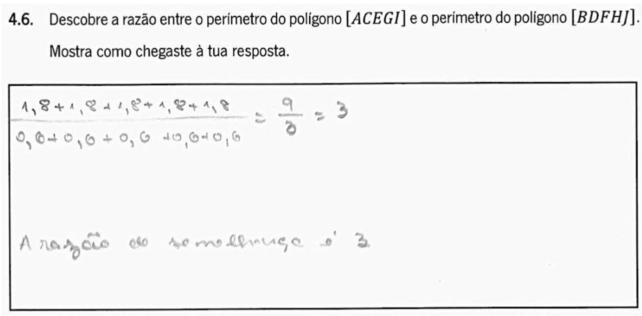
4.6. Descobre a razão entre o perímetro do polígono $[ACEGI]$ e o perímetro do polígono $[BDFHJ]$.
Mostra como chegaste à tua resposta.

$P_B = \frac{21}{10} + \frac{21}{10} + \frac{21}{10} + \frac{21}{10} + \frac{21}{10} = \frac{105}{10}$

$P_A = \frac{7}{10} + \frac{7}{10} + \frac{7}{10} + \frac{7}{10} + \frac{7}{10} = \frac{35}{10}$

$\frac{\frac{105}{10}}{\frac{35}{10}} = 3$

Figura 163. Resolução da tarefa **4.6.** pelo aluno RG do 7.º ano, turma β.

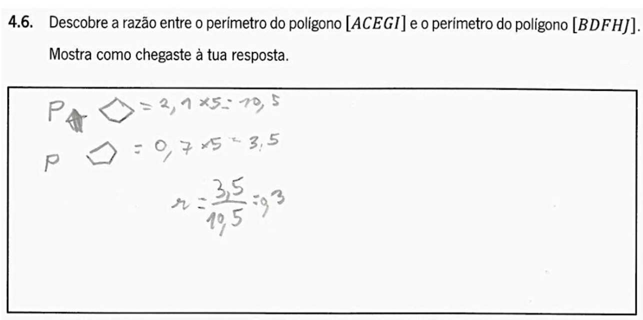


4.6. Descobre a razão entre o perímetro do polígono $[ACEGI]$ e o perímetro do polígono $[BDFHJ]$.
Mostra como chegaste à tua resposta.

$\frac{1,8 + 1,8 + 1,8 + 1,8 + 1,8}{0,6 + 0,6 + 0,6 + 0,6 + 0,6} = \frac{9}{3} = 3$

A razão da semelhança é 3

Figura 164. Resolução da tarefa **4.6.** pelo aluno LP do 7.º ano, turma β.



4.6. Descobre a razão entre o perímetro do polígono $[ACEGI]$ e o perímetro do polígono $[BDFHJ]$.
Mostra como chegaste à tua resposta.

P = 2,1 × 5 = 10,5
P = 0,7 × 5 = 3,5
$r = \frac{3,5}{10,5} = 3$

Figura 165. Resolução da tarefa **4.6.** pelo aluno PL do 7.º ano, turma β.

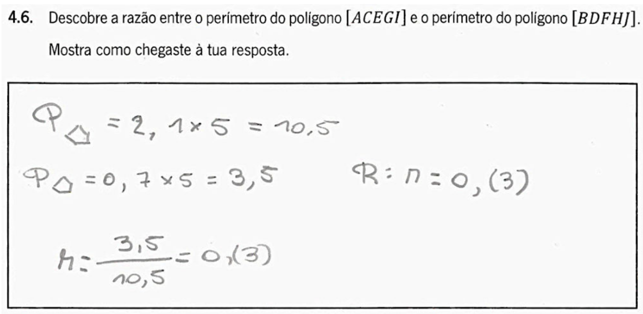


Figura 166. Resolução da tarefa **4.6.** pelo aluno BR do 7.º ano, turma β.

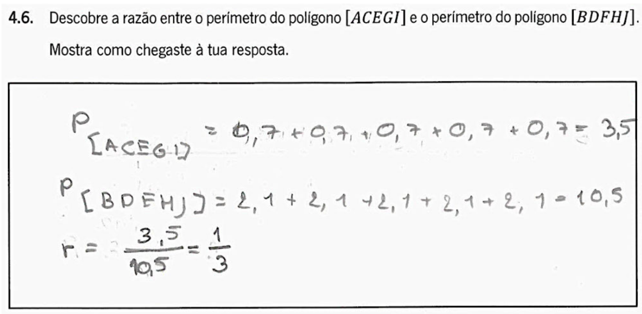
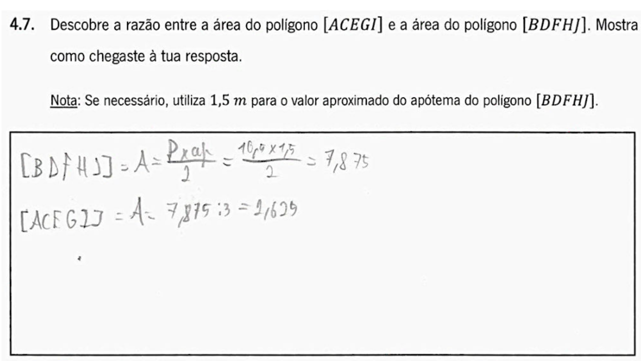


Figura 167. Resolução da tarefa **4.6.** pelo aluno CG do 7.º ano, turma β.

A resolução da tarefa **4.7.** criou vários constrangimentos aos alunos. Desde logo, diversos alunos da turma expressaram o facto de não saberem como poderiam calcular a área dos polígonos regulares $[ACEGI]$ e $[BDFHJ]$. Diante disso, a professora de matemática tomou a iniciativa de partilhar a fórmula para a área de polígonos regulares, a qual foi registada no quadro da sala, da seguinte forma: $A = \frac{P \times ap}{2}$. Em plenário, a professora esclareceu que P correspondia ao perímetro do polígono regular (recorde-se que o cálculo do perímetro dos polígonos $[ACEGI]$ e $[BDFHJ]$ já tinha sido realizado na tarefa anterior), e clarificou, ainda, que ap correspondia ao valor do apótema desse polígono regular. Sendo a 'fórmula para a área de polígonos regulares' (MEC, 2012, 2013) um tópico programático lecionado no 6.º ano de escolaridade, a professora optou por apresentar diretamente essa informação. Após o momento em grande grupo, os alunos, já dispondo de um procedimento imediato para iniciarem a resolução da tarefa **4.7.**, prosseguiram a sua atividade individualmente. No entanto, isso não garantiu que todos os alunos fossem capazes de usar a fórmula para a área de polígonos regulares, ou que a aplicassem com sucesso. Alguns alunos não deram qualquer uso à fórmula, no sentido em que não desenvolveram nenhuma resolução na tarefa **4.7.** - ocorrência comum na exploração de várias tarefas. Outros alunos aplicaram corretamente a fórmula para calcularem a área do polígono $[BDFHJ]$, mas não a usaram no cálculo da área do polígono $[ACEGI]$, porque, erroneamente, assumiram que a área deste último era três vezes menor do que a área do primeiro, calculando-a de forma errada (figura 168).

Portanto, mesmo sem terem determinado a razão entre as áreas dos polígonos $[ACEGI]$ e $[BDFHJ]$ na resolução da tarefa **4.7.**, os alunos em causa revelaram, implicitamente, as suas conceções erróneas. Os dois casos excecionais dos alunos que, na resolução da tarefa anterior, usaram medidas incorretas - $1{,}8\ m$ e $0{,}6\ m$ - para o comprimento dos lados dos polígonos, tendo obtido resultados errados no cálculo do perímetro dos polígonos, não tiveram êxito na aplicação da fórmula para calcular a área dos polígonos, porque usaram valores incorretos para o perímetro dos polígonos - a variável P da fórmula (figura 169). Nos restantes casos, os alunos não foram bem-sucedidos na aplicação da fórmula para calcular a área dos polígonos devido aos valores errados que usaram para a outra variável da fórmula - o apótema (ap). Neste caso, os valores incorretos utilizados pelos alunos para substituírem a variável ap foram vários. Diversos alunos atribuíram o mesmo valor do apótema que é dado para o polígono $[BDFHJ]$ - $1{,}5\ m$ - ao polígono $[ACEGI]$, tendo sido este um erro bastante frequente entre os alunos da turma (figura 170). Por sua vez, outros alunos ignoraram o valor do apótema do polígono $[BDFHJ]$ que aparece enunciado na tarefa - $1{,}5\ m$ -, tendo usado as medidas $1{,}8\ m$ e $0{,}6\ m$ - implicadas na resolução da tarefa **4.4.** -, para os valores do apótema do polígono $[BDFHJ]$ e do polígono $[ACEGI]$, respetivamente (figura 171). A atribuição dessas medidas ao apótema dos polígonos pode ter sido meramente irrefletida; no entanto, o facto de os alunos usarem essas duas medidas em particular também pode significar que eles confundiram o apótema dos polígonos com o lado dos cinco triângulos isósceles em que se decompõe cada um dos polígonos, e que é correspondente ao raio da circunferência em que cada um está inscrito. Em contraste com os anteriores, outros alunos da turma usaram o valor do apótema que é introduzido na tarefa - $1{,}5\ m$ - para um dos polígonos, mas erraram no valor do apótema que atribuíram ao outro polígono, tendo considerado várias medidas, entre as quais $0{,}6\ m$ (figura 172) e $1{,}8\ m$ (figura 173). Nestes casos, a atribuição do valor em falta para o apótema de um dos polígonos já se afigura mais aleatória, no sentido em que os alunos parecem ter usado, irrefletidamente, medidas provenientes das tarefas anteriores, de forma a puderem concretizar a fórmula e, assim, calcularem a área dos polígonos.

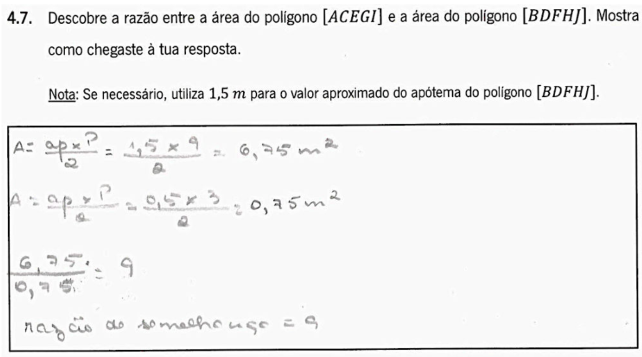

4.7. Descobre a razão entre a área do polígono $[ACEGI]$ e a área do polígono $[BDFHJ]$. Mostra como chegaste à tua resposta.

Nota: Se necessário, utiliza $1{,}5\ m$ para o valor aproximado do apótema do polígono $[BDFHJ]$.

$[BDFHJ] = A = \frac{P \times ap}{2} = \frac{10{,}5 \times 1{,}5}{2} = 7{,}875$

$[ACEGI] = A = 7{,}875 : 3 = 2{,}625$

Figura 168. Resolução da tarefa **4.7.** pelo aluno DA do 7.° ano, turma β.



4.7. Descobre a razão entre a área do polígono $[ACEGI]$ e a área do polígono $[BDFHJ]$. Mostra como chegaste à tua resposta.

Nota: Se necessário, utiliza $1{,}5\ m$ para o valor aproximado do apótema do polígono $[BDFHJ]$.

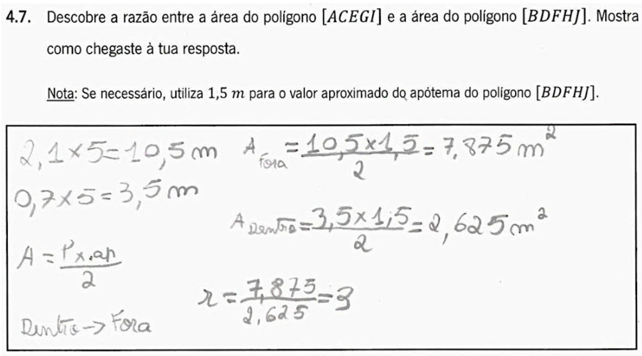
$A = \frac{ap \times P}{2} = \frac{1{,}5 \times 9}{2} = 6{,}75\ m^2$

$A = \frac{ap \times P}{2} = \frac{0{,}5 \times 3}{2} = 0{,}75\ m^2$

$\frac{6{,}75}{0{,}75} = 9$

razão de semelhança = 9

Figura 169. Resolução da tarefa **4.7.** pelo aluno LP do 7.º ano, turma β.



4.7. Descobre a razão entre a área do polígono $[ACEGI]$ e a área do polígono $[BDFHJ]$. Mostra como chegaste à tua resposta.

Nota: Se necessário, utiliza $1{,}5\ m$ para o valor aproximado do apótema do polígono $[BDFHJ]$.

$2{,}1 \times 5 = 10{,}5\ m$

$0{,}7 \times 5 = 3{,}5\ m$

$A = \frac{P \times ap}{2}$

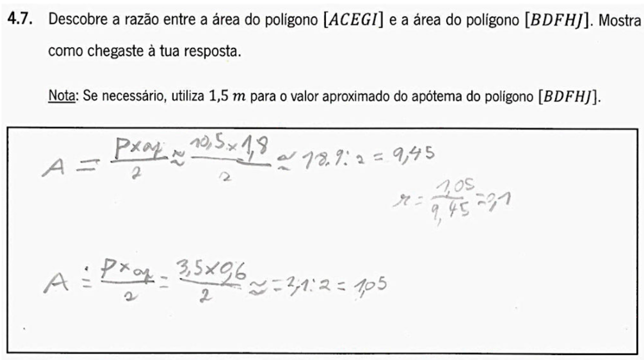
Dentro -> Fora

$A_{fora} = \frac{10{,}5 \times 1{,}5}{2} = 7{,}875\ m^2$

$A_{dentro} = \frac{3{,}5 \times 1{,}5}{2} = 2{,}625\ m^2$

$r = \frac{7{,}875}{2{,}625} = 3$

Figura 170. Resolução da tarefa **4.7.** pelo aluno CM do 7.º ano, turma β.



4.7. Descobre a razão entre a área do polígono $[ACEGI]$ e a área do polígono $[BDFHJ]$. Mostra como chegaste à tua resposta.

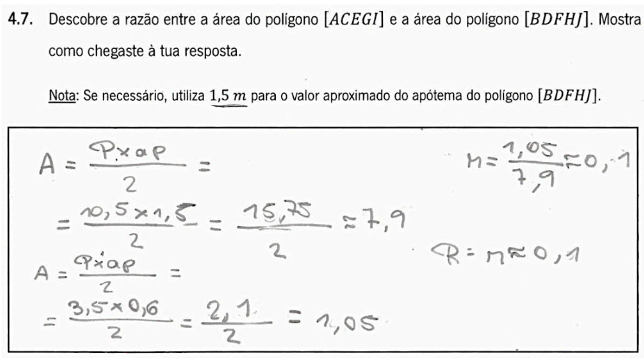
Nota: Se necessário, utiliza $1{,}5\ m$ para o valor aproximado do apótema do polígono $[BDFHJ]$.

$A = \frac{P \times ap}{2} \approx \frac{10{,}5 \times 1{,}8}{2} \approx 18{,}9 : 2 = 9{,}45$

$r = \frac{1{,}05}{9{,}45} \approx 0{,}1$

$A = \frac{P \times ap}{2} = \frac{3{,}5 \times 0{,}6}{2} \approx 2{,}1 : 2 = 1{,}05$

Figura 171. Resolução da tarefa **4.7.** pelo aluno PL do 7.º ano, turma β.



4.7. Descobre a razão entre a área do polígono $[ACEGI]$ e a área do polígono $[BDFHJ]$. Mostra como chegaste à tua resposta.

Nota: Se necessário, utiliza $1{,}5\ m$ para o valor aproximado do apótema do polígono $[BDFHJ]$.

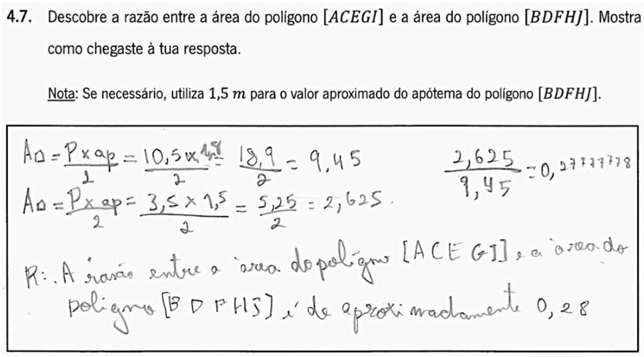
$A = \frac{P \times ap}{2} = \frac{10{,}5 \times 1{,}5}{2} = \frac{15{,}75}{2} \approx 7{,}9$

$A = \frac{P \times ap}{2} = \frac{3{,}5 \times 0{,}6}{2} = \frac{2{,}1}{2} = 1{,}05$

$r = \frac{1{,}05}{7{,}9} \approx 0{,}1$

$R = r \approx 0{,}1$

Figura 172. Resolução da tarefa **4.7.** pelo aluno BR do 7.º ano, turma β.


4.7. Descobre a razão entre a área do polígono $[ACEGI]$ e a área do polígono $[BDFHJ]$. Mostra como chegaste à tua resposta.

Nota: Se necessário, utiliza 1,5 m para o valor aproximado do apótema do polígono $[BDFHJ]$.

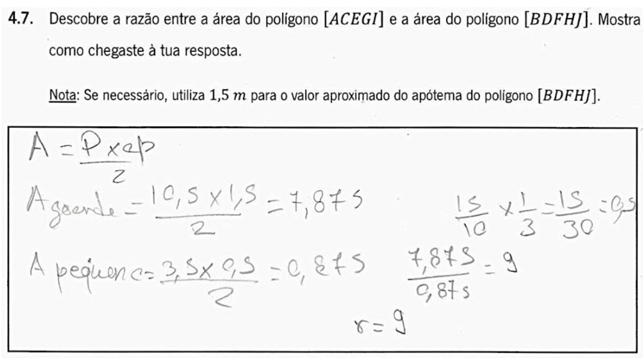
$A = \frac{P \times ap}{2} = \frac{10,5 \times 1,8}{2} = \frac{18,9}{2} = 9,45$ $\quad \frac{2,625}{9,45} = 0,27777778$

$A = \frac{P \times ap}{2} = \frac{3,5 \times 1,5}{2} = \frac{5,25}{2} = 2,625$.

R:. A razão entre a área do polígono [ACEGI] e a área do polígono [BDFHJ] é de aproximadamente 0,28

Figura 173. Resolução da tarefa **4.7.** pelo aluno MK do 7.º ano, turma β.

Na resolução da tarefa **4.7.**, os erros cometidos pelos alunos ao calcularem a área dos polígonos $[ACEGI]$ e $[BDFHJ]$, e que foram elencados anteriormente, tiveram influência direta na determinação da razão entre as áreas dos polígonos, tendo dado origem, na maioria dos casos, a um resultado errado. Veja-se, como exemplos, as resoluções da tarefa **4.7.** exibidas nas figuras 170, 172 e 173. Nesses casos, o resultado da razão entre as áreas dos polígonos $[ACEGI]$ e $[BDFHJ]$ está incorreto porque os alunos erraram no cálculo da área de um dos polígonos ou dos dois. No entanto, existem casos diferentes. Atentando na resolução da tarefa **4.7.** apresentada na figura 169, pode-se verificar que o facto de o aluno ter calculado incorretamente a área dos dois polígonos não foi, neste caso, o que ditou o resultado errado da razão entre as áreas dos polígonos, até porque a razão de proporcionalidade não sofreu alterações. O que está aí em causa é que o aluno, tal como já tinha feito ao determinar a razão entre os perímetros em **4.6.**, inverteu os termos da razão, tendo obtido um resultado que é o inverso da razão esperada. Ora, esta troca de posição dos termos da razão entre as áreas dos polígonos foi um erro bastante frequente entre os alunos, mesmo para aqueles que calcularam corretamente a área dos polígonos (figura 174). Num caso diferente, ilustrado na figura 171, apesar de o aluno ter calculado mal a área dos polígonos, a razão de proporcionalidade não sofreu alterações, e, portanto, o erro na razão entre as áreas surgiu porque o aluno, à semelhança do que já tinha feito na resolução da tarefa anterior, erradamente, igualou o resultado da razão entre as áreas - uma dízima infinita periódica $[0,(1)]$ - ao número decimal $0{,}1$. Convém ressalvar que, apesar de os resultados obtidos nas resoluções expressas nas figuras 171 e 172, aparentemente, serem iguais, derivam de falhas distintas. No primeiro caso, o aluno, conforme foi dito, errou por tratar o resultado da razão entre as áreas - dízima infinita periódica - como um número decimal. No segundo caso, o resultado da razão entre as áreas está mesmo errado, embora isso não se torne evidente porque o aluno fez uma aproximação do resultado às décimas, obtendo também o número $0{,}1$. Houve, ainda, alguns alunos que limitaram a resolução da tarefa **4.7.** ao cálculo da área dos polígonos, não tendo determinado a razão entre as áreas, conforme exemplifica a resolução presente na figura 168.



4.7. Descobre a razão entre a área do polígono $[ACEGI]$ e a área do polígono $[BDFHJ]$. Mostra como chegaste à tua resposta.

Nota: Se necessário, utiliza 1,5 m para o valor aproximado do apótema do polígono $[BDFHJ]$.

$A = \frac{P \times ap}{2}$

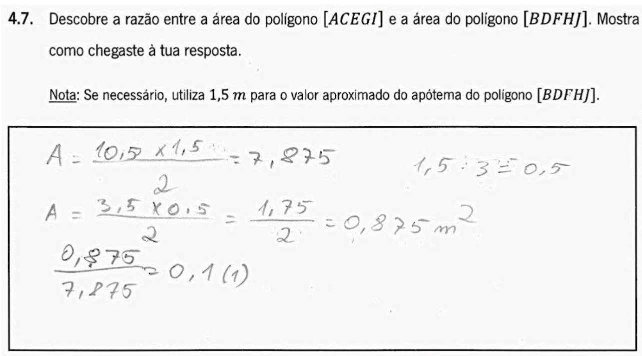
$A_{grande} = \frac{10,5 \times 1,5}{2} = 7,875$ $\quad \frac{15}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{15}{30} = 0,5$

A pequeno $= \frac{3,5 \times 0,5}{2} = 0,875$ $\quad \frac{7,875}{0,875} = 9$

$r = 9$

Figura 174. Resolução da tarefa **4.7.** pelo aluno MF do 7.º ano, turma β.

Poucos foram os alunos da turma que conseguiram resolver a tarefa **4.7.** completamente bem, calculando corretamente, tanto a área dos polígonos, como a razão entre as áreas (figuras 175 e 176). Maioritariamente, esses alunos apresentaram o resultado da razão entre as áreas na forma de fração, tal qual fez o aluno CG (figura 176), ainda que não se tenha percebido a forma como chegaram à fração, até porque, à exceção do resultado da razão, todos os cálculos realizados pelos alunos, quer para calcular a área dos polígonos, quer para determinar a razão entre as áreas, foram feitos com números decimais. Não obstante, os passos desenvolvidos pelos alunos na resolução da tarefa **4.7.** demonstram que eles compreenderam o problema, e que delinearam e aplicaram corretamente uma estratégia para o resolver.



4.7. Descobre a razão entre a área do polígono $[ACEGI]$ e a área do polígono $[BDFHJ]$. Mostra como chegaste à tua resposta.

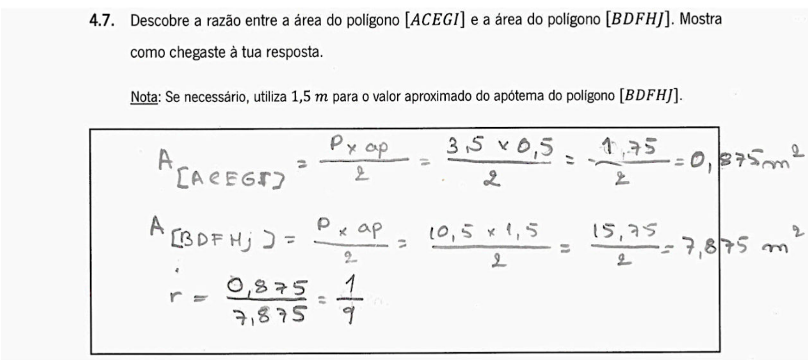
Nota: Se necessário, utiliza 1,5 m para o valor aproximado do apótema do polígono $[BDFHJ]$.

$A = \frac{10,5 \times 1,5}{2} = 7,875$ $\quad 1,5 : 3 = 0,5$

$A = \frac{3,5 \times 0,5}{2} = \frac{1,75}{2} = 0,875\ m^2$

$\frac{0,875}{7,875} = 0,1(1)$

Figura 175. Resolução da tarefa **4.7.** pelo aluno JB do 7.º ano, turma β.



4.7. Descobre a razão entre a área do polígono $[ACEGI]$ e a área do polígono $[BDFHJ]$. Mostra como chegaste à tua resposta.

Nota: Se necessário, utiliza 1,5 m para o valor aproximado do apótema do polígono $[BDFHJ]$.

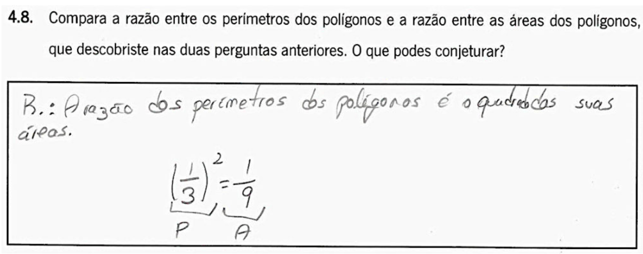
$A_{[ACEGI]} = \frac{P \times ap}{2} = \frac{3,5 \times 0,5}{2} = \frac{1,75}{2} = 0,875\ m^2$

$A_{[BDFHJ]} = \frac{P \times ap}{2} = \frac{10,5 \times 1,5}{2} = \frac{15,75}{2} = 7,875\ m^2$

$r = \frac{0,875}{7,875} = \frac{1}{9}$

Figura 176. Resolução da tarefa **4.7.** pelo aluno CG do 7.º ano, turma β.

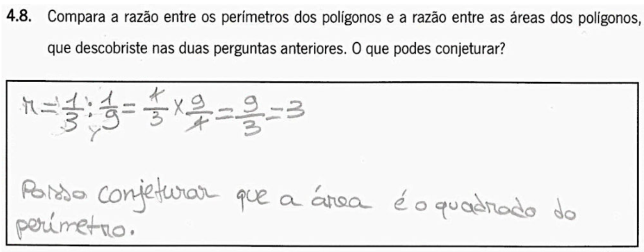
A resolução da tarefa **4.8.** - comparar a razão entre os perímetros dos polígonos, determinada em **4.6.**, e a razão entre as áreas dos polígonos, determinada em **4.7.** -, por estar dependente da resolução das duas tarefas imediatamente anteriores, trouxe muitas dificuldades aos alunos. Isto porque, os alunos, na sua maioria, não tinham sido bem-sucedidos em pelo menos uma dessas tarefas, e, por esse motivo, ao compararem os resultados obtidos para a razão entre os perímetros e para a razão entre as áreas, tornou-se difícil reconhecerem a relação entre esses valores. O mesmo aconteceu com os alunos que não tinham calculado a razão entre os perímetros, em **4.6.**, e/ou a razão entre as áreas, em **4.7.**, e com aqueles que não tinham desenvolvido nenhuma resolução nalguma dessas tarefas. Por consequência, a maior parte dos alunos da turma não foi capaz de responder à tarefa **4.8.**, deixando a tarefa em branco. Os poucos alunos da turma que conseguiram elaborar uma resposta na tarefa **4.8.**, ou tinham resolvido corretamente as duas tarefas anteriores, ou, mesmo não tendo resolvido corretamente, cometeram erros que não influenciaram a relação existente entre a razão entre os perímetros e a razão entre as áreas. Ora, dos alunos que tinham resolvido com sucesso as tarefas **4.6.** e **4.7.**, determinando corretamente, quer a razão entre os perímetros, quer a razão entre as áreas, alguns conseguiram formular uma conjetura correta, a partir da comparação entre a razão entre os perímetros e a razão entre as áreas (figura 177); outros não foram bem-sucedidos e elaboraram uma conjetura desadequada (figura 178), ou, eventualmente, não conseguiram comunicar convenientemente as ideias que haviam conjeturado. Os alunos que, na determinação da razão entre os perímetros, em **4.6.**, e na determinação da razão entre as áreas, em **4.7.**, tinham invertido os termos da razão, obtendo o inverso das razões pensadas, regra geral, tiveram êxito na resolução da tarefa **4.8.**, tendo formulando uma conjetura certa (figura 179).


4.8. Compara a razão entre os perímetros dos polígonos e a razão entre as áreas dos polígonos, que descobriste nas duas perguntas anteriores. O que podes conjeturar?

R.: A razão dos perímetros dos polígonos é o quadrado das suas áreas.

$$\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^2}_{P} = \underbrace{\frac{1}{9}}_{A}$$

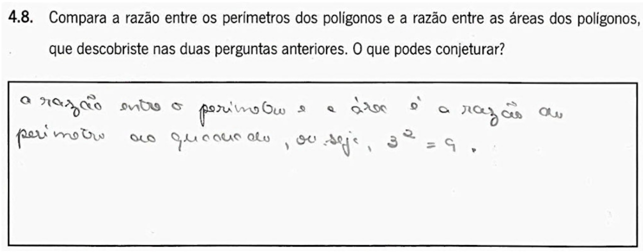
Figura 177. Resolução da tarefa **4.8.** pelo aluno HL do 7.º ano, turma β.


4.8. Compara a razão entre os perímetros dos polígonos e a razão entre as áreas dos polígonos, que descobriste nas duas perguntas anteriores. O que podes conjeturar?

$$r = \frac{1}{3} : \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{1} = \frac{9}{3} = 3$$

Posso conjeturar que a área é o quadrado do perímetro.

Figura 178. Resolução da tarefa **4.8.** pelo aluno SC do 7.º ano, turma β.

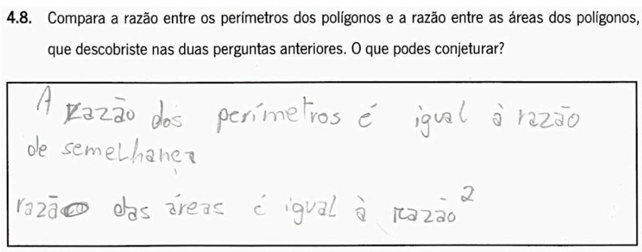


4.8. Compara a razão entre os perímetros dos polígonos e a razão entre as áreas dos polígonos, que descobriste nas duas perguntas anteriores. O que podes conjeturar?

a razão entre o perímetro e a área é a razão ao perímetro ao quadrado, ou seja, $3^2 = 9$.

Figura 179. Resolução da tarefa **4.8.** pelo aluno LP do 7.º ano, turma β.

Ainda sobre a resolução da tarefa **4.8.**, importa fazer referência a certos alunos que, não tendo conseguido formular nenhuma conjetura válida mediante os resultados que tinham obtido para a razão entre os perímetros, em **4.6.**, e para a razão entre as áreas, em **4.7.**, enunciaram duas propriedades da semelhança de figuras, que relacionam a razão entre perímetros de figuras semelhantes e a razão entre áreas de figuras semelhantes com a razão de semelhança entre as figuras (figura 180). Apesar de essas propriedades estarem certas, os alunos não foram capazes de as utilizar para resolverem as tarefas **4.6.** e **4.7.**, o que sugere que eles as enunciaram sem compreenderem a sua aplicação num dado contexto.



4.8. Compara a razão entre os perímetros dos polígonos e a razão entre as áreas dos polígonos, que descobriste nas duas perguntas anteriores. O que podes conjeturar?

A razão dos perímetros é igual à razão de semelhança

razão das áreas é igual à razão^2

Figura 180. Resolução da tarefa **4.8.** pelo aluno TP do 7.º ano, turma β.

No final, recolheu-se o conjunto de tarefas matemáticas *Malhão em roda(s)*, tendo sido dada oportunidade aos alunos para partilharem algum comentário/observação face ao trabalho desenvolvido.

Atentando na atividade dos alunos ao longo da implementação pedagógica, pode-se reconhecer que a visualização do vídeo da dança folclórica, conducente à exploração das diferentes tarefas matemáticas, foi algo que interessou e motivou os alunos, incentivando-os para o trabalho a desenvolver. Durante parte da implementação pedagógica, a professora de matemática assumiu um papel diretivo, que se traduziu na leitura do enunciado das tarefas matemáticas, no esclarecimento de algumas dúvidas levantadas no imediato pelos alunos, e na definição de um tempo específico para a resolução das tarefas. Ora, quando o ritmo individual de trabalho dos alunos se começou a fazer notar, manifestando-se em discrepâncias no tempo gasto pelos alunos na resolução das tarefas, e em distúrbios resultantes disso, tornou-se imperativo autonomizar os alunos no sentido de autogerirem a sua atividade, o que acabou por acontecer somente no avanço para a tarefa **4.2.**, sem qualquer "aviso" por parte da professora.

Esses momentos diferenciados ao nível da gestão do trabalho em sala de aula refletiram-se, também, nas interações estabelecidas entre os alunos. Se, num primeiro momento, mais diretivo, os alunos prosseguiam em função das orientações prescritivas e uniformes da professora, desenvolvendo a sua atividade de forma estritamente individual, no momento subsequente, os alunos, de forma natural, interagiram mais uns com os outros, confrontando ideias e pensamento acerca da resolução das tarefas. No final, o tempo total da implementação pedagógica - 100 minutos - permitiu que a quase totalidade dos alunos da turma concluísse a exploração das tarefas matemáticas, mesmo seguindo ritmos distintos.

Examinando a atividade dos alunos durante a exploração das diferentes tarefas matemáticas, é possível compreender que uma grande parte das tarefas, ao envolver o estudo, em termos matemáticos, de certas partes da coreografia da dança - contexto não-matemático - ofereceu dificuldades aos alunos. Exemplo disso são as tarefas **2.1.**, **3.1.**, **4.3.** e **4.4.**, cujas resoluções dependiam, mais explicitamente, da análise da matemática presente em determinadas partes da coreografia. Logo na tarefa **2.1.**, tornaram-se evidentes os constrangimentos sentidos pelos alunos na identificação do número de eixos de simetria presente numa figura que retratava um momento da coreografia e, mais ainda, na justificação dessa resposta. Para vários alunos, tornou-se mais acessível basearem-se na figura representativa das posições iniciais dos dançarinos na dança - representação geométrica - apresentada na tarefa anterior, em detrimento da imagem ilustrativa do momento da coreografia em causa, exibida na própria tarefa. Na tarefa **3.1.**, a identificação dos ângulos associados ao movimento de "serrar" não foi imediato para uma grande parte dos alunos da turma, tendo sido necessário fornecer esclarecimentos a esse respeito. Na mesma tarefa, a determinação das amplitudes aproximadas desses ângulos trouxe dificuldades aos alunos, que não dispunham de um processo imediato para resolver a questão. Ainda que alguns alunos tivessem conseguido desenvolver uma estratégia de resolução eficaz, a maioria não foi capaz de o fazer, o que levou a professora de matemática a intervir, partilhando, em plenário, uma fórmula útil para a resolução da tarefa, mas que, mesmo assim, não garantiu o sucesso de todos os alunos na resolução. Na tarefa **4.3.**, o facto de os dados aí enunciados terem como referência elementos da dança - distâncias entre os dançarinos e entre as dançarinas - tornou a sua interpretação menos intuitiva para os alunos. Em **4.4.**, apesar de os dados serem da mesma natureza, ao ser inserida, na tarefa, a figura representativa das posições iniciais dos dançarinos na dança, a sua interpretação ficou mais percetível para os alunos.

Um comentário final recai sobre as tarefas **4.3.**, **4.6.**, **4.7.** e **4.8.**, nas quais se tornou notória a dificuldade dos alunos para aplicarem, num contexto extra-matemático, conhecimentos matemáticos recentemente aprendidos. Interpretar e explorar, matematicamente, situações de um contexto atípico - as danças folclóricas - parece, portanto, ter restringido a transferibilidade dos conhecimentos dos alunos.

7.2.4. Vira e revira a cruz

O conjunto de tarefas matemáticas *Vira e revira a cruz* foi implementado numa turma do 8.º ano de escolaridade - turma δ - de uma escola artística especializada no ensino da música, situada em Braga.

No início da implementação pedagógica, com a duração total de 100 minutos, introduziu-se a dança folclórica a investigar - *Vira ao Castelo*, do *Grupo Folclórico de Vila Verde*. Em seguida, leu-se, em plenário, a informação relativa a essa dança, que surge exposta antes das tarefas *Vira e revira a cruz*, entretanto distribuídas aos alunos. Posteriormente, visualizou-se o vídeo da dança, tendo-se chamado a atenção dos alunos para o reconhecimento dos quatro movimentos que marcavam a coreografia, a saber: o movimento de "serrar"; os movimentos de avanço e recuo; os movimentos de avanço, rodopio e recuo; e o "trespasse". Tal clarificação teve como objetivo que os alunos compreendessem melhor a estruturação das tarefas propostas - alusivas a cada um dos movimentos enunciados - e que, assim, pudessem desenvolver a sua atividade sem obstáculos criados pela não identificação dos movimentos. A exploração das tarefas matemáticas pelos alunos teve que ser realizada individualmente, em virtude das medidas de prevenção e controlo da transmissão da COVID-19 estabelecidas para o contexto escolar.

Na tarefa **1.**, os alunos compreenderam a figura correspondente à representação de algumas posições iniciais dos dançarinos na dança, e, em **1.1.**, conseguiram completar essa figura com sucesso, acrescentando, devidamente, as posições iniciais dos dançarinos em falta, e usando as cores adequadas.

No avanço para a tarefa **2.**, os alunos leram a informação que antecede a tarefa e, no seguimento, analisaram a figura relativa à representação das posições iniciais dos dançarinos, bem como das posições que os dançarinos podem assumir no decurso dos movimentos de avanço e recuo que realizam. Para que os alunos pudessem certificar-se dos movimentos de avanço e recuo em causa, visualizou-se, uma vez mais, o vídeo da dança, solicitando-se aos alunos que identificassem a parte da coreografia correspondente à execução de tais movimentos - algo que foi realizado com sucesso pelo grupo-turma. Na exploração, em **2.1.**, do número mínimo de vetores necessários para representar os movimentos de avanço e recuo dos quatro pares de dançarinos, a tendência inicial da maior parte dos alunos da turma foi a de reconhecerem e desenharem, na figura dada, dezasseis vetores, em vez de quatro (figura 181). Foram poucos os alunos que, logo de início, conseguiram descobrir o número mínimo de quatro vetores. Ainda assim, houve certos alunos que foram capazes de compreender que vários dos vetores desenhados eram iguais e, como resultado disso, reformularam a sua resposta inicial, determinando, corretamente, a necessidade de, no mínimo, quatro vetores para representar os movimentos de avanço e recuo ocorridos na dança. Outros alunos, não tendo conseguido apurar isso, mantiveram fixo o seu pensamento inicial, indicando um número de vetores bastante superior ao número mínimo que é requerido na tarefa. Entre os alunos que determinaram - logo à partida ou no desenvolver da sua atividade - o número mínimo de quatro vetores, foram vários os que usaram outras letras para representarem tais vetores (figura 182).

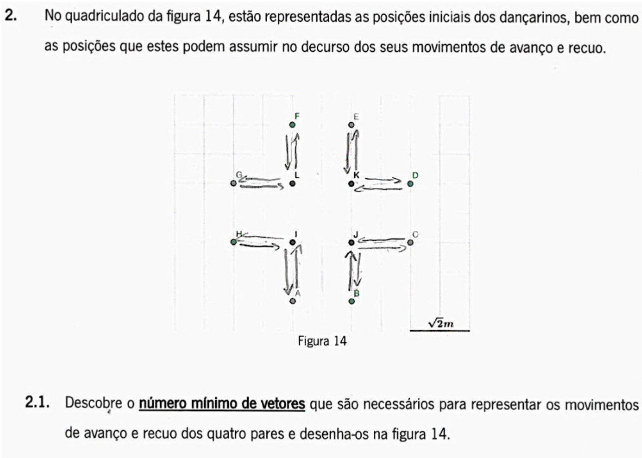


Figura 181. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno FS do 8.º ano, turma δ.

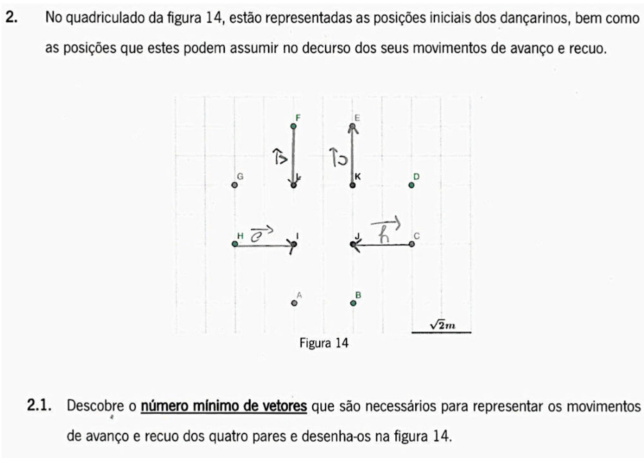
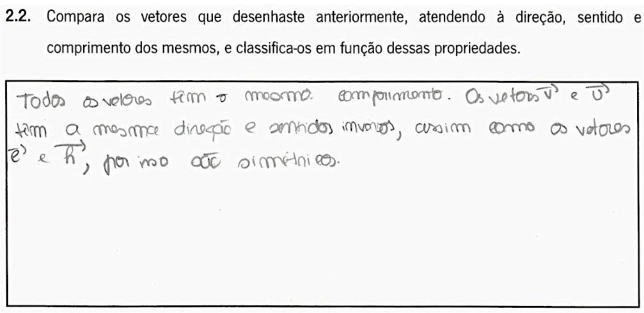


Figura 182. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno MG do 8.º ano, turma δ.

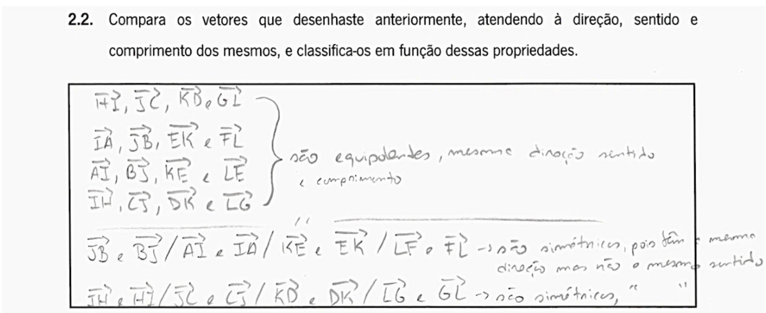
A tarefa **2.2.** - relacionada com a tarefa precedente - criou dificuldades de interpretação a vários alunos da turma, que solicitaram esclarecimentos e apoio na compreensão do que era pedido na mesma. Mesmo tendo-se esclarecido as dúvidas levantadas pelos alunos, a resolução da tarefa **2.2.** não foi linear. No caso dos alunos que, em **2.1.**, tinham respondido, corretamente, o número mínimo de quatro vetores, a maioria deles, na resolução da tarefa **2.2.**, comparou corretamente esses vetores, atendendo à direção, sentido e comprimento dos mesmos, e classificou-os devidamente em função dessas propriedades (figura 183). No entanto, houve outros alunos que, apesar de também terem determinado, em **2.1.**, quatro vetores, ao resolverem a tarefa **2.2.**, em vez de compararem esses quatro vetores, basearam-se nos dezasseis vetores inicialmente desenhados por uma grande parte dos alunos da turma (figura 184);

o mesmo fizeram os alunos que, na tarefa anterior, tinham apresentado como resposta, justamente, dezasseis vetores. Ora, a tentativa de comparação dos dezasseis vetores - ao invés de quatro vetores - tornou a resolução da tarefa **2.2.** mais complexa para os alunos, dificultando a elaboração da resposta. Na maior parte dos casos, os alunos, de forma mais ou menos sistemática, procuraram agrupar os dezasseis vetores nas classificações de vetores equipolentes/equivalentes e de vetores simétricos, conforme exemplifica a resolução da tarefa **2.2.** exibida na figura 184; noutros casos, os alunos organizaram a sua resposta com base nas propriedades dos vetores a considerar - direção, sentido e comprimento -, não tendo, contudo, classificado os vetores em função dessas propriedades (figura 185). Há, ainda, a referir alguns alunos que, na resolução da tarefa **2.2.**, limitaram a sua resposta à enunciação de um exemplo de dois vetores equipolentes/equivalentes e outro de dois vetores simétricos (figura 186).


2.2. Compara os vetores que desenhaste anteriormente, atendendo à direção, sentido e comprimento dos mesmos, e classifica-os em função dessas propriedades.

Todos os vetores têm o mesmo comprimento. Os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ têm a mesma direção e sentidos inversos, assim como os vetores $\vec{e}$ e $\vec{h}$, por isso são simétricos.

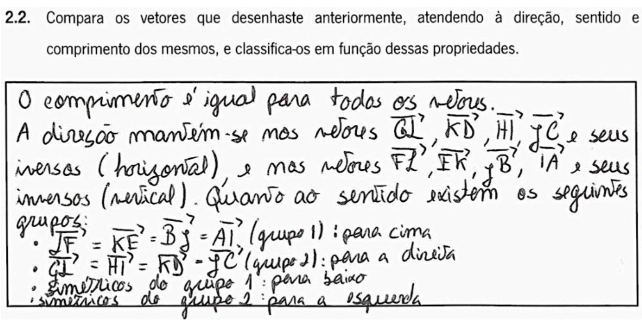
Figura 183. Resolução da tarefa **2.2.** pelo aluno MG do 8.º ano, turma δ.


2.2. Compara os vetores que desenhaste anteriormente, atendendo à direção, sentido e comprimento dos mesmos, e classifica-os em função dessas propriedades.

$\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{JC}$, $\overrightarrow{KD}$ e $\overrightarrow{GL}$
$\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{JB}$, $\overrightarrow{EK}$ e $\overrightarrow{FL}$
$\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{BJ}$, $\overrightarrow{KE}$ e $\overrightarrow{LE}$
$\overrightarrow{IH}$, $\overrightarrow{CJ}$, $\overrightarrow{DK}$ e $\overrightarrow{LG}$
são equipolentes, mesma direção sentido e comprimento

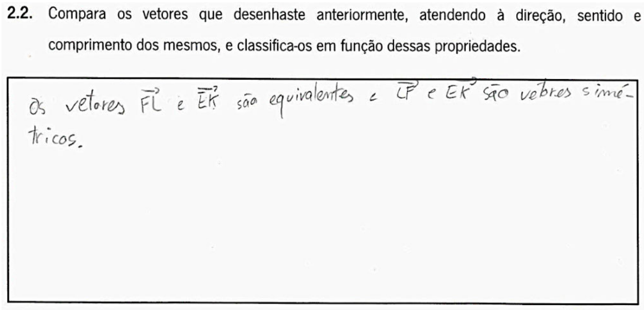
$\overrightarrow{JB}$ e $\overrightarrow{BJ}$ / $\overrightarrow{AI}$ e $\overrightarrow{IA}$ / $\overrightarrow{KE}$ e $\overrightarrow{EK}$ / $\overrightarrow{LF}$ e $\overrightarrow{FL}$ → são simétricos, pois têm a mesma direção mas não o mesmo sentido
$\overrightarrow{IH}$ e $\overrightarrow{HI}$ / $\overrightarrow{JC}$ e $\overrightarrow{CJ}$ / $\overrightarrow{KD}$ e $\overrightarrow{DK}$ / $\overrightarrow{LG}$ e $\overrightarrow{GL}$ → são simétricos, " "

Figura 184. Resolução da tarefa **2.2.** pelo aluno BA do 8.º ano, turma δ.


2.2. Compara os vetores que desenhaste anteriormente, atendendo à direção, sentido e comprimento dos mesmos, e classifica-os em função dessas propriedades.

O comprimento é igual para todos os vetores.
A direção mantém-se nos vetores $\overrightarrow{GL}$, $\overrightarrow{KD}$, $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{JC}$ e seus inversos (horizontal), e nos vetores $\overrightarrow{FL}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{JB}$, $\overrightarrow{IA}$ e seus inversos (vertical). Quanto ao sentido existem os seguintes grupos:
- $\overrightarrow{JF} = \overrightarrow{KE} = \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AI}$ (grupo 1): para cima
- $\overrightarrow{GL} = \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{JC}$ (grupo 2): para a direita
- simétricos do grupo 1: para baixo
- simétricos do grupo 2: para a esquerda

Figura 185. Resolução da tarefa **2.2.** pelo aluno LC do 8.º ano, turma δ.

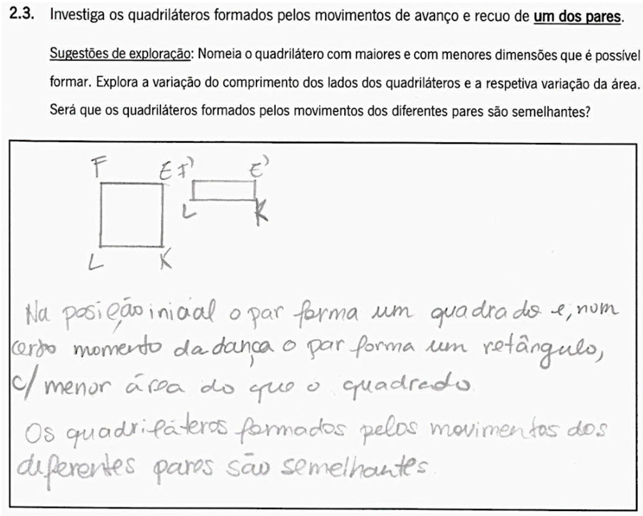

2.2. Compara os vetores que desenhaste anteriormente, atendendo à direção, sentido e comprimento dos mesmos, e classifica-os em função dessas propriedades.

Os vetores $\vec{FL}$ e $\vec{EK}$ são equivalentes e $\vec{LF}$ e $\vec{EK}$ são vetores simé-tricos.

Figura 186. Resolução da tarefa **2.2.** pelo aluno JI do 8.º ano, turma δ.

A tarefa **2.3.** constituiu-se bastante desafiante para os alunos, que se envolveram, visivelmente, na sua resolução. Ao longo da exploração desta tarefa, notou-se uma intensificação espontânea das interações comunicativas ocorridas entre os alunos, que confrontavam ideias para a resolução da tarefa. Em termos gerais, os alunos da turma foram capazes de perceber o que era solicitado na tarefa **2.3.**, tendo-se apoiado na figura presente em **2.** - relativa à representação das posições iniciais dos dançarinos, bem como das posições que estes podem assumir no decurso dos movimentos de avanço e recuo. Baseados nessa figura, os alunos desenvolveram a exploração da tarefa **2.3.**, seguindo, rigorosamente, as sugestões que aparecem enunciadas na mesma. Dessa forma, os alunos começaram por refletir acerca do quadrilátero com maiores e com menores dimensões que podia ser formado pelos movimentos de avanço e recuo de um dos pares. Ora, se para a maioria dos alunos se tornou imediato que o quadrilátero com maiores dimensões seria um quadrado - algo que, provavelmente, foi favorecido pela representação das posições dos dançarinos presente na figura -, o mesmo não aconteceu em relação ao quadrilátero com menores dimensões. Percecionarem que os movimentos de avanço e recuo dos pares até alcançarem a posição limite davam origem a sucessivos retângulos não foi intuitivo para os alunos. Também não foi imediato para os alunos compreenderem a variação do comprimento dos lados dos quadriláteros formados pelos movimentos de avanço e recuo dos pares, e a respetiva variação da área. Essas três propostas de exploração da tarefa, em particular, criaram obstáculos à atividade dos alunos. Ora, isso fez com que os pedidos de apoio por parte dos alunos se tornassem muito frequentes no decorrer da exploração da tarefa **2.3.**, os quais se mostravam motivados e empenhados na resolução. As intervenções realizadas junto dos alunos foram sempre no sentido de estimular o raciocínio matemático deles, baseando-se em perguntas, comentários e sugestões, que, indiretamente, lhes proporcionassem pistas para a resolução da tarefa **2.3.**, sem, contudo, esvaziarem de desafio a tarefa. Nalgumas ocasiões, sugeriu-se, inclusivamente, aos alunos que reproduzissem, no espaço da sala de aula, os movimentos de avanço e recuo executados por um par, de modo a facilitar a sua compreensão desses movimentos e a promover uma reflexão mais concreta sobre as questões a explorar na tarefa.

Mesmo tendo-se apoiado os alunos na sua atividade, as resoluções da tarefa **2.3.** por eles apresentadas foram díspares. Alguns alunos, de um modo incorreto, percecionaram que um dado par de dançarinos, logo na sua posição inicial, formava um quadrado e que, derivado dos movimentos de avanço e recuo, esse par formava um retângulo com menor área do que o quadrado (figura 187). Ora, ao pressuporem, erroneamente, que o par, antes mesmo de iniciar os movimentos, formava um quadrado, os alunos demonstram incompreensão no que refere à exploração matemática desses movimentos da coreografia. É possível que tal ocorrência tenha sido propiciada pelo facto de, na figura da tarefa **2.** - na qual os alunos se apoiaram para explorar a tarefa **2.3.** -, estarem representadas, não só as posições iniciais, como as posições limite do avanço de cada par, levando a que os alunos visualizassem, logo à partida, quadrados. Outros alunos entenderam, corretamente, que, do movimento de avanço de um certo par de dançarinos (pressupõe-se, desde as posições iniciais até às posições limite), assim como do movimento de recuo (pressupõe-se, o inverso das posições antes referidas), resultava um quadrado; apesar disso, os alunos em questão assumiram, erradamente, que só no momento em que o par se encontrava na posição intermédia dos movimentos de avanço e recuo é que se formava um retângulo (figura 188). Novamente, são indiciadas falhas, por parte dos alunos, na análise matemática do movimento da dança em causa. Note-se que, nos dois tipos de resoluções anteriormente ilustrados, os alunos em causa não exploraram, na sua resolução da tarefa **2.3.**, todos os tópicos de análise propostos na tarefa. Em contraste com eles, outros alunos aprofundaram mais a exploração dos quadriláteros formados pelos movimentos de avanço e recuo dos pares, apresentando resoluções mais completas da tarefa **2.3.**, quando comparadas com as resoluções até aqui analisadas, que não incluíam algumas das sugestões de exploração propostas, nomeadamente a exploração da variação do comprimento dos lados e da área dos quadriláteros gerados. Ora, alguns alunos integraram uma análise correta da variação da área dos quadriláteros formados, mas não exploraram, explicitamente, a variação do comprimento dos lados desses quadriláteros (figura 189). Observe-se que, na resolução da tarefa **2.3.** pelo aluno MG (figura 189), o aluno, em particular, evidencia, pelo desenho elaborado, o seu entendimento em relação aos sucessivos retângulos que são formados pelos movimentos de avanço e recuo dos pares; ora, esta perceção dos vários quadriláteros formados pelos movimentos dos pares contrasta com o raciocínio patente na resolução apresentada na figura 188. Um pequeno número de alunos da turma conseguiu desenvolver uma resolução completa da tarefa **2.3.**, tendo integrado e explorado, com sucesso, todas as questões de exploração propostas (figura 190). Esses alunos mostraram-se capazes de explorar, com êxito, a variação do comprimento dos lados dos quadriláteros - $]0, \sqrt{2}]$ -, tendo sido esta a questão que criou maiores dificuldades na resolução da tarefa. Para terminar, há, ainda, a registar um caso único de um aluno que não apresentou qualquer resolução.



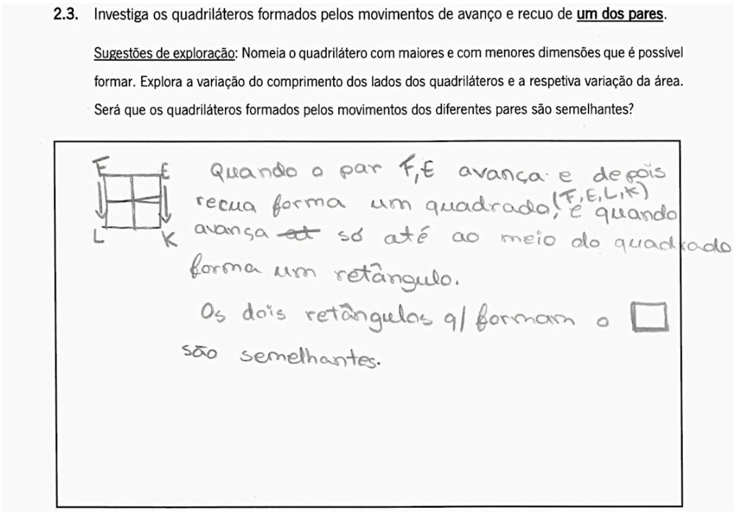
2.3. Investiga os quadriláteros formados pelos movimentos de avanço e recuo de **um dos pares**.

Sugestões de exploração: Nomeia o quadrilátero com maiores e com menores dimensões que é possível formar. Explora a variação do comprimento dos lados dos quadriláteros e a respetiva variação da área. Será que os quadriláteros formados pelos movimentos dos diferentes pares são semelhantes?

Na posição inicial o par forma um quadrado e, num certo momento da dança o par forma um retângulo, c/ menor área do que o quadrado.

Os quadriláteros formados pelos movimentos dos diferentes pares são semelhantes.

Figura 187. Resolução da tarefa **2.3.** pelo aluno CA do 8.º ano, turma δ.



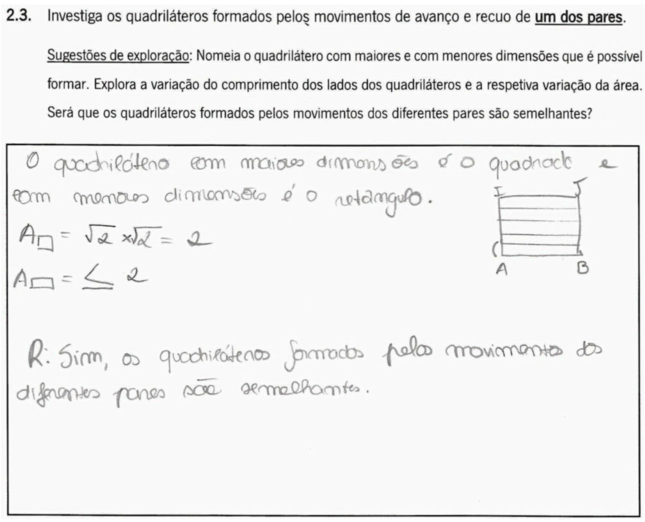
2.3. Investiga os quadriláteros formados pelos movimentos de avanço e recuo de **um dos pares**.

Sugestões de exploração: Nomeia o quadrilátero com maiores e com menores dimensões que é possível formar. Explora a variação do comprimento dos lados dos quadriláteros e a respetiva variação da área. Será que os quadriláteros formados pelos movimentos dos diferentes pares são semelhantes?

Quando o par F,E avança e depois recua forma um quadrado (F,E,L,K) e quando avança ~~at~~ só até ao meio do quadrado forma um retângulo.

Os dois retângulos q/ formam o □ são semelhantes.

Figura 188. Resolução da tarefa **2.3.** pelo aluno MP do 8.º ano, turma δ.



2.3. Investiga os quadriláteros formados pelos movimentos de avanço e recuo de **um dos pares**.

Sugestões de exploração: Nomeia o quadrilátero com maiores e com menores dimensões que é possível formar. Explora a variação do comprimento dos lados dos quadriláteros e a respetiva variação da área. Será que os quadriláteros formados pelos movimentos dos diferentes pares são semelhantes?

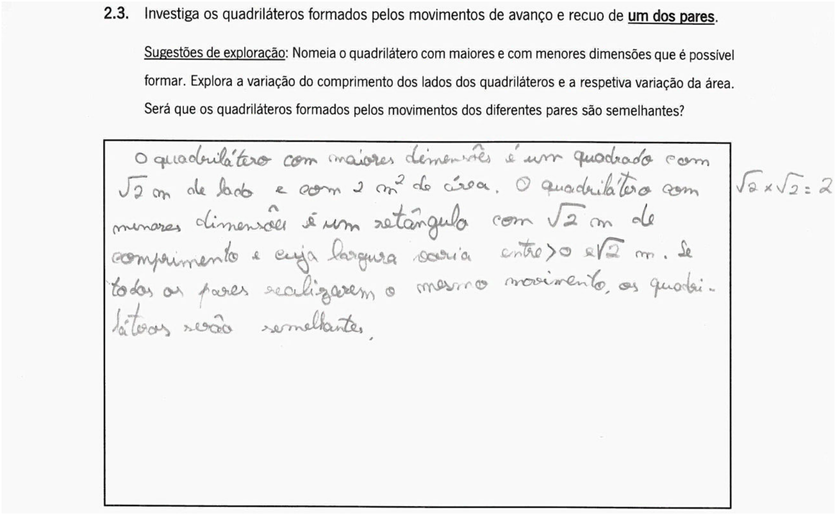
O quadrilátero com maiores dimensões é o quadrado e com menores dimensões é o retângulo.

$A_{\square} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

$A_{▭} = \leq 2$

R: Sim, os quadriláteros formados pelos movimentos dos diferentes pares são semelhantes.

Figura 189. Resolução da tarefa **2.3.** pelo aluno MG do 8.º ano, turma δ.


2.3. Investiga os quadriláteros formados pelos movimentos de avanço e recuo de **um dos pares**.

Sugestões de exploração: Nomeia o quadrilátero com maiores e com menores dimensões que é possível formar. Explora a variação do comprimento dos lados dos quadriláteros e a respetiva variação da área. Será que os quadriláteros formados pelos movimentos dos diferentes pares são semelhantes?

O quadrilátero com maiores dimensões é um quadrado com $\sqrt{2}$ cm de lado e com 2 cm^2 de área. O quadrilátero com menores dimensões é um retângulo com $\sqrt{2}$ cm de comprimento e cuja largura varia entre >0 e $\sqrt{2}$ cm. Se todos os pares realizarem o mesmo movimento, os quadriláteros serão semelhantes.

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

Figura 190. Resolução da tarefa **2.3.** pelo aluno LS do 8.º ano, turma δ.

Na tarefa **2.4.**, os alunos não demonstraram dificuldades na interpretação do enunciado da tarefa, tendo iniciado a sua exploração autonomamente. De um modo geral, a exploração da menor distância entre dois dançarinos de pares diferentes durante os movimentos de avanço e recuo realizados em simultâneo por esses pares foi mais acessível para os alunos do que a exploração da maior distância. Uma tendência geral dos alunos da turma foi a de focarem a sua atenção, quase exclusivamente, nas distâncias entre dançarinos de pares diferentes que ficavam situados frente a frente, desconsiderando, dessa forma, as distâncias diagonais. Ora, isso teve particular influência na parte da tarefa **2.4.** relativa à exploração da maior distância entre dois dançarinos de pares diferentes, tendo originado incorreções. A maioria dos alunos começou por, incorretamente, identificar, como sendo a maior distância, a distância entre dois dançarinos de pares diferentes localizados frente a frente - e não diagonalmente -, no momento em que eles ocupavam as posições iniciais - ou seja, ou antes de iniciarem o movimento de avanço, ou após executarem o movimento de recuo, voltando a essas posições. Mediante essa falha na identificação da maior distância entre dois dançarinos de pares diferentes durante os movimentos de avanço e recuo, optou-se por intervir junto dos diferentes alunos, provocando-os no sentido de eles próprios identificarem uma distância maior do que aquela que haviam considerado. Nessas interações diretas com os alunos, houve várias ocasiões em que os alunos expressaram ter ficado indecisos entre a distância que haviam apontado e a distância diagonal, isto é, a distância entre dois dançarinos de pares diferentes localizados, não frente a frente, mas sim diagonalmente, no momento em que eles estavam nas posições iniciais. Não se mostrando, na sua maioria, convictos de qual seria a distância maior, desafiou-se os alunos a calcularem ambas as distâncias, para que assim pudessem compará-las e tirassem as suas ilações. Alguns alunos tiveram dúvidas no cálculo da distância diagonal, mas, no geral, conseguiram superá-las.

Ao longo da exploração da tarefa **2.4.**, as intervenções realizadas junto dos alunos permitiram apoiar diretamente os alunos e desafiá-los, quase de imediato, a refletirem, e, por vezes, a reformularem as suas ideias, o que contribuiu para uma exploração mais enriquecedora da tarefa. Não obstante, evidenciaram-se diferenças ao nível das resoluções da tarefa **2.4.** apresentadas pelos alunos da turma. Alguns alunos falharam na identificação da maior e da menor distâncias entre dois dançarinos solicitada na tarefa **2.4.**, por assumirem, erroneamente, que as distâncias entre dois dançarinos de pares diferentes colocados frente a frente e colocados na diagonal eram iguais; para além disso, os alunos em causa não calcularam a medida das distâncias entre dois dançarinos de pares diferentes que identificaram como sendo as maiores - quando os dançarinos estavam na posição inicial - e como sendo as menores - quando os dançarinos estavam na posição limite do avanço -, exibindo uma resolução incompleta (figura 191). Atente-se que na resolução da tarefa **2.4.** pelo aluno FS (figura 191), o aluno, em particular, não emprega as mesmas letras usadas na figura patente na tarefa **2.** para representar as posições limite do avanço dos dançarinos; ao invés, ele reutiliza as letras usadas nessa figura para representar as posições iniciais de dois pares de dançarinos - A, B, E e F - e aproxima-as, para representar o avanço desses dançarinos. Ora, isso pode indicar que o aluno em causa não percebeu a representação, feita na figura da tarefa **2.**, das posições que os dançarinos podem assumir no decurso dos seus movimentos de avanço e recuo. Outros alunos, em **2.4.**, foram bem-sucedidos na exploração da maior distância entre dois dançarinos de pares diferentes, tendo identificado claramente essa distância e calculado corretamente a sua medida, mas, por sua vez, os alunos falharam no reconhecimento da menor distância entre dois dançarinos de pares diferentes, e, por consequência, erraram, também, na indicação da respetiva medida (figura 192). Os alunos em questão parecem ter tido em consideração, somente, as posições iniciais dos dançarinos, não tendo percecionado que, no decorrer do movimento de avanço, a distância entre dois dançarinos de pares diferentes diminui progressivamente, e que, ao longo do movimento de recuo, ocorre o inverso. Em contraste com os anteriores, outros alunos da turma, na resolução da tarefa **2.4.**, indicaram, corretamente, as medidas da maior e da menor distâncias entre dois dançarinos de pares diferentes - respetivamente, $\sqrt{20}\ m$ e $\sqrt{2}\ m$ -, mas, apesar disso, esses alunos não explicitaram, na sua resolução, entre que posições dos dançarinos é que podiam ser definidas essas mesmas distâncias (figura 193). Certos alunos desenvolveram uma resolução da tarefa **2.4.** idêntica à anterior, mas, no caso, os alunos tentaram simplificar o radical correspondente à medida da maior distância - $\sqrt{20}\ m$ -, tendo determinado um resultado incorreto - $4\sqrt{5}\ m$, em vez de $2\sqrt{5}\ m$ (figura 194). Numa situação diferente da anterior, o erro dos alunos que determinou um resultado incorreto para a medida da maior distância foi terem considerado que a distância entre dois dançarinos de pares diferentes localizados frente a frente quando ocupavam as posições iniciais era $\sqrt{6}\,m$, quando, na verdade, isso não equivale a $3\sqrt{2}\,m$ (figura 195). Um pequeno número de alunos expôs uma resolução totalmente correta da tarefa **2.4.**, tendo explorado, com êxito, quer a maior, como a menor distância entre dois dançarinos de pares diferentes (figura 196).

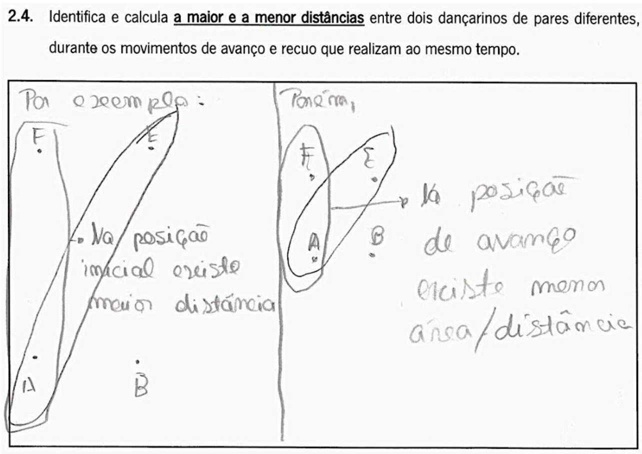


Figura 191. Resolução da tarefa **2.4.** pelo aluno FS do 8.º ano, turma δ.

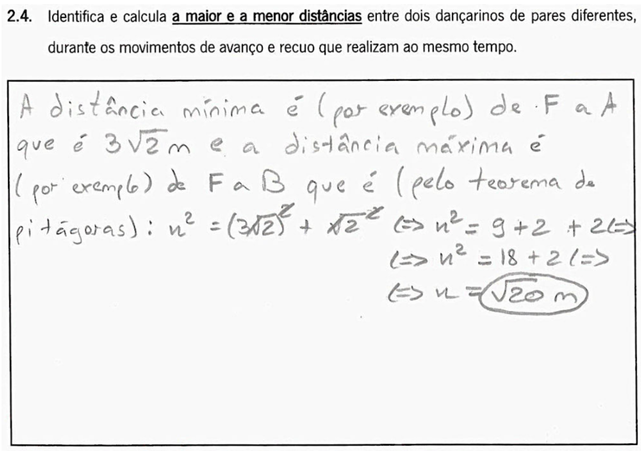


Figura 192. Resolução da tarefa **2.4.** pelo aluno RV do 8.º ano, turma δ.

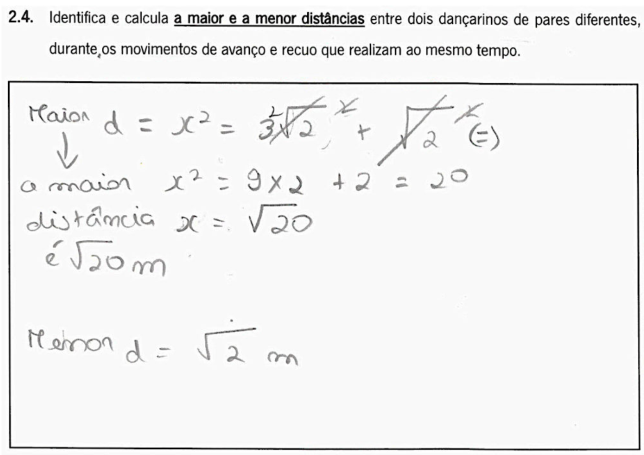
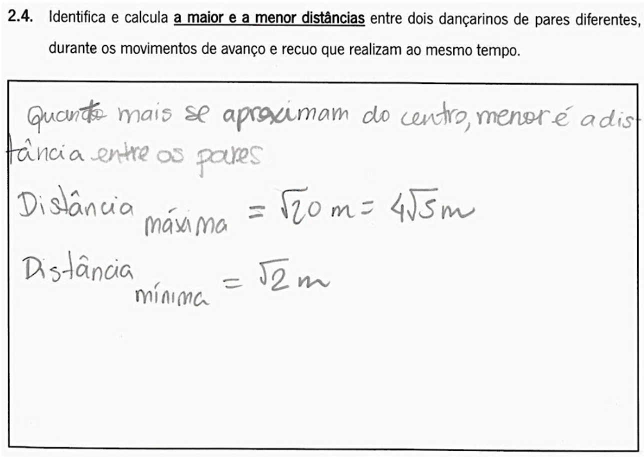


Figura 193. Resolução da tarefa **2.4.** pelo aluno LD do 8.º ano, turma δ.



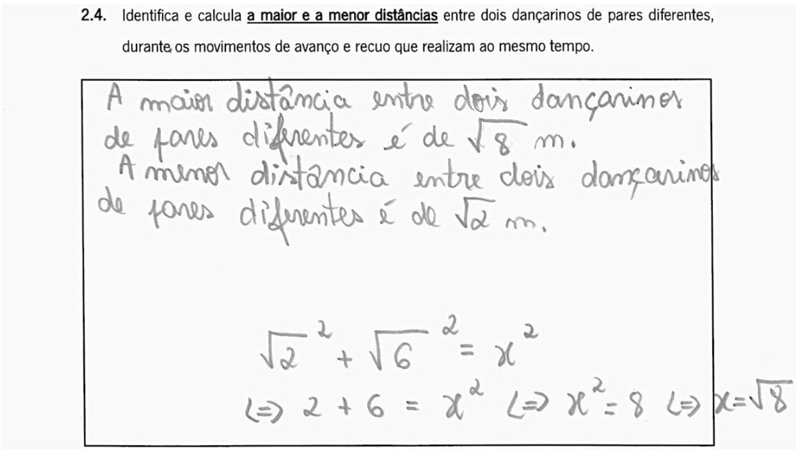
2.4. Identifica e calcula **a maior e a menor distâncias** entre dois dançarinos de pares diferentes, durante os movimentos de avanço e recuo que realizam ao mesmo tempo.

Quanto mais se aproximam do centro, menor é a distância entre os pares

$\text{Distância}_{\text{máxima}} = \sqrt{20}\,m = 4\sqrt{5}\,m$

$\text{Distância}_{\text{mínima}} = \sqrt{2}\,m$

Figura 194. Resolução da tarefa **2.4.** pelo aluno CA do 8.° ano, turma δ.



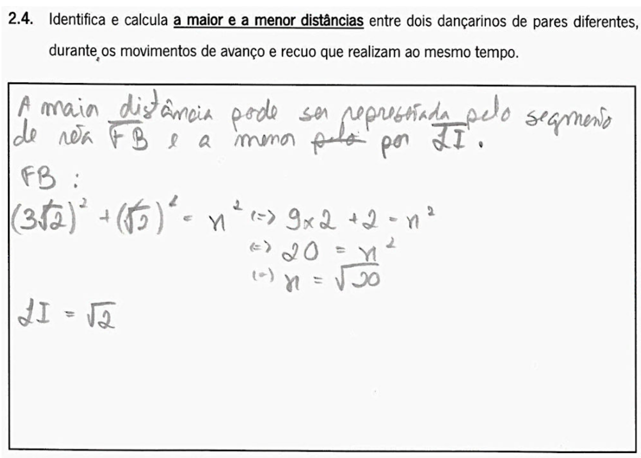
2.4. Identifica e calcula **a maior e a menor distâncias** entre dois dançarinos de pares diferentes, durante os movimentos de avanço e recuo que realizam ao mesmo tempo.

A maior distância entre dois dançarinos de pares diferentes é de $\sqrt{8}$ m.
A menor distância entre dois dançarinos de pares diferentes é de $\sqrt{2}$ m.

$\sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2 = x^2$

$\Leftrightarrow 2 + 6 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt{8}$

Figura 195. Resolução da tarefa **2.4.** pelo aluno PA do 8.° ano, turma δ.



2.4. Identifica e calcula **a maior e a menor distâncias** entre dois dançarinos de pares diferentes, durante os movimentos de avanço e recuo que realizam ao mesmo tempo.

A maior distância pode ser representada pelo segmento de reta $\overline{FB}$ e a menor ~~pela~~ por $\overline{JI}$.

FB :

$(3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = n^2 \Leftrightarrow 9 \times 2 + 2 = n^2$
$\Leftrightarrow 20 = n^2$
$\Leftrightarrow n = \sqrt{20}$

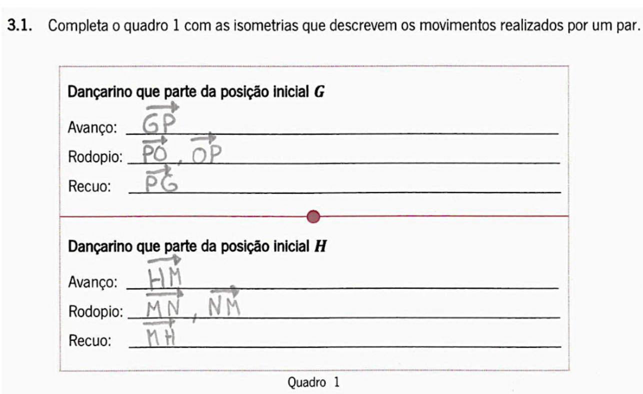
$JI = \sqrt{2}$

Figura 196. Resolução da tarefa **2.4.** pelo aluno LC do 8.° ano, turma δ.

O avanço dos alunos para a exploração da tarefa **3.** foi acontecendo em momentos diferentes. Nessa fase, aconselhou-se os alunos a lerem atentamente as informações que antecediam a tarefa, para que percecionassem melhor os movimentos da coreografia que, daí em diante, seriam analisados, designadamente os movimentos de avanço, rodopio e recuo realizados, no caso, pelos primeiros pares. Recorde-se que, na visualização do vídeo da dança que ocorreu no início da implementação pedagógica, tinha-se chamado a atenção dos alunos para o reconhecimento dos quatro movimentos que marcavam a coreografia da dança sob exploração, entre os quais os movimentos de avanço, rodopio e recuo. Ora, isso permitiu que os alunos identificassem mais facilmente os movimentos em causa, tendo por base as informações prévias à tarefa **3.**, e que fossem capazes de iniciar, autonomamente, a exploração da tarefa **3.1.**, não necessitando de esclarecimentos adicionais relativamente aos movimentos da dança referidos. Os alunos, atentando na figura apresentada na tarefa **3.**, que representa o caminho percorrido pelos primeiros pares de dançarinos no decurso dos movimentos de avanço, rodopio e recuo, deram início à exploração, em **3.1.**, das isometrias que descrevem os movimentos realizados por um desses pares. Mesmo tendo percebido o que era solicitado na tarefa **3.1.**, quase todos os alunos da turma, no início, se limitaram a indicar o nome das isometrias associadas aos movimentos de avanço, rodopio e recuo - respetivamente, translação, rotação e translação -, entendendo como terminada a resolução da tarefa. Mediante tal ocorrência, houve necessidade de intervir junto dos alunos, chamando a sua atenção para a necessidade de caracterizarem essas isometrias, a partir de determinados elementos que as definem. Na sua maioria, os alunos, quando interpelados no sentido de completarem a descrição das isometrias que haviam nomeado, mostraram ter conhecimento dos elementos que permitem caracterizar essas isometrias - no caso da translação, o vetor, e, no caso da rotação, o centro de rotação, a amplitude do ângulo associado ao movimento de rotação, e o sentido do movimento (este último, menos imediato). As interações estabelecidas com os alunos, e até mesmo as interações criadas entre os próprios alunos, fizeram com que a maioria deles refletisse sobre a resposta dada na tarefa **3.1.**, e tentasse reformulá-la. Foi, justamente, no decorrer da atividade dos alunos que começaram a surgir, com alguma frequência, dúvidas relativas a certas particularidades da execução dos movimentos de avanço, rodopio e recuo pelos primeiros pares, com particular incidência no sentido do movimento rotacional realizado na zona central. Atendendo a isso, considerou-se importante proceder a uma nova visualização, em plenário, da parte do vídeo da dança correspondente à execução dos movimentos de avanço, rodopio e recuo, de modo que os alunos tivessem oportunidade de esclarecer as dúvidas emergentes, e pudessem concluir a resolução.

Considerando as resoluções da tarefa **3.1.** apresentadas pelos alunos, identificaram-se diferenças. Um pequeno número de alunos, em **3.1.**, não designou as isometrias que descrevem os movimentos de avanço, rodopio e recuo, tendo indicado, para cada um desses movimentos, vetores (figura 197). Ora, se no caso dos movimentos de avanço e recuo - ambos associados a translações -, os vetores indicados foram apropriados à descrição do movimento retilíneo em causa, no caso do movimento de rodopio -

associado a uma rotação - a representação feita com base em dois vetores foi inteiramente desadequada, revelando incompreensão, por parte dos alunos, do movimento rotacional executado pelos dançarinos. Exibindo uma resolução da tarefa **3.1.** semelhante à anterior, alguns alunos designaram, com correção, as isometrias associadas aos movimentos de avanço, rodopio e recuo realizados pelos dançarinos - respetivamente, translação, rotação e translação -, mas, ao caracterizarem cada uma dessas isometrias, os alunos definiram vetores, quer para as translações, como para a rotação (figura 198). Uma vez mais, sobressai a falta de compreensão dos alunos em relação ao movimento de rodopio realizado na dança. Em contraste com os anteriores, outros alunos da turma revelaram-se mais competentes na exploração, em **3.1.**, das isometrias que descrevem os movimentos de avanço, rodopio e recuo efetuados por um par, mais notoriamente em relação ao movimento de rodopio - o que criou mais dificuldades aos alunos. No que toca à exploração dos movimentos de avanço e recuo realizados pelos dois dançarinos, os alunos em causa foram igualmente bem-sucedidos, tendo designado a isometria translação para descrever esses movimentos, e tendo, ainda, indicado corretamente os vetores que definem as várias translações. Já no caso do movimento de rodopio realizado pelos dançarinos, a exploração dos alunos divergiu mais. Alguns dos alunos em causa, ao definirem, em **3.1.**, as rotações que descrevem o movimento de rodopio executado pelos dois dançarinos, designaram corretamente a amplitude dos ângulos dessas rotações $(360°)$, porém não definiram os centros dessas rotações, e, para além disso, apontaram, erroneamente, sentidos opostos para o movimento rotacional efetuado em simultâneo pelos dançarinos (figura 199). Outros alunos, na tarefa **3.1.**, não só designaram corretamente a amplitude dos ângulos das rotações que descrevem o movimento de rodopio executado pelos dois dançarinos $(360°)$, como também definiram, acertadamente, o centro de cada uma dessas rotações $(X; W)$, não tendo, no entanto, explicitado o sentido do movimento rotacional executado pelos dançarinos - sentido negativo (figura 200). Certos alunos conseguiram definir todos os elementos que permitem caracterizar as rotações efetuadas pelos dançarinos ao rodopiarem, expondo uma resolução totalmente correta da tarefa **3.1.** (figura 201).


3.1. Completa o quadro 1 com as isometrias que descrevem os movimentos realizados por um par.

Dançarino que parte da posição inicial *G*

Avanço: $\overrightarrow{GP}$

Rodopio: $\overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{OP}$

Recuo: $\overrightarrow{PG}$

Dançarino que parte da posição inicial *H*

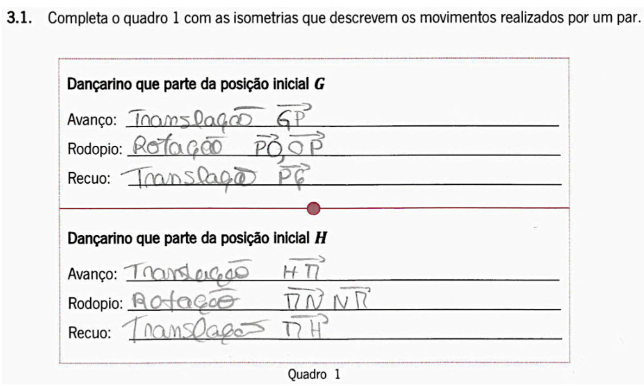
Avanço: $\overrightarrow{HM}$

Rodopio: $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NM}$

Recuo: $\overrightarrow{MH}$

Quadro 1

Figura 197. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno GA do 8.º ano, turma δ.



3.1. Completa o quadro 1 com as isometrias que descrevem os movimentos realizados por um par.

Dançarino que parte da posição inicial *G*

Avanço: Translação $\overrightarrow{GP}$

Rodopio: Rotação $\overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{OP}$

Recuo: Translação $\overrightarrow{PG}$

Dançarino que parte da posição inicial *H*

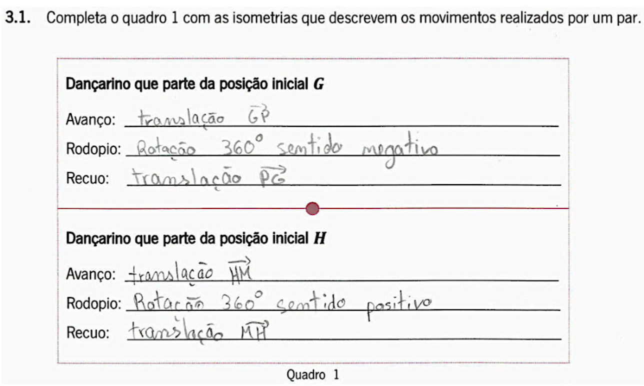
Avanço: Translação $\overrightarrow{HM}$

Rodopio: Rotação $\overrightarrow{MN}$ $\overrightarrow{NM}$

Recuo: Translação $\overrightarrow{MH}$

Quadro 1

Figura 198. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno FS do 8.º ano, turma δ.



3.1. Completa o quadro 1 com as isometrias que descrevem os movimentos realizados por um par.

Dançarino que parte da posição inicial *G*

Avanço: translação $\overrightarrow{GP}$

Rodopio: Rotação 360° sentido negativo

Recuo: translação $\overrightarrow{PG}$

Dançarino que parte da posição inicial *H*

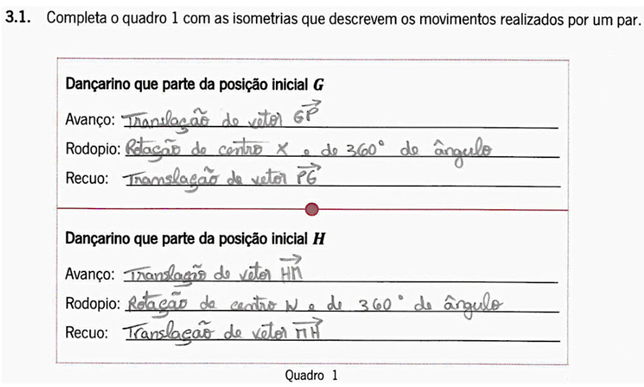
Avanço: translação $\overrightarrow{HM}$

Rodopio: Rotação 360° sentido positivo

Recuo: translação $\overrightarrow{MH}$

Quadro 1

Figura 199. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno JI do 8.º ano, turma δ.



3.1. Completa o quadro 1 com as isometrias que descrevem os movimentos realizados por um par.

Dançarino que parte da posição inicial *G*

Avanço: Translação do vetor $\overrightarrow{GP}$

Rodopio: Rotação de centro X e de 360° de ângulo

Recuo: Translação de vetor $\overrightarrow{PG}$

Dançarino que parte da posição inicial *H*

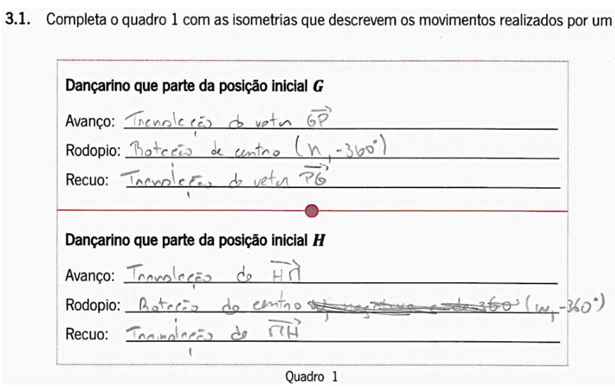
Avanço: Translação de vetor $\overrightarrow{HM}$

Rodopio: Rotação de centro N e de 360° de ângulo

Recuo: Translação de vetor $\overrightarrow{MH}$

Quadro 1

Figura 200. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno CM do 8.º ano, turma δ.



3.1. Completa o quadro 1 com as isometrias que descrevem os movimentos realizados por um par.

Dançarino que parte da posição inicial *G*

Avanço: Translação de vetor $\overrightarrow{GP}$

Rodopio: Rotação de centro (N, -360°)

Recuo: Translação de vetor $\overrightarrow{PG}$

Dançarino que parte da posição inicial *H*

Avanço: Translação de $\overrightarrow{HM}$

Rodopio: Rotação do centro ~~[illegible] de 360~~ (N, -360°)

Recuo: Translação de $\overrightarrow{MH}$

Quadro 1

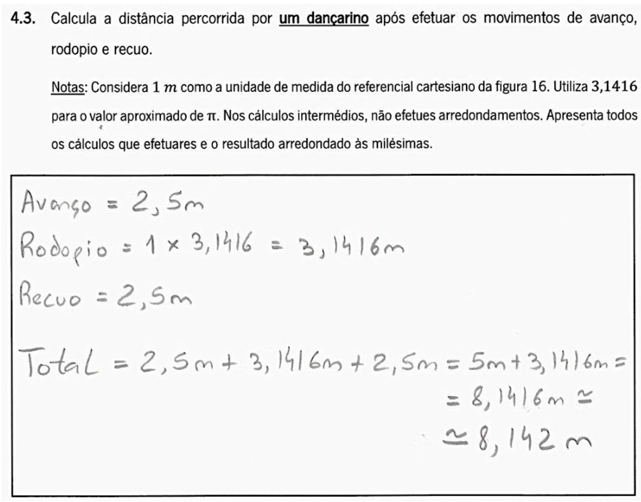
Figura 201. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno BA do 8.º ano, turma δ.

Avançando para a tarefa **4.**, os alunos observaram o referencial cartesiano aí apresentado, a partir do qual seriam estudados os movimentos de avanço, rodopio e recuo realizados pelos segundos pares. Tomando como referência um só dançarino desses segundos pares - o que partia da posição inicial F -, os alunos exploraram, em **4.1.**, as coordenadas de F e dos seus transformados - $F', F'', F''' \ e \, F''''$ -, pelas isometrias que descreviam os movimentos de avanço, rodopio e recuo efetuados pelo dançarino. Ora, uma das problemáticas emergentes prendeu-se com o facto de os alunos não estarem familiarizados com a nomenclatura usada na tarefa **4.1.** para representar as referidas isometrias, que apareciam enunciadas da seguinte forma: $T_{\overrightarrow{QR}}$; $R_{(Y,-180°)}$; $R_{(Y,-180°)}$; e $T_{\overrightarrow{-QR}}$. Mediante o disposto, tornou-se necessário esclarecer, em plenário, o significado dessa simbologia, usada para representar as isometrias que descreviam os movimentos de avanço, rodopio e recuo efetuados pelo dançarino que partia de F. Ora, ao invés de se ter fornecido, diretamente, essa informação aos alunos, e considerando que eles, não só já haviam visualizado a execução dos movimentos de avanço, rodopio e recuo no vídeo da dança, como também já tinham explorado, na tarefa precedente, as isometrias associadas à execução desses movimentos pelos primeiros pares de dançarinos, questionou-se os alunos no sentido de serem eles próprios a reconhecerem as isometrias enunciadas na tarefa sob uma forma pouco conhecida para eles. Dessa maneira, foi possível envolver mais os alunos da turma na dilucidação da informação apresentada na tarefa **4.1.**, cuja incompreensão os havia impossibilitado de concretizarem a sua atividade individual. Uma vez superada essa dificuldade transversal à turma, os alunos prosseguiram a exploração da tarefa. No decorrer da resolução da tarefa **4.1.**, os alunos da turma experimentaram alguns constrangimentos, em primeiro lugar, na descoberta das coordenadas do transformado F', pela translação associada ao vetor $\overrightarrow{QR}$; isto porque, no referencial cartesiano presente na tarefa **4.**, o vetor $\overrightarrow{QR}$ não se encontrava representado junto ao ponto F, tornando menos imediata a localização de F', que resultava de $F + \overrightarrow{QR}$. Os alunos da turma enfrentaram dificuldades, também, na determinação das coordenadas do transformados F'' e F''', pela rotação de centro Y e amplitude $-180°$, não tendo sido fácil, para eles, conseguirem visualizar/representar o efeito geométrico dessas isometrias, e, por conseguinte, determinarem, no referencial cartesiano patente na tarefa **4.**, a localização tanto de F'' como de F'''. Ora, os constrangimentos vivenciados pelos alunos aquando da resolução da tarefa **4.1.** fizeram com que, nessa fase, as interações entre os alunos aumentassem espontaneamente, os quais procuravam confrontar as suas ideias e pensamentos com as dos seus pares, por forma a superarem as dificuldades. Essas interações aluno-aluno, assim como o auxílio proporcionado aos alunos durante a exploração da tarefa **4.1.**, foi essencial para que eles conseguissem alcançar uma exploração bem-sucedida da mesma, o que, na maior parte dos casos, acabou mesmo por ocorrer, não tendo havido erros de maior a registar.

Na tarefa **4.2.**, a maior parte dos alunos da turma manifestou dificuldades na interpretação do respetivo enunciado, não tendo sido capaz de compreender, por si, o que era requerido na tarefa. Ora, isso fez com que fosse necessário clarificar, junto dos diferentes alunos, o que era esperado que fizessem nessa tarefa, cuja enunciação se revelou pouco compreensível e precisa para a maioria dos alunos. Nalguns casos, os alunos, não tendo conseguido resolver a tarefa **4.2.**, avançaram para a tarefa seguinte, tendo, depois, voltado a essa tarefa no momento em que foram questionados acerca da razão pela qual não a tinham resolvido, e, no seguimento do qual, lhes foi dado apoio para a compreensão do enunciado. Em termos gerais, o auxílio prestado aos alunos durante a exploração da tarefa **4.2.** permitiu que eles fossem bem-sucedidos na resolução da mesma, associando, corretamente, os movimentos de avanço, rodopio e recuo concretizados pelos dançarinos que partem das posições iniciais A, B e E aos pontos simétricos de $F', F'', F''' \; e \, F''''$ em relação ao eixo dos yy, ao eixo dos xx, e à origem do referencial. Não obstante, as explicações que foram fornecidas aos alunos - sem as quais, eles, de uma forma geral, não teriam sido capazes de resolver a tarefa **4.2.** - acabaram por reduzir, significativamente, o desafio da referida tarefa, tornando a sua exploração matematicamente menos rica e produtiva para os alunos.

Em contraste com a tarefa anteriormente analisada, na tarefa **4.3.**, os alunos não expressaram dúvidas na interpretação do enunciado da mesma, tendo compreendido o que era solicitado fazerem. Dessa forma, os alunos iniciaram a exploração da tarefa autonomamente, e sem necessitarem de apoio. Para calcularem, em **4.3.**, a distância percorrida por um dançarino após efetuar os movimentos de avanço, rodopio e recuo, vários alunos recorreram à figura presente na tarefa **3.**, na qual se encontrava representado o caminho percorrido pelos primeiros pares nos movimentos de avanço, rodopio e recuo. Ora, apesar de o caminho assinalado nessa figura ser referente à movimentação, não dos segundos, mas dos primeiros pares, essa representação concreta permitiu que os alunos percecionassem melhor o caminho percorrido, cuja distância se afigurava igual no caso dos primeiros e dos segundos pares. Baseando-se na referida figura, os alunos conseguiram visualizar a linha gerada pelos movimentos de avanço, rodopio e recuo executados por um dado dançarino - movimentos retilíneo, circular e retilíneo, respetivamente - e, no seguimento, foram capazes de explorar, em **4.3.**, o comprimento desse trajeto. De um modo geral, a porção retilínea do trajeto não criou constrangimentos à atividade dos alunos na tarefa **4.3.**; em relação ao comprimento do trajeto circular, os alunos, em geral, tinham conhecimento de como calcular o perímetro do círculo, tendo surgido dúvidas, depois, quanto ao diâmetro do círculo, a respeito do qual alguns alunos se mostraram hesitantes entre as medidas $0{,}5 \; m$, $1 \; m$, e, até, $2 \; m$. O recurso, de novo, à representação do trajeto feita na figura da tarefa **3.**, assim como trocas de ideias estabelecidas entre os alunos, permitiram que eles chegassem à medida correta do diâmetro do círculo.

A maior parte dos alunos da turma apresentou uma resolução completamente correta da tarefa **4.3.**, tendo calculado, com êxito, a distância total percorrida por um dançarino após efetuar os movimentos de avanço, rodopio e recuo, e tendo apresentado o resultado arredondado às milésimas (figura 202). Outros alunos, em **4.3.**, erraram na determinação da distância percorrida por um dançarino após efetuar os movimentos de avanço, rodopio e recuo, porque excluíram, do cálculo, a distância relativa ao último movimento, tendo apenas considerado a distância correspondente aos movimentos de avanço e rodopio; para além disso, esses alunos não arredondaram o resultado que obtiveram às milésimas (figura 203). Por sua vez, certos alunos da turma, na sua resolução da tarefa **4.3.**, calcularam, unicamente, a distância relativa ao movimento de rodopio efetuado por um dançarino, tendo, dessa forma, excluído a distância referente aos dois movimentos retilíneos - movimentos de avanço e de recuo - realizados pelo dançarino; ademais, os alunos em causa apresentaram o resultado final mal arredondado às milésimas (figura 204).



4.3. Calcula a distância percorrida por <u>**um dançarino**</u> após efetuar os movimentos de avanço, rodopio e recuo.

Notas: Considera $1\ m$ como a unidade de medida do referencial cartesiano da figura 16. Utiliza $3{,}1416$ para o valor aproximado de π. Nos cálculos intermédios, não efetues arredondamentos. Apresenta todos os cálculos que efetuares e o resultado arredondado às milésimas.

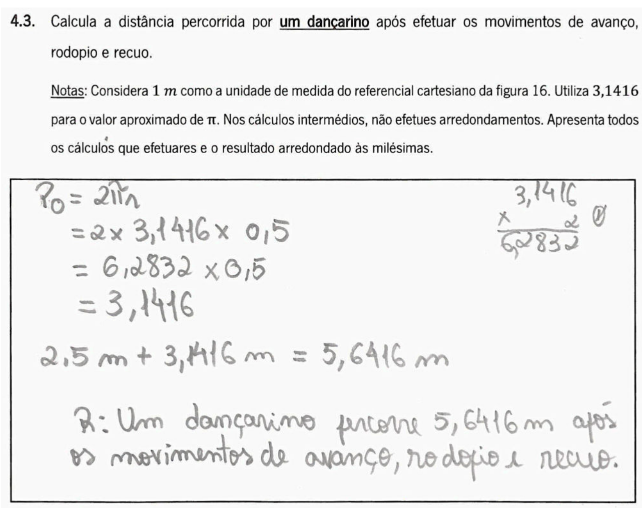
Avanço = 2,5m

Rodopio = 1 × 3,1416 = 3,1416m

Recuo = 2,5m

Total = 2,5m + 3,1416m + 2,5m = 5m + 3,1416m =
= 8,1416m ≃
≃ 8,142 m

Figura 202. Resolução da tarefa **4.3.** pelo aluno RV do 8.º ano, turma δ.



4.3. Calcula a distância percorrida por <u>**um dançarino**</u> após efetuar os movimentos de avanço, rodopio e recuo.

Notas: Considera $1\ m$ como a unidade de medida do referencial cartesiano da figura 16. Utiliza $3{,}1416$ para o valor aproximado de π. Nos cálculos intermédios, não efetues arredondamentos. Apresenta todos os cálculos que efetuares e o resultado arredondado às milésimas.

$P_O = 2\pi r$
$= 2 \times 3{,}1416 \times 0{,}5$
$= 6{,}2832 \times 0{,}5$
$= 3{,}1416$

$$\begin{array}{r} 3{,}1416 \\ \times \quad 2 \\ \hline 6{,}2832 \end{array}$$

2,5 m + 3,1416 m = 5,6416 m

R: Um dançarino percorre 5,6416 m após os movimentos de avanço, rodopio e recuo.

Figura 203. Resolução da tarefa **4.3.** pelo aluno PA do 8.º ano, turma δ.

4.3. Calcula a distância percorrida por **<u>um dançarino</u>** após efetuar os movimentos de avanço, rodopio e recuo.

<u>Notas</u>: Considera $1\ m$ como a unidade de medida do referencial cartesiano da figura 16. Utiliza $3{,}1416$ para o valor aproximado de π. Nos cálculos intermédios, não efetues arredondamentos. Apresenta todos os cálculos que efetuares e o resultado arredondado às milésimas.

$P_0 = d \times \pi$

$P_0 = 0{,}5 + 0{,}5 \times 3{,}1416$

$P_0 = 1 \times 3{,}1416$

$P_0 = 3{,}1416$

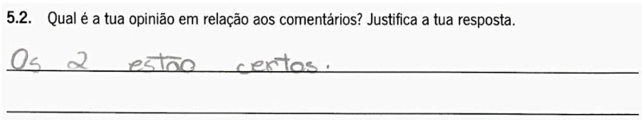
$P_0 \approx 3{,}141$

Figura 204. Resolução da tarefa **4.3.** pelo aluno FS do 8.º ano, turma δ.

Ainda acerca da tarefa **4.3.**, importa referenciar o caso único de um aluno que não apresentou qualquer resolução, tratando-se do mesmo aluno que, em **2.3.**, também não tinha explorado o problema.

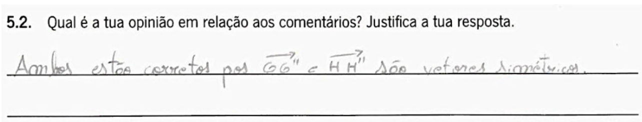
No avanço para a tarefa **5.**, os alunos leram a informação que precede a tarefa, relativa à execução, pelos pares, do movimento de “trespasse” - o último movimento característico da dança em estudo. Dado que, durante a visualização do vídeo da dança que ocorreu no início da implementação pedagógica, tinha havido o cuidado de chamar a atenção dos alunos para o reconhecimento dos quatro movimentos que marcavam a coreografia da dança - entre os quais, o movimento de “trespasse” -, e também por uma questão de economia de tempo, optou-se por não repetir a visualização da parte do vídeo da dança relativa à execução desse movimento, que seria objeto de exploração ao longo das tarefas subsequentes. Na tarefa **5.**, os alunos observaram a figura aí exposta, que representa, a partir de vetores, uma parte do caminho percorrido pelos primeiros pares no decorrer do movimento de “trespasse”. Posteriormente, os alunos foram confrontados, em **5.1.**, com duas opiniões discordantes acerca de alguns dos vetores - e respetiva soma - usados nessa figura. No seguimento, os alunos iniciaram a exploração da tarefa **5.2.**, na qual é requerida a sua opinião, devidamente justificada, em relação aos dois comentários em causa. Ao acompanhar-se a atividade dos alunos na tarefa **5.2.**, foi possível perceber que muitos alunos ficaram relutantes em relação ao facto de ambos os comentários poderem estar certos, hesitando no momento da resposta, por estarem convencidos de que apenas um dos dois comentários deveria ser o correto, em detrimento do outro, que seria erróneo. Nessas ocasiões, foi importante enfatizar, junto dos alunos, que ambos os comentários podiam estar corretos, deixando-os, assim, mais confiantes para a resolução. Na resolução da tarefa **5.2.**, a totalidade dos alunos da turma acabou por concluir, corretamente, que os dois comentários estavam corretos; no entanto, nem todos os alunos foram capazes de fundamentar devidamente a sua resposta, tendo-se verificado alguma disparidade ao nível das justificações registadas.

Um pequeno número de alunos da turma não justificou a resposta dada na tarefa **5.2.** (figura 205). Outros alunos da turma, também em número reduzido, apresentaram uma justificação incorreta na tarefa **5.2.**, referindo que os vetores $\overrightarrow{\mathrm{GG''}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{HH''}}$ eram simétricos, em vez de equipolentes (figura 206). Certos alunos, em **5.2.**, formularam uma justificação ineficaz para a sua resposta, tendo explanando um único argumento - o de que o vetor $\overrightarrow{\mathrm{GG''}}$ podia ser deslocado -, que, mesmo sendo legítimo, se revela insuficiente para fundamentar a validade de qualquer um dos dois comentários em análise (figura 207). Numa situação diferente da anterior, a justificação elaborada pelos alunos em **5.2.** afigura-se ineficaz, no sentido em que os argumentos por eles apresentados assumem um caráter generalizado, carecendo, por isso, de concretização no contexto dos vetores - e respetiva soma - implicados na tarefa (figura 208). Outros alunos, na sua resolução da tarefa **5.2.**, apresentaram uma justificação incompleta da resposta, enunciando um só argumento - o da equipolência entre os vetores $\overrightarrow{\mathrm{GG'}}$, $\overrightarrow{\mathrm{G'G''}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{GG''}}$ e, respetivamente, os vetores $\overrightarrow{\mathrm{HH'}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{H'H''}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{HH''}}$ - apropriado para validar, somente, o segundo comentário (figura 209). Foram poucos os alunos capazes de formular, em **5.2.**, uma justificação completa da afirmação de que ambos os comentários estavam certos; esses alunos usaram dois argumentos válidos, escritos de forma clara - $\overrightarrow{\mathrm{GG'}} + \overrightarrow{\mathrm{G'G''}} = \overrightarrow{\mathrm{GG''}}$; $\overrightarrow{\mathrm{GG''}} = \overrightarrow{\mathrm{HH''}}$ -, e que se reportam a cada um dos comentários (figura 210).


5.2. Qual é a tua opinião em relação aos comentários? Justifica a tua resposta.

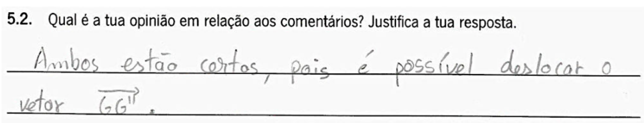
Os 2 estão certos.

Figura 205. Resolução da tarefa **5.2.** pelo aluno MP do 8.º ano, turma δ.


5.2. Qual é a tua opinião em relação aos comentários? Justifica a tua resposta.

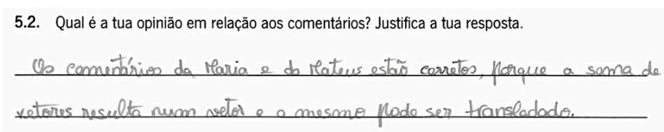
Ambos estão corretos pos $\overrightarrow{GG''}$ e $\overrightarrow{HH''}$ são vetores simétricos.

Figura 206. Resolução da tarefa **5.2.** pelo aluno SB do 8.º ano, turma δ.


5.2. Qual é a tua opinião em relação aos comentários? Justifica a tua resposta.

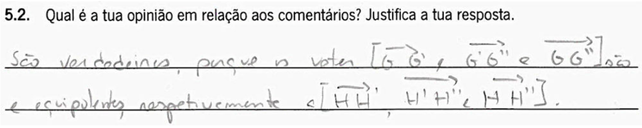
Ambos estão certos, pois é possível deslocar o vetor $\overrightarrow{GG''}$.

Figura 207. Resolução da tarefa **5.2.** pelo aluno JI do 8.º ano, turma δ.


5.2. Qual é a tua opinião em relação aos comentários? Justifica a tua resposta.

Os comentários da Maria e do Mateus estão corretos, porque a soma de vetores resulta num vetor e o mesmo pode ser transladado.

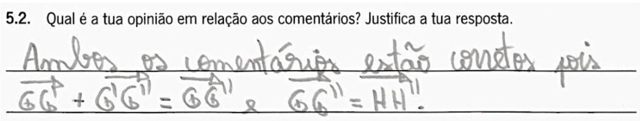
Figura 208. Resolução da tarefa **5.2.** pelo aluno CM do 8.º ano, turma δ.



5.2. Qual é a tua opinião em relação aos comentários? Justifica a tua resposta.

São verdadeiros, porque os votos $[\overrightarrow{GG'}, \overrightarrow{G'G''}$ e $\overrightarrow{GG''}]$ são e equipolentes respetivamente a $[\overrightarrow{HH'}, \overrightarrow{H'H''}$ e $\overrightarrow{HH''}]$.

Figura 209. Resolução da tarefa **5.2.** pelo aluno BA do 8.º ano, turma δ.



5.2. Qual é a tua opinião em relação aos comentários? Justifica a tua resposta.

Ambos os comentários estão corretos pois $\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'G''} = \overrightarrow{GG''}$ e $\overrightarrow{GG''} = \overrightarrow{HH''}$.

Figura 210. Resolução da tarefa **5.2.** pelo aluno PA do 8.º ano, turma δ.

Os alunos, em ritmos diferenciados, avançaram para a exploração da tarefa **5.3.**, a qual requeria que eles assinalassem, com um **X**, o(s) vetor(es) que resultava(m) de diferentes adições de vetores que surgiam elencadas num quadro. Ora, não tendo encontrado obstáculos na interpretação do enunciado da tarefa **5.3.**, os alunos iniciaram a sua exploração autonomamente, não tendo posto questões/dúvidas. Em termos gerais, os alunos da turma tiveram um bom desempenho na exploração da tarefa **5.3.**, mas, ainda assim, evidenciaram algumas falhas nas suas resoluções. Desde logo, uma falha praticamente transversal a todos os alunos da turma prendeu-se com o facto de os alunos, para cada uma das adições de vetores apresentadas no quadro da tarefa **5.3.**, assinalarem, unicamente, um vetor, ignorando, assim, outras opções que correspondiam a vetores equipolentes. Mesmo depois de os alunos terem explorado, na tarefa anterior, a questão da equipolência entre dois vetores - no caso, dos vetores $\overrightarrow{\mathrm{GG''}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{HH''}}$ -, tendo todos eles reconhecido validade à afirmação de que esses vetores eram iguais, eles não foram capazes de aplicar esse conhecimento na resolução da tarefa **5.3.**, tendo selecionado, para cada adição de vetores, um único vetor soma, mesmo tendo, nas opções, um vetor equipolente a esse (figura 211). Foram só dois os alunos que, na seleção das opções, consideraram os vetores equipolentes (figura 212). Ora, comparando-se as resoluções ilustradas nas figuras 211 e 212, é possível identificar, facilmente, as opções de vetores equipolentes que, na resolução apresentada pelo aluno JI (figura 211) - tal como nas resoluções da maioria dos alunos da turma - ficaram por assinalar, tornando incompleta a resolução; do referido, excetuam-se os dois casos em que a opção certa corresponde ao vetor nulo, de opção única. À parte a falha indicada - afeta à quase totalidade dos alunos da turma -, registaram-se outras incorreções, que apareceram com menor frequência. Entre essas incorreções, uma várias vezes repetida pelos alunos ocorreu na seleção da opção para a segunda adição dos vetores indicada no quadro da tarefa **5.3.** - $\overrightarrow{\mathrm{DK}} + \overrightarrow{\mathrm{JC'}}$ -, que vários alunos assinalaram, incorretamente, como sendo $\overrightarrow{\mathrm{D'D''}}$, em vez de $\overrightarrow{\mathrm{DD'}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{CC'}}$ (figura 213). Ora, mesmo tendo surgido outras incorreções nas resoluções da tarefa **5.3.** apresentadas pelos alunos, todas essas assumiram um caráter pontual, não se tendo repetido em número significativo.

5.3. Preenche o quadro 2, assinalando com um **X** o(s) vetor(es) que resulta(m) de cada uma das adições de vetores apresentadas.

	$\overrightarrow{CC'}$	$\overrightarrow{C'C''}$	$\overrightarrow{DD'}$	$\overrightarrow{D'D''}$	$\overrightarrow{GG'}$	$\overrightarrow{G'G''}$	$\overrightarrow{HH'}$	$\overrightarrow{H'H''}$	$\vec{0}$
$\overrightarrow{GL} + \overrightarrow{LG'}$					X				
$\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{JC'}$				X					
$\overrightarrow{H'H''} + \overrightarrow{D'D''}$									X
$\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IC'}$	X								
$\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{CC'}$									X
$\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{C'C''}$								X	

Quadro 2

Figura 211. Resolução da tarefa **5.3.** pelo aluno JI do 8.º ano, turma δ.

5.3. Preenche o quadro 2, assinalando com um **X** o(s) vetor(es) que resulta(m) de cada uma das adições de vetores apresentadas.

	$\overrightarrow{CC'}$	$\overrightarrow{C'C''}$	$\overrightarrow{DD'}$	$\overrightarrow{D'D''}$	$\overrightarrow{GG'}$	$\overrightarrow{G'G''}$	$\overrightarrow{HH'}$	$\overrightarrow{H'H''}$	$\vec{0}$
$\overrightarrow{GL} + \overrightarrow{LG'}$					X		X		
$\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{JC'}$	X		X						
$\overrightarrow{H'H''} + \overrightarrow{D'D''}$									X
$\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IC'}$	X		X						
$\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{CC'}$									X
$\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{C'C''}$						X		X	

Quadro 2

Figura 212. Resolução da tarefa **5.3.** pelo aluno PA do 8.º ano, turma δ.

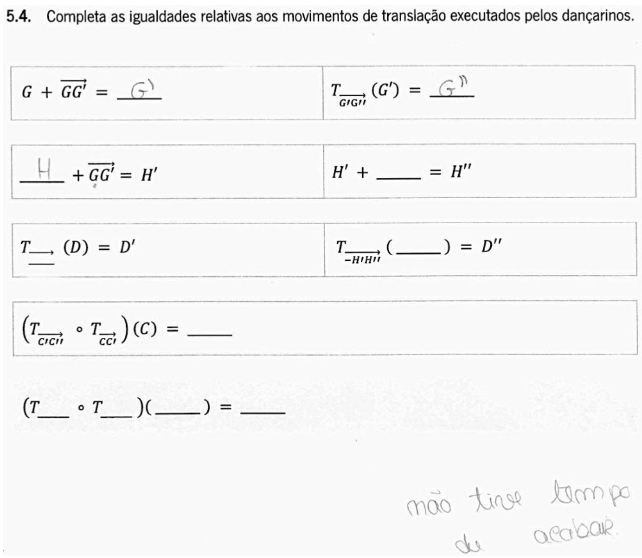
5.3. Preenche o quadro 2, assinalando com um **X** o(s) vetor(es) que resulta(m) de cada uma das adições de vetores apresentadas.

	$\overrightarrow{CC'}$	$\overrightarrow{C'C''}$	$\overrightarrow{DD'}$	$\overrightarrow{D'D''}$	$\overrightarrow{GG'}$	$\overrightarrow{G'G''}$	$\overrightarrow{HH'}$	$\overrightarrow{H'H''}$	$\vec{0}$
$\overrightarrow{GL} + \overrightarrow{LG'}$					X				
$\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{JC'}$				X					
$\overrightarrow{H'H''} + \overrightarrow{D'D''}$									X
$\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IC'}$	X								
$\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{CC'}$									X
$\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{C'C''}$								X	

Quadro 2

Figura 213. Resolução da tarefa **5.3.** pelo aluno LD do 8.º ano, turma δ.

Na tarefa **5.4.**, à semelhança da tarefa anterior, os alunos compreenderam o enunciado da mesma e, autonomamente, iniciaram a sua exploração. Desta vez, eles não manifestaram dúvidas relativamente à nomenclatura usada na tarefa para representar as translações e a composta de duas translações. Recorde-se que parte dessa nomenclatura já tinha surgido na tarefa **4.1.**, tendo sido alvo de esclarecimentos aquando da exploração dessa tarefa pelos alunos. Ora, isso permitiu que os alunos, desta vez, já fossem capazes de entender a simbologia usada na tarefa **5.4.**, sem precisarem de apoio. Na resolução da tarefa **5.4.**, os alunos completaram, com certa facilidade, as igualdades apresentadas, excetuando as duas últimas, que envolviam a composição de duas translações. Nestes dois casos, eles experimentaram mais dúvidas, tendo solicitado alguns esclarecimentos, especialmente em relação à ordem pela qual deveriam ser aplicadas as duas translações que compunham a translação composta. No caso da última igualdade presente na tarefa **5.4.**, formada pela composta de duas translações que os alunos deveriam completar integralmente, alguns deles, inicialmente, reagiram com estranheza, pensando que faltaria alguma informação na mesma; entretanto, esclareceu-se, junto desses alunos, que seriam eles próprios a preencher, na totalidade, essa igualdade, o que deu origem a respostas várias. Apesar dos constrangimentos, os alunos da turma, de uma forma geral, foram capazes de resolver a tarefa **5.4.** com sucesso, não se tendo verificado, nas suas resoluções, erros sistemáticos a evidenciar. Há, no entanto, a mencionar alguns casos de alunos que não concluíram a resolução da tarefa **5.4.**, tendo deixado algumas das igualdades aí apresentadas por completar. Nalguns casos, isso foi motivado pela falta de tempo para explorar a tarefa, conforme testemunha um aluno na sua resolução (figura 214).


5.4. Completa as igualdades relativas aos movimentos de translação executados pelos dançarinos.

$G + \overrightarrow{GG'} = $ G'	$T_{\overrightarrow{G'G''}}(G') = $ G''
H $+ \overrightarrow{GG'} = H'$	$H' + $ ____ $= H''$
$T_{\_\_}(D) = D'$	$T_{\overrightarrow{-H'H''}}($____$) = D''$
$\left(T_{\overrightarrow{C'C''}} \circ T_{\overrightarrow{CC'}}\right)(C) = $ ____	

$(T_{__} \circ T_{__})($____$) = $ ____

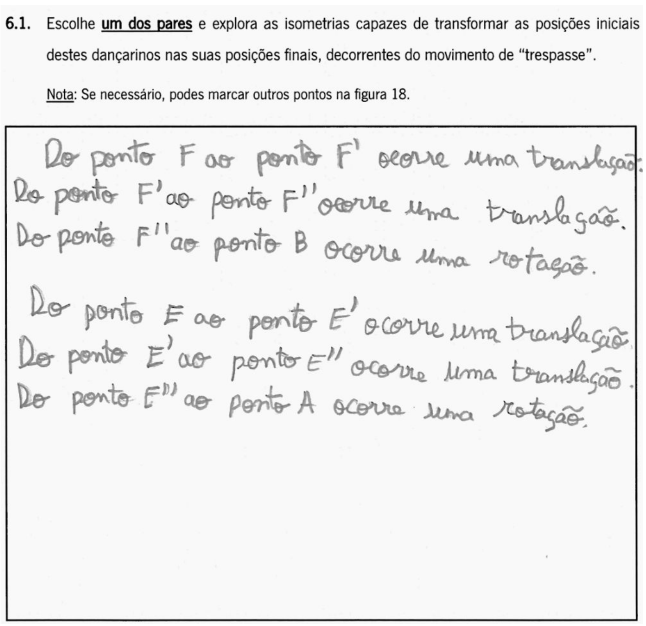
não tive tempo de acabar

Figura 214. Resolução da tarefa **5.4.** pelo aluno LX do 8.º ano, turma δ.

A exploração, pelos alunos da turma, das tarefas **6.**/**6.1.** ocorreu quando já se aproximava o final da implementação pedagógica, com os alunos a revelarem uma certa ânsia no sentido de conseguirem concluir a exploração de todas as tarefas propostas. Contudo, para muitos alunos, isso não foi alcançável. Alguns alunos nem tiveram tempo, sequer, de iniciar a exploração das tarefas **6.**/**6.1.**; outros alunos, mesmo tendo iniciado a exploração dessas tarefas, não tiveram tempo suficiente para desenvolver ou para concluir o seu raciocínio matemático, tendo apresentado, na tarefa **6.1.**, uma resolução inacabada. Não obstante, houve um número maioritário de alunos que, no tempo correspondente à duração da implementação pedagógica, conseguiu explorar as tarefas **6.**/**6.1.** e dar por terminada a sua resolução.

Esses alunos, fundamentando-se na figura apresentada na tarefa **6.**, que representa a totalidade do caminho percorrido pelos segundos pares de dançarinos durante o movimento de "trespasse", iniciaram a exploração, em **6.1.**, das isometrias capazes de transformar as posições iniciais de um dos pares de dançarinos (à sua escolha) nas suas posições finais, decorrentes do movimento de "trespasse". Genericamente, os alunos em referência conseguiram compreender, por si, o enunciado da tarefa **6.1.**, o que possibilitou que, sem impedimentos, tivessem iniciado a respetiva resolução de forma autónoma. No decorrer da atividade dos alunos em **6.1.**, eles não evidenciaram dúvidas na análise dos movimentos retilíneos executados pelos segundos pares de dançarinos durante parte do movimento de "trespasse". Foi com relativa facilidade que os alunos descreveram esses movimentos com base em translações. Importa ter presente que esse tipo de movimentos retilíneos - executados pelos pares de dançarinos ao longo dos vários movimentos que marcam a coreografia da dança - já tinha sido alvo de exploração em tarefas precedentes, com particular enfoque nas tarefas **5.1.**, **5.2.**, **5.3.** e **5.4.**, que envolviam a análise de parte do movimento de "trespasse", executado, nesse caso, pelos primeiros pares de dançarinos. Ora, isso deverá ter auxiliado a atividade dos alunos na tarefa **6.1.**, sobretudo no momento de analisarem matematicamente esses movimentos retilíneos, que os alunos, prontamente, associaram a translações. Atentando, depois, nos movimentos curvilíneos executados pelos segundos pares na parte final do movimento de "trespasse" - introduzidos e explorados, pela primeira vez, nas tarefas **6.**/**6.1.** -, os alunos apresentaram claras dificuldades em encontrar isometrias capazes de descrever esses movimentos, tendo solicitado apoio, sem exceção. Durante as interações estabelecidas com os alunos, a maioria deles comunicou que, observando, na figura da tarefa **6.**, as curvas presentes na última parte do caminho percorrido pelos segundos pares durante o "trespasse", a isometria em causa deveria ser a rotação. Porém, os alunos não sabiam, nem como descobrir os centros das rotações que permitiam descrever os movimentos curvilíneos efetuados pelos segundos pares aquando da parte final do "trespasse", nem como determinar as amplitudes dos ângulos associados a esses movimentos, tendo ficado, muitos deles, num impasse frustrante. Alguns alunos ainda fizeram tentativas para descobrir o centro das rotações utilizando o compasso, mas, mesmo assim, não conseguiram ser bem-sucedidos, tendo acabado mesmo por deixar o instrumento de desenho de parte, e por prosseguir as suas tentativas sem o auxílio deste. Menos ineficazes ainda foram as tentativas de certos alunos de usar o transferidor para medir os ângulos. Pelas reações que iam sendo exibidas pelos alunos, pôde perceber-se que a análise matemática dos movimentos curvilíneos, na tarefa **6.1.**, foi considerada, pela maioria deles, como demasiado exigente. Nas resoluções da tarefa **6.1.** apresentadas pelos alunos da turma, podem apreciar-se algumas estratégias encontradas por eles para contornarem as dificuldades sentidas na exploração da tarefa.

Certos alunos, ao explorarem, em **6.1.**, as isometrias capazes de transformar as posições iniciais de um par de dançarinos nas suas posições finais, decorrentes do movimento de "trespasse", limitaram-se a indicar, para cada uma das partes do trajeto percorrido pelo par, a translação ou a rotação (figura 215). Daí, os alunos não desenvolveram nenhum dos elementos que permitem caracterizar essas isometrias - no caso das translações, os vetores, e, no caso das rotações, o centro de rotação, a amplitude do ângulo associado ao movimento de rotação, e o sentido do movimento -, deixando a sua resolução incompleta. Outros alunos, na sua resolução da tarefa **6.1.**, para além de terem designado as isometrias translação ou rotação como meio para descreverem os movimentos realizados por um dos segundos pares de dançarinos durante o "trespasse", foram capazes de caracterizar essas várias isometrias (figura 216). Em particular, esses alunos explicitaram, no caso das translações, os vetores associados às mesmas; no caso das rotações, eles usaram pontos já marcados na figura presente na tarefa **6.** para definirem os centros das rotações e, não tendo conseguido determinar as medidas de amplitude dos ângulos associados ao movimento curvilíneo dos dançarinos do par, representaram essas amplitudes por letras. Dessa forma, os alunos apresentaram uma resolução completa da tarefa **6.1.**, tendo encontrado uma alternativa válida para o facto de não terem conseguido descobrir a medida da amplitude dos ângulos. Por fim, certos alunos, em **6.1.**, descreveram os movimentos realizados por um cada um dos dançarinos do par durante o "trespasse" através da sucessão de duas translações e de uma rotação (figura 217), tendo, curiosamente, utilizado uma nomenclatura com a qual estariam pouco familiarizados e que, atrás, havia sido clarificada. Ao contrário dos anteriores, estes alunos indicaram uma medida aproximada para a amplitude das rotações que definiram, tendo também eles exposto uma resolução completa da tarefa.


6.1. Escolhe **um dos pares** e explora as isometrias capazes de transformar as posições iniciais destes dançarinos nas suas posições finais, decorrentes do movimento de "trespasse".

Nota: Se necessário, podes marcar outros pontos na figura 18.

Do ponto F ao ponto F' ocorre uma translação.
Do ponto F' ao ponto F'' ocorre uma translação.
Do ponto F'' ao ponto B ocorre uma rotação.
Do ponto E ao ponto E' ocorre uma translação.
Do ponto E' ao ponto E'' ocorre uma translação.
Do ponto E'' ao ponto A ocorre uma rotação.

Figura 215. Resolução da tarefa **6.1.** pelo aluno RP do 8.º ano, turma δ.

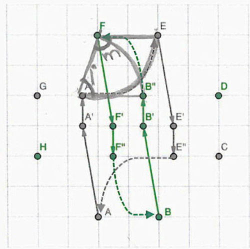


Figura 18

6.1. Escolhe <u>**um dos pares**</u> e explora as isometrias capazes de transformar as posições iniciais destes dançarinos nas suas posições finais, decorrentes do movimento de "trespasse".

<u>Nota</u>: Se necessário, podes marcar outros pontos na figura 18.

[AB]

B → movimento de avança para B' (uma translação de vetor $\overrightarrow{BB'}$.

B' → movimento de avança para B'' (uma translação de vetor $\overrightarrow{B'B''}$

B'' → há uma rotação de centro A'' e ângulo l°

A → movimento de avanço para A' (translação de vetor $\overrightarrow{AA'}$

A' → movimento de avanço para A'' (translação de vetor $\overrightarrow{A'A''}$

A'' → rotação de centro F e ângulo m

Figura 216. Resolução da tarefa **6.1.** pelo aluno AA do 8.° ano, turma δ.

6.1. Escolhe <u>**um dos pares**</u> e explora as isometrias capazes de transformar as posições iniciais destes dançarinos nas suas posições finais, decorrentes do movimento de "trespasse".

<u>Nota</u>: Se necessário, podes marcar outros pontos na figura 18.

As isometrias capazes de transformar a posição inicial A na posição final E são:

$$R_{(F,110^\circ)} \circ T_{\overrightarrow{A'A''}} \circ T_{\overrightarrow{AA'}}(A) = E$$

As isometrias capazes de transformar a posição inicial B na posição final F são:

$$R_{(A'', \approx 90^\circ)} \circ T_{\overrightarrow{B'B''}} \circ T_{\overrightarrow{BB'}}(B) = F$$

Figura 217. Resolução da tarefa **6.1.** pelo aluno CM do 8.° ano, turma δ.

No final, recolheu-se o conjunto de tarefas matemáticas *Vira e revira a cruz*, tendo sido dada oportunidade aos alunos para partilharem algum comentário/observação face ao trabalho desenvolvido.

Tendo em consideração a atividade dos alunos ao longo da implementação pedagógica, pode-se afirmar que, de um modo geral, os alunos da turma se envolveram, com entusiasmo, na exploração das tarefas matemáticas que remetiam para um contexto da vida real, particularmente para a coreografia de uma dança folclórica, cuja análise foi feita a partir da visualização de um vídeo da respetiva dança. Face à impossibilidade de os alunos trabalharem em grupo, que, no caso, lhes traria a possibilidade de discutirem, uns com os outros, aspetos relativos às tarefas matemáticas e aos distintos momentos da dança sobre as quais estas tarefas se debruçavam, considerou-se importante, aquando da visualização, em plenário, do vídeo da dança *Vira ao Castelo*, ocorrido no início da implementação pedagógica, esclarecer os alunos relativamente aos quatro movimentos que marcavam a coreografia dessa dança - o movimento de "serrar"; os movimentos de avanço e recuo; os movimentos de avanço, rodopio e recuo; e o "trespasse" -, de forma a evitar o surgimento constante de dúvidas entre os alunos a esse respeito. Ora, essa chamada de atenção intencional aos alunos permitiu que, durante a sua atividade individual, eles conseguissem explorar a maior parte das tarefas sem necessitarem de visualizar, de novo, o vídeo da dança, uma vez que eram capazes de reconhecer, por si próprios, os diferentes movimentos a que as tarefas iam fazendo alusão. Ora, o facto de os alunos não dependerem, diretamente, da visualização do vídeo da dança para explorarem as tarefas permitiu que eles tivessem uma maior autonomia e que pudessem seguir ritmos de trabalho diferenciados, sem que isso afetasse a atividade global da turma. Houve, no entanto, uma exceção - ocorrida ao nível da tarefa **3.1.** -, em que, devido a várias dúvidas que emergiram entre os alunos no decurso da exploração dessa tarefa, se tornou indispensável repetir a visualização, em plenário, da parte do vídeo da dança sob análise - correspondente à execução dos movimentos de avanço, rodopio e recuo -, de modo que os alunos conseguissem acabar a sua resolução. À parte a exceção supracitada, os alunos, para resolverem as diversas tarefas matemáticas propostas, apoiaram-se, quer na visualização inicial do vídeo da dança em plenário - e nos esclarecimentos aí fornecidos acerca dos quatro movimentos marcantes dessa coreografia -, quer nas informações prévias às tarefas que descreviam esses movimentos. Ora, tudo isso contribuiu para uma maior economia do tempo disponível, já que o conjunto de tarefas matemáticas *Vira e revira a cruz* se afigurava extenso. Mesmo assim, no final da implementação pedagógica verificou-se que o tempo de duração da mesma - no total, 100 minutos -, não foi suficiente para que todos os alunos conseguissem finalizar a exploração de todas as tarefas matemáticas propostas, tendo as tarefas **6./6.1.** ficado, nalguns casos, por explorar.

Analisando a atividade dos alunos no decurso da exploração das diferentes tarefas matemáticas, é possível verificar que o estudo matemático dos movimentos da coreografia aí proposto trouxe maiores dificuldades aos alunos em determinadas tarefas, entre as quais as que não incluíam uma representação concreta - designadamente, uma imagem - dos movimentos coreográficos que seriam alvo de análise. Ora, as tarefas **2.3.** e **4.3.** constituíram dois exemplos claros disso. Em **2.3.**, os alunos, para investigarem os quadriláteros formados pelos movimentos de avanço e recuo de um dos pares, tiveram necessidade de recuperar a figura da tarefa **2.**, concernente à representação das posições iniciais dos dançarinos, bem como das posições que estes podem assumir no decurso dos seus movimentos de avanço e recuo. Ora, ao basearem a sua exploração na referida figura, os alunos, de uma forma geral, foram capazes de percecionar qual o quadrilátero com maiores dimensões que podia ser formado pelos movimentos de avanço e recuo de um dos pares. Contudo, a representação feita nessa figura não permitiu que fosse tão imediato para os alunos, por exemplo, reconhecerem qual seria o quadrilátero com menores dimensões, ou entenderem a variação do comprimento dos lados dos quadriláteros e a respetiva variação da área. Logo, a exploração da tarefa **2.3.** revelou-se mais complexa nas sugestões de exploração que implicavam que os alunos fossem além da representação concreta e que concebessem mentalmente o movimento. Ao nível da tarefa **4.3.**, muitos alunos, para calcularem a distância percorrida por um dançarino dos segundos pares após efetuar os movimentos de avanço, rodopio e recuo, sentiram necessidade de recorrer à figura da tarefa **3.**, na qual se encontrava representado o caminho percorrido - no caso, pelos primeiros pares -, nos movimentos de avanço, rodopio e recuo. Ora, essa representação foi determinante na perceção, pelos alunos, do caminho percorrido por um dado dançarino durante os movimentos de avanço, rodopio e recuo, tendo permitido a visualização da linha gerada nessa movimentação, o que, por sua vez, auxiliou o cálculo do comprimento desse caminho, com porções retilíneas e uma curvilínea.

Em outras tarefas, as dificuldades enfrentadas pelos alunos foram causadas por motivos distintos. Na tarefa **4.1.**, os alunos não compreenderam a nomenclatura usada na tarefa para representar as isometrias que descreviam os movimentos de avanço, rodopio e recuo efetuados por um dançarino - facto que implicou fornecer esclarecimentos aos alunos, que lhes permitissem superar essa dificuldade. O mesmo tipo de nomenclatura surgiu, de novo, na tarefa **5.4.**, mas, nesta fase, os alunos já foram capazes de entender o significado da simbologia usada para representar isometrias simples e compostas. Já na tarefa **4.2.**, as dificuldades sentidas pelos alunos foram resultado da sua incapacidade para interpretar o enunciado da mesma, que os impossibilitou de entenderem o que era requerido na tarefa. Ora, as explicações dadas aos alunos, ainda que lhes tivessem permitido alcançar uma resolução correta da tarefa **4.2.**, determinaram uma diminuição do desafio da mesma. Por fim, importa particularizar a tarefa **6.1.**, cujo desafio - imposto pela exploração de isometrias capazes de transformar as posições iniciais dos dançarinos nas resultantes do “trespasse” - estimulou os alunos a desenvolverem diferentes estratégias de resolução, que lhes permitiram contornar certas dificuldades encontradas na exploração.

7.2.5. Vamos bailar o "Maneo"

O conjunto de tarefas matemáticas *Vamos bailar o "Maneo"* foi implementado numa turma do 8.º ano de escolaridade - turma λ - de uma escola artística especializada no ensino da música, situada em Braga. Por motivos imprevistos, a implementação ocorreu numa data já muito próxima do final do ano letivo, e teve uma duração temporal inferior à planeada - fatores que influenciaram a atividade dos alunos.

No início da implementação pedagógica, com a duração total de 50 minutos, introduziu-se a dança folclórica a investigar - *Maneo de Verdillo*, da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*. Em seguida, procedeu-se à leitura, em plenário, da informação relativa a essa dança, que surge apresentada antes das tarefas *Vamos bailar o "Maneo"*, entretanto distribuídas aos alunos. No seguimento, visualizou-se o vídeo da dança em plenário, tendo-se sugerido aos alunos que atentassem nas mudanças de configuração ocorridas na mesma. Posteriormente, os alunos deram início à exploração das tarefas. Conforme já referido na análise das implementações pedagógicas precedentes, os alunos tiveram que explorar as tarefas individualmente, por força das medidas escolares de contenção da propagação do novo coronavírus. Ora, mesmo estando distribuídos em mesas individuais, os alunos não contiveram as interações comunicativas uns com os outros, tendo sido constantes as trocas de informações entre eles.

Na tarefa **1.**, é focalizada uma característica visivelmente marcante da dança *Maneo de Verdillo*, que se prende com o facto de os dançarinos, ao longo da coreografia, não manterem a mesma configuração com que iniciaram a dança, sendo notórias várias mudanças ao nível da configuração. Avançando para **1.1.**, os alunos iniciaram a exploração das distintas configurações que surgem na dança. Recorde-se que, durante a visualização do vídeo da dança, em plenário, que teve lugar no início da implementação pedagógica, tinha-se chamado a atenção dos alunos para essa particularidade da dança, abrindo-se, assim, caminho para a exploração que viria a ser realizada pelos alunos na primeira tarefa. Ora, foi logo no decorrer da exploração da tarefa **1.1.** que a falta de concentração e empenho dos alunos se fez notar, em grande parte devido ao cansaço e distração típicos do final do ano letivo. Como resultado, a atividade dos alunos tendia a ser superficial, na medida em que eles se preocupavam, meramente, com a elaboração de uma resposta para a tarefa em causa, quer estivesse, ou não, completa/correta. Regra geral, os alunos não expunham as dificuldades quem iam experimentando ao longo do seu trabalho, e os pedidos de apoio por parte dos mesmos raramente aconteciam. Diante disso, tornou-se necessário, a fim de recolher informações concretas relativamente ao progresso do trabalho dos alunos, abordá-los diretamente, questionando-os sobre como tinham pensado/resolvido determinada tarefa, e fazendo com que, assim, eles refletissem sobre as suas resoluções, e comunicassem o seu raciocínio.

As interações estabelecidas individualmente com os alunos permitiram constatar, ao nível da tarefa **1.1.**, que os alunos, de um modo geral, compreenderam a existência de diferentes configurações na dança, ainda que a maioria não se tivesse esforçado para explicitar todas essas configurações na sua resolução. Daí, as abordagens feitas aos alunos foram importantes para os incentivar a completarem a resposta dada em **1.1.**, a fim de sistematizarem, não só algumas, mas todas as configurações visíveis na dança. Para tal fim, tornou-se indispensável providenciar outras visualizações, em plenário, do vídeo da dança, de forma que todos os alunos tivessem oportunidade de apreender as distintas configurações da dança. Na maior parte dos casos, o estímulo dado aos alunos foi frutífero, no sentido em que muito deles voltaram à tarefa **1.1.** para desenvolverem/completarem a sua resolução, feita sem o empenho devido. Apesar dessa reação positiva da maioria dos alunos da turma perante a interpelação que lhes foi dirigida, muitos não conseguiram construir uma resolução eficaz da tarefa **1.1.**, tendo-se identificado várias falhas. Alguns alunos, ao resolverem a tarefa **1.1.**, tentaram representar a sequência de configurações exibidas pelos dançarinos ao longo da dança, exibindo uma resolução desadequada à tarefa proposta, já que muitas dessas configurações eram iguais, não devendo, por isso, ser repetidas na resolução (figura 218). Por oposição, outros alunos, em **1.1.**, só representaram as configurações da dança que identificaram como sendo diferentes, expondo, ainda assim, uma resolução muito simplificada da tarefa (figura 219). Noutros casos, os alunos, embora também tivessem baseado a sua resolução da tarefa **1.1.** na representação das diferentes configurações da dança, apresentaram representações mais elaboradas, por exemplo, identificando, com pontos, o número de dançarinos incorporado nas várias configurações (figura 220); distinguindo as posições assumidas por homens e por mulheres nas diversas configurações (figura 221); ou, até mesmo, introduzindo indicações - através de setas e de palavras - alusivas aos distintos movimentos efetuados pelos dançarinos em cada uma das configurações da dança (figura 222).

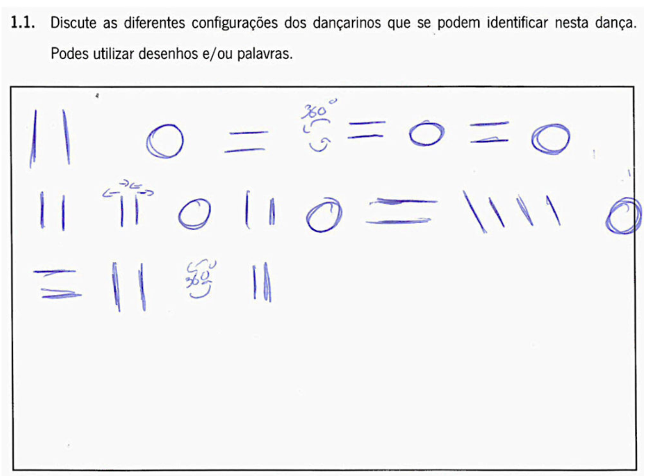


Figura 218. Resolução da tarefa **1.1.** pelo aluno ID do 8.° ano, turma λ.

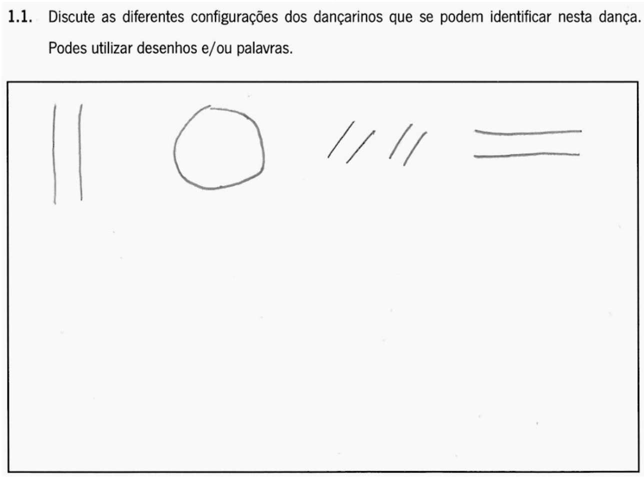


Figura 219. Resolução da tarefa **1.1.** pelo aluno DR do 8.º ano, turma λ.

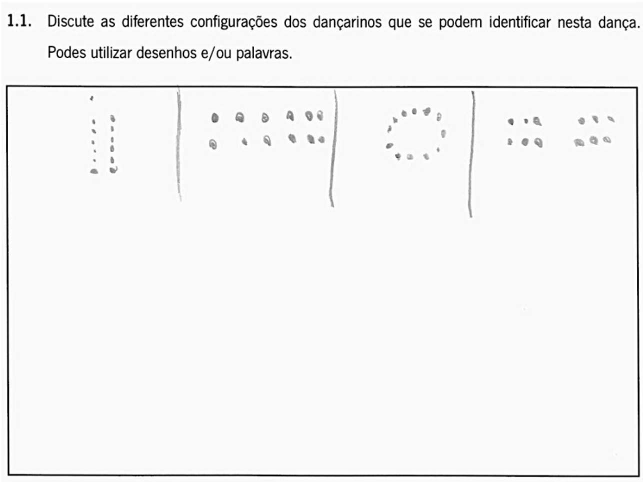


Figura 220. Resolução da tarefa **1.1.** pelo aluno MA do 8.º ano, turma λ.

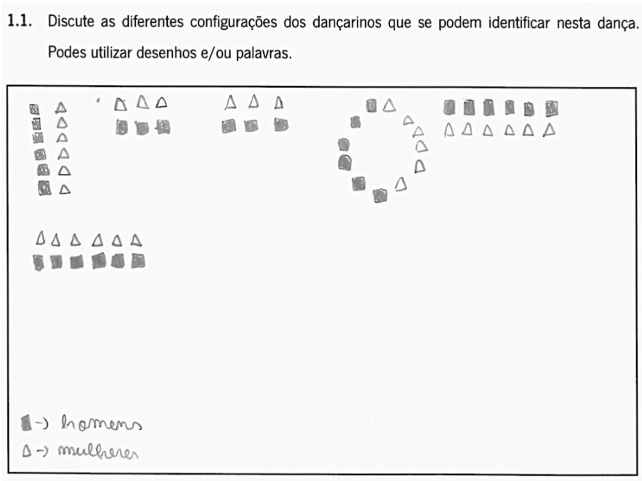


Figura 221. Resolução da tarefa **1.1.** pelo aluno GG do 8.º ano, turma λ.

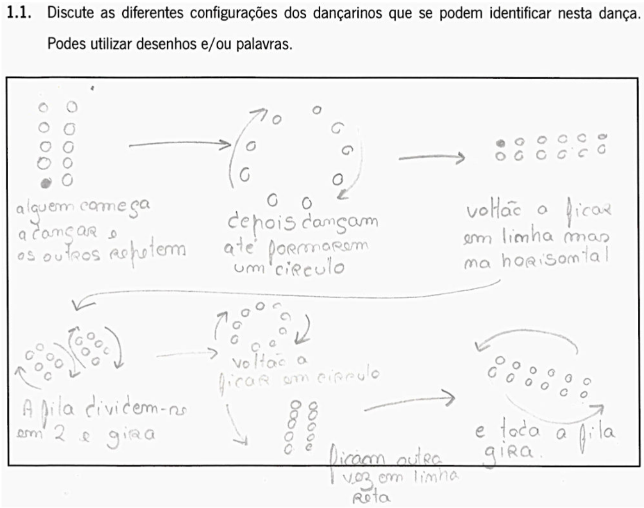


Figura 222. Resolução da tarefa **1.1.** pelo aluno CC do 8.º ano, turma λ.

Veja-se que, nas resoluções até aqui exploradas, os alunos consideraram serem distintas as configurações em que os dançarinos se encontram em duas linhas verticais e em duas linhas horizontais. E, certos alunos, inclusivamente, distinguiram as configurações dos dançarinos dispostos em duas linhas em função da linha ocupada pelos homens e pelas mulheres, tal como ilustra a resolução da figura 221. Houve, portanto, conformidade entre os alunos da turma ao assumirem, em **1.1.**, que a disposição dos dançarinos em duas linhas verticais e em duas linhas horizontais fixava duas configurações diferentes. Ora, essa mesma uniformidade não sucedeu na identificação, pelos alunos, da configuração assumida pelos dançarinos nos momentos em que, estando disposto nas duas filas, eles formavam quatro filas, executando, cada uma dessas duas filas, movimentos rotacionais com centros distintos. Nesse caso, houve vários alunos que não interpretaram tal movimentação como dando origem a uma configuração distinta, de modo que não consideraram essa configuração na sua resolução da tarefa **1.1.** (figura 223). Num caso distinto - menos frequente -, os alunos excluíram, em **1.1.**, a disposição em roda (figura 224).

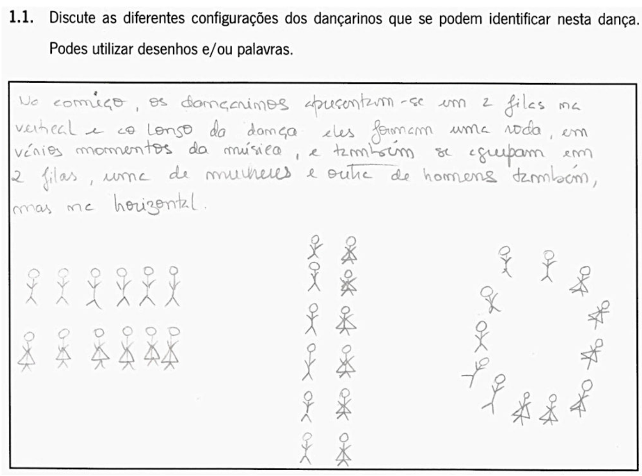


Figura 223. Resolução da tarefa **1.1.** pelo aluno CX do 8.º ano, turma λ.

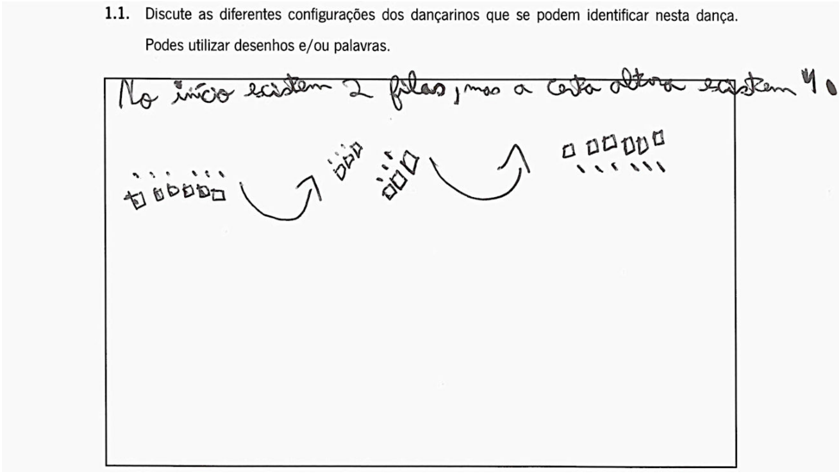
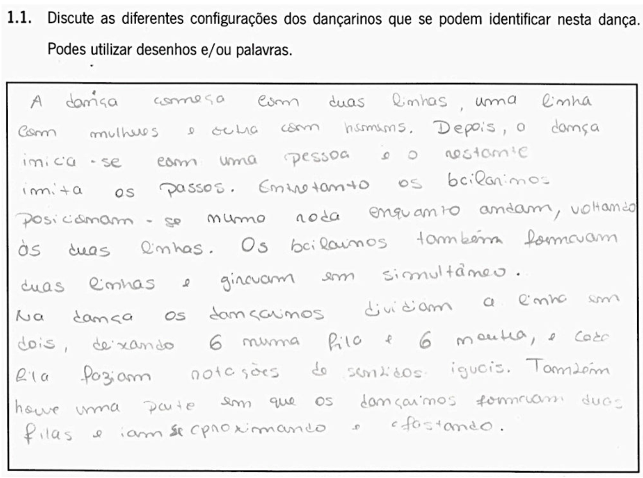


Figura 224. Resolução da tarefa **1.1.** pelo aluno SM do 8.º ano, turma λ.

Por fim, há a referir um pequeno número de alunos da turma que, para resolver a tarefa **1.1.**, utilizou, unicamente, palavras, tendo, mesmo assim, elaborado uma resolução satisfatória (figura 225). Todos os restantes alunos, na resolução da tarefa **1.1.**, privilegiaram o uso do desenho, ou a utilização simultânea de palavras e do desenho, tal qual exemplificam as resoluções anteriormente apresentadas.



1.1. Discute as diferentes configurações dos dançarinos que se podem identificar nesta dança.
Podes utilizar desenhos e/ou palavras.

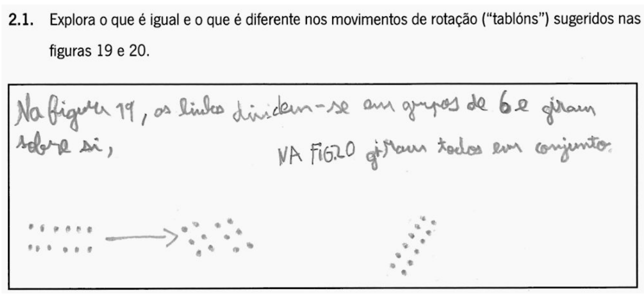
A dança comesa com duas linhas, uma linha com mulheres e outra com homens. Depois, a dança inicia-se com uma pessoa e o restante imita os passos. Entretanto os bailarinos posicionam-se numa roda enquanto andam, voltando às duas linhas. Os bailarinos também formavam duas linhas e giravam em simultâneo.
Na dança os dançarinos dividiam a linha em dois, deixando 6 numa fila e 6 noutra, e cada fila faziam rotações de sentidos iguais. Também houve uma parte em que os dançarinos formavam duas filas e iam se aproximando e afastando.

Figura 225. Resolução da tarefa **1.1.** pelo aluno RA do 8.º ano, turma λ.

No prosseguimento para a tarefa **2.**, que muitos alunos já haviam previamente iniciado, considerou-se necessário, uma vez mais, intervir diretamente no trabalho dos alunos, procurando-se incentivar a atividade deles, já que a falta de envolvimento demonstrada pelos alunos em geral persistia. Em vez de individualmente, desta vez, a interação foi estabelecida com o grupo-turma em simultâneo. Primeiramente, leu-se, em plenário, a informação relativa à descrição das partes da coreografia - "puntos" e "voltas" - que antecede a tarefa **2.**, e, no seguimento, chamou-se a atenção dos alunos para as figuras exibidas na tarefa **2.**, que retratam dois momentos que fazem parte de duas "voltas" da dança.

As figuras em causa remetem para movimentos de rotação que são efetuados pelos dançarinos organizados em linhas paralelas, e que são designados “tablóns”. Mediante a informação veiculada, tornou-se essencial, tendo em vista uma melhor compreensão pelos alunos, e uma melhor preparação dos mesmos para a exploração matemática das tarefas **2./2.1.**, que os alunos visualizassem, de novo, as “voltas” da dança que correspondiam à realização de “tablóns”, sob enfoque nessas tarefas. Ora, após a visualização, em plenário, das partes do vídeo da dança referenciadas, sugeriu-se aos alunos que, considerando a informação obtida, explorassem, em **2.1.**, as semelhanças e as diferenças entre os “tablóns” ilustrados nas figuras da tarefa **2.**, reconsiderando, se fosse o caso, a sua resolução prévia. Tal como já se havia verificado anteriormente, também aqui os alunos reagiram positivamente face à interpelação que lhes foi dirigida em plenário, a qual resultou num maior incentivo, por parte dos alunos, para a exploração da tarefa **2.1.**, à qual muitos deles tinham respondido de forma superficial e apressada. Das resoluções da tarefa **2.1.** apresentadas pelos alunos da turma sobressaíram, mesmo assim, diferenças ao nível do desempenho dos alunos, tendo-se verificado uma certa diversidade nas respostas. Vários alunos, em **2.1.**, referiram, somente, aquela que é diferença mais notória entre os dois “tablóns” em estudo - o facto de um desses movimentos rotacionais ser executado pelas duas linhas de dançarinos, em contraste com o outro, no qual as duas linhas se dividem em dois grupos equivalentes de dançarinos (figura 226). Esses alunos apresentaram uma resolução incompleta da tarefa **2.1.**, ao assinalarem, mediante a comparação dos dois “tablóns”, uma só diferença, e não explicitarem nenhuma semelhança (ainda que, indiretamente, esteja patente o facto de, em ambos os “tablóns”, os dançarinos girarem). Outros alunos, ao resolverem a tarefa **2.1.**, para além de terem feito referência à diferença mais evidente entre os dois “tablóns” em análise - já mencionada anteriormente -, indicaram, como semelhança entre esses “tablóns”, o facto de os movimentos de rotação serem efetuados no mesmo sentido (figura 227). Alguns desses alunos ainda tentaram descrever, em **2.1.**, o sentido positivo ou contrário aos ponteiros do relógio das rotações inerentes aos dois “tablóns” considerados, porém eles usaram uma terminologia desadequada para caracterizar matematicamente o sentido de um movimento circular (figura 228). Ainda assim, os esquemas incluídos nas suas resoluções mostram que eles estavam a pensar corretamente. Certos alunos, em **2.1.**, indicaram, erroneamente, que a diferença entre os dois “tablóns” sob exploração estava associada ao facto de, num, os bailarinos - dispostos em duas linhas - executarem movimentos rotacionais de igual sentido, e, no outro, os dois grupos de bailarinos - formados pela divisão, ao meio, das duas linhas - efetuarem rotações de sentidos opostos, ao invés de coincidentes (figura 229). Tais alunos, para além de não terem explicitado, na sua resolução da tarefa **2.1.**, nenhuma semelhança entre os dois “tablóns” em foco, expuseram falhas na análise matemática desses movimentos da dança.

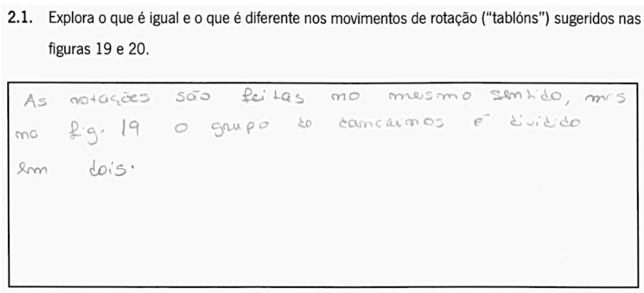
Outros alunos, na resolução apresentada em **2.1.**, tomaram como semelhança entre os dois “tablóns” em questão o facto de, em ambos, estarem envolvidas rotações, e apontaram como elemento distintivo entre esses “tablóns” o facto de um incluir uma só rotação, e o outro incluir duas rotações (figura 230). Não obstante, esses alunos não aprofundaram a caracterização de nenhuma dessas rotações que citam. Em contraste, certos alunos da turma foram capazes de fazer referência, na sua resolução da tarefa **2.1.**, aos centros de rotação que permitem caracterizar as diferentes rotações que compunham os dois “tablóns” em causa, tendo, ainda, indicado, com setas, o sentido dos movimentos rotacionais efetuados (figura 231). Por sua vez, outros alunos, em **2.1.**, distinguiram as rotações inerentes aos dois “tablóns” visados com base na amplitude dos ângulos associados aos movimentos - $360°$ e $180°$ (figura 232). Apesar disso, nenhum aluno da turma conseguiu expor uma resolução totalmente correta da tarefa **2.1.**, que reunisse as diversas semelhanças e diferenças existentes entre os “tablóns” investigados na tarefa.



2.1. Explora o que é igual e o que é diferente nos movimentos de rotação (“tablóns”) sugeridos nas figuras 19 e 20.

Na figura 19, os linhas dividem-se em grupos de 6 e giram sobre si, NA FIG.20 giram todos em conjunto.

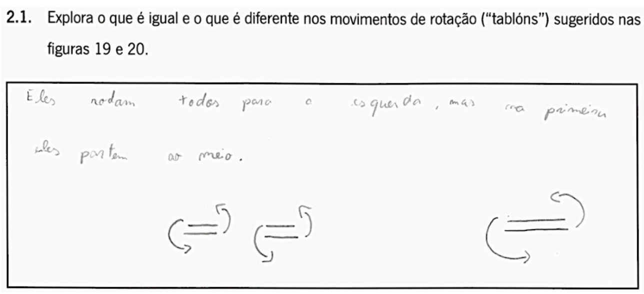
Figura 226. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno CB do 8.° ano, turma λ.



2.1. Explora o que é igual e o que é diferente nos movimentos de rotação (“tablóns”) sugeridos nas figuras 19 e 20.

As rotações são feitas no mesmo sentido, mas na fig. 19 o grupo do dançarinos é dividido em dois.

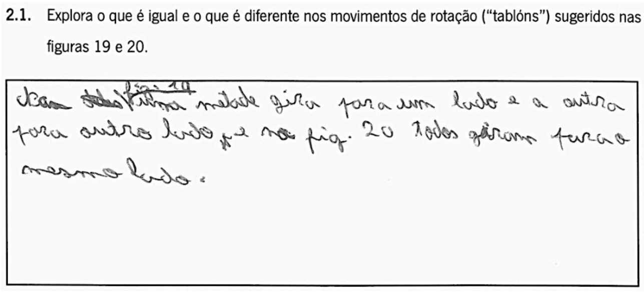
Figura 227. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno RA do 8.° ano, turma λ.



2.1. Explora o que é igual e o que é diferente nos movimentos de rotação (“tablóns”) sugeridos nas figuras 19 e 20.

Eles rodam todos para a esquerda, mas na primeira eles partem ao meio.

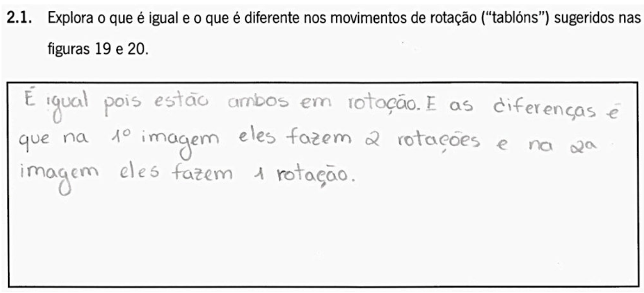
Figura 228. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno MS do 8.° ano, turma λ.



2.1. Explora o que é igual e o que é diferente nos movimentos de rotação ("tablóns") sugeridos nas figuras 19 e 20.

Na ~~todos~~ fig. 19 metade gira para um lado e a outra para outro lado, e na fig. 20 todos giram para o mesmo lado.

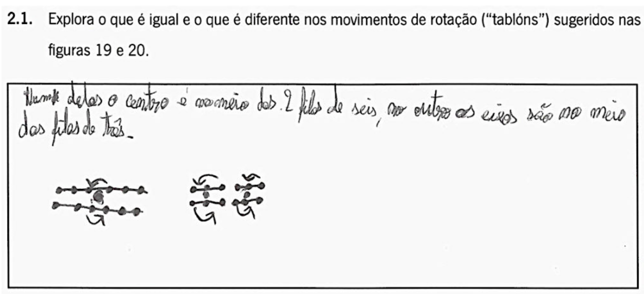
Figura 229. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno JA do 8.° ano, turma λ.



2.1. Explora o que é igual e o que é diferente nos movimentos de rotação ("tablóns") sugeridos nas figuras 19 e 20.

É igual pois estão ambos em rotação. E as diferenças é que na 1º imagem eles fazem 2 rotações e na 2ª imagem eles fazem 1 rotação.

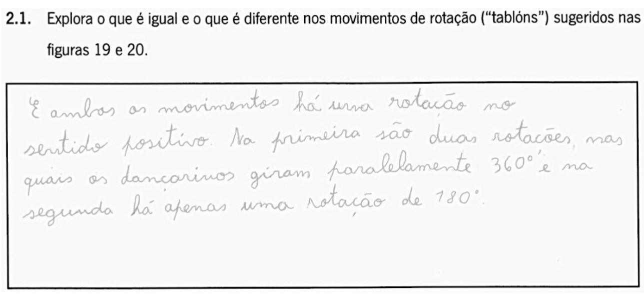
Figura 230. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno BS do 8.° ano, turma λ.



2.1. Explora o que é igual e o que é diferente nos movimentos de rotação ("tablóns") sugeridos nas figuras 19 e 20.

Numa delas o centro é no meio das 2 filas de seis, na outra os eixos são no meio das filas de três.

Figura 231. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno DS do 8.° ano, turma λ.



2.1. Explora o que é igual e o que é diferente nos movimentos de rotação ("tablóns") sugeridos nas figuras 19 e 20.

E ambos os movimentos há uma rotação no sentido positivo. Na primeira são duas rotações, nas quais os dançarinos giram paralelamente 360° e na segunda há apenas uma rotação de 180°.

Figura 232. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno DR do 8.° ano, turma λ.

Em tempos diferentes, os alunos da turma foram prosseguindo para a exploração da tarefa **2.2.**, não tendo sido introduzidas quaisquer informações em plenário, visto que a tarefa em causa se reportava à análise matemática dos dois "tablóns" que já tinham sido explorados na tarefa anterior, ainda que com um enfoque distinto. Na tarefa **2.2.**, é proposto aos alunos que investiguem as linhas geradas, no plano, pelos movimentos de rotação sugeridos nas figuras presentes na tarefa **2.** - ilustrativas dos dois "tablóns".

Desde logo, começaram a ser notórias as dificuldades dos alunos na exploração individual da tarefa **2.2.**, as quais se refletiram num aumento das interações entre os pares, que procuravam apoio uns nos outros. Tal como já tinha sucedido anteriormente, os alunos, por sua iniciativa, não expunham as suas dúvidas, tendo sido necessário, por isso, abordar diretamente os alunos a fim de se recolherem tais informações. No decurso dessa monitorização, foi possível perceber que muitos alunos não tinham conseguido interpretar o que era requerido na tarefa **2.2.**, sentindo-se "perdidos" e sem saberem por onde começar. Diante disso, e atendendo à desmotivação e alheamento demonstrados pelos alunos desde o início da implementação pedagógica, procurou-se esclarecer, junto dos diferentes alunos, o enunciado da tarefa **2.2.**, facultando-lhes informações, que, indiretamente, lhes dessem pistas para a resolução da tarefa. Para além disso, considerou-se que seria útil para a atividade dos alunos em **2.2.** repetir a visualização, em plenário, das "voltas" da dança que correspondiam à realização de "tablóns", de forma que os alunos pudessem recuperar os movimentos rotacionais correspondentes, e analisá-los nos termos propostos. Note-se que a visualização das partes do vídeo da dança referidas só se realizou quando todos os alunos já tinham avançado para a tarefa **2.2.**, para que se perturbasse o menos possível a atividade dos alunos. Ora, apesar do apoio dado aos alunos na progressão do seu trabalho, nem todos conseguiram ter êxito na exploração da tarefa **2.2.**, tendo-se verificado diferenças ao nível do desempenho dos alunos na tarefa. Logo para começar, houve vários alunos da turma que não desenvolveram qualquer tipo de resolução em **2.2.**, tendo deixando a tarefa totalmente em branco. Noutros casos, os alunos, apesar das suas evidentes tentativas para resolverem a tarefa **2.2.**, não conseguiram chegar a uma resolução final, tendo na sua maioria acabado por apagar os registos correspondentes às estratégias de resolução testadas. Outros alunos finalizaram a sua resolução da tarefa **2.2.**, mas falharam no estudo das linhas geradas pela movimentação dos dançarinos nos dois "tablóns" investigados, entendendo tratar-se de linhas retas (figura 233). Num caso distinto, os alunos - contrariamente aos anteriores -, foram capazes de alcançar, na sua resolução da tarefa **2.2.**, que os movimentos de rotação inerentes aos dois "tablóns" em análise davam origem, no plano, a linhas circulares fechadas, no entanto, esses alunos determinaram, incorretamente, o número de círculos que seriam gerados em cada um desses "tablóns" (figura 234). Tais alunos inferiram que, dos movimentos rotacionais efetuados pelos dançarinos num dos "tablóns" resultariam dois círculos - em vez de quatro -, e, no outro, resultaria somente um círculo - em vez de três. Ora, tal apreciação pode estar relacionada com o facto de, na resolução da tarefa imediatamente anterior, alguns alunos terem distinguido os dois "tablóns" - afetos a ambas as tarefas (**2.1.** e **2.2.**) - a partir da ideia de que, num dos "tablóns", estariam envolvidas duas rotações e, no outro, apenas uma rotação. Em contraste com os anteriores, outros alunos, na resolução exibida em **2.2.**, fizeram uma exploração correta das linhas geradas pela movimentação dos dançarinos num dos "tablóns" - três círculos -, porém falharam na análise da figura originada, no plano, aquando da execução do outro "tablón" (figura 235). Descobrir o que resultava, no plano, do percurso efetuado pelos dançarinos foi, de facto, mais difícil para os alunos num dos "tablóns" - o que envolvia a rotação das duas linhas de dançarinos divididas ao meio. Houve, ainda assim, um pequeno número de alunos que, em **2.2.**, explorou com êxito as linhas geradas pela movimentação dos dançarinos nos dois "tablóns" propostos para investigação na tarefa (figura 236).

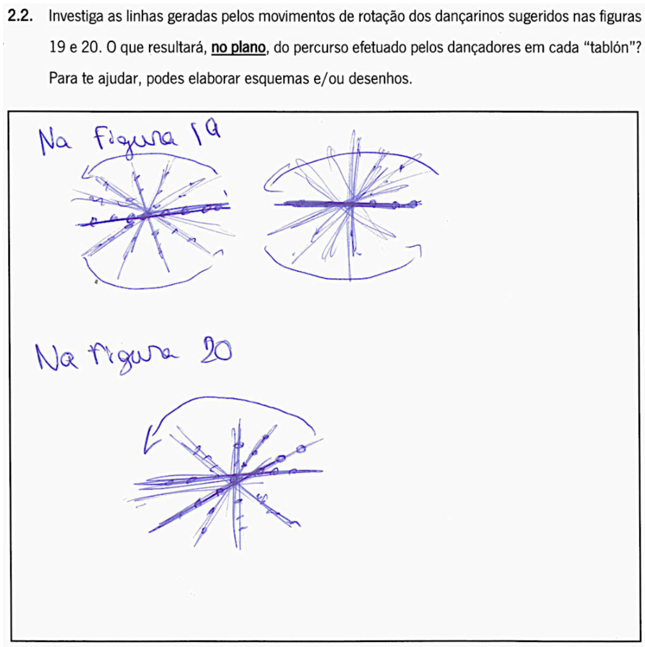


Figura 233. Resolução da tarefa **2.2.** pelo aluno LO do 8.° ano, turma λ.

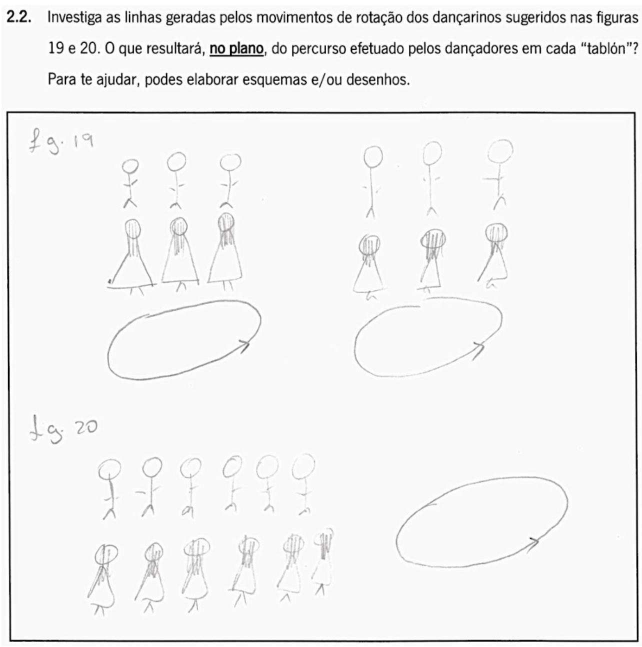


Figura 234. Resolução da tarefa **2.2.** pelo aluno RA do 8.° ano, turma λ.

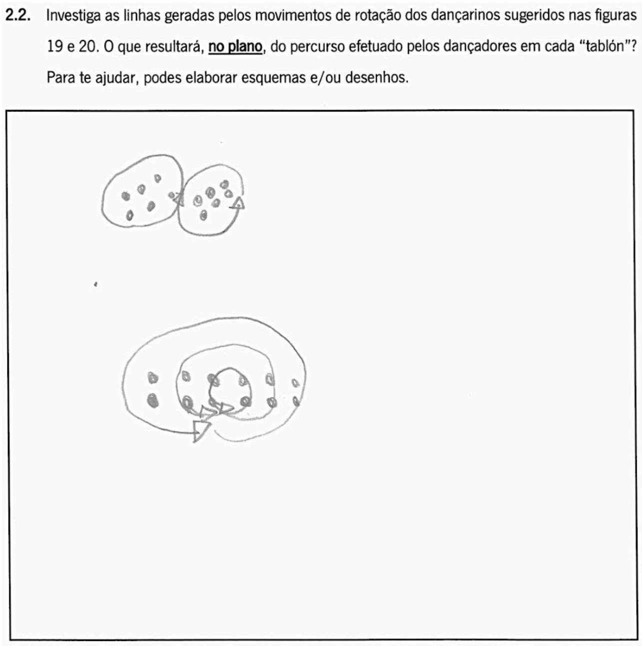


Figura 235. Resolução da tarefa **2.2.** pelo aluno MA do 8.º ano, turma λ.

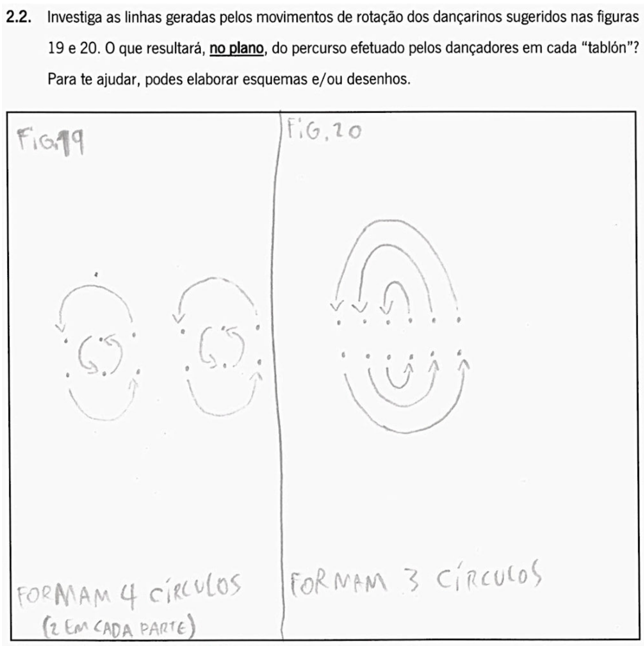
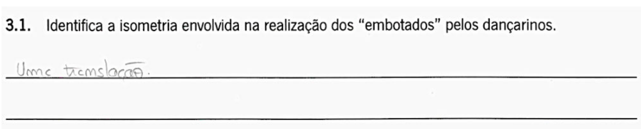


Figura 236. Resolução da tarefa **2.2.** pelo aluno CB do 8.º ano, turma λ.

No avanço para a tarefa **3.**, houve necessidade de, em plenário, chamar a atenção dos alunos para a leitura atenta das informações veiculadas no enunciado da tarefa, já que é proposta a exploração de uma das "voltas" da dança que, contrariamente às "voltas" que haviam sido exploradas nas tarefas precedentes, não correspondiam à realização de "tablóns", mas sim de "embotados". Nos chamados "embotados", os dançarinos, organizados em duas linhas paralelas - uma composta por homens e outra por mulheres -, realizam passos saltados para a frente e para trás, marcando exageradamente o ritmo.

Por se tratar de uma movimentação executada num momento único da dança - a segunda "volta" -, considerou-se que seria fundamental para a atividade exploratória dos alunos que eles pudessem visualizar, de novo, a parte do vídeo da dança correspondente à execução dos designados "embotados". Ora, por motivos de escassez de tempo, essa parte da coreografia foi, desde logo, distinguida no vídeo, não tendo sido proposto aos alunos - conforme seria desejável - que, com base nas informações fornecidas na tarefa **3.**, tentassem, eles próprios, identificar a parte relativa à execução dos "embotados". Decorrida a visualização, em plenário, da parte do vídeo da dança sob enfoque nas tarefas **3.**/**3.1.**/**3.2.**, os alunos da turma iniciaram, autonomamente, a exploração dessas tarefas, não tendo exposto dúvidas, tal como já viria a tornar-se habitual. Não obstante, o acompanhamento do trabalho dos alunos permitiu aferir que, de um modo geral, eles foram capazes de interpretar devidamente o enunciado das tarefas em questão, tendo na sua maioria conseguido desenvolver, individualmente, resoluções para as tarefas. Só um aluno da turma é que nas tarefas **3.1.** e **3.2.** não se mostrou capaz de expor nenhuma resolução. Nas resoluções dos restantes, há a destacar diferenças ao nível da análise matemática dos "embotados".

Os alunos da turma, ao identificarem, na tarefa **3.1.**, a isometria envolvida na realização dos "embotados" pelos dançarinos, apresentaram respostas diferenciadas; por implicação, ao elaborarem, na tarefa **3.2.**, um esquema representativo dos movimentos dos dançarinos nos "embotados", tendo em consideração a resposta anterior, os alunos refletiram, nas suas resoluções, essa mesma diferenciação. Mais precisamente, a maioria dos alunos da turma, na sua resposta à tarefa **3.1.**, identificou a translação como sendo a isometria envolvida na realização dos "embotados" pelos dançarinos (figura 237). Genericamente, esses alunos, na elaboração, em **3.2.**, de um esquema representativo dos movimentos dos dançarinos nos "embotados", usaram setas para ilustrarem os movimentos retilíneos aí realizados, tendo alguns desses alunos identificado, explicitamente, essas setas como sendo vetores (figura 238). Outros alunos da turma - em menor número do que os referidos anteriormente -, na tarefa **3.1.**, consideraram, por sua vez, que a isometria envolvida na realização dos "embotados" era a reflexão axial (figura 239), tendo elaborado, em **3.2.**, um esquema em conformidade com essa isometria (figura 240). Neste caso, os alunos em referência desenharam, no seu esquema representativo dos movimentos dos dançarinos quando realizam os "embotados", um eixo de simetria entre as duas linhas de dançarinos - uma composta por homens e outra por mulheres -, destacando a simetria dos movimentos executados.


3.1. Identifica a isometria envolvida na realização dos "embotados" pelos dançarinos.

Uma translação.

Figura 237. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno CX do 8.º ano, turma λ.

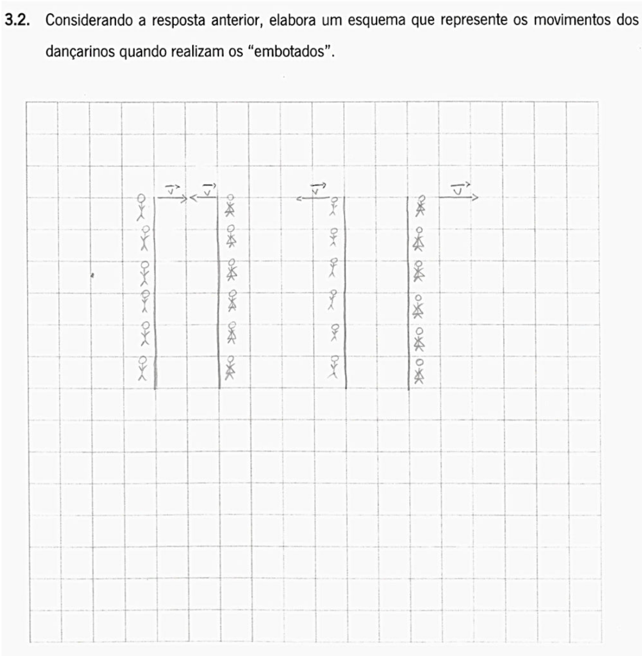


Figura 238. Resolução da tarefa **3.2.** pelo aluno CX do 8.º ano, turma λ.

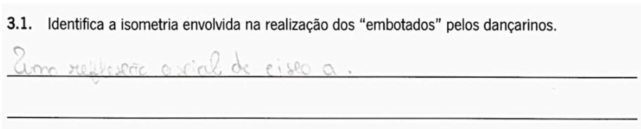


Figura 239. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno IK do 8.º ano, turma λ.

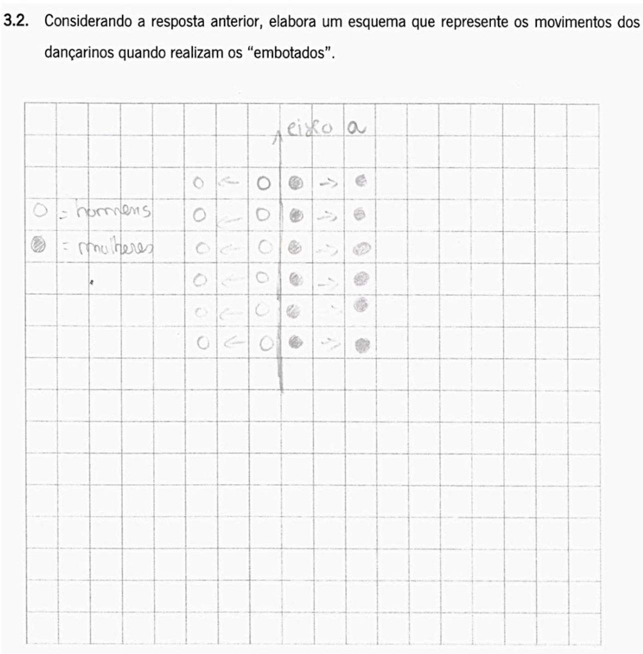
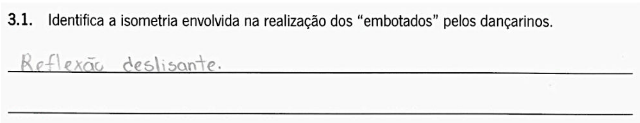


Figura 240. Resolução da tarefa **3.2.** pelo aluno IK do 8.º ano, turma λ.

Ainda que distintos entre si, os dois tipos de resoluções das tarefas **3.1.** e **3.2.** ilustrados antes denotam correção ao nível da análise matemática dos “embotados” desenvolvida pelos alunos visados. Em contraste com tais alunos, um pequeno número de alunos da turma, na sua resolução da tarefa **3.1.**, apresentou uma resposta entendida como matematicamente desadequada à análise dos “embotados” proposta na tarefa. Em particular, os alunos mencionados responderam, em **3.1.**, que a isometria envolvida na realização dos “embotados” pelos dançarinos era a reflexão deslizante (figura 241). Conforme dito, tal isometria não se afigura adequada ao tipo de movimento realizado nos “embotados”. Ademais, os alunos em causa, em **3.2.**, elaboraram um esquema que não retrata a isometria citada (figura 242), o que vem corroborar a inadequação da análise matemática que fizeram dos “embotados”.


3.1. Identifica a isometria envolvida na realização dos “embotados” pelos dançarinos.

Reflexão deslisante.

Figura 241. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno BS do 8.° ano, turma λ.

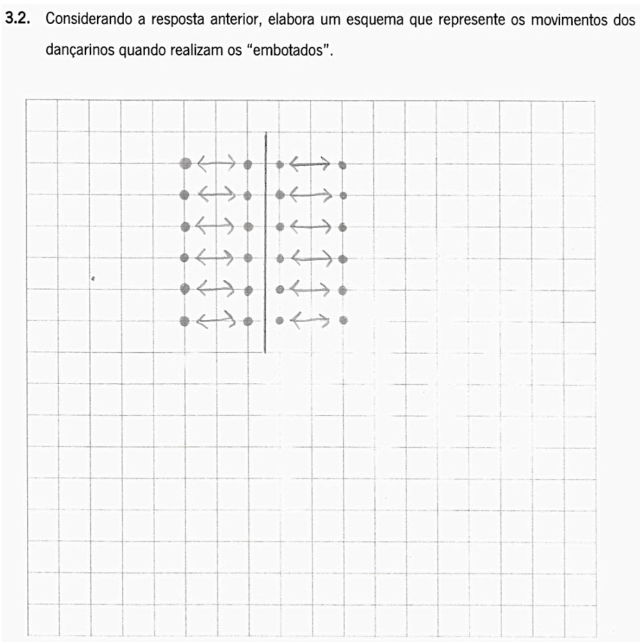


Figura 242. Resolução da tarefa **3.2.** pelo aluno BS do 8.° ano, turma λ.

O prosseguimento, a vários tempos, dos alunos da turma para a exploração das tarefas **4./4.1.** teve lugar numa fase já muito próxima do final da implementação pedagógica. Como consequência, uma grande parte dos alunos da turma não teve tempo, sequer, de iniciar a exploração das tarefas em causa. Outros alunos da turma, embora tivessem tido tempo para desenvolver atividade prática a partir das últimas tarefas propostas, não conseguiram, no horizonte temporal disponível, concretizar a respetiva exploração, tendo muitos desses alunos exposto, em **4.1.**, resoluções notoriamente inacabadas da tarefa.

O pouco tempo disponível para a exploração das tarefas **4.**/**4.1.** teve influência, também, ao nível da gestão do trabalho em sala de aula, por ter tornado inviável uma nova visualização do vídeo da dança em estudo, que se previa profícua para o desenvolvimento da atividade dos alunos nas referidas tarefas. No enunciado da tarefa **4.**, são apresentadas informações referentes à dança *Maneo de Verdillo*, designadamente o facto de esta ser composta por "puntos" e "voltas", e de existirem, entre esses, curtos momentos de transição nos quais os bailarinos se movimentam sobre uma circunferência por si formada. Ora, nas tarefas precedentes, os alunos já tinham explorado as isometrias associadas aos movimentos dos dançarinos nas "voltas" da dança, tendo tido oportunidade para visualizarem, de novo, as partes respetivas do vídeo da dança. Na tarefa **4.1.**, é proposto aos alunos que investiguem as isometrias associadas ao movimento dos dançarinos nas restantes partes da dança, ou seja, para além das "voltas". Não tendo sido possível, devido à escassez de tempo, proporcionar aos alunos uma nova visualização do vídeo da dança, os alunos que conseguiram chegar à tarefa **4.1.** tiveram que desenvolver a sua atividade a partir do que se lembravam das visualizações anteriores do vídeo da dança sob investigação. Ora, esse facto - aliado à falta de tempo - dificultou o trabalho prático dos alunos na tarefa **4.1.**, tendo a maioria deles limitado a sua resolução à apresentação de um exemplo único de isometria: a rotação - associada aos movimentos dos bailarinos quando transitam entre os "puntos" e as "voltas" (figura 243); ou a translação - associada às deslocações laterais que os bailarinos realizam nos "puntos" (figura 244).

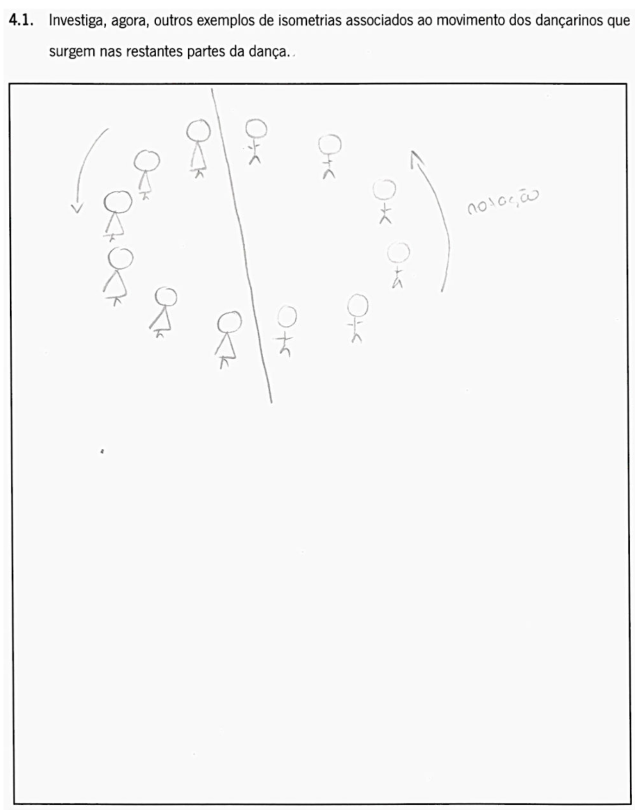


Figura 243. Resolução da tarefa **4.1.** pelo aluno RA do 8.° ano, turma λ.

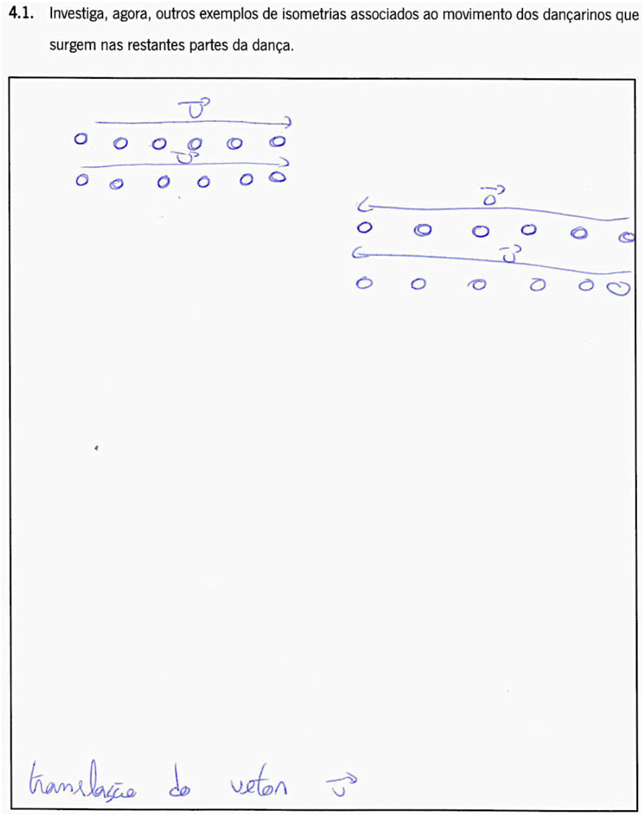
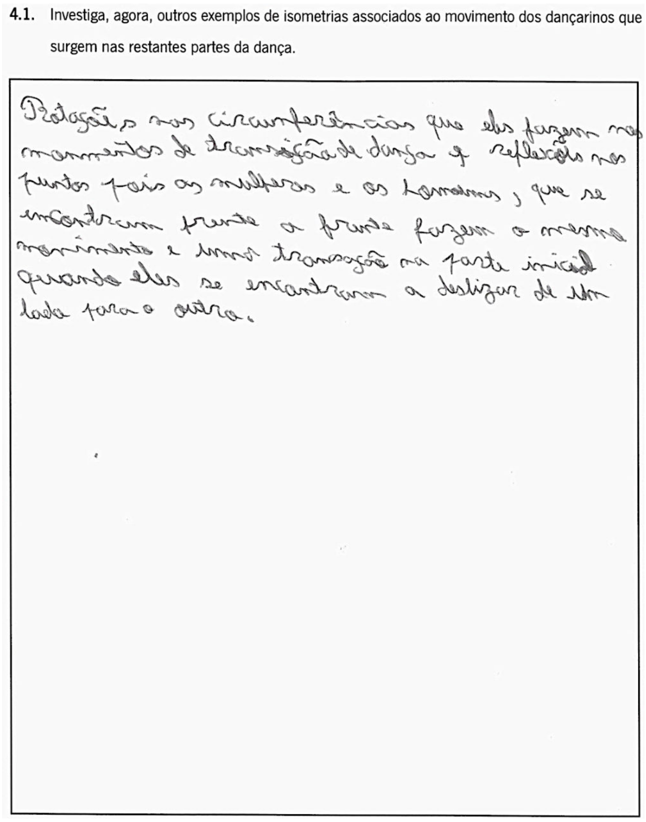

4.1. Investiga, agora, outros exemplos de isometrias associados ao movimento dos dançarinos que surgem nas restantes partes da dança.

Figura 244. Resolução da tarefa **4.1.** pelo aluno ID do 8.° ano, turma λ.

Um aluno, em **4.1.**, referiu mais do que um exemplo de isometria, usando palavras (figura 245).


4.1. Investiga, agora, outros exemplos de isometrias associados ao movimento dos dançarinos que surgem nas restantes partes da dança.

Rotações nas circunferências que eles fazem nos momentos de transição da dança e reflexão nos pontos pois as mulheres e os homens, que se encontram frente a frente fazem o mesmo movimento e uma translação na parte inicial quando eles se encontram a deslizar de um lado para o outro.

Figura 245. Resolução da tarefa **4.1.** pelo aluno JA do 8.° ano, turma λ.

No final, recolheu-se o conjunto de tarefas matemáticas *Vamos bailar o "Maneo"*, não tendo havido tempo para que os alunos pudessem partilhar comentários/observações face ao trabalho desenvolvido.

A atividade ao longo da implementação pedagógica foi marcada por alguma falta de motivação, empenho, e falhas de concentração da generalidade dos alunos relativamente ao trabalho proposto. Ora, a iminência do final do ano letivo parece ter sido um fator determinante para esse comportamento dos alunos, o qual trouxe desafios à gestão do trabalho ao nível da sala de aula, não só pela necessidade constante de promover o envolvimento dos alunos nas tarefas, como também de incitar a comunicação, pelos alunos, das dificuldades que iam sentindo no decurso da sua atividade de exploração das tarefas. Outro fator que influenciou o trabalho dos alunos foi o facto de a implementação pedagógica ter tido um tempo de duração reduzido - 50 minutos - correspondente a metade do tempo que havia sido planeado. As consequências diretas disso foram, por um lado, uma redução acentuada no tempo disponível para os alunos explorarem cada uma das tarefas matemáticas propostas - algo que fez com que uma grande parte dos alunos não tivesse conseguido finalizar essa exploração -, e, por outro lado, uma menor possibilidade para proporcionar aos alunos novas visualizações das partes do vídeo da dança em estudo. Tratando-se de uma dança folclórica galega, cuja coreografia é composta por partes muito bem definidas, teria sido proveitoso para os alunos que o tempo de duração da implementação pedagógica lhes tivesse permitido observar e apreender, de modo paulatino, cada uma das distintas partes que formam a dança. Ora, não tendo havido possibilidade para isso, por falta de tempo, foi preciso introduzir, de uma forma mais imediata, as diversas partes da dança, identificando-se essas partes diretamente no vídeo, ao invés de essa construção ser feita pelos próprios alunos a partir das informações que surgem entre as tarefas.

Analisando a atividade dos alunos ao longo da exploração das diferentes tarefas matemáticas, é possível conferir que, em termos genéricos, todas as tarefas criaram um certo constrangimento aos alunos, por dependerem diretamente da análise matemática da dança folclórica, ou de partes desta. Não obstante, houve certas tarefas em que as dificuldades dos alunos foram mais notórias. Foi o caso, por exemplo, das tarefas **2./2.1./2.2.**, que requeriam o estudo, em termos matemáticos, de dois tipos diferentes de movimentos de rotação que são realizados na dança, e que adquirem o nome de "tablóns". A exploração desses movimentos foi particularmente complexa para os alunos da turma, sobretudo nos termos propostos em **2.2.**, tendo sido necessário intervir, junto dos alunos, para auxiliar a sua atividade. Comparativamente, a investigação dos "embotados" proposta nas tarefas **3./3.1./3.2.** não foi tão difícil para os alunos, ainda que nem todos tenham conseguido ser bem-sucedidos na resolução de tais tarefas. As potencialidades das tarefas **4./4.1.** foram comprometidas pela falta de tempo, não só para a atividade dos alunos, como também para uma nova visualização do vídeo da dança, entendida como fundamental.

7.2.6. Rega rega, Regadinho

O conjunto de tarefas matemáticas *Rega rega, Regadinho* foi implementado na já dita turma α do 6.º ano de escolaridade, de uma escola artística especializada no ensino da música, situada em Braga.

No início da implementação pedagógica, com a duração total de 50 minutos, apresentou-se a dança folclórica *Regadinho*, do *Grupo Folclórico de Vila Verde*, como ponto de partida para introduzir a música que acompanha essa dança. Para isso, leu-se, em plenário, a informação que surge apresentada antes das tarefas *Rega rega, Regadinho*, entretanto distribuídas aos alunos. No seguimento, os alunos tiveram oportunidade de ouvir e ficar a conhecer a música que acompanha a dança *Regadinho*. Logo nesse momento, diversos alunos da turma começaram, explicitamente, a ler a partitura dessa música - exposta numa das primeiras tarefas -, percorrendo, com o dedo, as várias linhas da partitura dada, à medida que a música ia sendo reproduzida. O primeiro contacto dos alunos com a partitura foi, portanto, realizado por iniciativa dos próprios alunos, tornando-se, assim, mais significativo para eles. Posteriormente, os alunos iniciaram a resolução das tarefas, individualmente. A modalidade de trabalho individual veio em resultado das regras de controlo da pandemia de COVID-19 prescritas para as escolas.

Após terem lido o enunciado da tarefa **1.**, no qual é feita uma breve alusão à existência de padrões nas peças musicais em geral, os alunos avançaram para a exploração da tarefa **1.1.**, que propõe a identificação de frases que se repetiam na partitura da música que acompanha a dança *Regadinho*, facultada nessa tarefa. Ora, as dificuldades experimentadas pelos alunos na resolução da tarefa **1.1.** relacionaram-se, exclusivamente, com a maneira como eles poderiam assinalar, na partitura facultada, as frases que identificavam como sendo repetidas. Uma vez que, no enunciado da tarefa **1.1.**, nada é dito a esse respeito, a maioria dos alunos da turma defrontou-se com essa dificuldade, pelo que, a dada altura, se optou por prestar um esclarecimento em plenário, referindo-se, ao grupo-turma, que poderiam marcar as frases repetidas utilizando, por exemplo, as mesmas cores, letras ou, até mesmo, algarismos. Depois disso, todos os alunos da turma, sem exceção, conseguiram resolver a tarefa **1.1.** com sucesso, tendo sido bastante céleres na identificação das frases que se repetiam na partitura da música em causa.

O avanço dos alunos da turma para a exploração da tarefa **2.** ocorreu praticamente em simultâneo. Em **2.**, os alunos começaram por explorar o gráfico aí apresentado, no qual se encontra representada a primeira linha da partitura da música que acompanha a dança *Regadinho*; tal gráfico tem como referência a duração das notas musicais - eixo das abcissas - e a altura das notas musicais - eixo das ordenadas. Os alunos da turma não expressaram dúvidas, nem colocaram questões a respeito do gráfico exposto, tendo avançado diretamente para a resolução da tarefa **2.1.**, sem ter sido realizada qualquer intervenção.

Na tarefa **2.1.**, é solicitado aos alunos que expliquem a utilização de diferentes cores na linha que representa o gráfico dado. Uma vez mais, a resposta à tarefa **2.1.** tornou-se imediata para praticamente todos os alunos da turma, que prontamente entenderam que o uso de diferentes cores tinha a ver com as diferentes figuras rítmicas - colcheia, semicolcheia e semínima - que estariam a ser representadas. Nesse sentido, ao nível da tarefa **2.1.**, os alunos não encontraram quaisquer obstáculos à sua atividade. Mesmo tendo existido uma certa diversidade nas respostas dadas em **2.1.**, genericamente todos os alunos da turma foram capazes de formular uma resposta correta, baseada no argumento referido acima.

Na tarefa **2.2.**, os alunos deveriam focalizar a sua atenção numa parte específica da linha que representa o gráfico introduzido na tarefa **2.**, destacada com maior espessura. Desde logo, vários alunos da turma expressaram não terem conseguido identificar a parte da linha do gráfico visada na tarefa **2.2.**, visto que a mesma não aparecia suficientemente destacada, tendo levantado dúvidas. Ora, essa questão foi resolvida junto de cada um dos alunos que se depararam com esse obstáculo, tendo-se esclarecido diretamente esses alunos em relação à parte da linha do gráfico pretendida. A proposta da tarefa **2.2.** consiste em identificar a isometria presente nessa parte da linha do gráfico. Ora, se até ao momento os alunos da turma em geral tinham resolvido as tarefas de forma rápida, assertiva, e sem enfrentarem constrangimentos de maior, ao nível da tarefa **2.2.**, o panorama foi bastante diferente, não tendo sido imediato, para os alunos, identificarem a isometria presente na parte da linha do gráfico salientada. Como resultado, a maior parte dos alunos da turma solicitou apoio na resolução da tarefa **2.2.**, não tendo conseguido resolver essa tarefa autonomamente. Ora, as intervenções que foram sendo realizadas junto dos diferentes alunos tornaram-se, assim, um apoio fundamental para a sua resolução da tarefa **2.2.**, sem o qual os alunos teriam, provavelmente, ficado num impasse, ou até mesmo abandonado a tarefa. Nas resoluções da tarefa **2.2.** apresentadas pelos alunos da turma, quase todos conseguiram identificar, corretamente, a reflexão axial como sendo a isometria existente na parte da linha do gráfico destacada. Apesar disso, a maioria desses alunos não foi capaz de justificar a sua resposta, tendo exibido uma resolução incompleta da tarefa **2.2.**, que se limitou à indicação da isometria supracitada (figura 246). Foram muito poucos os alunos da turma que, em **2.2.**, conseguiram elaborar uma justificação para a isometria indicada, tendo, dessa forma, alcançado uma resolução totalmente certa da tarefa (figura 247). Há, ainda a destacar dois alunos que, em **2.2.**, não conseguiram desenvolver qualquer tipo de resolução.

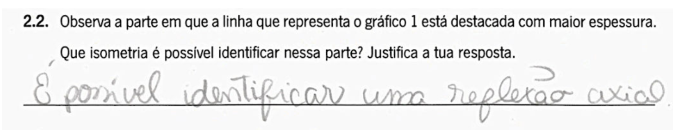
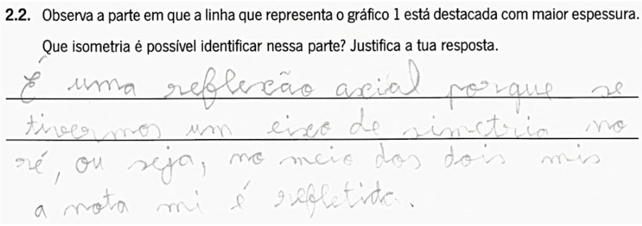

2.2. Observa a parte em que a linha que representa o gráfico 1 está destacada com maior espessura.
Que isometria é possível identificar nessa parte? Justifica a tua resposta.
É possível identificar uma reflexão axial

Figura 246. Resolução da tarefa **2.2.** pelo aluno AM do 6.º ano, turma α.

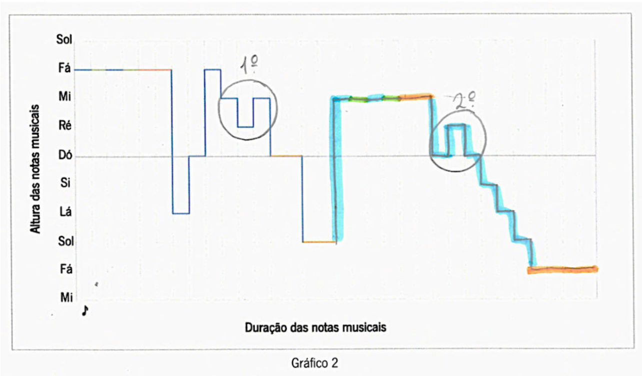


2.2. Observa a parte em que a linha que representa o gráfico 1 está destacada com maior espessura. Que isometria é possível identificar nessa parte? Justifica a tua resposta.

É uma reflexão axial porque se tivermos um eixo de simetria no ré, ou seja, no meio dos dois mis a nota mi é refletida.

Figura 247. Resolução da tarefa **2.2.** pelo aluno AP do 6.° ano, turma α.

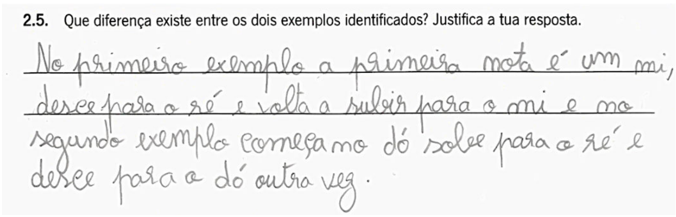
No seguimento das tarefas anteriores, a tarefa **2.3.** propõe aos alunos que representem, num novo gráfico introduzido na tarefa, a segunda linha da partitura da música que acompanha a dança *Regadinho*; nesse gráfico, já se encontrava representada a primeira linha da partitura dessa música, sendo preciso completá-lo, em conformidade com a representação gráfica adotada para a primeira linha. De um modo geral, a resolução da tarefa **2.3.** não criou dificuldades aos alunos, que conseguiram completar o gráfico dado com relativa facilidade. A única questão levantada por alguns alunos da turma teve a ver com o código de cores usado na representação da primeira linha da partitura, que muitos não conseguiram manter, por não disporem dessas cores. À parte essa questão, que foi resolvida pelo uso de cores parecidas, não se registaram outras complicações na resolução da tarefa **2.3.** pelos alunos. Após terem completado o gráfico da tarefa **2.3.**, os alunos avançaram para a exploração da tarefa **2.4.**, tentando descobrir, na representação gráfica que haviam completado, outro exemplo do mesmo tipo de isometria analisada em **2.2.**, e que a maioria dos alunos tinha identificado como sendo a reflexão axial. Ora, embora na tarefa **2.2.** não tivesse sido imediato para os alunos perceberem qual era a isometria presente na parte da linha do gráfico destacada, o que é facto é que, na tarefa **2.4.**, os alunos, em geral, mostraram-se bastante hábeis na identificação do segundo exemplo dessa isometria, assinalando-o corretamente no gráfico que tinham completado, ou até mesmo marcando os dois exemplos (figura 248).



2.4. Identifica, na segunda linha da partitura que acabaste de representar no gráfico, **outro exemplo** do mesmo tipo de isometria identificado em 2.2.

Figura 248. Resolução da tarefa **2.4.** pelo aluno LR do 6.° ano, turma α.

Importa salientar que alguns alunos da turma, inicialmente, leram a tarefa **2.4.** e, sem terem desenvolvido nenhuma resolução na mesma, avançaram para a tarefa seguinte. Ora, o facto de, em **2.4.**, não existir um espaço fixo de resposta levou a que esses alunos descurassem a leitura e a interpretação da tarefa. Todavia, ao lerem o enunciado da tarefa **2.5.**, os alunos em causa aperceberam-se do lapso cometido, tendo recuado à tarefa **2.4.**, cuja resolução se afigurava necessária para a exploração da tarefa posterior. Em particular, na tarefa **2.5.**, é requerido aos alunos que explorem a diferença existente entre os dois exemplos de reflexão axial previamente identificados no gráfico, e que justifiquem a sua resposta. Os alunos, em geral, conseguiram perceber qual era essa diferença, e foram capazes de comunicá-la, por escrito, na tarefa **2.5.**, tendo fundado a sua resposta, sobretudo, em referentes musicais (figura 249).


2.5. Que diferença existe entre os dois exemplos identificados? Justifica a tua resposta.

No primeiro exemplo a primeira nota é um mi, desce para o ré e volta a subir para o mi e no segundo exemplo começa no dó sobe para o ré e desce para o dó outra vez.

Figura 249. Resolução da tarefa **2.5.** pelo aluno LR do 6.º ano, turma α.

Mesmo tendo sido bem-sucedidos ao nível do reconhecimento da diferença que distinguia os dois exemplos da mesma isometria investigados, os alunos da turma não foram capazes de alcançar uma resolução completa da tarefa **2.5.**, porque não apresentaram nenhuma justificação para a resposta dada. Ora, mesmo tendo-se chamado a atenção dos alunos para a justificação da resposta que era requerida no enunciado da tarefa **2.5.**, nenhuma justificativa foi explicitamente apresentada nas suas resoluções - algo que levantou dúvidas relativamente à pertinência e interesse da parte da tarefa alusiva à justificação.

No avanço dos alunos para a exploração das tarefas **3.**/**3.1.**, o tempo disponível ainda lhes possibilitou um envolvimento profundo no trabalho proposto, sem terem que apressar a sua atividade. Ao partirem para a exploração da tarefa **3.**, os alunos da turma começaram por explorar o novo gráfico aí exposto, no qual se encontra representada a partitura da música que acompanha a dança *Regadinho*, até ao momento em que se inicia o coro; esse gráfico, à semelhança dos anteriores, tem como referência a duração das notas musicais - eixo das abcissas - e a altura das notas musicais - eixo das ordenadas. No seguimento, é proposta aos alunos, na tarefa **3.1.**, a exploração dos padrões (ou regularidades) existentes na parte da partitura representada no gráfico introduzido. Ora, a primeira reação da quase totalidade dos alunos mediante a leitura da tarefa **3.1.** foi não saberem o que era para fazer na mesma. No caso, o verbo ‘explorar’ - utilizado no enunciado da tarefa **3.1.** - revelou-se pouco preciso para a maioria dos alunos, sob o ponto de vista do trabalho matemático que era esperado que eles realizassem.

Dessa forma, tornou-se necessário esclarecer, em plenário, o significado do verbo 'explorar', no respetivo contexto. Para isso, partiu-se das ideias prévias que foram sendo partilhadas por alguns alunos, o que fez com eles compreendessem, de uma maneira mais significativa, o sentido de 'explorar', na tarefa. Outra questão que entravou a atividade dos alunos da turma na tarefa **3.1.** - já sucedida na tarefa **1.1.** - prendeu-se com o facto de os alunos não saberem como poderiam identificar, na sua resolução da tarefa, os padrões (ou regularidades) existentes no gráfico que representava a parte da partitura considerada. Nesse caso em particular, o facto de o espaço definido para a resolução da tarefa **3.1.** ser extenso fez com que os alunos tivessem ficado hesitantes quando pensaram em assinalar, diretamente no gráfico, os padrões (ou regularidades) aí existentes, sem perceberem para que serviria, então, o espaço de resolução criado. Ora, para não se correr o risco de influenciar as resoluções a desenvolver pelos alunos na tarefa **3.1.**, procurou-se prestar um esclarecimento amplo relativamente à questão supracitada, consentindo que eles poderiam utilizar o espaço definido para a resolução e/ou outro espaço, desde que clarificassem, da melhor forma possível, os padrões (ou regularidades) existentes no gráfico apresentado. Individualmente, e sempre que os alunos assim o solicitaram, foram dadas informações mais concretas.

Nas resoluções da tarefa **3.1.** apresentadas pelos alunos, todos os alunos identificaram certos padrões visíveis no gráfico dado. Uma tendência verificada foi a de os alunos, ao longo da sua atividade, terem começado por identificar pequenos segmentos que se repetiam na parte da partitura da música representada no gráfico, os quais abriram caminho para a identificação de padrões sucessivamente maiores, culminando na conclusão da existência de duas macro partes na parte da partitura considerada. Ora, isso ficou evidente nas resoluções da tarefa **3.1.** apresentadas por alguns alunos, que explicitaram a existência dessas duas macro partes no gráfico, subdivididas em outras partes menores (figura 250). Contudo, houve outros alunos da turma que, no gráfico sob análise em **3.1.**, apenas conseguiram assinalar pequenos padrões aí existentes (figura 251), ou outros um pouco mais amplos (figura 252), sem, no entanto, terem sido capazes de integrar esses padrões noutros mais abrangentes. Por oposição, houve outros alunos que, em **3.1.**, identificaram, quase imediatamente, as duas macro partes existentes no gráfico, não tendo tido necessidade de realizar uma análise localizada do gráfico para perceberem que a música que acompanha a dança *Regadinho* é composta por duas partes repetidas (figura 253). Ora, tais alunos parecem ter mobilizado, para a sua resolução da tarefa **3.1.**, conhecimentos musicais associados à análise da partitura da música em exploração, o que contribuiu para que percecionassem, com sucesso, o gráfico dado, tendo em consideração esses referentes musicais. De um modo contrário, para os alunos que, em **3.1.**, fizeram uma análise do gráfico dado sem, aparentemente, o terem ligado à partitura musical, a identificação de padrões mais extensos parece ter sido uma tarefa mais complexa.

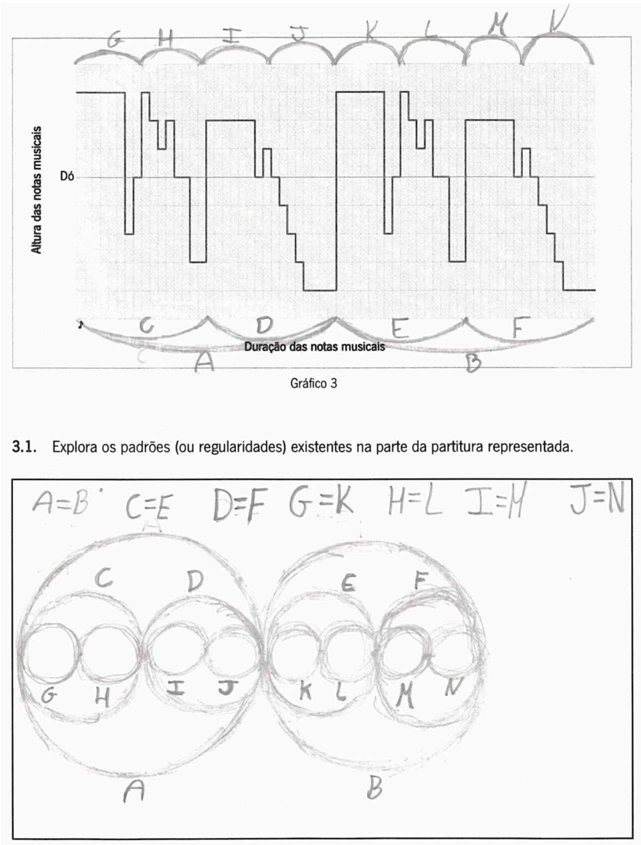


Figura 250. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno LG do 6.° ano, turma α.

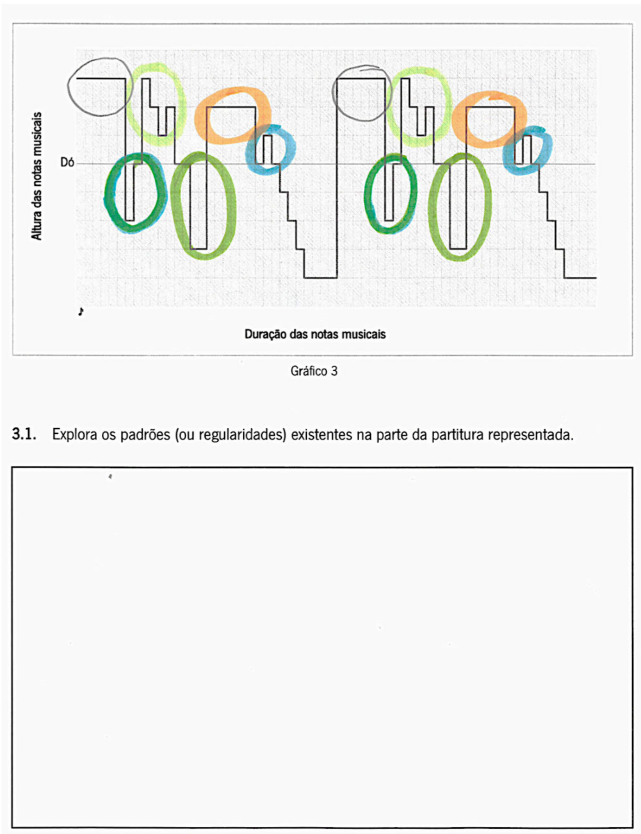


Figura 251. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno LR do 6.° ano, turma α.

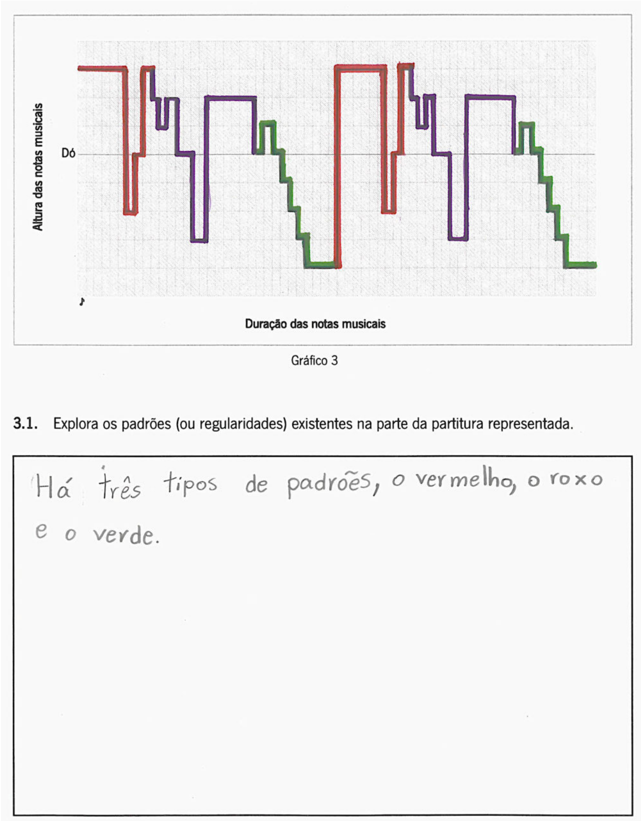


Figura 252. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno ML do 6.º ano, turma α.

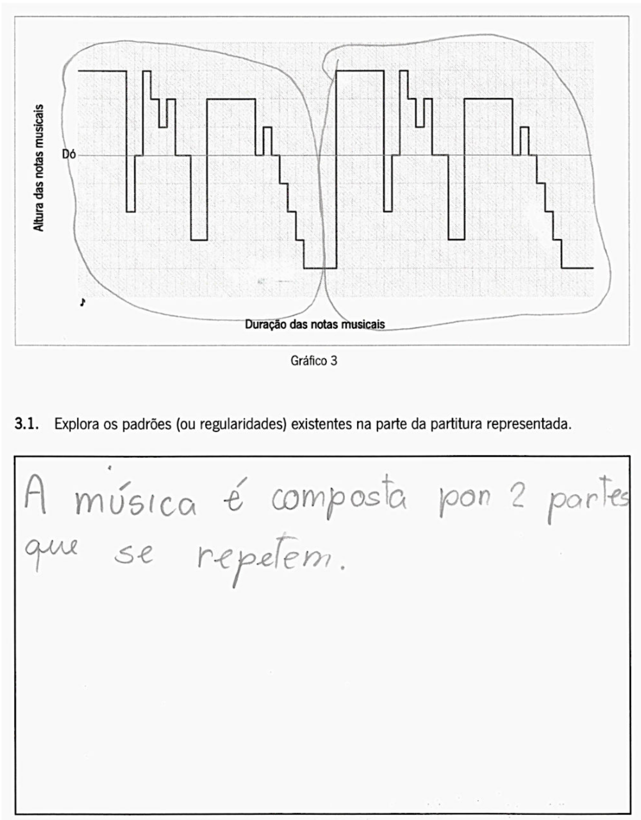


Figura 253. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno HL do 6.º ano, turma α.

No final, recolheu-se o conjunto de tarefas matemáticas *Rega rega, Regadinho*, tendo sido dada oportunidade aos alunos para partilharem algum comentário/observação face ao trabalho desenvolvido.

Numa perspetiva global sobre a atividade dos alunos ao longo da implementação pedagógica, pode-se considerar que a aplicação das tarefas ligadas à música que acompanha a dança folclórica *Regadinho* - que os alunos tiveram oportunidade de ouvir e ficar a conhecer - foi atrativa para os alunos, tendo comunicado, eles próprios, o seu interesse, no momento final de diálogo. A respeito do disposto, convém ter presente que os alunos da turma frequentavam uma escola artística especializada no ensino da música, tendo sido este um fator que, possivelmente, favoreceu o envolvimento e motivação deles. As tarefas propostas, pela sua conexão à música, tornaram a atividade particularmente significativa para os alunos em causa, por irem ao encontro dos seus interesses e da sua formação vocacional em música.

Analisando a atividade dos alunos na sequência da exploração das diferentes tarefas matemáticas, é possível notar que as tarefas propostas foram, na sua maioria, acessíveis para a generalidade dos alunos da turma, tendo havido um pequeno número de tarefas que se revelou mais desafiante para eles. Do conjunto de tarefas matemáticas propostas, as que focalizavam aspetos musicais da partitura da música que acompanha a dança *Regadinho* revelaram-se particularmente acessíveis para os alunos. Exemplo disso são as tarefas **1.1.**, **2.1.** e **2.3.**, cujas resoluções não criaram dificuldades significativas aos alunos da turma em geral. Ora, é provável que o bom desempenho dos alunos nessas tarefas tenha sido propiciado pelo facto de eles usufruírem de formação no âmbito do ensino especializado da música. No que concerne às tarefas que requeriam a análise, em termos matemáticos, da partitura da música - particularmente as tarefas **2.2.** e **3.1.** -, os alunos, na generalidade, sentiram-se mais desafiados nas suas capacidades matemáticas, tendo experimentado maiores dificuldades na resolução dessas tarefas. Tais tarefas comportaram um grau de desafio apreciável para os alunos envolvidos, uma vez que a exploração proposta ia além dos conhecimentos musicais dos alunos, envolvendo questões matemáticas, como são, em **2.2.**, a identificação de isometrias, e, em **3.1.**, a exploração de padrões (ou regularidades).

Houve certas tarefas matemáticas - designadamente as tarefas **1.1.** e **3.1.** - cuja enunciação não se constituiu objetiva para os alunos em relação ao que era esperado que eles fizessem nas mesmas - algo que trouxe obstáculos ao seu trabalho individual, tendo sido necessário apoiá-los nesse ponto. Houve, ainda, uma ocorrência particular sucedida na tarefa **2.5.**, cujo enunciado requeria a elaboração de uma justificação para a resposta dada, à qual nenhum aluno da turma atendeu na sua resolução; ora, esse desempenho generalizado fez emergir dúvidas no que toca à relevância dessa parte da tarefa.

Por fim, o tempo de duração da implementação pedagógica - no total, 50 minutos -, revelou-se suficiente para que todos os alunos da turma conseguissem concluir a exploração das tarefas propostas.

7.2.7. Ao ritmo da "[R]ota"

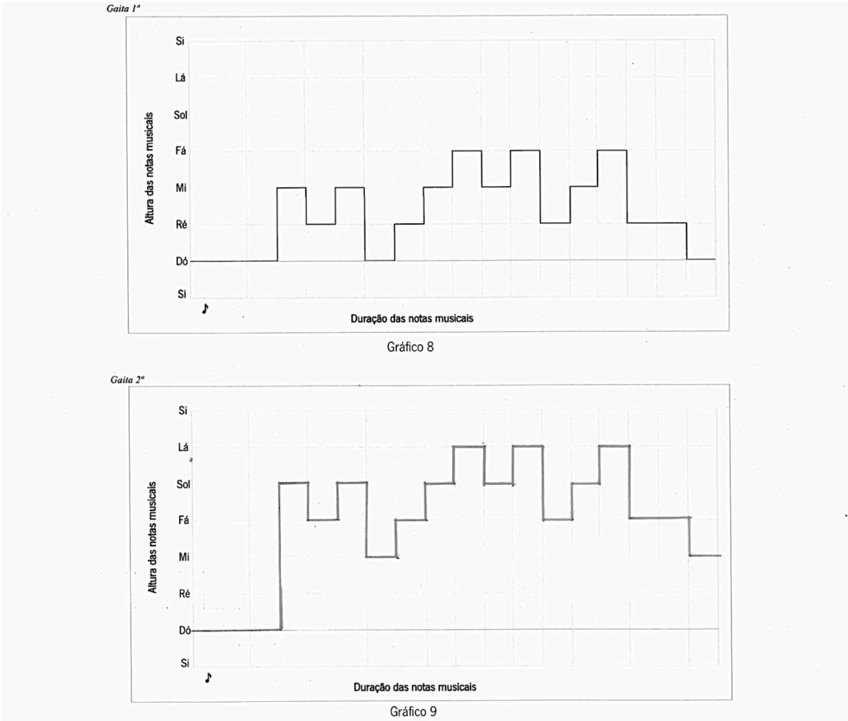
O conjunto de tarefas matemáticas *Ao ritmo da "[R]ota"* foi implementado na já dita turma δ do 8.º ano de escolaridade, de uma escola artística especializada no ensino da música, situada em Braga.

No início da implementação pedagógica, com a duração total de 50 minutos, apresentou-se a dança folclórica *Jota de Pol*, da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*, como ponto de partida para introduzir o acompanhamento musical dessa dança. Para isso, leu-se, em plenário, a informação que surge apresentada antes das tarefas *Ao ritmo da "[R]ota"*, entretanto distribuídas aos alunos. Em seguida, os alunos tiveram oportunidade de ouvir e ficar a conhecer a música que acompanha a dança *Jota de Pol*. No momento em que a música estava a ser reproduzida, foi possível verificar que uma grande parte dos alunos da turma começou a focar a sua atenção no trecho da partitura dessa música, exposto na primeira tarefa. O objetivo dos alunos foi tentarem reconhecer esse trecho da partitura musical à medida que a música ia sendo reproduzida - algo que se notou ter sido alcançado pelos alunos. Dessa forma, os alunos da turma, mesmo antes de terem iniciado a exploração das tarefas matemáticas, tomaram a iniciativa de explorar um trecho da partitura da música que seria alvo de investigação. Posteriormente, os alunos da turma deram início à exploração das tarefas, a qual teve, necessariamente, que ser realizada na modalidade de trabalho individual, por consequência das medidas excecionais definidas para os estabelecimentos de ensino, no âmbito do combate à pandemia da doença COVID-19.

Conforme solicitado no enunciado da tarefa **1.**, os alunos voltaram a observar o trecho da partitura da música que acompanha a dança folclórica *Jota de Pol*, tocada a duas gaitas; nesse trecho da partitura, encontra-se assinalada, a sombreado, a parte B da música. Na tarefa **1.1.**, cada uma das linhas da parte sombreada da partitura musical aparece representada, em quatro gráficos diferentes, para a *Gaita 1ª* - com as apogiaturas desconsideradas -, sendo proposto aos alunos que completem os gráficos expostos para a *Gaita 2ª*. Todos os gráficos considerados na tarefa **1.1.** têm como referência a duração das notas musicais - eixo das abcissas - e a altura das notas musicais - eixo das ordenadas. De uma forma geral, os alunos da turma conseguiram compreender o enunciado da tarefa **1.1.**, tendo iniciado, prontamente, a construção dos gráficos em falta para a *Gaita 2ª*, sem terem expressado dúvidas ou colocado questões. No decorrer do processo de monitorização do trabalho individual dos alunos, foi possível constatar que a generalidade dos alunos da turma foi capaz de desenvolver uma exploração da tarefa **1.1.** com êxito, tendo todos eles sido bem-sucedidos na elaboração dos quatro gráficos pretendidos para a *Gaita 2ª*. Ainda que, ao longo da sua atividade, alguns alunos tivessem cometido certas incorreções, o que se verificou foi que os alunos, por si próprios, eram capazes de, logo no imediato, detetar e corrigir os erros.

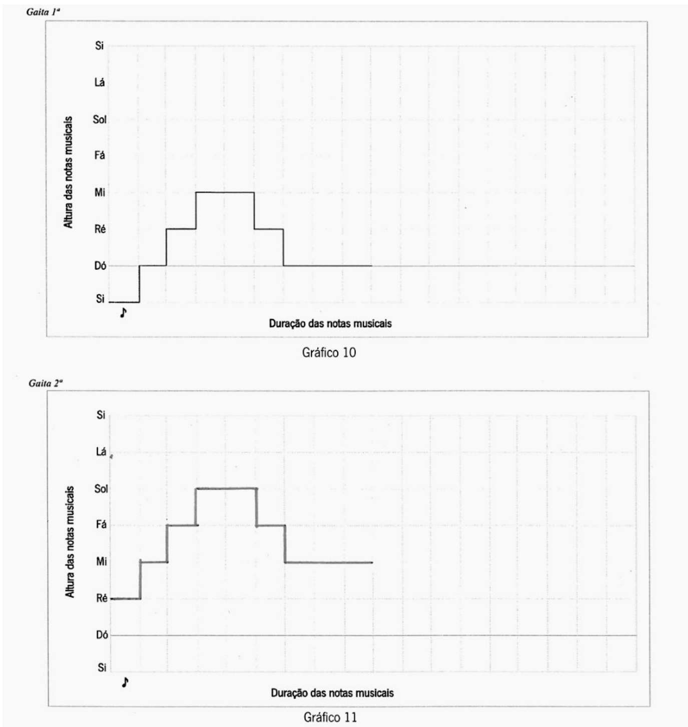
Aproximadamente em simultâneo, os alunos da turma avançaram para a exploração da tarefa **1.2.**, em que é solicitada uma comparação entre os gráficos que os alunos haviam elaborado, em **1.1.**, para cada linha da partitura referente à *Gaita 2ª*, e os gráficos já expostos nessa tarefa para a *Gaita 1ª*. Ora, numa nota integrada no enunciado da tarefa **1.2.**, encontra-se explicitado que os alunos deveriam apresentar as suas conclusões - isto é, as semelhanças e as diferenças identificadas na análise comparativa dos gráficos considerados em **1.1.** - junto, precisamente, de cada um dos pares de gráficos. Mesmo assim, o facto de, na tarefa **1.2.**, não existir um espaço claramente definido para a apresentação das respostas gerou dúvidas a uma grande parte dos alunos da turma no que toca à concretização da resolução da tarefa, e, em certos casos, levou mesmo a que alguns alunos tivessem desconsiderado totalmente a resolução da tarefa **1.2.**, e que tivessem avançado diretamente para a tarefa seguinte. Diante do sucedido, houve necessidade de, em plenário, chamar a atenção dos alunos da turma para uma leitura mais atenta do enunciado da tarefa **1.2.**, especialmente para a nota integrada no mesmo, a qual respondia à principal dúvida que havia emergido entre os alunos aquando da exploração da tarefa. Nesse momento de troca de ideias em grande grupo, os alunos tiveram oportunidade de perceber como deveriam proceder para resolver a tarefa **1.2.**, mesmo não havendo um local predefinido para a sua resposta junto aos pares de gráficos. Quanto aos alunos que haviam desconsiderado a tarefa **1.2.**, eles voltaram atrás e iniciaram essa exploração em conformidade com o que havia sido discutido em plenário.

Apesar dos obstáculos que emergiram no início da exploração da tarefa **1.2.**, facto é que os alunos, depois de terem resolvido as suas dúvidas, tiveram um bom desempenho ao nível da resolução da tarefa. No que concerne aos dois primeiros pares de gráficos expostos em **1.1.** (gráficos 4-5 e 6-7), foi imediato para os alunos da turma perceberem que os gráficos de cada um desses pares eram totalmente iguais. Como tal, a comparação dos gráficos dos dois primeiros pares deu origem a respostas breves e concisas. Na comparação dos terceiros e dos quartos pares de gráficos integrados em **1.1.** (gráficos 8-9 e 10-11), as respostas dadas pelos alunos, embora tivessem sido mais extensas e variáveis, revelaram-se corretas quanto à identificação das semelhanças e das diferenças existentes entre os pares de gráficos em causa. A maior parte dos alunos da turma baseou-se em elementos musicais para comunicar, nas respostas dadas na tarefa **1.2.**, as semelhanças e as diferenças existentes entre os gráficos 8 e 9 (figura 254), bem como para expor as semelhanças e as diferenças existentes entre os gráficos 10 e 11 (figura 255). Ora, apesar de essa ter sido a tendência mais comum entre os alunos da turma, houve alguns alunos que, nas respostas apresentadas à tarefa **1.2.** relativas à exploração das semelhanças e das diferenças existentes entre esses dois últimos pares de gráficos, se demarcaram dos seus conhecimentos musicais, tendo-se cingido aos dados permitidos pela análise/interpretação dos gráficos em si (figuras 256 e 257).



Os gráficos 8 e 9 são diferentes a partir do segundo compasso sendo o 9 mais agudo, no entanto, têm o mesmo ritmo.

Figura 254. Resolução da tarefa **1.2.** (comparação dos gráficos 8 e 9) pelo aluno PA do 8.º ano, turma δ.



Os gráficos 10 e 11 são diferentes sendo o 11 mais agudo, no entanto, têm o mesmo ritmo.

Figura 255. Resolução da tarefa **1.2.** (comparação dos gráficos 10 e 11) pelo aluno PA do 8.º ano, turma δ.

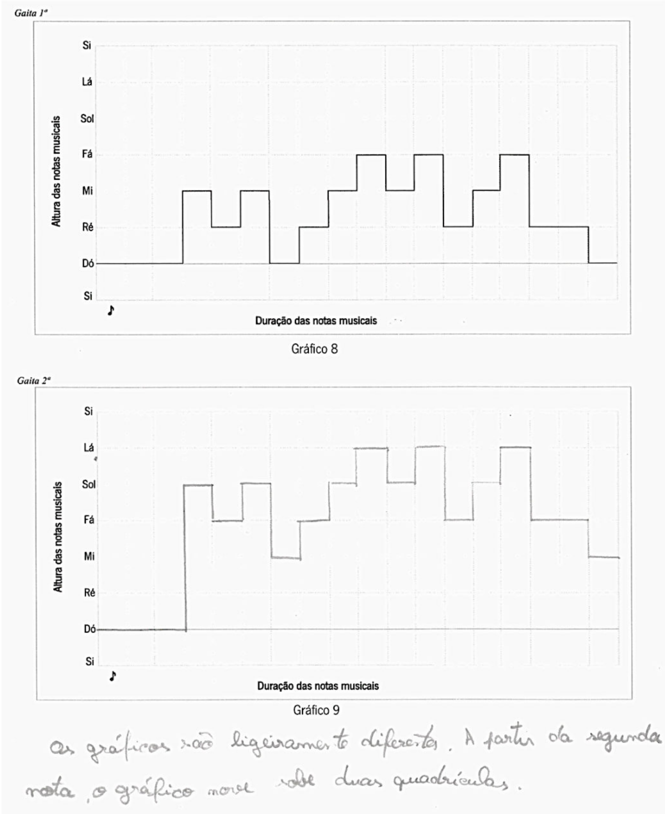


Figura 256. Resolução da tarefa **1.2.** (comparação dos gráficos 8 e 9) pelo aluno LS do 8.º ano, turma δ.

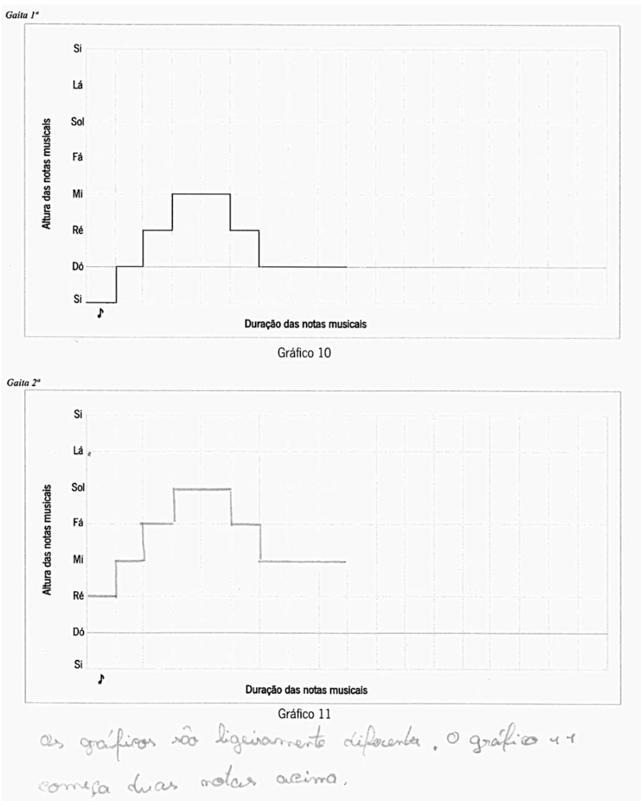


Figura 257. Resolução da tarefa **1.2.** (comparação dos gráficos 10 e 11) pelo aluno LS do 8.º ano, turma δ.

Em tempos diferentes, os alunos da turma foram avançando para a exploração das tarefas **2./2.1.**, ainda restando tempo suficiente para que todos os alunos conseguissem desenvolver a sua atividade. No processo de exploração das últimas tarefas matemáticas, os alunos começaram por focar a sua atenção no novo gráfico introduzido em **2.**, no qual se encontra representado, para a *Gaita 1ª*, o trecho da partitura musical correspondente à parte B da música que acompanha a dança folclórica *Jota de Pol*. Em continuidade, os alunos deram início ao trabalho proposto na tarefa **2.1.**, que visa a exploração dos padrões existentes na melodia previamente representada e das isometrias associadas a esses padrões. No enunciado da tarefa **2.1.**, é apresentada uma sugestão de exploração, que propõe aos alunos que comecem por identificar diferentes motivos que surgem repetidos no gráfico exposto previamente. Ora, tal sugestão revelou-se útil, no sentido em que constituiu o ponto de partida para a atividade dos alunos.

De um modo geral, todos os alunos da turma, na sua resolução da tarefa **2.1.**, foram capazes de identificar determinados motivos que aparecem repetidos no gráfico sob exploração na referida tarefa. Não obstante, quer os motivos identificados, quer a exploração realizada acerca das isometrias associadas a tais motivos, variaram nas resoluções da tarefa **2.1.** apresentadas pelos alunos da turma. Ora, certos alunos, em **2.1.**, limitaram a sua resolução da tarefa à identificação de motivos particulares que surgem repetidos no gráfico considerado - sem os integrarem em padrões mais abrangentes -, e à associação desses motivos a translações - sem definirem o vetor associado às translações (figura 258). Esses alunos realizaram uma exploração muito superficial do gráfico nos termos propostos em **2.1.** - algo que, seguramente, não foi motivado por falta de tempo para o desenvolvimento da sua atividade. Por sua vez, outros alunos, em **2.1.**, já foram capazes de reconhecer, no gráfico dado, duas partes mais amplas que aí aparecem repetidas, tendo identificado a translação como sendo a isometria associada a esse padrão de repetição, e tendo, ainda, determinado o vetor que define essa translação (figura 259). A abordagem destes últimos alunos à tarefa **2.1.** teve um maior alcance do que a dos alunos anteriores; ainda assim, a exploração dos padrões existentes na melodia representada no gráfico em consideração, bem como das isometrias associadas a esses mesmos padrões poderia ter sido mais aprofundada. Ora, foi o que fizeram determinados alunos da turma, que, na sua resolução da tarefa **2.1.**, para além de terem identificado as duas partes que surgem repetidas no gráfico em causa, e de terem caracterizado a translação associada a esse padrão de repetição, identificaram outros padrões, que se caracterizam pela existência de reflexões axiais, cujos eixos foram devidamente marcados pelos alunos (figura 260). Há a registar, ainda, um pequeno número de alunos da turma que, na resolução apresentada em **2.1.**, para além de ter incorporado tudo o que foi descrito para as resoluções anteriores, identificou um outro padrão de repetição, associado a uma translação definida por um vetor de direção diagonal (figura 261).

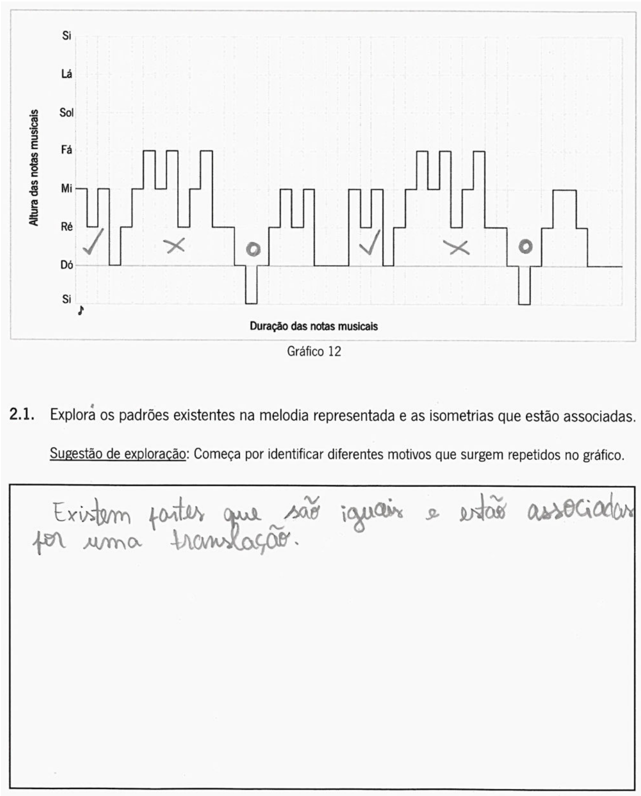


Figura 258. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno PA do 8.º ano, turma δ.

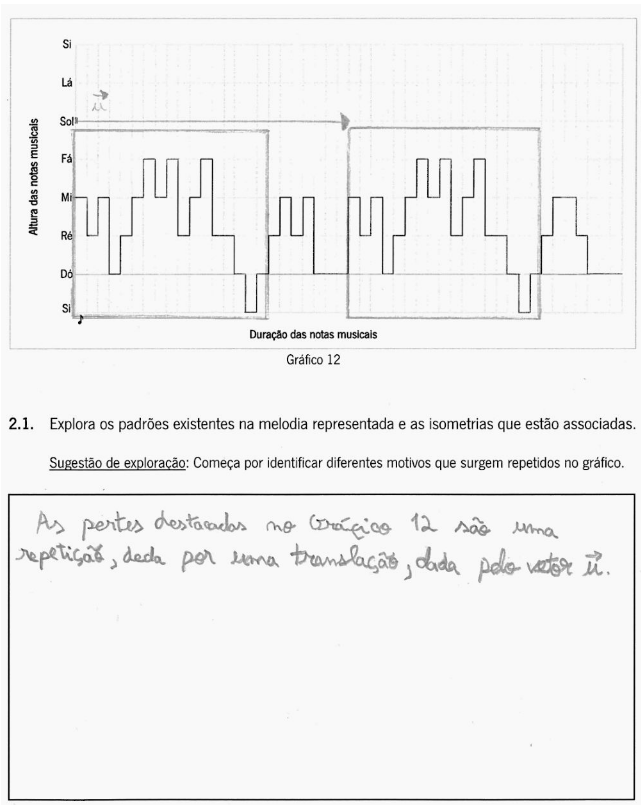


Figura 259. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno RP do 8.º ano, turma δ.

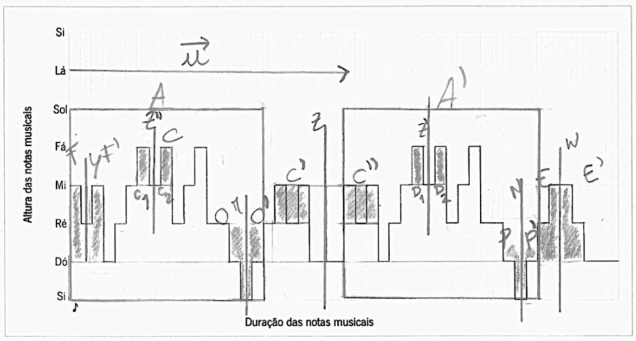


Gráfico 12

2.1. Explora os padrões existentes na melodia representada e as isometrias que estão associadas.

Sugestão de exploração: Começa por identificar diferentes motivos que surgem repetidos no gráfico.

Entre o conjunto A e A' existe uma transla-
ção associada ao vetor $\vec{u}$.
Entre C' e C'' há uma reflexão de eixo Z.
Em D, entre D_1 e D_2 há uma reflexão de eixo Z'.
Em C, entre C_1 e C_2 há uma reflexão de Z''.
Entre E e E' há uma reflexão do eixo W.
Entre F e F' há uma reflexão do eixo Y.
Entre P e P' há uma reflexão de eixo N.
Entre O e O' há uma reflexão do eixo M.

Figura 260. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno CA do 8.º ano, turma δ.

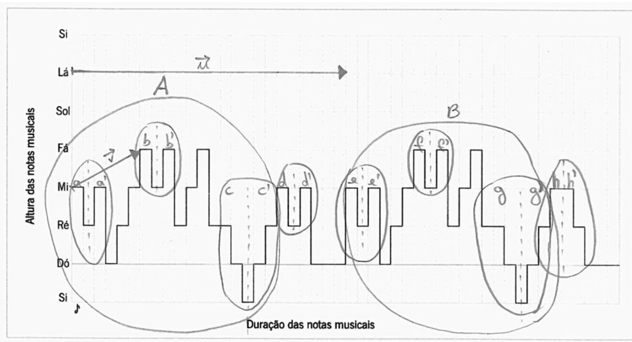


Gráfico 12

2.1. Explora os padrões existentes na melodia representada e as isometrias que estão associadas.

Sugestão de exploração: Começa por identificar diferentes motivos que surgem repetidos no gráfico.

R: Existem 2 motivos que se repetem (assinalados no gráfico 12). O motivo B é a imagem do A pela translação associada ao vetor $\vec{u}$ de 24 quadrículas.
No gráfico existem várias reflexões assinaladas (letras minúsculas).
Está presente também outra translação de vetor $\vec{v}$.

Figura 261. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno CM do 8.º ano, turma δ.

No final, recolheu-se o conjunto de tarefas matemáticas *Ao ritmo da [R]ota*, tendo sido dada oportunidade aos alunos para partilharem algum comentário/observação face ao trabalho desenvolvido.

Colocando em perspetiva a atividade dos alunos ao longo da implementação pedagógica, fica claro que os alunos se envolveram, com entusiasmo, nas tarefas matemáticas ligadas à música que acompanha a dança folclórica *Jota de Pol* - que eles tiveram oportunidade de ouvir e ficar a conhecer. Acerca do disposto, convém lembrar que os alunos da turma frequentavam uma escola artística especializada no ensino da música e, como tal, as tarefas propostas, pela sua conexão à música, permitiram corresponder a uma área de interesse transversal a toda a turma - algo que, provavelmente, contribuiu para suscitar a atividade dos alunos, e que favoreceu o seu empenho, interesse e motivação.

Analisando a atividade dos alunos no processo de exploração das diferentes tarefas matemáticas, é possível atestar que, apesar de algumas dificuldades e percalços, os alunos envolveram-se ativamente no trabalho proposto, tendo alcançado um elevado grau de sucesso na resolução da maioria das tarefas. Do conjunto de tarefas matemáticas propostas, as tarefas **1.**/**1.1.** - que visavam a construção de gráficos para representar, em função da altura e da duração das notas musicais, um trecho da partitura da música que acompanha a dança *Jota de Pol* - revelaram-se acessíveis para os alunos da turma, que puderam mobilizar os seus conhecimentos prévios na área da música para desenvolverem a resolução. A exploração da tarefa **1.2.** trouxe alguns percalços à atividade dos alunos, que foram resultantes do facto de não estar definido, nessa tarefa, um espaço destinado à apresentação das respostas dos alunos. Ora, as consequências disso foram, nalguns casos, os alunos terem-se sentido "perdidos", sem saberem como deveriam proceder para exporem a sua resolução da tarefa **1.2.**, e, noutros casos, terem avançado diretamente para a tarefa subsequente, não atendendo ao trabalho proposto na tarefa em referência. Perante esses obstáculos, foi necessário auxiliar os alunos, através de um esclarecimento em plenário. Ao nível da resolução da tarefa **1.2.** - dedicada à comparação dos gráficos representativos do trecho da partitura musical para a *Gaita 1ª* e para a *Gaita 2ª* -, verificou-se que a maior parte dos alunos da turma se serviu de elementos musicais para elaborar a sua análise comparativa dos diferentes gráficos; todavia, houve alguns alunos que fundaram as suas respostas, apenas, nos dados disponibilizados nos gráficos. De entre as tarefas matemáticas propostas, a última - tarefa **2.1.** - foi a mais desafiante para os alunos. Ora, o facto de a tarefa **2.1.** comportar um certo grau de abertura em termos do que é requerido - exploração de padrões existentes na melodia e das isometrias associadas - determinou abordagens matemáticas diversas dos alunos da turma à tarefa - umas mais superficiais e outras mais aprofundadas.

Por fim, o tempo de duração da implementação pedagógica - no total, 50 minutos -, afigurou-se adequado para que todos os alunos da turma conseguissem finalizar a exploração das tarefas propostas.

7.2.8. A harmonia da "Muiñeira"

O conjunto de tarefas matemáticas *A harmonia da "Muiñeira"* foi implementado na turma δ do 8.º ano de escolaridade, de uma escola artística especializada no ensino da música, situada em Braga.

No início da implementação pedagógica, com a duração total de 50 minutos, apresentou-se a dança folclórica *Muiñeira de Pol*, da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*, como ponto de partida para introduzir o acompanhamento musical dessa dança. Para isso, leu-se, em plenário, a informação que surge apresentada antes das tarefas *A harmonia da "Muiñeira"*, entretanto distribuídas aos alunos. Posteriormente, os alunos tiveram oportunidade de ouvir e ficar a conhecer a música que acompanha a dança *Muiñeira de Pol*. Aquando da reprodução da música, a maior parte dos alunos da turma iniciou, autonomamente, a exploração e a identificação do trecho inicial da partitura dessa música - exposto numa das primeiras tarefas -, antecipando, dessa forma, o trabalho que iria ser desenvolvido *a posteriori*. O desenvolvimento do trabalho dos alunos na sala de aula respeitou as medidas de distanciamento físico estipuladas para as escolas no contexto da pandemia de COVID-19, tendo sido realizado individualmente.

Em **1.**, os alunos da turma leram as informações introduzidas no enunciado, que se reportam à existência frequente de padrões nas peças musicais em geral, os quais podem ser associados a diferentes isometrias, que os compositores das músicas utilizam de um modo mais ou menos consciente. Na continuação, os alunos avançaram para a tarefa **1.1.**, que solicita, em primeira instância, a observação do trecho inicial da partitura da música que acompanha a dança *Muiñeira de Pol* - algo que os alunos já tinham efetuado previamente, por sua autonomia - e, em seguida, a comparação de duas sequências de notas que se encontravam assinaladas no trecho da partitura musical exposto. Ora, embora tivesse sido fácil para os alunos da turna perceberem que as sequências de notas em causa eram iguais, nem todos os alunos entenderam que seria necessário formular, por escrito, uma resposta para a tarefa **1.1.**, tendo-se verificado vários casos de alunos que avançaram sem responderem à tarefa. A auscultação das justificações dos alunos para tal ocorrência permitiu constatar que, para eles, o verbo 'comparar' - utilizado no enunciado da tarefa **1.1.** - não implicava comunicar, por escrito, as conclusões dessa comparação; ademais, o facto de não existir, na tarefa, um espaço pré-definido para a resolução reforçou ainda mais a ideia prévia dos alunos de que não seria necessário formularem uma resposta. Diante disso, foi necessário esclarecer os alunos relativamente à necessidade de apresentarem uma resposta na tarefa **1.1.** - algo que não tinha ficado claro para muitos deles durante a exploração da tarefa. Ora, o entrave surgido na resolução da tarefa **1.1.** foi facilmente ultrapassado, e, no final, todos os alunos da turma acabaram por ser bem-sucedidos na resolução da tarefa, tendo apresentado respostas corretas.

No enunciado da tarefa **1.2.**, constam informações úteis para a exploração da tarefa pelos alunos, sendo expresso que a 'repetição', exatamente igual, de uma sequência de notas, em partes diferentes de uma dada partitura musical - como por exemplo as sequências de notas assinaladas em **1.1.** -, corresponde à aplicação musical mais simples da isometria translação. Tendo por base tais informações, é proposto aos alunos, em **1.2.**, que explorem, na partitura completa da música que acompanha a dança *Muiñeira de Pol*, outros exemplos de 'repetição', para além do que já tinha sido estudado na tarefa prévia. Os alunos da turma, não tendo manifestado dúvidas na interpretação do enunciado da tarefa **1.2.**, iniciaram a sua exploração autonomamente. Em geral, todos os alunos conseguiram descobrir, em **1.2.**, exemplos de 'repetição' na partitura da música - tocada a duas gaitas. Na resolução da referida tarefa, a maioria dos alunos considerou a 'repetição' de sequências de notas em ambas as *Gaitas* (figura 262); outros alunos só assinalaram exemplos de 'repetição' nas linhas da partitura referentes à mesma *Gaita* (figura 263). Visto que, no enunciado da tarefa **1.2.**, nada é dito que inviabilize nenhuma das duas abordagens à tarefa supracitadas, optou-se por não se interferir no trabalho dos alunos, assumindo-se que os dois tipos de resoluções desenvolvidos pelos alunos em **1.2.** se adequavam ao que aí é proposto.

Figura 262. Resolução da tarefa **1.2.** pelo aluno LS do 8.º ano, turma δ.

1.2. Conforme verificaste, as sequências de notas assinaladas anteriormente são iguais. Este padrão designa-se por <u>repetição</u>. Trata-se da aplicação musical mais simples da translação, na qual uma sequência de notas da partitura surge exatamente igual noutra parte. Explora outros exemplos de repetição na partitura completa da música, apresentada na figura 30.

Figura 263. Resolução da tarefa **1.2.** pelo aluno RP do 8.º ano, turma δ.

O prosseguimento dos alunos da turma para a exploração das tarefas **2.**/**2.1.** foi sucedendo em tempos diferentes. Dando início à exploração, os alunos leram a informação introduzida no enunciado da tarefa **2.**, em que é feita referência a uma aplicação musical mais complexa da isometria translação, que é a 'transposição'. Esta última caracteriza-se pelo movimento de uma sequência exata de notas da partitura para outra localização na escala, e não só no tempo (como acontecia no caso da 'repetição'). Em complemento à informação anterior, é exposto, em **2.1.**, um exemplo de 'transposição', na partitura completa da música que acompanha a dança *Muiñeira de Pol*, propondo-se aos alunos que explorem, nessa mesma partitura, outros exemplos de 'transposição'. No exemplo apresentado, a distância entre as duas sequências exatas de notas assinaladas é correspondente a um intervalo melódico de 4.ª justa. Ora, a explanação dessa informação em **2.1.** levou a que vários alunos da turma, aquando da exploração, nessa mesma tarefa, de outros exemplos de 'transposição' na partitura musical dada, questionassem se, nos exemplos a descobrir, os intervalos teriam que ser, também, intervalos melódicos de 4.ª justa. Não sendo dito nada, no enunciado da tarefa **2.1.**, em relação a isso, comunicou-se aos alunos que essa limitação não se aplicaria; quer dizer, que os intervalos entre as notas poderiam ser, ou não, de 4.ª justa.

Uma outra dúvida que surgiu entre os alunos da turma durante a exploração da tarefa **2.1.** prendeu-se com a questão de ser necessário, ou não, considerar as apogiaturas da partitura musical em exploração. Nesse âmbito, e considerando que, no enunciado da tarefa **2.1.**, não estava explícito que as apogiaturas deviam ser desconsideradas (tal como acontecera no outro conjunto de tarefas ligadas à música que havia sido aplicado à turma), a indicação dada aos alunos foi no sentido de eles atenderem às apogiaturas - algo que fez com que a tarefa **2.1.** se tornasse mais desafiante. As resoluções da tarefa **2.1.** expostas pelos alunos mostram que, de um modo geral, todos os alunos foram capazes de encontrar exemplos de 'transposição' na referida partitura. Desta vez, nenhum aluno restringiu a exploração dos exemplos de 'transposição' proposta em **2.1.** às linhas da partitura referentes à mesma *Gaita*, tendo todos eles assinalado, como exemplos de 'transposição', sequências de notas de ambas as *Gaitas* (figura 264). Apesar de se ter alertado os alunos para a necessidade de considerarem as apogiaturas na resolução da tarefa **2.1.**, houve muitos alunos que assinalaram, como exemplos de 'transposição', sequências de notas nas quais surgiam apogiaturas que não respeitavam o intervalo musical aí em causa (figura 265). As sequências de notas representadas por 'a' e 'b' na resolução da figura 265 são dois exemplos disso.

Figura 264. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno PA do 8.º ano, turma δ.

Figura 265. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno IP do 8.º ano, turma δ.

No momento de exploração da tarefa **3.**, o diferente ritmo de trabalho dos alunos da turma permaneceu evidente, fazendo com que a atividade dos alunos não se realizasse de modo simultâneo. Em tempos diferentes, os alunos iniciaram a leitura do enunciado da tarefa **3.**, em que é referida a existência de outras isometrias - para além da isometria translação, já explorada nas tarefas prévias -, que são utilizadas na composição musical e que podem ser visualizadas nas partituras das músicas. Como exemplos de aplicações musicais de isometrias diferentes da translação, são enunciadas, em **3.**, a 'regressão' e a 'inversão', não sendo explanadas as isometrias que estão associadas a cada uma delas. No seguimento da informação anterior, é proposto aos alunos, na tarefa **3.1.**, que observem o exemplo de 'regressão' assinalado numa linha da partitura da música que acompanha a dança *Muiñeira de Pol*, e que, a partir desse exemplo, tentem descobrir, em **3.2.**, a isometria que está associada à 'regressão'. Os alunos da turma, sem terem manifestado dúvidas na interpretação do enunciado da tarefa **3.2.**, iniciaram a sua resolução autonomamente. De forma mais ou menos imediata, todos os alunos conseguiram compreender, considerando o exemplo de 'regressão' exibido em **3.1.**, que a isometria associada à 'regressão' era a reflexão axial de eixo vertical. Alguns alunos, inclusivamente, desenharam, entre as duas sequências de notas assinaladas na tarefa **3.1.**, o eixo de simetria aí existente (figura 266).

Figura 266. Resolução da tarefa **3.2.** pelo aluno LS do 8.º ano, turma δ.

Na tarefa **3.3.**, é apresentado um exemplo de 'inversão' - assinalado numa outra linha da partitura da música que acompanha a dança *Muiñeira de Pol* -, que os alunos deveriam observar com atenção, para que pudessem descobrir, conforme proposto em **3.4.**, a isometria que está associada à 'inversão'. Ora, se, em **3.2.**, os alunos da turma tinham exibido perspicácia ao descobrirem, com relativa facilidade, que a 'regressão' era uma aplicação musical da isometria reflexão axial, em **3.4.** não sucedeu o mesmo. Nessa tarefa, os alunos da turma em geral tiveram muitas dificuldades em descobrir qual era a isometria presente no exemplo de 'inversão' dado, tendo solicitado frequentemente apoio durante a sua atividade. O facto de as duas sequências de notas assinaladas na tarefa **3.3.** estarem afastadas na linha da partitura tornou ainda mais complexo, para os alunos, descobrirem, na tarefa **3.4.**, a isometria aí em questão. Como resultado, houve vários alunos que, na tarefa **3.4.**, não exibiram qualquer resposta. Outros alunos, em **3.4.**, consideraram, erradamente, que a isometria associada à 'inversão' era a rotação de $180°$ (figura 267). Ora, tal isometria não pode ser considerada válida, pois as notas musicais que entremeiam as duas sequências de notas assinaladas na tarefa **3.3.** também seriam transformadas pela isometria. Por último, um pequeno número de alunos da turma, a partir de algumas pistas que, indiretamente, foram sendo dadas aos alunos para a resolução da tarefa **3.4.**, foram capazes de compreender que a isometria associada à 'inversão' era a reflexão deslizante, tendo resolvido a tarefa com êxito (figura 268).

Figura 267. Resolução da tarefa **3.4.** pelo aluno MD do 8.º ano, turma δ.

Figura 268. Resolução da tarefa **3.4.** pelo aluno FP do 8.º ano, turma δ.

Por fim, os alunos deveriam explorar, na tarefa **3.5.**, outros exemplos de 'regressão' e de 'inversão' na partitura completa da música que acompanha a dança *Muiñeira de Pol*, apresentada na tarefa. Ora, a identificação, em **3.5.**, de exemplos de 'regressão' foi muito mais acessível para os alunos da turma do que os de 'inversão'. Prova disso são as resoluções da tarefa **3.5.** apresentadas pelos alunos da turma, na maioria das quais os alunos identificaram, unicamente, exemplos de 'regressão' (figura 269), além de que foram raros os alunos que conseguiram identificar, em **3.5.**, exemplos corretos de 'inversão'.

Figura 269. Resolução da tarefa **3.5.** pelo aluno LS do 8.º ano, turma δ.

No final, recolheu-se o conjunto de tarefas matemáticas *A harmonia da "Muiñeira"*, tendo, ainda, sobrado tempo para os alunos partilharem algum comentário/observação face ao trabalho desenvolvido.

Perspetivando a atividade dos alunos ao longo da implementação pedagógica, pode-se apurar que, uma vez mais, houve um forte envolvimento dos alunos da turma no trabalho proposto, designadamente nas tarefas matemáticas ligadas à música que acompanha a dança folclórica *Muiñeira de Pol* - que eles tiveram oportunidade de ouvir e ficar a conhecer. A propósito do referido, é importante lembrar que os alunos da turma já haviam explorado, antes, um outro conjunto de tarefas matemáticas ligadas à música, e que tais alunos, recorde-se, frequentavam uma escola artística especializada no ensino da música. Este último fator, possivelmente, foi determinante para o envolvimento dos alunos nas tarefas propostas, que, pela sua conexão à música, se aproximaram de um gosto que é comum a todos os alunos da turma.

Analisando a atividade dos alunos no momento de exploração das diferentes tarefas matemáticas, é possível entender que, apesar dos conhecimentos prévios e da experiência dos alunos na área da música, algumas das tarefas propostas comportaram um grau de desafio apreciável para esses alunos. Nos termos referidos, as tarefas **1.**/**1.1.**/**1.2.** e **2.**/**2.1.** foram as que, em geral, se revelaram mais acessíveis para os alunos da turma. As tarefas em causa envolviam a exploração de aplicações matemáticas da isometria translação - a 'repetição' e a 'transposição' -, tendo sido esta uma atividade em que a maioria dos alunos não revelou grandes dificuldades e conseguiu ter um bom desempenho. Na tarefa **1.2.**, em particular, alguns alunos da turma só procuraram exemplos de 'repetição' nas linhas da partitura referentes à mesma *Gaita* - algo viável e que pode ter simplificado a resolução dessa tarefa. Já na tarefa **2.1.**, foi necessário definir que os alunos, na exploração de exemplos de 'transposição', teriam que considerar as apogiaturas - algo que serviu para tornar mais exigente a resolução dessa tarefa. Por oposição às anteriores, as tarefas **3.**/**3.1.**/**3.2.**/**3.3.**/**3.4.**/**3.5.** - que solicitavam a exploração da 'regressão' e da 'inversão' enquanto aplicações matemáticas de isometrias diferentes da translação - revelaram-se mais problemáticas e desafiantes para os alunos, tendo-lhes criado maiores dificuldades. Não obstante, na tarefa **3.2.**, todos os alunos da turma, de forma mais ou menos imediata, foram capazes de identificar a reflexão axial como sendo a isometria associada à 'regressão'. O mesmo já não sucedeu na identificação, em **3.4.**, da isometria associada à 'inversão', em que a maior parte dos alunos falhou. Atendendo ao disposto, e conforme já seria expectável, na tarefa **3.5.**, a identificação de exemplos de 'regressão' na partitura musical dada foi mais acessível para os alunos da turma do que a identificação de exemplos de 'inversão', que só um número residual de alunos foi capaz de reconhecer corretamente.

Por fim, o tempo de duração da implementação pedagógica - no total, 50 minutos -, confirmou-se adequado para que todos os alunos da turma conseguissem terminar a exploração das tarefas propostas.

7.2.9. À moda de Vila Verde

O conjunto de tarefas matemáticas *À moda de Vila Verde* foi implementado na já dita turma γ do 6.º ano de escolaridade, de uma escola artística especializada no ensino da música, situada em Braga.

No início da implementação pedagógica, com a duração total de 100 minutos, introduziram-se os trajes do *Grupo Folclórico de Vila Verde* a investigar. Para o efeito, leu-se, em plenário, a informação que se encontra apresentada antes das tarefas *À moda de Vila Verde*, entretanto distribuídas aos alunos. Depois, os alunos iniciaram a exploração das tarefas, que se realizou individualmente, em conformidade com um conjunto de medidas excecionais tomadas face à situação epidemiológica da doença COVID-19. Os alunos, ao realizarem o trabalho na modalidade de trabalho individual, seguiram ritmos diferenciados, tendo-se tentado fazer um acompanhamento progressivo do trabalho que ia sendo desenvolvido por eles.

Na tarefa **1.**, são exibidas figuras representativas do "Traje de Encosta" (masculino e feminino), e, na tarefa **1.1.**, é proposto aos alunos que, a partir dessas figuras, identifiquem elementos que anulam a simetria visível nos trajes representados. Salvo algumas exceções de alunos que não foram capazes de perceber o que era pedido na tarefa **1.1.**, e que, por isso, solicitaram apoio, a generalidade dos alunos da turma conseguiu interpretar corretamente a tarefa, iniciando a sua exploração de forma autónoma. Tendo compreendido o que era para fazer na tarefa **1.1.**, todos os alunos conseguiram reconhecer, devidamente, a existência de certos elementos nos trajes que anulam a simetria dos mesmos. Ora, uma dificuldade comum entre os alunos da turma na resolução da tarefa **1.1.** prendeu-se com o facto de eles não saberem nomear alguns adereços e utensílios visíveis nas imagens dos trajes e que anulavam a simetria presente nos mesmos - por exemplo, a *vara* que o homem segurava na mão, as *peças de ouro* que a mulher tinha ao peito, e o *lenço dos namorados* ou *lenço de pedido* que ela levava preso à cintura. Tratando-se, estes últimos, de elementos a integrar na resposta à tarefa **1.1.**, muitos alunos da turma pediram ajuda para os designarem corretamente, ou para confirmarem os nomes que haviam pensado. Excetuando isso, os alunos conseguiram resolver a tarefa **1.1.** por si mesmos, tendo sido bem-sucedidos.

Na tarefa **2.**, é exposta uma figura que apresenta parte de uma *camisa de linho*, que integra o "Traje de Encosta" (masculino). Com base nessa figura, é requerido aos alunos, na tarefa **2.1.**, que identifiquem a simetria presente no bordado da *camisa*, representando, na figura dada, algo que identifique a simetria, e, ainda, que assinalem a(s) parte(s) do bordado que não satisfaz(em) tal simetria. De um modo geral, os alunos compreenderam o enunciado da tarefa **2.1.**, e iniciaram a sua atividade sem manifestarem dúvidas. Na resolução da tarefa **2.1.**, houve vários alunos que, em vez de marcarem, na figura em causa, o eixo de simetria aí existente, identificaram a simetria usando palavas (figura 270).

No que concerne à identificação, em **2.1.**, da(s) parte(s) do bordado da *camisa* que não satisfaz(em) a simetria de reflexão identificada nessa peça do "Traje de Encosta", a grande maioria dos alunos da turma só assinalou o motivo floral que se encontra na parte central da *camisa*, tal como ilustra a resolução da tarefa **2.1.** apresentada na figura 270. No entanto, existe uma outra parte do bordado da *camisa* que, mesmo sendo menos evidente, também não satisfaz a simetria de reflexão existente na *camisa*; trata-se de um motivo floral que está bordado nos dois lados simétricos da *camisa*, na zona inferior, sendo que, num dos lados, esse motivo apresenta cinco pétalas, e, no outro lado, contém apenas quatro pétalas. Essa assimetria do bordado - provavelmente decorrente de um erro da bordadeira que o confecionou - foi impercetível para os alunos da turma, não constando em nenhuma das resoluções da tarefa **2.1.** desenvolvidas por eles. Em contrapartida, houve alguns alunos que, em **2.1.**, identificaram os botões da *camisa* como sendo elementos que anulam a simetria de reflexão identificada na *camisa* (figura 271); porém, em conformidade com o enunciado da tarefa **2.1.**, o que é proposto é assinalar a(s) parte(s) do bordado que não satisfaz(em) a simetria, e, como tal, os botões da *camisa* não podem ser considerados.

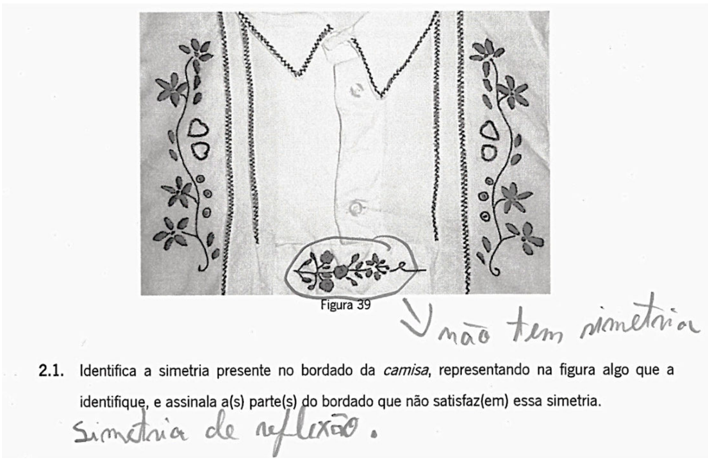


Figura 270. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno PM do 6.º ano, turma γ.

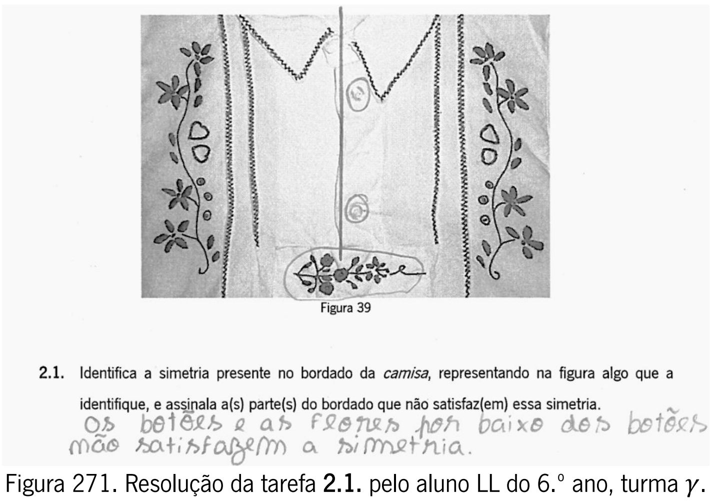


Figura 271. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno LL do 6.º ano, turma γ.

Na tarefa **3.**, é introduzido um elemento característico do "Traje de Encosta", designadamente o *lenço dos namorados* ou *lenço de pedido*, e, em **3.1.**, é exposto, numa figura, um exemplo destes lenços, no qual se encontram bordados diversos elementos figurativos, bem como as tradicionais frases de amor. Tomando como ponto de partida o *lenço* exibido, é proposto aos alunos, na tarefa **3.1.**, que explorem, para além das frases de amor, todos os elementos integrados no *lenço* que teriam que ser retirados para que as duas retas diagonais que surgem desenhadas sobre o *lenço* fossem eixos de simetria do mesmo. Numa nota integrada no enunciado da tarefa **3.1.**, aparece explicitado que os *lenços dos namorados*, sendo feitos à mão pelas bordadeiras, podem ter algumas imperfeições ao nível da simetria pretendida para os mesmos, sendo que esse tipo de irregularidades - que é percetível no *lenço* em investigação - deveria ser ignorado aquando da resolução da tarefa **3.1.** pelos alunos. De uma forma geral, os alunos da turma mostraram compreensão do enunciado da tarefa **3.1.**, não tendo requerido esclarecimentos. A monitorização da atividade dos alunos no decorrer da exploração da tarefa **3.1.** permitiu constatar que a globalidade dos alunos só conseguiu identificar, enquanto elementos que quebram a simetria definida pelas duas retas desenhadas no *lenço*, os símbolos que surgem na parte central do mesmo (figura 272).

3.1. Observa, na figura 41, o *Lenço de Pedido* colocado no traje do dançarino da figura anterior. Para além das frases de amor bordadas, que outros elementos teriam que ser retirados do *lenço* para que as retas r e s fossem eixos de simetria do mesmo?

Notas: Lembra-te que os *Lenços de Pedido* eram feitos à mão pelas bordadeiras e, por isso, podem apresentar algumas imperfeições ao nível da simetria pretendida para os mesmos. Deves ignorar estas irregularidades ao realizar a tarefa.

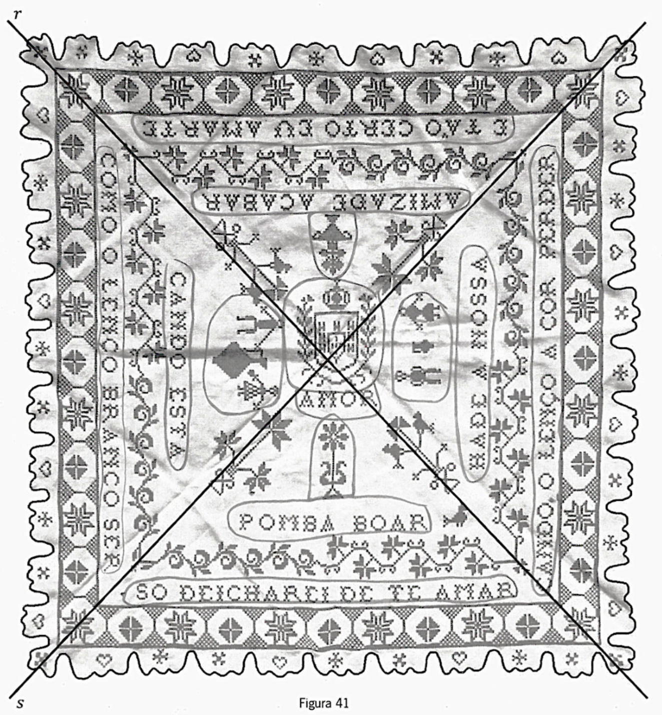


Figura 41

Figura 272. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno AC do 6.º ano, turma γ.

Embora os símbolos que se encontram assinalados na resolução da tarefa **3.1.** apresentada na figura 272 estejam corretos do ponto de vista do que é proposto nessa tarefa, existem outros elementos, no *lenço* em análise, que também deveriam ter sido considerados, nomeadamente os diferentes símbolos que aparecem nas extremidades do *lenço* e que, salvo algumas exceções, anulam a simetria do mesmo. Contudo, os alunos da turma, por si mesmos, não foram capazes de identificar tais símbolos na exploração da tarefa **3.1.**, tendo apresentado uma resolução incompleta da tarefa, que ficou limitada à identificação de parte ou de todos os símbolos que se encontram na zona central do *lenço* em estudo. Em certas ocasiões, houve a possibilidade de provocar alguns alunos no sentido de eles reconhecerem, na tarefa **3.1.**, outros elementos para além dos que já haviam identificado, o que permitiu que um pequeno número de alunos da turma conseguisse aprofundar um pouco mais a sua exploração da tarefa.

Na tarefa **3.2.**, são apresentadas diferentes figuras, nas quais constam alguns símbolos presentes no *lenço dos namorados* introduzido na tarefa prévia, propondo-se aos alunos que agrupem os símbolos selecionados de acordo com o conjunto de simetrias de cada símbolo, isto é, o seu grupo simétrico. Neste caso, o enunciado da tarefa não se revelou de fácil compreensão para os alunos da turma, que, na sua maioria, tiveram dificuldades em perceber o que era para fazer na tarefa **3.2.**, tendo pedido ajuda. Atendendo a que o desenvolvimento do trabalho pelos alunos da turma decorria em ritmos diferenciados, procurou-se atender, individualmente, às dúvidas sentidas pelos alunos na interpretação da tarefa **3.2.**, prestando-se um apoio mais individualizado, e evitando-se um esclarecimento em plenário que pudesse interromper a atividade dos alunos que ainda não tivessem iniciado a exploração da tarefa em causa. Quase todos os alunos da turma precisaram de orientações suplementares para conseguirem resolver a tarefa **3.2.**, não tendo sido capazes de compreender, por si, o que era requerido no enunciado da mesma. Apesar de os alunos saberem o significado da palavra 'agrupar' - usada no enunciado da tarefa **3.2.** -, foi difícil para eles interpretarem essa palavra no contexto do problema dado, o que implicou uma intervenção explícita juntos dos mesmos, no sentido de clarificar o que era esperado que eles fizessem.

Os esclarecimentos prestados aos alunos da turma foram essenciais para nortear a sua exploração da tarefa **3.2.**, mas, apesar disso, as resoluções da tarefa apresentadas pelos alunos foram divergentes. Alguns alunos da turma, na sua resolução da tarefa **3.2.**, agruparam, em três conjuntos, os símbolos do *lenço dos namorados* selecionados, mas não explicitaram os respetivos grupos simétricos (figura 273). Tais alunos elaboraram uma resolução bastante incompleta da tarefa **3.2.**, não sendo possível perceber o raciocínio que seguiram para agruparem os símbolos do *lenço* da forma como o fizeram. Certos alunos, em **3.2.**, limitaram-se a caracterizar os símbolos como sendo simétricos ou não-simétricos (figura 274), tendo utilizado um critério muito superficial no que toca à exploração do grupo simétrico dos símbolos.

Outros alunos, na tarefa **3.2.**, agruparam os símbolos de acordo com o número de simetrias que exibem, tendo falhado no número de simetrias de um dos conjuntos, que julgaram serem quatro, em vez de oito (figura 275). Embora o critério usado por esses alunos para agruparem os símbolos dados seja um pouco mais elaborado do que o referido anteriormente, a sua resolução da tarefa **3.2.** afigura-se, também, incompleta, pois não são explicitadas as simetrias correspondentes a cada um dos conjuntos formados.

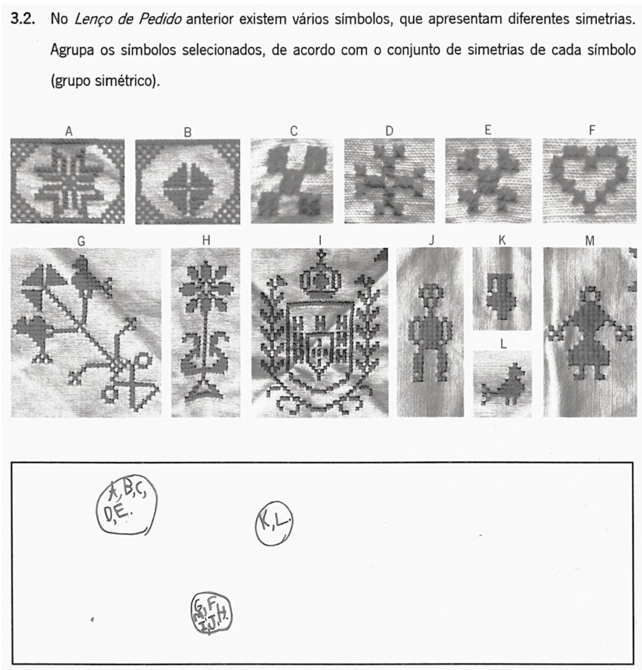


Figura 273. Resolução da tarefa **3.2.** pelo aluno GS do 6.º ano, turma γ.

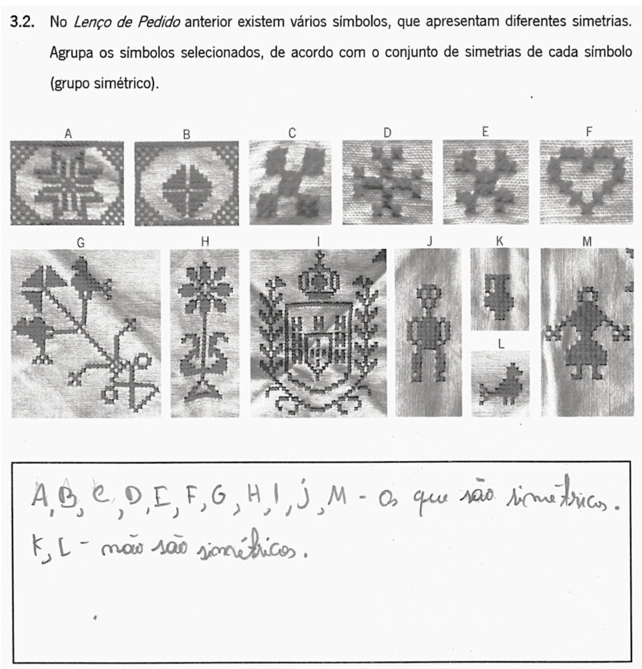


Figura 274. Resolução da tarefa **3.2.** pelo aluno SB do 6.º ano, turma γ.

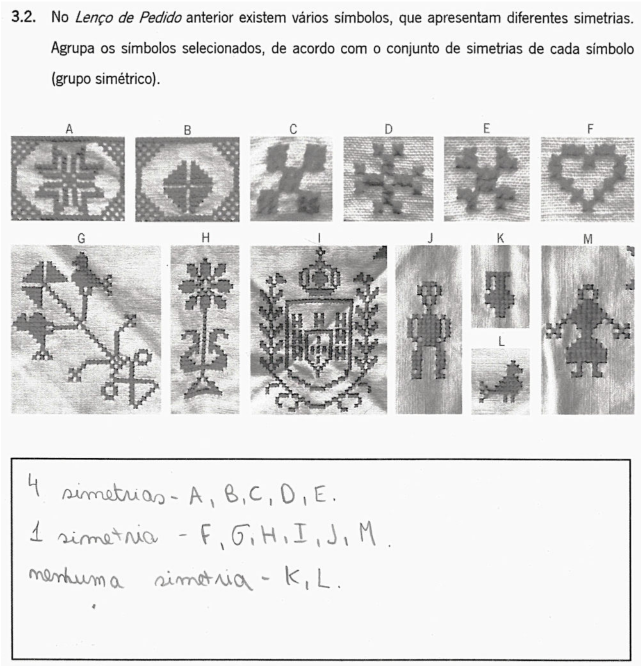


Figura 275. Resolução da tarefa **3.2.** pelo aluno MB do 6.º ano, turma γ.

Ainda a respeito da tarefa **3.2.**, e em contraste com os três tipos de resoluções até aqui analisados, houve alunos da turma que detalharam mais o grupo simétrico dos símbolos do *lenço dos namorados* selecionados, tendo-se fundamentado na existência de simetrias de reflexão, de rotação, e na assimetria. Mais concretamente, alguns desses alunos, na sua resolução da tarefa **3.2.**, agruparam os símbolos dados em três conjuntos, a saber: sem simetria; com simetria de reflexão; e, com simetria de rotação (figura 276). Ora, apesar de os três conjuntos formados por esses alunos de acordo com os critérios de classificação supracitados estarem corretos, existem determinados símbolos que aparecem repetidos em dois conjuntos, por apresentarem, não só simetrias de reflexão, como também simetrias de rotação. Essa ocorrência foi evitada por um pequeno número de alunos da turma, que agrupou os símbolos da tarefa **3.2.** nos seguintes conjuntos: só com simetria de reflexão; com simetria de reflexão e de rotação; sem simetria; e, só com simetria de rotação, não tendo integrado nenhum símbolo neste último conjunto (figura 277). Dessa forma, os alunos em referência organizaram os símbolos do *lenço dos namorados* apresentados na tarefa **3.2.** em conjuntos disjuntos, tendo particularizado mais o grupo simétrico relativo a cada conjunto, o que resultou na inexistência de símbolos em comum entre os conjuntos formados. Para terminar, alguns alunos da turma foram capazes de desenvolver uma resolução mais elaborada da tarefa **3.2.**, tendo classificado cada um dos símbolos aí expostos de acordo com o número de simetrias de reflexão e o número de simetrias de rotação, o que levou à formação de três conjuntos disjuntos (figura 278). Ora, este último tipo de resolução da tarefa **3.2.** desenvolvido por alguns alunos da turma foi, de entre todas as resoluções dessa tarefa apresentadas pelos alunos, o que se revelou mais completo.

Mesmo assim, a resolução da tarefa **3.2.** desenvolvida por esses alunos ainda poderia ter sido mais aprofundada, por meio da caracterização das simetrias de reflexão e das simetrias de rotação que eles reconheceram, em diferente número, para cada um dos três conjuntos formados com os símbolos dados. Contudo, nenhum aluno da turma avançou nesse sentido, ficando a exploração da tarefa **3.2.** inacabada.

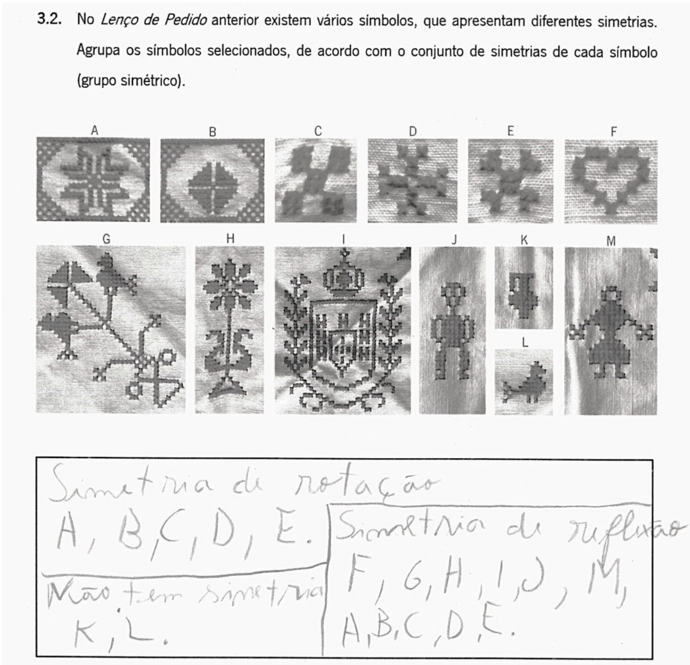


Figura 276. Resolução da tarefa **3.2.** pelo aluno RC do 6.º ano, turma γ.

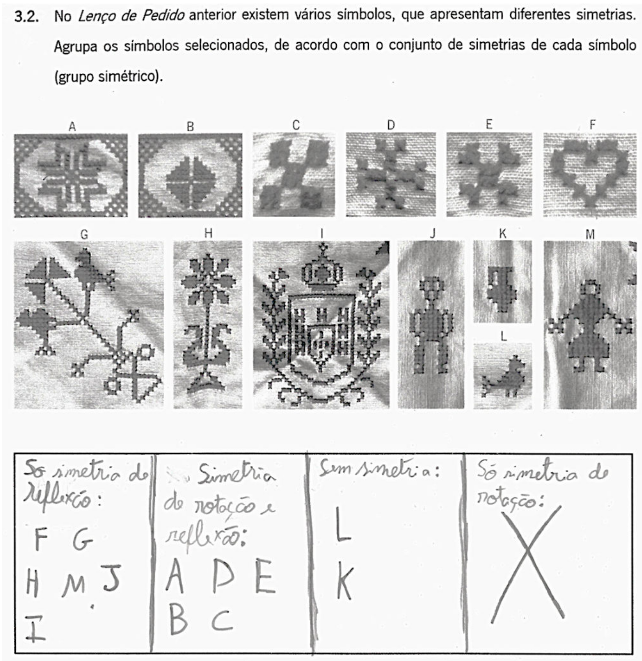
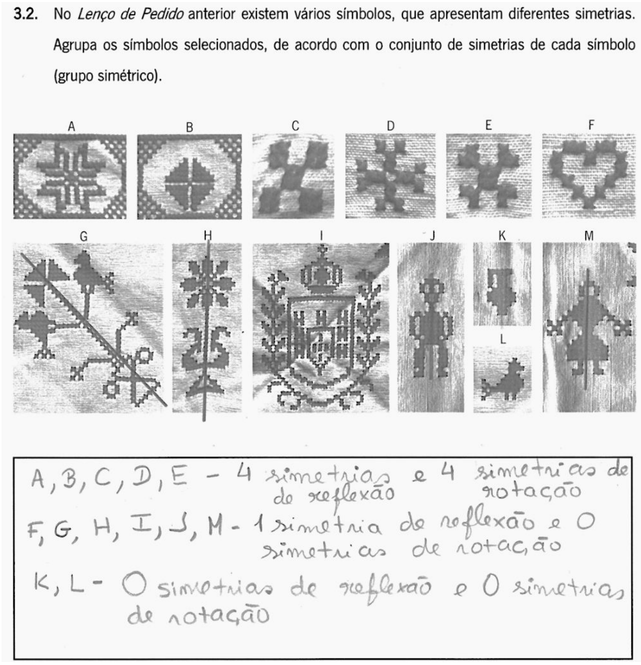


Figura 277. Resolução da tarefa **3.2.** pelo aluno DA do 6.º ano, turma γ.



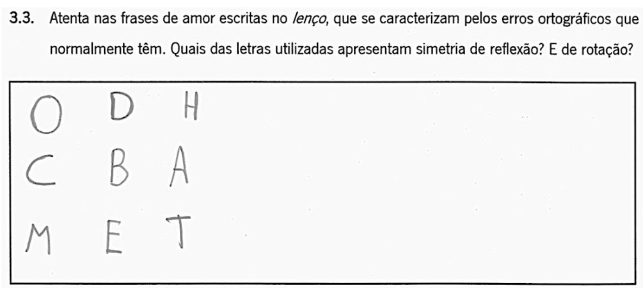
3.2. No *Lenço de Pedido* anterior existem vários símbolos, que apresentam diferentes simetrias. Agrupa os símbolos selecionados, de acordo com o conjunto de simetrias de cada símbolo (grupo simétrico).

A, B, C, D, E - 4 simetrias de reflexão e 4 simetrias de rotação
F, G, H, I, J, M - 1 simetria de reflexão e 0 simetrias de rotação
K, L - 0 simetrias de reflexão e 0 simetrias de rotação

Figura 278. Resolução da tarefa **3.2.** pelo aluno MA do 6.º ano, turma γ.

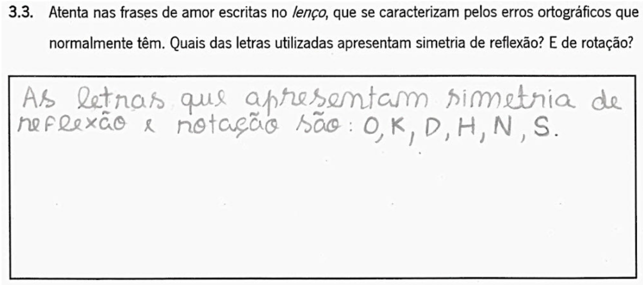
Na tarefa **3.3.**, o foco recai sobre as frases de amor escritas no *lenço dos namorados* introduzido na tarefa **3.1.**, sendo proposta a exploração, em termos de simetria, das letras que compõem tais frases. Mais precisamente, é requerido aos alunos, na tarefa **3.3.**, que identifiquem, entre as letras utilizadas nas frases do *lenço*, as que apresentam simetria de reflexão e as que apresentam simetria de rotação. De uma maneira geral, os alunos da turma não expressaram dificuldades ao nível da interpretação do enunciado da tarefa **3.3.**, tendo iniciado a resolução da tarefa autonomamente e sem constrangimentos. Todavia, a monitorização do trabalho desenvolvido pelos alunos da turma ao longo da exploração da tarefa **3.3.** permitiu percecionar determinadas incompreensões, por parte dos alunos, relativamente ao que é solicitado no enunciado dessa tarefa, o qual não tinha sido devidamente interpretado pelos alunos. Em particular, uma grande parte dos alunos da turma não tinha percebido que era necessário explorar, em separado, as letras que apresentam simetria de reflexão e as que apresentam simetria de rotação. A par disso, também não tinha ficado claro, para alguns alunos, que só deveriam analisar as letras utilizadas nas frases de amor escritas no *lenço dos namorados* introduzido numa das tarefas anteriores. Ora, mesmo tendo-se procurado chamar a atenção dos alunos que se verificava não terem feito uma interpretação adequada do enunciado da tarefa **3.3.**, não se tornou possível interagir, individualmente, com todos os alunos da turma e, a partir daí, alertá-los. Houve, também, alguns casos de alunos que, apesar de terem sido alertados durante a sua exploração da tarefa **3.3.**, mantiveram fixo o seu raciocínio.

Na sequência do disposto, muitas resoluções da tarefa **3.3.** apresentadas pelos alunos da turma ficaram marcadas por incorreções, em parte resultantes de uma má interpretação do enunciado da tarefa pelos alunos, que os levou a realizarem uma exploração que não cumpre o que é proposto na tarefa. Para começar, houve vários alunos da turma que, na sua resolução da tarefa **3.3.**, se limitaram a indicar uma série de letras integradas nas frases de amor escritas no *lenço dos namorados* considerado, sem esclarecerem as simetrias de reflexão e as simetrias de rotação que as letras escolhidas apresentam (figura 279). Ora, embora não tenha ficado evidente, nas resoluções desses alunos, que simetria é que eles consideraram para cada uma das letras que indicaram na tarefa **3.3.**, é possível perceber-se que todas as letras apontadas têm simetria de reflexão e/ou simetria de rotação, o que permite concluir que tais alunos falharam na interpretação do enunciado da tarefa, não tendo realizado, conforme pedido, uma análise que distinguisse as letras que têm simetria de reflexão e as que têm simetria de rotação. Uma outra interpretação errónea do enunciado da tarefa **3.3.** levou a que alguns alunos efetuassem uma análise das letras do *lenço* que apresentam, conjuntamente, simetria de reflexão e simetria de rotação (figura 280). Esses alunos, ao invés de analisarem, separadamente, as letras do *lenço dos namorados* que apresentam simetria de reflexão e as que apresentam simetria de rotação - tal qual é requerido na tarefa **3.3.** -, analisaram as letras do *lenço* a partir de um critério de simetria diferente do que é proposto. Ademais, algumas das letras por vezes apontadas por esses alunos não satisfazem o critério de simetria que os próprios estabeleceram, tal como se pode ver na resolução da tarefa **3.3.** ilustrada na figura 280. Num caso distinto dos anteriores, mas que se caracterizou, igualmente, por falhas na interpretação do enunciado da tarefa **3.3.**, um pequeno número de alunos da turma baseou a exploração da tarefa **3.3.**, não nas letras utilizadas nas frases de amor do *lenço*, mas antes nas letras do abecedário (figura 281).


3.3. Atenta nas frases de amor escritas no *lenço*, que se caracterizam pelos erros ortográficos que normalmente têm. Quais das letras utilizadas apresentam simetria de reflexão? E de rotação?

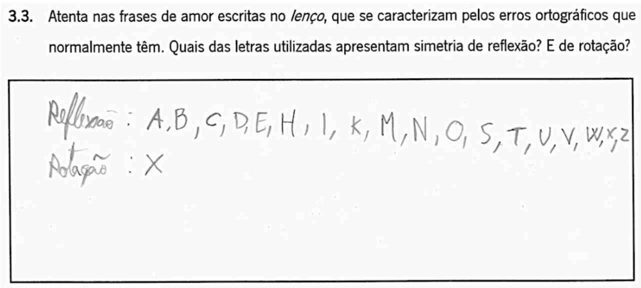
O D H
C B A
M E T

Figura 279. Resolução da tarefa **3.3.** pelo aluno DA do 6.º ano, turma γ.


3.3. Atenta nas frases de amor escritas no *lenço*, que se caracterizam pelos erros ortográficos que normalmente têm. Quais das letras utilizadas apresentam simetria de reflexão? E de rotação?

As letras que apresentam simetria de reflexão e rotação são: O, K, D, H, N, S.

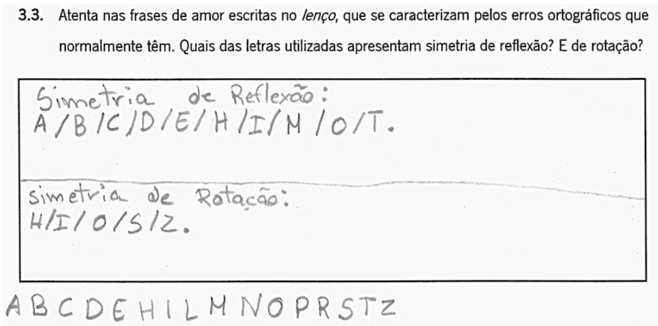
Figura 280. Resolução da tarefa **3.3.** pelo aluno LL do 6.º ano, turma γ.


3.3. Atenta nas frases de amor escritas no *lenço*, que se caracterizam pelos erros ortográficos que normalmente têm. Quais das letras utilizadas apresentam simetria de reflexão? E de rotação?

Reflexão : A, B, C, D, E, H, I, K, M, N, O, S, T, U, V, W, X, Z
Rotação : X

Figura 281. Resolução da tarefa **3.3.** pelo aluno JP do 6.º ano, turma γ.

Em contraste com os três tipos de resoluções da tarefa **3.3.** anteriormente analisados - que ficaram marcados por diferentes incorreções resultantes de falhas na interpretação do enunciado da tarefa -, alguns alunos da turma foram capazes de, em conformidade com o proposto em **3.3.**, realizar uma análise disjunta das letras do *lenço dos namorados* com simetria de reflexão e com simetria de rotação (figura 282). Ainda assim, houve casos em que esses alunos, na resolução da tarefa **3.3.**, identificaram um número diminuto de letras que satisfaziam cada um dos critérios de simetria propostos (figura 283).

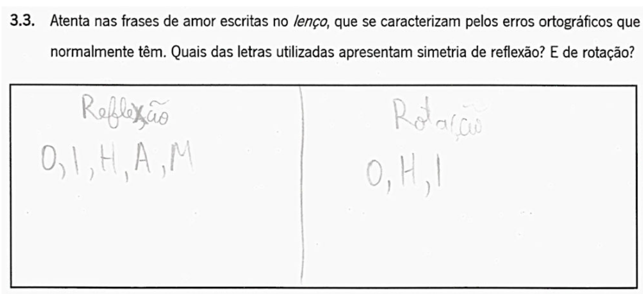

3.3. Atenta nas frases de amor escritas no *lenço*, que se caracterizam pelos erros ortográficos que normalmente têm. Quais das letras utilizadas apresentam simetria de reflexão? E de rotação?

Simetria de Reflexão:
A/B/C/D/E/H/I/M/O/T.

simetria de Rotação:
H/I/O/S/Z.

ABCDEHILMNOPRSTZ

Figura 282. Resolução da tarefa **3.3.** pelo aluno IC do 6.º ano, turma γ.

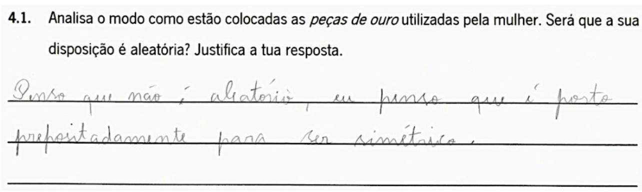

3.3. Atenta nas frases de amor escritas no *lenço*, que se caracterizam pelos erros ortográficos que normalmente têm. Quais das letras utilizadas apresentam simetria de reflexão? E de rotação?

Reflexão	Rotação
O, I, H, A, M	O, H, I

Figura 283. Resolução da tarefa **3.3.** pelo aluno AB do 6.º ano, turma γ.

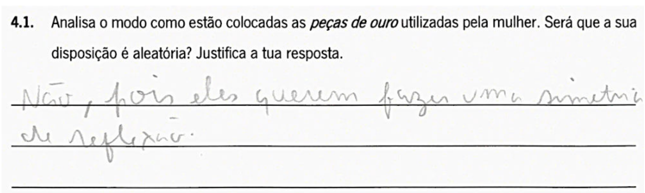
Na tarefa **4.**, é exibida uma figura representativa do "Traje de Noivos", o qual constitui uma variante do "Traje de Encosta", anteriormente explorado. Em **4.1.**, é proposto aos alunos que analisem o modo como estão colocadas as *peças de ouro* utilizadas pela mulher na figura dada, questionando-se a aleatoriedade da disposição das *peças*, que os alunos deveriam comentar, justificando a sua resposta.

De uma forma geral, os alunos da turma compreenderam o enunciado da tarefa **4.1.** e foram capazes de explorar a tarefa autonomamente. A única dificuldade manifestada por alguns alunos da turma foi referente ao significado da palavra 'aleatória' - usada no enunciado da tarefa **4.1.** -, que foi necessário esclarecer junto dos diferentes alunos, tendo-se contado, para isso, com a intervenção dos seus pares. À exceção dessa dúvida, não se registou nenhum outro constrangimento no trabalho desenvolvido pelos alunos na tarefa **4.1.**, tendo todos eles resolvido a tarefa de forma individual e sem requererem apoio. As respostas dos alunos à tarefa **4.1.** foram todas coincidentes na consideração de que as *peças de ouro* ostentadas pela mulher na figura ilustrativa do "Traje de Noivos" não estavam dispostas aleatoriamente. Quanto às justificações apresentadas pelos alunos na tarefa **4.1.**, essas já se revelaram mais divergentes. A maioria dos alunos da turma, em **4.1.**, justificou a disposição não-aleatória das *peças de ouro* usadas pela mulher com base no facto de as *peças* estarem organizadas para atender a um propósito de simetria (figuras 284 e 285). Não obstante, nem todos os alunos da turma expressaram, na tarefa **4.1.**, essa ideia de pretensão de simetria como justificação para a disposição das *peças de ouro* não ser aleatória, tendo apresentado outro tipo de argumentos, a saber: o facto de as *peças de ouro* estarem demasiado organizadas para poderem ter sido colocadas ao acaso; a existência de um padrão na colocação das *peças de ouro*, segundo o qual as *peças* em forma de coração ficam na parte superior e as *peças* em forma de cruz ficam na parte inferior; e, até mesmo, a existência de razões católicas para tal disposição.


4.1. Analisa o modo como estão colocadas as *peças de ouro* utilizadas pela mulher. Será que a sua disposição é aleatória? Justifica a tua resposta.

Penso que não é aleatório, eu penso que é posto propositadamente para ser simétrico.

Figura 284. Resolução da tarefa **4.1.** pelo aluno MR do 6.º ano, turma γ.


4.1. Analisa o modo como estão colocadas as *peças de ouro* utilizadas pela mulher. Será que a sua disposição é aleatória? Justifica a tua resposta.

Não, pois eles querem fazer uma simetria de reflexão.

Figura 285. Resolução da tarefa **4.1.** pelo aluno JR do 6.º ano, turma γ.

Na tarefa **4.2.**, o foco da exploração é a *camisa de linho* usada pelo homem no "Traje de Noivos". Nesse sentido, a partir da observação de uma figura que constitui um exemplo dessas *camisas*, a qual apresenta diversos motivos bordados, é proposto aos alunos, em **4.2.**, que descrevam a(s) simetria(s) que observam em três motivos bordados na *camisa de linho* que se encontram rodeados na figura dada.

Conforme já tinha sucedido em tarefas anteriores, não foram manifestadas dúvidas, por parte dos alunos, na interpretação do enunciado da tarefa **4.2.**, tendo todos eles realizado a sua atividade autonomamente. Uma tendência geral dos alunos da turma na resolução da tarefa **4.2.** foi a de se terem limitado a indicar, para cada um dos motivos da *camisa* considerados, o tipo de simetria que observaram nos motivos - simetrias de reflexão e/ou simetrias de rotação -, não tendo descrito cada uma das simetrias em causa (figura 286). Ao terem, simplesmente, designado o tipo de simetria existente nos motivos da *camisa*, sem terem feito uma descrição que pormenorizasse tais simetrias, os alunos da turma desenvolveram uma exploração muito incompleta da tarefa **4.2.**, que não respeitou as indicações dadas no enunciado, e que se apresenta tão indeterminada, que não permite perceber se os alunos pensaram corretamente. Houve, somente, dois alunos da turma que, na sua resolução da tarefa **4.2.**, aprofundaram um pouco mais a sua exploração, tendo indicado o número de simetrias - no caso, simetrias de reflexão -, e, ainda, desenhado, em cada um dos motivos da *camisa*, os eixos de simetria correspondentes (figura 287). Mesmo tendo erros, esse tipo de resolução da tarefa **4.2.** foi o mais elaborado entre os alunos da turma.

4.2. Observa, na figura 43, a *camisa de linho* bordada a branco, utilizada pelo noivo. Descreve a(s) simetria(s) que observas em cada um dos motivos bordados na *camisa* que se encontram rodeados na figura.

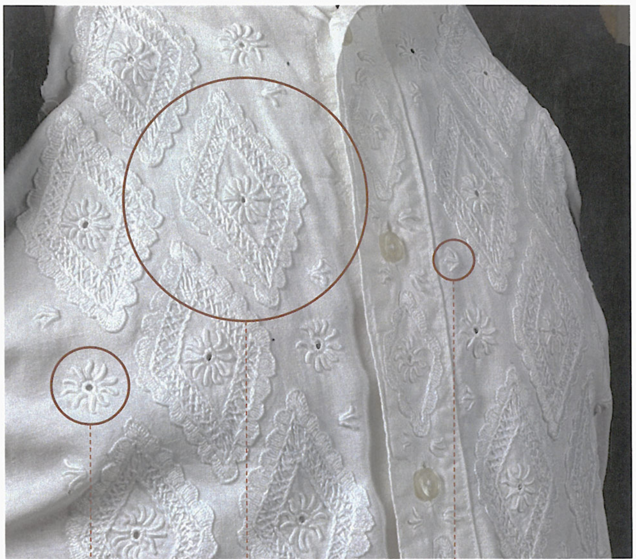


Figura 43

Simetrias de Rotação

Simetrias de Rotação e Reflexão

Simetrias de Reflexão

Figura 286. Resolução da tarefa **4.2.** pelo aluno IC do 6.° ano, turma γ.

4.2. Observa, na figura 43, a *camisa de linho* bordada a branco, utilizada pelo noivo. Descreve a(s) simetria(s) que observas em cada um dos motivos bordados na *camisa* que se encontram rodeados na figura.

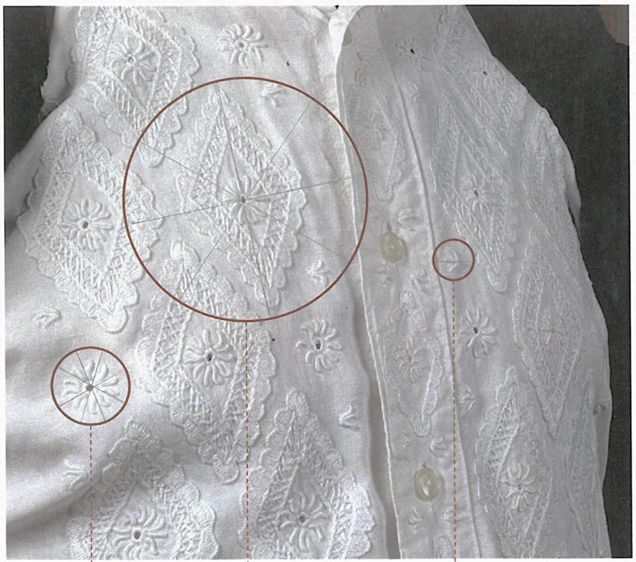


Figura 43

4 simetrias de reflexão

4 simetrias de reflexão

1 simetria de reflexão

Figura 287. Resolução da tarefa **4.2.** pelo aluno MS do 6.º ano, turma γ.

Na tarefa **5.**, são apresentadas duas figuras representativas do "Traje de Trabalho" (feminino). Aproveitando um bordado presente no *corpete* usado pela mulher nessas figuras, é proposto aos alunos, em **5.1.**, que completem a representação desse bordado considerando o eixo de simetria aí desenhado. A tarefa **5.1.** revelou-se acessível para a generalidade dos alunos da turma, não se tendo registado constrangimentos na exploração da referida tarefa, que todos os alunos resolveram com muita facilidade.

A tarefa **5.2.** propõe a exploração de um outro bordado presente no *corpete* usado pela mulher nas figuras do "Traje de Trabalho" previamente introduzidas. Tendo por base uma figura desse novo bordado a explorar, apresentada na tarefa **5.2.**, é requerido aos alunos que desenhem, na figura dada, o eixo de simetria do bordado, e que encontrem as irregularidades existentes no mesmo, rodeando-as. Em geral, os alunos da turma não tiveram dificuldades na compreensão do enunciado da tarefa **5.2.**, tendo percebido o que era para fazer na tarefa, e tendo realizado a respetiva exploração autonomamente. Foi fácil para os alunos da turma reconhecerem, em **5.2.**, a existência de um eixo de simetria vertical no bordado do *corpete* em exploração, tendo todos eles desenhado esse eixo na sua resolução da tarefa.

No que toca à identificação, em **5.2.**, das irregularidades existentes no bordado colorido do *corpete*, notaram-se algumas divergências, que se relacionaram com o facto de os alunos da turma terem ficado divididos quanto à consideração das diferenças de cor visíveis nos motivos do bordado como assimetrias. Ora, a maioria dos alunos da turma desconsiderou essa questão da cor na resolução da tarefa **5.2.**, tendo assinalado, somente, as irregularidades do bordado que se relacionavam com a forma dos motivos. Por sua vez, os alunos da turma que, na resolução da tarefa **5.2.**, assumiram a variação da cor como um critério de assimetria, acabaram por assinalar um número maior de irregularidades no bordado. Curiosamente, um aluno da turma, na sua resolução da tarefa **5.2.**, não só assinalou as irregularidades existentes no bordado, como ainda distinguiu os vários tipos de irregularidades aí presentes (figura 288).

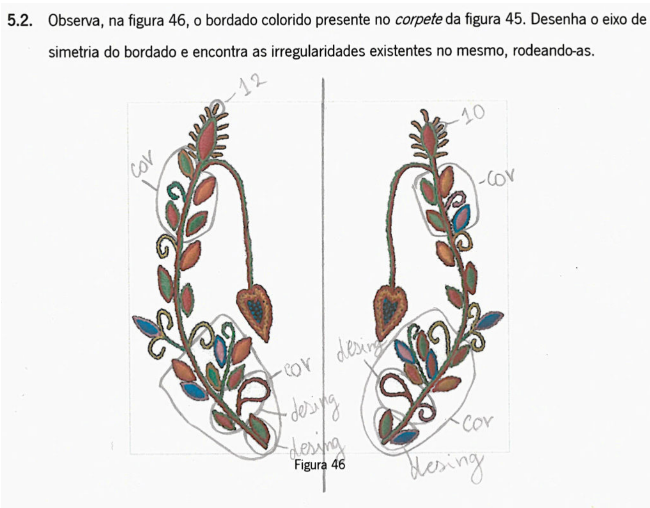


Figura 288. Resolução da tarefa **5.2.** pelo aluno BL do 6.º ano, turma γ.

Na tarefa **5.3.**, propõe-se aos alunos que criem, numa grelha isométrica apresentada na tarefa, uma figura simétrica que gostassem de ver bordada na mesma peça do “Traje de Trabalho” (feminino) analisada nas tarefas prévias - o *corpete* -, e que identifiquem as simetrias presentes na sua construção. Trata-se, esta última, de uma tarefa de natureza eminentemente criativa, que oferece aos alunos a possibilidade de inventarem figuras ao seu gosto e imaginação, desde que tais figuras sejam simétricas. As produções dos alunos na resolução da tarefa **5.3.** foram diversas do ponto vista estético e visual. Porém, ao nível da simetria das figuras criadas em **5.3.**, o que se verificou foi que a quase totalidade dos alunos da turma concebeu figuras só com simetria de reflexão de eixo vertical. A maioria desses alunos, na tarefa **5.3.**, identificou essa simetria diretamente na sua construção, desenhando o eixo de simetria (figura 289); outros alunos, para além de desenharem o eixo de simetria, nomearam a simetria em causa (figura 290); por fim, um pequeno minoritário desses alunos desconsiderou essa parte da tarefa **5.3.**, tendo somente construído a figura proposta, sem identificar a simetria presente na mesma (figura 291).

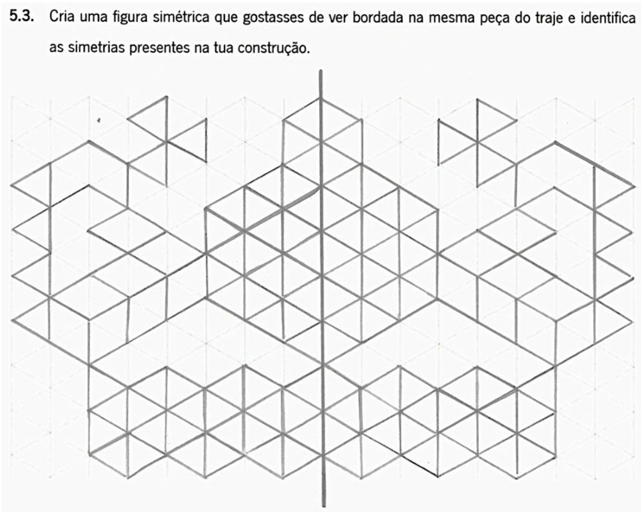


Figura 289. Resolução da tarefa **5.3.** pelo aluno JP do 6.º ano, turma γ.

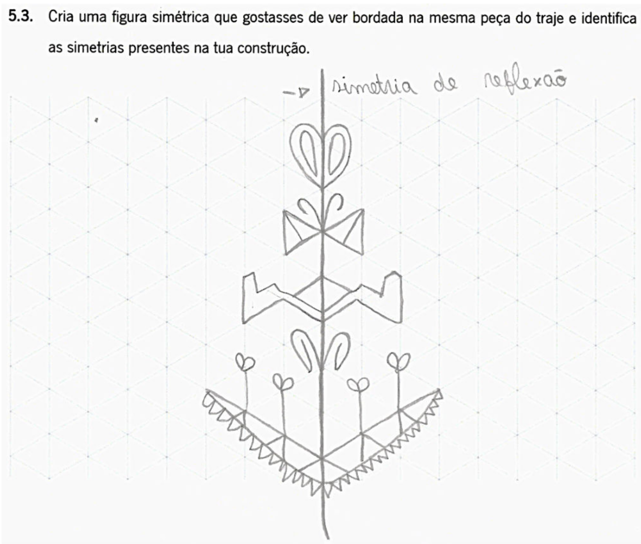


Figura 290. Resolução da tarefa **5.3.** pelo aluno MB do 6.º ano, turma γ.

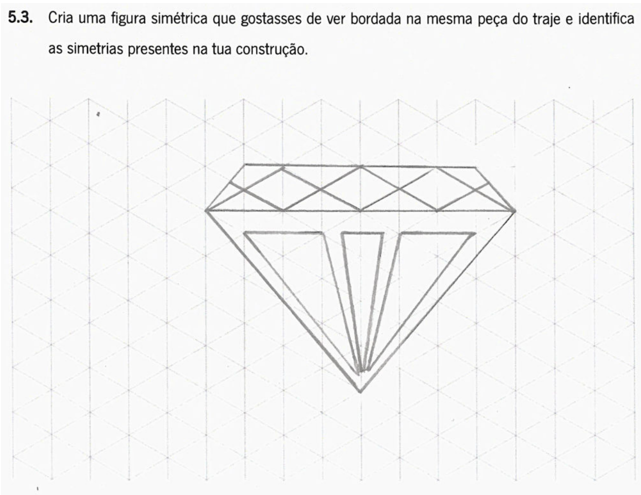
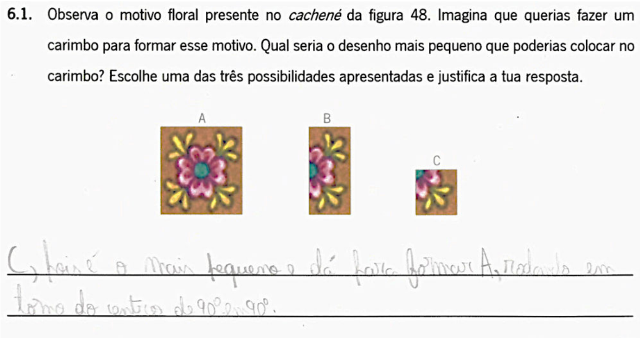


Figura 291. Resolução da tarefa **5.3.** pelo aluno MA do 6.º ano, turma γ.

Um último comentário, ainda a propósito da tarefa **5.3.**, é concernente à resolução dessa tarefa exibida na figura 290, e está relacionado com o facto de a figura elaborada pelo aluno MB não ser traçada apenas nas linhas da grelha isométrica dada - algo que ocorreu em diversas figuras criadas pelos alunos. Ora, o facto de vários alunos da turma terem desenhado a figura proposta na tarefa **5.3.** essencialmente fora das linhas da grelha isométrica facultada, usando inúmeras linhas curvas na sua construção, fez com que ocorresse um maior número de irregularidades ao nível na simetria de reflexão de eixo vertical pretendida para tal figura, conforme se pode observar na resolução da tarefa **5.3.** exposta na figura 290. Atendendo a que, no enunciado da tarefa **5.3.** não é dada nenhuma indicação no sentido de os alunos só usarem as linhas da grelha isométrica para construírem as suas figuras, resoluções como as acima descritas estão de acordo com que é proposto nessa tarefa, ainda que sejam mais difíceis de concretizar.

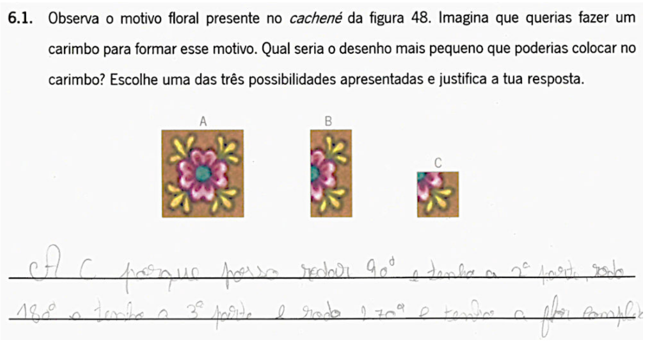
Na tarefa **6.**, são expostas duas figuras representativas de parte do "Traje da Ribeira" (feminino), o qual se afigura como um meio-termo entre o "Traje de Encosta" e o "Traje de Trabalho", já explorados. A partir de um motivo floral presente no *cachené* usado pela mulher nas figuras prévias, propõe-se aos alunos, em **6.1.**, que, imaginando que queriam fazer um carimbo para formar esse motivo, escolham, entre três possibilidades, qual o desenho mais pequeno que poderiam colocar no carimbo, justificando. Genericamente, os alunos da turma não manifestaram dificuldades na compreensão do enunciado da tarefa **6.1.**, tendo lido e explorado essa tarefa de forma autónoma e sem terem necessitado de ajuda. Nas resoluções da tarefa **6.1.** apresentadas pelos alunos da turma, a quase totalidade dos alunos reconheceu, corretamente, que o desenho mais pequeno que poderiam colocar num carimbo para formar o motivo floral presente no *cachené* em consideração é o que aparece representado pela letra C. Uma grande parte desses alunos, inclusivamente, conseguiu elaborar justificações adequadas para a resposta dada em **6.1.**, tendo-se baseado no facto de o motivo floral poder ser obtido a partir do desenho apresentado na opção C através de sucessivas rotações de $90°$ em torno do ponto central do motivo (figuras 292 e 293). No entanto, muitos alunos da turma não foram capazes de apresentar, em **6.1.**, argumentos válidos para fundamentar a escolha do desenho que se encontra representado pela letra C, tendo falhado nessa parte da tarefa. Muitos desses alunos, em **6.1.**, justificaram a escolha da opção C, simplesmente alegando tratar-se do desenho que apresenta as medidas mais reduzidas (figura 294); outros alunos argumentaram com base no facto de tal desenho ser $\frac{1}{4}$ do motivo floral inteiro (figura 295). Ora, mesmo sendo verdadeiros, nenhum dos argumentos citados - assim como outro tipo de argumentos que foram pontualmente apresentados por vários alunos da turma - se constitui suficiente ou adequado para justificar, conforme proposto em **6.1.**, o facto de o desenho exposto na opção C ser, das três opções, o desenho mais pequeno que poderia ser colocado num carimbo para formar o motivo floral pretendido.



6.1. Observa o motivo floral presente no *cachené* da figura 48. Imagina que querias fazer um carimbo para formar esse motivo. Qual seria o desenho mais pequeno que poderias colocar no carimbo? Escolhe uma das três possibilidades apresentadas e justifica a tua resposta.

C, pois é o mais pequeno e dá para formar A, rodando em torno do centro de 90° em 90°.

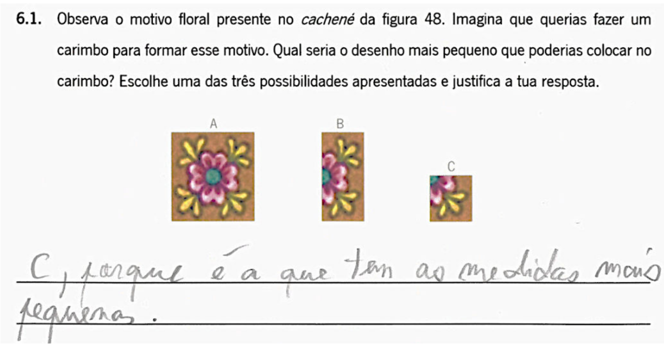
Figura 292. Resolução da tarefa **6.1.** pelo aluno AB do 6.º ano, turma γ.



6.1. Observa o motivo floral presente no *cachené* da figura 48. Imagina que querias fazer um carimbo para formar esse motivo. Qual seria o desenho mais pequeno que poderias colocar no carimbo? Escolhe uma das três possibilidades apresentadas e justifica a tua resposta.

A C porque posso rodar 90° e tenho a 2ª parte, rodo 180° e tenho a 3ª parte e rodo 270° e tenho a flor complet

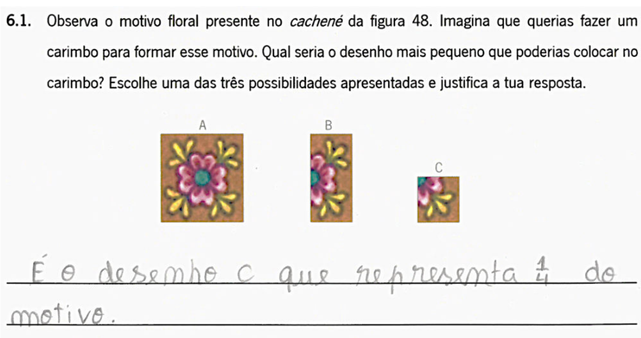
Figura 293. Resolução da tarefa **6.1.** pelo aluno HJ do 6.º ano, turma γ.



6.1. Observa o motivo floral presente no *cachené* da figura 48. Imagina que querias fazer um carimbo para formar esse motivo. Qual seria o desenho mais pequeno que poderias colocar no carimbo? Escolhe uma das três possibilidades apresentadas e justifica a tua resposta.

C, porque é a que tem as medidas mais pequenas.

Figura 294. Resolução da tarefa **6.1.** pelo aluno PM do 6.º ano, turma γ.



6.1. Observa o motivo floral presente no *cachené* da figura 48. Imagina que querias fazer um carimbo para formar esse motivo. Qual seria o desenho mais pequeno que poderias colocar no carimbo? Escolhe uma das três possibilidades apresentadas e justifica a tua resposta.

É o desenho C que representa $\frac{1}{4}$ do motivo.

Figura 295. Resolução da tarefa **6.1.** pelo aluno LL do 6.º ano, turma γ.

Na tarefa **6.2.**, é requerido aos alunos que assinalem, entre quatro opções, aquela que não pode corresponder à amplitude de um ângulo de simetria de rotação do motivo floral introduzido previamente. Essa tarefa permitiu uma resposta praticamente imediata por parte dos alunos, sem ter sido necessário proporcionar-lhes nenhum tipo de apoio. As respostas apresentadas pelos alunos da turma na tarefa **6.2.** ficaram divididas entre duas das opções dadas no respetivo enunciado - em particular, $45°$ e $270°$ -, tendo sido estas as duas únicas opções assinaladas pelos alunos na resolução da tarefa em causa. Ora, os alunos da turma que, acertadamente, escolheram, a opção $45°$ como resposta à tarefa **6.2.**, foram, maioritariamente, os que tinham sido bem-sucedidos na resolução da tarefa imediatamente anterior, tendo, não só escolhido a opção certa, como ainda exposto argumentos válidos para justificar essa opção. Não obstante, o oposto também se verificou. Isto é, houve, igualmente, casos de alunos que tinham tido êxito na resolução da tarefa **6.1.**, e que, na tarefa **6.2.**, escolheram a opção $270°$, que está incorreta. Ora, o mesmo aconteceu com os alunos da turma que, de alguma forma, tinham falhado na resolução da tarefa **6.1.**, visto que a maior parte desses alunos também falhou na escolha da opção correta ao nível da tarefa **6.2.**, mas uma outra parte conseguiu, apesar disso, ser bem-sucedido nesta tarefa. Embora a exploração matemática das tarefas **6.1.** e **6.2.** esteja relacionada, facto é que o desempenho dos alunos na primeira tarefa citada não se refletiu num desempenho semelhante na tarefa subsequente.

Na tarefa **7.**, é exibida uma figura em que está representada a parte inferior do "Traje da Ribeira" (feminino), já introduzido anteriormente. Tomando como ponto de partida um dos vários frisos que se podem observar no *avental* usado pela mulher na figura anterior, é proposto aos alunos, na tarefa **7.1.**, que analisem as simetrias presentes nesse friso, que aparece representado, em parte, na própria tarefa. Conforme já vinha a acontecer, os alunos da turma em geral não expressaram dificuldades na compreensão do enunciado da tarefa **7.1.**, tendo dado continuidade ao seu trabalho autonomamente. Nas resoluções da tarefa **7.1.** desenvolvidas pelos alunos da turma, a maioria dos alunos fez referência à existência de simetrias de reflexão e de rotação no friso, não tendo aprofundado mais a sua resposta (figura 296). Nesse tipo de resolução da tarefa **7.1.**, não se torna possível perceber, concretamente, quais foram as simetrias de reflexão e de rotação consideradas pelos alunos em causa, faltando dados, na resolução, que permitam aferir a correção do raciocínio matemático desses alunos. Outros alunos, em menor número do que os anteriores, na sua resolução da tarefa **7.1.**, reconheceram a existência, apenas, de simetrias de reflexão no friso, não tendo também eles acrescentado nenhuma outra informação, na resolução, que pormenorizasse as simetrias de reflexão que enunciaram (figura 297). Por oposição aos anteriores, um pequeno número de alunos da turma, em **7.1.**, indicou o número de simetrias de reflexão, e, alguns deles, inclusivamente, identificaram essas simetrias no friso (figura 298).

Atentando na resolução da tarefa **7.1.** exibida na figura 298, pode ver-se que o aluno AP, em particular, reconheceu, corretamente, a existência de uma simetria de reflexão de eixo horizontal, no entanto, falhou na identificação das várias simetrias de reflexão de eixo perpendicular à direção das translações do friso.

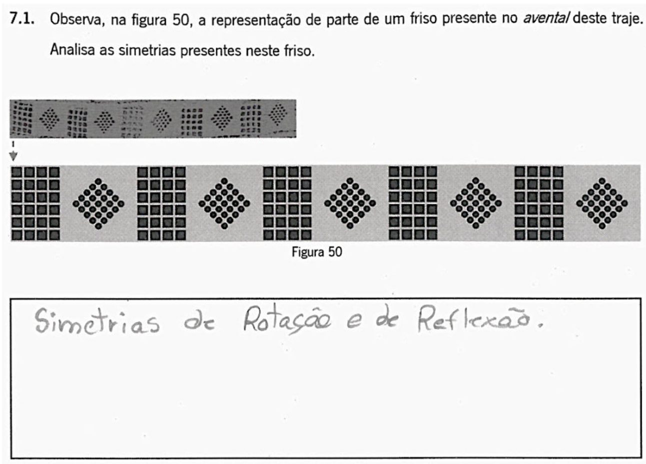


Figura 296. Resolução da tarefa **7.1.** pelo aluno IC do 6.° ano, turma γ.

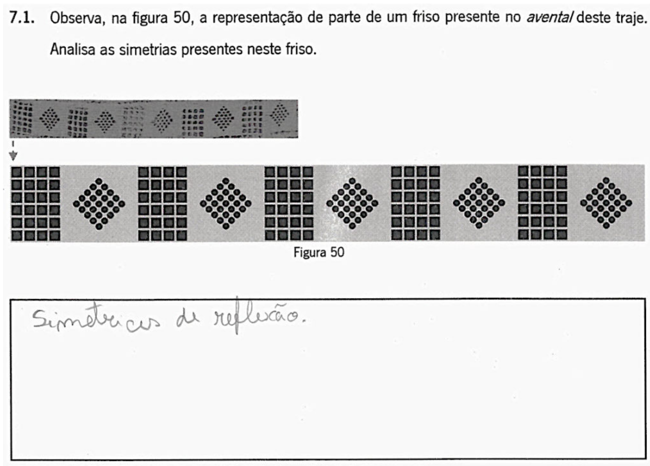


Figura 297. Resolução da tarefa **7.1.** pelo aluno LG do 6.° ano, turma γ.

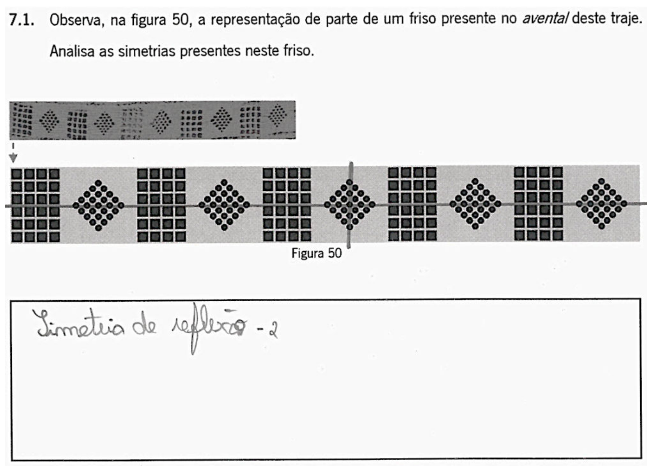


Figura 298. Resolução da tarefa **7.1.** pelo aluno AP do 6.° ano, turma γ.

Ainda sobre a tarefa **7.1.**, convém fazer referência a determinados alunos da turma que, na análise das simetrias presentes no friso em causa, não se mostraram capazes de explorar o friso como uma unidade própria, tendo realizado uma análise isolada dos motivos que se repetem no friso (figura 299). Ora, o tipo de resolução da tarefa **7.1.** previamente analisado parece evidenciar incompreensões, por parte dos diferentes alunos da turma implicados, em relação ao conceito de friso.

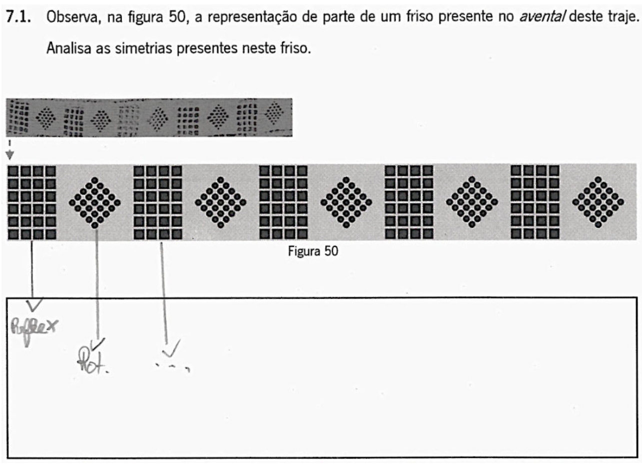


Figura 299. Resolução da tarefa **7.1.** pelo aluno EP do 6.° ano, turma γ.

Na tarefa **7.2.**, propõe-se aos alunos que completem a representação de parte de outros dois frisos presentes na mesma peça do “Traje da Ribeira” (feminino) focalizada na tarefa precedente - o *avental*. Em termos gerais, essa tarefa não trouxe dificuldades aos alunos da turma. Embora a maioria dos alunos tenha conseguido completar os dois frisos corretamente, houve duas incorreções frequentes na resolução da tarefa **7.2.**, a saber: alguns alunos erraram na sequência de motivos do primeiro friso (figura 300); outros alunos completaram o segundo friso copiando o primeiro, supondo que eram iguais (figura 301).

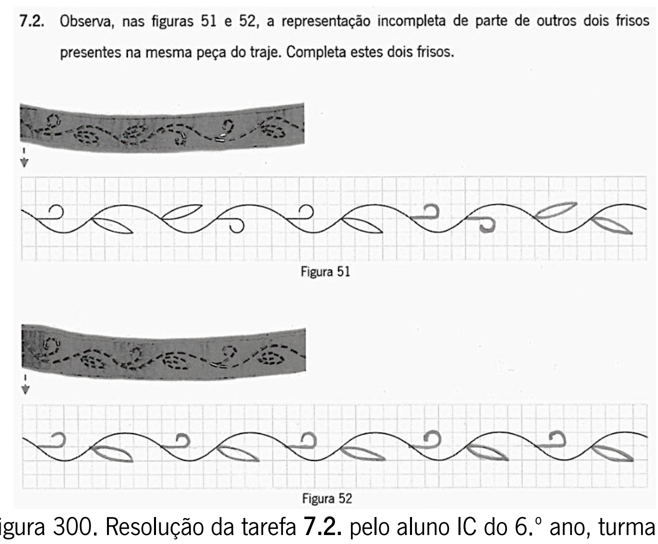


Figura 300. Resolução da tarefa **7.2.** pelo aluno IC do 6.° ano, turma γ.

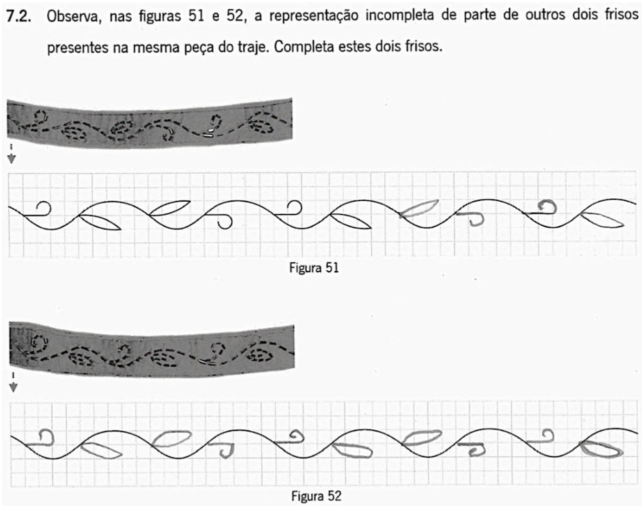


Figura 301. Resolução da tarefa **7.2.** pelo aluno MJ do 6.º ano, turma γ.

Ainda a respeito da tarefa **7.2.**, e, mais concretamente, a propósito da incorreção ilustrada na figura 300, convém referir que os alunos visados, não tendo conseguido compreender a sequência de motivos do primeiro friso através da observação da parte desse friso que é facultada na tarefa, poderiam ter consultado a figura introduzida na tarefa **7.**, onde pode observar-se todo o friso presente no *avental* do "Traje da Ribeira" (feminino). Contudo, os alunos em causa não tomaram a iniciativa de atentar nessa figura para conseguirem completar o primeiro friso da tarefa **7.2.**, tendo acabado por errar na resolução.

A tarefa **7.3.** começa por propor aos alunos a observação de parte de um outro friso visível no *avental* do "Traje da Ribeira" (feminino), sendo, depois, requerido aos alunos que, utilizando o motivo que se repete várias vezes nesse friso, criem dois frisos diferentes - num espaço já definido na tarefa -, e, para além disso, que indiquem as simetrias presentes em cada um dos frisos previamente elaborados. Embora os alunos não tenham expressado dúvidas ao nível da interpretação do enunciado da tarefa **7.3.**, a exploração dessa tarefa trouxe dificuldades generalizadas aos alunos da turma, não tendo havido nenhum aluno que tivesse conseguido construir corretamente os frisos propostos, à primeira tentativa. A monitorização do trabalho que ia sendo desenvolvido pelos alunos no decorrer da exploração **7.3.** permitiu observar erros persistentes, por parte dos alunos, na criação dos dois frisos em questão. Diversos alunos da turma, para construírem os frisos solicitados em **7.3.**, modificaram o motivo inicial (figura 302), como se esse fosse o meio para obterem frisos diferentes do presente no *avental* do traje. Houve, inclusivamente, casos em que os alunos acrescentaram outros motivos, nos frisos elaborados, para além do motivo inicial (e das diferentes configurações que inventaram a partir deste), não tendo sido capazes de basear a construção dos frisos, apenas, na utilização do motivo inicial dado (figura 303). Ora, todas essas falhas espelharam dificuldades transversais dos alunos da turma no trabalho com frisos, e, mais particularmente, na construção de frisos, a partir de um motivo inicial. Para além do disposto, praticamente nenhum aluno da turma atendeu à parte da tarefa **7.3.** que solicitava a identificação das diferentes simetrias presentes nos frisos criados, tendo esta questão sido deixada para segundo plano, visto que, na sua grande maioria, os alunos não conseguiam, sequer, construir os frisos corretamente. Perante o sucedido, procurou-se apoiar, individualmente, os alunos, no sentido de eles reconhecerem, na tarefa **7.3.**, os seus erros na elaboração dos frisos. Alguns deles, na sequência dessa intervenção, foram capazes de corrigir as incorreções verificadas e acabaram por ser bem-sucedidos na resolução da tarefa em questão. Outros alunos, mesmo depois de várias tentativas de (re)elaboração dos frisos, repetiram continuamente o mesmo tipo de erros, não tendo conseguido criar nenhum friso corretamente.

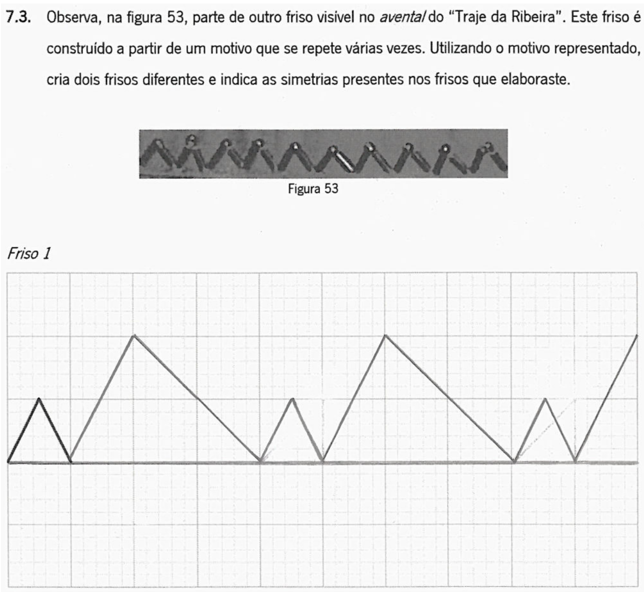


Figura 302. Resolução da tarefa **7.3.** pelo aluno IC do 6.° ano, turma γ.

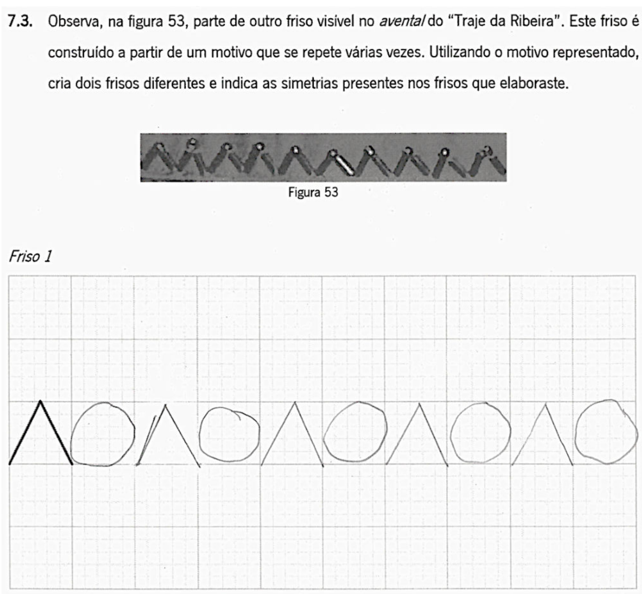


Figura 303. Resolução da tarefa **7.3.** pelo aluno SR do 6.° ano, turma γ.

No final, recolheu-se o conjunto de tarefas matemáticas *À moda de Vila Verde*, tendo sido dada oportunidade aos alunos para partilharem algum comentário/observação face ao trabalho desenvolvido.

Tendo em conta a atividade dos alunos ao longo da implementação pedagógica, pode-se admitir que, em geral, os alunos da turma revelaram interesse na exploração das tarefas matemáticas baseadas em variados padrões encontrados em diferentes peças dos trajes do *Grupo Folclórico de Vila Verde*. Comentários expostos por alguns alunos da turma atestaram isso mesmo, tendo ainda sido declarado, por mais do que um aluno, que o presente conjunto de tarefas matemáticas tinha sido mais acessível do que as tarefas *As voltas da Chula*, que envolviam a análise de uma dança folclórica do mesmo grupo. Ora, isso pode estar relacionado com o facto de os alunos estarem mais familiarizados com o tipo de tarefas propostas no estudo das peças dos trajes do que com a análise matemática de uma coreografia.

Analisando a atividade dos alunos no curso da exploração das diferentes tarefas matemáticas, é possível percecionar que, apesar de os alunos terem considerado o conjunto de tarefas fácil no seu todo, houve certas tarefas que os alunos não foram capazes de explorar de forma adequada ou completa. Entre essas tarefas, merece destaque a tarefa **3.2.**, que, para além de ter gerado dúvidas, aos alunos, na interpretação do respetivo enunciado, criou dificuldades na identificação do grupo simétrico de cada um dos símbolos do *lenço dos namorados* em análise nessa tarefa. A explicitação do grupo simétrico de tais símbolos ficou muito aquém do esperado nessa tarefa, tendo variado entre o agrupamento dos diferentes símbolos sem qualquer referência ao grupo simétrico correspondente e a indicação do número de simetrias de reflexão e de rotação, sem nunca ter sido realizada a caracterização dessas simetrias. Falhas idênticas à anterior ocorreram nas tarefas **4.2.** e **7.1.**, que envolviam a exploração das simetrias presentes, respetivamente, em três motivos bordados numa *camisa* que faz parte do "Traje de Noivos" (masculino), e num friso que ornamenta o *avental* pertencente ao "Traje da Ribeira" (feminino). De novo, a exploração feita pelos alunos foi pouco aprofundada em termos da descrição das simetrias em questão. Uma outra tarefa a destacar é a tarefa **3.3.**, que, embora não tenha levantado dúvidas interpretativas aos alunos, originou falhas na compreensão do que era pedido na tarefa, que os levou a analisarem as letras usadas nas frases de amor do *lenço dos namorados* de formas incongruentes com o aí proposto. A maior ênfase recai sobre a tarefa **7.3.**, por ter sido, de todas as tarefas, aquela que se revelou mais problemática para a generalidade dos alunos, que tornaram evidentes, nessa tarefa, as suas dificuldades em trabalhar com frisos e, mais propriamente, em construir frisos, sendo esse um tópico matemático, provavelmente, pouco explorado nas aulas de matemática, e que, em geral, tem perdido protagonismo.

Um comentário final é relativo ao tempo de duração da implementação pedagógica - no total, 100 minutos -, que se revelou ajustado à aplicação, na turma, do conjunto de tarefas matemáticas proposto.

7.2.10. Diz-me o que vestes, dir-te-ei de onde és...

O conjunto de tarefas matemáticas *Diz-me o que vestes, dir-te-ei de onde és...* foi implementado na já dita turma λ do 8.º ano de escolaridade, de uma escola artística especializada no ensino da música, situada em Braga.

No início da implementação pedagógica, com a duração total de 100 minutos, introduziram-se os trajes da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* a investigar. Para o efeito, leu-se, em plenário, a informação que se encontra apresentada antes das tarefas *Diz-me o que vestes, dir-te-ei de onde és...*, entretanto distribuídas aos alunos. A seguir, os alunos deram início à exploração individual das tarefas. A modalidade de trabalho seguida assumiu um caráter obrigatório, tendo em consideração as medidas de prevenção e contenção da COVID-19 implementadas nos mais diversos estabelecimentos de ensino. O facto de os alunos trabalharem individualmente fez com que a atividade por eles desenvolvida tivesse seguido ritmos diferenciados, tornando mais complexa a monitorização contínua do trabalho dos alunos.

Na tarefa **1.**, é exibida uma figura representativa do "Traxe de Gala" (feminino), onde aparecem legendadas algumas peças que compõem esse traje. Na tarefa **1.1.**, é proposto aos alunos que, observando uma dessas peças - o *mantón de la* - em duas novas figuras introduzidas na tarefa, analisem a simetria do bordado floral que decora este *mantón*, identificando-a, e assinalando as falhas existentes. A tarefa **1.1.** não ofereceu dificuldades assinaláveis aos alunos da turma, que iniciaram prontamente a exploração da referida tarefa, sem terem manifestado dúvidas. A maioria dos alunos, na sua resolução da tarefa **1.1.**, identificou a simetria presente no bordado floral em estudo através do desenho de um eixo de simetria vertical na figura do bordado exibida na tarefa. Certos alunos, para além do referido, indicaram, por palavras, a simetria de reflexão de eixo vertical presente no bordado floral considerado. Ainda na resolução da tarefa **1.1.**, todos os alunos foram capazes de encontrar falhas na simetria do bordado floral sob investigação, tendo sido mais ou menos exigentes nessa análise, o que se traduziu num maior ou menor número de falhas assinaladas na figura desse bordado floral apresentada na tarefa.

Na tarefa **2.**, é introduzido, numa figura, um exemplo de *mandil de gala* diferente do usado pela mulher no "Traxe de Gala" representado na tarefa **1.**, mas ambos típicos de Santiago de Compostela. Na tarefa **2.1.**, propõe-se, aos alunos, que observem a representação de parte de um friso que decora o *mandil de gala* previamente introduzido, e que, a partir daí, analisem as simetrias presentes nesse friso. De início, os alunos da turma não levantaram dúvidas em relação ao que era solicitado na tarefa **2.1.**, tendo demonstrado compreensão. Já no decorrer da exploração da tarefa, começaram a surgir dúvidas, entre os alunos, relativamente ao que era esperado que escrevessem no espaço de resolução definido.

No entendimento dos alunos, 'analisar as simetrias presentes no friso' - conforme enunciado em **2.1.** -, poderia ser feito no próprio friso, e, nessa perspetiva, o facto de existir um espaço delimitado na tarefa para a resolução foi motivo de dúvidas para diversos alunos da turma, tendo-os deixado num impasse. Por se tratar de uma das primeiras tarefas, os ritmos de trabalho dos alunos ainda eram pouco variáveis, o que tornou possível a realização de um esclarecimento em plenário, para responder às dúvidas sentidas pelos alunos na exploração da tarefa **2.1.**, tendo-se clarificado a ideia de que, no espaço demarcado para a resolução da tarefa, deveriam ser designadas as simetrias que os alunos observavam no friso dado. Na sequência do esclarecimento prestado, os alunos deram continuidade à sua atividade na tarefa **2.1.**, autonomamente. Ora, o acompanhamento do trabalho dos alunos na exploração da tarefa em causa permitiu verificar, em primeira instância, que alguns alunos da turma não se recordavam do nome das simetrias que pretendiam designar na resolução da tarefa **2.1.**, tendo solicitado apoio nesse sentido. Ademais, pôde verificar-se que a maioria dos alunos da turma, em **2.1.**, se limitava a indicar o nome das simetrias presentes no friso considerado, sem especificar os elementos que permitem caracterizá-las. Sempre que possível, procurou-se chamar a atenção dos alunos para essa questão, incentivando-os a detalharem as simetrias que haviam nominado na sua resposta à tarefa **2.1.**, de maneira a completá-la.

Nas resoluções da tarefa **2.1.** apresentadas pelos alunos da turma, a maior parte dos alunos reconheceu a existência, unicamente, de simetrias de reflexão no friso que decora o *mandil de gala*. Desses alunos, a maioria admitiu existirem, no friso exposto em **2.1.**, várias simetrias de reflexão vertical e apenas uma simetria de reflexão horizontal, tendo desenhado os distintos eixos de simetria no friso (figura 304). Em contraste, outros desses alunos, em **2.1.**, reconheceram, simplesmente, a existência de duas simetrias de reflexão no friso dado - uma de eixo vertical e outra de eixo horizontal (figura 305). A restante parte dos alunos em questão, na sua resolução da tarefa **2.1.**, apontou um certo número - nem sempre igual - de simetrias de reflexão existente no friso em análise, não se tornando possível saber, a partir desse tipo de resolução, que eixos de simetria de reflexão é que foram considerados (figura 306). Por oposição a todos os alunos citados anteriormente, um outro conjunto de alunos da turma entendeu que, no friso exibido em **2.1.**, estão presentes, não só simetrias de reflexão, como também de rotação. Em relação às simetrias de reflexão, todos esses alunos, na sua resolução da tarefa **2.1.**, consideraram, apenas, as duas simetrias de reflexão - de eixo vertical e de eixo horizontal; quanto à simetria de rotação, só alguns desses alunos é que esclareceram tratar-se de um rotação de amplitude $180°$ (figura 307), sendo que os restantes nada incluíram para caracterizar a simetria de rotação indicada na sua resposta. Um outro grupo de alunos da turma - em menor número do que o conjunto prévio -, para além das simetrias de reflexão e de rotação, reconheceu, em **2.1.**, a existência de simetrias de translação no friso.

Desse grupo minoritário de alunos, só uma pequena parte é que foi capaz de definir, na sua resolução da tarefa **2.1.**, o vetor associado às simetrias de translação identificadas no friso em estudo (figura 308), tendo eles caracterizado, ou não, as simetrias de reflexão e de rotação igualmente identificadas no friso.

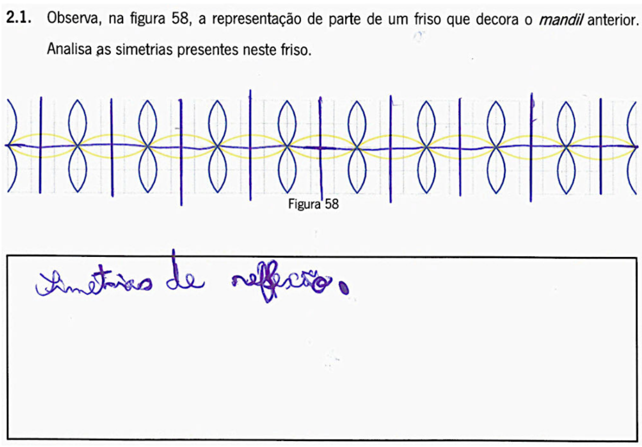


Figura 304. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno SM do 8.º ano, turma λ.

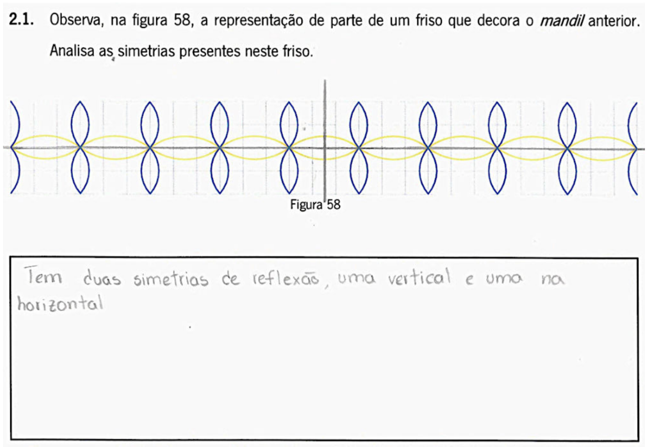


Figura 305. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno BS do 8.º ano, turma λ.

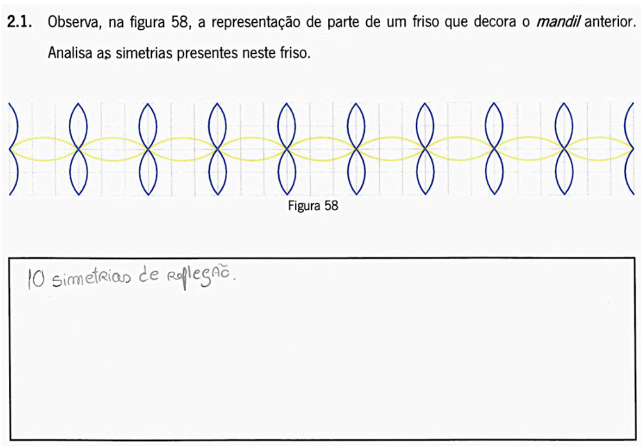


Figura 306. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno CC do 8.º ano, turma λ.

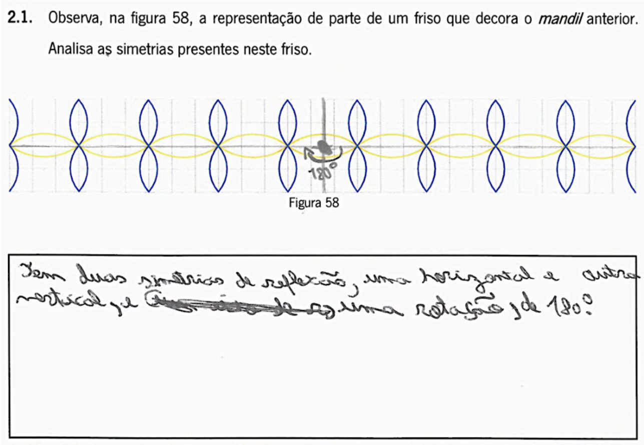


Figura 307. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno JA do 8.° ano, turma λ.

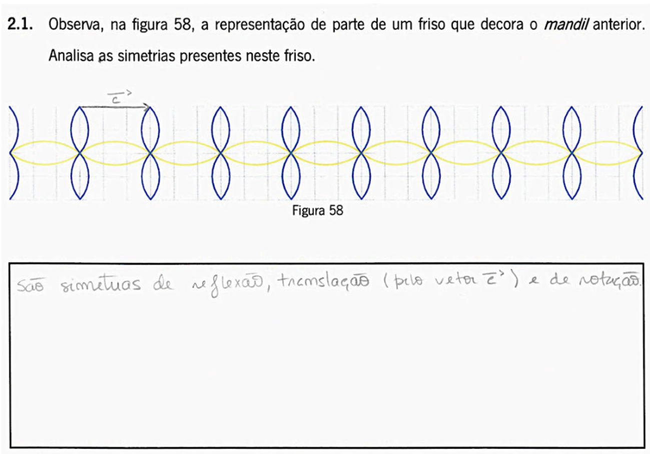


Figura 308. Resolução da tarefa **2.1.** pelo aluno CX do 8.° ano, turma λ.

Na tarefa **3.**, é exibida uma figura ilustrativa de uma *chaqueta* - considerada uma peça de gala -, e, em **3.1.**, propõe-se aos alunos que, observando a representação do motivo floral que, repetidamente, decora a *chaqueta* exposta, estudem o conjunto de simetrias desse motivo, isto é, o seu grupo simétrico. Na exploração da tarefa **3.1.**, diferentes alunos da turma expressaram dúvidas em relação ao enunciado da tarefa, as quais se prenderam, essencialmente, com a interpretação do verbo 'estudar', aí empregue. Não tendo percebido o sentido de tal verbo no contexto do enunciado da tarefa **3.1.**, os alunos em causa necessitaram de esclarecimentos adicionais para compreenderem o que era para fazer na referida tarefa. No caso da tarefa **3.1.**, foi minoritário o número de alunos da turma que reconheceu a existência, exclusivamente, de simetrias de reflexão no motivo floral da *chaqueta*. Tais alunos, em **3.1.**, identificaram, corretamente, as simetrias de reflexão vertical e horizontal do motivo floral considerado (figura 309), ainda que essas duas simetrias não completem o grupo simétrico do motivo em questão. Em contraste com os alunos anteriormente referidos, a maior parte dos alunos da turma contemplou, no grupo simétrico do motivo floral dado em **3.1.**, não só simetrias de reflexão, como também de rotação.

Desses alunos, um pequeno número, na sua resolução da tarefa **3.1.**, caracterizou, corretamente, as duas simetrias de reflexão presentes no motivo floral - uma de eixo vertical e outra de eixo horizontal -, mas não explicitou os elementos que permitem caracterizar a simetria de rotação indicada (figura 310). Um número mais significativo desses alunos, em **3.1.**, para além de ter identificado, com correção, as duas simetrias de reflexão do motivo floral, indicou a amplitude da simetria de rotação desse motivo - $180°$ - tendo ainda, alguns deles, assinalado o centro da simetria de rotação no motivo (figura 311). Outros desses alunos, acrescentaram, às simetrias anteriores, a simetria de rotação de amplitude $360°$ - correspondente à Identidade - no conjunto de simetrias do motivo floral exibido em **3.1.** (figura 312). Por fim, há, ainda, a referir, entre os alunos considerados, alguns que, na tarefa **3.1.**, admitiram, erradamente, a existência de duas simetrias de reflexão de eixos diagonais no motivo floral (figura 313).

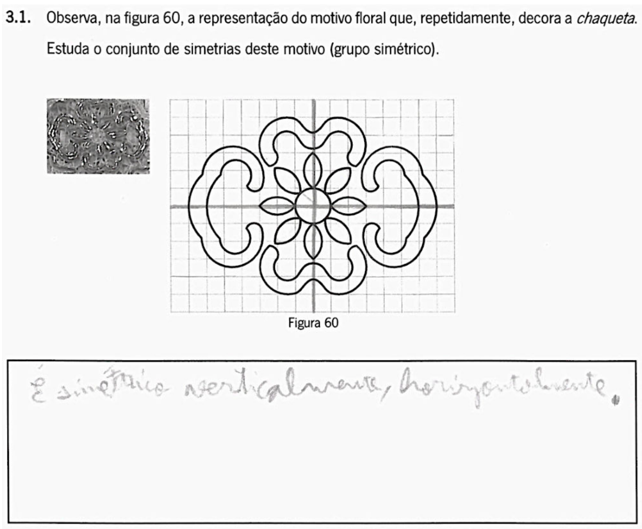


Figura 309. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno CB do 8.º ano, turma λ.

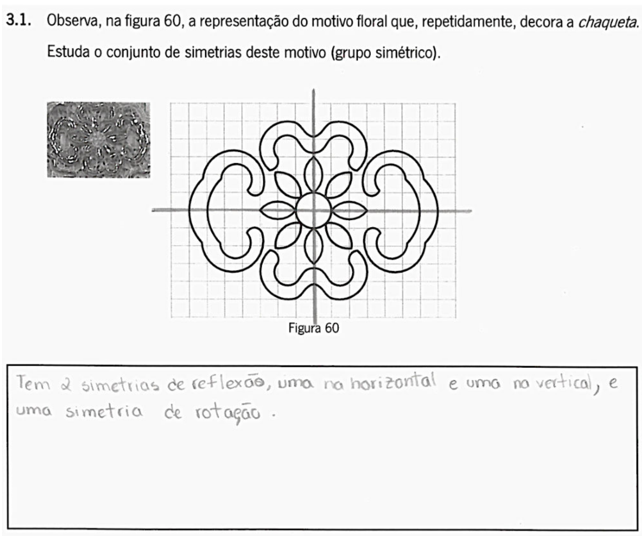


Figura 310. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno BS do 8.º ano, turma λ.

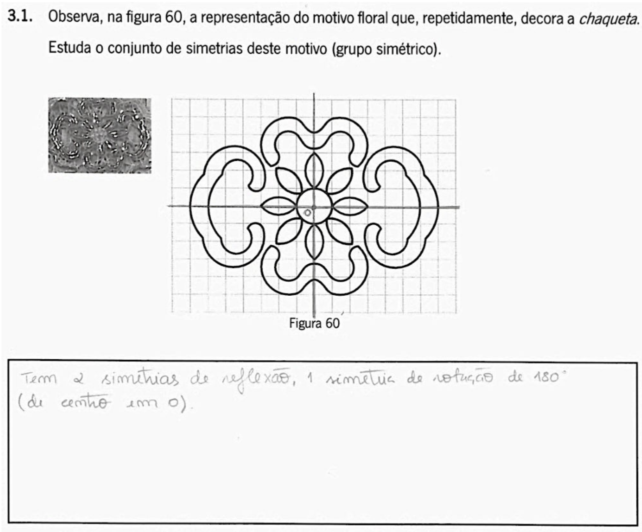

3.1. Observa, na figura 60, a representação do motivo floral que, repetidamente, decora a *chaqueta*.
Estuda o conjunto de simetrias deste motivo (grupo simétrico).

Figura 60

Tem 2 simetrias de reflexão, 1 simetria de rotação de 180°
(de centro em O).

Figura 311. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno CX do 8.º ano, turma λ.

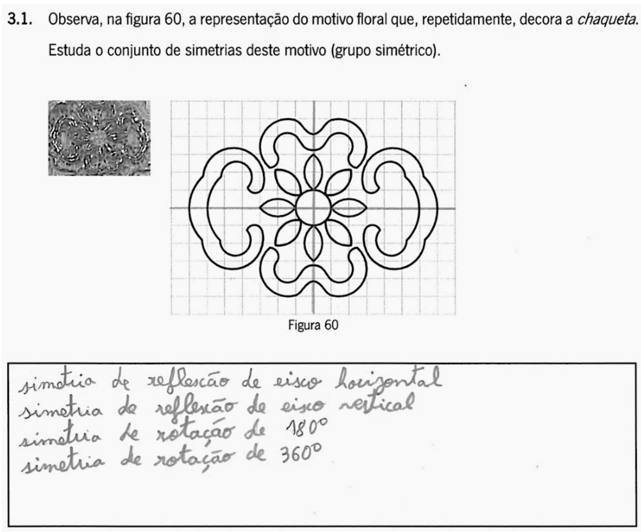
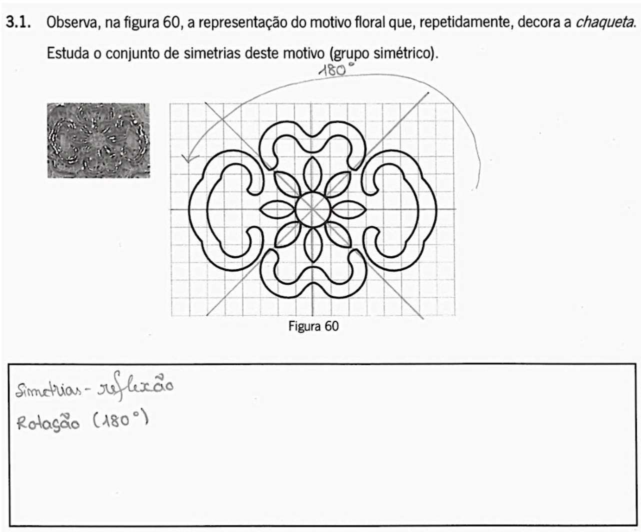

3.1. Observa, na figura 60, a representação do motivo floral que, repetidamente, decora a *chaqueta*.
Estuda o conjunto de simetrias deste motivo (grupo simétrico).

Figura 60

simetria de reflexão de eixo horizontal
simetria de reflexão de eixo vertical
simetria de rotação de 180°
simetria de rotação de 360°

Figura 312. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno DR do 8.º ano, turma λ.


3.1. Observa, na figura 60, a representação do motivo floral que, repetidamente, decora a *chaqueta*.
Estuda o conjunto de simetrias deste motivo (grupo simétrico).

180°

Figura 60

Simetrias - reflexão
Rotação (180°)

Figura 313. Resolução da tarefa **3.1.** pelo aluno MB do 8.º ano, turma λ.

A tarefa **3.2.** é, também, baseada no motivo floral que, repetidamente, decora a *chaqueta* introduzida em **3.**, sendo proposto aos alunos que pintem, na figura de representação desse motivo - exposta, de novo, na tarefa **3.2.** -, o menor número de partes, de modo a tornar o motivo assimétrico. Em termos gerais, os alunos da turma não experimentaram dificuldades na exploração da tarefa **3.2.**, tendo na sua maioria sido bem-sucedidos no reconhecimento de que, para tornar o motivo floral assimétrico, seria necessário pintar, unicamente, uma parte desse motivo, mas não uma qualquer parte. Mesmo assim, houve um pequeno número de alunos da turma que errou na resolução da tarefa **3.2.**, tendo pintado mais do que uma parte do motivo floral, que seria o número mínimo de partes a pintar (figura 314), ou tendo pintado uma parte do motivo que não cumpre o objetivo de o tornar assimétrico (figuras 315 e 316). Importar referir que, de início, os erros citados ocorreram com alguma frequência entre os alunos da turma, tendo uma grande parte desses erros sido corrigida, ou pelos próprios alunos, que se aperceberam das suas falhas, ou mediante alguma chamada de atenção dirigida a esses alunos.

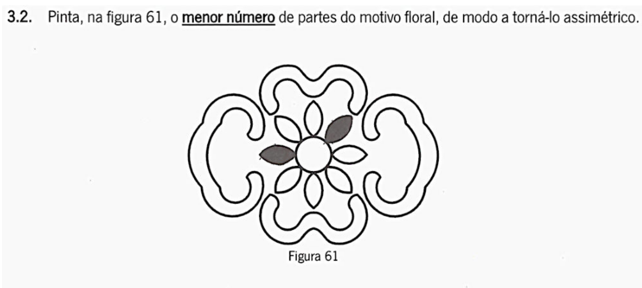


Figura 314. Resolução da tarefa **3.2.** pelo aluno DS do 8.º ano, turma λ.

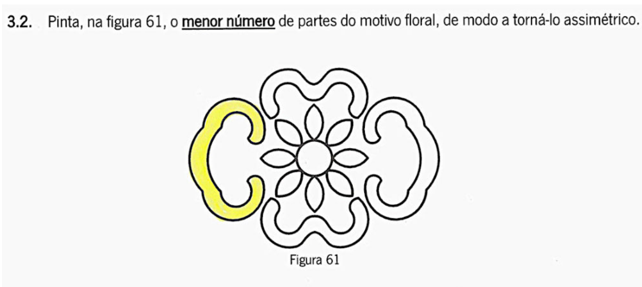


Figura 315. Resolução da tarefa **3.2.** pelo aluno MS do 8.º ano, turma λ.

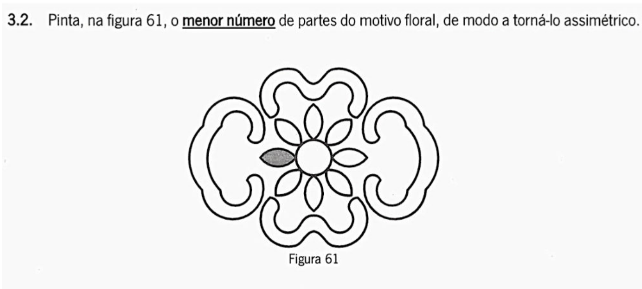


Figura 316. Resolução da tarefa **3.2.** pelo aluno FV do 8.º ano, turma λ.

Na tarefa **3.3.**, é possível observar-se a representação de parte do bordado floral presente num dos lados da parte da frente da *chaqueta* introduzida em **3.**, sendo requerido aos alunos que caracterizem a(s) isometria(s) necessária(s) para formar o padrão representado, que é correspondente a um friso. Globalmente, os alunos não manifestaram dúvidas na exploração da tarefa **3.3.**, tendo, uma vez mais, desenvolvido a sua atividade autonomamente. As resoluções da tarefa **3.3.** mostram, no entanto, que uma grande parte dos alunos da turma não foi capaz de compreender, convenientemente, o que era para fazer na tarefa **3.3.**, tendo apresentado resoluções desalinhadas com o que é proposto nessa tarefa. Em particular, quase metade dos alunos da turma, na sua resolução da tarefa **3.3.**, em vez de analisar a(s) isometria(s) necessária(s) para formar o padrão considerado - tal qual proposto na referida tarefa -, expôs as simetrias presentes nesse padrão, repetindo o tipo de análise subjacente às tarefas prévias (figura 317). Quer tenha sido por falta de atenção no momento da leitura do enunciado da tarefa **3.3.**, ou por incompreensão do mesmo, os alunos em causa não responderam ao que é pedido nessa tarefa. Em contraste, outros alunos da turma - em número praticamente equivalente ao anterior - conseguiram desenvolver uma resolução da tarefa **3.3.** que se mostra em conformidade com é requerido nessa tarefa. Tais alunos definiram o vetor que estaria na origem do padrão representado na tarefa **3.3.** (figura 318), sendo que, apenas um número minoritário desses alunos foi capaz de caracterizar - conforme pedido na tarefa **3.3.** - a(s) isometria(s) - no caso, sucessivas translações - associadas ao vetor definido (figura 319). Há, ainda, a registar um pequeno número de alunos que, na tarefa **3.3.**, não expôs qualquer resolução.

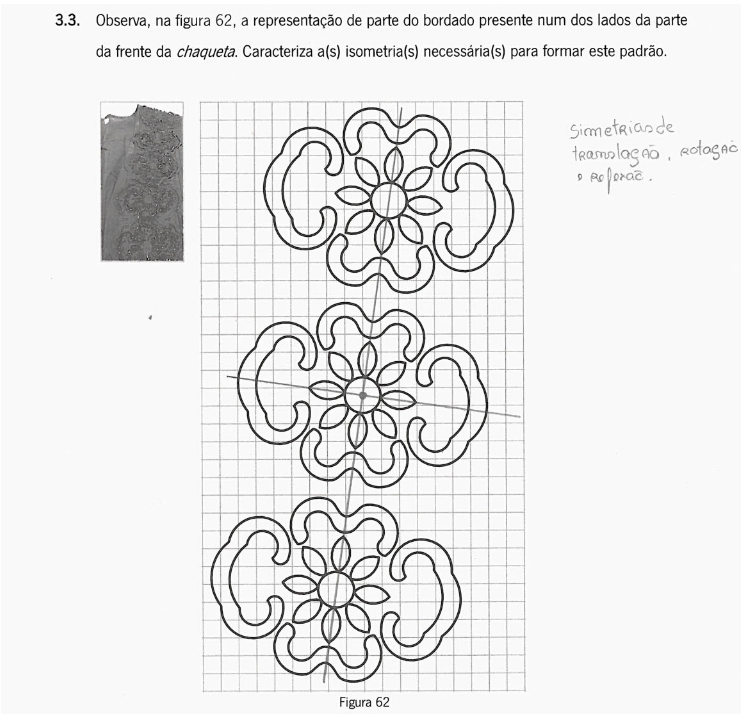


Figura 317. Resolução da tarefa **3.3.** pelo aluno CC do 8.º ano, turma λ.

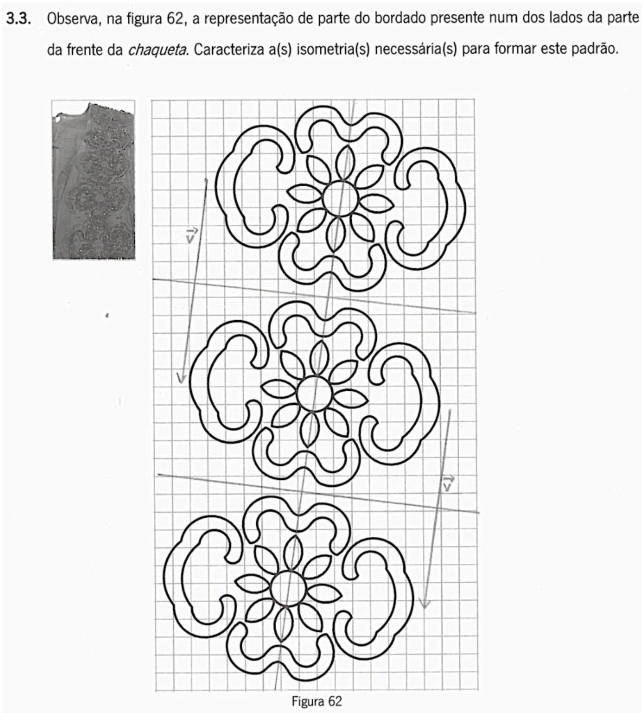


Figura 318. Resolução da tarefa **3.3.** pelo aluno DR do 8.º ano, turma λ.

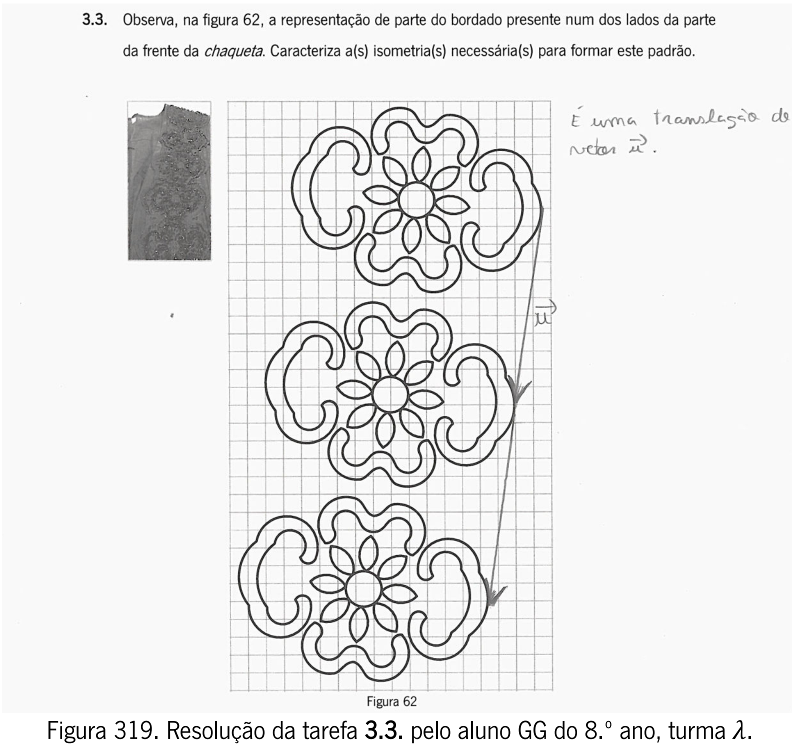
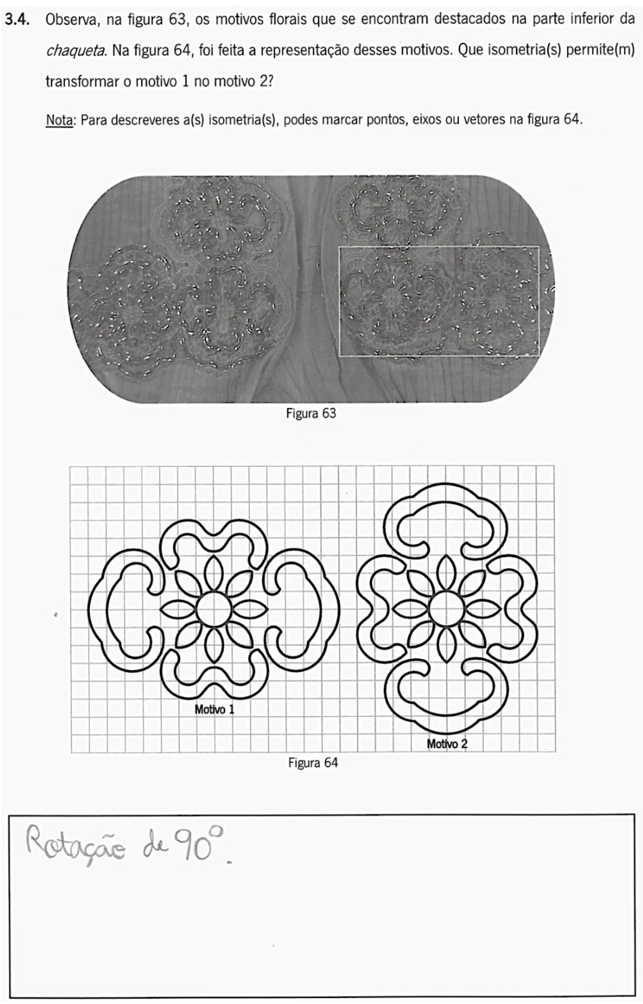


Figura 319. Resolução da tarefa **3.3.** pelo aluno GG do 8.º ano, turma λ.

Na tarefa **3.4.**, é proposto aos alunos que, observando a representação de dois motivos florais presentes na parte inferior da *chaqueta* introduzida em **3.**, explorem que isometria(s) permite(m) transformar o motivo floral representado, na figura dada, por 1 no motivo floral aí representado por 2. Os alunos da turma, não tendo posto nenhuma dúvida, iniciaram a exploração da tarefa **3.4.** de imediato.

Ao acompanhar-se o trabalho dos alunos da turma, foi possível verificar que uma tendência geral dos alunos no início da exploração da tarefa **3.4.** foi a de eles se cingirem a designar a(s) isometria(s) envolvida(s) na transformação do motivo 1 no motivo 2 - mais precisamente, a rotação e/ou a translação. Perante o sucedido, tornou-se essencial chamar a atenção dos alunos, em plenário, no sentido de eles atentarem na nota integrada no enunciado da tarefa **3.4.**, na qual constam informações, que, indiretamente, fornecem pistas para auxiliar os alunos na descrição da(s) isometria(s) que permite(m) transformar o motivo 1 no motivo 2 - algo que tinha sido descurado por eles na resolução dessa tarefa. Apesar dos constrangimentos decorrentes do facto de os alunos da turma não estarem todos no mesmo nível de avanço na exploração das tarefas, o alerta realizado foi frutífero, tendo resultado, pelo menos, em tentativas, por parte dos alunos, de repensarem a resposta dada à tarefa **3.4.**, e de a completarem.

Nas resoluções da tarefa **3.4.** exibidas pelos alunos da turma, a maior parte dos alunos admitiu, erradamente, que a transformação do motivo 1 no motivo 2 poderia ser operada, só, por uma rotação, tendo alguns deles explicitado a amplitude da rotação - $90°$ -, mas não o centro da rotação (figura 320).


3.4. Observa, na figura 63, os motivos florais que se encontram destacados na parte inferior da *chaqueta*. Na figura 64, foi feita a representação desses motivos. Que isometria(s) permite(m) transformar o motivo 1 no motivo 2?

Nota: Para descreveres a(s) isometria(s), podes marcar pontos, eixos ou vetores na figura 64.

Figura 63

Motivo 1

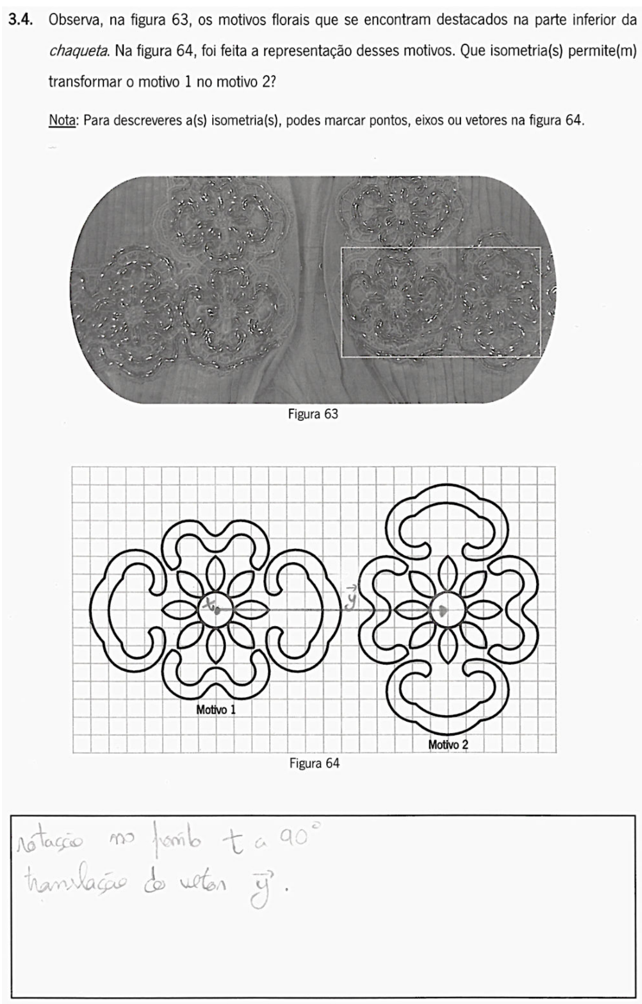
Motivo 2

Figura 64

Rotação de 90°.

Figura 320. Resolução da tarefa **3.4.** pelo aluno MA do 8.º ano, turma λ.

Ainda a respeito das resoluções da tarefa **3.4.** expostas pelos alunos da turma, e em contraste com o tipo de resolução ilustrado, previamente, na figura 320, houve um conjunto de alunos da turma - em menor número do que o grupo prévio - que entendeu que, para transformar o motivo 1 no motivo 2, seria necessária a aplicação, não só de uma rotação, como também de uma translação. Uma vez mais, só alguns desses alunos é que incluíram, em **3.4.**, elementos para caracterizar as referidas isometrias, tendo na sua maioria explicitado a amplitude da rotação - $90°$ - e definido o vetor associado à translação; muito poucos alunos incluíram, para além do supracitado, a definição do centro da rotação (figura 321). Curiosamente, houve um aluno da turma que apresentou uma resolução da tarefa **3.4.** que se distinguiu do tipo de resolução anteriormente descrito, pelo facto de ele ter considerado que, após a aplicação da rotação de $90°$ ou $270°$, poderia ser aplicada, não uma translação - como haviam pensado os alunos nas resoluções anteriores -, mas sim uma reflexão axial, cujo eixo foi desenhado pelo aluno (figura 322). Esse aluno, ao resolver a tarefa **3.4.**, desenvolveu um raciocínio matemático distinto de todos, ilustrando as múltiplas possibilidades de pensamento que podem emergir na exploração de um mesmo problema.


3.4. Observa, na figura 63, os motivos florais que se encontram destacados na parte inferior da *chaqueta*. Na figura 64, foi feita a representação desses motivos. Que isometria(s) permite(m) transformar o motivo 1 no motivo 2?

Nota: Para descreveres a(s) isometria(s), podes marcar pontos, eixos ou vetores na figura 64.

Figura 63

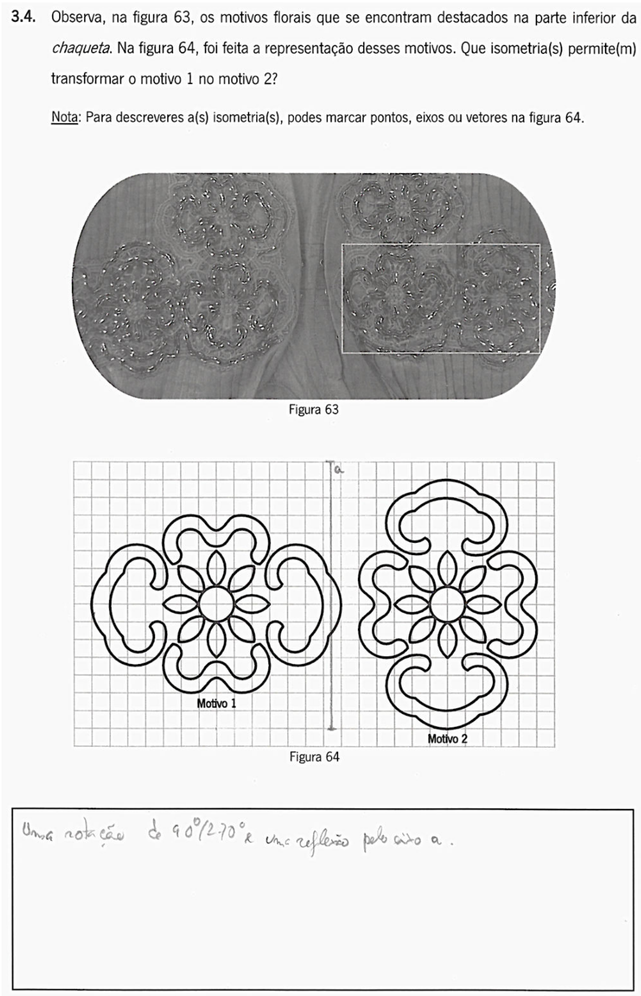
Motivo 1

Motivo 2

Figura 64

rotação no ponto t a 90°
translação do vetor $\vec{y}$.

Figura 321. Resolução da tarefa **3.4.** pelo aluno ID do 8.° ano, turma λ.



3.4. Observa, na figura 63, os motivos florais que se encontram destacados na parte inferior da *chaqueta*. Na figura 64, foi feita a representação desses motivos. Que isometria(s) permite(m) transformar o motivo 1 no motivo 2?

Nota: Para descreveres a(s) isometria(s), podes marcar pontos, eixos ou vetores na figura 64.

Figura 63

Figura 64

Uma rotação de 90°/270° e uma reflexão pelo eixo a.

Figura 322. Resolução da tarefa **3.4.** pelo aluno GV do 8.º ano, turma λ.

Na tarefa **4.**, é exibida uma figura representativa do “Traxe de Gala” (masculino), onde aparecem legendadas as principais peças que fazem parte desse traje. Na tarefa **4.1.**, é proposto aos alunos que analisem se o traje previamente ilustrado apresenta simetria, e que justifiquem a sua resposta. Em geral, todos os alunos da turma fizeram uma exploração autónoma da tarefa **4.1.**, não tendo solicitado apoio. As respostas apresentadas pelos alunos da turma na tarefa **4.1.** foram uniformes na consideração de que o “Traxe de Gala” (masculino) ilustrado na tarefa **4.** não é simétrico. Para justificar a resposta dada, a maioria dos alunos fez referência à presença de elementos, no traje, que quebram a simetria deste, nomeadamente, a *monteira* - e, em particular, o seu formato, os desenhos visíveis na mesma e, ainda, os adornos aplicados neste elemento do traje -, e a *faixa* - que apresenta fios pendentes só de um lado. Ora, a quase totalidade dos alunos da turma mencionou, pelo menos, uma das duas peças do traje citadas, como fundamento para justificar a assimetria que reconheceu no traje, tendo havido apenas alguns alunos que, em **4.1.**, se limitaram a mencionar a existência de diferenças entre o lado direito e o lado esquerdo do traje, sem especificarem os elementos que definem essa assimetria dos lados do traje.

Na tarefa **5.**, exemplifica-se, numa figura, um elemento emblemático do traje galego masculino - a *monteira* -, que se caracteriza pela sua diversidade, quer em termos de formatos, como de decoração. Em **5.1.**, é proposto aos alunos que, observando a representação de três frisos que decoram a *monteira* anteriormente ilustrada, completem, num quadro apresentado nessa tarefa, as isometrias que permitem reconstruir cada um desses três frisos a partir do seu motivo mínimo, que aparece exposto no quadro. Nesse sentido, a tarefa **5.1.** prevê que os alunos da turma explorem as isometrias envolvidas na reconstrução de um dado friso, considerando, não a 'célula do friso' (Guerreiro, 2019) - isto é, o motivo que reconstrói o friso apenas por translações -, mas sim o 'motivo mínimo do friso' (Guerreiro, 2019) - quer dizer, o motivo que reconstrói o friso por reflexões, reflexões deslizantes, rotações e translações. Durante a exploração da tarefa **5.1.**, foi necessário apoiar, individualmente, vários alunos da turma mediante as dúvidas que eles iam expondo em relação ao que era esperado que fizessem nessa tarefa, tendo sido esta uma das tarefas matemáticas em que os alunos, no geral, mostraram menor autonomia. Os pedidos de apoio dos alunos não se esgotaram na clarificação do que era para fazer na tarefa **5.1.**, tendo sido continuamente manifestadas dúvidas e postas questões pelos alunos durante a sua atividade.

Atentando nas resoluções da tarefa **5.1.** exibidas pelos alunos da turma, é possível verificar que, em relação ao friso 1, a maior parte dos alunos percebeu que o motivo mínimo considerado para esse friso reconstrói o friso a partir de duas isometrias - a reflexão e a translação. Desses alunos, a maioria limitou-se a mencionar, no quadro apresentado em **5.1.**, o nome dessas duas isometrias (figura 323). Os restantes alunos detalharam mais a resposta dada em **5.1.** para o friso 1, tendo caracterizado a reflexão como sendo de eixo horizontal e, alguns, tendo, ainda, definido o vetor associado à translação (figura 324). Por oposição aos alunos já referidos, houve um conjunto de alunos da turma que errou na exploração, em **5.1.**, das isometrias que geram o friso 1 a partir do motivo mínimo dado para o mesmo. Esses alunos, na sua resposta à tarefa **5.1.** referente ao friso 1, mencionaram, somente, uma das duas isometrias reconhecidas pelos alunos já citados - a reflexão (figura 325) ou a translação (figura 326) -, que, de forma isolada, não satisfazem o objetivo de reconstrução do friso 1 proposto na tarefa em causa.

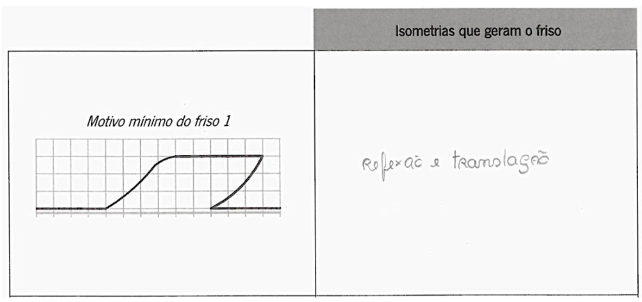


Figura 323. Resolução da tarefa **5.1.** (análise do friso 1) pelo aluno CC do 8.º ano, turma λ.

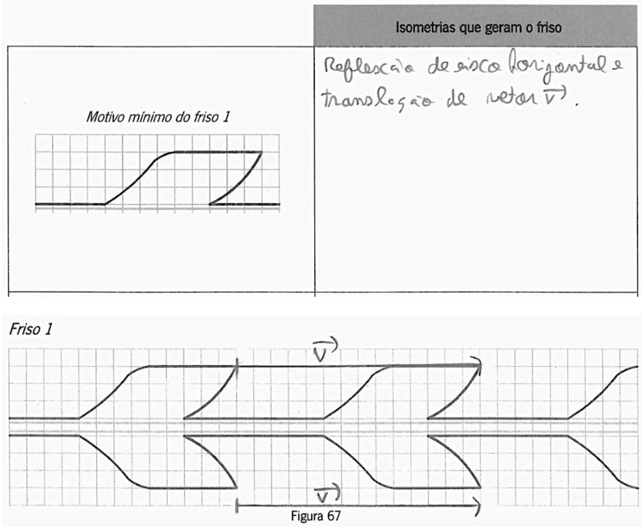


Figura 324. Resolução da tarefa **5.1.** (análise do friso 1) pelo aluno GG do 8.° ano, turma λ.

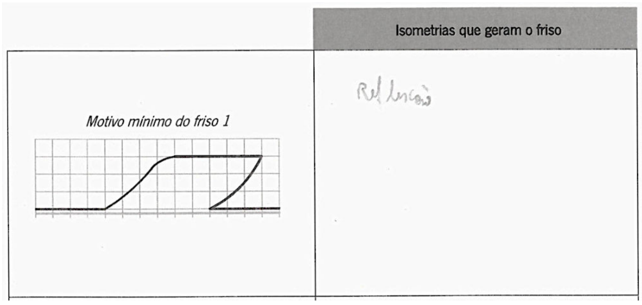


Figura 325. Resolução da tarefa **5.1.** (análise do friso 1) pelo aluno EI do 8.° ano, turma λ.

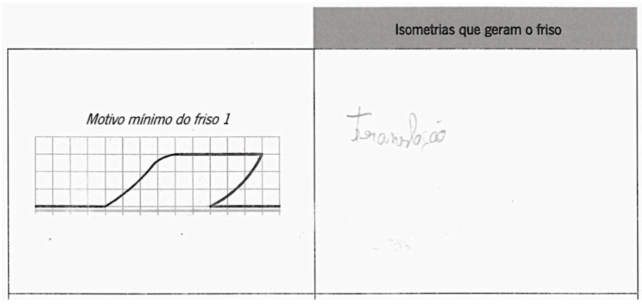


Figura 326. Resolução da tarefa **5.1.** (análise do friso 1) pelo aluno RD do 8.° ano, turma λ.

Considerando as resoluções da tarefa **5.1.** expostas pelos alunos da turma, agora em relação ao friso 2, é possível verificar que a grande maioria dos alunos da turma compreendeu que o motivo mínimo exibido para esse friso reconstrói o friso a partir de uma isometria - a reflexão deslizante. Ainda assim, nenhum dos alunos detalhou, na sua resposta, os elementos que permitem caracterizar essa isometria, tendo-se limitado a registar, no quadro apresentado em **5.1.**, o nome da referida isometria (figura 327). Contrastando com os alunos antes mencionados, um número significativo de alunos da turma entendeu, na tarefa **5.1.**, que o friso 2 podia ser gerado a partir do seu motivo mínimo por uma isometria diferente da referida por tais alunos - a rotação. Quase todos esses alunos indicaram, no quadro da tarefa **5.1.**, a amplitude da rotação - $180°$ -, mas só alguns definiram, também, o centro da rotação (figura 328). Diferentes alunos da turma, ao invés de, em **5.1.**, designarem, isoladamente, cada uma das duas isometrias supracitadas - a reflexão deslizante e a rotação -, associaram a translação (figuras 329 e 330).

Figura 327. Resolução da tarefa **5.1.** (análise do friso 2) pelo aluno MB do 8.° ano, turma λ.

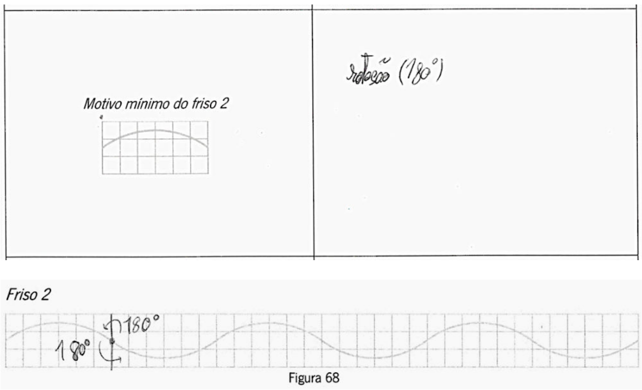


Figura 328. Resolução da tarefa **5.1.** (análise do friso 2) pelo aluno DS do 8.° ano, turma λ.

Figura 329. Resolução da tarefa **5.1.** (análise do friso 2) pelo aluno TO do 8.° ano, turma λ.

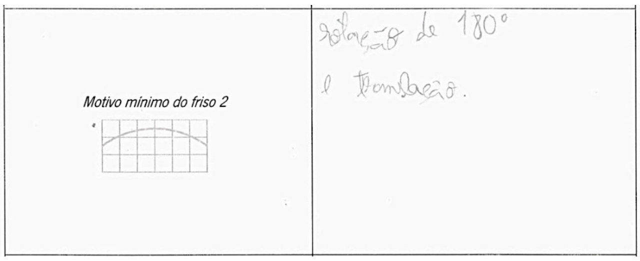


Figura 330. Resolução da tarefa **5.1.** (análise do friso 2) pelo aluno PA do 8.° ano, turma λ.

Observando, por fim, as resoluções da tarefa **5.1.** apresentadas pelos alunos da turma em relação ao friso 3, é possível verificar que aproximadamente metade dos alunos apontou a reflexão como sendo a isometria que permite reconstruir o friso 3 a partir do motivo mínimo considerado para esse friso. Embora a maior parte desses alunos não tenha referido, no quadro apresentado em **5.1.**, tratar-se de uma reflexão de eixo vertical, muitos desses alunos desenharam eixos verticais no friso 3 (figura 331), especificando, dessa forma, a reflexão que haviam designado na sua resposta, e revelando compreensão. A outra metade dos alunos da turma, por sua vez, reconheceu, em **5.1.**, que o motivo mínimo dado para o friso 3 reconstrói esse friso a partir, não de uma, mas de duas isometrias - a reflexão e a translação. Entre esses alunos, foram raros, desta vez, os que se limitaram a mencionar, no quadro da tarefa **5.1.**, o nome das duas isometrias supracitadas. Ao invés, a maioria desses alunos expôs, em **5.1.**, uma resposta detalhada para o friso 3, tendo, não só caracterizado - no caso, com recurso a palavras - a reflexão como sendo de eixo vertical, como também definido o vetor associado à translação (figura 332).

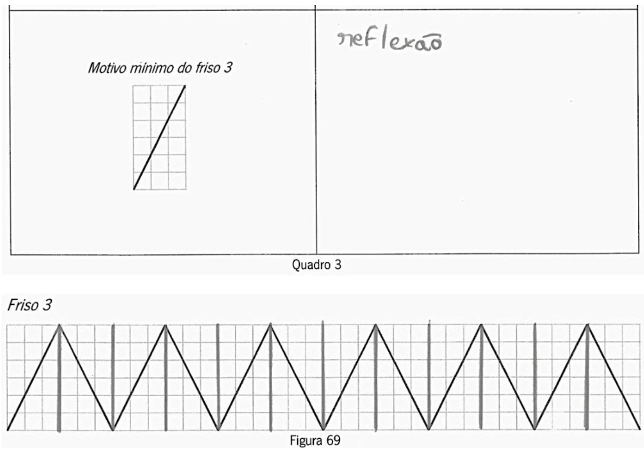


Figura 331. Resolução da tarefa **5.1.** (análise do friso 3) pelo aluno DG do 8.° ano, turma λ.

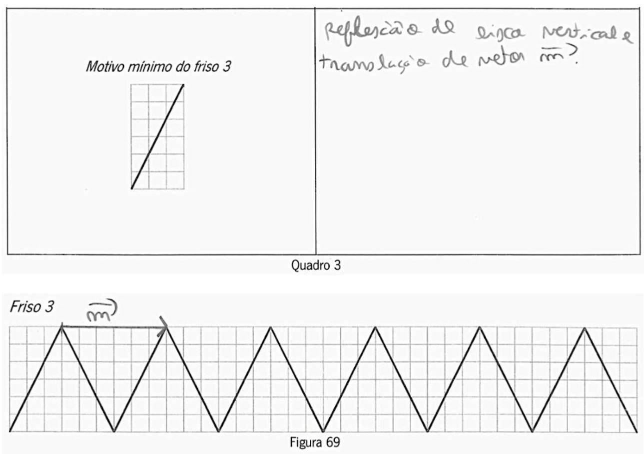


Figura 332. Resolução da tarefa **5.1.** (análise do friso 3) pelo aluno GG do 8.° ano, turma λ.

Na tarefa **5.2.**, é considerado um outro friso que decora a *monteira* exemplificada na tarefa **5.**, sendo proposto aos alunos que, utilizando o motivo que se repete várias vezes nesse friso, criem frisos que satisfaçam duas condições apresentadas na tarefa; em particular, propõe-se a criação de um friso 'apenas com simetrias de rotação e reflexão deslizante' e de um friso 'com os quatro tipos de simetrias'. Genericamente, os alunos da turma não evidenciaram dificuldades ao nível da interpretação da tarefa **5.2.**, tendo realizado uma exploração autónoma da mesma, e praticamente sem terem solicitado ajuda. Da observação feita do trabalho desenvolvido pelos alunos na tarefa **5.2.**, foi possível apurar que a criação do primeiro friso - 'apenas com simetrias de rotação e reflexão deslizante' - foi mais acessível para a generalidade dos alunos da turma do que a criação do segundo friso - 'com os quatro tipos de simetrias'.

As resoluções da tarefa **5.2.** apresentadas pelos alunos da turma corroboram o disposto acima, no sentido em que a maioria dos alunos da turma foi bem-sucedida na elaboração do primeiro friso, tendo conseguido satisfazer a condição imposta para esse friso. Mesmo assim, houve um número apreciável de alunos da turma que, na tarefa **5.2.**, não foi capaz de criar o primeiro friso corretamente. A maior parte desses alunos errou por não ter respeitado a condição indicada, em **5.2.**, para esse friso (figura 333). Os restantes alunos erraram, desde logo, porque modificaram o motivo inicial (figura 334), não tendo respeitado a instrução dada no enunciado da tarefa **5.2.** para a criação dos frisos propostos. Convém, ainda, fazer alusão a diferentes alunos da turma que, mesmo tendo construído, com correção, o primeiro friso, foram induzidos em erro pelo espaço definido na tarefa **5.2.** para a criação desse friso, o que fez com que eles tivessem repetido o mesmo friso para preencherem todo o espaço (figura 335).

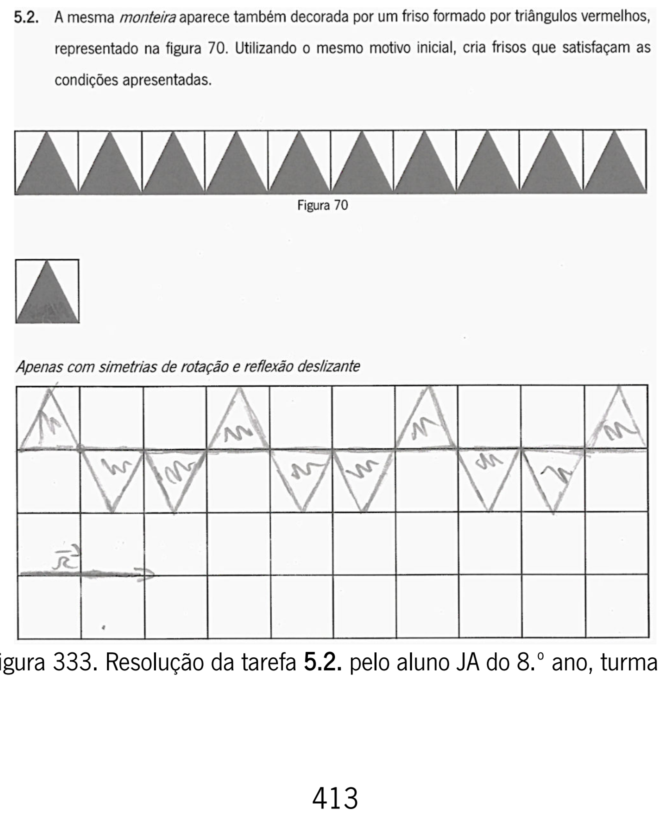


Figura 333. Resolução da tarefa **5.2.** pelo aluno JA do 8.° ano, turma λ.

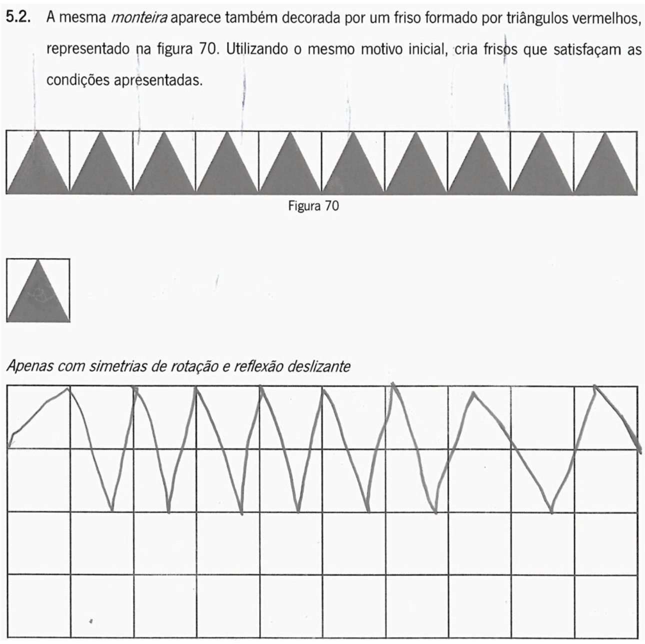


Figura 334. Resolução da tarefa **5.2.** pelo aluno SM do 8.º ano, turma λ.

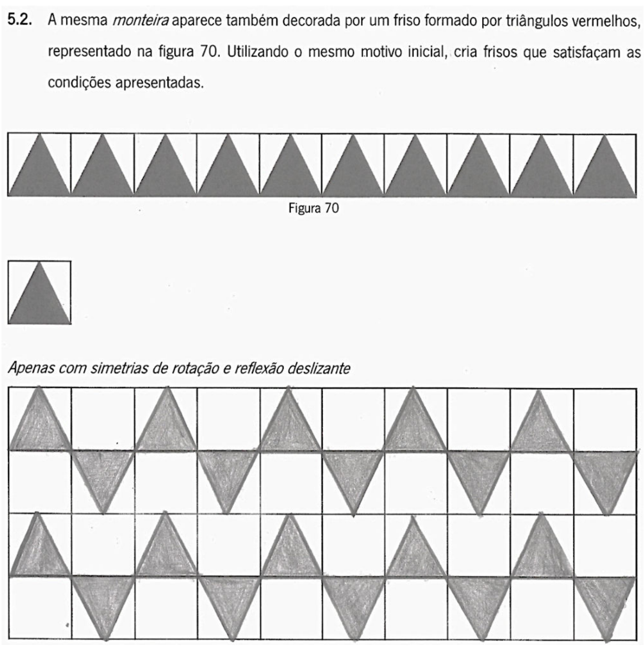


Figura 335. Resolução da tarefa **5.2.** pelo aluno DG do 8.º ano, turma λ.

As resoluções da tarefa **5.2.** expostas pelos alunos da turma - com foco, agora, na construção do segundo friso - são ilustrativas da dificuldade que a construção desse friso impôs aos alunos em geral. Para começar, houve diversos alunos da turma que, mesmo depois de várias tentativas, não conseguiram criar, na tarefa **5.2.**, qualquer friso 'com os quatro tipos de simetrias'. Ademais, foi bastante significativo o número de alunos da turma que, em **5.2.**, criou o segundo friso incorretamente. Em quase todos esses casos, os frisos criados não satisfaziam a condição imposta, em **5.2.**, para o segundo friso (figura 336), tendo sido minoritário o número de casos marcados pela alteração do motivo inicial do friso (figura 337). Por fim, importa fazer menção a vários alunos da turma que supuseram, erradamente, que seria preciso ocupar todo o espaço disponível na tarefa **5.2.** para a criação do segundo friso, o que fez com que, mesmo tendo criado o segundo friso corretamente, alguns deles tivessem repetido esse friso (figura 338), tendo outros deles preenchido o espaço restante com frisos inapropriados à condição dada (figura 339).

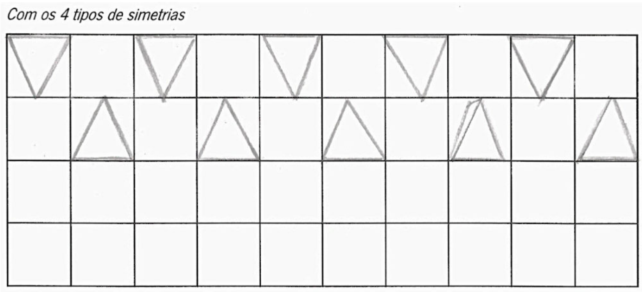


Figura 336. Resolução da tarefa **5.2.** pelo aluno EI do 8.º ano, turma λ.

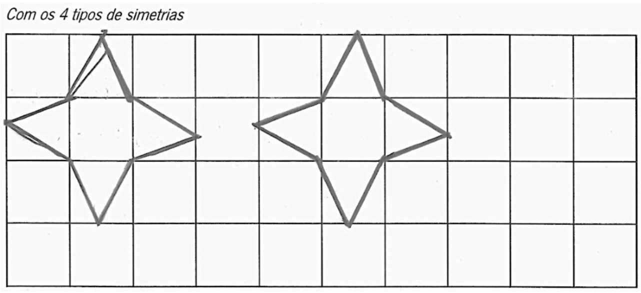


Figura 337. Resolução da tarefa **5.2.** pelo aluno SM do 8.º ano, turma λ.

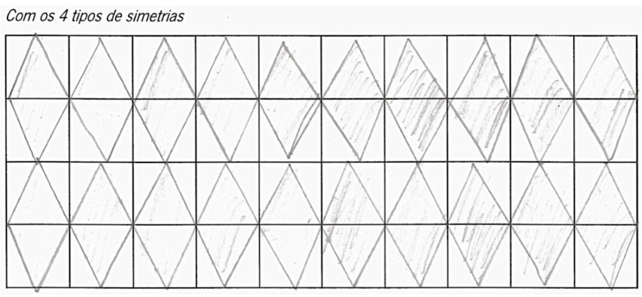


Figura 338. Resolução da tarefa **5.2.** pelo aluno PA do 8.º ano, turma λ.

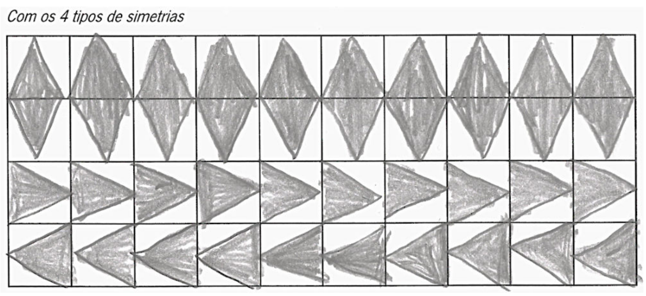


Figura 339. Resolução da tarefa **5.2.** pelo aluno CB do 8.º ano, turma λ.

Na tarefa **6.**, é apresentada uma figura com outro exemplo de uma *monteira*, cuja decoração é diferente da *monteira* explorada nas tarefas precedentes. Considerando as diversas figuras que decoram a nova *monteira* em análise, é proposto aos alunos, na tarefa **6.1.**, que selecionem, entre essas figuras, pelo menos uma para cada propriedade indicada num quadro exposto nessa tarefa - designadamente, ‘sem simetria’; ‘com simetria apenas de reflexão’; e ‘com simetria de rotação’ -, vendo o exemplo dado. A exploração da tarefa **6.1.** revelou-se acessível para os alunos da turma em geral, que foram capazes de a resolver num curto espaço de tempo, e com êxito. Todos os alunos da turma conseguiam selecionar, apropriadamente, pelo menos uma figura - entre as que surgem na decoração da *monteira* - para cada uma das três propriedades indicadas no quadro da tarefa **6.1.**, tendo cumprido o propósito da tarefa. Verificaram-se, ainda assim, algumas incorreções pontuais nas resoluções da tarefa **6.1.** apresentadas pelos alunos da turma, que, por vezes, classificaram incorretamente determinadas figuras da *monteira*, tendo-as integrado num grupo do quadro cuja propriedade de simetria não se aplicava a essas figuras. Como incorreção mais frequente em **6.1.**, verificou-se a classificação de uma figura da *monteira* formada por motivos circulares, que os alunos inseriram no grupo das figuras ‘com simetria apenas de reflexão’ (figura 340), quando, na verdade, a figura considerada tem simetria de reflexão, mas também de rotação. Ora, essa propriedade - ‘com simetria apenas de reflexão’ - foi, das três propriedades apresentadas na tarefa **6.1.**, aquela em que os alunos mais falharam, provavelmente por terem desconsiderado que, nessa propriedade, está subentendida a exclusão de outras simetrias para além da simetria de reflexão.

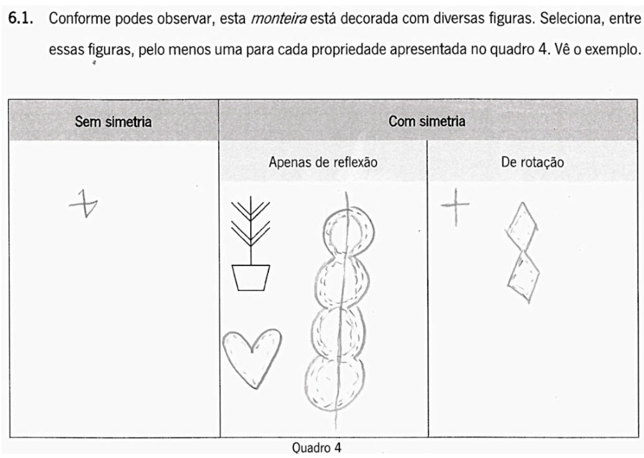


Figura 340. Resolução da tarefa **6.1.** pelo aluno RA do 8.º ano, turma λ.

Na tarefa **6.2.**, encontra-se representada, num quadriculado, uma das figuras que decora a *monteira* introduzida na tarefa **6.**, sendo proposto aos alunos, em primeiro lugar, que escolham uma isometria - a reflexão, a rotação, ou a translação - e que construam o transformado da figura representada por essa isometria, e, posteriormente, que descrevam a isometria que utilizaram na sua construção.

Também ao nível da tarefa **6.2.** não se registaram constrangimentos na atividade dos alunos da turma, tendo sido esta uma tarefa que, tal como a anterior, se revelou acessível para a generalidade dos alunos. Todos os alunos foram capazes de construir, com correção, o transformado da figura da *monteira* representada no quadriculado da tarefa **6.2.** a partir de uma dada isometria, não se tendo verificado praticamente nenhum erro nas construções dos alunos. Ao nível das isometrias escolhidas pelos alunos na resolução da tarefa **6.2.**, a mais usual foi a reflexão - tanto de eixo vertical, como de eixo horizontal -, tendo a quase totalidade dos alunos usado essa isometria para construir o transformado da figura dada. Em contraste com a significativa maioria de alunos da turma, houve três alunos que, em **6.2.**, escolheram a translação para transformarem a figura em causa, e houve, somente, um aluno que usou a rotação. Ainda que todos os alunos tenham sido bem-sucedidos na construção do transformado da figura em questão na tarefa **6.2.**, foram muito raros os alunos que, no seguimento, descreveram a isometria utilizada na sua construção, tendo a grande maioria dos alunos da turma ignorado essa parte da tarefa.

Na tarefa **6.3.**, é apresentada uma afirmação - supostamente feita no contexto da resolução da tarefa **6.2.** -, que é a seguinte: *«Já escolhi a minha isometria. Só te digo que nenhum ponto ficará fixo.»*. A partir dessa afirmação, feita pela Eva ao Lourenço, propõe-se aos alunos que analisem se o que a Eva disse é suficiente para ele perceber qual é a isometria que ela escolheu, e que justifiquem a sua resposta. A interpretação do enunciado da tarefa **6.3.** não trouxe dificuldades aos alunos aos alunos da turma, que, prontamente, iniciaram a exploração dessa tarefa, não tendo pedido apoio ao longo da sua atividade. Na resolução da tarefa **6.3.**, a grande maioria dos alunos da turma considerou que a afirmação da Eva - *«Já escolhi a minha isometria. Só te digo que nenhum ponto ficará fixo.»* - não é suficiente para o Lourenço perceber qual a isometria que ela escolheu no contexto (hipotético) da resolução da tarefa **6.2.**, previamente explorada pelos alunos. Ainda que a maior parte dos alunos da turma tivesse considerado, em **6.3.**, não ser possível descobrir a isometria que a Eva escolheu, com base, apenas, no que ela disse, as justificações apresentadas pelos alunos para fundamentarem essa resposta foram bastante diversas. Alguns alunos, na tarefa **6.3.**, usaram como argumento o facto de nenhuma isometria ter um ponto fixo (figura 341). Outros alunos apresentaram uma justificação para a resposta dada em **6.3.** que é o oposto da anterior, isto é, argumentaram que há sempre um ponto fixo em qualquer isometria (figura 342). Certos alunos justificaram a sua resposta à tarefa **6.3.**, afirmando que poderia ser qualquer isometria (figura 343), do que se pode subentender que, na perspetiva deles, qualquer que seja a isometria, nenhum ponto fica fixo; como tal, o presente argumento conflui com o primeiro argumento referenciado. No entendimento de diferentes alunos, há várias isometrias em que nenhum ponto fica fixo (figura 344), tendo sido esta a justificativa usada por eles em **6.3.**, sem ficar claro quais as isomerias a que se referem.

Outros alunos, em **6.3.**, alegaram que a translação, a reflexão e a rotação podem ter pontos fixos ou não (figura 345), tendo usado esse argumento como justificação para a resposta exposta na tarefa em causa; tais alunos clarificaram as isometrias envolvidas na sua argumentação - translação, reflexão e rotação -, mas a sua resposta é ambígua na consideração de que tais isometrias podem ter ou não ter pontos fixos. Um outro conjunto de alunos, na tarefa **6.3.**, baseou a sua justificação no facto de que, tanto na translação, como na reflexão deslizante, não se mantém fixo nenhum ponto, logo a informação partilhada pela Eva não é suficiente para o Lourenço entender qual dessas duas isometrias é que ela terá escolhido (figura 346). Houve, ainda, alguns alunos que não justificaram a resposta registada em **6.3.** (figura 347).

6.3. Enquanto resolviam a tarefa 6.2., a Eva disse ao Lourenço:

«Já escolhi a minha isometria. Só te digo que nenhum ponto ficará fixo.».

Será que o que a Eva disse é suficiente para o Lourenço perceber qual a isometria que ela escolheu? Justifica a tua resposta.

Não sei, porque nenhuma tem um ponto fixo.

Figura 341. Resolução da tarefa **6.3.** pelo aluno LF do 8.º ano, turma λ.

6.3. Enquanto resolviam a tarefa 6.2., a Eva disse ao Lourenço:

«Já escolhi a minha isometria. Só te digo que nenhum ponto ficará fixo.».

Será que o que a Eva disse é suficiente para o Lourenço perceber qual a isometria que ela escolheu? Justifica a tua resposta.

Não, porque há sempre um ponto fixo.

Figura 342. Resolução da tarefa **6.3.** pelo aluno RD do 8.º ano, turma λ.

6.3. Enquanto resolviam a tarefa 6.2., a Eva disse ao Lourenço:

«Já escolhi a minha isometria. Só te digo que nenhum ponto ficará fixo.».

Será que o que a Eva disse é suficiente para o Lourenço perceber qual a isometria que ela escolheu? Justifica a tua resposta.

Não, porque pode ser qualquer uma isometria.

Figura 343. Resolução da tarefa **6.3.** pelo aluno GG do 8.º ano, turma λ.

6.3. Enquanto resolviam a tarefa 6.2., a Eva disse ao Lourenço:

«Já escolhi a minha isometria. Só te digo que nenhum ponto ficará fixo.».

Será que o que a Eva disse é suficiente para o Lourenço perceber qual a isometria que ela escolheu? Justifica a tua resposta.

Não é suficiente, pois há várias isometrias em que nenhum ponto fica fixo.

Figura 344. Resolução da tarefa **6.3.** pelo aluno TO do 8.º ano, turma λ.

6.3. Enquanto resolviam a tarefa 6.2., a Eva disse ao Lourenço:

«Já escolhi a minha isometria. Só te digo que nenhum ponto ficará fixo.».

Será que o que a Eva disse é suficiente para o Lourenço perceber qual a isometria que ela escolheu? Justifica a tua resposta.

Não, porque a translação, a reflexão e a rotação podem ter pontos fixos ou não.

Figura 345. Resolução da tarefa **6.3.** pelo aluno BS do 8.º ano, turma λ.

6.3. Enquanto resolviam a tarefa 6.2., a Eva disse ao Lourenço:

«Já escolhi a minha isometria. Só te digo que nenhum ponto ficará fixo.».

Será que o que a Eva disse é suficiente para o Lourenço perceber qual a isometria que ela escolheu? Justifica a tua resposta.

Não, porque tanto na translação como na reflexão deslizante não se mantem nenhum ponto fixo e por isso não temos informação suficiente para saber qual deles é.

Figura 346. Resolução da tarefa **6.3.** pelo aluno CX do 8.º ano, turma λ.

6.3. Enquanto resolviam a tarefa 6.2., a Eva disse ao Lourenço:

«Já escolhi a minha isometria. Só te digo que nenhum ponto ficará fixo.».

Será que o que a Eva disse é suficiente para o Lourenço perceber qual a isometria que ela escolheu? Justifica a tua resposta.

Não.

Figura 347. Resolução da tarefa **6.3.** pelo aluno MS do 8.º ano, turma λ.

Ainda a propósito da tarefa **6.3.**, convém fazer referência a alguns alunos que, em contraste com a maioria dos alunos da turma já aqui analisada, consideraram que seria possível descobrir a isometria que a Eva escolheu, com base, exclusivamente, na afirmação feita por ela - *«Já escolhi a minha isometria. Só te digo que nenhum ponto ficará fixo.»*. Como tal, os alunos em causa, na sua resposta à tarefa **6.3.**, explicitaram a isomeria que, de acordo com o seu pensamento, a Eva selecionou. Alguns desses alunos, em **6.3.**, indicaram ser a reflexão, sem apresentarem qualquer justificação para tal resposta (figura 348). Por sua vez, outros alunos entenderam que a isometria em causa na tarefa **6.3.** era a reflexão deslizante (figura 349) e um número muito pequeno de alunos considerou que a isometria era reflexão central (figura 350), tendo todos eles usado como argumento o facto de todos os pontos mudarem de posição.

6.3. Enquanto resolviam a tarefa 6.2., a Eva disse ao Lourenço:

«Já escolhi a minha isometria. Só te digo que nenhum ponto ficará fixo.».

Será que o que a Eva disse é suficiente para o Lourenço perceber qual a isometria que ela escolheu? Justifica a tua resposta.

Sim, é a reflexão.

Figura 348. Resolução da tarefa **6.3.** pelo aluno EI do 8.º ano, turma λ.

6.3. Enquanto resolviam a tarefa 6.2., a Eva disse ao Lourenço:

«Já escolhi a minha isometria. Só te digo que nenhum ponto ficará fixo.».

Será que o que a Eva disse é suficiente para o Lourenço perceber qual a isometria que ela escolheu? Justifica a tua resposta.

Reflexão Deslizante, porque todos os pontos deslizão.

Figura 349. Resolução da tarefa **6.3.** pelo aluno CC do 8.º ano, turma λ.

6.3. Enquanto resolviam a tarefa 6.2., a Eva disse ao Lourenço:

«Já escolhi a minha isometria. Só te digo que nenhum ponto ficará fixo.».

Será que o que a Eva disse é suficiente para o Lourenço perceber qual a isometria que ela escolheu? Justifica a tua resposta.

Reflexão central, porque todos os pontos mudam de posição.

Figura 350. Resolução da tarefa **6.3.** pelo aluno FV do 8.º ano, turma λ.

A diversidade que caracterizou as resoluções da tarefa **6.3.** apresentadas pelos alunos da turma - anteriormente evidenciada -, tornou explícito que o conteúdo dessa tarefa - pontos fixos das isometrias - se afigura pouco claro para os alunos da turma em geral. O resultado disso foi uma multiplicidade de interpretações, ideias e pensamentos que ficou visível nas respostas dos alunos à tarefa **6.3.**, constituindo estas um ponto de partida privilegiado para a discussão do conteúdo implicado nessa tarefa.

Na tarefa **6.4.**, é focada outra figura que decora a *monteira* introduzida na tarefa **6.**, propondo-se aos alunos que descubram quais as isometrias que transformam essa figura original da *monteira* (O), em cada um dos seus transformados (T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5). A exploração da tarefa **6.4.** trouxe bastantes dificuldades aos alunos da turma em geral, que não conseguiram desenvolver a sua atividade de forma autónoma, tendo solicitado constantemente apoio no decorrer do seu trabalho. O facto de, na tarefa **6.4.**, ser apresentada muito pouca informação que pudesse dar pistas aos alunos para a resolução da tarefa fez com que essa tarefa se tornasse muito complexa para os alunos em geral, que se sentiram perdidos. Diante disso, muitos alunos da turma começaram por responder quase à sorte na tarefa **6.4.**, apontando isometrias mais ou menos plausíveis para transformarem a figura original da *monteira* (O), em cada um dos seus transformados (T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5). Considerando o disposto, procurou-se incentivar os alunos, ao longo das interações estabelecidas com eles, a aprofundarem as isometrias que haviam considerado em **6.4.**, estimulando-os a identificarem eixos, pontos, ou vetores que os pudessem ajudar a descrever, e, até mesmo a verificar, essas isometrias. Mesmo assim, muitos alunos mantiveram fixa a sua resolução inicial da tarefa **6.4.**, tendo-se limitado a nomear as isometrias ligadas a cada transformação (figura 351). Outros alunos desenvolveram um pouco mais a sua resolução em **6.4.**, tendo definido certos elementos para descrever algumas das isometrias indicadas, em particular a translação e a reflexão (figura 352).

Houve, ainda, um pequeno número de alunos que, fruto do seu empenho na exploração da tarefa **6.4.**, intermediado pelo suporte que lhes foi sendo dado, conseguiram exibir uma resolução satisfatória da tarefa **6.4.**, tendo conseguido explorar a maioria das isometrias implicadas na referida tarefa (figura 353).

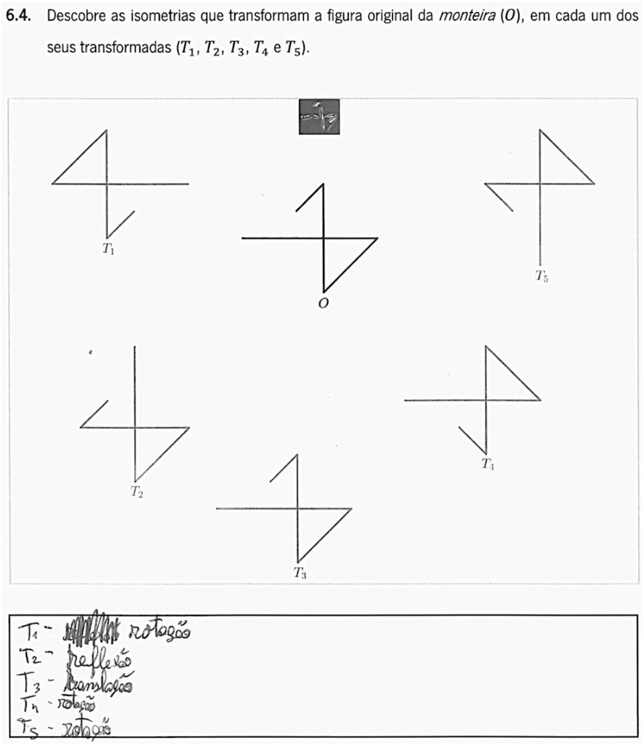


Figura 351. Resolução da tarefa **6.4.** pelo aluno DS do 8.º ano, turma λ.

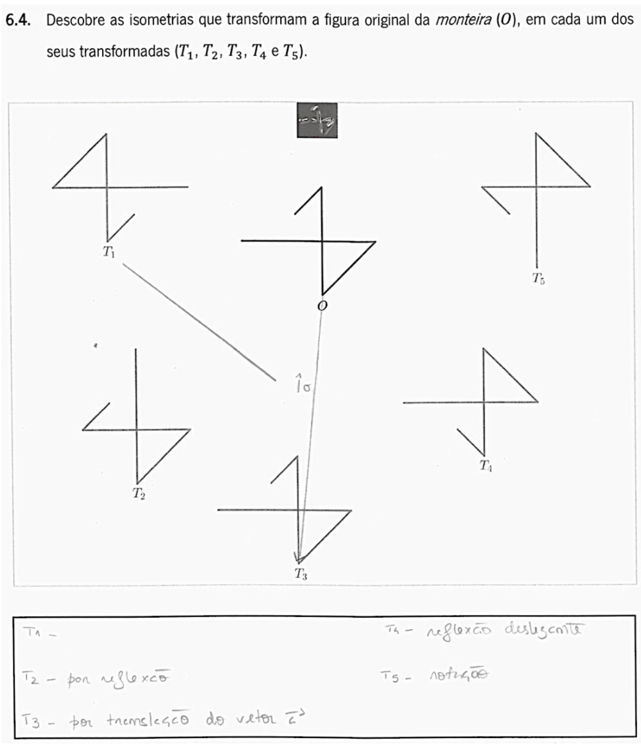


Figura 352. Resolução da tarefa **6.4.** pelo aluno CX do 8.º ano, turma λ.

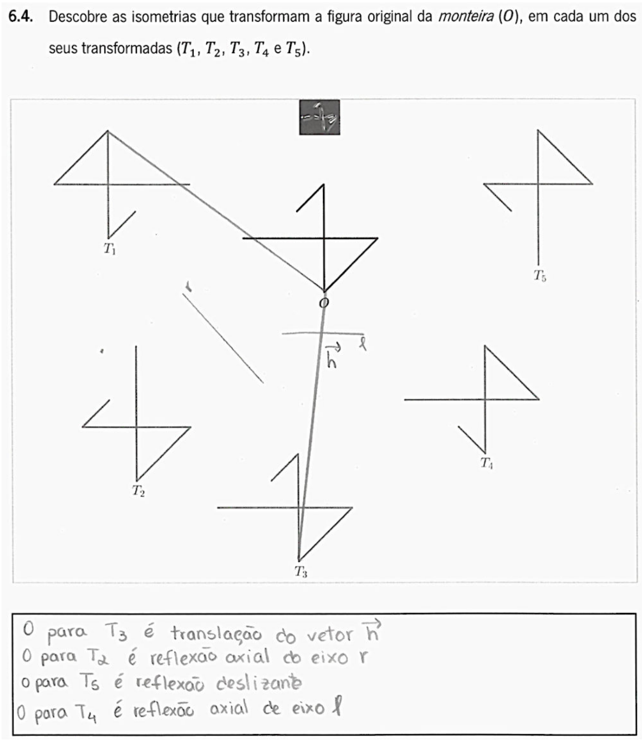


Figura 353. Resolução da tarefa **6.4.** pelo aluno LO do 8.° ano, turma λ.

Na tarefa **7.**, é exposta uma figura representativa do "Traxe de Feira" (feminino), onde se encontra legendada a maioria das peças que compõem esse traje. Em **7.1.**, propõe-se aos alunos que identifiquem o único elemento do traje previamente introduzido que quebra a simetria de reflexão que esse traje exibe. A tarefa **7.1.** foi bastante acessível para a generalidade dos alunos da turma, que, sem dificuldade, conseguiram compreender que o único elemento que quebra a simetria do "Traxe de Feira" (feminino) é o *mantón de caxemira*, tendo todos os alunos sido bem-sucedidos na resolução da tarefa em questão.

Na tarefa **7.2.**, pode ver-se, numa figura, o *mantón de caxemira* que surge no "Traxe de Feira" (feminino) introduzido na tarefa **7.**, sendo essa uma peça que, para ser usada, costuma ser dobrada segundo uma das suas diagonais. Com base nessa informação, é questionado aos alunos, na tarefa **7.2.**, se, após o *mantón de caxemira* ser dobrado, as duas partes formadas são simétricas; para além disso, é proposta aos alunos, nessa tarefa, a análise das diferentes maneiras de dobrar o *mantón* que existem, de modo que as partes resultantes sejam simétricas. Alguns alunos da turma, por escassez de tempo, já não conseguiram resolver a tarefa **7.2.**, não tendo muitos deles sequer chegado a essa última tarefa. Em relação aos alunos que resolveram a tarefa **7.2.**, também eles já demonstravam algum cansaço, tendo feito uma exploração simplificada da mesma. Ainda que todos esses alunos tenham explanado, em **7.2.**, que, após o *mantón* ser dobrado, as duas partes formadas não são simétricas, só alguns desses alunos é que explicitaram que, para que as partes resultantes sejam simétricas, essa peça só pode ser dobrada segundo um eixo vertical ou horizontal, tendo muitos deles desconsiderado esta parte da tarefa.

No fim, recolheu-se o conjunto de tarefas matemáticas *Diz-me o que vestes, dir-te-ei de onde és…*, tendo restado pouco tempo para que os alunos pudessem partilhar comentários/observações face ao trabalho desenvolvido. Os próprios alunos também não se mostraram muito participativos nesse âmbito.

Observando a atividade dos alunos ao longo da implementação pedagógica, pode-se depreender que os alunos da turma em geral se envolveram na exploração das tarefas matemáticas baseadas em vários padrões presentes em diferentes peças dos trajes da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*. Não obstante, notou-se um decréscimo gradual do envolvimento dos alunos à medida que iam avançando nas tarefas propostas, assim como variações na motivação dos mesmos consoante as tarefas em causa. Os alunos da turma resolviam as tarefas de forma marcadamente autónoma, e só mesmo quando não conseguiam explorar uma dada tarefa é que pediam ajuda. Ora, isso complexificou o acompanhamento do trabalho que ia sendo desenvolvido pelos alunos, e que eles raramente partilhavam por sua iniciativa.

Analisando a atividade dos alunos no tempo de exploração das diferentes tarefas matemáticas, é possível identificar um conjunto de tarefas cuja exploração ofereceu dificuldades significativas aos alunos, tendo, em muitos casos, resultado em resoluções inapropriadas, erradas, ou incompletas dessas tarefas. Desse conjunto, fazem parte as tarefas **2.1.** e **3.1.**, que envolviam a análise das simetrias presentes, respetivamente, num friso que decora um *mandil de gala* e num motivo iterado numa *chaqueta de gala*. Em ambas as tarefas, a análise, pelos alunos, dos grupos simétricos foi pouco profunda, não só em termos das simetrias identificadas, mas principalmente no que concerne à descrição dessas simetrias. Outras duas tarefas a distinguir são as tarefas **3.4.** e **6.4.**, ambas referentes à exploração das isometrias envolvidas na transformação de figuras nas suas imagens. Ora, se, em **3.4.**, vários alunos enfrentaram obstáculos no estudo das isometrias que permitem transformar um motivo presente numa *chaqueta* noutro motivo igual que surgia na mesma peça, em **6.4.**, as dificuldades sentidas foram transversais a todos os alunos, sendo-lhes proposto analisarem as isometrias que transformam uma figura que decora uma *monteira*, não em um, mas em cinco dos seus transformados, e desta vez sem grelha quadriculada. Outra tarefa que importa diferenciar é a tarefa **5.1.**, cuja exploração gerou constrangimentos aos alunos em geral, que viram como complexa a tarefa de analisar as isometrias que reconstroem três frisos visíveis numa *monteira* a partir do motivo mínimo dado para cada um desses frisos. Também envolvendo frisos, a tarefa **5.2.** revelou dificuldades dos alunos na construção de frisos, dadas certas condições de simetria. Não menos complexa foi a tarefa **6.3.**, que ficou marcada por uma variedade de resoluções dos alunos, e conceções subjacentes, revelando as suas incompreensões em relação aos pontos fixos das isometrias.

Para finalizar, importa referir que o tempo de duração da implementação pedagógica - no total, 100 minutos -, permitiu que a maioria dos alunos da turma conseguisse concluir a exploração das tarefas.

7.3. Síntese

Quadro 2. Síntese da aplicação das tarefas *As voltas da Chula*.

As voltas da Chula	
1./ 1.1.	A descrição da figura apresentada na tarefa não ofereceu dificuldades aos alunos da turma em geral.
2./ 2.1.	Após uma nova visualização do vídeo da dança, na qual a turma teve oportunidade de identificar o primeiro movimento de troca de posições ocorrido entre os pares na coreografia, todos os alunos foram bem-sucedidos na representação desse movimento, tendo utilizado palavras e/ou desenhos.
2.2.	Nenhum aluno identificou, por si, a isometria envolvida no primeiro movimento de troca de posições. A rotação foi indicada por um aluno no momento em que eram recordadas as isometrias estudadas pelos alunos, tendo toda a turma apreendido essa resposta. Mas, ao contrário do que a maioria fez, responder 'rotação' não bastava, sendo preciso caracterizá-la. Depois de discutidos os elementos necessários para tal, os alunos definiram o centro da rotação em causa e o sentido do movimento; já a determinação da amplitude do ângulo dessa rotação criou maiores dificuldades a alguns alunos.
3./ 3.1.	Ao longo de sucessivas visualizações do vídeo da dança, sugeriu-se aos alunos que fossem tomando anotações acerca dos diversos movimentos de troca de posições. Essas anotações acabaram por ser a resolução (incompleta) da tarefa apresentada por alguns alunos. Outros alunos representaram, com desenhos e/ou palavras, os distintos movimentos de troca de posições, mas não caracterizaram as isometrias associadas a tais movimentos - objetivo que só foi alcançado por determinados alunos.
4./ 4.1.	A justificação da resposta dada à tarefa trouxe obstáculos a vários alunos da turma, que solicitaram apoio nesse sentido, demonstrando dificuldades na comunicação matemática do próprio raciocínio.
4.2.	A maioria dos alunos da turma não experimentou dificuldades na identificação do número de simetrias de rotação e de reflexão da figura em consideração, tendo resolvido a tarefa corretamente.
5./ 5.1.	Foi aconselhado pela professora de matemática da turma que os alunos não resolvessem a tarefa, por não estarem familiarizados com o referencial cartesiano envolvendo os quatro quadrantes - que, alegadamente, só é introduzido no 7.º ano de escolaridade. Apesar disso, alguns alunos já tinham iniciado a exploração da tarefa, e as suas resoluções sugerem que estariam a resolvê-la com sucesso.
5.2.	Atendendo a que os alunos não tinham explorado a tarefa prévia, foi preciso lembrar, nesta tarefa, que seriam considerados os movimentos do par que parte da posição A até ter passado por todas as posições assinaladas. Nesse âmbito, todos os alunos consideraram apenas seis movimentos, que, sucessivamente, correspondem a cinco rotações de centro O e amplitude $60°$ no sentido positivo e uma rotação de centro O e amplitude $120°$ no sentido positivo. Eles entenderam que, dessa forma, o par que parte da posição A passa por todas as posições dadas, ainda que, numa delas, não pare.
5.3.	A maioria dos alunos não foi capaz de associar o comprimento do percurso efetuado pelo par - definido na tarefa prévia - ao perímetro do círculo. E, mesmo tendo ultrapassado esse obstáculo, muitos deles não sabiam como calcular essa medida. Outra dificuldade dos alunos foi determinarem o raio/diâmetro da circunferência a partir dos dados facultados pelo referencial cartesiano em causa.
6./ 6.1.	A sugestão dada aos alunos no sentido de representarem por A_1, A_2, A_3, A_4,... as sucessivas posições do par possibilitou que a maioria dos alunos evitasse erros e fosse bem-sucedido na tarefa. Mesmo assim, vários alunos evidenciaram dificuldades, quer em relação às partes da circunferência correspondentes às frações dadas, quer ao nível do sentido dos movimentos de rotação aí descritos.
6.2.	Só os alunos que resolveram incorretamente a tarefa prévia é que demonstraram dificuldades na exploração da presente tarefa. Parte desses alunos não apresentou nenhuma resolução nesta tarefa; os restantes resolveram-na, tendo na sua maioria reiterado o mesmo tipo de erros da tarefa anterior.
7./ 7.1.	Após a visualização do novo vídeo da dança, não foi imediato para os alunos perceberem que a principal diferença existente entre a disposição dos dançarinos neste vídeo e no que tinham visto anteriormente era que, no primeiro, existiam seis pares na dança e, neste último, apenas cinco pares.
7.2.	Elaborar um esquema que representasse as posições iniciais dos dançarinos foi fácil para os alunos.
7.3.	O entendimento geral dos alunos foi que as rotações que caracterizam os movimentos dos pares nos dois vídeos da dança eram iguais - resposta que os alunos justificaram com argumentos distintos. Poucos alunos perceberam que as rotações eram diferentes, tendo, contudo, falhado na justificação.

Quadro 3. Síntese da aplicação das tarefas *Vira e volta a virar*.

Vira e volta a virar	
1./ 1.1.	Os alunos completaram, com sucesso, a representação de algumas posições iniciais dos dançarinos. Certos alunos tiveram necessidade de visualizar, de novo, o vídeo da dança para confirmarem dados.
1.2.	A maior parte dos alunos reconheceu, quase de imediato, que os segmentos de reta eram paralelos, e justificou devidamente essa resposta. Outros alunos, apesar de terem reconhecido o paralelismo dos segmentos de reta, não justificaram tal resposta, exibindo uma resolução incompleta da tarefa. Um pequeno número de alunos, inicialmente, não se recordou da designação dada à posição relativa dos segmentos de reta. Alguns deles, entretanto, lembraram-se; outros responderam, erradamente, segmentos de reta perpendiculares, porém as justificações que eles deram revelaram compreensão.
2./ 2.1.	No geral, os alunos compreenderam o padrão de repetição existente na sequência de movimentações dos pés de um dançarino durante o "serrar", o que lhes possibilitou completarem, com êxito, os dois movimentos de pés que se seguiam. Só um número residual de alunos é que não foi bem-sucedido na resolução da tarefa, evidenciando falhas na compreensão do padrão que caracteriza o movimento.
3./ 3.1.	Alguns alunos tiveram dúvidas na interpretação do enunciado da tarefa e no que era requerido nesta. As resoluções da tarefa apresentadas pelos alunos revelaram uma grande diversidade de estratégias de resolução - umas mais condensadas do que outras -, nas quais os alunos foram bem-sucedidos. Um pequeno conjunto de alunos, apesar de ter usado uma estratégia de resolução apropriada, percecionou, erradamente, que a sequência de movimentações dos pés de um dançarino no "serrar" se repetia a cada cinco termos - ao invés de quatro -, o que levou a uma resolução incorreta da tarefa.
4.	Não foi imediato para uma grande parte dos alunos perceberem que o movimento de "serrar" efetuado pelos pares de dançarinos colocados frente a frente era simétrico (última opção). Os alunos, na sua maioria, ficaram indecisos entre a segunda e a última opções e, num primeiro momento, vários deles optaram pela opção errada. Considerando que a opção selecionada na presente tarefa tinha influência direta na resolução da tarefa seguinte, foi indispensável intervir junto desses alunos.
5.	Esta revelou-se uma tarefa bastante exigente e desafiante para os alunos em geral. Apesar disso, diversos alunos conseguiram explorar a tarefa com sucesso, apresentando resoluções corretas, marcadas por particularidades diferentes. Ao contrário deles, outros alunos não conseguiram uma exploração bem-sucedida da tarefa, expondo resoluções incorretas, configurando erros distintos; nalgumas dessas resoluções, não se torna possível perceber o modo como os alunos raciocinaram. Para certos alunos, o nível de desafio da tarefa revelou-se excessivo, levando a que eles desistissem.
6./ 6.1.	A tendência geral dos alunos foi a de apontarem um número de eixos de simetria superior a um. Intervenções realizadas junto dos alunos levaram a maioria a reconsiderar as suas ideias iniciais. Mesmo assim, a parte da tarefa relativa à justificação da resposta ofereceu bastantes dificuldades aos alunos, que, na sua maioria, evidenciaram não saber como poderiam justificar as suas respostas.
7./ 7.1.	Vários alunos da turma expressaram dificuldades na compreensão do que era requerido na tarefa, ou por não terem percebido o respetivo enunciado, ou por não estarem recordados das isometrias. Na resolução da tarefa, nenhum aluno considerou a reflexão axial como sendo a isometria que transforma as posições iniciais dos dançarinos nas posições que resultam do "trespasse". Em vez dessa isometria, os alunos indicaram a rotação ou a reflexão central, o que sugere que eles tomaram como foco o movimento de "trespasse", na forma como é executado pelos dançarinos, ao invés de se focarem, simplesmente, nas posições assumidas pelos dançarinos antes e depois do "trespasse".
7.2.	Os alunos elaboraram esquemas representativos do movimento de "serrar" diversos. Alguns desses esquemas contêm incoerências relacionadas com as especificidades da execução dos diferentes movimentos de "trespasse", que diferentes alunos desconsideraram na construção do seu esquema. Certos alunos elaboraram esquemas que não ilustram o movimento que é realizado no "trespasse".
8./ 8.1.	A maioria dos alunos, tendo compreendido que o "trespasse", ao ser realizado seis vezes na dança, termina com os dançarinos nas suas posições iniciais, foi capaz de inferir que o mesmo aconteceria se tal movimento fosse realizado cem vezes, ou um qualquer número par de vezes. Não obstante, nem todos os alunos conseguiram justificar a resposta dada à tarefa. Um pequeno número de alunos desenvolveu uma resolução incorreta na tarefa, tendo errado, quer na resposta, como na justificação.

Quadro 4. Síntese da aplicação das tarefas *Malhão em roda(s)*.

Malhão em roda(s)	
1./ 1.1.	A descrição da figura exposta na tarefa não ofereceu dificuldades assinaláveis aos alunos da turma.
2./ 2.1.	A estratégia privilegiada por vários alunos foi traçarem os eixos de simetria na figura exibida na tarefa. Mas, como a perspetiva da imagem não era favorável a isso, muitos alunos optaram por basear-se na figura da tarefa prévia, tendo na sua maioria acertado no número de eixos de simetria proposto. Ainda assim, a parte da tarefa relativa à justificação da resposta criou dificuldades aos alunos, tendo sido muito raros os alunos capazes de justificar a sua resposta de um modo matematicamente válido. Um conjunto minoritário de alunos errou no número de simetrias da figura, bem como na justificação.
3./ 3.1.	A determinação das amplitudes aproximadas dos ângulos associados ao movimento de "serrar" não foi de resolução imediata para os alunos, desafiando-os a pensarem em estratégias de resolução. Embora alguns alunos tivessem tido êxito, outros não conseguiram criar uma estratégia de resolução. Tendo-se apercebido disso, a professora de matemática da turma interveio, em plenário, recuperando a fórmula para calcular a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um polígono. A partir daí, os alunos acabaram por se servir da fórmula para tentarem resolver essa parte da tarefa, ainda que isso não tenha sido suficiente para garantir, a todos eles, uma resolução correta da mesma. Mesmo dispondo da fórmula, um pequeno número de alunos não desenvolveu nenhuma resolução.
4./ 4.1.	A quase totalidade dos alunos considerou ser possível afirmar que os polígonos eram semelhantes, respondendo corretamente à tarefa. Quanto às justificações, essas foram bastante heterógenas, tendo muitos alunos usado argumentos inválidos/insuficientes para comprovarem a resposta dada. Um número diminuto de alunos errou na resposta apresentada à tarefa, assim como na justificação.
4.2.	Globalmente, os alunos tiveram êxito na exploração de semelhanças e diferenças entre os polígonos. Algumas características - iguais e diferentes - foram apontadas incorretamente. Um pequeno número de alunos explorou só o que era igual ou diferente entre os polígonos. Outros não resolveram a tarefa.
4.3.	Os alunos enfrentaram várias dificuldades ao longo da exploração da tarefa. Desde logo, a maioria não entendeu que as medidas dadas para a distância entre duas dançarinas e entre dois dançarinos correspondiam ao comprimento dos lados dos dois polígonos. Superado esse obstáculo, os alunos tentaram determinar a razão de semelhança entre os polígonos, cometendo erros vários. Ademais, nenhum aluno foi capaz, só por si, de definir a homotetia proposta. Esse objetivo só foi alcançado pelos alunos no seguimento da intervenção feita em plenário. Certos alunos não resolveram a tarefa.
4.4.	Uma grande parte dos alunos só efetuou o primeiro passo de dois necessários à resolução da tarefa.
4.5.	Regra geral, os alunos não tiveram dificuldades em completar as igualdades da tarefa, considerando o Teorema de Tales. Só na última igualdade - a completar com a constante de proporcionalidade - é que os alunos cometeram erros variados. Alguns alunos não completaram nenhuma das igualdades.
4.6.	Nenhum aluno resolveu a tarefa de modo direto, relacionando a razão entre o perímetro dos polígonos com a razão de semelhança entre os polígonos (que eles já conheciam da tarefa anterior). Ao invés, os alunos efetuaram cálculos para descobrirem o valor da razão. Nesse processo, identificaram-se erros diversos. Um número diminuto de alunos não desenvolveu qualquer tipo de resolução na tarefa.
4.7.	Nenhum aluno resolveu a tarefa de forma imediata, relacionando a razão entre a área dos polígonos com a razão de semelhança entre os polígonos (que eles já conheciam da tarefa anterior). Ao invés, eles privilegiaram o cálculo para descobrirem o valor da razão, sendo que o primeiro constrangimento foi logo não saberem como calcular a área dos polígonos, o que levou a professora de matemática da turma a intervir, partilhando, em plenário, a devida fórmula. Mesmo assim, nem todos os alunos conseguiram usá-la, já que alguns não resolveram a tarefa. E mesmo aplicando a fórmula, os alunos cometeram erros diversos, que tiveram influência direta na determinação da razão entre as áreas dos polígonos; no entanto, nem sempre foi isso que ditou um resultado errado para o valor da razão.
4.8.	A resolução da presente tarefa, por estar dependente das duas tarefas anteriores, que muitos alunos tinham resolvido de forma incorreta, ou incompleta, ou nem sequer tinham resolvido, trouxe muitas dificuldades aos alunos. A maior parte dos alunos não foi capaz de desenvolver nenhuma resolução. E mesmo os alunos que tinham resolvido corretamente as duas tarefas prévias, não conseguiram todos ser bem-sucedidos na resolução desta tarefa, tendo formulando diferentes conjeturas inválidas.

Quadro 5. Síntese da aplicação das tarefas *Vira e revira a cruz*.

Vira e revira a cruz	
1./ 1.1.	Os alunos completaram, com sucesso, a representação de algumas posições iniciais dos dançarinos.
2./ 2.1.	A tendência inicial da maior parte dos alunos foi a de assinalarem um número de vetores bastante superior ao número mínimo requerido na tarefa. Alguns desses alunos não foram capazes de compreender que vários dos vetores apontados eram iguais, tendo mantido fixa a sua resposta inicial.
2.2.	A tarefa criou dificuldades de interpretação a diversos alunos. Mesmo tendo-se esclarecido as dúvidas dos alunos, a resolução da tarefa não foi linear, em grande parte devido ao facto de, na tarefa prévia, alguns alunos terem respondido um número de vetores bastante superior ao previsto, o que tornou mais difícil comparar esses vetores atendendo a várias propriedades, e classificá-los em função disso.
2.3.	Esta foi uma tarefa extremamente desafiante para os alunos, os quais exploraram a tarefa seguindo, rigorosamente, as sugestões aí enunciadas. Três dessas sugestões em particular criaram obstáculos à atividade dos alunos. Nomear o quadrilátero com menores dimensões que seria possível formar pelos movimentos de avanço e recuo dos pares, compreender a variação do comprimento dos lados dos quadriláteros formados, e a respetiva variação da área não foi intuitivo para os alunos em geral. A maioria dos alunos acabou por não responder a todas as sugestões de exploração na sua resolução.
2.4.	Tendencialmente, os alunos focalizaram-se nas distâncias entre dançarinos de pares diferentes que ficavam situados frente a frente, desconsiderando as distâncias diagonais. Isso teve influência direta na exploração da maior distância entre dois dançarinos de pares diferentes, tendo originado erros, que implicaram intervir juntos dos diferentes alunos. Mesmo assim, os alunos evidenciaram diversas falhas na identificação e no cálculo, quer da maior, como da menor distância em questão na tarefa.
3./ 3.1.	Inicialmente, quase todos os alunos se limitaram a nomear as isometrias associadas aos movimentos de avanço, rodopio e recuo - respetivamente, translação, rotação e translação -, tendo sido inevitável chamar a atenção deles para a necessidade de caracterizarem tais isometrias. Na sequência disso, surgiram dúvidas relativas à execução de certos movimentos, como o sentido da rotação realizada. A exploração do movimento de rodopio foi o que criou mais dificuldades aos alunos. Ainda assim, foram notórias diferentes falhas, por parte dos alunos, ao nível da exploração dos três movimentos.
4./ 4.1.	A nomenclatura usada na tarefa para representar as várias isometrias trouxe dificuldades aos alunos, por não estarem familiarizados com a mesma. Após ter sido ultrapassado essa dificuldade, os alunos enfrentaram certos constrangimentos na exploração da tarefa, que acabaram por conseguir superar.
4.2.	A maior parte dos alunos expressou dificuldades na interpretação do enunciado da tarefa, tendo sido necessário clarificar o que era esperado que fizessem na mesma. Em geral, o apoio dado aos alunos permitiu que eles fossem bem-sucedidos na resolução da tarefa. Não obstante, as explicações que foram fornecidas aos alunos acabaram, também, por reduzir, significativamente, o desafio da tarefa.
4.3.	Os alunos tiveram dúvidas no diâmetro do círculo implicado na parte circular do trajeto do dançarino, tendo requerido apoio. Os erros verificados nas resoluções da tarefa desenvolvidas por alguns alunos decorreram do facto de eles terem ignorado certa(s) parte(s) do caminho percorrido pelo dançarino.
5./ 5.1.	Não foram exibidas quaisquer dúvidas em relação aos dois comentários lidos pelos alunos na tarefa.
5.2.	Ainda que, no início, os alunos tenham ficado relutantes quanto ao facto de os comentários poderem estar ambos certos, eles acabaram por consentir isso, respondendo corretamente à tarefa. Contudo, nem todos os alunos foram capazes de fundamentar devidamente a sua resposta, verificando-se uma certa disparidade ao nível das justificações registadas, umas mais eficazes/completas do que outras.
5.3.	Quase todos os alunos, para cada uma das adições de vetores apresentadas no quadro da tarefa, assinalaram, unicamente, um vetor, ignorando as opções que correspondiam a vetores equipolentes. Para além dessa falha mais frequente, ocorreram outras falhas, assumindo um caráter mais pontual.
5.4.	Os alunos completaram, com certa facilidade, as igualdades apresentadas na tarefa, à exceção das duas últimas - envolvendo a composição de duas translações -, que lhes trouxeram mais dificuldades. Certos alunos não tiveram tempo de findar a exploração da tarefa, exibindo uma resolução inacabada.
6./ 6.1	Por falta de tempo, alguns alunos não conseguiram iniciar ou acabar a exploração da tarefa. Foi difícil para os alunos encontrarem isometrias capazes de descrever os movimentos curvilíneos efetuados pelos dançarinos. E mesmo depois de terem concebido as rotações, eles não sabiam como descobrir os centros dessas rotações, nem como determinar a amplitude dos ângulos associados às mesmas.

Quadro 6. Síntese da aplicação das tarefas *Vamos bailar o "Maneo"*.

Vamos bailar o "Maneo"	
1./ 1.1.	No geral, os alunos compreenderam a existência de diferentes configurações na dança. No entanto, a maioria deles não se esforçou por explicitar todas essas configurações na sua resolução da tarefa, tendo sido necessário incentivá-los a fazerem isso. Apesar do suporte dado aos alunos, muitos deles não foram capazes de desenvolver uma resolução eficaz da tarefa, tendo-se identificado várias falhas.
2./ 2.1.	Nas resoluções da tarefa exibidas pelos alunos, que se caracterizaram por uma certa diversidade, notaram-se diferenças ao nível do desempenho dos alunos, mais precisamente no aprofundamento que fizeram do que é igual e do que é diferente nos dois "tablóns" em questão. Entre resoluções mais e menos completas da tarefa expostas pelos alunos, não houve nenhuma que se afigurasse totalmente correta, reunindo as diversas semelhanças e diferenças existentes entre os dois "tablóns".
2.2.	Muitos alunos não conseguiram interpretar o que era requerido no enunciado da tarefa, tendo sido prestados esclarecimentos nesse sentido. Apesar do apoio dado aos alunos ao longo da sua atividade, nem todos conseguiram ter êxito na exploração da tarefa. Alguns alunos falharam no estudo das linhas geradas pela movimentação dos dançarinos nos dois "tablóns", por entenderem tratar-se de linhas retas, em vez de linhas circulares fechadas. Certos alunos alcançaram esse entendimento, mas, ainda assim, muitos deles percecionaram, incorretamente, o número de círculos gerado em cada um dos "tablóns", que foi acessível a poucos alunos. Vários alunos não apresentaram nenhuma resolução na tarefa, tendo alguns deles deixado evidentes as suas tentativas de resolução da mesma.
3./ 3.1.	Os alunos apresentaram respostas diferenciadas para a isometria envolvida na realização dos "embotados" pelos dançarinos. A maioria considerou que a isometria em causa era a translação. Outros alunos entenderam que era a reflexão axial. Mesmo sendo distintas, essas duas isometrias afiguram-se matematicamente adequadas à análise dos "embotados". Por sua vez, outros alunos apontaram uma isometria desadequada do ponto de vista referenciado, que foi a reflexão deslizante.
3.2.	As diferentes isometrias identificadas pelos alunos na tarefa prévia traduziram-se, na presente tarefa, em esquemas diferenciados de representação dos movimentos dos dançarinos quando realizam os "embotados". Os alunos que, na tarefa precedente, haviam respondido translação ou reflexão axial, nesta tarefa, elaboraram esquemas em conformidade com cada uma dessas isometrias. Por sua vez, os alunos que, na tarefa anterior, haviam respondido reflexão deslizante, nesta tarefa, elaboraram esquemas que não retratam essa isometria, o que veio reforçar ainda mais a inadequação da mesma.
4./ 4.1.	Uma grande parte dos alunos não teve tempo de iniciar ou de concretizar a exploração da tarefa. Devido ao pouco tempo disponível, não foi possível proporcionar, aos alunos, uma nova visualização do vídeo da dança, e, como tal, eles tiveram de explorar a tarefa a partir do que se lembravam das visualizações anteriores. Esse facto, aliado à escassez de tempo, fez com que a maioria dos alunos tivesse desenvolvido resoluções muito simplificadas da tarefa, identificando uma única isometria associada ao movimento dos dançarinos nas restantes partes da dança, para além das já exploradas.

Quadro 7. Síntese da aplicação das tarefas *Rega rega, Regadinho*.

	Rega rega, Regadinho
1./ 1.1.	As dificuldades experimentadas pelos alunos na resolução da tarefa relacionaram-se, exclusivamente, com a maneira como eles poderiam assinalar, na partitura da música, as frases que se repetiam. Uma vez que, no enunciado da tarefa, nada é dito a esse respeito, a maioria dos alunos deparou-se com essa dificuldade. Diante disso, sugeriu-se aos alunos, em plenário, que marcassem as frases repetidas na partitura, utilizando, por exemplo, as mesmas cores, letras, ou, até mesmo, algarismos.
2./ 2.1.	A resolução da tarefa foi imediata para praticamente todos os alunos, que não encontraram quaisquer obstáculos e conseguiram formular respostas que, mesmo sendo diversas entre si, estavam corretas.
2.2.	Vários alunos expressaram não terem conseguido identificar a parte da linha do gráfico pretendida, visto que a mesma não aparecia suficientemente destacada. Mesmo tendo-se resolvido essa questão, não foi imediato para os alunos reconhecerem a isometria presente nessa parte da linha do gráfico. A maior parte dos alunos precisou de apoio, não tendo conseguido resolver a tarefa autonomamente. As intervenções realizadas junto dos alunos foram essenciais para que eles tivessem conseguido identificar a reflexão axial na parte da linha do gráfico destacada, respondendo corretamente à tarefa. Apesar disso, a maioria dos alunos não foi capaz de justificar essa resposta, exibindo uma resolução incompleta da tarefa. Certos alunos não conseguiram apresentar qualquer tipo de resposta à tarefa.
2.3.	A resolução da tarefa não criou dificuldades aos alunos em geral, que conseguiram completar o gráfico com relativa facilidade. A única questão levantada por alguns alunos teve a ver com o código de cores usado na representação da primeira linha da partitura, que muitos não conseguiram manter, por não disporem dessas cores. À parte essa questão, não se registou nenhuma outra complicação.
2.4.	Os alunos foram hábeis na identificação de outro exemplo do mesmo tipo de isometria que tinham identificado numa das tarefas anteriores, tendo-o assinalado corretamente no gráfico que haviam completado na tarefa prévia. O facto de, na presente tarefa, não existir um espaço fixo de resposta fez com que alguns alunos, inicialmente, tivessem descurado a leitura e a interpretação desta tarefa, e que tivessem avançado para a tarefa seguinte sem terem desenvolvido nenhuma resolução nesta.
2.5.	Os alunos em geral conseguiram perceber a diferença entre os dois exemplos de reflexão axial identificados no gráfico, e foram capazes de comunicá-la por escrito, tendo-se baseado, sobretudo, em referentes musicais. Apesar disso, os alunos, no seu todo, não conseguiram alcançar uma resolução completa da tarefa, por não terem apresentado nenhuma justificação para a resposta dada. Isso levantou dúvidas relativamente à pertinência e interesse da parte da tarefa alusiva à justificação.
3./ 3.1.	A quase totalidade dos alunos, após a leitura da tarefa, manifestou não saber o que era para fazer. A utilização do verbo 'explorar' no enunciado da tarefa foi pouco efetiva para a maioria dos alunos, sob o ponto de vista do trabalho matemático que era esperado que realizassem. Outra questão que entravou a atividade dos alunos foi não saberem como poderiam identificar os padrões existentes na parte da partitura representada no gráfico. O facto de o espaço definido para a resolução da tarefa ser extenso fez com que eles tivessem ficado hesitantes quando pensaram em assinalar, diretamente no gráfico, esses padrões. Nas resoluções da tarefa apresentadas pelos alunos, todos conseguiram identificar certos padrões. Não obstante, alguns alunos assinalaram, somente, pequenos padrões, ou outros padrões um pouco mais amplos, não tendo sido capazes de integrar esses padrões noutros mais abrangentes, alcançando a existência de duas macro partes na parte da partitura representada.

Quadro 8. Síntese da aplicação das tarefas *Ao ritmo da "[R]ota"*.

Ao ritmo da "[R]ota"	
1./ 1.1.	A generalidade dos alunos conseguiu desenvolver uma exploração da tarefa com êxito, tendo sido todos eles bem-sucedidos na elaboração dos quatro gráficos pretendidos para a *Gaita 2ª*. Ainda que, ao longo da sua atividade, alguns alunos tivessem cometido determinadas incorreções, o que se verificou foi que os alunos, por si mesmos, eram capazes, logo no imediato, de as detetar e corrigir.
1.2.	O facto de, na tarefa, não existir um espaço claramente definido para a apresentação das respostas pelos alunos gerou dúvidas quanto à concretização da resolução da tarefa. Isso apesar mesmo de, numa nota integrada no enunciado da tarefa, surgir explicitado que os alunos deveriam apresentar as suas conclusões decorrentes da análise comparativa de cada par de gráficos junto dos mesmos. Depois de esclarecidas tais dúvidas, os alunos tiveram um bom desempenho na resolução da tarefa. Apesar de a maior parte dos alunos se ter baseado em elementos musicais para comunicar, na sua resposta à tarefa, as semelhanças e as diferenças existentes entre dois dos pares de gráficos em comparação, outros cingiram-se aos dados permitidos pela análise/interpretação dos gráficos em si.
2./ 2.1.	Todos os alunos, na sua resolução da tarefa, foram capazes de identificar determinados motivos que aparecem repetidos no gráfico sob exploração na referida tarefa. Não obstante, quer os motivos identificados, quer a exploração realizada acerca das isometrias associadas a tais motivos, variaram. Alguns alunos realizaram uma exploração muito superficial do gráfico nos termos propostos na tarefa, tendo-se limitado à identificação de motivos particulares que se repetem no gráfico por translações. A abordagem de outros alunos à tarefa evidenciou um alcance maior, tendo estes alunos reconhecido duas partes mais amplas que aparecem repetidas no gráfico por uma translação cujo vetor definiram. Uma exploração ainda mais aprofundada foi feita por determinados alunos que, para além de terem integrado tudo o que foi dito, identificaram outros padrões, com outro tipo de isometrias associadas.

Quadro 9. Síntese da aplicação das tarefas *A harmonia da "Muiñeira"*.

A harmonia da "Muiñeira"	
1./ 1.1.	Embora tivesse sido fácil para os alunos perceberem que as sequências de notas assinaladas no trecho da partitura eram iguais, nem todos entenderam que seria necessário formular, por escrito, uma resposta para a tarefa, tendo-se verificado vários casos de alunos que avançaram sem responderem à tarefa. Para esses alunos, o verbo 'comparar' não implicava comunicar, por escrito, as conclusões dessa comparação; ademais, o facto de não existir, na tarefa, um espaço pré-definido para a resolução reforçou ainda mais a sua ideia de que não seria preciso formularem uma resposta. Apesar disso, todos os alunos acabaram por elaborar respostas na tarefa, tendo sido bem-sucedidos.
1.2.	Todos os alunos conseguiram descobrir outros exemplos de 'repetição' na partitura da música, tocada a duas gaitas. A maior parte dos alunos considerou a 'repetição' de sequências de notas em ambas as gaitas. Outros só assinalaram exemplos de 'repetição' nas linhas da partitura referentes à mesma gaita. Atendendo a que, no enunciado da tarefa, nada é dito que inviabilize nenhuma dessas duas abordagens à tarefa, entendeu-se que ambas estariam adequadas ao que é proposto na tarefa.
2./ 2.1.	Vários alunos questionaram se, nos exemplos de 'transposição' a descobrir na partitura, os intervalos teriam que ser intervalos melódicos de 4.ª justa, tal como no exemplo dado. Não sendo dito nada, no enunciado da tarefa em relação a isso, indicou-se aos alunos que essa limitação não se aplicaria. Outra dúvida que surgiu entre os alunos prendeu-se com o facto de ser necessário, ou não, considerar as apogiaturas da partitura. Visto que, no enunciado da tarefa, não estava explícito que as apogiaturas deviam ser desconsideradas, a indicação dada aos alunos foi para eles atenderem às apogiaturas, o que fez com que a tarefa se tornasse mais desafiante. Todos os alunos se mostraram capazes de encontrar exemplos de 'transposição' na partitura. Mesmo tendo sido alertados para a necessidade de considerarem as apogiaturas, muitos alunos assinalaram, como exemplos de 'transposição', sequências de notas em que surgiam apogiaturas que não cumpriam o intervalo musical aí em causa.
3./ 3.1.	A observação do exemplo de "regressão" exposto na tarefa não trouxe quaisquer dúvidas aos alunos.
3.2.	De forma mais ou menos imediata, todos os alunos conseguiram perceber, considerando o exemplo de 'regressão' dado antes, que a isometria associada à 'regressão' era a reflexão axial de eixo vertical.
3.3.	A observação do exemplo de "inversão" exibido na tarefa não levantou quaisquer dúvidas aos alunos.
3.4.	Os alunos em geral tiveram muitas dificuldades em descobrir qual era a isometria presente no exemplo de 'inversão' facultado antes, tendo solicitado apoio. O facto de as duas sequências de notas exemplificadas na tarefa prévia estarem afastadas na linha da partitura tornou ainda mais complexo, para os alunos, descobrirem a isometria aí em questão. Como resultado, houve vários alunos que não apresentaram qualquer resposta na tarefa. Outros consideraram, erradamente, que a isometria associada à 'inversão' era a rotação de $180°$. Só um pequeno número de alunos conseguiu perceber que a isometria associada à 'inversão' era a reflexão deslizante, tendo resolvido a tarefa com sucesso.
3.5.	A identificação de exemplos de 'regressão' foi muito mais acessível para os alunos do que os de 'inversão'. A maioria dos alunos, na sua resolução da tarefa, só identificou exemplos de 'regressão'. Para além disso, foram raros os alunos que conseguiram identificar exemplos corretos de 'inversão'.

Quadro 10. Síntese da aplicação das tarefas *À moda de Vila Verde*.

À moda de Vila Verde	
1./ 1.1.	Todos os alunos conseguiram reconhecer a existência de certos elementos no "Traje de Encosta" (masculino e feminino) que anulam a sua simetria. Uma dificuldade comum entre os alunos na resolução da tarefa foi não saberem o nome de alguns adereços e utensílios presentes nesses trajes.
2./ 2.1.	Alguns alunos, em vez de identificarem a simetria de reflexão do bordado da *camisa* desenhando um eixo de simetria, usaram palavras para a nomear, não tendo respeitado as indicações do enunciado. Na identificação da(s) parte(s) do bordado da *camisa* que não satisfaz(em) essa simetria, a maioria dos alunos só assinalou o motivo floral que surge na parte central da *camisa*, mas existia outra parte.
3./ 3.1.	A globalidade dos alunos só conseguiu identificar, enquanto elementos que quebram a simetria definida pelas duas retas traçadas no *lenço dos namorados*, os símbolos presentes na parte central. Mesmo estando certos, tais elementos não são suficientes para uma resolução completa da tarefa, visto que existem outros elementos no *lenço* que também deveriam ter sido assinalados pelos alunos.
3.2.	O enunciado da tarefa não foi de fácil compreensão para os alunos, que tiveram dificuldades em perceber o que era para fazer na mesma. Apesar dos esclarecimentos prestados, as resoluções exibidas pelos alunos foram divergentes, quer em termos dos critérios de simetria que usaram para agruparem os símbolos do *lenço*, quer do aprofundamento que fizeram do respetivo grupo simétrico.
3.3.	Muitos alunos não entenderam que era necessário explorar, em separado, as letras que têm simetria de reflexão e as letras que têm simetria de rotação. Outros não perceberam que deveriam cingir-se às letras usadas nas frases escritas no *lenço*. Essas e outras falhas dos alunos na interpretação do enunciado da tarefa resultaram em incorreções nas resoluções da tarefa apresentadas pelos alunos.
4./ 4.1.	As respostas dos alunos à tarefa foram todas coincidentes na consideração de que as *peças de ouro* usadas pela mulher na figura ilustrativa do "Traje de Noivos" não estavam dispostas aleatoriamente. Quanto às justificações apresentadas pelos alunos para tal resposta, essas já foram mais divergentes.
4.2.	Uma tendência geral dos alunos na resolução da tarefa foi a de se terem limitado a indicar o tipo de simetria de cada um dos motivos da *camisa* do "Traje de Noivos", não tendo descrito essas simetrias.
5./ 5.1.	A resolução da tarefa foi acessível para a generalidade dos alunos, que completaram, com sucesso, a representação de um bordado presente no *corpete* que faz parte do "Traje de Trabalho" (feminino).
5.2.	Foi fácil para os alunos reconhecerem a existência de um eixo de simetria vertical num outro bordado presente no mesmo *corpete* da tarefa prévia. Na identificação das irregularidades existentes nesse bordado, notaram-se algumas divergências, que se relacionaram com o facto de alguns alunos terem considerado a variação da cor dos motivos do bordado como um critério de assimetria, e outros não.
5.3.	Ainda que diversas do ponto vista estético e visual, quase todas as figuras criadas pelos alunos tinham, apenas, simetria de reflexão de eixo vertical. A maioria dos alunos identificou essa simetria traçando o eixo de simetria e/ou nomeando-a. Certos alunos desconsideraram essa parte da tarefa.
6./ 6.1.	Quase todos os alunos reconheceram, corretamente, que o desenho mais pequeno que poderiam colocar num carimbo para formar o motivo floral presente no *cachené* que integra o "Traje da Ribeira" (feminino) era o representado pela letra C. Contudo, muitos alunos não foram capazes de apresentar argumentos válidos para fundamentar a escolha desse desenho, tendo falhado nessa parte da tarefa.
6.2.	As respostas dos alunos à tarefa ficaram divididas entre a opção $45°$ (a única certa) e a opção $270°$.
7./ 7.1.	A maioria dos alunos referiu a existência de simetrias de reflexão e de rotação num friso presente no *avental* que compõe o "Traje da Ribeira" (feminino), sem aprofundar mais a resposta. Outros alunos só admitiram simetrias de reflexão no friso. Desses alunos, um pequeno número indicou o número de simetrias de reflexão, e alguns identificaram-nas no friso. Certos alunos não conseguiram explorar o friso como uma unidade própria, tendo analisado, de forma isolada, os motivos que aí se repetem.
7.2.	Embora a maioria dos alunos tenha conseguido completar, corretamente, outros dois frisos presentes no mesmo *avental* da tarefa prévia, surgiram duas incorreções frequentes na resolução desta tarefa.
7.3.	Nenhum aluno conseguiu construir, corretamente, os frisos propostos na tarefa, à primeira tentativa. Ao longo da sua exploração, foram visíveis erros persistentes, por parte dos alunos, na criação dos frisos, como terem modificado o motivo inicial, ou até mesmo terem acrescentado outros motivos. Dadas as dificuldades transversais dos alunos no trabalho com frisos, praticamente nenhum aluno atendeu à parte da tarefa relativa à identificação das diferentes simetrias presentes nos frisos criados.

Quadro 11. Síntese da aplicação das tarefas *Diz-me o que vestes, dir-te-ei de onde és*...

Diz-me o que vestes, dir-te-ei de onde és...	
1./ 1.1.	A resolução tarefa não criou dificuldades aos alunos em geral, que identificaram corretamente a simetria do bordado floral que decora o *mantón*, e ainda conseguiram assinalar falhas nessa simetria.
2./ 2.1.	A par de certos alunos que não se lembravam do nome das simetrias, a maioria dos alunos, no início, limitou-se a indicar o nome das simetrias identificadas num friso que decora o *mandil de gala*, tendo sido necessário incentivá-los a detalharem essas simetrias. Apesar disso, as simetrias que os alunos identificaram no friso foram variáveis, assim como foi a caracterização que fizeram dessas simetrias.
3./ 3.1.	Vários alunos exprimiram dúvidas em relação ao enunciado da tarefa, que se prenderam, sobretudo, com a interpretação do verbo 'estudar'. As simetrias que os alunos identificaram no motivo floral que decora a *chaqueta* foram variáveis, traduzindo-se em resoluções mais ou menos completas da tarefa. Certos alunos admitiram, erradamente, a existência de duas simetrias de reflexão de eixos diagonais.
3.2.	A maioria dos alunos conseguiu pintar uma única parte necessária para tornar o motivo assimétrico.
3.3.	Uma grande parte dos alunos não foi capaz de perceber, convenientemente, o que era para fazer na tarefa, tendo exibido resoluções desalinhadas com o que aí é proposto. Em particular, quase metade dos alunos, em vez de analisar a(s) isometria(s) necessária(s) para formar o padrão considerado, expôs as simetrias presentes nesse padrão, repetindo o tipo de análise subjacente às tarefas prévias. Para além disso, um pequeno número de alunos não apresentou nenhum tipo de resolução na tarefa.
3.4.	No início, os alunos cingiram-se a indicar o nome da(s) isometria(s) envolvida(s) na transformação do motivo 1 no motivo 2. Diante disso, recomendou-se aos alunos que atentassem na nota integrada no enunciado, em que constam informações que fornecem pistas para a descrição da(s) isometria(s). Nas resoluções da tarefa exibidas pelos alunos, a maioria admitiu, erradamente, que a transformação do motivo 1 no motivo 2 poderia ser operada, só, por uma rotação. Outros alunos compreenderam que seria necessária outra isometria, mas nem todos caracterizaram, devidamente, essas isometrias.
4./ 4.1.	Todos os alunos consideraram que o "Traxe de Gala" (masculino) não é simétrico. Para justificarem essa resposta, eles referiram a presença de certos elementos, no traje, que quebram a sua simetria.
5./ 5.1.	Nesta tarefa, os alunos mostraram muito pouca autonomia. A identificação das isometrias que permitem reconstruir três frisos presentes na *monteira* originou respostas diversas entre os alunos, algumas corretas e outras não. A caracterização dessas isometrias pelos alunos também foi variável.
5.2.	A criação de um friso 'apenas com simetrias de rotação e reflexão deslizante' a partir de um motivo foi mais acessível para os alunos do que a criação de um friso 'com os quatro tipos de simetrias'. Ainda que alguns alunos não tenham construído corretamente o primeiro friso, esse número foi mais significativo no caso do segundo friso, sendo que muitos alunos nem foram capazes de o construir. O excesso de espaço definido na tarefa para a criação dos dois frisos induziu vários alunos em erro.
6./ 6.1.	Esta foi uma tarefa acessível para os alunos em geral. Todos conseguiam selecionar, corretamente, pelo menos uma figura para cada uma das propriedades do quadro, cumprindo o propósito da tarefa.
6.2.	Ainda que todos os alunos tenham tido êxito na construção do transformado da figura, foram muito raros os alunos que, na resolução da tarefa, descreveram a isometria que usaram na sua construção. Ao nível das isometrias empregues, a mais usual foi a reflexão - tanto de eixo vertical, como horizontal.
6.3.	Esta tarefa ficou marcada por uma multiplicidade de respostas. Embora a maioria dos alunos tenha considerado não ser possível descobrir a isometria que a Eva escolheu, as justificações dadas foram bastante diversas, tendo havido, ainda, alguns alunos que não justificaram. Outros alunos nomearam aquela que teria sido a isometria selecionada pela Eva, tendo quase todos justificado a resposta dada.
6.4.	A exploração da tarefa trouxe bastantes dificuldades aos alunos em geral. Muitos alunos começaram por responder quase à sorte, apontando isometrias mais ou menos plausíveis para transformarem a figura original da *monteira* em cada um dos seus transformados. Apesar das intervenções realizadas junto dos alunos, muitos mantiveram fixa a sua resolução inicial. Outros alunos desenvolveram um pouco mais a sua resolução, e só um pequeno número de alunos obteve uma resolução satisfatória.
7./ 7.1.	Os alunos perceberam que o *mantón de caxemira* quebra a simetria do "Traxe de Feira" (feminino).
7.2.	Por falta de tempo, alguns alunos já não conseguiram resolver a tarefa. Os restantes responderam corretamente à primeira pergunta colocada na tarefa, indicando que, após o *mantón* ser dobrado, as duas partes formadas não são simétricas, mas muito deles não deram resposta à segunda pergunta.

CAPÍTULO VIII. CONSIDERAÇÕES FINAIS

8.1. Síntese da investigação

O presente trabalho de investigação objetivou, por um lado, analisar e compreender aspetos matemáticos inerentes a três elementos que constituem danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza - nomeadamente, a coreografia, a música, e os acessórios (Ribas, 1983) -, e objetivou, por outro lado, construir tarefas matemáticas relacionadas com o estudo etnomatemático realizado sobre as danças, tendo em vista o aproveitamento deste elemento do folclore para o ensino da matemática. Constituíram objeto de estudo etnomatemático, ao nível da coreografia, da música, e dos acessórios, danças folclóricas características do *Grupo Folclórico de Vila Verde* - grupo do concelho de Vila Verde (distrito de Braga), na região do Norte de Portugal -, e da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* - grupo da cidade de Santiago de Compostela, na Galiza. Relativamente à coreografia, procurou-se estudar formas e transformações geométricas presentes nos movimentos que os dançarinos realizam, no plano, ao longo das danças folclóricas. Em relação à música, procurou-se estudar padrões repetitivos que caracterizam a estrutura das músicas que acompanham as danças folclóricas. E, quanto aos acessórios, procurou-se estudar padrões geométricos presentes nos trajes usados pelos dançarinos. A partir do estudo etnomatemático realizado sobre as danças, pretendeu-se construir tarefas matemáticas, a que se seguiu a sua implementação em sala de aula, com vista à construção de recomendações pedagógicas.

Tendo em conta os objetivos supracitados, propuseram-se as seguintes questões de investigação:

I. Que formas e transformações geométricas estão presentes na coreografia de danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza?

II. Que padrões repetitivos caracterizam a estrutura de músicas que acompanham danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza?

III. Que padrões geométricos estão presentes nos trajes usados por grupos folclóricos do Norte de Portugal e da Galiza?

IV. Que semelhanças e diferenças existem entre danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza no que refere aos elementos da dança estudados?

V. Que tarefas matemáticas é possível construir tendo por base os aspetos matemáticos identificados nos elementos das danças folclóricas estudados?

VI. Que recomendações pedagógicas devem acompanhar as tarefas matemáticas construídas?

8.2. Conclusões

A elaboração das principais conclusões do presente trabalho de investigação fundamenta-se em cada uma das questões de investigação que nortearam a pesquisa, previamente elencadas, e que doravante serão destacadas. Procura-se, nesta fase, formular uma resposta fundamentada e adequada a cada umas dessas questões de investigação, tendo por base, quer a análise dos dados e os resultados apresentados nos capítulos V e VI, quer as duas partes do enquadramento teórico apresentadas nos capítulos II e III, e que forneceram suporte científico e conceptual ao trabalho de investigação realizado. Em seguida, cada questão de investigação será introdutória para a elaboração das respetivas conclusões.

I. Que formas e transformações geométricas estão presentes na coreografia de danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza?

A análise da coreografia de danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza reportou-se a danças características de dois grupos folclóricos: o *Grupo Folclórico de Vila Verde* (Norte de Portugal) e a *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* (Galiza). Quanto ao *Grupo Folclórico de Vila Verde*, foram analisadas quatro danças: *Chula da Ribeira de Neiva*, *Vira Velho de Vila Verde*, *Malhão de ir ao Meio*, e *Vira ao Castelo*. Em relação à *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*, foi analisada uma dança: *Maneo de Verdillo*. Para cada uma dessas danças, elaboraram-se esquemas gráficos, que representam os movimentos de troca de posições realizados pelos dançarinos ao longo das danças, e esquemas numéricos, que traduzem a sucessão de posições ocupadas pelos dançarinos no decorrer das danças. Desses, os esquemas gráficos, em particular, possibilitaram a identificação de várias formas geométricas nas configurações assumidas pelos dançarinos no decorrer da coreografia das danças, sendo que, em determinadas danças, essas formas geométricas não se mantinham inalteradas até ao término da dança, sofrendo modificações no desenvolvimento da coreografia. Ademais, certas danças caracterizaram-se pela existência de várias formas geométricas, que se sucediam umas às outras ao longo da coreografia.

Entre as formas geométricas presentes nas configurações assumidas pelos dançarinos durante a coreografia das danças estudadas, há a referir: uma circunferência, duas circunferências concêntricas, linhas paralelas, e linhas perpendiculares. A disposição dos dançarinos em circunferência foi encontrada na dança *Chula da Ribeira de Neiva (Grupo Folclórico de Vila Verde)*, tratando-se, a circunferência, de uma forma geométrica que, nessa dança em particular, é conservada ao longo de toda a coreografia, inclusivamente no decorrer dos movimentos de troca de posições ocorridos entre os pares de dançarinos.

A dança *Malhão de ir ao Meio (Grupo Folclórico de Vila Verde)* caracteriza-se, também, pela disposição dos dançarinos em circunferência, sendo que, nessa dança em exclusivo, há determinadas partes da coreografia em que a circunferência original dá lugar a duas circunferências concêntricas. Isso acontece, mais especificamente, nos momentos da coreografia em que os homens 'vão ao meio' (GFVV, 2008), observando-se uma circunferência menor - definida a partir das posições e movimentações dos homens 'no meio' - e a circunferência dita original - definida a partir das posições e movimentações das mulheres. A última dança em que a circunferência se constitui como uma forma geométrica evidente é a dança *Maneo de Verdillo (Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos)*. Ao contrário das duas danças anteriores, os dançarinos não iniciam a coreografia desta dança dispostos em circunferência. Em vez disso, essa forma geométrica surge, apenas, no desenvolvimento da coreografia, correspondendo aos momentos de transição entre as duas partes bem distintas que compõem essa dança - os *'puntos'* e as *'vueltas'* -, e que se vão intercalando ao longo da coreografia. Na dança *Maneo de Verdillo*, os dançarinos iniciam os *'puntos'* e as *'vueltas'* sempre dispostos em duas linhas paralelas, correspondendo, esta última, a outra forma geométrica presente na coreografia dessa dança. De notar, contudo, que as duas linhas paralelas de dançarinos não se apresentam, sempre, na mesma direção, podendo considerar-se, pelo menos, duas direções - vertical e horizontal -, evidenciadas pelas duas linhas paralelas de dançarinos ao longo da coreografia. Para além disso, importar referir que, na primeira e na terceira *'vueltas'* dessa dança, as duas linhas paralelas formadas pelos dançarinos dividem-se ao meio, originando, em vez de duas, quatro linhas paralelas, a partir das quais os dançarinos realizam movimentos rotacionais com centros distintos. Durante esses movimentos rotacionais, as quatro linhas paralelas de dançarinos realizam voltas inteiras no mesmo sentido, o que faz com que a direção das linhas paralelas se vá modificando sucessivamente. A disposição dos dançarinos em linhas paralelas pode ver-se, também, na dança *Vira Velho de Vila Verde (Grupo Folclórico de Vila Verde)*, sendo essa forma geométrica conservada ao longo de toda a coreografia. A disposição inicial dos pares nessa dança permite formar duas linhas paralelas, as quais são mantidas, quer em termos do número de linhas, quer em termos da direção das linhas, até ao final da coreografia. Por fim, as linhas perpendiculares constituem a forma geométrica que caracteriza, em exclusivo, a dança *Vira ao Castelo (Grupo Folclórico de Vila Verde)*, na qual um ou dois grupos de quatro pares de dançarinos surgem dispostos em 'forma de cruz' (GFVV, 2008). Essa forma geométrica pode ser visualizada no seio de cada grupo de quatro pares de dançarinos, se imaginadas duas linhas perpendiculares entre si, que unem os dois pares de dançarinos que se encontram frente a frente. Ao longo da coreografia, a disposição dos pares em 'forma de cruz' (GFVV, 2008) ganha mais evidência em certos momentos, nomeadamente quando os pares de dançarinos se movimentam na direção das linhas perpendiculares que criam a cruz.

Em síntese, foram encontradas, basicamente, quatro formas geométricas nas configurações assumidas pelos dançarinos durante a coreografia das danças folclóricas estudadas, nomeadamente: uma circunferência, duas circunferências concêntricas, linhas paralelas, e linhas perpendiculares. Ora, os resultados anteriores não podem ser diretamente comparados com os resultados dos estudos de Sardella (2004), Albanese e Perales (2014), e Albanese (2015), uma vez que estes autores analisaram as formas geométricas que regem os movimentos realizados por um par de dançarinos ao longo da coreografia de várias danças folclóricas argentinas de pares soltos. Esse estudo não é equivalente ao realizado no presente trabalho de investigação, acerca das formas geométricas que estão presentes nas configurações assumidas por vários pares de dançarinos durante a coreografia, as quais permanecem e/ou se tornam mais evidentes aquando dos seus movimentos. Ainda assim, a circunferência sobressai enquanto forma geométrica comum aos estudos acima referenciados, e que, no caso desta investigação, também teve bastante evidência, tendo sido identificada em três danças folclóricas, das cinco estudadas.

Os esquemas gráficos e numéricos elaborados para cada uma das cinco danças folclóricas que foram objeto de estudo neste trabalho de investigação permitiram, por outro lado, a identificação de diversas transformações geométricas na coreografia das danças, entre as quais a rotação e a translação (mais frequentes), e a reflexão axial. A rotação foi assinalada na coreografia de todas as danças estudadas, à exceção da dança *Vira Velho de Vila Verde (Grupo Folclórico de Vila Verde)*. Ao nível da dança *Chula da Ribeira de Neiva (Grupo Folclórico de Vila Verde)*, a rotação constitui-se como a isometria por excelência, caracterizando todos os movimentos de troca de posições ocorridos entre os pares de dançarinos ao longo da coreografia. As rotações que caracterizam tais movimentos têm todas o mesmo centro de rotação, mas exibem diferenças, quer ao nível da amplitude do ângulo associado ao movimento de rotação, quer ao nível do sentido do movimento de rotação (consultar capítulo V, páginas 103 a 106). Na dança *Malhão de ir ao Meio (Grupo Folclórico de Vila Verde)*, a rotação é a isometria que permite caracterizar os movimentos realizados pelos dançarinos, quer em torno do centro da circunferência formada pelas suas posições iniciais, quer em torno do centro das duas circunferências concêntricas que são formadas em determinados momentos da coreografia (consultar capítulo V, páginas 111 a 117). Na dança *Vira ao Castelo (Grupo Folclórico de Vila Verde)*, a rotação é encontrada em momentos muito particulares da coreografia. Um desses momentos corresponde à realização do movimento de rodopio, sendo que as rotações que caracterizam esse movimento têm centros de rotação distintos, mas a amplitude do ângulo associado ao movimento de rotação e o sentido do movimento de rotação são iguais (consultar capítulo V, páginas 118 a 123). O outro momento da coreografia corresponde à concretização do 'trespasse', que requer a composição de dois tipos de isometrias, a saber: a translação e a rotação.

Na dança *Maneo de Verdillo (Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos)*, a rotação está presente em todos os momentos da coreografia correspondentes à transição entre as duas partes que compõem essa dança - os *'puntos'* e as *'vueltas'* -, e que se vão intercalando (Rodríguez, 2012). Ademais, a rotação está presente na primeira, na terceira e na quarta *'vueltas'*, nas quais os pares, organizados em linhas paralelas, executam movimentos de rotação, que adquirem a designação de *'tablóns'* (Rodríguez, 2012). Os *'tablóns'* da primeira e terceira *'vueltas'* são iguais, distinguindo-se do *'tablón'* da quarta *'vuelta'* pelo número de centros de rotação existente e pela amplitude do ângulo associado ao movimento de rotação, sendo que o sentido do movimento de rotação é sempre igual (consultar capítulo V, páginas 124 a 133). A translação foi, também, identificada na coreografia de todas as danças estudadas, à exceção de uma: a dança *Chula da Ribeira de Neiva (Grupo Folclórico de Vila Verde)*. Na dança *Vira Velho de Vila Verde (Grupo Folclórico de Vila Verde)*, a translação é a isometria que caracteriza a parte da coreografia em que os dançarinos realizam movimentações laterais, ainda que, nessas movimentações, os dançarinos girem sobre si próprios, efetuando partes de voltas, ou voltas inteiras, primeiro para um lado, e que depois são desfeitas em sentido inverso. Na dança *Malhão de ir ao Meio (Grupo Folclórico de Vila Verde)*, a translação fica circunscrita aos momentos particulares da coreografia em que os homens 'vão ao meio' (GFVV, 2008), deslocando-se, exclusivamente nesses momentos da coreografia, em movimento linear. Na dança *Vira ao Castelo (Grupo Folclórico de Vila Verde)*, a translação, para além de ser umas das isometrias associadas à concretização do 'trespasse', é a isometria que está associada aos movimentos de avanço e recuo, sendo necessários só quatro vetores para representar a totalidade dos movimentos de avanço e recuo realizados pelos dançarinos (consultar capítulo V, páginas 118 a 123). Na dança *Maneo de Verdillo (Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos)*, a translação é a isometria que permite caracterizar a execução de movimentos laterais e de movimentos de avanço e recuo realizados nos quatro *'puntos'* da dança, assim como a execução dos chamados *'embotados'*, que têm lugar na segunda *'vuelta'* (consultar capítulo V, páginas 124 a 133). A reflexão axial foi encontrada, somente, na coreografia da dança *Vira Velho de Vila Verde (Grupo Folclórico de Vila Verde)*, tendo sido considerada como a isometria que transforma as posições ocupadas pelos dançarinos antes e depois da concretização de cada 'trespasse' que decorre na coreografia (consultar capítulo V, páginas 107 a 110).

Em súmula, foram identificadas, essencialmente, três transformações geométricas na coreografia das danças folclóricas investigadas, designadamente: a rotação, a translação, e, ainda, a reflexão axial. Os resultados obtidos vão ao encontro de alguns resultados emergentes das investigações desenvolvidas por Latorre (2008) e Cruz (2010), no âmbito das quais também foi possível identificar a presença, especificamente, das isometrias rotação e translação em vários tipos de danças estudados pelos autores.

II. Que padrões repetitivos caracterizam a estrutura de músicas que acompanham danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza?

A análise de músicas que acompanham danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza reportou-se a músicas que acompanham danças características de dois grupos folclóricos: o *Grupo Folclórico de Vila Verde* (Norte de Portugal) e a *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* (Galiza). Relativamente ao *Grupo Folclórico de Vila Verde*, foi analisada uma música, a qual acompanha a dança *Regadinho*. No que refere à *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*, foram analisadas duas músicas: a música que acompanha a dança *Jota de Pol* e a música que acompanha a dança *Muiñeira de Pol.* Para cada uma dessas músicas, identificaram-se, nas respetivas partituras, aplicações musicais das isometrias do plano (translação, reflexão axial, reflexão deslizante, e rotação), tendo-se partido do trabalho de Garland e Kahn (1995). Complementarmente, representaram-se algumas partituras das músicas investigadas - ou trechos dessas partituras -, em gráficos, tendo-se seguido a metodologia sugerida por Carvalho, Bassanezi e Pompeu Junior (2015), e posteriormente utilizada por Misura (2016). A identificação de várias aplicações musicais das isometrias nas partituras das músicas em estudo, complementada pela representação dessas partituras - ou de trechos dessas partituras - em gráficos, compôs a base para a identificação de padrões repetitivos que caracterizam a estrutura dessas músicas.

Entre as aplicações musicais das isometrias do plano identificadas nas partituras das músicas investigadas, há a mencionar: a 'repetição' e a 'transposição' (duas aplicações musicais da translação), a 'regressão' (aplicação musical da reflexão axial de eixo vertical), e a 'inversão' (aplicação musical da reflexão deslizante). A 'repetição' é a aplicação musical mais simples da isometria translação, na qual uma sequência de notas aparece exatamente igual noutro momento da partitura (Garland & Kahn, 1995). Essa aplicação musical da translação foi encontrada nas partituras de todas as músicas, sem exceção. Na partitura da música que acompanha a dança *Regadinho (Grupo Folclórico de Vila Verde)*, é possível identificar a 'repetição' de duas frases musicais, antecedendo o coro (consultar capítulo V, página 134). Essa 'repetição' torna-se ainda mais evidente no gráfico que representa a totalidade da partitura da música, encontrando-se destacadas as duas frases que se repetem (consultar capítulo V, página 135). Na partitura da música que acompanha a dança *Jota de Pol (Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos)*, tocada a duas Gaitas, a 'repetição' é visível numa sequência de notas incluída na parte B da música, relativa à 1.ª Gaita (consultar capítulo V, páginas 136-137). Essa 'repetição' ganha plena visibilidade no gráfico que representa a parte B da música para a 1.ª Gaita, encontrando-se evidenciada a sequência de notas que se repete (consultar capítulo V, página 137). A 'repetição', ao nível da parte B da música, pode, também, ser observada na sequência de notas da 1.ª Gaita por comparação com a da 2.ª Gaita. Conforme evidenciado no gráfico que representa a parte B da música para as duas Gaitas em simultâneo, a melodia da 1.ª Gaita e da 2.ª Gaita, até um determinado momento dessa parte da música, é igual, verificando-se a sobreposição das duas linhas do gráfico (consultar capítulo V, página 138), o que pode, também, ser entendido como um exemplo de 'repetição'. Na partitura da música que acompanha a dança *Muiñeira de Pol (Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos)*, tocada a duas Gaitas, a 'repetição' ganha evidência em duas sequências de notas relativas à 1.ª Gaita e numa sequência de notas referente à 2.ª Gaita (consultar capítulo V, página 139). Desses exemplos, a 'repetição' de uma das sequências de notas relativa à 1.ª Gaita fica ainda mais percetível no gráfico que representa a parte A da música para a 1.ª Gaita, estando realçada a sequência de notas que se repete (consultar capítulo V, página 140). A 'transposição' é uma aplicação musical mais sofisticada da isometria translação, que envolve o movimento de uma sequência exata de notas para outra localização na escala, e não apenas no tempo (Garland & Kahn, 1995). Essa aplicação musical da translação foi, também, encontrada nas partituras de todas as músicas. Na música que acompanha a dança *Regadinho (Grupo Folclórico de Vila Verde)* e na música que acompanha a dança *Muiñeira de Pol (Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos)*, os exemplos de 'transposição' são pontuais, envolvendo sequências curtas de notas (consultar capítulo V, página 134 e página 139, respetivamente). Por sua vez, na música que acompanha a dança *Jota de Pol (Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos)*, sobressai a 'transposição' de uma sequência de notas mais extensa, incluída na parte B da música, e referente à 2.ª Gaita (consultar capítulo V, páginas 136-137). Ao nível da parte B da música, a 'transposição' pode, também, ser observada na sequência de notas da 1.ª Gaita por comparação com a da 2.ª Gaita. Tal como evidenciado no gráfico que representa a parte B da música para as duas Gaitas em simultâneo, a partir de um certo momento dessa parte da música, a linha da 2.ª Gaita aparece duas notas acima relativamente à da 1.ª Gaita, mantendo-se assim até ao final da parte B da música, o que, também, pode ser percecionado como um exemplo de 'transposição' (consultar capítulo V, página 138). A 'regressão' é uma aplicação musical da isometria reflexão axial de eixo vertical (Garland & Kahn, 1995). Em todas as músicas, sem exceção, foi possível encontrar exemplos de 'regressão'. Tais exemplos exibem-se pontuais, envolvendo sequências de notas consideradas curtas (consultar capítulo V, página 134, páginas 136-137, e página 139). Por fim, a 'inversão' é uma aplicação musical da reflexão deslizante, que é uma combinação de duas isometrias - a reflexão e a translação (Garland & Kahn, 1995). Essa aplicação musical foi encontrada, unicamente, na música *Muiñeira de Pol (Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos)*. Os dois exemplos assinalados na partitura da música envolvem sequências de notas bastante curtas, sendo pouco notórios (consultar capítulo V, página 139).

Sintetizando, foram identificadas, essencialmente, quatro aplicações das isometrias do plano nas partituras das músicas investigadas, a saber: a 'repetição', a 'transposição', a 'regressão' e a 'inversão'. Esses resultados convergem com o trabalho de Garland e Kahn (1995), segundo os quais, para ser alcançada coesão, na composição de uma peça musical, repetem-se determinadas sequências de notas múltiplas vezes - com variações é claro, no sentido de evitar a monotonia e dar caráter à composição. Nesses casos, há uma estrutura subjacente que é influenciada pela matemática (Garland & Kahn, 1995). Ora, algumas técnicas utilizadas para dar unidade à composição musical têm base na geometria plana: as transformações musicais estão intimamente relacionadas com as isometrias (Garland & Kahn, 1995). Os padrões repetitivos que caracterizam a estrutura das músicas que acompanham danças folclóricas características do *Grupo Folclórico de Vila Verde* e da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* foram, por isso, identificados com base no reconhecimento de aplicações, às músicas, das isometrias do plano, as quais possibilitam a repetição de certas sequências de notas, com variações (Garland & Kahn, 1995).

III. Que padrões geométricos estão presentes nos trajes usados por grupos folclóricos do Norte de Portugal e da Galiza?

A análise dos trajes usados por grupos folclóricos do Norte de Portugal e da Galiza reportou-se aos trajes utilizados por dois grupos folclóricos: o *Grupo Folclórico de Vila Verde* (Norte de Portugal) e a *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* (Galiza). Relativamente ao *Grupo Folclórico de Vila Verde*, foram analisados quatro tipos de traje: o 'Traje de Encosta', o 'Traje de Noivos', o 'Traje da Ribeira', e o 'Traje de Trabalho' (GFVV, 2008). Quanto à *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*, foram analisadas três classes de traje, a saber: o 'Traxe de Festa', o 'Traxe de Feira', e o 'Traxe de Decotío' (Pérez, 2005). A partir da apresentação de imagens representativas dos trajes, identificaram-se padrões geométricos presentes nos trajes, quando percecionados de forma global, e em certas peças dos trajes em particular.

Entre os padrões geométricos assinalados nos diferentes tipos de trajes estudados, há a referir: variados padrões de simetria e frisos. A simetria de reflexão de eixo vertical constitui-se como um padrão comum à generalidade dos trajes. Em termos globais, todos os trajes expõem figuras verticalmente simétricas, com a maioria dos elementos que os compõem a concorrerem para essa mesma simetria. Traço igualmente comum à generalidade dos trajes é a presença de determinados elementos, nos trajes, que quebram a simetria de reflexão vertical que os trajes globalmente apresentam, acabando, assim, por ganhar evidência no traje, precisamente por desequilibrarem a simetria exibida pela figura em geral. A decoração visível em certas peças dos trajes corresponde a outra fonte de quebra da simetria vertical.

Nos trajes do *Grupo Folclórico de Vila Verde*, alguns exemplos que quebram a simetria vertical são: o *lenço de namorados*, colocado de um lado da cintura, e os motivos bordados no *lenço de tapete*, colocado simetricamente nos ombros, ambos no 'Traje de Encosta' - feminino (consultar capítulo V, página 142); o pau que o homem segura na mão e a decoração presente no *lenço de namorados* que usa aos ombros, ambos no 'Traje de Encosta' - masculino (consultar capítulo V, páginas 141 e 143); o *ramo de flores com fitas* pendentes, colocado de um lado do peito, o *xaile de seda* pendurado num braço, e a *sombrinha* transportada na mão, todos no 'Traje de Noivos' - feminino (consultar capítulo V, página 145); os botões do *colete preto*, no 'Traje de Noivos' - masculino (consultar capítulo V, página 145); e os diversos motivos que decoram o *cachené*, colocado de forma simétrica na cabeça, no 'Traje da Ribeira' - feminino (consultar capítulo V, páginas 148 e 149). Nos trajes da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*, constituem exemplos de exceção à simetria vertical: a forma como o *mantón de la* é colocado no busto, no 'Traxe de Festa' - feminino (consultar capítulo V, página 152), que é correspondente à maneira como o *mantón de caxemira* é colocado no 'Traxe de Feira' - feminino (consultar capítulo V, página 160); e o formato e a decoração da *monteira*, usada na cabeça, e a *faixa*, enrolada na cintura, com as franjas penduradas de um lado, ambos no 'Traxe de Festa' - masculino (consultar capítulo V, página 157). Considerando determinadas peças dos trajes em particular, foi possível distinguir, ao nível da decoração, outros padrões de simetria, para além da simetria de reflexão de eixo vertical, percecionando os trajes num âmbito mais particular, e não tão global. Nas peças que compõem os diferentes tipos de trajes do *Grupo Folclórico de Vila Verde*, para além da frequente decoração exibindo simetria de reflexão vertical, assinalaram-se motivos decorativos que apresentam: simetria de reflexão de eixo horizontal, como um dos motivos que decora a *camisa* do 'Traje de Encosta' - masculino (consultar capítulo V, página 144) - e alguns motivos bordados na *camisa* do 'Traje de Noivos' - masculino (consultar capítulo V, página 146); e duas - ou mais - simetrias de rotação, como outros motivos bordados na *camisa* do 'Traje de Noivos' - masculino (consultar capítulo V, página 146). Relativamente às peças das diferentes classes de trajes da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*, para além da usual ornamentação verticalmente simétrica, assinalaram-se motivos decorativos que apresentam, exatamente, duas simetrias de rotação e de duas simetrias de reflexão (de eixo vertical e de eixo horizontal), como o motivo que decora a *chaqueta* do 'Traxe de Festa' - feminino (consultar capítulo V, página 156). Igual grupo simétrico apresenta o *mantón de caxemira* do 'Traxe de Feira' - feminino (consultar capítulo V, página 161). De referir que os conjuntos de simetrias anteriormente explanados são meramente ilustrativos da diversidade de padrões de simetria existentes na decoração das peças dos trajes investigados, que será sempre muito mais vasta do que qualquer tentativa de sistematização de tais padrões, tal é a variedades de peças que compõe os trajes.

Acrescendo à diversidade de padrões geométricos já reconhecida nos trajes, foram encontrados vários tipos de frisos em distintas peças dos trajes. Nos trajes do *Grupo Folclórico de Vila Verde*, tendo por base a classificação de Washburn e Crowe (1988), identificaram-se frisos dos tipos *pmm2*, *p111*, e *pma2*, no *avental* do 'Traje de Ribeira' - feminino (consultar capítulo V, página 150) -, tendo-se apurado a existência, também, de frisos do tipo *pm11*, em peças desse traje e do 'Traje de Encosta' - feminino. Nos trajes da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*, e partindo da mesma classificação, assinalaram-se frisos dos tipos *p111* e *pmm2*, no *mandil* do 'Traxe de Festa' - feminino (consultar capítulo V, página 154), e frisos dos tipos *p1m1* e *pma2*, na *monteira* do 'Traxe de Festa' - masculino (consultar capítulo V, página 159). Os tipos de frisos enumerados reforçam a diversidade de padrões geométricos reconhecidos nos trajes, não excluindo a possibilidade de existência de outros tipos de frisos nessas e noutras peças dos trajes.

Em súmula, foram identificados diversos tipos de padrões geométricos nos trajes investigados, entre os quais padrões de simetria variados e frisos. Essa riqueza e variedade em termos de simetrias e/ou de frisos é evidenciada em vários estudos envolvendo diversos artefactos, desenvolvidos por Gerdes (2003a, 2004, 2007b, 2011, 2012b), Vieira et al. (2008), Vilela (2012), Dias (2015) e Dias et al. (2017).

IV. Que semelhanças e diferenças existem entre danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza no que refere aos elementos da dança estudados?

A comparação entre as danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza, no que refere aos elementos da dança estudados - a saber, a coreografia, a música, e os trajes -, tem por referência as danças folclóricas do *Grupo Folclórico de Vila Verde* (Norte de Portugal) e as danças folclóricas da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* (Galiza), que foram objeto de investigação no presente estudo.

Ao nível da coreografia, podem identificar-se como semelhanças existentes entre as danças do *Grupo Folclórico de Vila Verde* e da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*, duas formas geométricas - uma circunferência e linhas paralelas -, assim como duas transformações geométricas - a rotação e a translação -, que tiveram expressão na coreografia de danças pertencentes aos dois grupos. Por sua vez, algumas danças do *Grupo Folclórico de Vila Verde* demarcam-se, ao nível da coreografia, das danças da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* por apresentarem determinadas formas geométricas - duas circunferências concêntricas e linhas perpendiculares -, bem como uma transformação geométrica - reflexão axial -, que não foram encontradas nas danças da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*. Outra diferença a assinalar ao nível da coreografia das danças do *Grupo Folclórico de Vila Verde* e da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* está relacionada com a alternância das formas geométricas.

Esta alternância ganha plena evidência nas danças da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*, que se caracterizam por uma mudança contínua ao nível das configurações assumidas pelos dançarinos na coreografia. Ora, isso não se verifica nas danças do *Grupo Folclórico de Vila Verde*, nas quais é visível a existência de uma configuração de base, que, ou é mantida até ao final da coreografia, ou é alterada pontualmente. Uma última diferença a assinalar entre as danças do *Grupo Folclórico de Vila Verde* e as danças da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* tem a ver com a existência de duas partes bem distintas - os *'puntos'* e as *'vueltas'* -, que tipicamente compõem as danças do grupo galego, sendo que, nas *'vueltas'*, são realizados movimentos característicos, como os *'tablóns'* e os *'embotados'* , os quais se diferenciam dos movimentos de 'trespasse' e de 'serrar', característicos da maioria das danças do *Grupo Folclórico de Vila Verde*, não existindo, nestas, partes transversais às danças na sua generalidade.

Ao nível da música, as semelhanças existentes entre as músicas que acompanham danças do *Grupo Folclórico de Vila Verde* e da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* reside na identificação de certas aplicações musicais - a 'repetição', a 'transposição' e a 'regressão' - nas músicas dos dois grupos. Por sua vez, certas músicas da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* diferenciam-se das músicas do *Grupo Folclórico de Vila Verde* por denotarem a presença de uma aplicação musical - a 'regressão' - que não foi identificada nas músicas do *Grupo Folclórico de Vila Verde*. Outras duas diferenças a assinalar ao nível da música prendem-se com o facto de as músicas da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* serem tocadas a duas Gaitas, e exibirem uma maior complexidade em termos de composição musical, quando comparadas com as músicas do *Grupo Folclórico de Vila Verde*. Uma última distinção em termos da música é a de que as músicas do *Grupo Folclórico de Vila* Verde, normalmente, são acompanhadas com voz, e certas músicas da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* cingem-se à parte instrumental.

Ao nível dos trajes, existem semelhanças na tipologia e na função dos trajes de ambos os grupos. Os vários tipos de trajes do *Grupo Folclórico de Vila Verde* - o 'Traje de Encosta', o 'Traje da Ribeira', e o 'Traje de Trabalho' - são análogos às classes de trajes da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* - o 'Traxe de Festa', o 'Traxe de Feira', e o 'Traxe de Decotío' -, apresentando utilidades e usos comuns. Outra semelhança diz respeito à simetria de reflexão vertical que caracteriza os trajes dos dois grupos na sua globalidade, e que é quebrada por certos elementos (não comuns), que ganham realce nos trajes. Os trajes do *Grupo Folclórico de Vila Verde* e da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* partilham, ainda, a riqueza e diversidade de padrões de simetria e de frisos encontrados nas inúmeras peças que compõem tais os trajes. A grande diferença existente entre os trajes dos dois grupos está relacionada com a constituição dos trajes, existindo peças nos trajes da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* que não fazem parte das peças constituintes dos trajes do *Grupo Folclórico de Vila Verde*, e vice-versa.

Enquanto exemplos de peças que se constituem exclusivas dos trajes de cada um dos grupos folclóricos, podem listar-se os seguintes: o *lenço de namorados*, que faz parte do 'Traje de Encosta' - feminino e masculino - do *Grupo Folclórico de Vila Verde*; o *pano de pescozo*, o *mandil* ou *mantelo*, e a *chaqueta*, integrados no 'Traxe de Festa' - feminino - da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*; e a *monteira*, um elemento emblemático 'Traxe de Festa' - masculino - da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*. Outras diferenças ao nível dos trajes estão relacionadas com a forma de colocação de certas peças, assim como com a maneira de decoração de algumas peças. Por exemplo, no 'Traje de Encosta' - feminino - do *Grupo Folclórico de Vila Verde*, o *lenço de tapete* é colocado sobre os ombros, e apertado à frente, ao passo que, no 'Traxe de Festa' - feminino - da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*, o *mantón de la* é colocado sobre os ombros, cruzado na zona do busto, e atado atrás, não exibindo simetria de reflexão vertical, ao contrário do primeiro. Por último, uma tendência observada na ornamentação de várias peças dos trajes da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos*, com o *mandil*, o *mantelo*, e a *chaqueta*, integrados no 'Traxe de Festa' - feminino, é a de decorar as peças seguindo a direção dos contornos das próprias peças - algo que não teve expressão nos trajes do *Grupo Folclórico de Vila Verde*.

V. Que tarefas matemáticas é possível construir tendo por base os aspetos matemáticos identificados nos elementos das danças folclóricas estudados?

A identificação de aspetos matemáticos presentes em várias danças folclóricas características do *Grupo Folclórico de Vila Verde* e da *Agrupación Folclórica Cantigas e Agarimos* constituiu a base para a construção de um conjunto de tarefas matemáticas. As tarefas matemáticas inicialmente construídas foram alvo de um processo de revisão por um painel de especialistas dos domínios científico, pedagógico, e cultural, no seguimento do qual se procedeu à reestruturação das tarefas, as quais foram, posteriormente, implementadas em sala de aula. Partindo de diversos aspetos matemáticos descobertos ao nível da coreografia, da música e dos acessórios das danças folclóricas estudadas, foi possível construir tarefas matemáticas destinadas aos 6.º, 7.º, e 8.º anos de escolaridade do Ensino Básico. Ora, essa definição baseou-se numa análise comparativa entre os diversos aspetos matemáticos descobertos nas danças estudadas e os conteúdos previstos nos documentos curriculares de referência, que, à data, estavam vigentes em Portugal, a saber: o *Programa de matemática para o Ensino Básico* (MEC, 2013) e as *Metas curriculares de matemática do Ensino Básico* (MEC, 2012). As tarefas matemáticas criadas (consultar capítulo VI, páginas 165 a 242) propõem a exploração de diversos conteúdos matemáticos do domínio de *Geometria e Medida*, mas sendo estabelecidas várias conexões com outros domínios, entre os quais: *Números e Operações*, *Álgebra*, e *Organização e Tratamento de Dados* (MEC, 2012, 2013).

Em termos de estrutura, cada conjunto de tarefas foi organizado em função do elemento da dança - coreografia, música, ou acessórios - que é proposto explorar nas respetivas tarefas, e de acordo com o ano de escolaridade - 6.º, 7.º, ou 8.º anos - a que se destinam. De notar que cada conjunto de tarefas proporciona a exploração, exclusivamente, de uma dança, de uma música ou dos trajes de um só grupo.

Em síntese, constituem produtos do presente trabalho de investigação, os conjuntos de tarefas nomeados no quadro 12, com a identificação do ano de escolaridade e do elemento da dança a explorar.

Quadro 12. Tarefas matemáticas construídas.

Coreografia	6.º ano	▪ As voltas da Chula. ▪ Vira e volta a virar.
	7.º ano	▪ Malhão em roda(s).
	8.º ano	▪ Vira e revira a cruz. ▪ Vamos bailar o "Maneo".
Música	6.º ano	▪ Rega rega, Regadinho.
	8.º ano	▪ Ao ritmo da "[R]ota". ▪ A harmonia da "Muiñeira".
Trajes	6.º ano	▪ À moda de Vila Verde.
	8.º ano	▪ Diz-me o que vestes, dir-te-ei de onde és…

VI. Que recomendações pedagógicas devem acompanhar as tarefas matemáticas construídas?

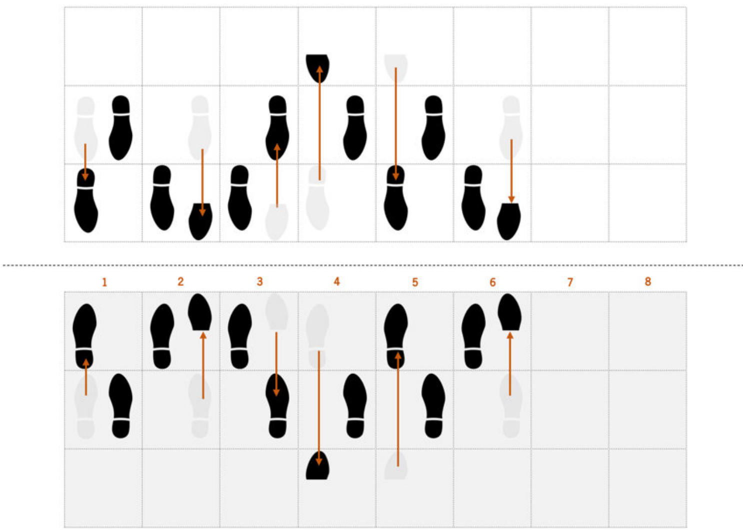
As tarefas matemáticas que resultaram do presente trabalho de investigação foram, depois, implementadas em sala de aula, e é com base nos dados recolhidos na implementação pedagógica, cuja análise e respetivos resultados se encontram apresentados no capítulo VI, que serão apresentadas as recomendações pedagógicas para acompanharem as tarefas. A implementação das tarefas ocorreu em diferentes turmas do 6.º, 7.º, e 8.º anos de escolaridade de uma escola artística especializada no ensino da música, localizada no concelho de Braga, não tendo havido possibilidade de concretizar a sua implementação em escolas da Galiza, devido à situação epidemiológica causada pela doença COVID-19.

Nos quadros 13 a 22, encontram-se apresentadas as recomendações pedagógicas que devem acompanhar as tarefas matemáticas construídas, tendo em vista a sua futura aplicação generalizada. Importa referir que algumas tarefas não tornaram necessária a elaboração de recomendações, por não se terem registado constrangimentos ou dificuldades, por parte dos alunos, durante a sua exploração. Nessas tarefas, é indicado: sem recomendações. Nas restantes tarefas, as recomendações adquirem a forma de conselhos e/ou advertências considerados úteis para a implementação pedagógica das tarefas.

Quadro 13. Recomendações pedagógicas para as tarefas *As voltas da Chula*.

As voltas da Chula	
1./ 1.1.	Sem recomendações.
2./ 2.1.	É recomendável promover um momento prévio de discussão, em plenário ou em pequeno grupo, tendo em vista a distinção entre as partes da coreografia correspondentes ao movimento de 'serrar' e as partes respeitantes aos movimentos de troca de posições ocorridos entre os pares. Essa distinção facilitará a identificação do primeiro movimento de troca de posições ocorrido entre os pares na coreografia, evitando que isso seja um obstáculo à exploração da tarefa pelos alunos.
2.2.	A exploração da tarefa prevê que os conteúdos referentes às isometrias no plano, entre as quais a rotação, já tenham sido abordados. Mesmo assim, poderá ser necessária a recuperação desses conteúdos. Convém ter presente que indicar o nome da isometria não é suficiente para resolver a tarefa, sendo necessário, para além disso, que os alunos caracterizem a isometria identificada, o que poderá implicar a recuperação dos elementos necessários para caracterizar uma rotação.
3./ 3.1.	A exploração da tarefa prevê que os conteúdos referentes às isometrias do plano, entre as quais a rotação, já tenham sido abordados. Poderá verificar-se a tendência de os alunos considerarem todos os movimentos de troca de posições ocorridos na dança distintos entre si, o que poderá levar a que se sintam "perdidos". Recomenda-se a colocação de questões que desafiem os alunos a identificarem regularidades e diferenças existentes nos diversos movimentos de troca de posições. Incentivar a elaboração de esquemas e/ou desenhos (conforme sugerido na tarefa) também poderá ser útil, mas tendo sempre presente que a resolução da tarefa só fica completa com a identificação das diferentes isometrias associadas aos movimentos de troca de posições.
4./ 4.1.	Poderá ser necessário ter que apoiar os alunos na comunicação matemática do seu raciocínio, devendo incentivar-se, na justificação, que os alunos relacionem os aspetos da dança em causa - movimentos de troca de posições - com o conceito matemático aí exposto - polígono coincidente.
4.2.	Sem recomendações.
5./ 5.1.	É importante ter em consideração que o referencial cartesiano envolvendo os quatro quadrantes só é introduzido no 7.º ano de escolaridade, pelo que isso poderá trazer dificuldades aos alunos.
5.2.	Ver recomendações da tarefa 2.2.
5.3.	Associar o percurso efetuado pelo par a uma circunferência poderá não ser óbvio para os alunos. Algumas estratégias que poderão ajudar nessa tarefa são: aumentar a velocidade de visualização do vídeo da dança e/ou sugerir aos alunos que desenhem os movimentos efetuados pelo par. Outra dificuldade emergente poderá ser o cálculo do comprimento da circunferência, assim como a identificação do raio/diâmetro da circunferência partindo dos dados do referencial da tarefa 5.
6./ 6.1.	Poderá ser útil sugerir aos alunos, durante a exploração da tarefa, que realizem marcações intermédias das sucessivas posições assumidas pelo par, representando-as, por exemplo, por A_1, A_2, A_3, A_4,..., até descobrirem a posição final A' assumida pelo par no final da coreografia.
6.2.	Sem recomendações.
7./ 7.1.	A identificação da principal diferença entre a disposição dos dançarinos neste vídeo e no anterior poderá implicar uma nova visualização do primeiro. É aconselhável lembrar os alunos de que se trata da mesma dança, pelo que o desenvolvimento plástico dos passos e movimentos será igual. Isto permitirá que os alunos não "se percam" na comparação de aspetos relativos à coreografia.
7.2.	Sem recomendações.
7.3.	A exploração da tarefa prevê que os conteúdos referentes às isometrias do plano, entre as quais a rotação, já tenham sido abordados. Poderá verificar-se a tendência de os alunos considerarem, à partida, que as rotações que caracterizam os movimentos dos pares nos dois vídeos da dança são iguais, baseando-se na perceção da coreografia, que é igual. Diante disso, deve procurar-se estimular os alunos a percecionarem os movimentos de troca de posições de um ponto de vista matemático, refletindo sobre o que é diferente nas rotações que caracterizam esses movimentos.

Quadro 14. Recomendações pedagógicas para as tarefas *Vira e volta a virar*.

Vira e volta a virar	
1./ 1.1.	Poderá ser necessária uma nova visualização do vídeo - ou apenas de uma parte do vídeo -, de maneira que os alunos atentem no número de dançarinos que executam a coreografia da dança.
1.2.	Sem recomendações.
2./ 2.1.	Poderá ser interessante e útil sugerir aos alunos que reproduzam, no espaço de sala de aula, a sequência de movimentações dos pés de um dançarino no 'serrar', facilitando, dessa forma, o reconhecimento da regularidade existente no movimento de 'serrar', que está na base da tarefa.
3./ 3.1.	A diversidade de estratégias que, muito provavelmente, resultará da exploração de uma tarefa desta natureza deverá ser aproveitada para promover um momento de partilha e discussão em plenário, no âmbito do qual seria recomendável incentivar os alunos a apreciarem a adequação e eficácia das várias estratégias usadas e partilhadas, no sentido da generalização da sequência.
4.	Poderá não ser evidente para os alunos perceberem que o movimento de 'serrar' efetuado pelos pares de dançarinos colocados frente a frente é simétrico. Será aconselhável, por isso, promover novas visualizações da parte do vídeo da dança correspondente à realização do movimento de 'serrar', efetuando paragens em instantes do vídeo nos quais a simetria dos movimentos é clara.
5.	A tarefa poderá revelar-se exigente para os alunos e implicar um tempo de atividade considerável. Mesmo compreendendo que as movimentações dos pés a desenhar na tarefa são simétricas às movimentações dos pés representadas na figura 6, o facto de essa figura não surgir no espaço de resolução da tarefa poderá trazer dificuldades acrescidas aos alunos. Algo que poderá ser útil é sugerir aos alunos que reproduzam, no espaço de sala de aula, a sequência de movimentações dos pés realizada por um par de dançarinos no 'serrar', tornando mais concreta a representação das movimentações pedidas, tendo por referência as do par, tal como ilustrado na figura a seguir. 
6./ 6.1.	Poderá ser útil sugerir aos alunos, durante a exploração da tarefa, que tracem, na figura dada, os eixos de simetria que vão considerando, de modo que se torne mais fácil verificarem a simetria.
7./ 7.1.	A exploração da tarefa prevê que os conteúdos referentes às isometrias do plano, entre as quais a reflexão axial, já tenham sido abordados. Provavelmente, os alunos não identificarão a reflexão axial como sendo a isometria que transforma as posições iniciais dos dançarinos nas posições que resultam do 'trespasse', por se focarem no desenvolvimento do movimento em si, e não nas posições que precedem e resultam do mesmo - algo que deverá ser enfatizado na sua atividade.
7.2.	Por estarem relacionadas, a exploração desta tarefa estará dependente do sucesso na exploração da tarefa anterior, podendo evidenciar-se a mesma tendência mencionada para a tarefa anterior.
8./ 8.1.	Sem recomendações.

Quadro 15. Recomendações pedagógicas para as tarefas *Malhão em roda(s)*.

Malhão em roda(s)	
1./ 1.1.	Sem recomendações.
2./ 2.1.	Poderá ser útil sugerir aos alunos, durante a exploração da tarefa, que tracem, na figura dada, os eixos de simetria que vão considerando. Contudo, e atendendo a que a perspetiva da imagem em causa poderá não ser a mais favorável ao desenho de eixos de simetria, pela sua posição oblíqua, poderá ser sugerida, como alternativa, a utilização da figura apresentada na tarefa prévia.
3./ 3.1.	A exploração da tarefa prevê que o conteúdo correspondente à soma dos ângulos internos de um polígono já tenha sido abordado. É aconselhável repetir a visualização de uma parte do vídeo da dança respeitante à realização do movimento de 'serrar', para que os alunos possam focar a sua atenção nesse movimento, e mais precisamente no ângulo que está associado a esse movimento.
4./ 4.1.	A exploração da tarefa prevê que o conteúdo correspondente aos critérios de semelhança de polígonos já tenha sido abordado. É recomendável repetir a visualização da parte do vídeo da dança em que os homens 'vão ao meio', parando a reprodução do vídeo no instante em que os homens estão no meio, para que os alunos possam compreender a figura apresentada na tarefa.
4.2.	Sem recomendações.
4.3.	A exploração da tarefa prevê que os conteúdos referentes às propriedades das homotetias já tenham sido abordados. Associar as duas medidas fornecidas na tarefa ao comprimento dos lados de cada um dos polígonos em questão poderá não ser acessível para a maioria dos alunos. Recomenda-se a leitura desses dados a partir da imagem da reprodução do vídeo parada no instante em que os homens 'vão ao meio', de modo a favorecer a compreensão dos alunos, e a reforçar a ligação entre a dança e a matemática. Outra tendência que poderá verificar-se é a de os alunos limitarem a sua resolução da tarefa ao cálculo da razão de semelhança, e sem terem em atenção, na maior parte das vezes, o facto de se tratar de uma redução ou de uma ampliação - algo que também poderá ser reforçado pela interpretação dos dados a partir do vídeo da dança. Por último, é conveniente aconselhar os alunos a representarem o valor da razão da homotetia na forma de fração, evitando erros prováveis ao tentarem escrever o número na forma de dízima.
4.4.	Em parte, a exploração desta tarefa estará dependente do sucesso na exploração da tarefa prévia, por envolver a aplicação do valor da razão da homotetia aí determinado. Poderá verificar-se a tendência de os alunos realizarem, apenas, o primeiro passo da resolução, desenvolvendo uma resolução incompleta do problema. Aconselha-se a monitorização dessa possível ocorrência, no sentido de poder haver uma intervenção oportuna junto dos alunos, a fim de os desafiar a pensar.
4.5.	A exploração da tarefa prevê que o conteúdo relativo ao Teorema de Tales já tenha sido abordado.
4.6.	Relacionar a razão entre perímetros de figuras semelhantes com a razão de semelhança entre as figuras poderá ser um conteúdo a investigar a partir da resolução da tarefa, pois a tendência que se poderá verificar é a de os alunos determinarem a razão entre os perímetros dos polígonos partindo do cálculo, prévio, do perímetro de cada um dos polígonos. Se assim for, é recomendável promover um momento posterior de reflexão e discussão em plenário, com vista à comparação entre o valor da razão obtido e o valor da razão de semelhança já calculado numa tarefa anterior. Esse objetivo poderá ser dificultado por incorreções que poderão surgir na resolução do problema.
4.7.	Relacionar a razão entre áreas de figuras semelhantes com a razão de semelhança entre as figuras poderá ser um conteúdo a investigar a partir da resolução da tarefa, pois a tendência que se poderá verificar é a de os alunos determinarem a razão entre as áreas dos polígonos partindo do cálculo, prévio, da área de cada um dos polígonos. Para isso, será útil fornecer a fórmula para área de polígonos regulares, ainda que isso possa não vir a ser garantia de sucesso na resolução, pois os alunos poderão não conseguir aplicar a fórmula ou aplicá-la incorretamente. O surgimento de erros persistentes na resolução da tarefa poderá tornar infrutífera a desejada comparação entre o valor da razão obtido e o valor da razão de semelhança já calculado numa tarefa anterior.
4.8.	Por estarem interligadas, a exploração desta tarefa estará fortemente dependente do sucesso na exploração das duas tarefas prévias, cujos resultados serão decisivos para a conjetura requerida.

Quadro 16. Recomendações pedagógicas para as tarefas *Vira e revira a cruz*.

Vira e revira a cruz	
1./ 1.1.	Sem recomendações.
2./ 2.1.	A exploração da tarefa prevê que os conteúdos referentes aos vetores já tenham sido abordados. É aconselhável repetir a visualização da parte do vídeo da dança correspondente à realização dos movimentos de avanço e recuo pelos quatro pares de dançarinos, de modo que os alunos possam focar a sua atenção nesses movimentos, que serão alvo de exploração nesta e nas três tarefas seguintes. Poderá verificar-se a tendência de os alunos reconhecerem e desenharem um número de vetores superior ao mínimo necessário, sem perceberem que alguns dos vetores eram iguais.
2.2.	A exploração da tarefa prevê que os conteúdos referentes aos vetores já tenham sido abordados. O facto de os alunos, na tarefa anterior, poderem ter considerado um número de vetores superior ao mínimo necessário poderá dificultar a comparação dos vetores, requerida na presente tarefa.
2.3.	A tarefa poderá revelar-se bastante desafiante para a generalidade dos alunos, o que se traduzirá num aumento das interações aluno-aluno e professor-aluno. É aconselhável repetir a visualização da parte do vídeo da dança correspondente à realização dos movimentos de avanço e recuo pelos quatro pares de dançarinos, chamando a atenção dos alunos para os movimentos realizados por um par (à sua escolha). Poderá ser útil sugerir aos alunos que reproduzam, no espaço de sala de aula, os movimentos de avanço e recuo realizados por um par, de modo a promover uma reflexão mais concreta sobre as questões a explorar, entre as quais nomear o quadrilátero com maiores dimensões que é possível formar, bem como o de menores dimensões (menos intuitivo). A exploração da variação do comprimento dos lados dos quadriláteros formados e a respetiva variação da área poderá trazer dificuldades acrescidas aos alunos, tornando indispensável acompanhar a trabalho dos alunos e intervir no sentido de desafiar o seu raciocínio matemático.
2.4.	A exploração da tarefa prevê que o conteúdo correspondente ao Teorema de Pitágoras já tenha sido abordado. Poderá verificar-se a tendência de os alunos considerarem, quase exclusivamente, as distâncias entre dançarinos situados frente a frente, desprezando as distâncias diagonais - algo que terá particular influência na identificação da maior distância entre dançarinos. Desafiar os alunos a calcularem e compararem as distâncias entre dançarinos frente a frente e na diagonal poderá ser uma estratégia proveitosa para levar os alunos a construírem as suas próprias ilações.
3./ 3.1.	É recomendável repetir a visualização da parte do vídeo da dança correspondente à realização dos movimentos de avanço, rodopio e recuo pelos primeiros pares de dançarinos. A exploração da tarefa prevê que os conteúdos relativos às translações e isometrias já tenham sido abordados. Ainda assim, poderá ser necessária a recuperação desses conteúdos, em particular da isometria rotação, por ser abordada com maior enfoque no 6.º ano de escolaridade. Convém ter presente que identificar as isometrias não é suficiente para resolver a tarefa, sendo necessário, também, que os alunos caracterizem tais isometrias, o que poderá implicar a recuperação dos elementos necessários para caracterizar uma translação e/ou uma rotação, os quais são diferentes entre si.
4./ 4.1.	É recomendável repetir a visualização da parte do vídeo da dança correspondente à realização dos movimentos de avanço, rodopio e recuo, mas desta vez pelos segundos pares de dançarinos. A nomenclatura utilizada para a representação das translações e rotações poderá gerar dúvidas.
4.2.	Poderá ser necessário ter que ajudar os alunos ao nível da interpretação do enunciado da tarefa.
4.3.	Poderá ser útil incentivar os alunos a desenharem, no referencial cartesiano da tarefa 4., a linha gerada pelos movimentos de avanço, rodopio e recuo efetuados por um dançarino à sua escolha.
5./ 5.1.	Sem recomendações.
5.2.	Sem recomendações.
5.3.	Sem recomendações.
5.4.	Poderão surgir dúvidas ao nível das igualdades que envolvem a composição de duas translações.
6./ 6.1.	É recomendável repetir a visualização da parte do vídeo da dança correspondente à realização do movimento de do 'trespasse' pelos segundos pares de dançarinos. A exploração de isometrias capazes de descrever os movimentos curvilíneos executados no final do 'trespasse' poderá trazer dificuldades acrescidas aos alunos, tornando fundamental fornecer pistas e sugestões aos alunos.

Quadro 17. Recomendações pedagógicas para as tarefas *Vamos bailar o "Maneo"*.

Vamos bailar o "Maneo"	
1./ 1.1.	É recomendável repetir a visualização do vídeo da dança (provavelmente mais do que uma vez), chamando a atenção dos alunos para as diferentes configurações assumidas pelos dançarinos ao longo da coreografia, que se inicia com os dançarinos dispostos em duas linhas paralelas. Poderá ser conveniente esclarecer os alunos de que não precisarão de representar a sequência de configurações que vão sendo assumidas pelos dançarinos durante a coreografia, mas apenas caracterizar, com desenhos e/ou palavras, as configurações que se afiguram diferentes entre si.
2./ 2.1.	É indispensável repetir a visualização das partes do vídeo da dança correspondentes à realização de dois *'tablóns'* diferentes, que poderão ser o *'tablón'* da primeira ou da terceira *'vueltas'* (iguais) e o *'tablón'* da quarta *'vuelta'* (distinto dos anteriores). Será conveniente desafiar os alunos a explorarem pelo menos duas semelhanças e duas diferenças entre os dois *'tablóns'* em questão, estimulando o seu pensamento e evitando que desenvolvam uma resolução incompleta da tarefa.
2.2.	Recomenda-se voltar a repetir a visualização das partes do vídeo da dança correspondentes à realização de dois *'tablóns'* diferentes, a saber: o *'tablón'* da primeira ou da terceira *'vueltas'* e o *'tablón'* da quarta *'vuelta'*. A tarefa poderá revelar-se bastante desafiante para a generalidade dos alunos, podendo surgir dúvidas, desde logo, na interpretação do que é requerido fazer na tarefa, o que poderá implicar ter que facultar esclarecimentos adicionais aos alunos. Algo que poderá ser útil é sugerir aos alunos que reproduzam, no espaço de sala de aula, os movimentos efetuados pelos dançarinos em cada um dos dois *'tablóns'* em causa, tornando mais concreta a exploração das linhas geradas, no plano, pelos movimentos de rotação dos dançarinos nesses dois *'tablóns'*.
3./3.1.	Aconselha-se repetir a visualização da parte do vídeo da dança correspondente à realização de *'embotados'*, que diz respeito, neste caso, à segunda *'vuelta'*. A exploração da tarefa prevê que os conteúdos relativos às translações e isometrias já tenham sido abordados. Ainda assim, poderá ser necessária a recuperação desses conteúdos. A tendência será a de os alunos identificarem a translação como sendo a isometria envolvida na realização dos *'embotados'*, no entanto, poderá ocorrer, também, a identificação da reflexão axial, dada a simetria dos movimentos aí realizados.
3.2.	Sem recomendações.
4./ 4.1.	É recomendável repetir a visualização do vídeo da dança - composta por *'puntos'* e *'vueltas'* -, para que os alunos possam investigar outros exemplos de isometrias associadas ao movimento dos dançarinos noutras partes da dança para além das *'vueltas'*, exploradas nas tarefas prévias.

Quadro 18. Recomendações pedagógicas para as tarefas *Rega rega, Regadinho.*

Rega rega, Regadinho	
1./ 1.1.	Poderá ser útil sugerir aos alunos que marquem as frases repetidas usando letras ou cores iguais.
2./ 2.1.	Sem recomendações.
2.2.	A exploração da tarefa prevê que os conteúdos referentes às isometrias do plano, entre as quais a reflexão axial, já tenham sido abordados. Poderá não ser intuitivo para os alunos identificarem a isometria presente na parte em que a linha do gráfico surge destacada, necessitando de apoio.
2.3.	Sem recomendações.
2.4.	O facto de não existir um espaço evidente para a resolução da tarefa poderá levar os alunos a descurarem a leitura e interpretação da tarefa, e a avançarem de imediato para a tarefa seguinte.
2.5.	A justificação requerida na tarefa poderá ser algo desnecessário atendendo ao conteúdo da tarefa.
3./ 3.1.	O verbo 'explorar', utilizado no enunciado da tarefa, poderá criar dificuldades aos alunos, por não compreenderem o seu significado no contexto, e, por consequência, não entenderem o que seria esperado que fizessem na tarefa. Poderá ser conveniente incentivar os alunos a descobrirem, primeiro, padrões mais reduzidos - isto é, pequenos segmentos que se repetem no gráfico que representa parte da partitura -, os quais abrem caminho para a identificação de padrões maiores.

Quadro 19. Recomendações pedagógicas para as tarefas *Ao ritmo da "[R]ota"*.

Ao ritmo da "[R]ota"	
1./ 1.1.	Sem recomendações.
1.2.	O facto de não existir um espaço claramente definido para a apresentação das respostas à tarefa poderá criar dúvidas aos alunos no que toca à concretização da tarefa, ou até mesmo levar a que desconsiderem a tarefa e avancem de imediato para a tarefa subsequente. Na exploração das semelhanças e diferenças existentes nos gráficos que representam a parte B da partitura, para a 1.ª e a 2.ª Gaitas, poderá ser interessante incitar os alunos a aplicarem conhecimentos musicais, no sentido de promover uma articulação entre os dados que se observam nos gráficos e a música (por exemplo, o facto de as linhas do gráfico serem iguais indica que o ritmo musical é o mesmo).
2./ 2.1.	A exploração da tarefa prevê que os conteúdos relativos às translações e isometrias já tenham sido abordados. Ainda assim, poderá ser necessária a recuperação desses conteúdos, no caso, com aplicações à música. A identificação de motivos que surgem repetidos no gráfico - sugestão dada na tarefa - e a sua associação à isometria translação poderão ser acessíveis para os alunos. Todavia, poderá ser necessário ter que incentivá-los a integrarem esses motivos particulares em padrões mais abrangentes, de modo a identificarem duas partes mais amplas que se repetem na parte B da música, para a 1.ª Gaita. Ademais, a identificação de padrões que correspondem a aplicações musicais da isometria reflexão (de eixo vertical) poderá revelar-se pouco intuitiva para os alunos, tornando necessário intervir com vista a despertar a atenção dos alunos para tal.

Quadro 20. Recomendações pedagógicas para as tarefas *A harmonia da "Muiñeira"*.

A harmonia da "Muiñeira"	
1./ 1.1.	Poderá não ser evidente para os alunos a necessidade de formularem uma resposta na tarefa - ideia que poderá ser reforçada pelo facto de não existir um espaço definido na tarefa para o efeito.
1.2.	Apesar de no enunciado da tarefa nada ser dito que limite a exploração de outros exemplos de 'repetição' na partitura da música, poderá ser conveniente, para evitar que os alunos se sintam "perdidos", tentar criar alguns focos para a sua atividade. Poderá propor-se aos alunos que explorem exemplos de 'repetição' na sequência de notas da 1.ª Gaita, e/ou na sequência de notas da 2.ª Gaita, e/ou na sequência de notas da 1.ª Gaita em comparação com a da 2.ª Gaita.
2./ 2.1.	Ver recomendações da tarefa 1.2. (no caso, aplicáveis à exploração de outros exemplos de 'transposição'). Uma dúvida emergente poderá ser quanto ao facto de os exemplos a descobrir terem ou não que ser intervalos melódicos de 4.ª justa, tal como o exemplo exposto na tarefa. Quanto a isso, considera-se que tal limitação não deverá ser introduzida na exploração da tarefa.
3./ 3.1.	Sem recomendações.
3.2.	A identificação da reflexão axial como sendo a isometria que está associada à 'regressão' poderá revelar-se acessível para os alunos. Ainda assim, poderá ser profícuo sugerir aos alunos que identifiquem o eixo de reflexão (vertical), tornando mais específica a caracterização da isometria.
3.3.	Sem recomendações.
3.4.	A exploração da tarefa prevê que os conteúdos relativos às translações e isometrias, entre as quais a reflexão deslizante, já tenham sido abordados. Identificar a isometria que está associada à 'inversão' poderá ser uma tarefa complexa para os alunos, e muito pouco imediata. O facto de as sequências de notas em questão estarem afastadas na linha da partitura poderá dificultar ainda mais a tarefa, tornando necessário fornecer pistas e sugestões aos alunos para a resolução.
3.5.	A identificação de exemplos de 'regressão' na partitura da música poderá revelar-se muito mais acessível para os alunos do que a identificação de exemplos de 'inversão' - estes últimos mais raros e difíceis de descobrir. Poderá ser necessário ter que fornecer algumas pistas aos alunos em relação à localização dos poucos exemplos de 'inversão' existentes na partitura da música, a fim de que os alunos se sintam desafiados e se mantenham empenhados na resolução da tarefa.

Quadro 21. Recomendações pedagógicas para as tarefas *À moda de Vila Verde.*

À moda de Vila Verde	
1./ 1.1.	Uma dificuldade emergente poderá ser a identificação, pelos alunos, do nome de certos adereços e utensílios que anulam a simetria presente nos trajes feminino e masculino em estudo na tarefa.
2./ 2.1.	Poderá verificar-se a tendência de os alunos assinalarem, somente, o motivo floral bordado na zona central da *camisa* como a parte do bordado que não satisfaz a simetria vertical dessa peça. Nesse sentido, poderá ser interessante desafiar os alunos a descobrirem pelo menos uma falha no bordado presente nas zonas laterais da *camisa*, a qual também não satisfaz a simetria vertical.
3./ 3.1.	A tendência poderá ser a de os alunos identificarem, enquanto elementos que quebram a simetria definida pelas retas r e s traçadas sobre o *lenço de namorados*, apenas os símbolos que surgem na parte central do *lenço*. Nesse caso, poderá ser conveniente incentivar os alunos a descobrirem outros elementos no *lenço* que anulam a simetria, entre os quais os presentes nas extremidades.
3.2.	A interpretação do enunciado da tarefa poderá criar dificuldades à generalidade dos alunos, tornando necessário providenciar esclarecimentos aos alunos. Em particular, o verbo 'agrupar', utilizado no enunciado da tarefa, poderá ser fonte de dificuldade para os alunos, por não compreenderem o seu significado no contexto, e, por conseguinte, não entenderem o que seria esperado que fizessem na tarefa. Ademais, poderá não ficar claro, a partir do enunciado da tarefa, que deverão ser explicitados os conjuntos de simetrias que agrupam os vários símbolos do *lenço*, pelo que se recomenda o reforço dessa informação, com vista a uma exploração plena da tarefa.
3.3.	Poderão surgir algumas incompreensões, por parte dos alunos, relativamente ao que é solicitado na tarefa - algo que poderá implicar esclarecimentos. Por um lado, poderá não ficar claro, para os alunos, que as letras a explorar na tarefa são, somente, as letras presentes nas frases de amor escritas no *lenço de namorados* introduzido na tarefa 3.1., e não quaisquer letras. Por outro lado, poderá não se tornar evidente para os alunos que a tarefa implica a exploração, em separado, das letras que apresentam simetria de reflexão e das letras que apresentam simetria de rotação, devendo identificar-se, claramente, os conjuntos de letras que gozam de cada uma das simetrias.
4./ 4.1.	O significado da palavra 'aleatória', usada no enunciado da tarefa, poderá ter que ser clarificado.
4.2.	A tendência que se poderá verificar é a de os alunos se limitarem a indicar, para cada um dos motivos da *camisa* em questão, o(s) tipo(s) de simetria(s) identificado(s) - por exemplo, simetria(s) de reflexão e/ou de rotação -, sem descreverem essa(s) simetria(s). Poderá ser preciso ter que chamar a atenção dos alunos para esse facto, que se encontra expresso no enunciado da tarefa.
5./ 5.1.	Sem recomendações.
5.2.	A consideração, ou não, das diferenças de cor visíveis nos motivos do bordado como assimetrias poderá ser motivo de dúvidas na exploração da tarefa pelos alunos, implicando esclarecimentos.
5.3.	Sem recomendações.
6./ 6.1.	A seleção da opção correta na tarefa poderá não ser garantia de uma justificação apropriada. Tendo por base os argumentos apresentados pelos alunos para fundamentarem a sua resposta, poderá ser proveitoso promover um momento de partilha e discussão em plenário, no âmbito do qual seria recomendável incentivar os alunos a debaterem a validade dos argumentos partilhados.
6.2.	Sem recomendações.
7./ 7.1.	Ver recomendações da tarefa 4.2. (no caso, aplicáveis à exploração das simetrias presentes num friso). Importa referir que no enunciado desta tarefa, não é expressamente requerida a descrição das simetrias, o que poderá tornar ainda mais necessária essa chamada de atenção aos alunos.
7.2.	Sem recomendações.
7.3.	A exploração da tarefa poderá trazer bastantes dificuldades aos alunos, tornando indispensável acompanhar o trabalho dos alunos. A tendência que se poderá verificar é a de os alunos não conseguirem construir os frisos pedidos corretamente. Poderão emergir erros persistentes, como a modificação do motivo inicial, ou a introdução de outros motivos diferentes do motivo dado. Caso se verifique, recomenda-se, num momento de partilha em plenário, a revisão do conceito de friso, e a exploração de isometrias capazes de gerar novos frisos a partir do motivo inicial dado.

Quadro 22. Recomendações pedagógicas para as tarefas *Diz-me o que vestes, dir-te-ei de onde és...*

Diz-me o que vestes, dir-te-ei de onde és...	
1./ 1.1.	Sem recomendações.
2./ 2.1.	Poderá verificar-se a tendência de os alunos se limitarem a indicar o(s) tipo(s) de simetria(s) percebido(s) no friso - por exemplo, simetria(s) de reflexão e/ou de rotação e/ou de translação -, sem descreverem essa(s) simetria(s), o que poderá tornar necessário chamar a atenção dos alunos para esse facto, que não se encontra devidamente expresso no enunciado da tarefa. Quanto aos tipos de simetrias apontados pelos alunos, a simetria de reflexão poderá ser a mais facilmente reconhecida pelos alunos, em detrimento das simetrias de rotação e de translação. Estas últimas poderão merecer especial atenção, por estarem ligadas à geração de qualquer friso.
3./ 3.1.	O verbo 'estudar', utilizado no enunciado da tarefa, poderá criar dificuldades aos alunos, por não compreenderem o seu significado no contexto, e, consequentemente, não entenderem o que seria esperado que fizessem na tarefa. O reconhecimento da existência de simetrias de reflexão e de rotação no motivo da *chaqueta* em causa poderá ser alcançável para a maioria dos alunos, no entanto, poderá verificar-se, tal como na tarefa anterior, a tendência de os alunos se limitarem a indicar o(s) tipo(s) de simetria(s) percebido(s) no motivo, sem o(s) descreverem, principalmente no que toca às simetrias de rotação, tornando necessário chamar a atenção dos alunos para isso.
3.2.	Sem recomendações.
3.3.	Poderão verificar-se más interpretações dos alunos relativamente ao que é solicitado na tarefa. Em vez da caracterização da(s) isometria(s) necessária(s) para formar o padrão em causa, a exploração dos alunos poderá recair sobre a identificação do(s) tipo(s) de simetria(s) presente(s) nesse padrão, denotando uma repetição do trabalho proposto em tarefas anteriores. Diante disso, recomenda-se monitorizar o trabalho dos alunos, a fim de evitar essa e outras más interpretações.
3.4.	É recomendável procurar desafiar os alunos a refletirem acerca do significado da expressão 'transformar o motivo 1 no motivo 2', utilizada no enunciado da tarefa, já que a tendência que se poderá verificar é a de os alunos pressuporem que, para tal ocorrer, será suficiente que os motivos se encontrem na mesma posição. Para além disso, é aconselhável chamar a atenção dos alunos para a descrição das isometrias que permitem operar a transformação do motivo 1 no motivo 2, sendo que, para isso, poderá ser útil para os alunos lerem as sugestões dadas na nota da tarefa.
4./ 4.1.	Sem recomendações.
5./ 5.1.	O enunciado da tarefa poderá não se revelar efetivo para os alunos no que refere ao que é esperado que eles façam na tarefa, e, nesse sentido, poderá ser necessário ter que providenciar esclarecimentos. Ao nível da resolução da tarefa, será conveniente reforçar a necessidade de os alunos incluírem os elementos que permitem caracterizar a(s) isometria(s) que gera(m) cada friso.
5.2.	A criação do friso 'apenas com simetrias de rotação e reflexão deslizante' poderá revelar-se mais acessível para os alunos do que a criação do friso 'com os quatro tipos de simetrias', o que se poderá refletir no sucesso da resolução. Poderão emergir erros, entre os quais a modificação do motivo inicial, tornando recomendável, num momento de partilha e em plenário, a revisão do conceito de friso, e a exploração de frisos que satisfaçam cada uma das condições dadas. Poderá ser conveniente alertar os alunos para o facto de não terem que usar todo o espaço de resolução.
6./ 6.1.	Sem recomendações.
6.2.	Sem recomendações.
6.3.	A partir das justificações apresentadas pelos alunos para fundamentarem as suas respostas, poderá ser proveitoso promover um momento de partilha e discussão em plenário, no âmbito do qual seria recomendável incentivar os alunos a debaterem a validade dos argumentos partilhados, com vista à clarificação do conteúdo subjacente à tarefa, que são os pontos fixos das isometrias.
6.4.	A exploração da tarefa poderá criar bastantes dificuldades aos alunos em geral, em virtude da pouca informação facultada na tarefa, que torna essencial o fornecimento de pistas e sugestões aos alunos, com o objetivo de eles se manterem envolvidos na resolução tarefa, sem desistirem.
7./ 7.1.	Sem recomendações.
7.2.	Poderá ser conveniente advertir os alunos para a existência de duas questões a explorar na tarefa.

8.3. Limitações do estudo

O desenvolvimento do presente trabalho de investigação contemplou algumas limitações, a definir. Uma primeira limitação do estudo diz respeito ao reduzido número de grupos folclóricos que integraram a investigação. A esse respeito, cabe informar que a recolha de dados realizada no terreno incluiu mais dois grupos, a saber: o *Rancho Folclórico da Casa do Povo de Vilarandelo* - grupo do concelho de Valpaços (distrito de Vila Real), na região do Norte de Portugal -, e a *Asociación Rebulir Cultura Tradicional* - grupo da cidade de Ourense, na Galiza. No entanto, o enorme volume de dados que resultou da recolha levou à opção de não integração desses dois grupos na esfera da análise e interpretação de resultados, tornando a dimensão da amostra mais reduzida. Outra limitação do estudo está relacionada com a implementação pedagógica das tarefas matemáticas criadas, que foi extremamente afetada pelo contexto de pandemia causado pela COVID-19. A implementação sofreu um grande atraso e teve lugar, apenas, numa escola do Norte de Portugal, não tendo sido possível concretizar a implementação em nenhuma escola da Galiza - facto que reduziu a dimensão e a diversidade da amostra. Ademais, a própria aplicação das tarefas em contexto de sala de aula esteve sujeita a várias regras de controlo da pandemia, que também acabaram por condicionar e influenciar a recolha de dados realizada nesta parte da investigação.

8.4. Sugestões para futuras investigações

Em fase de conclusão do presente trabalho de investigação, entende-se que o seu desenvolvimento fez emergir uma área de investigação etnomatemática ainda muito pouco explorada, mas que demonstra grandes potencialidades. O *estudo etnomatemático sobre danças folclóricas* despertou para inúmeros aspetos matemáticos presentes na coreografia, na música e nos acessórios de várias danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza, e que acreditamos que deverão ser aprofundados e ampliados em futuras investigações, que contribuam para desvendar a riqueza e diversidade desse elemento do folclore. A *construção e implementação pedagógica de tarefas matemáticas* a partir do estudo etnomatemático realizado sobre danças folclóricas estabeleceu uma nova possibilidade de aproveitamento, para o ensino, de aspetos matemáticos escondidos na tradição de culturas populares. Cremos que o material produzido poderá abrir caminho para investigações futuras, orientadas no sentido da conceção e utilização, em sala de aula, de exemplos etnomatemáticos inspirados em danças folclóricas de todo o mundo. Trata-se de um campo vasto, até hoje ainda pouco explorado na investigação em Educação Matemática, mas que merece ser aprofundado, em prol da investigação, do ensino da matemática, e da valorização da cultura.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P. (1999). Investigações em geometria na sala de aula. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 153-167). Grupo "Matemática Para Todos" e Associação de Professores de Matemática (APM).

Abrantes, P., Ponte, J. P., Fonseca, H., & Brunheira, L. (1999). Introdução. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 1-12). Grupo "Matemática Para Todos" e Associação de Professores de Matemática (APM).

Albanese, V. (2014). *Etnomatemáticas en artesanías de trenzado y concepciones sobre las matemáticas en la formación docente* [Tese de doutoramento]. Universidad de Granada, Granada, Espanha.

Albanese, V. (2015). La danza del Malambo y las matemáticas. In C. C. Sahelices, J. A. M. Villagrá, & M. A. Moreira (Coords.), *VII Encuentro internacional sobre aprendizaje significativo. V Encuentro iberoamericano sobre investigación en enseñanza de las Ciencias* (pp. 959-965). Universidad de Burgos.

Albanese, V., & Perales, F. J. (2014). Microproyectos etnomatemáticos sobre danzas folclóricas: Aprender matemática desde el contexto con maestros en formación. *Profesorado: Revista de currículum y formación del profesorado*, *18*(3), 457-472.

Amado, J. (2014a). Introdução. In J. Amado (Coord.), *Manual de investigação qualitativa em educação* (2a ed., pp. 11-16). Imprensa da Universidade de Coimbra.

Amado, J. (2014b). IIª parte - Estratégias gerais de investigação: Natureza e fundamentos. In J. Amado (Coord.), *Manual de investigação qualitativa em educação* (2a ed., pp. 117-120). Imprensa da Universidade de Coimbra.

Amado, J. (2014c). IIIª parte - Técnicas de recolha de dados. In J. Amado (Coord.), *Manual de investigação qualitativa em educação* (2a ed., pp. 205-206). Imprensa da Universidade de Coimbra.

Amado, J. (2014d). IVª parte - Procedimentos de análise de dados. In J. Amado (Coord.), *Manual de investigação qualitativa em educação* (2a ed., pp. 299-300). Imprensa da Universidade de Coimbra.

Amado, J., & Silva, L. C. (2014). Os estudos etnográficos em contextos educativos. In J. Amado (Coord.), *Manual de investigação qualitativa em educação* (2a ed., pp. 145-168). Imprensa da Universidade de Coimbra.

Ascher, M. (1998). *Ethnomathematics: A multicultural view of mathematical ideas.* Chapman & Hall/CRC Press.

Ascher, M., & Ascher, R. (1981). *Mathematics of the Incas: Code of the Quipu*. Dover Publications.

Ascher, M., & Ascher, R. (1986). Ethnomathematics. *History of Science*, *24*, 125-144.

Ascher, M., & D'Ambrosio, U. (1994). Ethnomathematics: A dialogue. *For the Learning of Mathematics*, *14*(2), 36-43.

Atkinson, P., Coffey, A., Delamont, S., Lofland, J., & Lofland, L. (2002). Editorial Introduction. In P. Atkinson, A. Coffey, S. Delamont, J. Lofland, & L. Lofland, *Handbook of ethnography* (pp. 1-7). Sage Publications.

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, *90*(4), 449-466.

Barbeau, E. (2009). Introduction. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom: The 16th ICMI study* (Chapter 0, pp. 1-9). Springer.

Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo* (L. A. Reto & A. Pinheiro, Tradução). Edições 70.

Barton, B. (2004). Dar sentido à etnomatemática: Etnomatemática fazendo sentido. In J. P. M. Ribeiro, M. C. S. Domite, & R. Ferreira (Orgs.), *Etnomatemática: Papel, valor e significado* (pp. 39-74). Zouk.

Barton, B. (2008). Prefácio. In P. Palhares (Coord.), *Etnomatemática: Um olhar sobre a diversidade cultural e a aprendizagem matemática* (pp. 7-10). Edições Húmus.

Baztán, A. A. (1995). Etnografía. In A. A. Baztán (Ed.), *Etnografía: Metodología cualitativa en la investigación sociocultural* (pp. 3-20). Marcombo.

Becker, J. P., & Selter, C. (1996). Elementary school practices. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (Chapter 14, pp. 511-564). Kluwer Academic Publishers.

Belcastro, S., & Schaffer, K. (2011). Dancing mathematics and the mathematics of dance. *Math Horizons*, *18*(3), 16-20. https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.4169/194762111X12954578042939.

Bell, A. (1993). Principles for the design of teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(1), 5-34.

Bishop, A. J. (1986). Mathematics education as cultural induction. *Nieuwe Wiskrant*, *6*(1), 27-32.

Bishop, A. J. (1988). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(2), 179-191.

Bishop, A. J. (1991). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education.* Kluwer Academic Publishers.

Bishop, A. J. (1994). Cultural conflicts in mathematics education: Developing a research agenda. *For the Learning of Mathematics*, *14*(2), 15-18.

Bishop, A. J. (2010). Directions and possibilities for research on mathematics and culture, in relation to mathematics education: A personal view. In M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 338-342). PME.

Bispo, R., Ramalho, G., & Henriques, N. (2008). Tarefas matemáticas e desenvolvimento do conhecimento matemático no 5.º ano de escolaridade. *Análise Psicológica*, *26*(1), 3-14.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto Editora.

Borba, M. C. (1988). Etnomatemática: O homem também conhece o mundo de um ponto de vista matemático. *Bolema*, *3*(5), 19-34.

Borba, M. C. (1990). Ethnomathematics and education. *For the Learning of Mathematics*, *10*(1), 39-43.

Borba, M. C. (1993). Etnomatemática e a cultura da sala de aula. *Educação Matemática em Revista*, *1*(1), 43-58.

Brandão, C., Ribeiro, J., & Costa, A. P. (2021). Análise de dados. In S. P. Gonçalves, J. P. Gonçalves, & C. G. Marques (Coords.), *Manual de investigação qualitativa: Conceção, análise e aplicações* (pp. 127-158). Pactor - Edições de Ciências Sociais, Forenses e da Educação.

Breen, S., & O'Shea, A. (2010). Mathematical thinking and task design. *Irish Mathematical Society Bulletin*, *66*, 39-49. https://www.maths.tcd.ie/pub/ims/bull66/ME6601.pdf.

Brophy, J. E., & Good, T. L. (1986). Teacher behavior and student achievement. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed., pp. 328-375). Macmillan Publishing Company.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Edição e Tradução). Kluwer Academic Publishers.

Brown, C. A., & Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 209-239). Macmillan Publishing Company.

Bussi, M. G. B., Gade, S., Janvier, M., Kahane, J., Matsko, V. J., Maschietto, M., Ouvrier-Buffet, C., & Saul, M. (2009). Mathematics in context: Focusing on students. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor

(Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom: The 16th ICMI study* (Chapter 5, pp. 171-203). Springer.

Campos, R. (2011). Imagem e tecnologias visuais em pesquisa social: Tendências e desafios. *Análise Social*, *XLVI*(199), 237-259.

Caria, T. H. (2014). O uso do método etnográfico no estudo do trabalho e do conhecimento profissionais. In L. L. Torres & J. A. Palhares (Orgs.), *Metodologia de investigação em ciências sociais da educação* (pp. 39-63). Edições Húmus.

Carpenter, T. P. (1990). Teaching as problem solving. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (Vol. 3, pp. 187-202). National Council of Teachers of Mathematics.

Carvalho, H. M., Bassanezi, R. C., & Pompeu Junior, G. (2015). A mathematical modeling applied to the study of two forms of artistic representation. *Modelling in Science Education and Learning, 8*(1), 5-21. https://doi.org/10.4995/msel.2015.2336.

Christiansen B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (Chapter 7, pp. 243-307). Reidel Publishing Company.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6th ed.). Routledge.

Collier, J. (1957). Photography in anthropology: A report on two experiments. *American Anthropologist, 59*(5), 843-859.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *The Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 15-42.

Conrado, A. L. (2004). Etnomatemáticas: Sobre a pluralidade nas significações do programa etnomatemática. In J. P. M. Ribeiro, M. C. S. Domite, & R. Ferreira (Orgs.), *Etnomatemática: Papel, valor e significado* (pp. 75-87). Zouk.

Costa, C., Catarino, P., & Nascimento, M. M. (2008a). Tanoeiros em Trás-os-Montes e Alto Douro: Saberes (etno)matemáticos. In P. Palhares (Coord.), *Etnomatemática: Um olhar sobre a diversidade cultural e a aprendizagem matemática* (pp. 193-233). Edições Húmus.

Costa, C., Catarino, P., & Nascimento, M. M. (2008b). Latoeiros em Trás-os-Montes e Alto Douro: Saberes (etno)matemáticos. In P. Palhares (Coord.), *Etnomatemática: Um olhar sobre a diversidade cultural e a aprendizagem matemática* (pp. 235-264). Edições Húmus.

Costa, C., Nascimento, M. M. S., Catarino, P., & Fernandes, R. (2010). Trabalhando os jugos em Trás-os-Montes e Alto Douro. *Quadrante*, *19*(1), 93-114.

Costa, L. F. M. (2009). *Los tejidos y las tramas matemáticas. El tejido Ticuna como soporte para la enseñanza de las matemáticas* [Dissertação de mestrado]. Universidad Nacional de Colombia, Letícia, Colômbia.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas: Teoria e prática* (2a ed.). Edições Almedina.

Cruz, A. O. (2010). *Simetria da dança: Vestígios matemáticos na prática da dança esportiva em cadeira de rodas* [Dissertação de mestrado]. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Rio Grande do Norte, Brasil.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *5*(1), 44-48.

D'Ambrosio, U. (1986). Socio-cultural bases for mathematical education. In M. Carss (Ed.), *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education* (pp. 1-6). Springer.

D'Ambrosio, U. (1991). As matematicas e o seu entorno socio-cultural. In M. G. Blanco (Coord.), *Memorias del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 70-82). UNESCO.

D'Ambrosio, U. (1993). Etnomatemática: Um programa. *Educação Matemática em Revista*, *1*(1), 5-11.

D'Ambrosio, U. (1995). Recent theses & dissertations on ethnomathematics. *ISGEm Newsletter*, *11*(1). https://web.nmsu.edu/~pscott/isgem111.htm.

D'Ambrosio, U. (1998). *Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar e conhecer* (5a ed.). Editora Ática.

D'Ambrosio, U. (1999). *Educação para uma sociedade em transição*. Papirus Editora.

D'Ambrosio, U. (2000). A historiographical proposal for non-western mathematics. In H. Selin (Ed.), *Mathematics across cultures: The history of non-western mathematics* (pp. 79-92). Kluwer Academic Publishers.

D'Ambrosio, U. (2001a). *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade*. Autêntica Editora.

D'Ambrosio, U. (2001b). General remarks on ethnomathematics. *ZDM*, *33*(3), 67-69.

D'Ambrosio, U. (2001c). What is ethnomathematics, and how can it help children in schools? *Teaching Children Mathematics*, *7*(6), 308-310.

D'Ambrosio, U. (2004a). Etnomatemática e educação. In G. Knijnik, F. Wanderer, & C. J. Oliveira (Orgs.), *Etnomatemática, currículo e formação de professores* (pp. 39-52). EDUNISC.

D'Ambrosio, U. (2004b). Posfácio. In J. P. M. Ribeiro, M. C. S. Domite, & R. Ferreira (Orgs.), *Etnomatemática: Papel, valor e significado* (pp. 285-287). Zouk.

D'Ambrosio, U. (2008). Globalização, educação multicultural e o programa etnomatemática. In P. Palhares (Coord.), *Etnomatemática: Um olhar sobre a diversidade cultural e a aprendizagem matemática* (pp. 23-46). Edições Húmus.

D'Ambrosio, U. (2012a). Mathematicians, mathematics educators and the state of the world. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, *1*(1), 5-28. https://hipatiapress.com/hpjournals/index.php/redimat/article/view/187/pdf_34.

D'Ambrosio, U. (2012b). Priorizar história e filosofia da matemática na educação. *Revista Tópicos Educacionais,* *18*(1-2), 159-175. https://periodicos.ufpe.br/revistas/topicoseducacionais/article/view/22336/18536.

D'Ambrosio, U. (2014). Las bases conceptuales del programa etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 100-107.

D'Ambrosio, U. (2017). Ethnomathematics and the pursuit of peace and social justice. *ETD - Educação Temática Digital*, *19*(3), 653-666. https://doi.org/10.20396/etd.v19i3.8648367.

D'Ambrosio, U. (2018a). Apresentação. *Educação Matemática em Revista*, *23*(60), 9-19.

D'Ambrosio, U. (2018b). The program ethnomathematics: Cognitive, anthropological, historic and socio-cultural bases. *PNA (Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática), 12*(4), 229-247. https://digibug.ugr.es/handle/10481/53007.

D'Ambrosio, U. (2019). El estado de la civilización y las matemáticas. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *100*, 205-211. https://core.ac.uk/display/287746231?utm_source=pdf&utm_medium=banner&utm_campaign=pdf-decoration-v1.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction: Entering the field of qualitative research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-17). Sage publications.

Design-Based Research Collective (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5-8.

Dias, D. (2015). *Estudo etnomatemático sobre o grupo étnico Nyaneka-nkhumbi do sudoeste de Angola. Aplicações à educação matemática* [Tese de doutoramento]. Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Dias, D., Costa, C., & Palhares, P. (2017). Sobre os cestos tradicionais manufaturados pelas mulheres Nyaneka-nkhumbi de Angola. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *10*(1), 75-87.

Doyle, W. (1986). Classroom organization and management. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed., pp. 392-431). Macmillan Publishing Company.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist*, *23*(2), 167-180. https://doi.org/10.1207/s15326985ep2302_6.

Druzzian, E. T. V. (2002). A etnomatemática nos fazeres do trabalhador. *Reflexão e Ação*, *10*(1), 65-75.

Duarte, C. G. (2004). Implicações curriculares a partir de um olhar sobre o "mundo da construção civil". In G. Knijnik, F. Wanderer, & C. J. Oliveira (Orgs.), *Etnomatemática, currículo e formação de professores* (pp. 183-202). EDUNISC.

Eglash, R. (2000). Anthropological perspectives on ethnomathematics. In H. Selin (Ed.), *Mathematics across cultures: The history of non-western mathematics* (pp. 13-22). Kluwer Academic Publishers.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed., pp. 119-161). Macmillan Publishing Company.

Esteves, M. (2006). Análise de Conteúdo. In J. A. Lima & J. A. Pacheco (Orgs.), *Fazer investigação: Contributos para a elaboração de dissertações e teses* (pp. 105-126). Porto Editora.

Fantinato, M. C. C. B. (2004). Contribuições da etnomatemática na educação de jovens e adultos: Algumas reflexões iniciais. In J. P. M. Ribeiro, M. C. S. Domite, & R. Ferreira (Orgs.), *Etnomatemática: Papel, valor e significado* (pp. 171-184). Zouk.

Fasheh, M. (1982). Mathematics, culture and authority. *For the Learning of Mathematics*, *3*(2), 2-8.

Fernandes, E., & Matos, J. F. (2008). O lugar da matemática numa comunidade de prática de serralharia. In P. Palhares (Coord.), *Etnomatemática: Um olhar sobre a diversidade cultural e a aprendizagem matemática* (pp. 265-290). Edições Húmus.

Fernández, E. L. (2004). As matemáticas da tribo européia: Um estudo de caso. In G. Knijnik, F. Wanderer, & C. J. Oliveira (Orgs.), *Etnomatemática, currículo e formação de professores* (pp. 124-138). EDUNISC.

Fernández, F. R. (2011). *O Traxe Muradán.* Mongraf, S.L.

Fraguas y Fraguas, A. (1985). *El Traje Gallego.* Fundación Pedro Barrié de la Maza.

Frankenstein, M., & Powell, A. B. (1989). Empowering non-traditional college students. *Science and Nature*, (9-10), 100-112.

Freebody, P. (2003). *Qualitative research in education: Interaction and practice*. Sage Publications.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, *1*(1-2), 3-8.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel Publishing Company.

Fujii, T. (2015). The critical role of task design in lesson study. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education: An ICMI study 22* (Chapter 9, pp. 273-286). Springer.

Gardner, H. (1995). *Inteligências múltiplas: A teoria na prática* (M. A. V. Veronese, Tradução). Editora Artes Médicas.

Garland, T. H., & Kahn, C. V. (1995). *Math and Music: Harmonious connections*. Dale Seymour Publications.

Geertz, C. (1989). *A interpretação das culturas*. Editora Guanabara Koogan.

Gerdes, P. (1988a). On culture, geometrical thinking and mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(2), 137-162.

Gerdes, P. (1988b). On possible uses of traditional Angolan sand drawings in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 19*(1), 3-22.

Gerdes, P. (1989). Sobre aritmética e ornamentação geométrica: Análise de alguns cestos de índios no Brasil. *Bolema*, Edição Especial 1, 11-34.

Gerdes, P. (1990). On mathematical elements in the Tchokwe "sona" tradition. *For the Learning of Mathematics*, *10*(1), 31-34.

Gerdes, P. (1996). Etnomatemática e educação matemática: Uma panorâmica geral. *Quadrante*, *5*(2), 105-138. https://quadrante.apm.pt/article/view/22685/16752.

Gerdes, P. (2000). On mathematical ideas in cultural traditions of central and southern Africa. In H. Selin (Ed.), *Mathematics across cultures: The history of non-western mathematics* (pp. 313-343). Kluwer Academic Publishers.

Gerdes, P. (2002). Twill-plaited octagonal designs. *Visual Mathematics*, *4*(3). http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/gerdokt/index.html.

Gerdes, P. (2003a). *Níjtyubane* - Sobre alguns aspectos geométricos da cestaria Bora na Amazónia peruana. *Revista Brasileira de História da Matemática*, *3*(6), 3-22. https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/246/232.

Gerdes, P. (2003b). *Sipatsi: Cestaria e geometria na cultura Tonga de Inhambane*. Moçambique Editora.

Gerdes, P. (2004). Symmetries on mats woven by Yombe women from the Lower Congo: On the interplay between cultural values and mathematical-technical possibilities. In D. K. Washburn & D. W. Crowe (Eds.), *Symmetry comes of age: the role of pattern in culture* (pp. 81-99). University of Washington Press.

Gerdes, P. (2007a). *Etnomatemática: Reflexões sobre matemática e diversidade cultural.* Edições Húmus.

Gerdes, P. (2007b). *Lunda geometry: Mirror curves, designs, knots, polyominoes, patterns, symmetries* (2nd ed.). Lulu Enterprises.

Gerdes, P. (2007c). *Otthava: Fazer cestos e geometria na cultura Makhuwa do nordeste de Moçambique*. Lulu.com.

Gerdes, P. (2011). *Mulheres, cultura e geometria na África Austral: Sugestões para pesquisa*. NC: Lulu.

Gerdes, P. (2012a). *Etnogeometria: Cultura e o despertar do pensamento geométrico* (reedição). Instituto Superior de Tecnologias e Gestão (ISTEG).

Gerdes, P. (2012b). *Geometria sona de Angola: Matemática duma tradição africana* (Vol. 1, edição a cores). Instituto Superior de Tecnologias e Gestão (ISTEG).

Gerdes, P. (2012c). *Lusona: Recreações geométricas de África - problemas e soluções* (edição a cores). Instituto Superior de Tecnologias e Gestão (ISTEG).

Gerdes, P. (2013a). *Geometria e cestaria dos Bora na Amazónia peruana* (edição a cores). Lulu Enterprises.

Gerdes, P. (2013b). *Viver a matemática: Desenhos de Angola.* Edições Húmus.

Gerdes, P. (2014). *Geometria sona de Angola: Explorações educacionais e matemáticas de desenhos africanos na areia* (Vol. 2). Instituto Superior de Tecnologias e Gestão (ISTEG).

Gibbs, G. R. (2009). *Análise de dados qualitativos* (R. C. Costa, Tradução). Artmed Editora.

Goldenberg, E. P. (1999). Quatro funções da investigação na aula de matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35-49). Grupo "Matemática Para Todos" e Associação de Professores de Matemática (APM).

Grupo Folclórico de Vila Verde [GFVV] (2008). *Grupo Folclórico de Vila Verde - mensageiro da sua terra ontem, hoje e sempre.* ATAHCA.

Guerreiro, A. (2019). Conceções e práticas na formação inicial de professores sobre transformações geométricas. *Interacções*, *15*(50), 23-45. https://doi.org/10.25755/int.18787.

Hart, E. W. (2014). Pedagogical content analysis of mathematics as a framework for task design. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 337-346). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054v3.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(5), 524-549.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 65-97). Macmillan Publishing Company.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1993). Instructional tasks, classroom discourse, and students' learning in second-grade arithmetic. *American Educational Research Journal*, *30*(2), 393-425.

Holding, J. (1991). *The investigations book: A resource book for teachers of mathematics*. Cambridge University Press.

Holton, D., Cheung, K., Kesianye, S., Losada, M. F., Liekin, R., Makrides, G., Meissner, H., Sheffield, L., & Yeap, B. (2009). Teacher development and mathematical challenge. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom: The 16th ICMI study* (Chapter 6, pp. 205-242). Springer.

Horoks, J., & Robert, A. (2007). Tasks designed to highlight task-activity relationships. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 279-287. https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-007-9040-1.

Johnson, R. B., & Christensen, L. (2014). *Educational research: Quantitative, qualitative, and mixed approaches* (5th ed.). Sage Publications.

Kadijević, D., & Marinković, B. (2006). Challenging mathematics by "Archimedes". *The Teaching of Mathematics*, *9*(1), 31-39. http://www.teaching.math.rs/vol/tm913.pdf.

Knijnik, G. (1993a). An ethnomathematical approach in mathematical education: A matter of political power. *For the Learning of Mathematics*, *13*(2), 23-25.

Knijnik, G. (1993b). O saber popular e o saber acadêmico na luta pela terra. *Educação Matemática em Revista*, *1*(1), 28-42.

Knijnik, G. (1996). *Exclusão e resistência: Educação matemática e legitimidade cultural*. Editora Artes Médicas.

Knijnik, G. (2001). Educação matemática, exclusão social e política do conhecimento. *Bolema*, *14*(16), 12-28.

Knijnik, G. (2002). Ethnomathematics: Culture and politics of knowledge in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *22*(1), 11-14.

Knijnik, G. (2004). Itinerários da etnomatemática: Questões e desafios sobre o cultural, o social e o político na educação matemática. In G. Knijnik, F. Wanderer, & C. J. Oliveira (Orgs.), *Etnomatemática, currículo e formação de professores* (pp. 19-38). EDUNISC.

Knijnik, G. (2008). Educação matemática e diversidade cultural: Matemática camponesa na luta pela terra. In P. Palhares (Coord.), *Etnomatemática: Um olhar sobre a diversidade cultural e a aprendizagem matemática* (pp. 131-156). Edições Húmus.

Knijnik, G. (2010a). Gelsa Knijnik's research on ethnomathematics. In M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 413-415). PME.

Knijnik, G. (2010b). Studying people's out of school mathematical practices. In M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 318-322). PME.

Knijnik, G. (2012). Differentially positioned language games: Ethnomathematics from a philosophical perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(1-2), 87-100.

Knijnik, G. (2014). Etnomatemáticas en movimiento: Perspectiva etnomatemática, sus formulaciones teóricas y ejemplificaciones. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 119-131.

Knijnik, G., Wanderer, F., Giongo, I. M., & Duarte, C. G. (2012). *Etnomatemática em movimento* (3a ed.). Autêntica Editora.

Knoblauch, H., & Tuma, R. (2011). Videography: An interpretative approach to video-recorded micro-social interaction. In E. Margolis & L. Pauwels (Eds.), *The sage handbook of visual research methods* (pp. 414-430). Sage Publications.

Krainer, K. (1993). Powerful tasks: A contribution to a high level of acting and reflecting in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(1), 65-93.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29-63.

Latorre, L. D. (2008). *Danzas religiosas: ¿Alguna relación con la matemática?* [Tese de graduação]. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.

Lave, J., Smith, S., & Butler, M. (1990). Problem solving as an everyday practice. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (Vol. 3, pp. 61-81). National Council of Teachers of Mathematics.

Laxe, C. A. (2003). *O saber do pobo: Enciclopedia do traxe, danza e música tradicionais.* Edicións Xerais de Galicia.

Leikin, R. (2004). Towards high quality geometrical tasks: Reformulation of a proof problem. In M. J. Hoines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th international conference for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 209-216). Bergen University College.

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(3), 349-371.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (2005). *Investigação qualitativa: Fundamentos e práticas* (2a ed.). Instituto Piaget.

Liljedahl, P., Chernoff, E., & Zazkis, R. (2007). Interweaving mathematics and pedagogy in task design: A tale of one task. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 239-249. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9047-7.

Marafon, A. C. M. (2004). A mais-valia no processo de potenciação da força de trabalho. In J. P. M. Ribeiro, M. C. S. Domite, & R. Ferreira (Orgs.), *Etnomatemática: Papel, valor e significado* (pp. 89-102). Zouk.

Martínez, M. P. (2019). *A dança como contexto para a aprendizagem da matemática* [Tese de doutoramento]. Universidade de Évora, Évora, Portugal.

Mason, J. (1998). Enabling teachers to be real teachers: Necessary levels of awareness and structure of attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *1*(3), 243-267. https://link.springer.com/article/10.1023%2FA%3A1009973717476.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. St Albans: Tarquin Publications.

Mbusi, N. (2011). *An investigation into the use of traditional Xhosa dance to teach mathematics: A case study in a grade 7 class* [Tese de mestrado]. Rhodes University, Grahamstown, África do Sul.

Mello, P. H. (1901). *Danças de Portugal.* Avis.

Ministério da Educação e Ciência [MEC] (2012). *Metas curriculares de matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação e Ciência.

Ministério da Educação e Ciência [MEC] (2013). *Programa de matemática para o Ensino Básico*. Ministério da Educação e Ciência.

Misura, C. (2016). *Um olhar sobre os modelos matemáticos da música* [Dissertação de mestrado]. Universidade Federal do ABC, Santo André, SP, Brasil.

Monteiro, A., Orey, D. C., & Domite, M. C. S. (2004). Etnomatemática: Papel, valor e significado. In J. P. M. Ribeiro, M. C. S. Domite, & R. Ferreira (Orgs.), *Etnomatemática: Papel, valor e significado* (pp. 13-37). Zouk.

Moreira, D. (2008). Educação matemática para a sociedade multicultural. In P. Palhares (Coord.), *Etnomatemática: Um olhar sobre a diversidade cultural e a aprendizagem matemática* (pp. 47-65). Edições Húmus.

Moreira, D. (2008). Educação matemática para a sociedade multicultural. In P. Palhares (Coord.), *Etnomatemática: Um olhar sobre a diversidade cultural e a aprendizagem matemática* (pp. 47-65). Edições Húmus.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. National Council of Teachers of Mathematics.

Oliveira, H., Ponte, J. P., Santos, L., & Brunheira, L. (1999a). Os professores e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 97-110). Grupo "Matemática Para Todos" e Associação de Professores de Matemática (APM).

Oliveira, H., Segurado, M. I., & Ponte, J. P. (1999b). Tarefas de investigação em matemática: Histórias da sala de aula. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 189-206). Grupo "Matemática Para Todos" e Associação de Professores de Matemática (APM).

Oliveras, M. L. (2000). Etnomatemáticas en las artesanías. In M. L. Oliveras (Coord.), *Matemáticas en la sociedad: Reflexiones sobre las matemáticas en la vida cotidiana. Programa universitario para alumnos mayores* (pp. 51-64). Repro Digital.

Palhares, P. (2008). A etnomatemática: Um desafio para os nossos dias. In P. Palhares (Coord.), *Etnomatemática: Um olhar sobre a diversidade cultural e a aprendizagem matemática* (pp. 11-21). Edições Húmus.

Palhares, P. (2010). Studying artifacts in order to find out people's ways of thinking mathematically. In M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 323-327). PME.

Palhares, P. (2012). Mathematics education and ethnomathematics. A connection in need of reinforcement. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, *1*(1), 79-92. https://www.hipatiapress.com/hpjournals/index.php/redimat/article/view/193/pdf_32.

Palhares, P., Gomes, A., Carvalho, P., & Cebolo, V. (2009). From teacher education to teacher practice: A gap affecting the implementation of tasks. In B. Clarke, B. Grevholm, & R. Millman (Eds.), *Tasks in primary mathematics teacher education* (Vol. 4, pp. 275-284). Springer.

Pea, R. D. (2004). The social and technological dimensions of scaffolding and related theoretical concepts for learning, education, and human activity. *The Journal of the Learning Sciences*, *13*(3), 423-451.

Pérez, C. G. (2005). *Historia do Traxe Galego.* Xunta de Galicia, Consellería de Cultura e Deporte, Dirección Xeral de Creación e Difusión Cultural.

Pólya, G. (1995). *A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático* (2a reimpressão, H. L. Araújo, Tradução e Adaptação). Editora Interciência. (Trabalho original publicado em 1945).

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Associação de Professores de Matemática (APM).

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM*, *39*(5-6), 419-430. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0054-z.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H., & Varandas, J. (1999). Investigando as aulas de investigações matemáticas. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 133-151). Grupo "Matemática Para Todos" e Associação de Professores de Matemática (APM).

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares.* Instituto de Inovação Educacional.

Porfírio, J., & Oliveira, H. (1999). Uma reflexão em torno das tarefas de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 111-118). Grupo "Matemática Para Todos" e Associação de Professores de Matemática (APM).

Powell, A. B., & Frankenstein, M. (1997a). Introduction. In A. B. Powell & M. Frankenstein (Eds.), *Ethnomathematics: Challenging eurocentrism in mathematics education* (pp. 1-4). State University of New York Press.

Powell, A. B., & Frankenstein, M. (1997b). Section I: Ethnomathematical knowledge. In A. B. Powell & M. Frankenstein (Eds.), *Ethnomathematics: Challenging eurocentrism in mathematics education* (pp. 5-11). State University of New York Press.

Powell, A. B., & Frankenstein, M. (1997c). Section II: Uncovering distorted and hidden history of mathematical knowledge. In A. B. Powell & M. Frankenstein (Eds.), *Ethnomathematics: Challenging eurocentrism in mathematics education* (pp. 51-59). State University of New York Press.

Powell, A. B., & Frankenstein, M. (1997d). Section III: Considering interactions between culture and mathematical knowledge. In A. B. Powell & M. Frankenstein (Eds.), *Ethnomathematics: Challenging eurocentrism in mathematics education* (pp. 119-127). State University of New York Press.

Powell, A. B., & Frankenstein, M. (1997e). Section IV: Reconsidering what counts as mathematical knowledge. In A. B. Powell & M. Frankenstein (Eds.), *Ethnomathematics: Challenging eurocentrism in mathematics education* (pp. 193-200). State University of New York Press.

Powell, A. B., & Frankenstein, M. (1997f). Section V: Ethnomathematical praxis in the curriculum. In A. B. Powell & M. Frankenstein (Eds.), *Ethnomathematics: Challenging eurocentrism in mathematics education* (pp. 249-259). State University of New York Press.

Powell, A. B., & Frankenstein, M. (1997g). Section VI: Ethnomathematical research. In A. B. Powell & M. Frankenstein (Eds.), *Ethnomathematics: Challenging eurocentrism in mathematics education* (pp. 321-330). State University of New York Press.

Powell, A. B., & Temple, O. L. (2004). Construindo pontes entre passado e presente: Etnomatemática, o *papiro matemático de Ahmes* e estudantes urbanos. In J. P. M. Ribeiro, M. C. S. Domite, & R. Ferreira (Orgs.), *Etnomatemática: Papel, valor e significado* (pp. 267-284). Zouk.

Powell, A. B., Borge, I. C., Fioriti, G. I., Kondratieva, M., Koublanova, E., & Sukthankar, N. (2009). Challenging tasks and mathematics learning. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom: The 16th ICMI study* (Chapter 4, pp. 133-170). Springer.

Prestage, S., & Perks, P. (2007). Developing teacher knowledge using a tool for creating tasks for the classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 381-390. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9049-5.

Protasov, V., Applebaum, M., Karp, A., Kašuba, R., Sossinsky, A., Barbeau, E., & Taylor, P. (2009). Challenging problems: Mathematical contents and sources. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom: The 16th ICMI study* (Chapter 1, pp. 11-51). Springer.

Rebolo, A. (2021). Observação. In S. P. Gonçalves, J. P. Gonçalves, & C. G. Marques (Coords.), *Manual de investigação qualitativa: Conceção, análise e aplicações* (pp. 87-101). Pactor - Edições de Ciências Sociais, Forenses e da Educação.

Resnick, L. B. (1990). Treating mathematics as an ill-structured discipline. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (Vol. 3, pp. 32-60). National Council of Teachers of Mathematics.

Ribas, T. (1974). *Danças do Povo Português.* Ministério da Educação Nacional. Direção Geral da Educação Permanente.

Ribas, T. (1983). *Danças populares portuguesas*. Instituto de Cultura e Língua Portuguesa e Ministério da Educação.

Ribeiro, J. P. M., & Ferreira, R. (2004). Educação escolar indígena e etnomatemática: Um diálogo necessário. In J. P. M. Ribeiro, M. C. S. Domite, & R. Ferreira (Orgs.), *Etnomatemática: Papel, valor e significado* (pp. 149-160). Zouk.

Rodrigues, A. I., Alzás, T., & Costa, A. P. (2021). Análise de dados visuais e redes sociais com apoio de *software*. In S. P. Gonçalves, J. P. Gonçalves, & C. G. Marques (Coords.), *Manual de investigação qualitativa: Conceção, análise e aplicações* (pp. 159-191). Pactor - Edições de Ciências Sociais, Forenses e da Educação.

Rodríguez, G. C. (2012). La jota y sus variantes coreográficas y dialectales en Galicia. *Jentilbaratz, Cuadernos de Folklore*, (14), 245-252.

Romberg, T. A., & Carpenter, T. P. (1986). Research on teaching and learning mathematics: Two disciplines of scientific inquiry. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed., pp. 850-873). Macmillan Publishing Company.

Rosa, M., & Gavarrete, M. E. (2016). Polysemic interactions between ethnomathematics and culturally relevant pedagogy. In M. Rosa, U. D'Ambrosio, D. C. Orey, L. Shirley, W. V. Alangui, P. Palhares, & M. E. Gavarrete (Eds.), *Current and Future Perspectives of Ethnomathematics as a Program* (pp. 23-30). Springer Open.

Rosa, M. & Shirley, L. (2016). In guise of conclusion. In M. Rosa, U. D'Ambrosio, D. C. Orey, L. Shirley, W. V. Alangui, P. Palhares, & M. E. Gavarrete (Eds.), *Current and Future Perspectives of Ethnomathematics as a Program* (pp. 39-40). Springer Open.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2005). Raízes históricas do programa etnomatemática. *Educação Matemática em Revista*, *12*(18-19), 5-14.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2006). Abordagens atuais do programa etnomatemática: Delineando um caminho para a ação pedagógica. *Boletim de Educação Matemática*, *19*(26), 19-48.

Ruthven, K. (2015). Taking design to task: A critical appreciation. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education: An ICMI study 22* (Chapter 11, pp. 311-320). Springer.

Sánchez, A. I. P. (2003). *Acercamiento a la etnomatemática* [Trabalho final de licenciatura]. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colômbia.

Sardella, O. (2004). La geometría en las danzas folklóricas argentinas. En L. D. Moreno (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 17, pp. 801-806). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Sarmento, M. J. (2002). O Estudo de caso etnográfico em educação. In N. Zago, M. P. Carvalho, & R. A. T. Vilela (Orgs.), *Itinerários de pesquisa: Perspectivas qualitativas em sociologia da educação* (pp. 137-182). Rio de Janeiro: DP&A Editora. https://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/36757/1/Etnografia.pdf.

Sarmento, M. J. (2014). Metodologias visuais em ciências sociais. In L. L. Torres & J. A. Palhares (Orgs.), *Metodologia de investigação em ciências sociais da educação* (pp. 197-218). Edições Húmus.

Scandiuzzi, P. P. (2004). O etnocídio, a etnomatemática e a perda científica. In J. P. M. Ribeiro, M. C. S. Domite, & R. Ferreira (Orgs.), *Etnomatemática: Papel, valor e significado* (pp. 161-168). Zouk.

Schaffer, K., Stern, E., & Kim, S. (2016). *Math dance with Dr. Schaffer and Mr. Stern: Whole-body math and movement activities for the K-12 classroom*. MoveSpeakSpin.

Schaffer, K., Thie, J., & Williams, K. (2018). The mathematical center of attention, its attributes and motion analysis in dance choreography. In E. Torrence, B. Torrence, C. H. Séquin, K. Fenyvesi, & C. Kaplan (Eds.), *Proceedings of Bridges 2018: Mathematics, music, art, architecture, culture* (pp. 273-280). Tessellations Publishing. http://www.archive.bridgesmathart.org/2018/bridges2018-273.pdf.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Journal of Education*, *196*(2), 1-38. https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/002205741619600202 (Trabalho original publicado em 1992).

Selin, H. (2000). Introduction. In H. Selin (Ed.), *Mathematics across cultures: The history of non-western mathematics* (pp. xvii-xx). Kluwer Academic Publishers.

Shirley, L., & Palhares, P. (2016). Ethnomathematics and its diverse pedagogical approaches. In M. Rosa, U. D'Ambrosio, D. C. Orey, L. Shirley, W. V. Alangui, P. Palhares, & M. E. Gavarrete (Eds.), *Current and Future Perspectives of Ethnomathematics as a Program* (pp. 13-17). Springer Open.

Silva, A., Veloso, E., Porfírio, J., & Abrantes, P. (1999). O currículo de matemática e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 69-85). Grupo "Matemática Para Todos" e Associação de Professores de Matemática (APM).

Silva, C. G. (2021). Investigação documental. In S. P. Gonçalves, J. P. Gonçalves, & C. G. Marques (Coords.), *Manual de investigação qualitativa: Conceção, análise e aplicações* (pp. 103-123). Pactor - Edições de Ciências Sociais, Forenses e da Educação.

Skovsmose, O. (2004). *Foreground* dos educandos e a política de obstáculos para aprendizagem. In J. P. M. Ribeiro, M. C. S. Domite, & R. Ferreira (Orgs.), *Etnomatemática: Papel, valor e significado* (pp. 103-122). Zouk.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(5), 344-350.

Sousa, F., Palhares, P., & Sarmento, M. (2008). Calafates na Baía de Câmara de Lobos. In P. Palhares (Coord.), *Etnomatemática: Um olhar sobre a diversidade cultural e a aprendizagem matemática* (pp. 157-191). Edições Húmus.

Sousa, F. (2016). *Matemática fora e dentro da escola: Pescadores e calafates* [Tese de doutoramento]. Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Stanic, G. M. A., & Kilpatrick, J. (1990). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (Vol. 3, pp. 1-22). National Council of Teachers of Mathematics.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, *33*(2), 455-488.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4). 268-265.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. Free Press.

Stillman, G., Cheung, K., Mason, R., Sheffield, L., Sriraman, B., & Ueno, K. (2009). Challenging mathematics: Classroom practices. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom: The 16th ICMI study* (Chapter 7, pp. 243-283). Springer.

Sullivan, P., Knott, L., & Yang, Y. (2015). The relationships between task design, anticipated pedagogies, and student learning. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education: An ICMI study 22* (Chapter 3, pp. 83-114). Springer.

Swan, M. (2007). The impact of task-based professional development on teachers' practices and beliefs: A design research study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 217-237. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9038-8.

Thie, J. A. (2018). *Dance mathematics: Rhythms & dances; analysis & synthesis*. Createspace Independent Publishing Platform.

Thompson, P. W., Carlson, M. P., & Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teachers' development of coherent mathematical meanings. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 415-432. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9054-8.

Tudella, A., Ferreira, C., Bernardo, C., Pires, F., Fonseca, H., Segurado, I., & Varandas, J. (1999). Dinâmica de uma aula com investigações. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 87-96). Grupo "Matemática Para Todos" e Associação de Professores de Matemática (APM).

UNESCO (2009). Relatório mundial da UNESCO: Investir na diversidade cultural e no diálogo intercultural. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000184755_por.

Vieira, L., Palhares, P., & Sarmento, M. (2008). Etnomatemática: Estudo de elementos geométricos presentes na cestaria. In P. Palhares (Coord.), *Etnomatemática: Um olhar sobre a diversidade cultural e a aprendizagem matemática* (pp. 291-315). Edições Húmus.

Vilela, P. F. V. (2012). *A etnomatemática nos lenços dos namorados* [Dissertação de mestrado]. Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Vygotsky, L. S. (1998). *A formação social da mente: O desenvolvimento dos processos psicológicos superiores* (6a ed., J. C. Neto, L. S. M. Barreto, & S. C. Afeche, Tradução). Martins Fontes Editora. (Trabalho original publicado em 1978).

Wanderer, F. (2004). Educação de jovens e adultos, produtos da mídia e etnomatemática. In G. Knijnik, F. Wanderer, & C. J. Oliveira (Orgs.), *Etnomatemática, currículo e formação de professores* (pp. 253-271). EDUNISC.

Wang, F., & Hannafin, M. J. (2005). Design-based research and technology-enhanced learning environments. *Educational Technology Research and Development*, *53*(4), 5-23.

Washburn, D. K., & Crowe, D. W. (1988). *Symmetries of culture: Theory and practice of plane pattern analysis.* University of Washington Press.

Washburn, D. K., & Crowe, D. W. (1988). Symmetries of culture: Theory and practice of plane pattern analysis. University of Washington Press.

Wasilewska, K. (2012). Mathematics in the world of dance. In R. Bosch, D. McKenna, & R. Sarhangi (Eds.), *Proceedings of Bridges 2012: Mathematics, music, art, architecture, culture* (pp. 453-456). Phoenix, AZ: Tessellations Publishing. http://www.archive.bridgesmathart.org/2012/bridges2012-453.pdf.

Watson, A. (2005). Dance and mathematics: engaging senses in learning. *Australian Senior Mathematics Journal, 19*(1), 16-23.

Watson, A., & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 205-215. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9059-3.

Watson, A., & Ohtani, M. (2015). Themes and issues in mathematics education concerning task design: Editorial introduction. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education: An ICMI study 22* (Chapter 1, pp. 3-15). Springer.

Watson, A., Ohtani, M., Ainley, J., Frant, J. B., Doorman, M., Kieran, C., Leung, A., Margolinas, C., Sullivan, P., Thompson, D., & Yang, Y. (2014). Introduction. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 7-13). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054v3.

White, L. A. (1947). The locus of mathematical reality: An anthropological footnote. *Philosophy of Science, 14*(4), 289-303.

Wilder, R. L. (1950). The cultural basis of mathematics. In L. M. Graves, E. Hille, P. A. Smith, & O. Zariski (Eds.). *Proceedings of International Congress of Mathematicians* (Vol. 1, pp. 258-271). American Mathematical Society.

Wilder, R. L. (1981). *Mathematics as a cultural system*. Pergamon Press.

Willis, P., & Trondman, M. (2008). Manifesto pela etnografia. *Educação, Sociedade e Culturas*, (27), 211-220. https://www.fpce.up.pt/ciie/revistaesc/ESC27/27_arquivo.pdf.

Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *17*(2), 89-100. https://acamh.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x.

Wood, L. (2000). Communicating mathematics across culture and time. In H. Selin (Ed.), *Mathematics across cultures: The history of non-western mathematics* (pp. 1-12). Kluwer Academic Publishers.

Woods, P. (1987). *La escuela por dentro: La etnografía en la investigación educativa.* Ediciones Paidós.

Zaslavsky, C. (1991). World cultures in the mathematics class. *For the Learning of Mathematics*, *11*(2), 32-36.

Zaslavsky, O., Chapman, O., & Leikin, R. (2003). Professional development of mathematics educators: Trends and tasks. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (Part 2, Chapter 24, pp. 877-917). Kluwer Academic Publishers.

ANEXOS

Anexo 1 - Inquérito para avaliação das tarefas matemáticas pelo painel de revisores

INQUÉRITO DE AVALIAÇÃO DAS TAREFAS

I. Classificações

Para cada afirmação, selecione, na escala de 1 a 6, a classificação que considera mais adequada a cada tarefa. A opção "sem opinião" também se encontra válida.

Escala: 1 (Discordo completamente); 2 (Discordo bastante); 3 (Discordo); 4 (Concordo); 5 (Concordo bastante); 6 (Concordo completamente).

	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	Tarefa 4	Tarefa 5	Tarefa 6	Tarefa 7	Tarefa 8	Tarefa 9	Tarefa 10
1. O conteúdo das tarefas está cientificamente correto.	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)
2. O conteúdo das tarefas respeita as orientações dos documentos curriculares de referência.	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)
3. A linguagem das tarefas está correta do ponto de vista científico.	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)
4. A linguagem utilizada nas tarefas está adequada ao público-alvo.	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)
5. As tarefas são desafiadoras para os alunos, estimulando a capacidade de resolução de problemas.	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)
6. As tarefas potencializam o desenvolvimento do raciocínio matemático.	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)
7. A natureza das tarefas é favorável à promoção da comunicação matemática.	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)
8. As tarefas são flexíveis, possibilitando adaptações à diversidade dos alunos.	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)
9. As tarefas favorecem a motivação e o envolvimento dos alunos.	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)
10. Nas tarefas, está explícita a integração de aspetos culturais, como a coreografia, a música e os trajes das danças folclóricas, e de conteúdos curriculares.	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)
11. A abordagem da coreografia, da música e dos trajes das danças folclóricas foi adequada e correta.	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)
12. Em termos do aproveitamento didático da coreografia, da música e dos trajes das danças folclóricas, as tarefas não podiam ser melhoradas.	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)	(Selecione)

INQUÉRITO DE AVALIAÇÃO DAS TAREFAS

II. Observações

O espaço que se segue destina-se à apresentação de comentários/recomendações a respeito das afirmações anteriores ou a propósito de outros aspetos que considere relevantes para a melhoria das tarefas analisadas.

Clique aqui para introduzir texto.

Anexo 2 - Consentimento informado para as turmas do 6.º ano de escolaridade

CONSENTIMENTO INFORMADO PARA PARTICIPAÇÃO EM INVESTIGAÇÃO

O meu nome é Sara Cristina Ribeiro e, no âmbito do Doutoramento em Ciências da Educação - Especialidade de Educação Matemática, da Universidade do Minho, encontro-me a desenvolver um estudo etnomatemático sobre danças folclóricas, sob a orientação do Doutor Pedro Palhares, da Universidade do Minho, e da Doutora María Jesús Salinas, da Universidade de Santiago de Compostela. Este projeto de investigação é financiado pela FCT (Fundação para a Ciência e a Tecnologia), por meio da atribuição de uma Bolsa de Doutoramento (SFRH/BD/131162/2017).

O trabalho de investigação envolve o estudo de danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza, no que refere à coreografia, à música e aos trajes, bem como a elaboração e implementação pedagógica de um conjunto de tarefas matemáticas que integram esses três elementos da dança. A implementação das tarefas na sala de aula visa a construção de um conjunto de recomendações pedagógicas, que possibilitem uma aplicação mais generalizada das tarefas (noutras salas de aula, por outros professores). A recolha de dados será realizada através de observação participante, notas de campo e gravação áudio. Não serão captadas quaisquer imagens, nem feito nenhum registo vídeo dos alunos na sala de aula. Para além disso, serão garantidos o anonimato e a confidencialidade de todos os participantes, salvaguardando-se que os dados recolhidos nas aulas serão para uso exclusivo da presente investigação.

A implementação das tarefas na turma do 6.º [redacted] decorrerá em 2 a 3 aulas de matemática e será dirigida pela própria investigadora, em colaboração direta com a professora de matemática da turma em causa.

Grata pela colaboração,

Sara Cristina Magalhães Gomes Ribeiro

Sara Cristina Magalhães Gomes Ribeiro
Doutoranda em Ciências da Educação - Especialidade de Educação Matemática
Instituto de Educação, Universidade do Minho
[redacted] / [redacted]

Eu, ____, Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a) ____, tendo lido e compreendido as informações contidas no presente documento, declaro que aceito que o meu educando participe neste trabalho de investigação, e autorizo a recolha de dados a efetuar aquando da implementação pedagógica.

____
(Assinatura do(a) Encarregado(a) de Educação)

Anexo 3 - Consentimento informado para as turmas do 7.º ano de escolaridade

CONSENTIMENTO INFORMADO PARA PARTICIPAÇÃO EM INVESTIGAÇÃO

O meu nome é Sara Cristina Ribeiro e, no âmbito do Doutoramento em Ciências da Educação - Especialidade de Educação Matemática, da Universidade do Minho, encontro-me a desenvolver um estudo etnomatemático sobre danças folclóricas, sob a orientação do Doutor Pedro Palhares, da Universidade do Minho, e da Doutora María Jesús Salinas, da Universidade de Santiago de Compostela. Este projeto de investigação é financiado pela FCT (Fundação para a Ciência e a Tecnologia), por meio da atribuição de uma Bolsa de Doutoramento (SFRH/BD/131162/2017).

O trabalho de investigação envolve o estudo de danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza, no que refere à coreografia, à música e aos trajes, bem como a elaboração e implementação pedagógica de um conjunto de tarefas matemáticas que integram esses três elementos da dança. A implementação das tarefas na sala de aula visa a construção de um conjunto de recomendações pedagógicas, que possibilitem uma aplicação mais generalizada das tarefas (noutras salas de aula, por outros professores). A recolha de dados será realizada através de observação participante, notas de campo e gravação áudio. Não serão captadas quaisquer imagens, nem feito nenhum registo vídeo dos alunos na sala de aula. Para além disso, serão garantidos o anonimato e a confidencialidade de todos os participantes, salvaguardando-se que os dados recolhidos nas aulas serão para uso exclusivo da presente investigação.

A implementação das tarefas na turma do 7.º [redacted] decorrerá em 1 a 2 aulas de matemática e será dirigida pela própria investigadora, em colaboração direta com a professora de matemática da turma em causa.

Grata pela colaboração,

Sara Cristina Magalhães Gomes Ribeiro

Sara Cristina Magalhães Gomes Ribeiro
Doutoranda em Ciências da Educação - Especialidade de Educação Matemática
Instituto de Educação, Universidade do Minho
[redacted] / [redacted]

- -

Eu, ____, Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a) ____, tendo lido e compreendido as informações contidas no presente documento, declaro que aceito que o meu educando participe neste trabalho de investigação, e autorizo a recolha de dados a efetuar aquando da implementação pedagógica.

____
(Assinatura do(a) Encarregado(a) de Educação)

Anexo 4 - Consentimento informado para as turmas do 8.º ano de escolaridade

CONSENTIMENTO INFORMADO PARA PARTICIPAÇÃO EM INVESTIGAÇÃO

O meu nome é Sara Cristina Ribeiro e, no âmbito do Doutoramento em Ciências da Educação - Especialidade de Educação Matemática, da Universidade do Minho, encontro-me a desenvolver um estudo etnomatemático sobre danças folclóricas, sob a orientação do Doutor Pedro Palhares, da Universidade do Minho, e da Doutora María Jesús Salinas, da Universidade de Santiago de Compostela. Este projeto de investigação é financiado pela FCT (Fundação para a Ciência e a Tecnologia), por meio da atribuição de uma Bolsa de Doutoramento (SFRH/BD/131162/2017).

O trabalho de investigação envolve o estudo de danças folclóricas do Norte de Portugal e da Galiza, no que refere à coreografia, à música e aos trajes, bem como a elaboração e implementação pedagógica de um conjunto de tarefas matemáticas que integram esses três elementos da dança. A implementação das tarefas na sala de aula visa a construção de um conjunto de recomendações pedagógicas, que possibilitem uma aplicação mais generalizada das tarefas (noutras salas de aula, por outros professores). A recolha de dados será realizada através de observação participante, notas de campo e gravação áudio. Não serão captadas quaisquer imagens, nem feito nenhum registo vídeo dos alunos na sala de aula. Para além disso, serão garantidos o anonimato e a confidencialidade de todos os participantes, salvaguardando-se que os dados recolhidos nas aulas serão para uso exclusivo da presente investigação.

A implementação das tarefas na turma do 8.º [redacted] decorrerá em 2 a 3 aulas de matemática e será dirigida pela própria investigadora, em colaboração direta com a professora de matemática da turma em causa.

Grata pela colaboração,

Sara Cristina Magalhães Gomes Ribeiro

Sara Cristina Magalhães Gomes Ribeiro
Doutoranda em Ciências da Educação - Especialidade de Educação Matemática
Instituto de Educação, Universidade do Minho
[redacted] / [redacted]

Eu, ____, Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a) ____, tendo lido e compreendido as informações contidas no presente documento, declaro que aceito que o meu educando participe neste trabalho de investigação, e autorizo a recolha de dados a efetuar aquando da implementação pedagógica.

____
(Assinatura do(a) Encarregado(a) de Educação)