

Cinemática de Mecanismos

Paulo Flores
J.C. Pimenta Claro

Guimarães – 2007

I have always thought that the substitution of the internal combustion machine for the horse marked a very gloomy milestone in the progress of mankind.

Winston Churchill

PREFÁCIO

A Cinemática é a área da Teoria de Máquinas e Mecanismos onde se estudam as características dos movimentos dos corpos independentemente, das causas que o provocam. Definir cinematicamente um mecanismo, ou formular a lei do movimento de um corpo, consiste em determinar, para cada instante, a posição, a velocidade e aceleração em relação a um referencial previamente definido.

A principal motivação para a realização deste livro deveu-se à lacuna existente no mercado de livros em língua portuguesa, sobre a Cinemática de Mecanismos, que pudesse ser utilizada como texto de apoio nas actividades científico-pedagógicas de disciplinas no domínio da Teoria de Máquinas e Mecanismos.

As matérias abordadas neste livro estão divididas em cinco capítulos. No capítulo primeiro é feita uma breve e imprescindível introdução à temática deste trabalho. O segundo capítulo inclui uma descrição completa de alguns mecanismos planares elementares neste domínio. Nos capítulos três, quatro e cinco são apresentados os diferentes métodos de análise de mecanismos articulados, no que diz respeito à posição, à velocidade e à aceleração, respectivamente. Este livro inclui três anexos, em que são apresentados alguns elementos oportunos e importantes, nomeadamente o cálculo vectorial, a determinação de centros instantâneos de rotação e, ainda, um glossário de termos específicos.

Trata-se, assim, de um texto a apoio a professores e estudantes do ensino superior, que poderá ser também útil para aqueles que se interessam pelas temáticas relacionadas com a Cinemática de Mecanismos.

Guimarães, Janeiro de 2007

Paulo Flores

A machine is a combination of resistant bodies, so interconnected that by applying force or motion to one or more of those bodies, some of those bodies are caused to perform desired work accompanied by desired motions.

Franz Reuleaux

ÍNDICE

Prefácio	i
Índice.....	iii
1. Introdução	1
1.1. Nota Histórica	1
1.2. Sistemas Mecânicos: Máquinas e Mecanismos	9
1.3. Noções Básicas sobre Mecanismos.....	15
1.4. Tipos de Movimentos.....	18
1.5. Juntas Cinemáticas	22
1.6. Graus de Liberdade ou Mobilidade de Um Mecanismo	26
2. Mecanismos Elementares	33
2.1. Tipos de Transformação de Movimento nos Mecanismos	33
2.2. Mecanismo de Quatro Barras ou Quadrilátero Articulado	34
2.2.1. Descrição do Mecanismo de Quatro Barras.....	34
2.2.2. Regra de Grashof	34
2.2.3. Ângulo de Transmissão e Vantagem Mecânica.....	36
2.2.4. Fases de Ponto Morto e Ponto de Mudança.....	39
2.2.5. Aplicações do Mecanismo de Quatro Barras.....	43
2.3. Mecanismo Biela-Manivela com Corrediça	47
2.4. Mecanismo de Scotch Yoke.....	52
2.5. Mecanismos de Retorno Rápido	56
2.5.1. Generalidades	56
2.5.2. Mecanismo de Avanço.....	56
2.5.3. Mecanismo de Whitworth.....	57
2.5.4. Mecanismo de Manivela Deslocada	57
2.5.5. Mecanismo do Limador	58
2.6. Mecanismos Geradores de Trajectórias Rectilíneas	60
2.6.1. Generalidades	60
2.6.2. Mecanismo de Watt	60
2.6.3. Mecanismo de Scott Russel	64
2.6.4. Mecanismo de Roberts.....	65
2.6.5. Mecanismo de Chebyshev	66
2.6.6. Mecanismo de Peaucellier	67
2.7. Mecanismos de Movimento Intermitente	70
2.7.1. Generalidades	70
2.7.2. Mecanismo de Genebra ou Cruz de Malta.....	70
2.7.3. Mecanismo de Catraca ou Trinquete	73
2.7.4. Mecanismo de Engrenamento Intermitente	74
2.7.5. Mecanismo de Escape.....	74

3. Posição e Deslocamento.....	77
3.1. Definição.....	77
3.2. Deslocamento Absoluto.....	78
3.3. Deslocamento Relativo.....	79
3.4. Métodos de Análise de Posição e Deslocamento.....	82
3.5. Métodos Analíticos.....	85
3.5.1. Método Algébrico.....	85
3.5.2. Método da Notação Complexa.....	87
3.5.3. Método da Notação Matricial.....	88
3.5.4. Método da Decomposição do Movimento.....	90
3.6. Métodos Gráficos.....	92
3.7. Análise de Posição de Mecanismos Elementares.....	93
3.7.1. Mecanismo de Quatro Barras.....	93
3.7.2. Mecanismo de Corrediça.....	95
3.7.3. Mecanismo Biela-Manivela com Excentricidade.....	96
3.7.4. Mecanismo Biela-Manivela Invertido.....	97
4. Velocidade.....	101
4.1. Definição.....	101
4.2. Movimento Curvilíneo.....	104
4.3. Velocidade de um Ponto Num Sistema Móvel.....	107
4.4. Velocidade de um Corpo Rígido.....	110
4.5. Métodos Analíticos.....	112
4.5.1. Método Algébrico.....	112
4.5.2. Método da Notação Complexa.....	113
4.5.3. Método da Notação Matricial.....	114
4.5.4. Método da Decomposição do Movimento.....	115
4.5.5. Método das Projecções das Velocidades.....	117
4.6. Métodos Gráficos.....	119
4.6.1. Método do Polígono de Velocidades.....	119
4.6.2. Método da Imagem de Velocidades.....	120
4.6.3. Método dos Centros Instantâneos de Rotação.....	121
4.6.4. Método da Diferenciação Gráfica.....	122
4.7. Análise de Velocidades de Mecanismos Elementares.....	125
4.7.1. Mecanismo de Quatro Barras.....	125
4.7.2. Mecanismo de Corrediça.....	128
4.7.3. Mecanismo Biela-Manivela com Excentricidade.....	129
4.7.4. Mecanismo Biela-Manivela Invertido.....	130
5. Aceleração.....	133
5.1. Definição.....	133
5.2. Movimento Curvilíneo.....	135
5.3. Aceleração de um Ponto Num Sistema Móvel.....	138
5.4. Aceleração de um Corpo Rígido.....	142
5.5. Métodos Analíticos.....	144
5.5.1. Método Algébrico.....	144
5.5.2. Método da Notação Complexa.....	145
5.5.3. Método da Notação Matricial.....	146

5.5.4. Método da Decomposição do Movimento	147
5.6. Métodos Gráficos	150
5.6.1. Método do Polígono de Acelerações	150
5.6.2. Método da Imagem de Acelerações	151
5.6.3. Método dos Centros Instantâneos de Aceleração	152
5.6.4. Método da Diferenciação Gráfica	154
5.7. Análise de Aceleração de Mecanismos Elementares	155
5.7.1. Mecanismo de Quatro Barras	155
5.7.2. Mecanismo de Corrediça	156
5.7.3. Mecanismo Biela-Manivela com Excentricidade	157
5.7.4. Mecanismo Biela-Manivela Invertido	158
Bibliografia	161
Anexo A – Vectores	167
A.1. Generalidades	167
A.2. Tipos de Coordenadas	168
A.3. Notação Vectorial	169
A.4. Componentes de um Vector	171
A.5. Álgebra Vectorial	172
A.5.1. Adição e Subtração	172
A.5.2. Produto Externo ou Vectorial	173
A.5.3. Produto Interno ou Escalar	175
A.5.4. Multiplicação e Divisão	177
A.5.5. Rotação de Eixos no Plano	177
A.5.6. Diferenciação Vectorial	178
A.6. Resolução de Equações Vectoriais	179
A.6.1. Equações Vectoriais	179
A.6.2. Solução Gráfica	179
A.6.3. Solução Analítica	182
A.6.4. Solução de Chace	184
Anexo B – Centros Instantâneos de Rotação	189
B.1. Definição	189
B.2. Propriedades dos Centros Instantâneos de Rotação	190
B.3. Movimento Puro de Rotação	193
B.4. Rolamento Puro	195
B.5. Tipos de Centros Instantâneos de Rotação	196
B.6. Cálculo do Número de Centros Instantâneos de Rotação	197
B.7. Localização dos Centros Instantâneos de Rotação	198
B.7.1. Simples Inspeção	198
B.7.2. Teorema dos Três Centros ou de Aronhold-Kennedy	198
B.7.3. Teorema de Normal Comum	199
B.7.4. Métodos Expeditos	199
B.8. Centros Instantâneos de Aceleração	202
Anexo C – Glossário de Termos	205

1. INTRODUÇÃO

1.1. NOTA HISTÓRICA

O movimento é, seguramente, um dos mais comuns fenómenos observados quotidianamente. As rajadas de vento, as ondas do mar, a queda das folhas são alguns exemplos deste fenómeno. Por movimento, em mecânica¹, quer significar-se a variação temporal da posição de um determinado corpo no espaço relativamente a outros corpos. O movimento fica completamente definido pelo conhecimento das suas características cinemáticas e dinâmicas, como, por exemplo, a posição, a velocidade, a aceleração e a força a que um determinado corpo está sujeito.

A mecânica racional faz parte das ciências naturais e apoia-se em leis experimentais que reflectem uma classe determinada de fenómenos naturais relacionados com o movimento dos corpos materiais, isto é, as leis válidas, por exemplo, tanto para o movimento da Terra em torno do Sol, como para o movimento de um foguetão ou de um projectil. A mecânica aplicada, que é uma parte da mecânica, diz respeito à elaboração de projectos e cálculos de toda a espécie de construções, como motores, máquinas e mecanismos. O papel e a importância da mecânica residem, não só no facto de ela constituir a base científica de vários ramos da técnica moderna, mas também porque as suas leis e os seus métodos permitem estudar e explicar um grande número de fenómenos importantes do universo, contribuindo, deste modo, para o desenvolvimento da ciência em geral.

Conforme a natureza do objecto em estudo, a mecânica racional pode dividir-se nas seguintes áreas:

- *Mecânica dos corpos rígidos;*
- *Mecânica dos corpos deformáveis;*
- *Mecânica dos corpos fluidos.*

Mecânica, no sentido lato do termo, designa a ciência que tem por objectivo estudar os problemas relacionados com o movimento e o equilíbrio dos corpos, bem como das suas interacções. Em geral, a mecânica pode dividir-se em três grandes grupos, a estática², a cinemática³ e a dinâmica⁴. A estática, em que se estudam as leis de composição das forças e das condições de equilíbrio, aparece primeiramente nas obras de Arquimedes. A dinâmica, onde se que estudam as leis do movimento dos corpos materiais sujeitos a forças exteriores, surge como ciência muito mais tarde, apenas no início do século XVII. Quanto à cinemática, que trata das propriedades gerais do movimento dos corpos, só emerge como ramo da mecânica na primeira metade do século XIX.

¹ O vocábulo mecânica, do grego μηχανική (construção, máquina, invenção) apareceu pela primeira vez nas obras de Aristóteles (384-322 a.C.) que foi um dos maiores filósofos da Antiguidade.

² A estática, do grego στατικήμη, que significa em equilíbrio, é a secção da mecânica em que se estuda o equilíbrio dos corpos.

³ A palavra cinemática, etimologicamente é de origem grega κίνημα e significa algo relativo ao movimento. Este vocábulo foi utilizado pela primeira vez por Ampère (1775-1836).

⁴ O termo dinâmica provém do étimo grego δυναμικός traduzindo algo relativo a força.

A emergência e o desenvolvimento da mecânica como ciência estão intimamente ligados à história do desenvolvimento da indústria e da técnica. Na Antiguidade, quando a produção se destinava à satisfação das necessidades e exigências da construção, surgiram as primeiras máquinas simples, como a roldana, o sarilho⁵, a alavanca, o plano inclinado, entre outros.

Por volta do ano 1700 a.C. surgem, em poemas da literatura Hindu, referências a carros e rodas, o que pressupõe que então já havia mecanismos suficientemente bem conhecidos. Homero, cuja existência se situa no século X a.C., refere-se, na obra *Iliada*, à existência de uma manivela. Já no ano 260 a.C. existia na China o chamado “*carro que segue o sul*”, que era um engenhoso mecanismo montado sobre um carro que, mercê de uso de um trem epicycloidal, mantinha o braço de uma figura humana sempre apontado na direção do sul, independentemente da direção em que o carro se deslocava. Este dispositivo era utilizado como bússola pelos viajantes que atravessavam o deserto de Gobi.

Foram, contudo, os sábios gregos que primeiramente se interrogaram sobre a natureza do movimento. Aristóteles (384-322 a.C.) julgava ter descoberto uma lei da Natureza ao afirmar que “*para o mesmo volume, os corpos caem mais rapidamente quanto mais pesado são*”. Aristóteles chegou a esta conclusão errônea, provavelmente, porque não conhecia o conceito de movimento no vazio, nem teve oportunidade de realizar uma rigorosa experimentação. Aristóteles dedicou-se, ainda, ao estudo de outros assuntos puramente mecânicos, como a composição geométrica de forças e a queda dos graves. A lei de Aristóteles perdurou até meados do século XVII, quando Galileo a contrariou, restabelecendo a lei da Natureza, segundo a qual, “*todos os corpos caem para a terra com a mesma aceleração (aceleração da gravidade) independentemente do seu peso*”.

Arquimedes (287-212 a.C.) teve indubitavelmente uma transcendência superior à de Aristóteles, sendo mesmo considerado o iniciador da mecânica como ciência. Definiu o conceito de centro de gravidade de um sistema material e estabeleceu a lei da alavanca dizendo “*dêem-me um ponto de apoio e eu moverei o mundo*”. Arquimedes enunciou o princípio que tem o seu nome em mecânica dos fluidos e desenvolveu inúmeros engenhos bélicos para defesa de Siracusa de onde era originário e onde residia. É também nas obras de Arquimedes que se encontram os fundamentos da estática.

Cerca de cem anos mais tarde, a influência da cultura helénica trespassa as fronteiras da Grécia e aparece na cidade de Alexandria onde emergiam outros sábios. Hero de Alexandria (século I d.C.) foi pioneiro no uso do vapor de água como gerador de potência e escreveu diversos livros onde descreve inúmeras máquinas, tais como a prensa de parafuso e um sofisticado hodómetro que permitia medir distâncias percorridas, nomeadamente fracções de milha.

No mundo romano, tão notável na jurisprudência, apenas se vinha manifestando no domínio das matemáticas e das ciências de natureza. Cabe, contudo, citar um dos escritores romanos que fizeram registo das investigações gregas, nomeadamente, Marcus Vitruvius⁶ (85 a.C.), arquitecto do imperador Julius Caesar, autor de “*De Architectura*”, onde é feita uma resenha tecnológica da época.

O período de tempo que medeia o final do império romano e toda a idade média, isto é, pouco mais de dez séculos, é caracterizado por uma certa estagnação ao nível

⁵ Aparelho rotativo onde se enrolam fios de modo a formar meadas.

⁶ Os trabalhos desenvolvidos por Vitruvius foram de índole puramente lúdica e recreativa.

da técnica e do conhecimento científico-experimental. Apenas se regista a reprodução e a melhoria dos engenhos já existentes, porém, com uma quase total carência de criatividade mecânica.

Com efeito, o grande incremento no desenvolvimento da mecânica remonta ao início do período renascentista que começa no século quatrocento e vai até ao Romantismo (século XVII). O renascimento foi um momento histórico no ressurgimento de todas as áreas do saber e é caracterizado pelo aparecimento de grandes génios, alguns dos quais centraram a sua atenção em problemas mecânicos. Uma das grandes personalidades é, sem dúvida, Leonardo da Vinci⁷ (1452-1519), cujos famosos desenhos de máquinas foram fonte inspiradora de inúmeros autores ao longo dos tempos. Nos seus trabalhos podem encontrar-se desenhos de guias, dispositivos de respirar debaixo de água, mecanismos de transformação movimento, entre tantos outros. Leonardo da Vinci realizou algumas experiências relativas ao estudo do movimento, não sendo, contudo, publicadas em tempo útil, razão pela qual a influência dos conhecimentos deste cientista é praticamente nula.

Gerolamo Cardan (1501-1576) inventou a junta de transmissão com o seu nome, e estudou a trajectória de um ponto de uma circunferência que roda dentro de outra circunferência cujo diâmetro é o dobro do da primeira.

A estática, que estava praticamente esquecida desde Arquimedes, experimentou novo e decisivo desenvolvimento graças aos trabalhos de Simon Stevin (1548-1620) que publicou no início do século XVII a obra intitulada “*Hypomnemata Mathematica*” na qual estudou o equilíbrio no plano inclinado e em polias, empregando o método do paralelogramo para efectuar a decomposição de forças.

A primeira grande contribuição para o estudo do movimento foi, sem sombra de dúvida, a do italiano Galileo Galilei (1564-1642) que publicou as suas teorias no livro intitulado “*Discorsi e Dimostrazioni Matematiche*”, onde constam as leis do movimento numa forma embrionária e sobre as quais, posteriormente, Newton baseou o seu trabalho. Galileo, defensor da teoria heliocêntrica, pode ser considerado como o iniciador da dinâmica. Um dos seus principais estudos foi o da queda dos graves, formulou as leis do movimento uniformemente acelerado e conduziu estudos sobre a trajectória de um projectil lançado horizontalmente e sujeito à acção da gravidade. Galileo enunciou ainda a lei do sincronismo do pêndulo⁸, estabelecendo que o período do movimento é independente da amplitude e da massa. Galileo usou a decomposição de forças para estudos estáticos e definiu o conceito de momento de uma força.

⁷ As obras de Leonardo da Vinci encontram-se dispersas pelo planeta, como no Museu da História da Ciência em Florença, Itália, e na colecção particular de William (Bill) Gates, co-fundador de empresa *Microsoft* que é considerado, actualmente, o homem mais rico do mundo.

⁸ Galileo, durante uma cerimónia religiosa, usou a própria pulsação cardíaca para cronometrar observações sobre o movimento pendular do turíbulo. Galileo estudou também alguns assuntos teológicos e, com isso, provocou a ira dos mais conservadores, que levaram o Papa Pio V a declarar a teoria heliocêntrica de Copérnico como heresia. Isso forçou Galileo a um silêncio por mais uma década. Em 1632, já no pontificado de um novo Papa, Urbano VIII, acreditou poder publicar, sem restrições, um novo livro em que duas personagens conversam, uma defendendo as antigas teorias, outra as de Copérnico. Pelo conteúdo desta obra, Galileo foi levado a julgamento no tribunal da Santa Inquisição. Em 1633, com quase 70 anos, foi obrigado a negar as suas ideias, sob pena de ser queimado vivo. Conta-se que, após declarar-se arrependido, teria virado rosto de lado e murmurado em voz baixa “*Eppui si muove!*”, frase cujo significado pode ser facilmente deduzido como “*Mas, apesar disso tudo, a verdade é que ela se move!*”. Morreu cego e condenado pela igreja. Somente 341 anos após a sua morte, em 1983, a mesma igreja, revendo o processo, decidiu-se pela absolvição.

É já em pleno século XVII que a mecânica atinge uma certa maturidade como ciência. É nesta época que surgem alguns dos grandes gurus da mecânica, tais como, Descartes, Pascal, Huygens, Newton, entre outros. René Descartes (1596-1650) formulou correctamente a lei de inércia. Christian Huygens (1629-1695), baseado no trabalho de Galileo, desenvolveu o relógio de pêndulo e investigou sobre o pêndulo cicloidal ou tautócrono⁹. Isaac Newton (1642-1727) é, sem dúvida, dos cientistas mais importantes e reconhecidos do século XVII. Newton, estabeleceu, com genial argúcia, as três leis fundamentais do movimento, conhecidas como leis de Newton, publicadas na obra *“Principia Mathematica Philosophiae Naturae”*. A primeira lei – lei da inércia – enuncia-se da seguinte maneira: *“um corpo, sem qualquer influência exterior, permanece no seu estado de repouso ou de movimento rectilíneo e uniforme, enquanto não for obrigado a modificar esse estado pela acção de forças aplicadas”*. A segunda lei – lei fundamental da dinâmica – indica que *“o produto da massa de um corpo pela aceleração que lhe imprime uma dada força é igual, em módulo, a essa força, sendo o sentido da aceleração o mesmo que o da força”*. A terceira lei – lei da igualdade da acção e da reacção – estabelece que *“dois corpos exercem um sobre o outro forças de igual magnitude, com a mesma direcção mas em sentidos opostos”*. As leis de Newton foram confirmadas experimentalmente no decorrer do avanço tecnológico. Pode, assim, aceitar-se que os conhecimentos adquiridos no domínio da mecânica, e baseados nas leis do movimento de Newton, são exactos e qualquer engenheiro se pode basear nelas com confiança, durante a sua actividade criadora¹⁰. Newton distinguiu ainda, de forma definitiva, a diferença entre massa e peso e enunciou a lei da gravitação universal.

De entre os escassos cientistas que acompanharam e prosseguiram os trabalhos de Newton destacam-se Bernoulli, Euler, D’Alembert e Lagrange. Jean Bernoulli (1661-1748) interveio activamente no desenvolvimento da mecânica dos fluidos e estudou o princípio dos trabalhos virtuais como princípio geral da estática. Desenvolveu também o conceito de centro instantâneo de rotação no movimento plano. Leonhard Euler (1707-1783), matemático suíço e discípulo de Bernoulli, estabeleceu que o movimento plano de um sólido indeformável se pode descrever como a decomposição de uma translação e de uma rotação em torno de um eixo. Esta lei é actualmente conhecida como o teorema de Chasles. Este princípio, aplicado à análise de velocidades e acelerações, constitui a génese da análise gráfica de mecanismos. Euler desenvolveu métodos de resolução de problemas de dinâmica do ponto e do sólido por integração de equações diferenciais. Em reconhecimento do seu trabalho, os ângulos que descrevem o movimento de rotação do corpo rígido são denominados ângulos de Euler. James Watt (1736-1819) dedicou grande parte do seu trabalho ao estudo do movimento, abordando o problema da trajectória de um ponto de uma biela do quadrilátero articulado. Estes estudos permitiram-lhe projectar e conceber a máquina a vapor. Gaspard Monge (1756-1818) contribuiu para a reestruturação sistemática do ensino técnico superior. Foi fundador da *“l’Ecole*

⁹ Tautócrono é um pêndulo em que o período das oscilações é independente da amplitude.

¹⁰ O posterior desenvolvimento da ciência, nomeadamente por Albert Einstein (1878-1955), veio mostrar que, para velocidades próximas da velocidade da luz (≈ 300.000 km/s), o movimento dos corpos é regido pelas leis da mecânica relativista e o movimento dos micro-elementos (electrões, positrões, etc.) pelas leis da mecânica quântica. Estas leis limitaram-se a precisar o domínio de aplicação da mecânica clássica ou de Newton. Embora o trabalho de Einstein tenha tido um profundo efeito na mecânica, em geral, a mecânica clássica persiste em ser válida para a maioria das aplicações onde as velocidades em jogo são inferiores à velocidade da luz.

Polytechnique de Paris”, onde propôs um curso sobre elementos de máquinas. Jean D’Alembert (1717-1783), que enunciou o famoso princípio com o seu nome, deu também um importante contributo para o desenvolvimento da mecânica, com particular incidência na resolução de problemas de dinâmica. Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), com base no princípio de D’Alembert e no princípio dos trabalhos virtuais, desenvolveu um método geral de resolução analítica de problemas dinâmicos. Na Rússia, os trabalhos do cientista e escritor Mikhail Lomonossov (1711-1765) tiveram profunda influência no desenvolvimento da mecânica.

Durante o século XIX, os conhecimentos que constituem hoje a ciência de máquinas e mecanismos foram consolidados. A geometria e análise matemática contribuíram notavelmente para este progresso, motivado pelo rápido crescimento tecnológico. Os estudiosos deste século podem agrupar-se em quatro grandes escolas: a francesa (Ampère, Coriolis, Chasles), a alemã (Reuleaux, Bernemster, Mörh, Aronhold, Grübler), a inglesa (Willis, Rankine, Kennedy) e a russa (Ostrogradski, Chebyshev, Liapunov, Krylov, Jonkovski).

André Ampère (1775-1836) reconheceu a possibilidade de estudar o movimento dos mecanismos independentemente das forças que o produzem, isto não é mais do que a análise cinemática tal como hoje é conhecida. Na sua obra “*Essai sur la Philosophie des Sciences*”, Ampère utilizou pela primeira vez a palavra cinemática em ciência, traduzindo a ideia de movimento. Desde então, a cinemática começou a ser considerada como uma disciplina independente. Gustave de Coriolis (1792-1843), engenheiro de profissão e director da “*l’Ecole Polytechnique de Paris*”, mostrou, pela introdução de termos adicionais (aceleração de coriolis), a validação das leis de Newton quando os referenciais são móveis. Coriolis foi também precursor da mecânica aplicada moderna. Michel Chasles (1793-1880) generalizou o conceito de centro instantâneo de rotação e eixo instantâneo de rotação.

Franz Reuleaux (1829-1905), e mais tarde, o seu discípulo Ludwig Bernemster (1840-1927), tornaram-se conhecidos pelas técnicas gráficas de análise e de síntese que desenvolveram. Foi mesmo Reuleaux que introduziu o conceito de síntese, ainda hoje actual, e que consiste na consecução de mecanismos de modo a satisfazer determinadas especificações de projecto, sejam elas de natureza geométrica, cinemática ou dinâmica. A definição de junta cinemática superior e inferior deve-se também a Reuleaux, que é considerado, por muitos, como o pai da ciência dos mecanismos moderna. Reuleaux foi pioneiro na análise de mecanismos de forma sistemática e profunda, definindo conceitos como, elemento, junta cinemática, equivalência cinemática e inversão. Friedrich Mörh (1806-1879) foi também responsável pela introdução, na Alemanha, dos métodos gráficos para a análise de mecanismos. Siegfried Aronhold (1819-1884) enunciou, antecipando-se a Kennedy¹¹, o teorema dos três centros também conhecido por teorema de Aronhold-Kennedy¹¹, se bem que ambos tenham desenvolvido o trabalho separada e independentemente. Martin Grübler (1851-1935), professor nas Universidades de Zurique, Riga, Berlim e Dresden, estabeleceu o critério da mobilidade para mecanismos planos e espaciais.

¹¹ O teorema dos três centros ou teorema do Aronhold-Kennedy, foi primeiramente desenvolvido por Aronhold em 1872 e, posteriormente, por Kennedy em 1886. Os trabalhos de Aronhold e de Kennedy foram realizados de forma independente. Na literatura alemã é comum encontrar-se a referência a este teorema, como o teorema de Aronhold, por sua vez, na literatura anglo-saxónica encontra-se a referência ao teorema de Kennedy.

Robert Willis (1800-1875), engenheiro e antropólogo, foi professor na Universidade de Cambridge. Na sua obra “*Principles of Mechanisms*”, publicada em 1841, propôs um critério de classificação dos mecanismos de acordo com a relação de transmissão do movimento entre os elementos de entrada e de saída. William Rankine (1820-1872), professor na Universidade de Glasgow, publicou a obra “*A Manual of Machinery and Millwork*”, em 1869, em que dedicou cerca de trezentas páginas à cinemática de máquinas. Alexander Kennedy (1847-1928), professor na Universidade de Londres, formulou um algoritmo gráfico para a determinação do centro de rotação do movimento relativo entre dois elementos de um mecanismo (teorema dos três centros) e traduziu para inglês diversas obras de Reuleaux, contribuindo, deste modo, para a sua divulgação.

Já no último quartel do século XIX, na Rússia, Mikhail Ostrogradski (1801-1861) e Pafnutij Chebyshev¹² (1821-1894) deram novas orientações relativas ao estudo do movimento dos mecanismos. A principal contribuição de Chebyshev consistiu na utilização de métodos proporcionados pela Análise Matemática, em particular pelo desenvolvimento da teoria dos polinómios para ajuste de curvas. Ostrogradski desenvolveu inúmeros trabalhos sobre métodos analíticos de resolução de problemas em mecânica. Aleksander Liapunov (1857-1918) elaborou novos métodos para o estudo da estabilidade de mecanismos. Aleksei Krylov (1863-1945) desenvolveu a teoria dos navios e contribuiu imenso para o desenvolvimento da teoria dos giroscópios. Os trabalhos de Nikolas Jonkovski (1847-1921), pai da aviação russa, tiveram uma importância enorme nas investigações posteriores e permitiram aplicar os métodos da mecânica à resolução de problemas de engenharia. As ideias de Jonkovski repercutiram-se também no ensino da mecânica racional nas escolas técnicas superiores da ex-União Soviética. Pode dizer-se que a principal contribuição da escola russa consistiu na utilização dos métodos proporcionados pela Análise Matemática, na génese das técnicas de análise de mecanismos, em particular dos números duais, dos números complexos e do cálculo tensorial. Esta escola contribuiu também, e de forma ímpar, para a classificação dos mecanismos.

Com efeito, o início do século XX é, dominado pelas escolas alemã e russa. A primeira, fundada por Reuleaux e Burmeister, notabilizou-se, sobretudo, pela síntese de mecanismos planos. Enquanto que na Rússia, os discípulos de Chebyshev prosseguiram os seus trabalhos sobre o ajuste e aproximação de curvas, desenvolvendo métodos especiais e novas ferramentas matemáticas.

Até à Segunda Grande Guerra, os trabalhos desenvolvidos no campo da ciência de máquinas e dos mecanismos foram levados a cabo por investigadores europeus, cujo denominador comum era o facto de se apoiarem fortemente na geometria de mecanismos. Já durante a Segunda Guerra Mundial, surge, com grande ímpeto, a escola Norte-Americana que deu novo e decisivo impulso nas técnicas de análise e síntese de mecanismos, baseadas nos métodos algébricos e numéricos e no uso do computador. De entre outros, destacam-se Denavit e Hartenberg, cujo trabalho se baseou na notação matricial. Por seu lado, Chace obteve soluções explícitas, em forma fechada, de sistemas de equações vectoriais em duas e três dimensões, particularmente adequados à análise de cadeias cinemáticas abertas com vários graus

¹² Na literatura temática existente podem encontrar-se variações diversas no nome Chebyshev as quais decorrem da incorrecta tradução. Listam-se, a título de curiosidade, alguns exemplos: Tschebyscheff, Tchebisheff, Tchebicheff, Tchebyshew, Chebychev, entre outras. Porém, a tradução Chebyshev é a mais correntemente usada e, por isso, adoptada para o presente trabalho.

de liberdade, como as que caracterizam os modernos robôs industriais. Shigley, que desenvolveu o seu trabalho na Universidade de Michigan, é também uma das grandes referências no estudo cinemático e dinâmico de mecanismos. Freudenstein, Sandor, Erdman, Uicker nos Estados Unidos, Crossley e Hunt, na Austrália e Dijksman na Holanda, para além de muitos outros dispersos pela geografia mundial, merecem aqui uma breve referência.

Em 1965¹³, realizou-se em Varna, na Bulgária, o primeiro congresso internacional sobre a teoria de máquinas e mecanismos, em que participaram 120 engenheiros e investigadores de onze países. Em 1969 em Zaconane, na Polónia, realizou-se a assembleia inaugural da Federação Internacional para a Teoria de Máquinas e Mecanismos, IFToMM, acrónimo de *International Federation for the Theory of Machines and Mechanisms*. Em 1999, a comunidade científica decidiu alterar o nome Teoria de Máquinas e Mecanismos para Ciência de Máquinas e Mecanismos (*Machine and Mechanism Science*) face à evolução que se tinha verificado no âmbito desta disciplina científica. Em 2000, apesar do sigla IFToMM se ter mantido, por razões de identidade histórica, o significado passou a ser o de *Promotion of Research and Development Activities in Mechanism and Machine Science*.

Com efeito, após mais de cem anos de desenvolvimento da ciência de máquinas e mecanismos, vasto é o leque de técnicas, analíticas, gráficas, numéricas e empíricas, de uso geral que prestam grande auxílio na análise e síntese de mecanismos. A introdução dos computadores no estudo dos mecanismos tem um historial relativamente curto mas assaz rico. Só nos meados do século passado é que apareceram as primeiras aplicações em que os meios informáticos foram utilizados como ferramenta auxiliar, nomeadamente na indústria aeroespacial e em algumas universidades. O principal avanço verificou-se na capacidade e rapidez de processamento dos computadores, facto que veio permitir resolver problemas analíticos e, sobretudo, numéricos, que de outro modo se tornariam bastante morosos, nos casos mais simples, e impossíveis, para os casos mais complexos. Refira-se que as técnicas matemáticas de resolução de sistemas de equações lineares e não-lineares, a integração numérica já são conhecidas desde há longas décadas. Em meados dos anos setenta, do século passado, surgiram os primeiros programas computacionais com aplicação específica à cinemática e dinâmica de mecanismos. Nas duas décadas seguintes, e até aos dias de hoje, os programas comerciais foram alvo de melhoramentos significativos, nomeadamente no atinente à compatibilidade com programas de desenho auxiliado por computador, o que possibilita uma mais fácil modelação de mecanismos planos e tridimensionais. A simulação e visualização dos movimentos mais ou menos complexos tornou-se, assim, mais fácil trazendo consigo a vantagem de permitir observar e conhecer o funcionamento dos mecanismos sem necessidade de recorrer à construção de protótipos físicos.

Durante as últimas quatro décadas vários foram os programas computacionais desenvolvidos e capazes de simular, em condições realistas, mecanismos, desde os mais simples, como por exemplo os mecanismos do tipo biela-manivela com correção, até aos mais complexos, de que são exemplo os sistemas de locomoção de

¹³ Até à Segunda Grande Guerra observava-se um fenómeno meramente marginal mais significativo, que era o facto de que mais de 50% das referências bibliográficas citadas nos artigos científicos num determinado país serem de trabalhos e autores desse mesmo país, o que era uma clara manifestação da ausência de intercâmbio de informação entre as diversas escolas e investigadores. A este facto não é alheio o contexto sócio-político da época.

um qualquer ser vivo. A título de exemplo, listam-se alguns dos programas mais populares, IMP (*Integrated Mechanism Program*), LINCAGES (*Linkage INteractive Computer Analysis and Graphically Enhanced Synthesis*), ADAMS (*Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems*), DADS (*Dynamic Analysis and Design System*), KAP (*Kinematic Analysis Program*), DAP (*Dynamic Analysis Program*), Working Model, Madymo, entre muitos outros.

1.2. SISTEMAS MECÂNICOS: MÁQUINAS E MECANISMOS

Os sistemas mecânicos resultam, em geral, da associação de subsistemas estruturais e mecânicos com o objectivo de transmitir esforços e movimento. Um sistema mecânico pode ser definido como um conjunto de corpos rígidos e/ou flexíveis interligados por juntas cinemáticas e actuados por forças e momentos. As forças e momentos aplicados ao sistema podem resultar da actuação de molas, amortecedores, actuadores, ou ainda de forças exteriores, como, por exemplo, as forças gravíticas e as forças de contacto, entre outras. Os sistemas mecânicos podem incluir um conjunto de máquinas e de mecanismos mais ou menos complexos.

O estudo dos sistemas mecânicos, nomeadamente no que concerne à sua caracterização cinemática e dinâmica, baseia-se em leis conhecidas desde há longo tempo. De entre outras, salientam-se as leis do movimento de Newton-Euler, também designadas leis do movimento de translação e de rotação, leis essas que constituem a base da mecânica clássica ou newtoniana. O ramo da mecânica, denominado ciência de máquinas e mecanismos, tem como objectivo estudar as leis que regem os movimentos, quer em termos de deslocamento, velocidade, aceleração e, eventualmente, impulso, dos diversos membros que constituem os sistemas mecânicos, bem como dos esforços, forças e momentos, que esses mesmos membros transmitem.

Quando se projecta um sistema mecânico, ou quando se analisa um sistema já existente, o problema pode dividir-se em duas partes distintas. Em primeiro lugar, as dimensões de cada um dos componentes e a sua ligação devem permitir que cada um tenha o seu próprio e determinado movimento. Em segundo lugar, cada um dos componentes deve ser capaz de resistir cabalmente às solicitações que sobre ele actua. Por tudo isso, a cinemática e a dinâmica, desempenham um papel preponderante no estudo dos mecanismos e das máquinas.

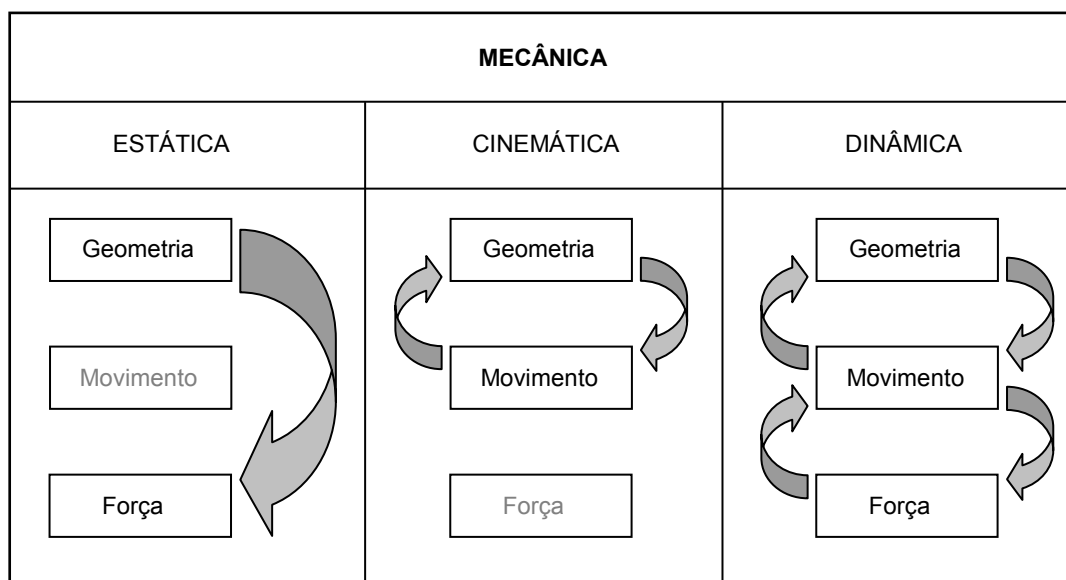


Figura 1.1 – Disciplinas que constituem a mecânica: estática, cinemática e dinâmica.

A bibliografia existente no domínio da ciência de máquinas e mecanismos não é unânime relativamente à classificação ou divisão da mecânica. Uma classificação

que se julga pertinente e abrangente é a que está apresentada na figura 1.1, e é com base neste critério de classificação que é desenvolvido o presente trabalho. Tal como se referiu anteriormente, a mecânica pode dividir-se em três grandes disciplinas, a estática, a cinemática e a dinâmica.

A estática é a disciplina em que se estudam as leis de composição das forças e as condições de equilíbrio dos corpos materiais submetidos à acção de forças e/ou momentos. O conhecimento de tais condições permite estudar a estabilidade das estruturas. Na prática, a análise estática é também válida e aplicável quando nos mecanismos as velocidades e acelerações em jogo são baixas. Para velocidades elevadas, a análise dinâmica é mais apropriada, uma vez que os efeitos de inércia das massas em movimento têm uma importância preponderante nos esforços globais desenvolvidos.

A cinemática é a área da Mecânica que se ocupa das leis do movimento dos corpos independentemente das causas que o provocam. Neste tipo de análise apenas se estudam os aspectos puramente geométricos do movimento, não sendo considerados os esforços envolvidos no processo. Definir cinematicamente um mecanismo ou formular a lei do movimento de um corpo é definir ou determinar, para cada instante, a posição, a velocidade e a aceleração, em relação a um referencial previamente definido. Por outro lado, a cinemática serve de base à dinâmica, uma vez que o estabelecimento das relações cinemáticas é necessário ao estudo do movimento dos corpos submetidos à acção de forças. Foi por isso, que face às exigências da indústria, em constante desenvolvimento, a cinemática se tornou, na primeira metade do século XIX, num ramo independente na mecânica. Em geral, dentro da cinemática devem distinguir-se a análise cinemática da síntese cinemática. A primeira, também designada cinemática directa, refere-se à determinação das características cinemáticas de um mecanismo, ao passo que a síntese cinemática, ou cinemática inversa, consiste em determinar a configuração que um mecanismo deve ter para produzir ou realizar um movimento cujas características são previamente especificadas.

Por último, a dinâmica dedica-se ao estudo da relação entre o movimento dos corpos e as acções ou causas que o provocam. Ao contrário da cinemática, na dinâmica, ao estudar-se o movimento dos corpos, consideram-se não só os esforços que actuam sobre os corpos, mas também a sua inércia. A dinâmica permite prever o movimento causado por determinadas acções ou vice-versa. O estudo dinâmico baseia-se em leis que generalizam resultados de inúmeras experiências e observações feitas sobre o movimento dos corpos. Estas leis foram sistematizadas e formuladas pela primeira vez por Newton na sua obra "*Principia Mathematica Philosophiae Naturae*", publicada em 1687.

Desde a Antiguidade que o Homem emprega máquinas e mecanismos para substituir o esforço humano, nomeadamente, na agricultura, na caça, etc., onde o Homem se foi provendo de ferramentas apropriadas. Actualmente, podem encontrar-se sistemas mecânicos (máquinas e mecanismos) nas mais variadas actividades, tais como, a agricultura, a indústria (têxtil, metalomecânica, informática, electrónica, etc.). O propósito básico de uma máquina, simples ou complexa, é o de realizar tarefas específicas de um modo mais conveniente do que aquele que pode ser feito através do uso da força muscular. Aliás, na Antiguidade as máquinas existentes (rodas, alavancas, etc.) eram utilizadas sobretudo para aumentar ou ampliar a força muscular humana.

A alavanca é, sem dúvida, a mais simples e natural das máquinas. Todos os movimentos do corpo humano são proporcionados por um sistema de alavancas (os ossos) que são accionadas pelos músculos, como ilustra esquematicamente a figura 1.2a. Um outro exemplo de uma máquina simples é uma tesoura que é constituída por duas alavancas unidas por intermédio de um pino que possibilita o movimento de rotação, como mostra a figura 1.2b.

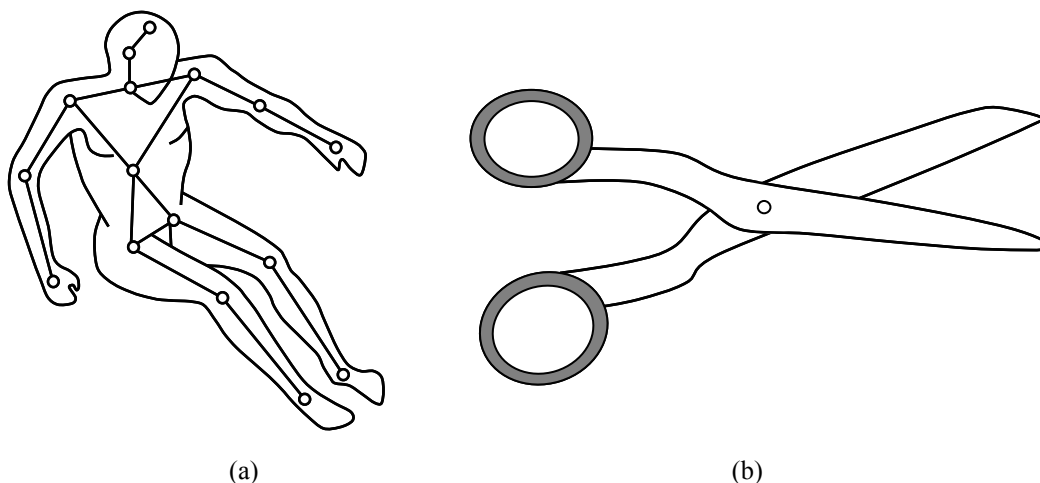


Figura 1.2 – Máquinas simples: (a) Corpo humano modelado como um conjunto de alavancas; (b) Tesoura constituída por um par de alavancas ligadas por um pino.

O automóvel é, provavelmente, o exemplo mais paradigmático de uma máquina, do qual fazem parte diversos elementos mecânicos básicos (rodas, eixos, etc.) que actuam de modo independente. De um automóvel fazem também parte vários mecanismos como, por exemplo, as suspensões, os sistemas de transmissão de movimento, entre outros. A figura 1.3 ilustra algumas das partes constituintes de um automóvel.

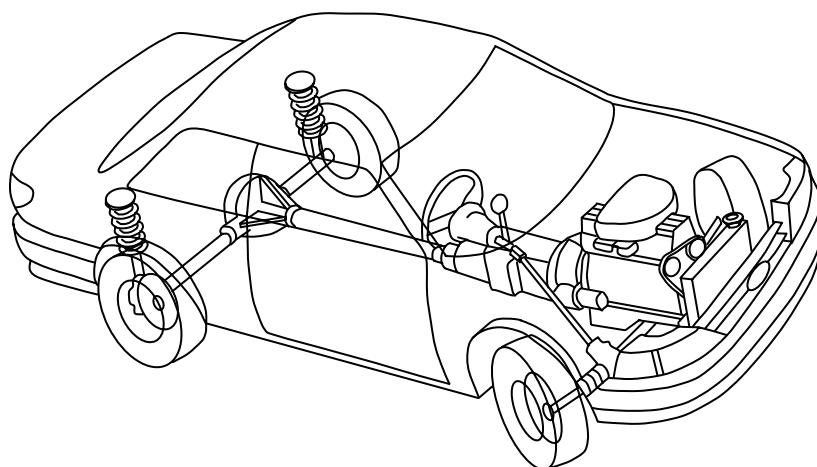


Figura 1.3 – Esboço de um automóvel e algumas partes que o constituem.

Nas oficinas mecânicas também se encontram as mais variadas máquinas (máquinas eléctricas, máquinas-ferramenta, etc.) e mecanismos. Na figura 1.4 está representado um limador, bem como o respectivo mecanismo de accionamento.

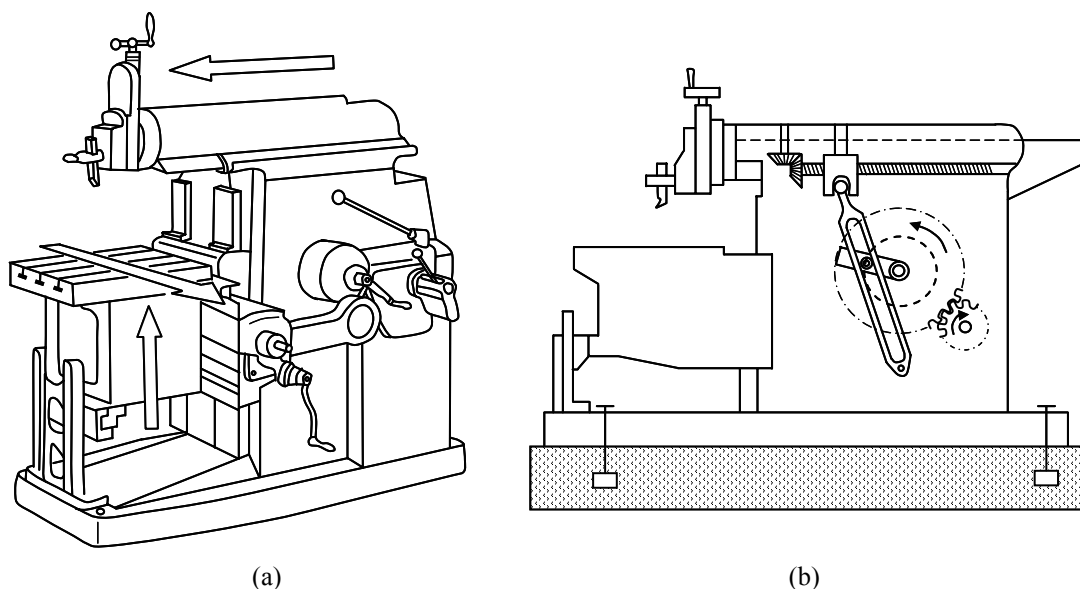


Figura 1.4 – (a) Limador; (b) Mecanismo de accionamento.

A evolução das máquinas e dos mecanismos está intimamente relacionada com a evolução sócio-económica da humanidade e vice-versa. Na Antiguidade, as máquinas existentes eram simples e em número bastante reduzido. O conceito de máquina está directamente associado à ideia de força e movimento, enquanto que mecanismo associa-se à ideia de transmitir, transformar ou controlar um determinado movimento. No atinente às definições de máquina e de mecanismo convém fazer aqui uma pequena abordagem histórica do assunto.

Hero de Alexandria, século I d.C., refere nos seus trabalhos a existência de cinco máquinas ou sistemas mecânicos simples: a roda, a alavanca, a roldana, o plano inclinado e o parafuso helicoidal. Estas máquinas eram usadas essencialmente para o levantamento de pesos¹⁴.

Vitruvius, século I d.C., define máquina como sendo “*uma combinação de materiais e componentes que têm a capacidade de movimentar pesos*”.

Galileo Galilei, 1593, sobre a definição de máquina escreveu “*uma máquina é algo que transporta pesos para um determinado local através do uso de forças*”.

Paolo Branca, 1629, descreve máquina através das suas características físicas inerentes, “*uma máquina consiste num motor, incorre num determinado custo e depende da destreza de um operador*”.

Leupold, 1724, acerca da descrição de máquinas e mecanismos refere “*têm por objectivo modificar o movimento*”.

Lanz e Bétancourt, 1808, consideram “*elementos de máquinas, os dispositivos que podem alterar o movimento; as máquinas mais complicadas são apenas a combinação de máquinas capazes de proporcionar movimentos simples*”.

Robert Willis, 1841, sobre mecanismo e máquina diz o seguinte: “*eu utilizo a palavra mecanismo para a combinação de maquinaria quando apenas são consideradas as relações que governam o movimento e máquina para um dispositivo modificador de força*”.

¹⁴ O livro de Hero de Alexandria foi traduzido para árabe com título *O livro sobre a elevação de pesos pesados*; a tradução para grego do mesmo livro originou o título *O elevador*.

Segundo Guilio, 1846, “*máquina é todo o dispositivo cujo propósito é receber a acção de um motor e modificar a velocidade e direcção do movimento*”.

Para Reuleaux¹⁵, 1875, “*máquina é uma combinação de corpos indeformáveis constrangidos de tal modo que produzem um determinado efeito como resposta a um movimento prescrito*”.

Masi, 1897, chama “*mecanismo a uma cadeia cinemática em que um dos componentes é fixo, máquina é um mecanismo que produz trabalho*”.

Königs, 1905, diz “*uma máquina é reconhecida como uma montagem de corpos resistentes que estão constrangidos reciprocamente e sob a acção de forças naturais. Se as forças estão ausentes, o restante da máquina consiste em corpos e constrangimentos. Isto é um mecanismo*”.

Hartenberg e Denavit, 1964, referem que “*o termo máquina está associado ao uso e transformação de força, e embora o movimento aconteça numa máquina, a ideia de força é dominante. Mecanismo, por outro lado, definitivamente suplica a ideia de movimento, e apesar das forças estar presentes, elas são relativamente pequenas e pouco importantes quando comparadas com a exploração do movimento*”.

A Federação Internacional para Teoria de Máquinas e Mecanismos, IFToMM, em 1991, define máquina como “*um sistema mecânico que desempenha uma tarefa específica e transfere e transforma movimento e força*”, e mecanismo como “*um sistema de corpos que converte movimento, e força, de um ou vários corpos em movimentos constrangidos por outros corpos e forças*”.

As definições de máquina apresentadas excluem os computadores como máquinas legítimas. Frolov, 1987, define máquina como “*algo que transforma potência, materiais e informação para substituir ou simplificar trabalho físico ou intelectual*”.

Ainda nesta senda, Nilsson, 1998, escreve “*para muitas pessoas, uma máquina é uma coisa bastante estólida. A palavra evoca imagens de rodas dentadas, o assobiar das máquinas a vapor e o soar das partes metálicas ... Hoje em dia, o computador tem expandido a nossa noção do que pode ser uma máquina*”.

Com efeito, é oportuno fazer, de forma clara e objectiva, a distinção entre mecanismo e máquina. Mecanismo pode definir-se como sendo uma combinação ou colecção de vários corpos ligados entre si com o intuito de transmitir ou transformar um determinado movimento. Por seu lado, máquina é todo o sistema mecânico formado por diversos elementos cujo objectivo é transmitir ou transformar um determinado movimento e produzir trabalho útil. Ao conceito de máquina está, geralmente, associada uma fonte de energia. Donde se observa que os mecanismos são, em geral, uma parte integrante das máquinas. Os mecanismos, podem, contudo, existir *de per si* num sistema mecânico sem que este possa ser considerado uma máquina, como é exemplo um relógio mecânico. A diferença fundamental entre uma máquina e um mecanismo decorre do facto de que numa máquina a transmissão de movimento está associada a transformação de energia em trabalho, ao passo que num mecanismo apenas é transmitido movimento.

Na literatura anglo-saxónica faz-se a distinção entre *linkage* e *mechanism*. O termo *linkage* refere-se a um sistema articulado, ou seja, um conjunto de barras ligadas entre si, ao passo que o termo *mechanism* também diz respeito a um sistema articulado, no entanto uma das barras é fixa.

¹⁵ Numa nota de rodapé, Reuleaux, no livro *Kinematics of Machinery*, expõe dezassete definições diferentes de máquina. Kennedy ao traduzir a obra de Reuleaux inclui sete novas definições e aborda o assunto com algum detalhe.

Deve chamar-se a atenção que uma estrutura é, à semelhança de uma máquina, um sistema mecânico cujos componentes estão ligadas entre si de modo a serem capazes de suportar e transmitir esforços ou solicitações sem que, contudo, haja movimento relativo entre as suas partes. Com efeito, pode, de um modo simples, associar-se aos conceitos de estrutura, mecanismo e máquina cada uma das três disciplinas da mecânica apresentadas anteriormente. Assim, estrutura está para a estática, como a cinemática está para um mecanismo e a dinâmica está para uma máquina. A figura 1.5 traduz e sintetiza, de forma gráfica, esta ideia.

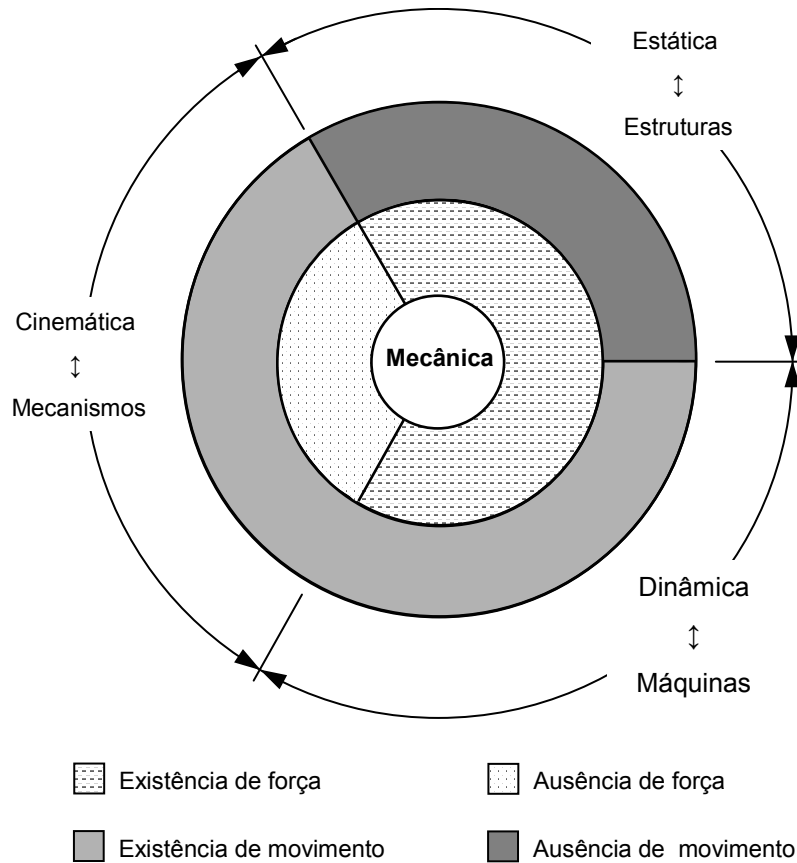


Figura 1.5 – Disciplinas da mecânica: estática, cinemática e dinâmica.

1.3. NOÇÕES BÁSICAS SOBRE MECANISMOS

Nos mecanismos, os componentes ou elementos susceptíveis de transmitir força e movimento são denominados ligações ou barras. Para que o movimento possa ser transmitido, finalidade básica de um mecanismo, os elementos devem ser ligados entre si. O conjunto das superfícies que estabelece o contacto entre as diversas barras de um mecanismo designa-se junta cinemática ou par cinemático. Os diferentes tipos de componentes e de juntas cinemáticas que constituem os mecanismos serão objecto de estudo mais detalhado nas secções seguintes.

A título elucidativo, na figura 1.6 ilustra-se o mecanismo biela-manivela com corredeira, o qual é constituído por quatro elementos, o fixe¹⁶ (1), a manivela (2), a biela (3) e a corredeira (4), e que estão unidos por três juntas de rotação (R_{12} , R_{23} , R_{34}) e uma junta de translação (T_{14}).

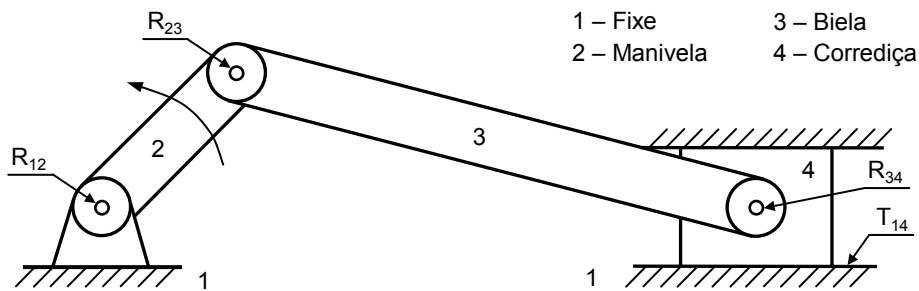


Figura 1.6 – Mecanismo biela-manivela com corredeira.

As ligações ou barras podem ser binárias, ternárias, quaternárias, etc., consoante possuam dois, três ou quatro elementos de junta. A figura 1.7 ilustra alguns exemplos assim como a respectiva representação esquemática.

LIGAÇÕES		
BINÁRIA	TERNÁRIA	QUATERNÁRIA

Figura 1.7 – Ligação binária, ternária e quaternária.

¹⁶ O fixe ou bloco, que é o corpo que está rigidamente ligado à estrutura, é, em geral, referenciado com o número 1.

Num mecanismo, o elemento que recebe o movimento que se pretende transmitir ou transformar designa-se órgão motor. Ao elemento que recebe o movimento que se pretende utilizar chama-se órgão movido ou seguidor. Num mecanismo, as barras que rodam ou oscilam em torno de um eixo fixo denominam-se manivelas, e as barras que fazem a ligação entre duas manivelas ou entre uma manivela e uma corrediça chamam-se bielias. A barra que, num mecanismo, se considera fixa, isto é rigidamente ligada à estrutura, denomina-se fixe ou bloco. A figura 1.8 ilustra dois mecanismos de uso frequente em mecânica, o mecanismo de quatro barras ou quadrilátero articulado e o mecanismo came-seguidor, nos quais se podem observar os diferentes tipos de órgãos ou elementos.

Os mecanismos podem ser classificados como abertos ou fechados, consoante a cadeia cinemática seja aberta ou fechada. Num mecanismo fechado, o movimento dos seus elementos depende directamente do movimento de outros elementos. Ao passo que num mecanismo aberto, o movimento dos seus elementos pode não ter como consequência o movimento dos demais elementos. A figura 1.8a ilustra um mecanismo fechado, o mecanismo de quatro barras, enquanto que a figura 1.8b mostra um mecanismo do tipo aberto, o mecanismo came-seguidor.

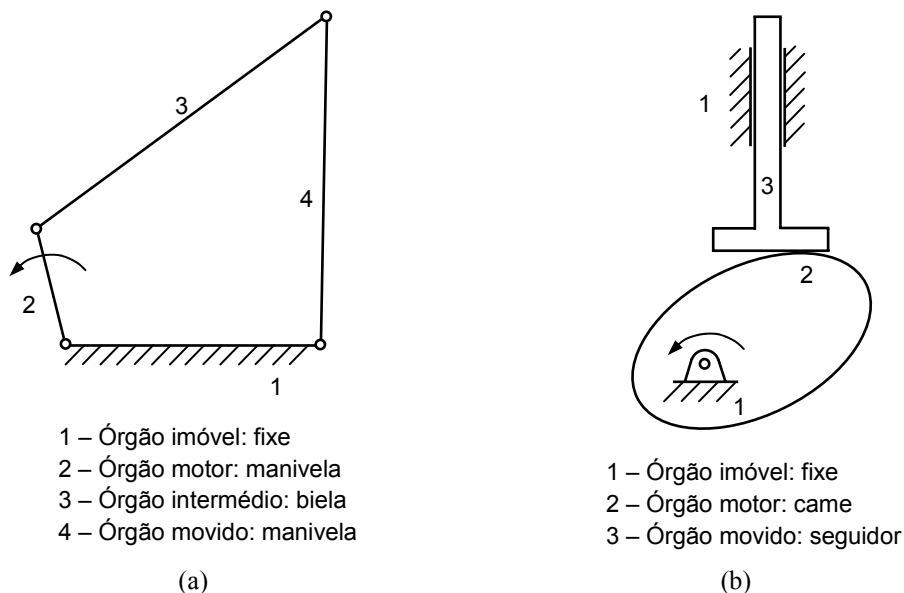


Figura 1.8 – (a) Mecanismo de quatro barras; (b) Mecanismo came-seguidor.

Quando num mecanismo se liberta a barra inicialmente fixa e, por outro lado, se fixa uma barra anteriormente livre, diz-se que o mecanismo foi invertido. A inversão de um mecanismo não altera o movimento relativo entre as barras, mas modifica o movimento absoluto de cada uma das barras relativamente a um referencial fixo. Assim, por exemplo, o mecanismo de quatro barras, pelo facto de ter quatro elementos significa que há três inversões possíveis, correspondentes à fixação das barras 2, 3 e 4. A figura 1.9 mostra as inversões do mecanismo de quatro barras.

Quando os diversos componentes de um mecanismo partem de uma posição, descrevem um determinado movimento e retornam à posição inicial para, deste modo, recomeçarem a mesma trajectória, diz-se que o mecanismo completou um ciclo, com a duração de determinado período de tempo, tendo assumido fases, ou seja, várias posições instantâneas relativas, durante o ciclo.

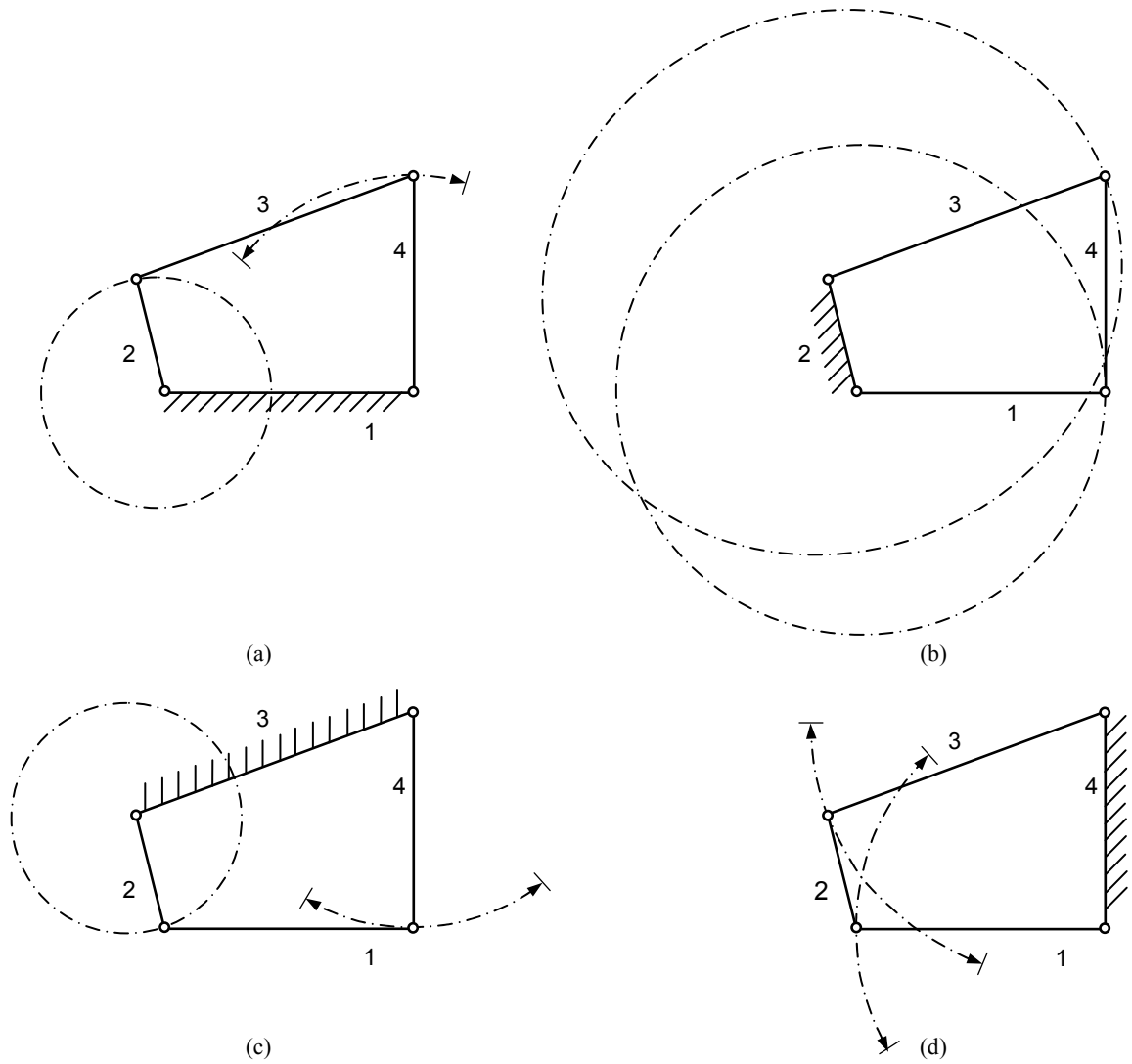


Figura 1.9 – Inversão do mecanismo de quatro barras: (a) Sistema de manivela barra oscilante; (b) Sistema de dupla manivela; (c) Sistema de manivela barra oscilante; (d) Sistema duplamente oscilante.

1.4. TIPOS DE MOVIMENTOS

No atinente ao estudo dos mecanismos, torna-se importante e necessário distinguir os diferentes tipos de movimento descritos pelos seus elementos constituintes. A figura 1.10 resume os movimentos que podem existir num mecanismo.

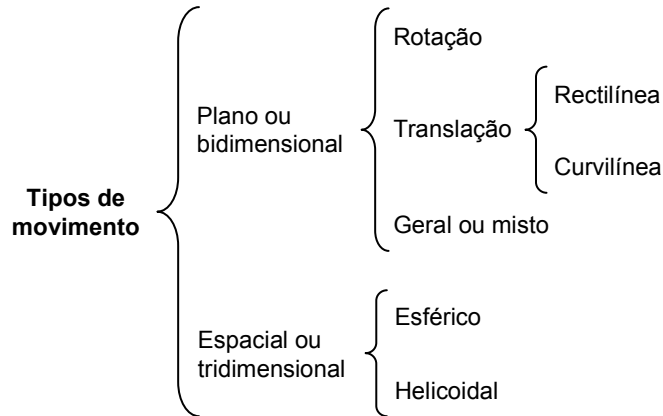


Figura 1.10 – Tipos de movimento que podem existir num mecanismo.

No movimento plano ou bidimensional, todos os pontos de um dado corpo em movimento descrevem trajectórias no mesmo plano ou em planos paralelos, isto é, no movimento plano, todos os pontos de um corpo ou mecanismo permanecem a uma distância constante relativamente a um plano de referência. A figura 1.8 ilustra dois exemplos de mecanismos em que o movimento descrito pelos seus componentes é plano. No movimento plano podem distinguir-se três tipos de movimento, o movimento de rotação, o movimento de translação e o movimento geral ou misto. Por sua vez o movimento de translação pode ainda ser rectilíneo ou curvilíneo.

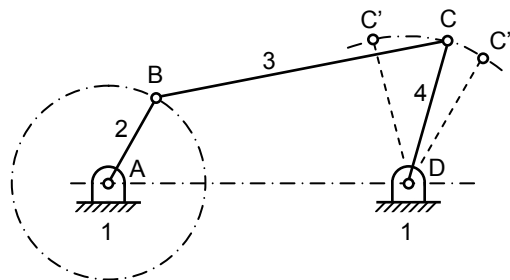


Figura 1.11 – Quadrilátero articulado: movimento plano de rotação e oscilante.

O movimento é rotação quando todos os pontos descrevem trajectórias circulares em torno de uma recta perpendicular ao plano de rotação, designada eixo de rotação. No movimento de rotação, todos os pontos de um corpo permanecem a uma distância constante em relação ao eixo de rotação. Quando a rotação é alternada dentro de uma certa amplitude limite, o movimento de rotação é denominado oscilante. A figura 1.11 mostra o mecanismo de quatro barras em que a barra 2 descreve movimento de rotação em torno de um eixo imaginário que passa pelo ponto A, enquanto que a barra 4 oscila em torno de D, entre as posições limite C' e C''. Este mecanismo é, por isso, chamado mecanismo de manivela e barra oscilante.

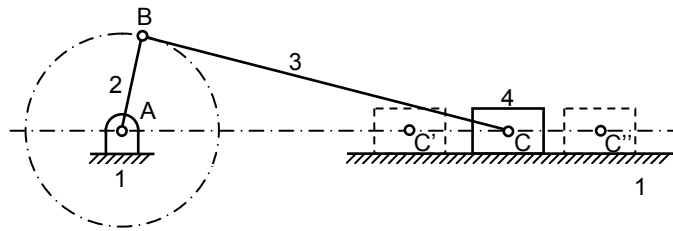


Figura 1.12 – Mecanismo biela-manivela: movimento de translação rectilíneo.

O movimento plano é de translação quando todos os pontos descrevem trajectórias paralelas de tal modo que as linhas que unem dois quaisquer pontos de um corpo permanecem sempre paralelas relativamente à posição inicial. Quando os pontos de uma barra descrevem trajectórias rectas e paralelas entre si, diz-se que o movimento é de translação rectilíneo. O movimento de vaivém da corrediça do mecanismo biela-manivela da figura 1.12 é um exemplo do movimento de translação rectilíneo.

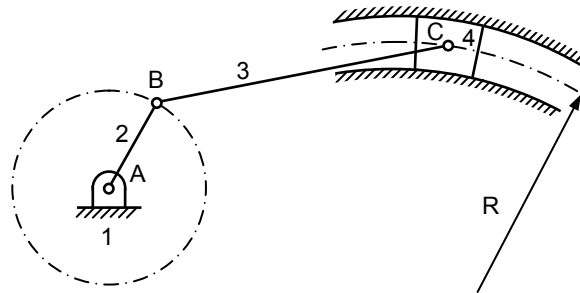


Figura 1.13 – Quadrilátero articulado: movimento de translação curvilíneo.

No movimento de translação, quando os pontos de uma barra descrevem trajectórias curvas e paralelas entre si, diz-se que o movimento realizado é de translação curvilíneo. O movimento de barra 4 do quadrilátero articulado de figura 1.13 exemplifica este tipo de movimento, cujo raio de curvatura é R .

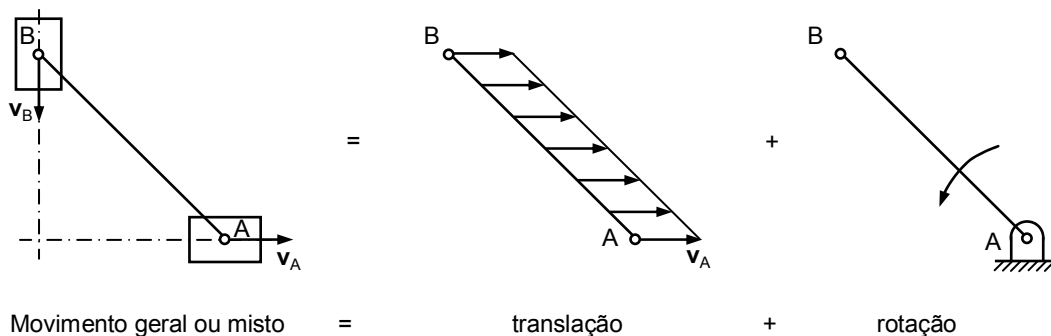


Figura 1.14 – Movimento plano geral ou misto.

O movimento plano designa-se geral ou misto quando nele co-existem as propriedades dos movimentos de rotação e de translação. Nestes casos, o movimento pode ser decomposto como a soma de uma rotação e uma translação, traduzindo a lei de Chasles. O movimento da biela, barra 3, do mecanismo biela-manivela da figura

1.12 é um exemplo elucidativo do movimento geral ou misto. Um outro exemplo de movimento plano misto é o que se representa na figura 1.14 que consiste numa barra cujas extremidades *A* e *B* se deslocam, respectivamente, ao longo de uma guia horizontal e vertical. O movimento da barra é equivalente à soma de uma translação com o ponto *A*, na direcção horizontal e de uma rotação em torno de *A*, ou ainda, equivalente à soma de uma translação com o ponto *B*, na direcção vertical e de uma rotação em torno de *B*. A primeira situação está representada na figura 1.14.

Quanto ao movimento espacial ou tridimensional, há dois tipos básicos de movimento a considerar, o movimento esférico e o movimento helicoidal. No primeiro caso, cada ponto de uma barra que descreve movimento esférico mantém-se a uma distância constante de um ponto fixo, como é o caso do movimento descrito pela barra 3 do mecanismo representado na figura 1.15a. No movimento helicoidal, os pontos de uma barra movem-se com rotação em torno de um eixo fixo e com translação na direcção desse mesmo eixo, como se ilustra na figura 1.15b. O movimento descrito por um ponto que pertence a uma porca, enquanto está a ser aparafusada num parafuso ou perno, é um exemplo de movimento helicoidal.

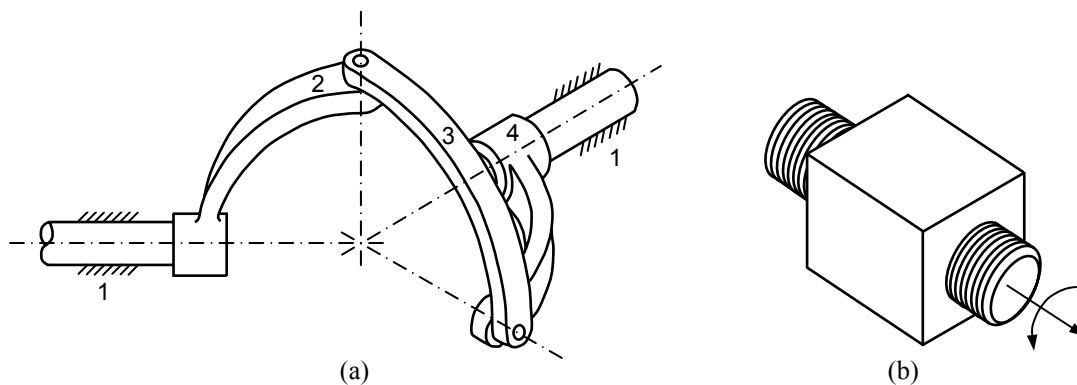


Figura 1.15 – Movimento espacial ou tridimensional: (a) Movimento esférico; (b) Movimento helicoidal.

O movimento, quer seja plano quer seja espacial, pode ser contínuo, intermitente ou alternativo de vaivém. O movimento é contínuo quando um ponto ou um corpo se desloca indefinidamente no mesmo sentido. Um exemplo deste tipo de movimento é o descrito pela manivela do mecanismo de quatro barras ilustrado na figura 1.13. O movimento de um corpo designa-se intermitente quando é interrompido e apresenta períodos de repouso. No movimento de vaivém, os corpos descrevem movimento num sentido e de seguida em sentido contrário. O movimento da corrediça do mecanismo biela-manivela ilustrado na figura 1.12 é um exemplo claro de movimento de vaivém. Quando o movimento de vaivém é circular, designa-se movimento oscilante, como é exemplo o movimento oscilatório de um pêndulo.

Nos mecanismos, a transmissão de movimento pode ser levada a cabo de duas formas distintas, a saber: por contacto directo ou por ligação intermédia. Nas transmissões por contacto directo o movimento é transmitido através do contacto entre as superfícies dos órgãos motor e movido. Neste grupo estão incluídos, por exemplo, os sistemas de transmissão por engrenagens e os mecanismos do tipo came-seguidor, como se mostra na figura 1.16. No segundo grupo estão os sistemas em que a transmissão do movimento é efectuada através de um corpo intermédio que liga o órgão motor ao órgão movido, como se ilustra na figura 1.17.

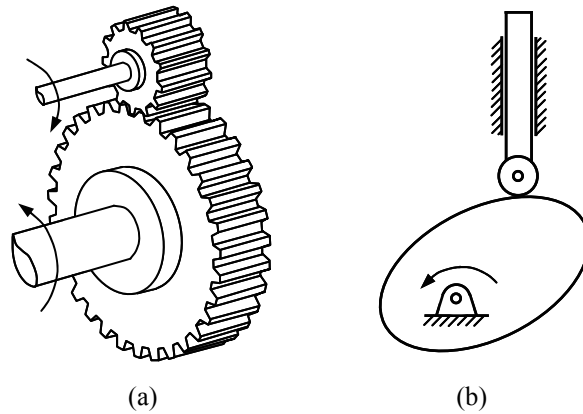


Figura 1.16 – Transmissão de movimento por contacto directo: (a) Sistema de engrenagens; (b) Mecanismo came-seguidor.

Quando a transmissão de movimento é efectuada por ligação intermédia, esta pode ser rígida, como no caso de um mecanismo de quatro barras, ou flexível, como são exemplo as correias e correntes. A figura 1.17 resume e ilustra os tipos de transmissão de por ligação intermédia.

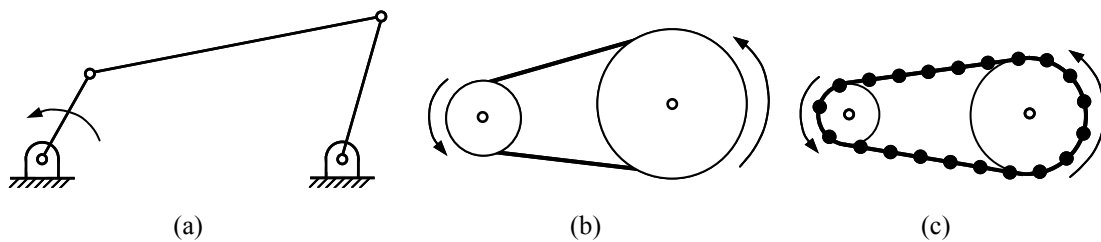


Figura 1.17 – Transmissão de movimento por ligação intermédia: (a) Ligação rígida; (b) Ligação flexível por correia; (c) Ligação flexível por corrente.

1.5. JUNTAS CINEMÁTICAS

Num mecanismo, para que o movimento seja transmitido, as barras devem estar ligadas entre si por juntas ou pares cinemáticos. As juntas impõem constrangimentos ou restrições nos movimentos dos corpos. Cada tipo de junta tem as suas próprias características geométricas, as quais determinam o tipo de movimento existente entre os corpos. Assim, no caso de duas barras unidas por uma junta de rotação apenas é possível que uma rode em relação à outra em torno de um eixo que passa pelo centro da junta. O reconhecimento da geometria de contacto das superfícies das juntas pode, por vezes, não ser óbvio. Por exemplo, uma junta de rotação pode incorporar rolamentos de rolos ou agulhas e, deste modo, tornar difícil o reconhecimento das superfícies de contacto existentes. Contudo, se o movimento individual de cada um dos rolos for desprezável quando comparado com o movimento global produzido num mecanismo, o movimento relativo permitido pela junta é equivalente ao de uma junta de rotação definida por uma veio e um casquilho, vulgo chumaceira. A distinção entre as várias juntas cinemáticas assenta principalmente no movimento relativo permitido e não somente no tipo de superfícies em causa. Por outro lado, as juntas cinemáticas descritas ao longo deste trabalho são representadas por abstrações matemáticas cuja geometria é ideal ou perfeita, isto é, as dimensões, a folga, a lubrificação, entre outros fenómenos, não são considerados na análise dos mecanismos.

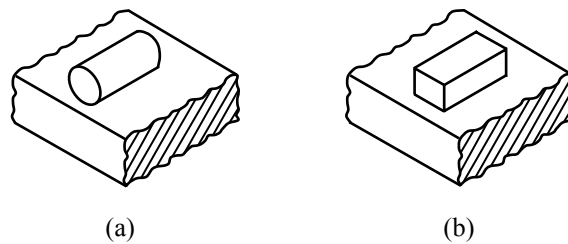


Figura 1.18 – (a) Junta cinemática superior; (b) Junta cinemática inferior.

As juntas cinemáticas podem ser classificadas segundo vários critérios. De acordo com Reuleaux¹⁷, as juntas podem agrupar-se em duas grandes classes, a saber: as juntas superiores e as juntas inferiores. Enquanto que nas juntas superiores o contacto é pontual ou linear, como ilustra na figura 1.18a, nas juntas inferiores o contacto entre os elementos é uma superfície, como mostra a figura 1.18b. O critério usado por Reuleaux baseia-se no tipo de contacto entre os elementos. Contudo, este critério pode ser enganador quando se trata, por exemplo, de um rolamento de rolos ou agulhas em que o mais importante é o tipo de movimento relativo permitido, e não a natureza do contacto entre os rolos ou as agulhas e as pistas. Pode dizer-se que, na prática, não existem juntas superiores em virtude das deformações que ocorrem na zona de contacto sendo, deste modo, limitada a capacidade de carga deste tipo de junta. Nas juntas superiores, as superfícies que estão em contacto são, geralmente, sujeitas a tratamentos térmicos e de superfície com o intuito de aumentar a vida útil dos componentes. A figura 1.16 mostra dois mecanismos em que é bem evidente a

¹⁷ O critério de Reuleaux tem como base a seguinte consideração, uma junta em cujo contacto é linear ou pontual é, do ponto de vista da sua obtenção, mais nobre e complexa. Ao passo que, as juntas inferiores são, pela mesma ordem de ideias, mais fáceis de obter, menos nobres e, por isso, *inferiores*.

existência de juntas cinemáticas superiores, nomeadamente um par de roda dentadas e um mecanismo do tipo came-seguidor. As juntas cinemáticas superiores são, em geral, mais difíceis de obter, mas são utilizadas sobretudo por serem o meio mais simples de se obterem deslocamentos de natureza complexa. As juntas cinemáticas inferiores têm como principais características a elevada capacidade de carga e a facilidade de produção, como por exemplo, por maquinagem.

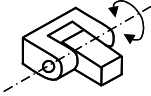
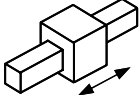
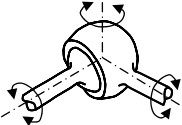
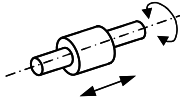
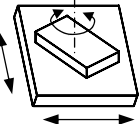
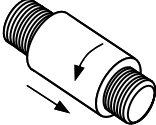
JUNTAS CINEMÁTICAS INFERIORES			
Designação	Geometria	Símbolo	Graus de liberdade
Rotação		R	1
Translação ou prismática		T	1
Esférica ou globular		E	3
Cilíndrica		C	2
Plana		P	3
Helicoidal ou de parafuso		H	1

Figura 1.19 – Juntas cinemáticas inferiores.

Reuleaux distingue seis juntas cinemáticas inferiores, nomeadamente:

- Junta de rotação (R) permite apenas o movimento relativo de rotação. Numa junta de rotação existe somente um grau de liberdade;
- Junta de translação (T) ou prismática permite apenas o movimento relativo de translação. A junta de translação tem um só grau liberdade;
- Junta esférica (E) ou globular possibilita a rotação em torno dos três eixos coordenados. Numa junta esférica há três graus de liberdade;
- Junta cilíndrica (C) permite dois movimentos independentes, isto é, rotação e translação. Numa junta cilíndrica há dois graus de liberdade;
- Junta plana (P) permite três movimentos independentes, duas translações e uma rotação. Uma junta plana possui três graus de liberdade;

- Junta helicoidal (H) ou de parafuso possibilita dois movimento, uma translação e uma rotação. Numa junta helicoidal há apenas um grau de liberdade devido ao escorregamento relativo entre as superfícies em contacto.

A figura 1.19 ilustra e resume as diferentes juntas cinemáticas inferiores bem como as suas principais características. As juntas cinemáticas de rotação e de translação são as mais correntemente utilizadas para ligar as barras dos mecanismos.

Outro critério de classificação das juntas cinemáticas é que tem por base a sua forma. Assim, se a forma dos elementos de uma junta é tal que, supondo um deles fixo, as trajectórias de todos os pontos do componente a que o outro elemento pertence são completamente determinadas, a junta diz-se fechada, como é exemplo uma qualquer junta de rotação do mecanismo de quatro barras. Se assim não for, a junta diz-se aberta, como no caso de uma came e um seguidor, sendo neste caso necessário uma força exterior para manter o contacto permanente entre os dois elementos. A força exterior pode ser a acção da gravidade ou produzida por uma mola ou actuador.

Um terceiro critério de classificação das juntas cinemáticas é o que diz respeito ao tipo de movimento permitido. Com efeito, no atinente ao movimento permitido, as juntas podem ser rotóides, esféricas, deslizantes, etc. Uma junta diz-se rotóide quando o movimento permitido é de rotação ou oscilação num só plano, sendo habitualmente designadas articulações. Quando a rotação ou oscilação acontece em qualquer plano, a junta diz-se esférica, vulgo rótula. Uma junta é deslizante, ou translacional, quando o movimento permitido é de translação e em que o elemento fixo se designa guia e o móvel corredeira.

Os três critérios de classificação e caracterização das juntas cinemáticas, anteriormente descritos e resumidos na figura 1.20, são critérios complementares no que à caracterização das juntas diz respeito.

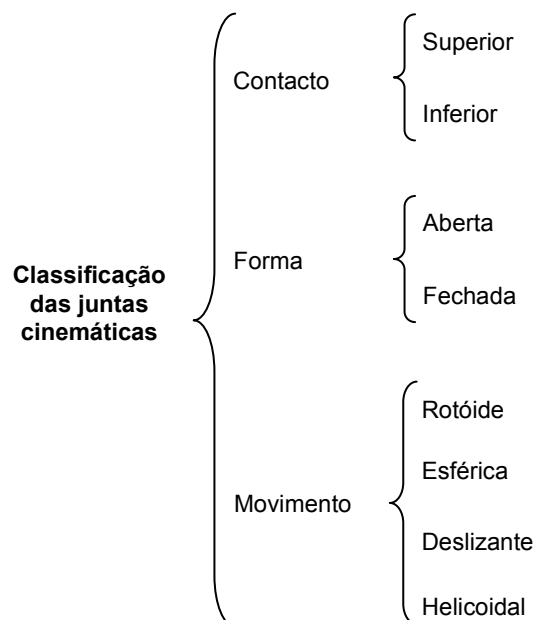


Figura 1.20 – Critérios de classificação das juntas cinemáticas.

As juntas cinemáticas representam-se, usualmente, por uma letra maiúscula, que simboliza o tipo de movimento permitido, seguida pelos números das barras que por

elas são unidas. Assim, por exemplo, no mecanismo biela-manivela da figura 1.21, R_{12} representa uma junta cinemática de rotação ou rotóide que une as barras 1 e 2, e T_{41} simboliza uma junta cinemática de translação ou deslizante que liga os corpos 4 e 1, isto é a corredeira e o fixo. Este mecanismo pode, portanto, ser caracterizado como mecanismo do tipo RRRT.

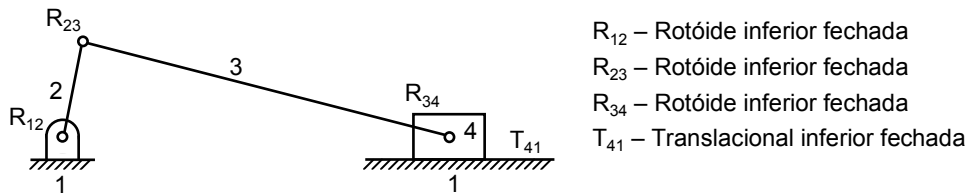
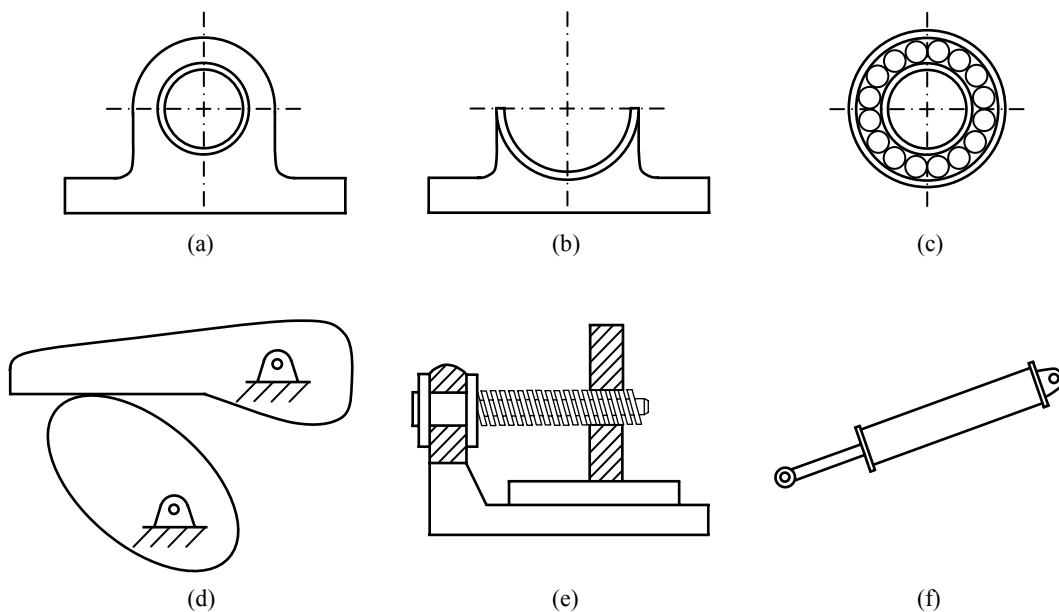


Figura 1.21 – Caracterização das juntas cinemáticas do mecanismo biela-manivela.

Na figura 1.22 estão representadas e caracterizadas algumas das juntas cinemáticas mais frequentemente utilizadas em construção mecânica.



- (a) Chumaceira radial de escorregamento de 360° : junta rotóide inferior fechada
- (b) Chumaceira radial de escorregamento $< 180^\circ$: junta rotóide inferior aberta
- (c) Chumaceira de rolamentos de esferas: junta rotóide inferior fechada
- (d) Came radial e seguidor oscilante de prato: junta translacional superior aberta
- (e) Parafuso de transmissão de movimento: junta helicoidal inferior fechada
- (f) Transmissão de movimento por cilindro com êmbolo: junta translacional inferior fechada

Figura 1.22 – Caracterização de juntas cinemáticas utilizadas em construção mecânica.

1.6. GRAUS DE LIBERDADE OU MOBILIDADE DE UM MECANISMO

O conhecimento do número de graus de liberdade ou mobilidade¹⁸ de um mecanismo é uma propriedade importante na análise e síntese cinemática do sistema. O número de graus de liberdade pode definir-se como sendo o número de movimentos de accionamento que um determinado mecanismo necessita para que a localização dos seus corpos seja completamente conhecida em relação a um referencial predefinido, ou seja, é o número de accionadores, como por exemplo motores, necessário para produzir movimento num mecanismo. Por outras palavras, o número de graus de liberdade ou mobilidade de um mecanismo é o número mínimo de coordenadas, parâmetros ou variáveis de entrada e independentes que descrevem e definem a configuração e o movimento de um mecanismo. Assim, quando a configuração de um mecanismo fica completamente definida e caracterizada pelo posicionamento de um dos seus corpos, diz-se que o mecanismo tem um grau de liberdade. A maioria dos mecanismos de uso corrente tem apenas um grau de liberdade, como são exemplo os mecanismos de quatro barras e biela-manivela anteriormente apresentados. Os mecanismos do tipo came-seguidor e os robôs são sistemas mecânicos que se caracterizam por terem dois ou mais graus de liberdade.

Um corpo considerado livre no espaço tridimensional pode descrever seis movimentos diferentes, isto é, movimento de translação e de rotação em relação a cada um dos eixos coordenados, como ilustra a figura 1.23a. Cada uma destas possibilidades denomina-se de grau de liberdade. Um corpo no espaço tridimensional tem, portanto, seis graus de liberdade, ou seja, tem seis movimentos independentes. Assim, dois corpos livres no espaço tridimensional têm doze graus de liberdade.

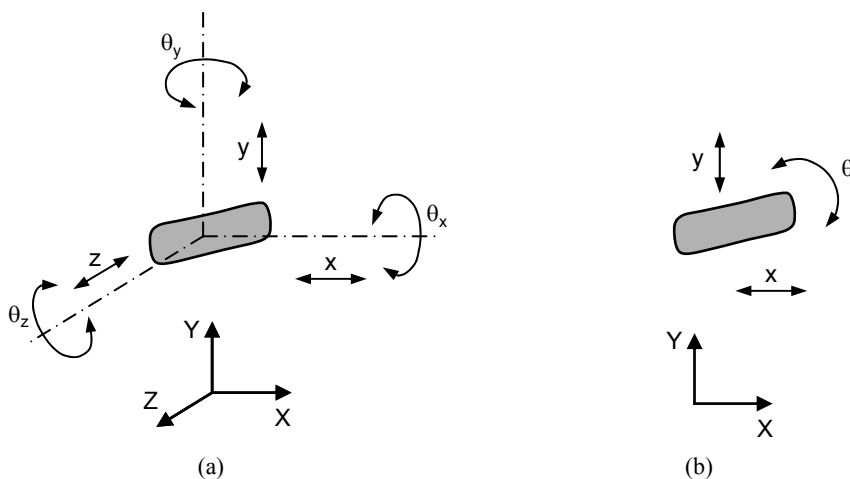


Figura 1.23 – (a) Graus de liberdade de um corpo livre no espaço tridimensional; (b) Graus de liberdade de um corpo livre no espaço bidimensional.

Um corpo que se desloque livremente no espaço bidimensional possui apenas três possibilidades de movimento, translação segundo os dois eixos coordenados pertencentes ao plano e rotação em torno de um eixo perpendicular ao plano do

¹⁸ Na literatura alemã faz-se a distinção entre *movabilidade* e *mobilidade* de um mecanismo. *Movabilidade* inclui todos os graus de liberdade do sistema como um todo ignorando as restrições cinemáticas que são impostas aos corpos, ao passo que *mobilidade* se refere apenas ao número de movimentos independentes que existe no mecanismo.

movimento, como mostra a figure 1.23b. Deste modo, um sistema formado por dois corpos, não ligados, no plano possui seis graus de liberdade. No presente trabalho apenas são estudados os mecanismos de movimento plano, uma vez que constituem a grande maioria dos casos típicos utilizados em sistemas mecânicos.

É possível, excepto para algumas situações que serão discutidas mais tarde, determinar o número de graus de liberdade de um mecanismo a partir do número de corpos que o constitui, bem como do número e tipo de junta cinemática que o sistema contém. O número de graus de liberdade de um sistema pode ser reduzido pela introdução de constrangimentos ou restrições cinemáticas. Assim, por exemplo, a figura 1.24 ilustra dois corpos rígidos unidos por uma junta cinemática de rotação ou rotóide centrada em B . Dado que o ponto B pertence simultaneamente aos dois corpos, o deslocamento absoluto de B quando considerado no corpo 1 é o mesmo que quando este mesmo ponto está associado ao corpo 2. O posicionamento do ponto A situado no corpo 1, pode ser expresso em função das coordenadas cartesianas (x_A, y_A) . O posicionamento do ponto B , relativamente a A , é função da posição angular do corpo 1, θ_1 , isto é, a posição angular do segmento de recta AB cujo comprimento é l_1 . Por seu lado, a posição do ponto C do corpo 2 pode ser expressa em função da posição angular do corpo 2, θ_2 , ângulo que define a orientação do segmento de recta BC , que mede l_2 . Para caracterizar a posição do ponto C são necessárias quatro variáveis independentes, e que são x_A, y_A, θ_1 e θ_2 . Assim, um sistema formado por dois corpos ligados por uma junta de rotação tem, portanto, quatro graus de liberdade. Por outras palavras, uma junta de rotação que une dois corpos rígidos no plano, retira ao sistema dois dos seus graus de liberdade. As juntas cinemáticas que removem ou constroem dois graus de liberdade denominam-se juntas primárias e de que são exemplo as juntas de rotação e de translação.

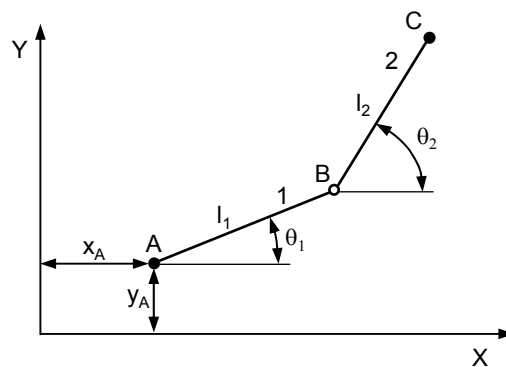


Figura 1.24 – Junta cinemática de rotação ou rotóide retira dois graus de liberdade.

Se se considerar agora n corpos ligados entre si por j_1 juntas de rotação, o sistema daí resultante tem três graus de liberdade associados a cada um dos corpos, aos quais são subtraídos dois graus de liberdade por cada junta rotóide existente, isto é, cada corpo possui três graus de liberdade e cada rotóide remove dois desses graus de liberdade. Esta condição matemática, que traduz o número total de graus de liberdade (GDL) do sistema, pode ser expressa por,

$$GDL = 3n - 2j_1 \quad (1.1)$$

onde n representa o número de corpos e j_1 o número de juntas primárias, isto é, juntas que retiram dois graus de liberdade ao sistema.

Os mecanismos são raramente utilizados sem que lhes seja adicionado outro tipo de constrangimentos, sendo, em geral, um dos corpos fixo, como se mostra na figura 1.25. Um corpo fixo tem, por definição mobilidade nula. Deste modo, observa-se que num sistema formado por n corpos, sendo um deles fixo, e unidos por j_1 juntas de rotação, o número de graus de liberdade é dado por,

$$GDL = 3(n - 1) - 2j_1 \quad (1.2)$$

em que as variáveis n e j_1 têm o mesmo significado do da equação (1.1).

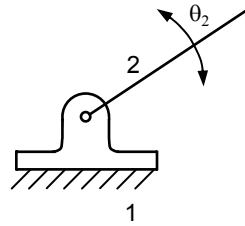


Figura 1.25 – Dois corpos unidos por uma junta de rotação em que um dos corpos é fixo.

Dois corpos podem, ainda, ser constrangidos por juntas cinemáticas secundárias, as quais restringem apenas um dos movimentos relativos. Os corpos 1 e 2 representados na figura 1.26 ilustram este tipo de junta cinemática. O pino C do corpo 2 pode mover-se ao longo da ranhura do corpo 1. Pode observar-se que o único movimento constrangido ao ponto C é o movimento na direcção perpendicular à ranhura do corpo 1.

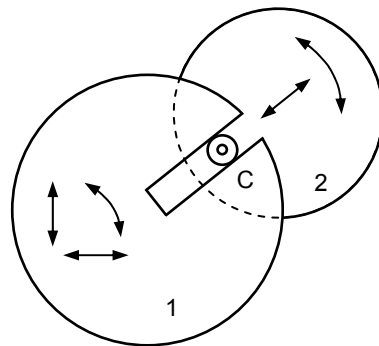


Figura 1.26 – Dois corpos constrangidos por uma junta cinemática secundária.

Com efeito, o número de graus de liberdade de um sistema formado por n corpos, sendo um deles fixo, e unidos por juntas cinemáticas pode ser calculado como,

$$GDL = 3(n - 1) - 2j_1 - j_2 \quad (1.3)$$

onde n representa o número de corpos, j_1 é o número de juntas primárias, *i.e.*, retiram dois graus de liberdade, e j_2 é o número de juntas secundárias, *i.e.*, retiram apenas um grau de liberdade. Pela análise da expressão (1.3), que traduz o critério de Grübler¹⁹ ou de Kutzbach, pode concluir-se que o número de graus de liberdade depende do número de corpos ou barras e do tipo e do número de juntas cinemáticas.

¹⁹ Não obstante o critério adoptar este nome, é reconhecido, inclusivé por Grübler, que Chebyshev e Sylvester foram os pioneiros no estudo da mobilidade de sistemas mecânicos.

A equação (1.3) é apenas válida para sistemas planos. Se se aplicar o mesmo raciocínio para sistemas tridimensionais, o critério de Grübler é expresso por,

$$GDL = 6(n-1) - 5j_1 - 4j_2 - 3j_3 - 2j_4 - j_5 \quad (1.4)$$

onde n representa o número de corpos, j_k representa o número de juntas que retiram k graus de liberdade e em que $k = 1, 2, \dots, 5$. Note-se que um corpo no espaço tridimensional tem seis graus de liberdade e que uma junta rotação, junta do tipo j_1 retira cinco graus de liberdade.

Ao aplicar-se o critério de Grübler dado pela equação (1.3), se o número de graus de liberdade for nulo ou negativo, significa que não se trata de um mecanismo, pois este terá sempre pelo menos um grau de liberdade, mas sim de uma estrutura, respectivamente isostática ou hiperstática ou redundante. Neste último caso, o número de graus de liberdade representa o grau de hiperstaticidade ou redundância da estrutura. Assim, podem resumir-se as seguintes situações resultantes da aplicação do critério de Grübler aos sistemas mecânicos:

- Se $GDL > 0$: o sistema é um mecanismo com GDL graus de liberdade;
- Se $GDL = 0$: o sistema é uma estrutura estaticamente determinada;
- Se $GDL < 0$: o sistema é uma estrutura estaticamente indeterminada.

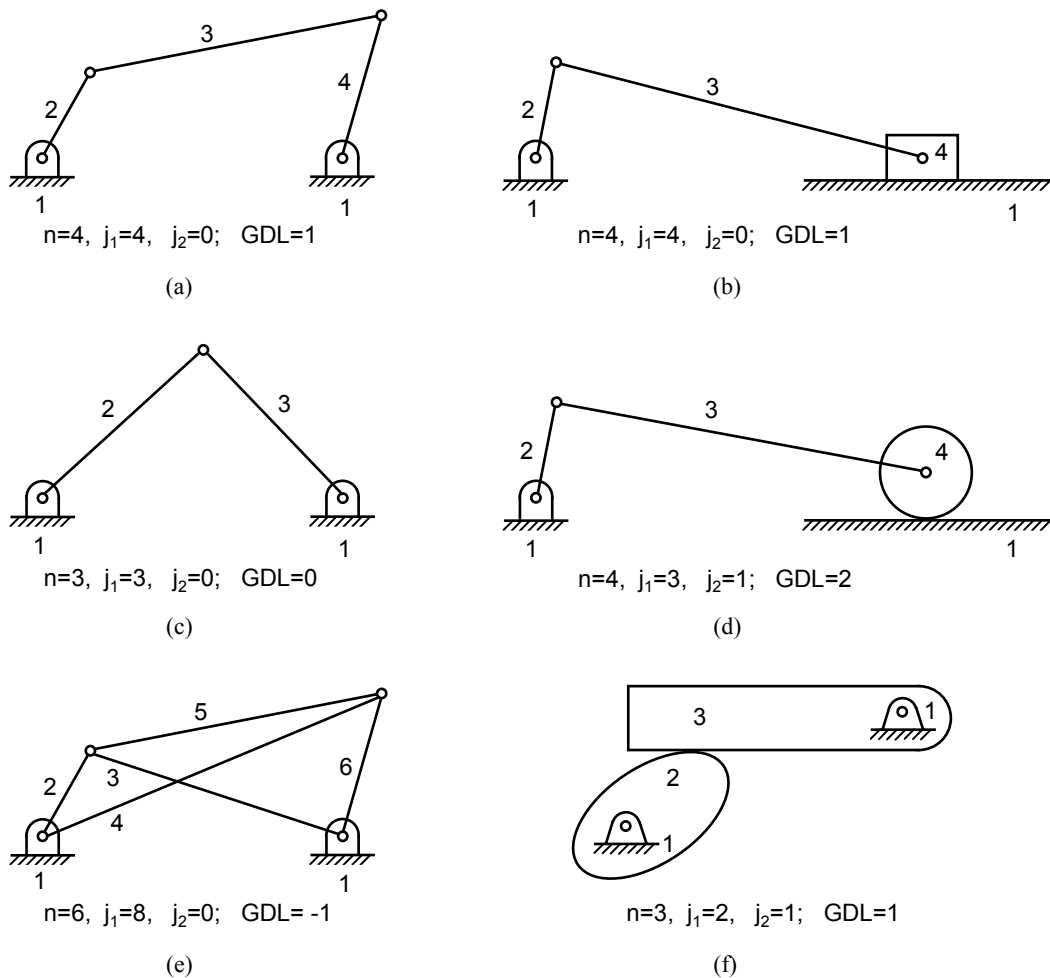


Figura 1.27 – Aplicações do critério da mobilidade de Grübler: (a) Mecanismo de quatro barras; (b) Mecanismo biela-manivela; (c) Estrutura isostática; (d) Mecanismo de quatro barras com roda; (e) Estrutura hiperstática; (f) Mecanismo came-seguidor.

A figura 1.27 mostra alguns exemplos de aplicação do critério da mobilidade de Grübler a sistemas mecânicos. Especial atenção deve ser dada à junta cinemática que liga a came e o seguidor no mecanismo ilustrado na figura 1.27f. Aqui, considera-se que existe escorregamento e rolamento entre os componentes, sendo, por isso, a junta cinemática considerada como uma junta secundária. Mecanismos do tipo came-seguidor e de rodas dentadas são exemplos que há rolamento e escorregamento entre os corpos. Nas rodas de atrito existe, em geral, rolamento sem escorregamento.

Para mecanismos cuja cadeia cinemática é fechada, ao número de graus de liberdade corresponde igual número de geradores de movimento. Contudo, em sistemas abertos, a aplicação do critério de Grübler resulta, por vezes, em graus de liberdade passivos ou redundantes, sendo necessário neste caso uma actuação exterior, por exemplo, a força da gravidade ou a força de uma mola, para evitar a separação dos elementos do mecanismo, como o caso dos mecanismos do tipo came-seguidor.

O critério de Grübler pode, salvo algumas excepções, ser utilizado para determinar o número de graus de liberdade dos mecanismos de uso corrente. Há, todavia, restrições na sua aplicação. Estas restrições prendem-se com o facto de na dedução do método, nada ser dito relativamente às dimensões das barras, nem serem tecidas considerações relativamente a outras características geométricas dos sistemas mecânicos, como, por exemplo, a existência de barras paralelas, barras de igual comprimento, ou outras configurações geométricas particulares. Com efeito, quando n barras estão ligadas entre si por uma mesma junta cinemática, esta deve, para efeito do cálculo do número de graus de liberdade, ser apenas considerada $n-1$ vezes. Assim, uma junta de rotação que une três barras no mesmo lugar geométrico é contabilizada apenas duas vezes como junta primária, como é exemplo a junta que une as barras 2, 3 e 5 no sistema representado na figura 1.27e.

No caso de um determinado sistema apresentar barras paralelas, o critério de Grübler falha devido à existência de constrangimentos redundantes. Assim, para o mecanismo de dupla manivela ilustrado na figura 1.28a, a aplicação directa do critério resulta num sistema cuja mobilidade é nula, mas, apesar disso, existe movimento relativo entre as barras, pois trata-se, na verdade, de um mecanismo com um grau de liberdade. Na figura 1.28b está ilustrado o mecanismo cinematicamente equivalente, o qual pela aplicação da equação (1.3) resulta em um grau de liberdade.

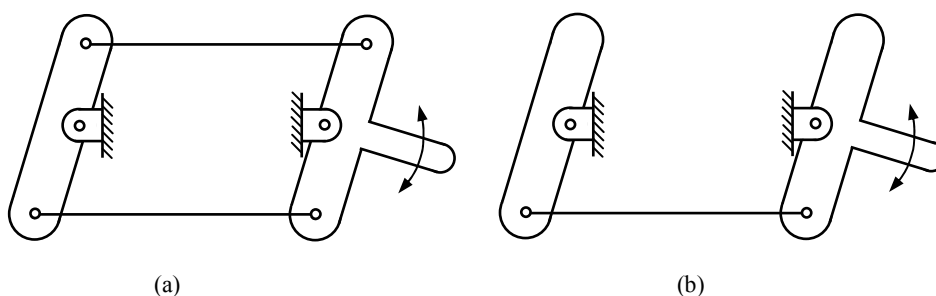


Figura 1.28 – (a) Sistema de dupla manivela; (b) Mecanismo cinematicamente equivalente.

O critério de Grübler não aplicável quando uma das barras tem unicamente duas juntas cinemáticas deslizantes paralelas, pois não é possível impedi-la de se mover independentemente do resto do mecanismo, como se ilustra na figura 1.29a. A aplicação do critério da mobilidade também não é válida para sistemas que têm

somente uma junta rotóide e as restantes juntas são deslizantes, como é exemplificado na figura 1.29b.

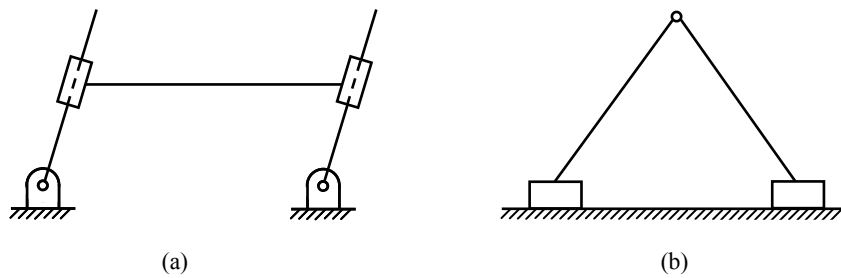


Figura 1.29 – Exemplos em que não é aplicável o critério de Grübler.

Apesar das restrições na aplicação do critério da mobilidade, ele é, mesmo assim, muito útil e fácil de usar na determinação dos graus de liberdade dos sistemas mecânicos. Para evitar as limitações anteriormente referidas, seria necessário incluir na equação (1.3) outras variáveis que contemplassem outras condições geométricas dos mecanismos, resultando numa expressão de natureza substancialmente mais complexa e, por conseguinte, menos interessante.

Though I am not over anxious after fame, yet I am more proud of the parallel motion than of any other mechanical invention I have ever made.

James Watt

2. MECANISMOS ELEMENTARES

2.1. TIPOS DE TRANSFORMAÇÃO DE MOVIMENTO NOS MECANISMOS

Um critério de classificação dos mecanismos é que tem como base o tipo de transformação do movimento entre os órgãos motor e movido. Os mecanismos podem transformar movimento de rotação em rotação, rotação em translação e translação em translação, como se ilustra e resume na figura 2.1. Nos mecanismos, as principais fontes geradoras de movimento são os actuadores de rotação, *e.g.*, motor eléctricos, e os actuadores de translação, *e.g.*, cilindros pneumáticos.

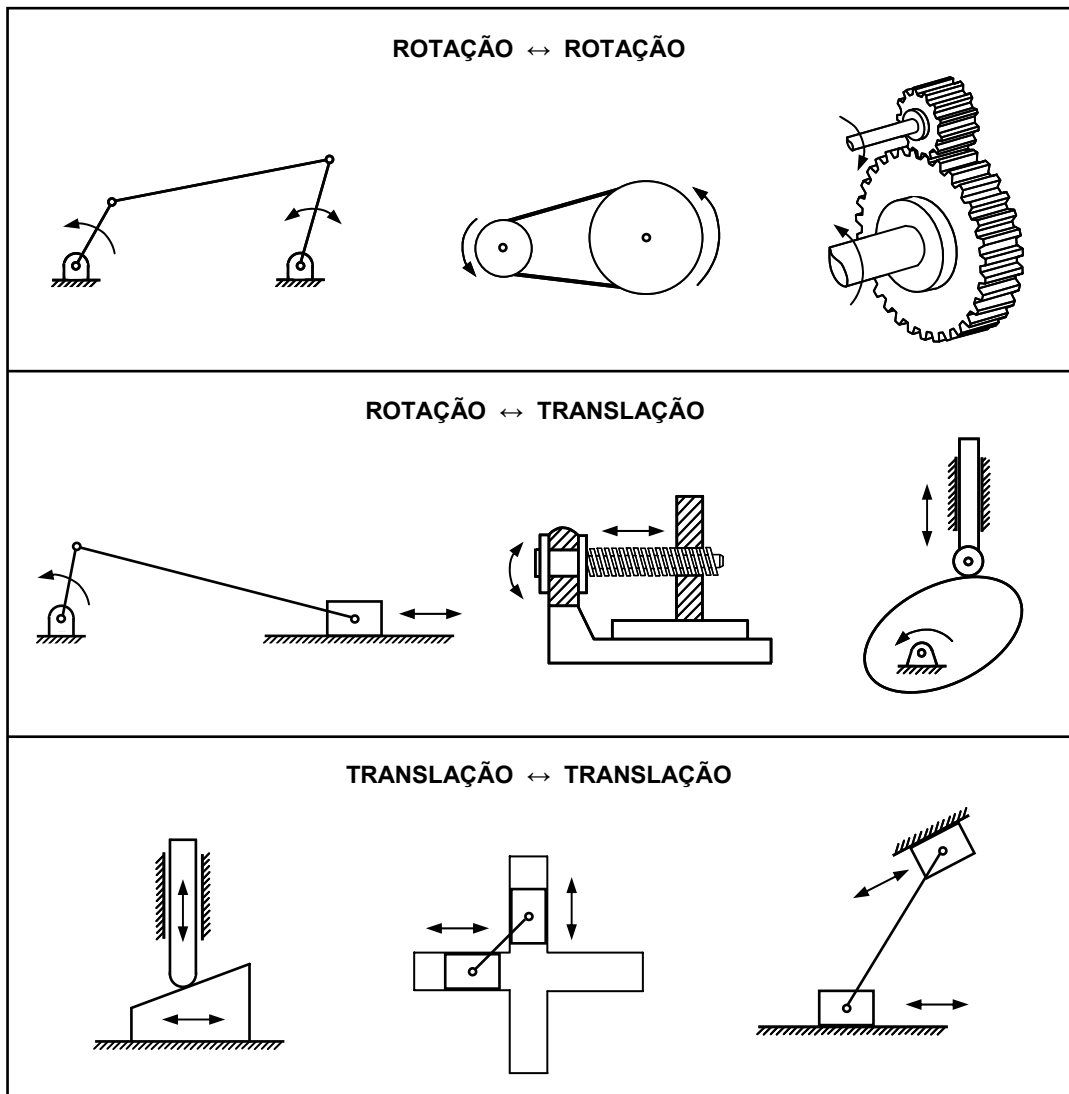


Figura 2.1 – Tipos de transformação de movimento nos mecanismos.

2.2. MECANISMO DE QUATRO BARRAS OU QUADRILÁTERO ARTICULADO

2.2.1. Descrição do Mecanismo de Quatro Barras

O mecanismo de quatro barras ou quadrilátero articulado é, sem dúvida, o mais simples e comum dos sistemas articulados. Os demais mecanismos podem ser obtidos a partir do mecanismo de quatro barras. Esta característica, aliada ao facto de o mecanismo de quatro barras apresentar diferentes relações geométricas entre as barras e, concomitantemente, diferentes relações entre o tipo de movimento de entrada e de saída, justifica a sua popularidade. O mecanismo de quatro barras encontra inúmeras aplicações no âmbito da mecânica, como por exemplo, em mecanismos de accionamento de prensas, mecanismos de accionamento de sistemas de projecção de filmes, mecanismos de retorno rápido, entre outros. A figura 2.2 ilustra dois sistemas mecânicos simples de uso frequente no quotidiano, em que está presente um mecanismo de quatro barras, nomeadamente um alicate e um patim. Ainda na mesma figura estão representados os esquemas cinemáticos relativos aos mecanismos de quatro barras associados a cada um dos sistemas mecânicos. Deve referir-se que do ponto de vista da análise cinemática e dinâmica de mecanismos, os segmentos que unem as juntas cinemáticas são a parte essencial dos mecanismos.

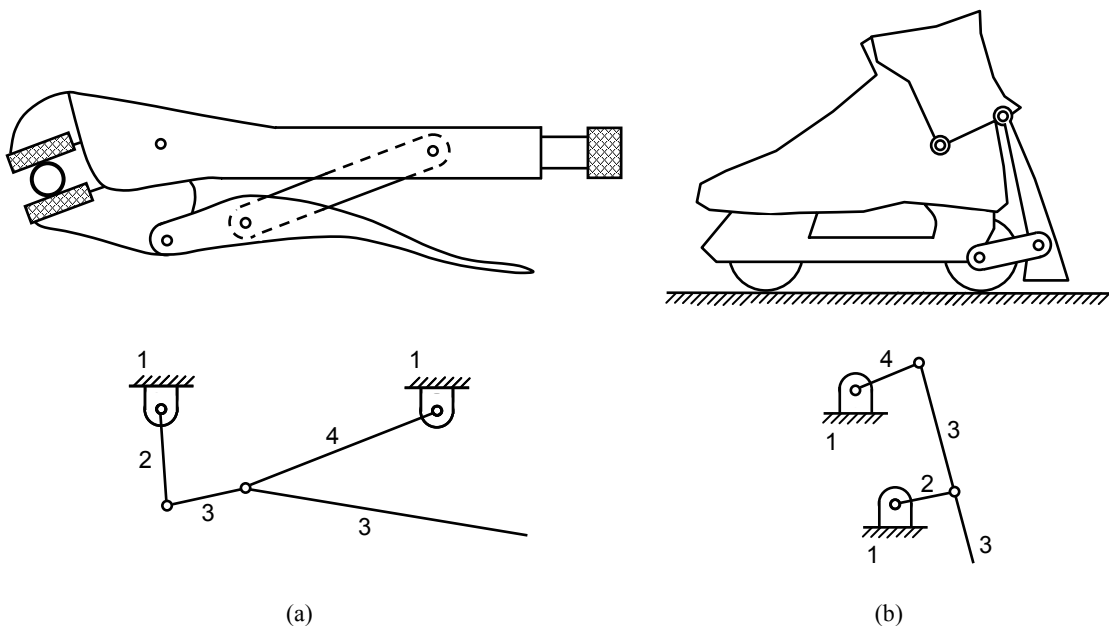


Figura 2.2 – Exemplos de sistemas mecânicos em que são utilizados mecanismos de quatro barras: (a) Alicates; (b) Patim.

O quadrilátero articulado é constituído por quatro corpos ou barras, sendo um fixo, um motor, um intermédio e um movido. Os elementos motor e movido denominam-se manivelas ou barras oscilantes consoante descrevam movimento de rotação contínuo ou movimento de rotação oscilante.

2.2.2. Regra de Grashof

Em geral, no estudo cinemático do mecanismo de quatro barras, e em particular na síntese de mecanismos, é importante saber se o órgão motor pode rodar 360° em

torno do eixo de rotação. Esta propriedade é importante porque os mecanismos são, em geral, accionados por motores eléctricos de movimento contínuo. Assim, os mecanismos articulados em que o órgão motor apenas oscila, dentro de uma determinada amplitude, não são apropriados para empregarem motores que geram movimento de rotação contínuo. No caso do mecanismo de quatro barras há uma regra geral e simples de aplicar que permite verificar se o órgão motor pode rodar continuamente em torno do eixo de rotação, ou, pelo contrário, se apenas pode oscilar numa determinada amplitude. Esta regra, dita regra de Grashof, pode enunciar-se do seguinte modo, “*para mecanismos de quatro barras que descrevem movimento plano, se a soma dos comprimentos das barras mais curta e mais comprida for inferior ou igual à soma dos comprimentos das duas restantes barras, então a barra mais curta pode rodar continuamente em relação às outras barras*”. Matematicamente, o teorema de Grashof pode ser escrito da seguinte forma,

$$c + l \leq r + s \quad (2.1)$$

em que c é comprimento da barra mais curta, l é o comprimento da barra mais longa e r e s são os comprimentos das barras intermédias.

Os mecanismos de quatro barras em que se verifica a condição expressa pela equação (2.1) chamam-se mecanismos de Grashof ou grashofianos. Caso contrário, os quadriláteros articulados denominam-se mecanismos de não-Grashof ou não grashofianos. A figura 2.3 ilustra dois mecanismos de quatro barras, sendo um deles, mecanismo de Grashof (figura 2.3a) e outro mecanismo de não-Grashof (figura 2.3b). No primeiro caso, a manivela 2 pode rodar continuamente em torno do eixo de rotação que passa em A , ao passo que no segundo exemplo, as barras 2 e 4 apenas oscilam dentro da amplitude representada na figura.

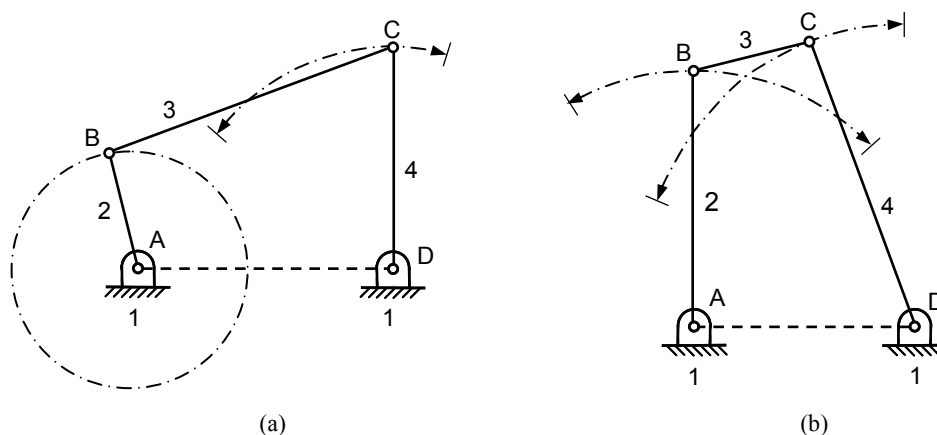


Figura 2.3 – (a) Mecanismo de Grashof; (b) Mecanismo de não-Grashof.

Deve referir-se que no critério de Grashof nada é especificado quanto à sequência como as barras estão ligadas entre si, nem qual das barras é considerada fixa. Assim, nos mecanismos de Grashof em que a barra fixa é adjacente à mais curta, o mecanismo é denominado sistema de manivela e barra oscilante, como se mostra nas figuras 2.4a e 2.4c. Quando a barra mais curta é o fixe, as duas barras que lhe são adjacentes podem rodar continuamente, como é ilustrado na figura 2.4b. Este mecanismo é denominado sistema de dupla manivela, sendo, em geral, o órgão motor a barra mais curta de entre as barras adjacente ao fixe. Este tipo de mecanismo

encontra grande número de aplicações em mecânica corrente. Quando num mecanismo de quatro barras se fixa a barra oposta à barra mais curta, embora a barra mais curta descreva rotações de 360° , nenhuma das barras adjacentes pode rodar continuamente, apenas podem oscilar, como ilustra a figura 2.4d. Este tipo de quadrilátero articulado é designado sistema de dupla barras oscilante.

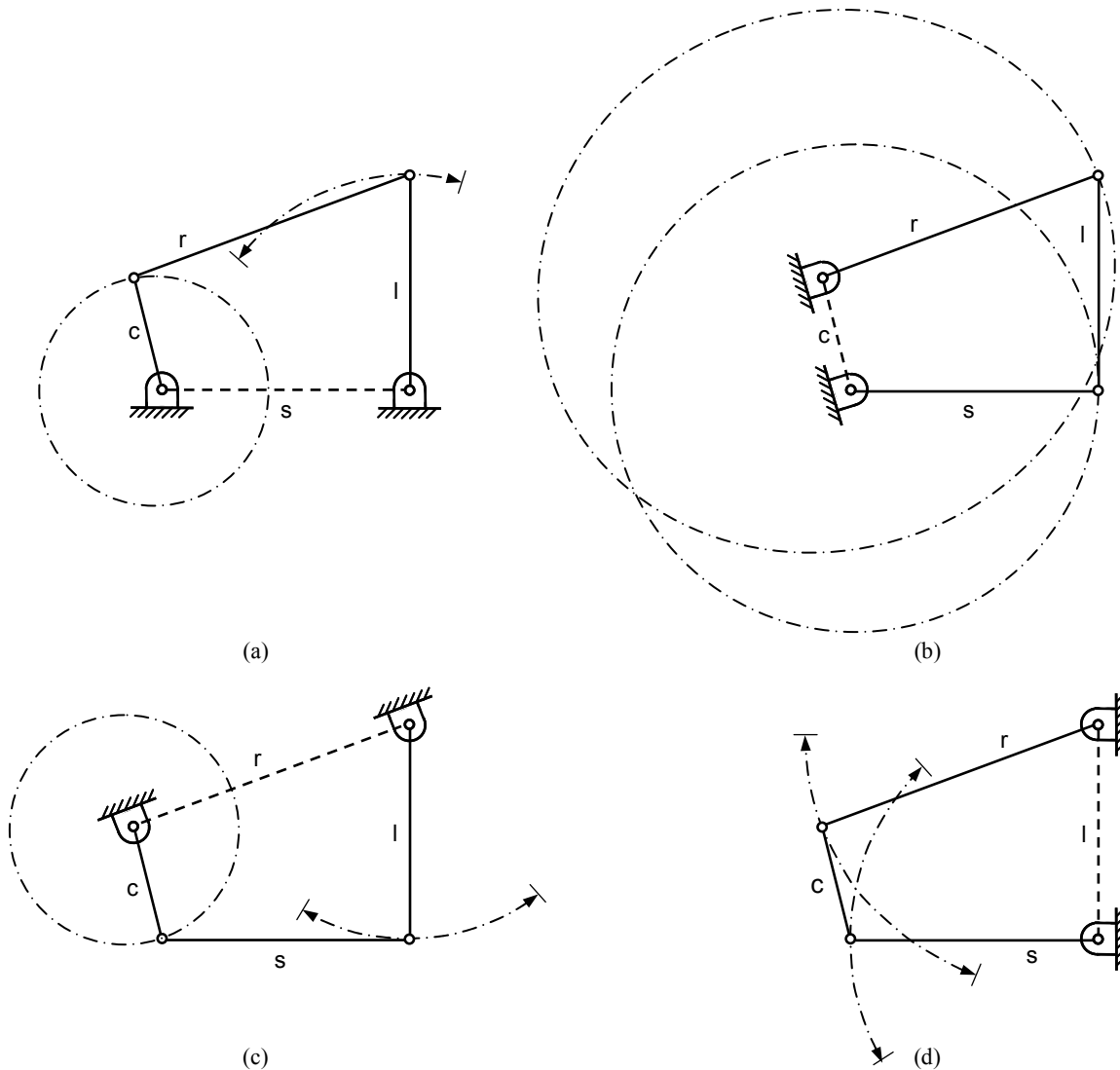


Figura 2.4 – Mecanismos de quatro barras de Grashof e de não-Grashof: (a) Sistema de manivela barra oscilante; (b) Sistema de dupla manivela; (c) Sistema de manivela barra oscilante; (d) Sistema duplamente oscilante ou de dupla barra oscilante.

2.2.3. Ângulo de Transmissão e Vantagem Mecânica

Sendo o quadrilátero articulado um dos mais simples e versáteis mecanismos de uso corrente em mecânica, justifica que algumas das suas características específicas sejam estudadas com algum detalhe. Assim, considere-se o mecanismo de quatro barras ilustrado na figura 2.5, o qual de acordo com o critério de Grashof é um mecanismo do tipo dupla barra oscilante. Em geral, neste tipo de quadrilátero articulado a barra 2 é o órgão motor e a barra 4 o órgão movido. Os comprimentos das barras 1, 2, 3 e 4 são, respectivamente, r_1 , r_2 , r_3 e r_4 , como ilustra a figura 2.5

O ângulo de transmissão, γ , e vantagem mecânica, VM , são dois parâmetros importantes no estudo de mecanismos de quatro barras. O ângulo de transmissão é o ângulo medido entre a barra intermédia e a barra movida, como ilustra a figura 2.5.

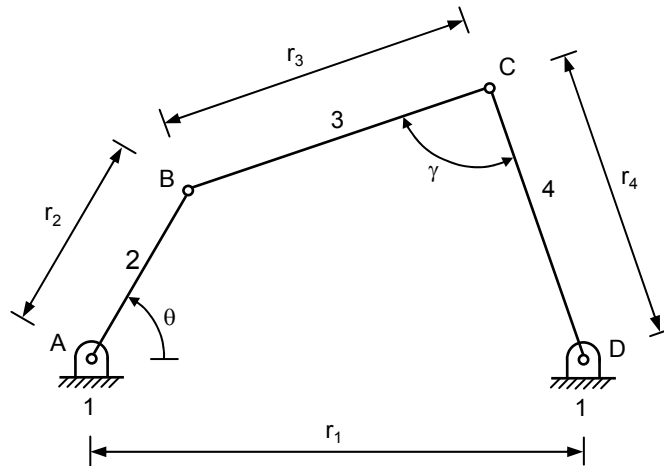


Figura 2.5 – Ângulo de transmissão num mecanismo de quatro barras, γ .

A expressão que relaciona o ângulo de transmissão com os comprimentos das barras e a posição angular da barra 2 pode obter-se aplicando a lei dos cossenos²⁰ aos triângulos ABD e BCD ,

$$|BD|^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta \quad (2.2)$$

$$|BD|^2 = r_3^2 + r_4^2 - 2r_3r_4 \cos \gamma \quad (2.3)$$

Igualando as equações (2.2) e (2.3) e resolvendo em ordem à variável γ resulta que,

$$\gamma = \arccos\left(\frac{r_3^2 + r_4^2 - r_1^2 - r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \theta}{2r_3r_4}\right) \quad (2.4)$$

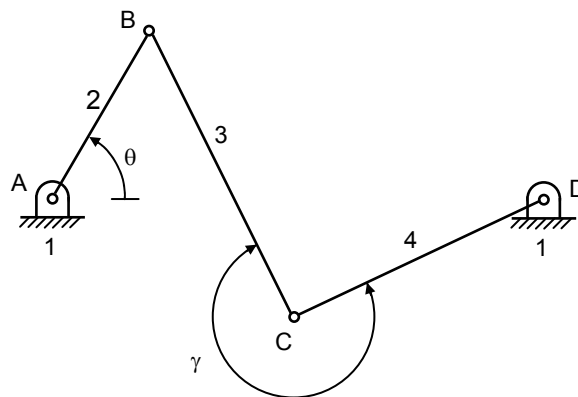


Figura 2.6 – Ângulo de transmissão num mecanismo de quatro barras, γ .

²⁰ A lei dos cossenos pode traduzir-se do seguinte modo, em qualquer triângulo o quadrado da medida de um lado é igual à diferença entre a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados e o dobro do produto das medidas desses lados pelo coseno do ângulo formado por estes lados.

Da análise da equação (2.4) pode observar-se que o ângulo de transmissão é apenas função da variável θ , que define a posição angular da barra 2, uma vez que os comprimentos das barras, r_1 , r_2 , r_3 e r_4 , são valores conhecidos. Note-se que para cada valor de θ , a função arcocoseno tem duas soluções para γ . Ao primeiro valor de γ corresponde a configuração representada na figura 2.5. Ao passo que para o segundo valor de γ a posição relativa entre as barras 3 e 4 é ilustrada na figura 2.6. Assim, observa-se que para cada valor de θ , o mecanismo de quatro barras pode assumir duas configurações distintas.

O ângulo de transmissão é mínimo quando a barra 2 está na posição AB' , e máximo quando a barra 2 alcança a posição AB'' , como se mostra na figura 2.7. Quando se pretende que um quadrilátero articulado transmita uma dada força ou momento, essa transmissão é tanto mais eficaz quanto mais próximo de 90° for o ângulo de transmissão durante o movimento. Assim, quando se projecta um mecanismo de quatro barras, o ângulo de transmissão deve, em geral, estar compreendido entre $90^\circ \pm 50^\circ$, isto é, 40° e 140° . Quando o ângulo de transmissão está fora deste intervalo, o mecanismo tende a bloquear, por um lado, devido ao atrito existente nas juntas cinemáticas e, por outro, porque as barras, intermédia e movida, tendem a ficar alinhadas uma com a outra. Dado que o ângulo de transmissão é fácil de obter, este parâmetro é comumente aceite como medida do desempenho de um mecanismo de quatro barras²¹.

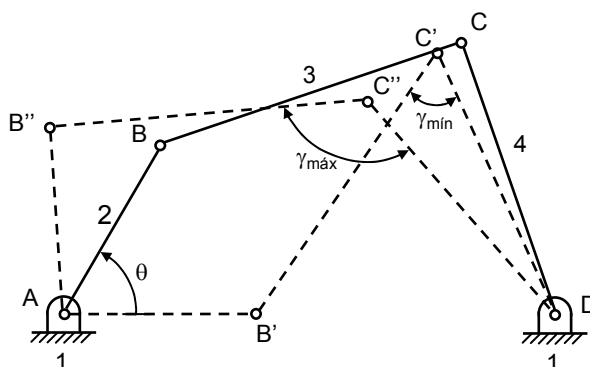


Figura 2.7 – Ângulo de transmissão mínimo e máximo.

Num quadrilátero articulado, o rácio entre a força (ou momento) da saída e força (ou momento) de entrada define a vantagem mecânica do mecanismo, isto é, $VM=M_4/M_2$. A vantagem mecânica pode também ser definida como o inverso da razão entre a velocidade angular de entrada e a velocidade angular de saída, ou seja, $VM=\omega_2/\omega_4$.

Na figura 2.8 estão representados os diagramas do corpo livre de cada uma das barras que constituem o mecanismo de quatro barras. Sendo a barra 2 o órgão motor, nela actua um momento motor M_2 , ao passo que na barra 4, órgão movido, é exercido um momento resistente M_4 . Admitindo que a barra movida está em equilíbrio, desprezando os efeitos devido à inércia do sistema, é nulo o somatório dos momentos

²¹ Para mecanismos do tipo came-seguidor ou de engrenagens, o valor do ângulo de pressão é usado como medida qualitativa do seu desempenho. Nestes casos o ângulo de transmissão é o ângulo medido entre a direcção da força transmitida e a direcção da velocidade do ponto onde essa força é aplicada.

que actuam na barra 4 em relação ao ponto D . Matematicamente, esta condição de equilíbrio é traduzida por,

$$M_4 - F_{34}r_4\text{sen}\gamma = 0 \quad (2.5)$$

em que F_{34} representa a força que a barra 3 exerce sobre a barra 4. Resolvendo a equação (2.5) em ordem a F_{34} vem que,

$$F_{34} = \frac{M_4}{r_4\text{sen}\gamma} \quad (2.6)$$

Da análise da equação (2.6) observa-se que para um dado momento resistente, M_4 , a força exercida ao longo da barra intermédia é mínima quando $\gamma=90^\circ$ e cresce à medida que o valor de γ decresce, tornando-se ∞ quando $\gamma=0^\circ$.

Do mesmo modo, para a barra 2 pode escrever-se,

$$-M_2 + F_{32}r_2\text{sen}\beta = 0 \quad (2.7)$$

Atendendo a que a magnitude da força F_{32} é igual à da força F_{34} , a vantagem mecânica do mecanismo de quatro barras pode ser expressa por,

$$VM = \frac{M_4}{M_2} = \frac{\omega_2}{\omega_4} = \frac{r_4\text{sen}\gamma}{r_2\text{sen}\beta} \quad (2.8)$$

em que β é o ângulo medido entre as barras 2 e 3, como ilustra a figura 2.8.

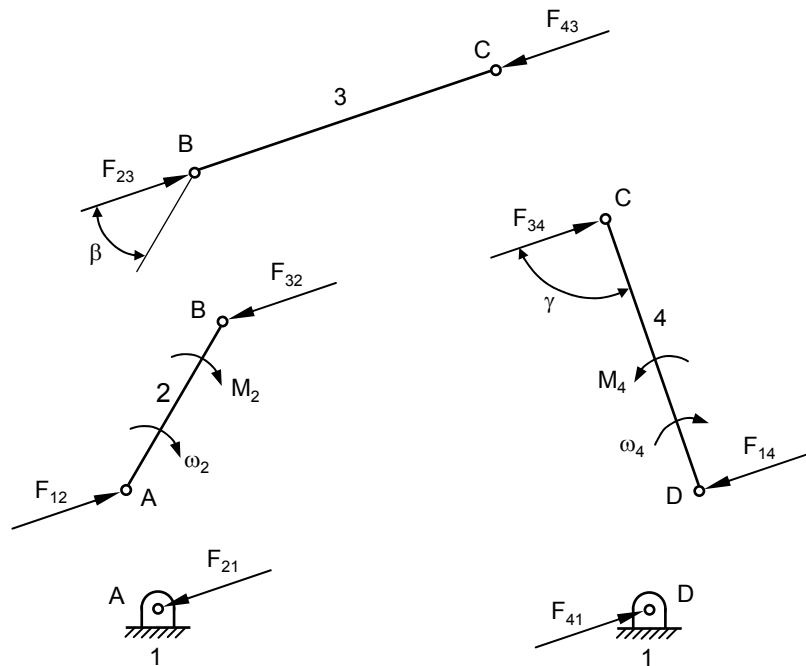


Figura 2.8 – Diagramas do corpo livre das barras do quadrilátero articulado.

2.2.4. Fases de Ponto Morto e Ponto de Mudança

No mecanismo de quatro barras, como em outros mecanismos, é possível que em determinadas fases do movimento duas das suas barras fiquem alinhadas uma com a outra. Quando assim acontece, e se o órgão motor for uma terceira barra, o

mecanismo fica numa fase de instabilidade ou singularidade denominada fase de ponto morto²². Na figura 2.9 está representado um quadrilátero articulado de dupla barra oscilante. Quando a barra 2 está colinear com a barra 3, correspondendo à configuração $AB'C'D$, e se na barra 4 for aplicado um momento, então a barra intermédia 3 apenas induz tração ou compressão na barra 2 sem que, contudo, esta descreva qualquer movimento. Nestas circunstâncias, o mecanismo está numa fase de instabilidade denominada fase de ponto morto. Porém, ainda para a mesma configuração $AB'C'D$ da figura 2.9, se a barra 2 for o órgão motor, não há qualquer ocorrência de fase de ponto morto.

Utilizando a equação (2.4) para a configuração $AB'C'D$ pode facilmente verificar-se que o ângulo de transmissão é nulo quando um mecanismo se encontra numa fase de ponto morto. Assim, exceptuando os casos em que se pretende transmitir forças extremamente elevadas, como por exemplo, o mecanismo denominado de alavanca articulada, as fases de ponto morto devem ser evitadas de modo a minimizar os esforços a que as barras e juntas cinemáticas estão sujeitas e assegurar que o movimento seja eficazmente transmitido. No projecto de mecanismos, em que se verifica a existência de fases de ponto morto, devem ser tomadas medidas no sentido de ultrapassar estas fases de modo a evitar bloqueios durante o movimento.

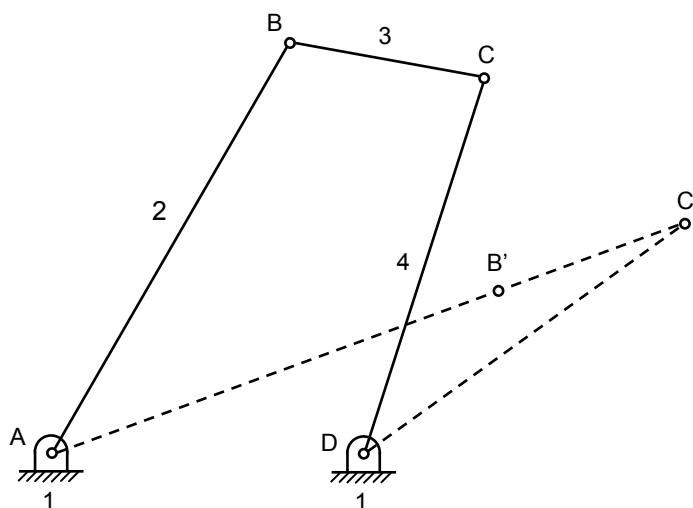


Figura 2.9 – Fase de ponto morto num mecanismo de quatro barras.

Um outro tipo de singularidade ou instabilidade que pode ocorrer nos mecanismos de quatro barras é a que se refere às fases de ponto de mudança. As fases de ponto de mudança acontecem quando todas as barras do mecanismo se encontram colineares. O quadrilátero articulado utilizado nas rodas das locomotivas é um exemplo bem elucidativo de um mecanismo em que ocorrem fases de ponto de mudança, como se mostra na figura 2.10. Deve referir-se que neste mecanismo, denominado mecanismo de paralelogramo, verifica-se a igualdade no critério de Grashof, isto é, a soma dos comprimentos da barra mais curta e da barra mais comprida é igual à soma dos comprimentos das outras duas barras.

²² Watt foi quem primeiramente utilizou a expressão ponto morto para se referir às fases do movimento da máquina a vapor em que uma força aplicada no pistão não originava qualquer movimento na manivela.

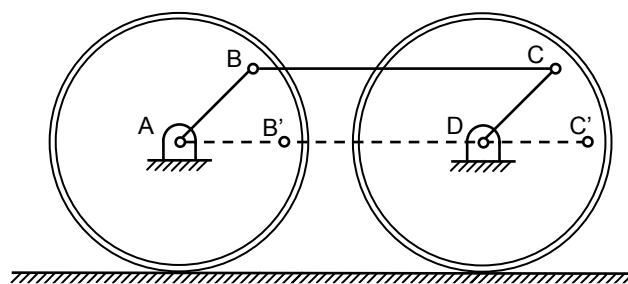


Figura 2.10 – Fase de ponto de mudança num quadrilátero articulado.

Quando o mecanismo se move da configuração $ABCD$ para $AB'C'D$, tal que todas as barras se encontram colineares, o movimento é cinematicamente indeterminado. Assim, se, por exemplo, a roda dianteira se mover de tal modo que o ponto C ocupa a posição C'' , a correspondente posição do ponto B da roda traseira pode ser a ilustrada na figura 2.11a, em que o mecanismo se mantém como paralelogramo, ou a configuração representada na figura 2.11b, sendo este mecanismo vulgarmente denominado de anti-paralelogramo ou contra-paralelogramo²³.

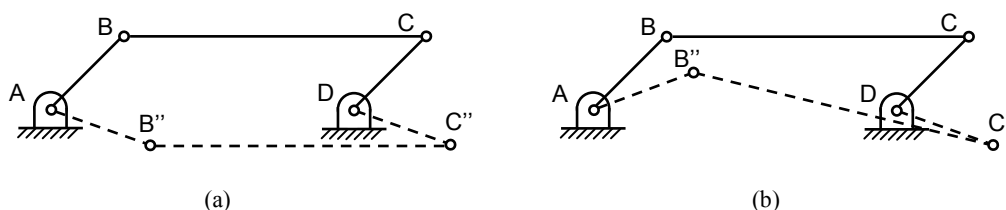


Figura 2.11 – (a) Paralelogramo; (b) Contra-paralelogramo.

Um modo de eliminar esta fase de ponto de mudança consegue-se acoplado volantes de inércia ou contrapesos. Esta solução é apenas válida para velocidades baixas devido aos desequilíbrios dinâmicos que os volantes produzem. Uma outra solução passa pelo acoplamento de uma segunda barra intermédia do outro lado da locomotiva e desfasada de 90° da primeira, de modo a que as fases de ponto de mudança não ocorram em simultâneo, como se mostra na figura 2.12. A experiência de projectistas e engenheiros diz que quando num mecanismo de accionamento de locomotivas uma das barras intermédias parte, a outra barra intermédia tem de ser desmontada antes que a locomotiva retome a marcha. Caso contrário podem ocorrer fases de ponto de mudança e, consequentemente, a própria barra ou um dos pinos podem partir.

A ocorrência de fases de ponto morto não deve ser confundida com as fases de ponto de mudança, embora seja possível que as duas situações ocorram em simultâneo. É importante notar uma diferença fundamental entre estas duas fases de instabilidade. A ocorrência de pontos mortos depende da posição da barra motora e do modo como a força motriz é aplicada. Um ponto de mudança, por seu lado, é originado pela configuração geométrica do mecanismo e é independente de qual das barras é a fixa ou motora, uma vez que a cadeia cinemática é a sempre mesma, isto é, o movimento relativa entre as barras é o mesmo independentemente da barra fixa.

²³ Reuleaux foi quem primeiramente utilizou o nome mecanismo de contra-paralelogramo. Há, ainda autores que preferem a designação mecanismo de borboleta.

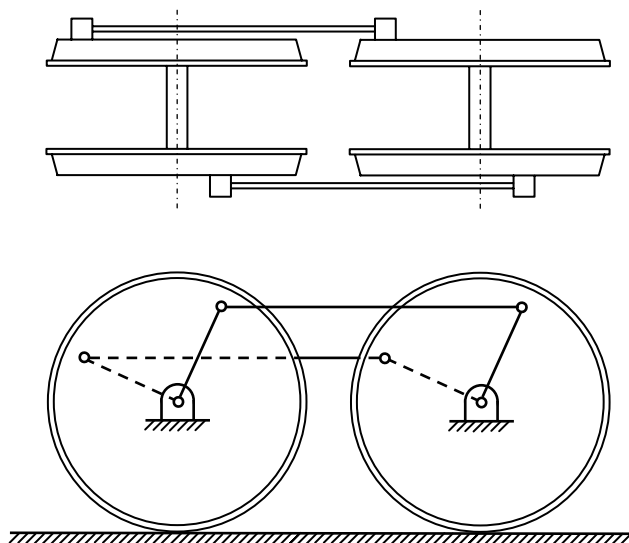


Figura 2.12 – *Quadrilátero articulado ou paralelogramo sem fase de ponto de mudança.*

A figura 2.13 mostra um outro mecanismo de quatro barras em que também ocorrem fases de ponto de mudança durante o movimento. Este mecanismo de quatro barras é do tipo dupla manivela e apresenta ainda outras características específicas, ou seja, não tem fases de ponto morto, ambas as barras 2 e 4 são rotativas e qualquer uma das barras 2 e 4 pode ser motora ou movida.

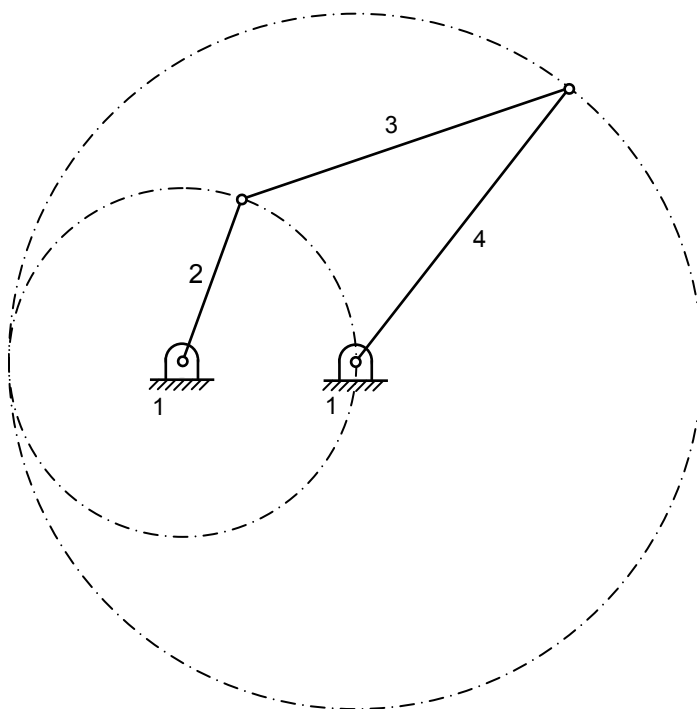


Figura 2.13 – *Mecanismo de quatro barras de dupla manivela.*

Este mecanismo de quatro barras verifica a igualdade no critério de Grashof. Uma outra particularidade do mecanismo de quatro barras de dupla manivela prende-se com o facto de que para uma entrada (órgão motor) a velocidade constante não corresponder uma saída (órgão movido) a velocidade constante. No caso particular

do mecanismo da figura 2.13, o comprimento das barras compridas é igual a duas vezes o comprimento das barras curtas. Nestas circunstâncias, para cada rotação completa da barra 4, a barra 2 descreve duas rotações completas. Por esta razão, este mecanismo é conhecido como mecanismo duplicador de voltas²⁴. Esta particularidade pode ser facilmente demonstrável através da sequência de movimentos representados na figura 2.14. Considerando que a posição inicial do mecanismo corresponde à configuração $AB'C'D$, na qual as barras 1 e 2 e as barras 3 e 4 estão sobrepostas duas a duas; quando a barra 4 roda 120° ($120^\circ=180^\circ-60^\circ$), o ponto B descreve uma semicircunferência de tal modo que a configuração do sistema é dada por $AB''C''D$. De seguida a barra 4 roda um arco de 60° e o ponto B descreve um movimento correspondente a uma semicircunferência, sendo a nova posição do sistema definida por $AB'''C'''D$, ficando as barras sobrepostas. Com efeito, após meia rotação da barra 4, a barra 2 descreve uma rotação completa. Assim, continuando a rodar a barra 4 até esta alcançar a posição inicial, facilmente se observa que a barra 2 começa a descrever uma nova rotação completa. Em suma, após cada rotação completa da barra 4, a barra 2 descreve duas rotações.

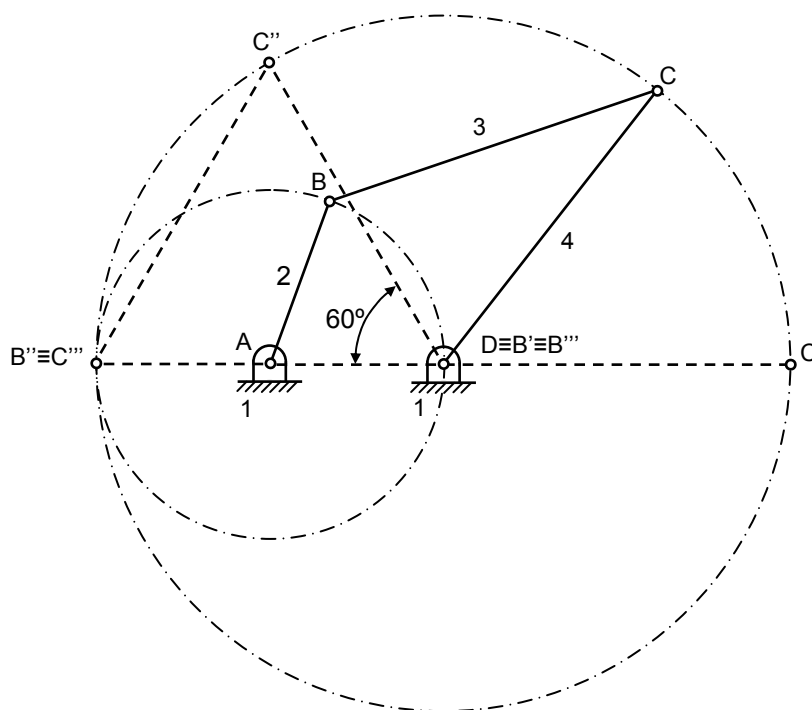


Figura 2.14 – Mecanismo de quatro barras, duplicador de voltas.

2.2.5. Aplicações do Mecanismo de Quatro Barras

Até meados do século XX, os engenheiros, os arquitectos, os projectistas e os desenhadores não dispunham das ferramentas actuais, nomeadamente as informáticas, para auxílio na execução de desenhos e de projectos. Havia, por isso, a necessidade de desenvolver dispositivos capazes de realizar tarefas específicas, tais como a traçagem de elementos geométricos complexos, a execução sistemática de cópias de desenhos, bem como a ampliação e redução de figuras e objectos.

²⁴ Reuleaux chama ao mecanismo duplicador de voltas mecanismo de Galloway. Por sua vez, Sylvester designa-o de papagaio devido à propriedade intrínseca de duplicar rotações.

A máquina universal de desenhar, ilustrada na figura 2.15, usa dois conjuntos de quatro barras (quadriláteros articulados) é, ainda hoje, utilizada no traçado de linhas rectas paralelas e perpendiculares, uma vez que os quadriláteros articulados são constituídos por dois pares de barras paralelas duas a duas. Na figura 2.15 estão representadas duas posições distintas da máquina de desenhar, podendo, deste modo, observar-se o seu funcionamento e o paralelismo entre as barras. O primeiro quadrilátero $ABCD$ está fixo à base através das juntas de rotação situadas em A e D , enquanto que o segundo quadrilátero $EFGH$, ligado ao primeiro através de um roda auxiliar, permite que a extremidade, que contém as réguas de desenhar, se mova horizontal e/ou verticalmente. As réguas estão solidárias e perpendiculares entre si e podem rodar em torno de P . Assim, utilizando réguas graduadas é possível traçar e medir distâncias lineares e angulares.

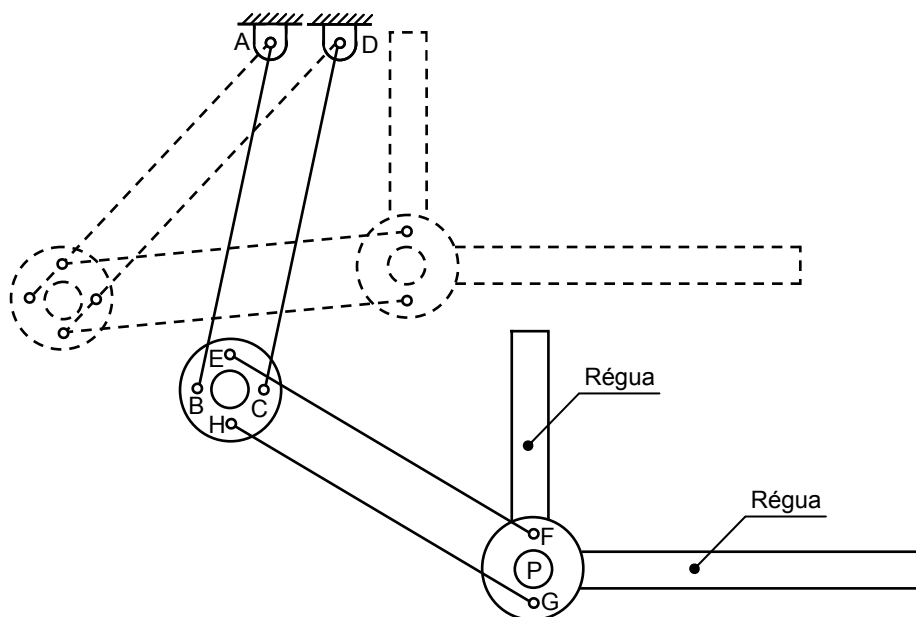


Figura 2.15 – Máquina de desenhar.

O pantógrafo²⁵ é um outro dispositivo mecânico em que se utiliza um mecanismo de quatro barras. Este mecanismo, simples e engenhoso, foi inventado em 1603 pelo jesuíta Schreiner com o propósito de copiar²⁶, ampliar e reduzir figuras planas. De facto, os pantógrafos são particularmente úteis quando se pretende reduzir ou ampliar desenhos cujas linhas são irregulares, como acontece frequentemente em desenhos topográficos. O pantógrafo também se utiliza em ourivesarias como dispositivo auxiliar na inscrição de alianças, anéis, medalhas entre outros objectos. O comando de máquinas-ferramenta com leitura óptica, como, por exemplo, o corte de chapa, pode ser feito com o recurso a um pantógrafo, sendo frequentemente usado um factor de ampliação de 10:1, entre o desenho e a peça executada.

²⁵ Pantógrafo, pantos=tudo + graphein=escrever, é uma palavra de origem grega que traduz a ideia de escrever/copiar tudo.

²⁶ A título de curiosidade referia-se que uma das maiores fraudes da História de Portugal foi levada a cabo com o auxílio de um pantógrafo. Decorria o ano de 1928 quando o vigaro Alves dos Reis reproduziu mais de quinhentas mil notas de 500\$00, cujo valor é aproximadamente 2,5€, iguais às que circulavam, copiando as assinaturas do governador e vice-governador do Banco de Portugal, com recurso a um pantógrafo.

A figura 2.16 mostra uma configuração genérica de um pantógrafo em que a junta de rotação situada em P está fixa e é denominada pólo. O pantógrafo²⁷ é constituído por um conjunto de quatro barras que formam um paralelogramo. As barras estão ligadas entre si por juntas cinemáticas de rotação nos pontos P , B , C e D . No ponto E é colocado um estilete que permite seguir o desenho a reduzir, enquanto que no ponto L existe um lápis com o qual é traçado o desenho reduzido. Quando se pretende fazer uma ampliação em vez de uma redução, invertem-se as posições do estilete e do lápis. A posição relativa entre pontos C , D , E e L é tal que os pontos P , L e E se situam na mesma linha recta, como ilustra a figura 2.16.

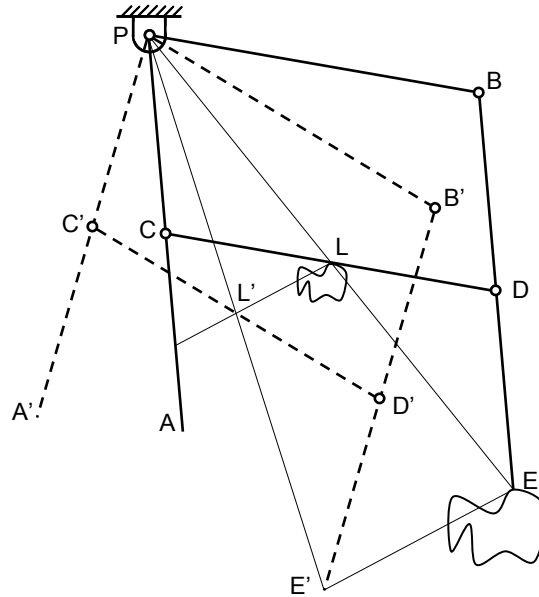


Figura 2.16 – Representação esquemática de um pantógrafo.

A demonstração do funcionamento do pantógrafo pode ser levada a cabo admitindo, por exemplo, que o ponto E se desloca até alcançar a posição E' , passando o pantógrafo a ocupar a posição representada a traço interrompido. Assim, enquanto que o movimento do estilete descreve o segmento EE' , o correspondente segmento descrito pelo lápis é LL' . Da observação da figura 2.16 pode concluir-se que os triângulos PEB e PCL são semelhantes, e, deste modo, pode escrever-se que,

$$\frac{PE}{PL} = \frac{BE}{PC} \quad (2.9)$$

Uma vez que os triângulos $PB'E'$ e $PC'L'$ são também semelhantes resulta que,

$$\frac{PE'}{PL'} = \frac{B'E'}{PC'} \quad (2.10)$$

Como as barras são perfeitamente rígidas, e uma vez que as posições relativas das juntas não varia durante o movimento, são válidas as seguintes relações,

$$BE = B'E' \quad (2.11)$$

$$PC = PC' \quad (2.12)$$

²⁷ Note-se que o pantógrafo não é, em rigor, um mecanismo de quatro barras mas sim de cinco barras.

donde,

$$\frac{PE}{PL} = \frac{PE'}{PL'} \quad (2.13)$$

Pelo que LL' e EE' são segmentos paralelos e obedecem à seguinte relação de proporcionalidade,

$$\frac{EE'}{LL'} = \frac{PE}{PL} = \frac{PE'}{PL'} = \frac{BE}{PC} \quad (2.14)$$

Conclui-se, portanto, que os comprimentos traçados pelo lápis são proporcionais aos traçados pelo estilete, sendo a razão de proporcionalidade, isto é, a escala de ampliação ou de redução, a relação entre os comprimentos BE e PC , ou seja, da distância entre a articulação C e o ponto P , uma vez que o comprimento BE não varia. Em geral, a barra CD do pantógrafo do tipo representado na figura 2.16 tem duas corrediças nas extremidades que permitem deslocar as posições das articulações correspondentes. Normalmente, as barras do pantógrafo têm uma graduação que permite marcar directamente as escalas de redução ou de ampliação pretendida.

2.3. MECANISMO BIELA-MANIVELA COM CORREDIÇA

O mecanismo biela-manivela com corrediça é um dos mecanismos mais utilizados em mecânica devido à sua simplicidade e versatilidade. Este mecanismo pode ser considerado como um caso particular do mecanismo de quatro barra em que a barra movida tem comprimento infinito. Esta transformação geométrica está representada na figura 2.17. Na prática, a barra movida transforma-se numa corrediça ou num pistão, constringida de forma a mover-se segundo uma linha recta, por meio de guias ou de um cilindro. A barra 2, que descreve movimento de rotação, é denominada manivela, enquanto que a barra intermédia, barra 3, é designada biela. No mecanismo biela-manivela, a manivela descreve somente movimento de rotação, a corrediça descreve apenas movimento de translação rectilínea e a biela tem um movimento geral ou misto, *i.e.*, co-existem as características cinemáticas associadas aos movimentos de rotação e de translação.

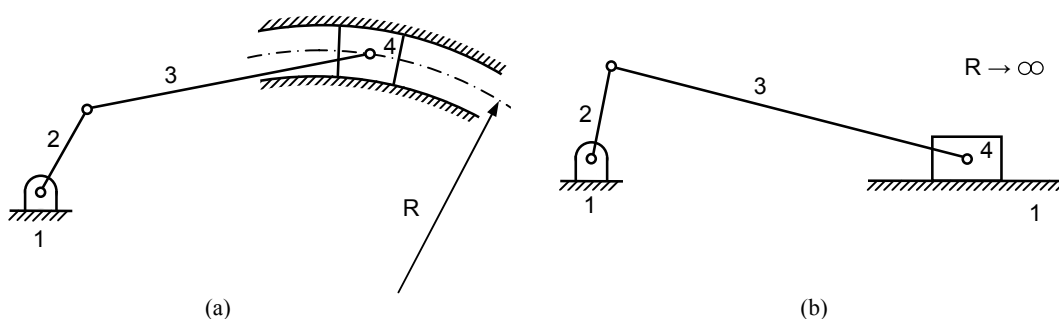


Figura 2.17 – (a) Quadrilátero articulado; (b) Mecanismo biela-manivela.

O mecanismo biela-manivela é largamente utilizado em sistemas mecânicos para transformar movimento de rotação em movimento de translação rectilínea, ou vice-versa. Uma das suas principais aplicações é em motores de combustão interna, como se ilustra em esquema na figura 2.18. Nestes motores, a corrediça representa o pistão sobre o qual os gases exercem pressão, a qual é transmitida à manivela por intermédio da biela. Nos motores de combustão interna, as fases de ponto morto, correspondentes às posições extremas do pistão, são superadas pela introdução de um volante de inércia no eixo da manivela.

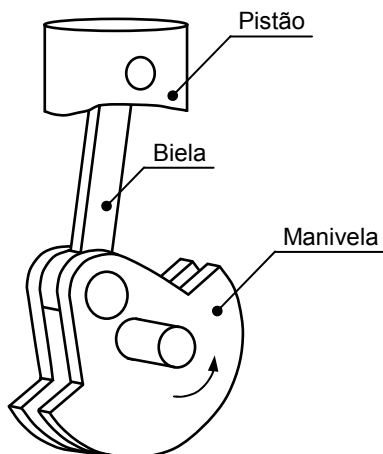


Figura 2.18 – Mecanismo biela-manivela de um motor de combustão interna.

O mecanismo biela-manivela encontra ainda aplicação frequente em compressores de ar, onde a manivela é o órgão motor que recebe o movimento de rotação, por exemplo, de um motor eléctrico, sendo transformado em movimento alternativo de translação que comprime o ar. Deve notar-se que neste tipo de aplicação não existem fases de ponto morto. Contudo, as fases de ponto de mudança podem existir sempre que a biela e manivela tenham o mesmo comprimento.

Uma vez que são quatro os corpos que compõem o mecanismo biela-manivela, há quatro possíveis inversões do mecanismo, como é ilustrado na figura 2.19. Na figura 2.19a está representado o mecanismo biela-manivela básico que existe nos motores de combustão interna. O corpo 4, o pistão, é o órgão motor que é accionado pela expansão dos gases de combustão, a barra 2 é o órgão movido e o fixe é o bloco ou cilindro. Tal como foi referido anteriormente, invertendo os papéis entre o órgão motor e movido, o mesmo mecanismo pode funcionar como compressor. Na figura 2.19b a manivela está fixa, ao passo que a barra 1, anteriormente fixa, pode rodar. Este tipo de mecanismo foi muito utilizado em motores de combustão interna nos primórdios da indústria aeroespacial, sendo conhecidos como motores rotativos porque os cilindros rodam em relação à manivela que está fixa. Uma outra inversão do mecanismo biela-manivela é a que mostra a figura 2.19c, em que biela é o corpo fixo. Este tipo de inversão teve aplicação como mecanismo de tracção nas locomotivas a vapor sendo o corpo 2 a roda. A inversão representada na figura 2.19d, em que a corredeira é o órgão fixo, corresponde ao mecanismo das bombas manuais utilizadas para retirar água de poços.

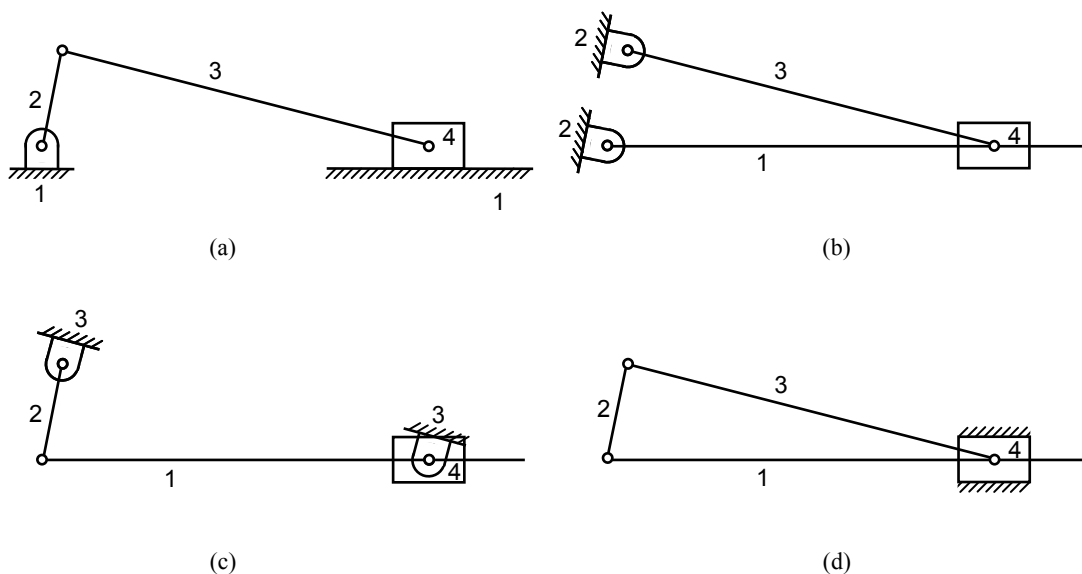


Figura 2.19 – Quatro possíveis inversões do mecanismo biela-manivela.

No mecanismo biela-manivela é comum relacionar a posição linear do pistão com a posição angular da manivela. Assim, atendendo à geometria da figura 2.20, pode escrever-se a seguinte expressão para a posição do pistão,

$$x_4 = AC = AD + DC = r \cos \theta + l \cos \varphi \quad (2.15)$$

em que r e l são, respectivamente, os comprimentos da manivela e da biela, sendo θ e φ as respectivas posições angulares.

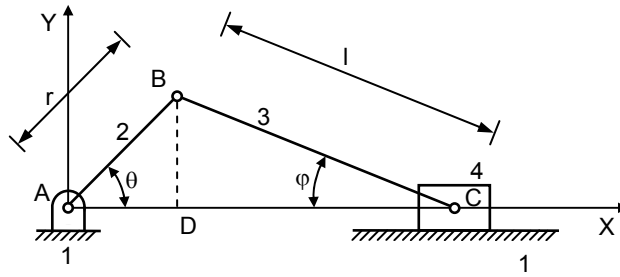


Figura 2.20 – Representação esquemática do mecanismo biela-manivela.

Na equação (2.15), a posição do pistão depende de duas variáveis, θ e φ , uma vez que para um dado mecanismo os comprimentos das barras são conhecidos. Porém, como o mecanismo biela-manivela tem apenas um grau de liberdade, uma das variáveis pode ser expressa como função da outra. Assim, e com o propósito de eliminar a variável φ , pode aplicar-se a lei dos senos²⁸ ao triângulo ABC , resultando a seguinte expressão,

$$\frac{r}{\text{sen}\varphi} = \frac{l}{\text{sen}\theta} \quad (2.16)$$

Resolvendo a equação (2.16) em ordem ao $\text{sen}\varphi$ e introduzindo o resultado na equação fundamental da trigonometria, vem que,

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \text{sen}^2\theta} \quad (2.17)$$

Substituindo a equação (2.17) em (2.15) obtém-se a expressão que traduz a posição do pistão em função da posição angular da manivela e dos comprimentos da manivela e da biela,

$$x_4 = r \cos\theta + l \sqrt{1 - \frac{r^2 \text{sen}^2\theta}{l^2}} \quad (2.18)$$

Nos mecanismos biela-manivela de uso corrente, o comprimento da biela, l , é cerca de 3 a 4 vezes superior ao comprimento da manivela, r , ou seja,

$$\frac{r}{l} = \frac{1}{4} \quad (2.19)$$

então,

$$\frac{r^2}{l^2} = \frac{1}{16} \quad (2.20)$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{r^2 \text{sen}^2\theta}{l^2} \leq \frac{1}{16} \quad (2.21)$$

²⁸ A lei dos senos diz que para qualquer triângulo, o quociente entre o comprimento de cada lado e o seno do ângulo oposto a esse lado é uma constante igual a $2R$, sendo R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

Contudo, da Análise Matemática sabe-se que qualquer expressão do tipo $\sqrt{1-\varepsilon}$ pode ser desenvolvida em uma série de potências do seguinte modo,

$$\sqrt{1-\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} - \dots \quad (2.22)$$

Porém, para $\varepsilon = \frac{1}{16}$, o terceiro termo é igual a $\frac{1}{2048}$, pelo que este termo e os seguintes podem ser desprezados, sendo aceitável o erro associado a esta simplificação. Com efeito, a equação (2.18) pode ser simplificada e reescrita como,

$$x_4 = r \cos \theta + l - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2l} \quad (2.23)$$

em que o primeiro termo corresponde ao comprimento AD , o segundo é BC e o terceiro é aproximadamente a diferença entre BC e BD . O curso total do pistão, isto é, a distância percorrido pelo pistão durante uma rotação da manivela, é igual ao dobro do comprimento da manivela, ou seja, $2r$.

Uma aplicação em que o mecanismo biela-manivela intervém activamente é no mecanismo de alavanca articulada, como se ilustra na figura 2.21. Este mecanismo é utilizado em situações em que é necessário superar uma elevada resistência à custa de uma força motriz reduzida, como por exemplo, em prensas mecânicas, máquinas de rebitar, britadeiras, embraiagens, dispositivos de fixação de peças a maquinário, sistemas de fecho rápido, entre outras aplicações. A alavanca articulada é usada, quer em situações estáticas, quer em situações dinâmicas.

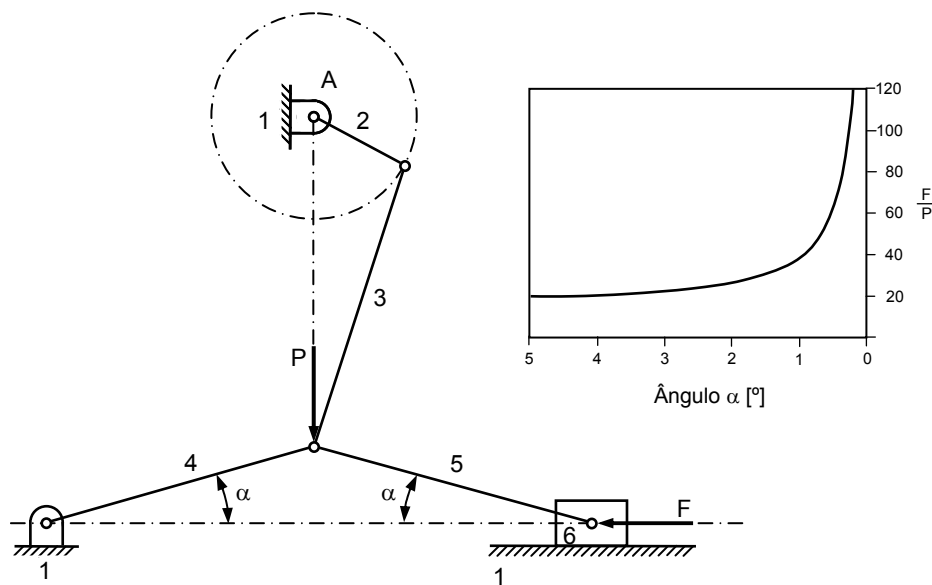


Figura 2.21 – Alavanca articulada.

O funcionamento da alavanca articulada é tal que à medida que o mecanismo biela-manivela, constituído pelas barras 1, 4, 5 e 6, atinge a posição em que a biela e a manivela se encontram colineares, verifica-se uma rápida subida da relação entre a força útil, F , e a força de accionamento, P , como se mostra da figura 2.21. Admitindo que as barras 4 e 5 têm o mesmo comprimento, da análise geométrica da figura 2.21, verifica-se que a relação entre a força útil e força motriz é dada por,

$$F = \frac{P}{2\operatorname{tg}\alpha} \quad (2.24)$$

sendo que, enquanto as barras 4 e 5 tendem para a colinearidade, o ângulo α diminui e, conseqüentemente, F tende para um valor infinito.

Uma outra variante do mecanismo biela-manivela é a que está representada na figura 2.22, em que existe uma excentricidade entre o eixo de rotação da manivela e a linha de acção descrita pelo movimento do pistão. Este mecanismo é também conhecido como mecanismo de manivela deslocada. Uma particularidade deste tipo de mecanismo é a diferença de tempo entre os movimentos de avanço e de recuo, sendo, por isso, usado como mecanismo de recuo rápido.

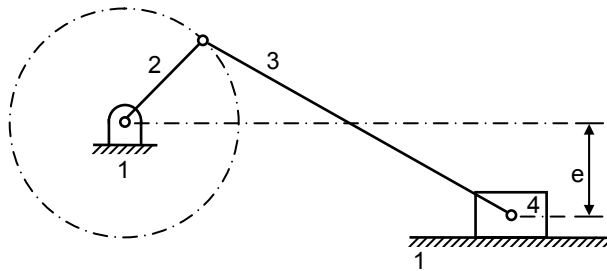


Figura 2.22 – Mecanismo biela-manivela com excentricidade.

2.4. MECANISMO DE SCOTCH YOKE

O mecanismo de scotch yoke, também conhecido como mecanismo de culatra escocesa ou jugo escocês, é um caso particular do mecanismo biela-manivela em que a biela tem comprimento infinito transformando-se numa corrediça, tal como é ilustrado na figura 2.23. O mecanismo de scotch yoke é, pois, constituído por quatro barras, o fixe 1, a manivela 2 e as corrediças, 3 e 4.

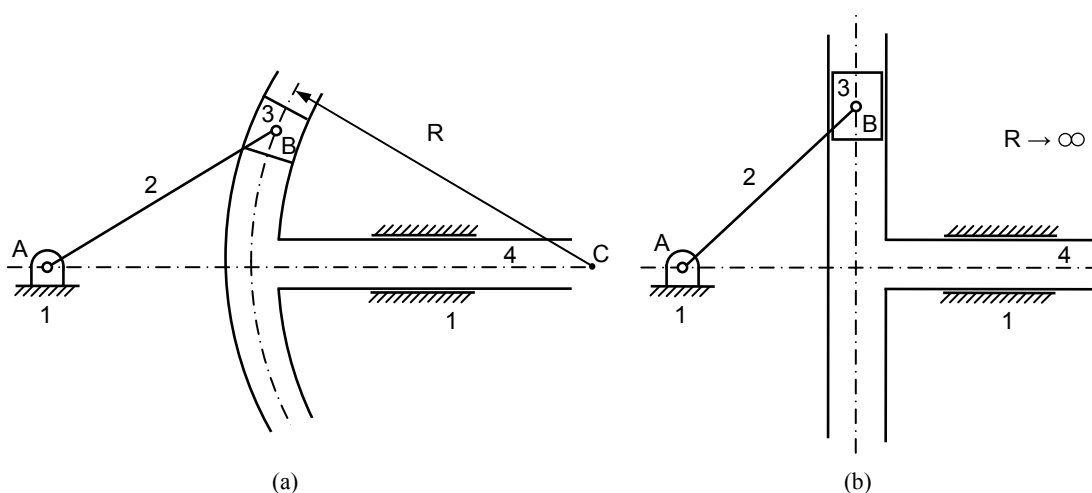


Figura 2.23 – (a) Mecanismo de dupla corrediça; (b) Mecanismo de scotch yoke.

Em relação ao mecanismo de quatro barras representado na figura 2.23a, quando a manivela roda em torno de A , a corrediça 3 desliza dentro da guia, corpo 4, de modo que o ponto B descreve uma trajetória circular e mantém constante a distância ao ponto C que define o centro da curvatura da guia. Deste modo resulta que a segmento de recta BC equivale a uma biela com o mesmo comprimento, e que a corrediça 4 descreve exactamente o mesmo movimento caso fosse uma corrediça do mecanismo biela-manivela equivalente. No mecanismo de scotch yoke da figura 2.23b, a corrediça 3 tem comprimento infinito, sendo a guia perpendicular ao movimento efectuado pela corrediça 4.

A principal aplicação do mecanismo de scotch yoke é em motores de bombas, em que a compacidade, isto é, o reduzido atravancamento e, conseqüentemente, a economia de espaço, é um factor importante. Contudo, o facto de a potência ser transmitida por escorregamento, entre as corrediças 3 e 4, limita, de algum modo, a sua aplicação a pequenos equipamentos em que as cargas em jogo são relativamente baixas. Este mecanismo é também utilizado em sistemas vibratórios, em máquinas laboratoriais, bem como geradores das funções trigonométricas seno e coseno. Aliás, uma das características mais importantes do mecanismo de scotch yoke é a capacidade de transformar um movimento rotativo a velocidade constante em movimento alternativo de vaivém do tipo harmónico simples²⁹.

A figura 2.24 mostra um esquema de um mecanismo de scotch yoke em que ao ponto A está associado um sistema de eixos XY . Ainda na mesma figura constam as designações das juntas cinemáticas do mecanismo. Assim, atendendo à geometria da

²⁹ A título de curiosidade, refira-se que um outro exemplo de mecanismo que gera um movimento harmónico simples é o que resulta da associação de um excêntrico com um seguidor do tipo prato.

figura, a expressão que relaciona a posição da corredeira 4 com a velocidade de rotação da manivela pode ser escrita como,

$$x_4 = AB\cos\theta = r\cos\theta \quad (2.25)$$

em que r é o comprimento da manivela e θ é o ângulo que esta faz com o eixo X .

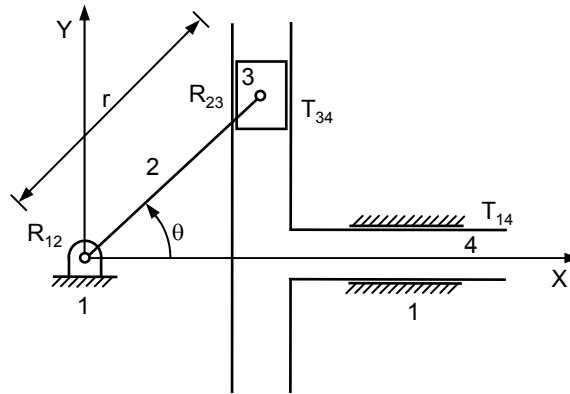


Figura 2.24 – Mecanismo de scotch yoke e respectivas juntas cinemáticas.

Uma das inversões do mecanismo de scotch yoke consiste em considerar fixo o corpo 4 resultando daí um mecanismo de dupla corredeira, vulgarmente denominado de compasso elíptico, como se ilustra na figura 2.25. Esta designação advém do facto de a trajectória descrita por um qualquer ponto situado na barra 2 ser elíptica, sendo, por conseguinte, uma das principais aplicações deste mecanismo o auxílio do traçado de elipses.

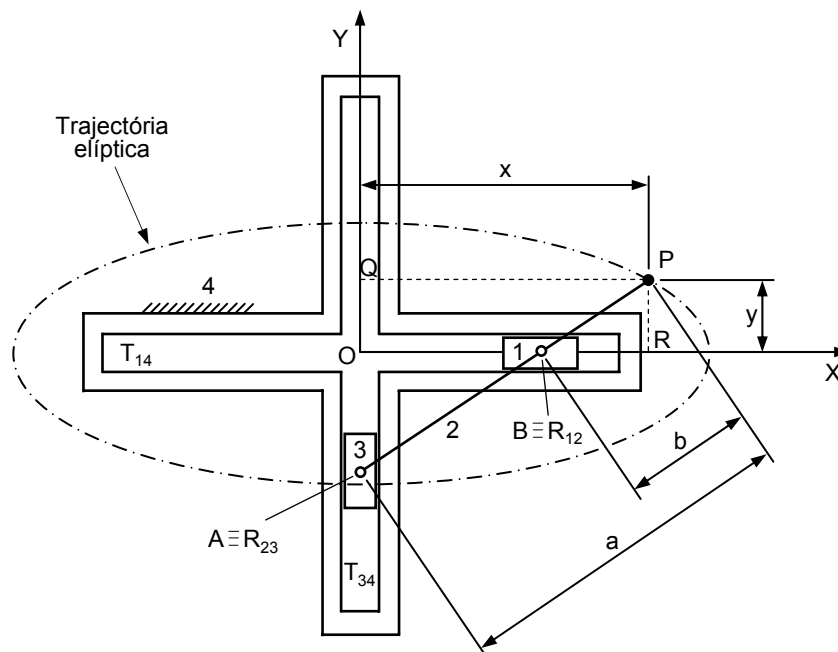


Figura 2.25 – Mecanismo de dupla corredeira ou compasso elíptico.

O funcionamento do compasso elíptico baseia-se no facto de o ponto P da barra 2 se mover ao longo de uma trajectória elíptica cujos eixos são as trajectórias rectilíneas dos pontos A e B , sendo os semi-eixos maior e menor da elipse iguais a

$PA=a$ e $PB=b$, respectivamente. Assim, a expressão matemática que traduz a elipse descrita pela trajectória do ponto P pode ser escrita como,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.26)$$

Da análise geométrica da figura 2.25 observa-se que,

$$\frac{x}{a} = \frac{PQ}{PA} \quad (2.27)$$

$$\frac{y}{b} = \frac{PR}{PB} \quad (2.28)$$

Por outro lado, da semelhança entre os triângulos PQA e PRB pode escrever-se a seguinte relação,

$$\frac{PR}{PB} = \frac{QA}{PA} \quad (2.29)$$

Adicionando a ambos os membros da equação (2.29) o factor $\frac{PQ}{PA}$ vem que,

$$\frac{PQ}{PA} + \frac{PR}{PB} = \frac{PQ}{PA} + \frac{QA}{PA} \quad (2.30)$$

Elevando ao quadrado os dois membros da equação (2.30) resulta em,

$$\frac{PQ^2}{PA^2} + \frac{PR^2}{PB^2} + 2\frac{PQ}{PA}\frac{PR}{PB} = \frac{PQ^2}{PA^2} + \frac{QA^2}{PA^2} + 2\frac{PQ}{PA}\frac{QA}{PA} \quad (2.31)$$

ou seja,

$$\frac{PQ^2}{PA^2} + \frac{PR^2}{PB^2} = \frac{PQ^2 + QA^2}{PA^2} + 2\frac{PQ}{PA}\left(\frac{QA}{PA} - \frac{PR}{PB}\right) \quad (2.32)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo PQA vem que,

$$PQ^2 + QA^2 = PA^2 \quad (2.33)$$

Donde a equação (2.32) pode ser simplificada e reescrita como,

$$\frac{PQ^2}{PA^2} + \frac{PR^2}{PB^2} = 1 \quad (2.34)$$

que é a equação da elipse que tem como centro a origem O dos eixos coordenados, e que traduz a trajectória do ponto P .

Uma outra inversão do mecanismo de scotch yoke é que consiste em considerar fixa a manivela 2, resultando no mecanismo chamado junta de Oldham, como se ilustra na figura 2.26. A principal característica deste mecanismo é a de transmitir movimento de rotação entre dois veios que são paralelos não coaxiais com um rácio unitário entre as velocidades angulares de entrada e de saída. A não coaxialidade é representada por e na figura 2.26. Embora pareça um mecanismo de movimento tridimensional, a junta de Oldham é, na verdade, um mecanismo de movimento plano uma vez que todos os seus pontos se movimentam em planos paralelos entre si e

perpendiculares ao eixo de rotação. Neste mecanismo, o corpo central 4 tem movimento de escorregamento relativamente aos corpos 1 e 3. Este sistema é, do ponto de vista cinemático, equivalente ao compasso elíptico, sendo possível estabelecer um paralelismo funcional entre o eixo e a ranhura do corpo 3 e, respectivamente, o ponto *A* e a corredeira a que este pertence. O corpo 1 corresponde a ranhura cruciforme onde as corredeiras se movimentam, como mostra a figura 2.25.

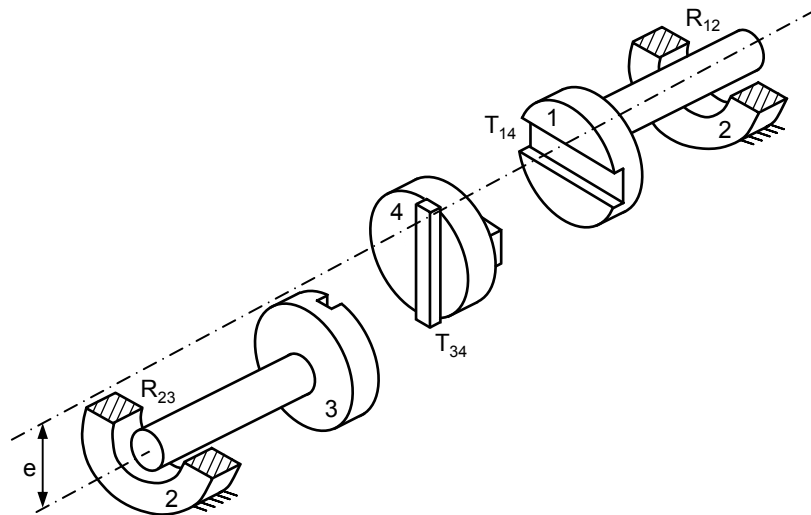


Figura 2.26 – Junta de Oldham.

Uma última inversão do mecanismo de scotch yoke pode obter-se fixando a corredeira 3 resultando um mecanismo semelhante ao da figura 2.23a. Esta inversão não tem qualquer aplicação prática, embora apresente alguns aspectos interessantes do ponto de vista teórico, como por exemplo, o facto de uma das juntas de rotação ser passiva podendo, ser considerada como soldada tornando-se num mecanismo de três barras que tende a bloquear facilmente devido ao excessivo número de constrangimentos.

2.5. MECANISMOS DE RETORNO RÁPIDO

2.5.1. Generalidades

Os mecanismos são utilizados em muitas aplicações industriais para realizarem operações repetitivas, tais como, movimentar peças ao longo de uma linha de montagem, apertar peças enquanto estas são maquinadas, soldadas, etc. Fresadoras, limadores são exemplos de máquinas-ferramenta projectadas de tal modo que a ferramenta depois ter efectuado o curso de corte retorna à posição inicial com uma velocidade superior à do avanço, aumentando, assim, a eficiência e a capacidade produtiva da máquina. É neste contexto que surgem os mecanismos de retorno rápido. Estes mecanismos são vulgarmente utilizados em máquinas-ferramenta e outros dispositivos em que se pretende realizar um movimento de trabalho ou avanço mais lento num sentido, e um movimento de retorno ao ponto de partida mais rápido, utilizando motores rotativos de velocidade angular constante. Os mecanismos de retorno rápido são compostos por combinações de mecanismos elementares como o quadrilátero articulado e o mecanismo biela-manivela com corredeira. De seguida são apresentados alguns exemplos de mecanismos de retorno rápido.

2.5.2. Mecanismo de Avanço

A figura 2.27 ilustra o mecanismo de avanço bem como as posições correspondentes aos extremos das fases de avanço e recuo. O mecanismo de avanço pode ser considerado como uma derivação do mecanismo de quatro barras de dupla manivela em que a barra 2 é órgão motor que roda com velocidade angular constante.

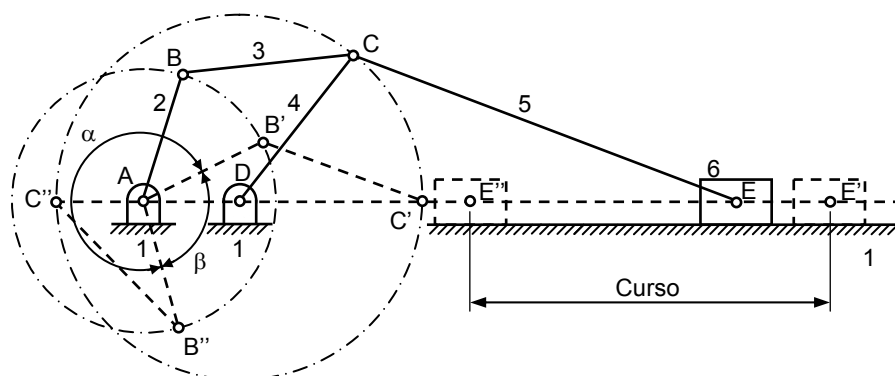


Figura 2.27 – Mecanismo de avanço.

De entre os mecanismos de retorno rápido, o mecanismo de avanço é o único em que não existem juntas cinemáticas de translação ou deslizantes entre as barras que constituem o mecanismo base. No mecanismo de avanço a velocidade de translação da corredeira 6 é aproximadamente constante na maior parte da extensão do percurso de avanço, daí a designação de mecanismo de avanço.

Nos mecanismos de retorno rápido a principal característica é designada razão de tempo (RT) que traduz a relação entre o tempo de avanço e o tempo de recuo. No projecto de mecanismos de retorno rápido deve ter-se em consideração que esta relação seja, tanto quanto possível, maior que a unidade. Assim, um mecanismo é, por definição, mecanismo de retorno rápido se e só se a razão de tempo for maior que

a unidade. Nos mecanismos de retorno rápido, o sentido de rotação do órgão motor não é arbitrário. Aliás quando num mecanismo de retorno rápido se inverte o sentido de rotação do motor, a razão de tempo torna-se menor que a unidade e, por isso, o mecanismo deixa de ser de retorno rápido.

Assim, considerando um accionamento a velocidade angular constante, a razão de tempo pode ser expressa pelo quociente entre o valor do ângulo de avanço ou de trabalho, α , e o valor do ângulo de recuo ou retorno, β , ou seja,

$$RT = \frac{\alpha}{\beta} \quad (2.35)$$

Deve notar-se que a razão de tempo nos mecanismos de retorno rápido não depende do trabalho a realizar nem da velocidade de rotação do órgão motor. A razão de tempo é uma propriedade cinemática intrínseca de um dado mecanismo, sendo determinada a partir da configuração geométrica do mecanismo.

2.5.3. Mecanismo de Whitworth

O mecanismo de Whitworth deriva da inversão do mecanismo biela-manivela quando se considera fixa a manivela, como se mostra na figura 2.28. Neste mecanismo, tanto a barra 2, como a barra 4 descrevem movimento de rotação contínua, sendo, por isso, consideradas manivelas. O movimento da corredeira 3 é condicionado pelo movimento giratório da manivela 4, razão pela qual o mecanismo de Whitworth é também conhecido como mecanismo de corredeira giratória. Este mecanismo é frequentemente utilizado em máquinas-ferramenta, e em particular em máquinas aplicadas à indústria têxtil.

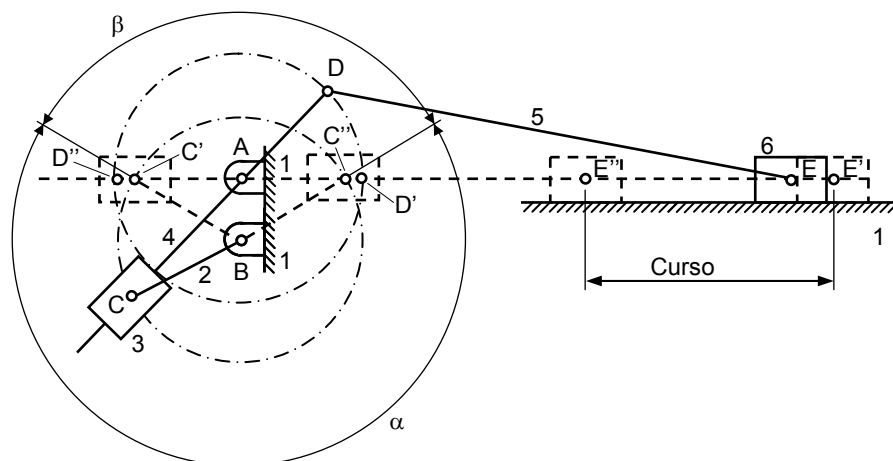


Figura 2.28 – Mecanismo de Whitworth.

2.5.4. Mecanismo de Manivela Deslocada

Este mecanismo é igualmente baseado no mecanismo biela-manivela, em que a configuração do sistema se obtém por deslocação do eixo da manivela para fora da linha de deslizamento, como se ilustra na figura 2.29. Este mecanismo é também conhecido como mecanismo biela-manivela com excentricidade, representada por e na figura. Com este mecanismo conseguem-se baixas razões de tempo, daí que a sua utilização se imponha, sobretudo, pela simplicidade e reduzido atravancamento.

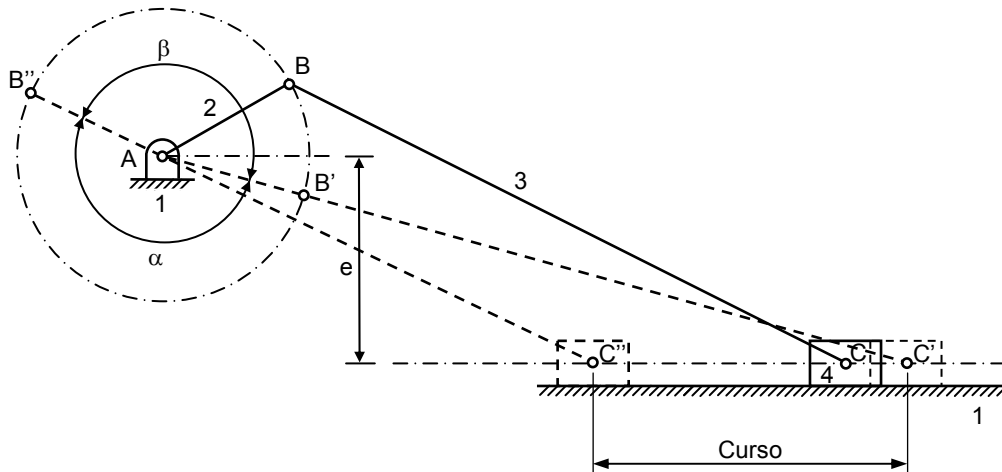


Figura 2.29 – Mecanismo de manivela deslocada.

2.5.5. Mecanismo do Limador

O mecanismo do limador, como o ilustrado na figura 2.30, não é mais do que uma variante do mecanismo de Whitworth, em que o movimento de rotação da manivela 2 é convertido em translação rectilínea na corrediça 6. À semelhança dos demais mecanismos apresentados nesta secção, no mecanismo do limador o movimento de retorno rápido é conseguido uma vez que o pino B da manivela 3 se move ao longo do arco α durante o curso de avanço ou corte, ao passo que durante o recuo ou retorno, o pino descreve um arco menor, β .

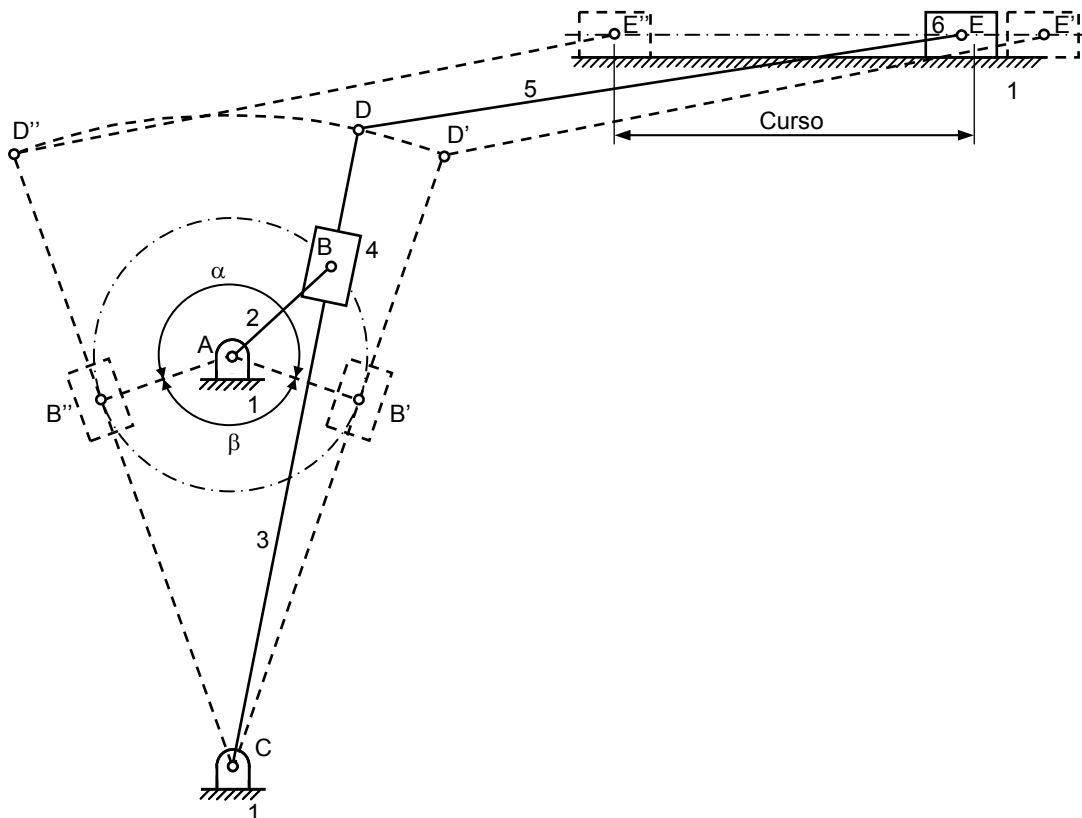


Figura 2.30 – Mecanismo do limador.

A figura 2.31 mostra um esquema simplificado do mecanismo do limador relativo a uma posição genérica. Da análise geométrica da figura pode escrever-se,

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{x}{a+b} \quad (2.36)$$

ou ainda

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{r_h}{r_v + b} \quad (2.37)$$

em que r_h e r_v são, respectivamente, as componentes horizontal e vertical da dimensão r que caracteriza o comprimento da manivela 2. Estas duas componentes podem ser calculadas como função do ângulo de rotação da manivela, θ , que é o órgão motor do mecanismo, isto é,

$$r_h = r \cos \theta \quad (2.38)$$

$$r_v = r \operatorname{sen} \theta \quad (2.39)$$

Substituindo as equações (2.38) e (2.39) na equação (2.37) resulta,

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{r \cos \theta}{r \operatorname{sen} \theta + b} \quad (2.40)$$

Igualando as equações (2.36) e (2.40) e resolvendo em ordem à variável x , que representa a trajectória rectilínea descrita pela corrediça, obtém-se,

$$x = \frac{r \cos \theta}{r \operatorname{sen} \theta + b} (a+b) \quad (2.41)$$

A equação (2.41) traduz a posição da corrediça em função da posição angular do órgão motor e das características dimensionais do mecanismo do limador.

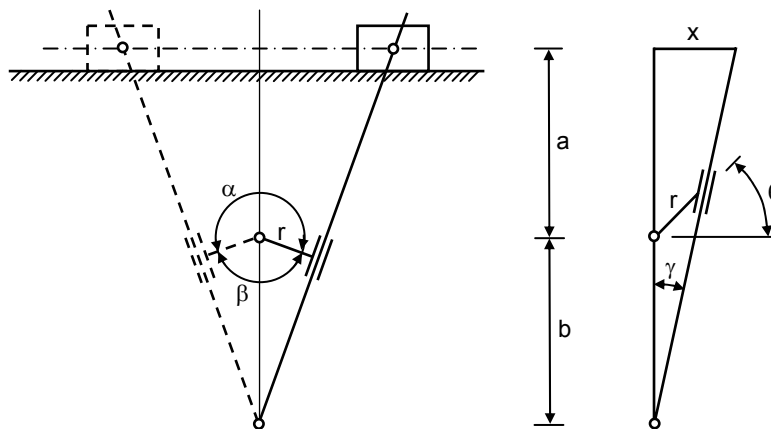


Figura 2.31 – Posição genérica do mecanismo do limador.

2.6. MECANISMOS GERADORES DE TRAJECTÓRIAS RECTILÍNEAS

2.6.1. Generalidades

Os mecanismos geradores de trajectórias rectilíneas, também conhecidos como mecanismos geradores de rectas, são mecanismos em que um ou mais pontos descrevem movimento alternativo ao longo de uma trajectória rectilínea. Esta trajectória, que pode ser aproximada ou exacta, é obtida apenas pela combinação de barras e juntas cinemáticas de rotação, excluindo-se, portanto, as juntas cinemáticas de translação. Deste modo, são eliminados os problemas associados ao atrito e ao desgaste inerentes ao funcionamento das juntas cinemáticas de translação do tipo guia-corrediça, como por exemplo, a que existe no mecanismo biela-manivela.

A origem dos primeiros mecanismos geradores de trajectórias rectilíneas remonta aos finais do século XVIII. Nesta época, o desenvolvimento científico e tecnológico era bastante incipiente e, por isso, a obtenção de superfícies planas com qualidade, quer ao nível dimensional, quer ao nível do acabamento superficial, era bastante difícil, se não mesmo impossível, de obter. É por esta razão que o número de mecanismos que incluem juntas de translação rectilínea, desenhados antes da revolução industrial, é bastante reduzido. É neste contexto, e nesta época, que foi dada especial ênfase ao projecto e concepção de mecanismos capazes de gerar trajectórias rectilíneas apenas pela associação de barras e juntas de rotação. Os mecanismos geradores de trajectórias rectilíneas encontram aplicação, por exemplo, em máquinas a vapor, máquinas-ferramenta, suspensões de automóvel, entre outras. Alguns dos mecanismos que pertencem a esta classe apenas possibilitam que o movimento seja rectilíneo somente em parte da trajectória, limitando, deste modo, o curso útil. Os mecanismos de Watt e de Chebyshev são dois exemplos de mecanismos em que pontos específicos descrevem trajectórias aproximadamente rectilíneas. Estes mecanismos são de uso mais frequente e, em geral, são projectados de tal forma que o ponto médio e os extremos da trajectória rectilínea pretendida se situam numa linha recta e que se minimiza o desvio dos restantes pontos da trajectória relativamente à linha recta que se pretende. O mecanismo de Peaucellier é um dos mais populares mecanismos geradores de trajectórias rectilíneas em que o movimento descrito por um dos seus pontos é exactamente rectilíneo.

De seguida são apresentados alguns dos principais mecanismos geradores de trajectórias rectilíneas disponíveis na literatura temática. Estes mecanismos adoptam, quase sempre, os nomes dos autores que os projectaram e desenvolveram.

2.6.2. Mecanismo de Watt

O mecanismo de Watt ou contra-paralelogramo articulado é, provavelmente, o mais conhecido dos mecanismos capazes de gerar trajectórias rectilíneas. Este mecanismo, ilustrado na figura 2.32, foi concebido por James Watt em 1784 para servir de guia do pistão da máquina a vapor³⁰, cujo curso era aproximadamente 1,2m.

³⁰ A máquina a vapor de Watt foi inventada em 1765, patenteada em 1769 e construída em larga escala em 1774. A França, em 1778, foi o primeiro país, que não o Reino Unido, a ter uma máquina a vapor de Watt. Apesar das grandes restrições inglesas em relação à exportação das máquinas e ferramentas, especialmente as da indústria têxtil do algodão e do linho, até ao ano de 1825 era já mais de 110 o número de máquinas a vapor existentes nos diversos países em vias de industrialização. A primeira máquina a vapor existente em Portugal remonta ao ano de 1803.

Refira-se que o aparecimento das juntas de translação, suficientemente capazes de operar com cursos longos, só se verificou no ano 1817. O mecanismo de Watt é utilizado para transformar movimento rectilíneo alternativo em movimento circular ou de rotação.

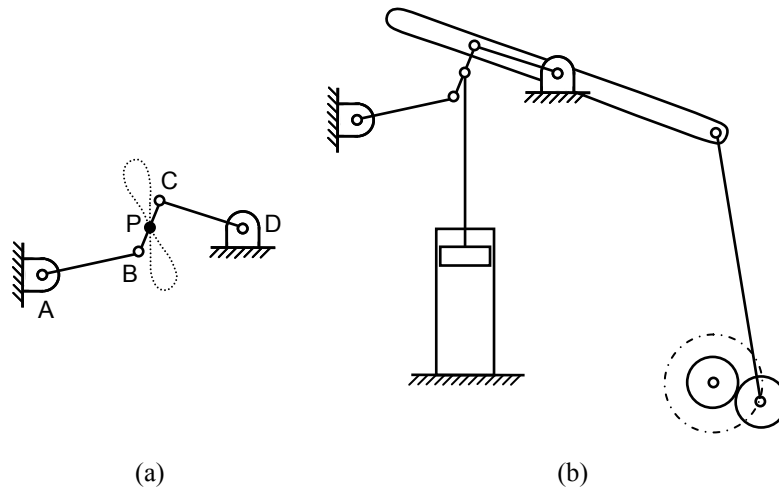


Figura 2.32 – (a) Mecanismo de Watt; (b) Máquina a vapor.

A figura 2.33 ilustra uma suspensão de um automóvel em que é usado um mecanismo de Watt para guiar o eixo de rotação que está ligado por intermédio de uma mola helicoidal. Esta aplicação do mecanismo de Watt é caracterizada por um excelente desempenho dado que envolve um curso relativamente pequeno.

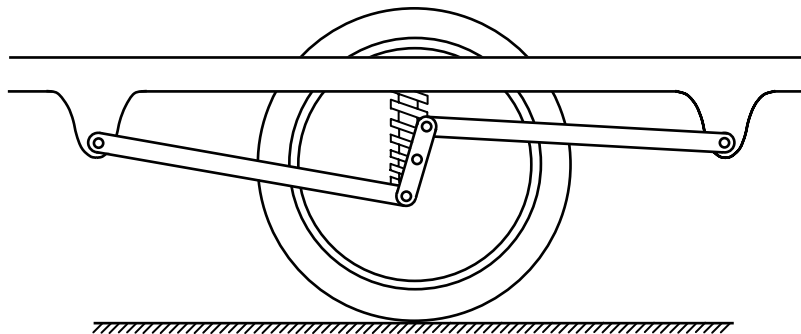


Figura 2.33 – Suspensão de um automóvel guiada por um mecanismo de Watt.

O mecanismo de Watt é constituído por quatro barras articuladas, uma fixa, duas manivelas e uma biela. A figura 2.34 mostra um caso particular do mecanismo de Watt em que as manivelas 2 e 4 são paralelas entre si e perpendiculares à biela 3. Trata-se, pois, de uma caso particular do mecanismo de Watt, uma vez que no caso mais geral nada é dito quanto à posição relativa das barras. No caso do mecanismo representado na figura 2.34, as manivelas 2 e 4 podem oscilar livremente em torno das juntas de rotação localizadas em *A* e *D*, respectivamente. A biela estabelece a ligação entre as duas manivelas através das juntas de rotação situadas em *B* e *C*. O movimento do ponto *P*, situado no centro geométrico da biela, descreve uma trajectória aproximadamente rectilínea quando as manivelas 2 e 4 oscilam. Assim, quando a manivela 2 roda no sentido directo, o ponto *B* move-se para a esquerda segundo uma trajectória circular, enquanto que o ponto *C* da manivela 4 se desloca

para a direita, também segundo uma trajectória circular. O movimento da biela é o que decorre pelo facto de estar constringida pelas juntas cinemáticas de rotação B e C , donde resulta que o ponto P descreve uma trajectória em forma de oito, cujo troço $s-s'$ é aproximadamente rectilíneo. A maximização desta trajectória rectilínea obtém-se quando, na configuração inicial representada na figura 2.34, as manivelas são paralelas entre si e perpendiculares à biela, não devendo a amplitude do movimento angular das manivelas exceder os 20° . Indicações complementares de projecto sugerem as seguintes relações geométricas,

$$AB = CD > \frac{3}{2}s \quad (2.42)$$

e que

$$BC > \frac{4}{7}s \quad (2.43)$$

em que s representa a trajectória rectilínea.

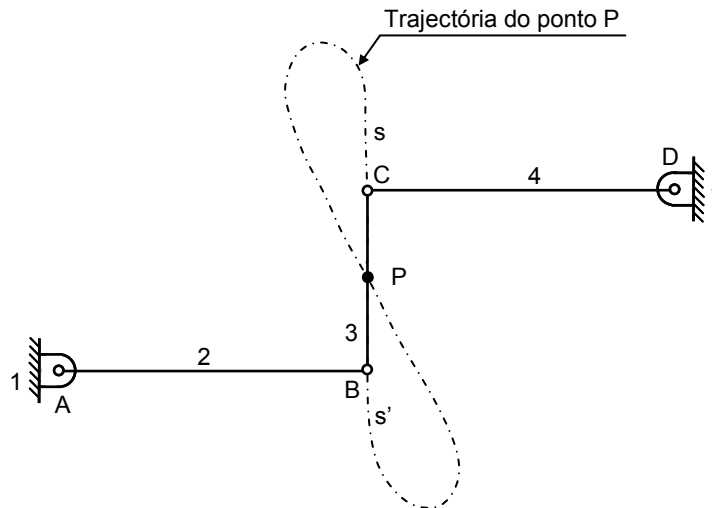


Figura 2.34 – Mecanismo de Watt, caso particular em que $AB=CD$, $AB//CD$ e $AB \perp BC$.

A figura geométrica descrita pelo ponto P denomina-se lemniscata³¹ de Bernoulli, razão pela qual o mecanismo de Watt é também conhecido como mecanismo de lemniscata. Lemniscata é uma figura geométrica que é representada por uma equação polinomial de sexta ordem, a qual pode ser facilmente deduzida. Na figura 2.35 está representada a configuração mais genérica do mecanismo de Watt em que o ponto P da biela descreve uma lemniscata hiperbólica³². Ainda na figura 2.35 está representado um sistema de coordenadas cartesianas cuja origem é coincidente com o

³¹ Lemniscata é curva geométrica de forma semelhante à de um oito em que é constante o produto das distâncias entre dois dos seus pontos fixos. Em 1694 foi concebida pela primeira vez a lemniscata de Bernoulli. Catorze anos antes, no ano de 1680, Cassini já tinha descrito, de modo genérico, uma família de curvas planas, conhecidas actualmente como ovais de Cassini. Mas, muito embora a lemniscata seja um caso particular de uma oval de Cassini, na época de Bernoulli não havia ainda consciência desse facto. Só mais tarde quando as propriedades daquelas curvas foram sendo conhecidas e as suas características mais diversificadas, tal facto se tornou claro. Este tipo de curva geométrica é utilizado em engenharia civil, nomeadamente no traçado de curvas de transição entre alinhamentos rectos e curvos de modo a assegurar variações contínuas da aceleração centrífuga e melhorar a óptica dos traçados.

³² Lemniscata hiperbólica é uma curva inversa da uma hipérbole.

centro geométrico da lemniscata. Na presente situação admite-se que as barras 2 e 4 têm o mesmo comprimento a , e que o comprimento da barra 3 é b . A distância entre as juntas cinemáticas de rotação A e D é igual a c .

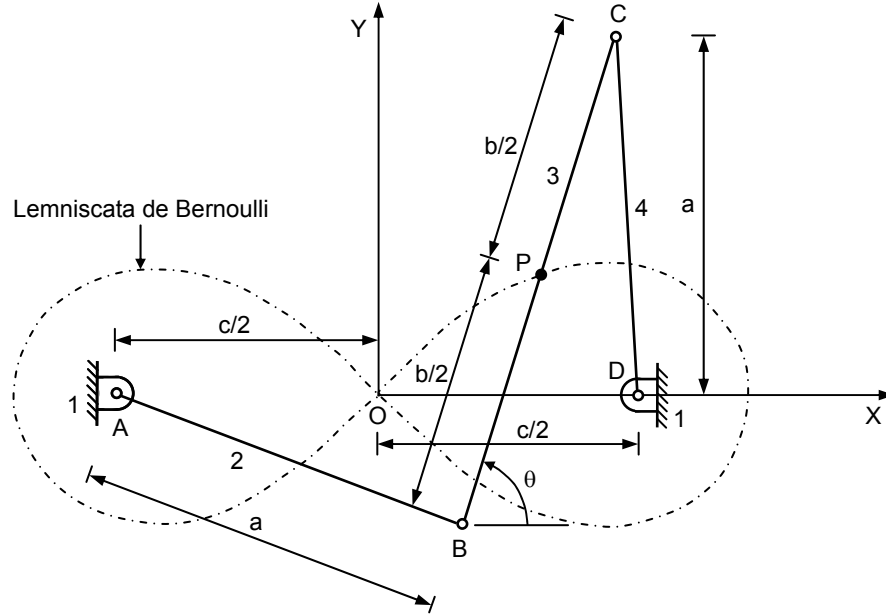


Figura 2.35 – Configuração genérica do mecanismo de Watt.

Atendendo à geometria da figura 2.35, as coordenadas cartesianas dos pontos B e C podem ser escritas como,

$$x_B = x_P - \frac{b}{2} \cos \theta \quad (2.44)$$

$$y_B = y_P - \frac{b}{2} \sin \theta \quad (2.45)$$

$$x_C = x_P + \frac{b}{2} \cos \theta \quad (2.46)$$

$$y_C = y_P + \frac{b}{2} \sin \theta \quad (2.47)$$

Pelo aplicação do teorema de Pitágoras pode escrever-se,

$$(x_B + \frac{c}{2})^2 + y_B^2 = a^2 \quad (2.48)$$

$$(x_C - \frac{c}{2})^2 + y_C^2 = a^2 \quad (2.49)$$

Substituindo as equações (2.44)-(2.47) em (2.48) e (2.49) vem que,

$$(x_P - \frac{b}{2} \cos \theta + \frac{c}{2})^2 + (y_P - \frac{b}{2} \sin \theta)^2 = a^2 \quad (2.50)$$

$$(x_P + \frac{b}{2} \cos \theta - \frac{c}{2})^2 + (y_P + \frac{b}{2} \sin \theta)^2 = a^2 \quad (2.51)$$

As equações (2.50) e (2.51) podem ser reescritas como,

$$x_P^2 + y_P^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - a^2 - bx_P \cos \theta - by_P \sin \theta - \frac{bc}{2} \cos \theta + cx_P \quad (2.52)$$

$$x_P^2 + y_P^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - a^2 + bx_P \cos \theta + by_P \sin \theta - \frac{bc}{2} \cos \theta - cx_P \quad (2.53)$$

ou ainda,

$$x_p^2 + y_p^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - a^2 = \frac{bc}{2} \cos \theta \quad (2.54)$$

$$bx_p \cos \theta + by_p \sin \theta = cx_p \quad (2.55)$$

Da equação (2.54) pode escrever-se que,

$$\cos \theta = \frac{2(x_p^2 + y_p^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - a^2)}{bc} \quad (2.56)$$

Substituindo a equação (2.56) em (2.55) e resolvendo em ordem ao $\sin \theta$ vem que,

$$\sin \theta = \frac{c^2 x_p - x_p 2(x_p^2 + y_p^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - a^2)}{bc y_p} \quad (2.57)$$

Aplicando a lei fundamental da trigonometria às equações (2.56) e (2.57), e após tratamento matemático, resulta na seguinte expressão que traduz a equação de uma lemniscata de Bernoulli simétrica, equação (2.58).

$$4y_p^2(x_p^2 + y_p^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - a^2)^2 + x_p^2[c^2 - 2(x_p^2 + y_p^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - a^2)] = b^2 c^2 y_p^2 \quad (2.58)$$

2.6.3. Mecanismo de Scott Russel

O mecanismo de Scott Russel³³ está esquematicamente ilustrado na figura 2.36, em que o órgão motor é a manivela 2 que oscila um ângulo 2θ em torno do eixo que passa em A solidário com o fixe. A manivela está ligada ao ponto de traçagem P , ponto médio da biela, por intermédio de uma junta de rotação. Neste mecanismo são iguais os comprimentos AB , BC e BP .

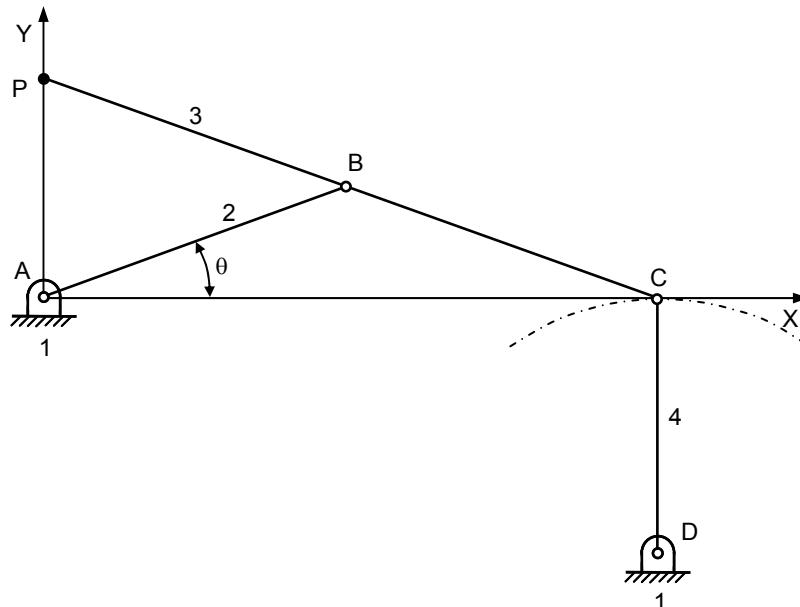


Figura 2.36 – Mecanismo de Scott Russel.

³³ Não é unânime a atribuição da invenção deste mecanismo a Scott Russel, há aliás diversas referências bibliográficas que atribuem a Oliver Evans e também a William Freemantle a descoberta deste mecanismo.

Admitindo que o ponto C se move ao longo do eixo X , então, o ponto P desloca-se segundo o eixo Y , isto é, perpendicular à trajectória do ponto C . Assim, com o mecanismo de Scott Russel consegue transformar-se um movimento rectilíneo em um outro movimento rectilíneo na direcção perpendicular à direcção do primeiro. Na verdade, a trajectória do ponto P é aproximadamente rectilínea uma vez que o ponto C oscila em torno de D . O movimento do ponto P é tanto mais rectilíneo quanto maior for o comprimento da barra 4 e menor for o ângulo θ descrito pela manivela 2.

No mecanismo de Scott Russel verifica-se a seguinte relação geométrica,

$$AB^2 = BC \cdot BP \quad (2.59)$$

Variantes deste mecanismo são aqueles em que BP é maior que AB e aqueles em que BC é meio proporcional a AB e BP , isto é, em que $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BP}$. Deste modo, consegue-se uma boa aproximação à rectilinearidade.

O mecanismo de Scott Russel foi usado por Oliver Evans na máquina a vapor que inventou, razão pela qual este mecanismo é também conhecido como mecanismo de Evans. William Hedley utilizou o mecanismo de Scott Russel como sistema de accionamento das rodas de locomotivas, em que a sua disposição em funcionamento se assemelhava à locomoção dos gafanhotos, por isso, o mecanismo de Scott Russel é também designado mecanismo de gafanhoto.

2.6.4. Mecanismo de Roberts

O mecanismo de Roberts, ilustrado na figura 2.37 consiste num quadrilátero articulado duplamente oscilante, em que as manivelas AB e CD têm o mesmo comprimento e a barra BC mede metade da dimensão AD .

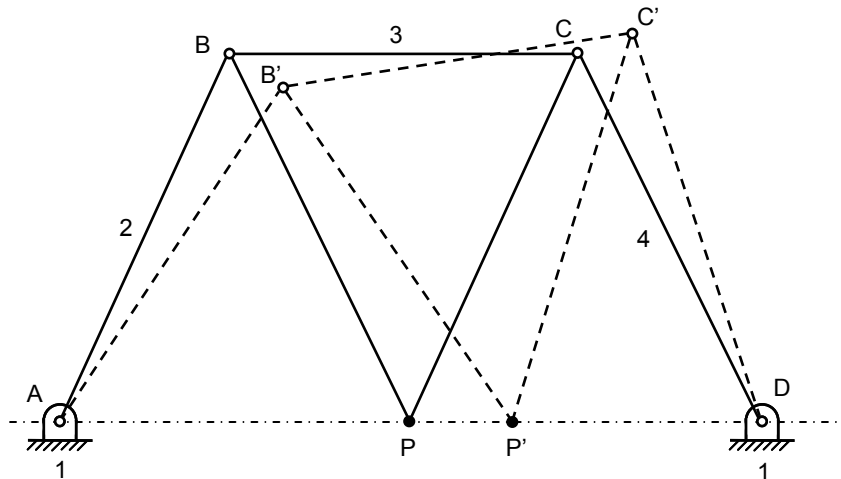


Figura 2.37 – Mecanismo de Roberts.

Este mecanismo fica completo com uma extensão da barra 3 na sua perpendicular e com um comprimento tal que o ponto P fique sobre o ponto médio de AD , quando BC se encontrar paralela a AD . O movimento de rotação das manivelas 2 e 4 é limitado, para um e outro lado, à colinearidade entre BC e AD . O ponto P passa pelo ponto médio de AD , posição representada na figura 2.37, e, próximo dos extremos do percurso, passa por A e D , segundo uma trajectória aproximadamente rectilínea.

No mecanismo de Roberts verificam-se as seguintes relações geométricas,

$$AB = BC = BP = CP \quad (2.60)$$

Deste modo, o triângulo BCP é isósceles.

Do ponto de visto do projecto, o comprimento de AB e de CD deve ser pelo menos igual a 60% de AD , e quanto maior for esta relação mais rectilínea e próxima de AD é a trajectória do descrita pelo ponto P .

2.6.5. Mecanismo de Chebyshev

O mecanismo de Chebyshev, ilustrado na figura 2.38, é também um quadrilátero articulado duplamente oscilante, em que o ponto médio P da barra 3 descreve uma trajectória aproximadamente rectilínea num percurso relativamente longo. Este mecanismo é frequentemente usado como guia linear.

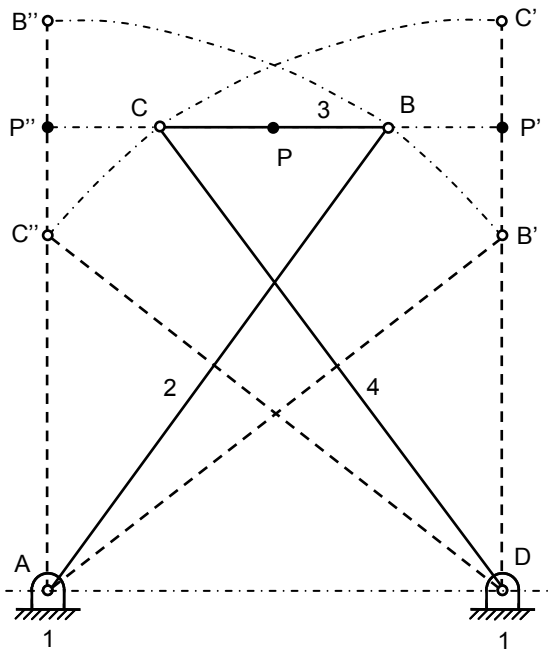


Figura 2.38 – Mecanismo de Chebyshev.

No mecanismo de Chebyshev observam-se as seguintes relações geométricas,

$$AD = 4 \quad (2.61)$$

$$BC = 2 \quad (2.62)$$

$$AB = 5 \quad (2.63)$$

$$CD = 5 \quad (2.64)$$

Do funcionamento do mecanismo de Chebyshev tem-se que, por um lado, na posição em que B está em B' , na perpendicular a AD que passa por D , os pontos C e P estarão em C' e P' , respectivamente, e sobre a mesma linha. Por outro, quando na posição em que B está em B'' , similarmente, os pontos C e P estão em C'' e P'' , sobre a linha perpendicular a AD que passa por A . Assim, o ponto P encontra-se, em três posições distintas, sobre o segmento de recta $P'P''$ paralelo a AD , seguindo uma trajectória aproximadamente rectilínea.

2.6.6. Mecanismo de Peaucellier

O mecanismo de Peaucellier³⁴ foi inventado em 1864 e consiste em oito barras e seis juntas cinemáticas de rotação, quatro das quais são ligações ternárias, como ilustra a figura 2.39. Este mecanismo funciona com um inversor, isto é, transforma um movimento de rotação em um movimento de translação rectilínea. Peaucellier chamou a este mecanismo compasso composto.

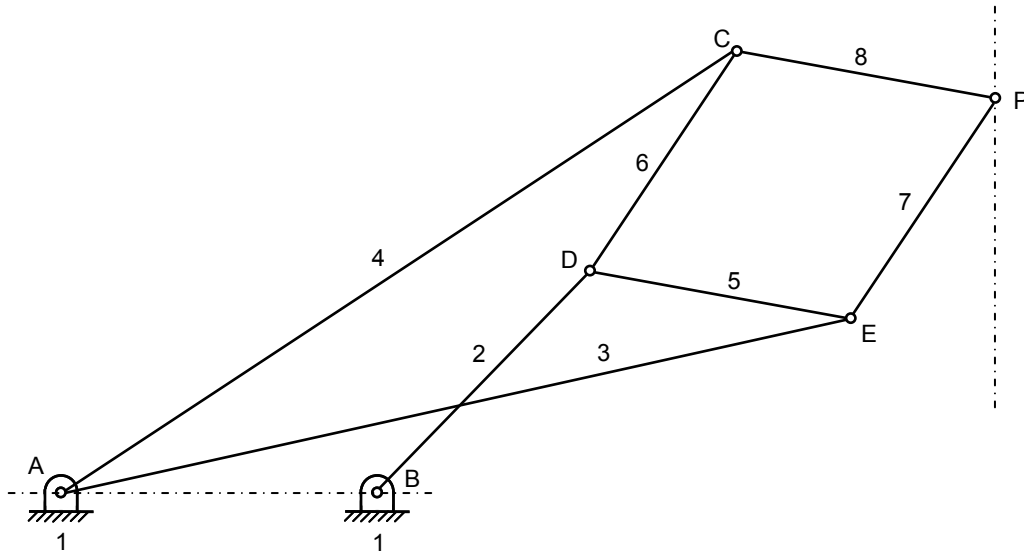


Figura 2.39 – Mecanismo de Peaucellier.

O mecanismo de Peaucellier é de entre os mecanismos geradores de trajectórias rectilíneas apresentadas neste trabalho o único em que o ponto de traçagem descreve uma trajectória exactamente rectilínea³⁵. Este mecanismo tem aplicação prática em sistemas de controlo, registadores, aparelhos de leitura e seguimento, entre outros.

No mecanismo de Peaucellier verificam-se as seguintes relações geométricas,

$$AB = BD \quad (2.65)$$

$$AC = AE \quad (2.66)$$

$$CD = DE = CP = EP \quad (2.67)$$

O mecanismo de Peaucellier obtém-se acoplando dois rombóides³⁶ semelhantes. Considerando a circunferência de centro em B e raio $AB=BD$, a potência de A relativamente a essa circunferência é expressa por,

$$AD \cdot AP = AC^2 - CP^2 \quad (2.68)$$

³⁴ Charles Nicolas Peaucellier foi um oficial de engenharia da armada francesa. À sua descoberta não foi inicialmente dado o seu real valor, tendo caído quase no esquecimento, até ter sido redescoberto por um estudante russo Lippman Lipkin, que recebeu um prémio chorudo do Governo Russo pela sua suposta originalidade. Entretanto, o mérito de Peaucellier foi finalmente reconhecido, tendo sido galardoado com o prémio “Prix Montyon” de Grande Mecânico do Instituto de França. Pelo exposto, este mecanismo é também conhecido como mecanismo de Peaucellier-Lipkin.

³⁵ Hart também desenvolveu um mecanismo capaz de gerar um movimento exactamente rectilíneo em toda a sua trajectória.

³⁶ Rombóide é um quadrilátero com dois pares de lados consecutivos iguais, que passam por cada um dos extremos de uma das diagonais. Rombo é um rombóide em que os quatro lados são iguais.

Assim, quando D descreve uma circunferência que passa por A , P descreve uma recta inversa dessa circunferência no inversor de pólo A e potência $AC^2 - CP^2$. Esta recta é perpendicular à recta que passa por A e B .

A figura 2.40 ilustra uma outra configuração do mecanismo de Peaucellier, em que o ponto D descreve uma circunferência. Note-se ainda que as linhas PM e $P'M'$ são perpendiculares a MM' . O ângulo ADR , sendo o ângulo numa semicircunferência é um ângulo recto, pelo que os triângulos ADR e AMP são semelhantes, donde se deduz que,

$$AD / AR = AM / AP \quad (2.69)$$

ou ainda,

$$AD \cdot AP = AM \cdot AR \quad (2.70)$$

qualquer que seja a posição de D sobre a circunferência. Como as dimensões AM e AR são constantes, quando D se move na circunferência, P desloca-se de tal forma que A , D e P estão sempre alinhados, e $AD \cdot AP$ é sempre constante, portanto o ponto P descreve a linha recta PM perpendicular à linha recta AB .

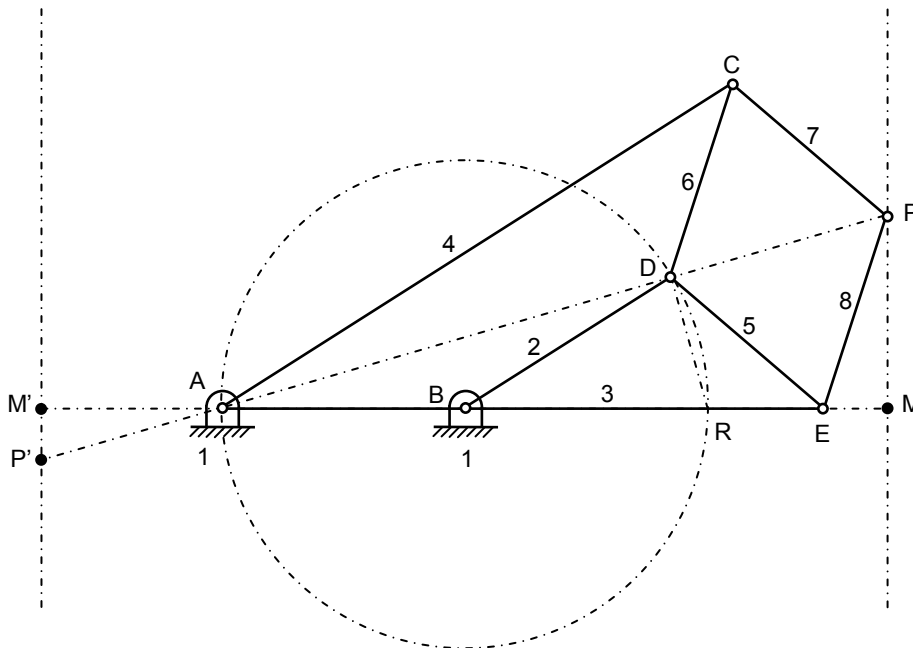


Figura 2.40 – Configuração genérica do mecanismo de Peaucellier.

Do mesmo modo, se se considerar o ponto P' do lado oposto, como $AD \cdot AP'$ é constante, P' descreve uma trajectória rectilínea $P'M'$.

Na figura 2.41 está representada uma configuração particular do mecanismo de Peaucellier, em que se evidencia a simetria do mecanismo, sendo os pontos A , D e P colineares. Considere-se o segmento imaginário CN perpendicular a DP . Pela aplicação do teorema de Pitágoras vem que,

$$AC^2 = AN^2 + CN^2 \quad (2.71)$$

$$CP^2 = CN^2 + NP^2 \quad (2.72)$$

Rearranjando as equações (2.71) e (2.72), pode escrever-se que,

$$AC^2 - CP^2 = AN^2 - NP^2 \quad (2.73)$$

e como $AN^2 - NP^2$ é igual a $(AN - NP)(AN + NP)$, a equação (2.73) pode reescrever-se como,

$$AC^2 - CP^2 = AD \cdot AP \quad (2.74)$$

que é exactamente igual à equação (2.68).

Assim, como AC e CD são constantes, $AD \cdot AP$ é sempre constante, quer D e P estejam perto ou longe de A . Como o ponto A é solidário com o fixe e o ponto D é desenhado de modo a descrever uma circunferência de centro em B , assim o ponto P reúne as condições geométricas necessárias para se deslocar segundo uma trajectória rectilínea. A distância da trajectória rectilínea aos pontos A e B depende de $AC^2 - CP^2$ que pode ser fixada de forma arbitrária.

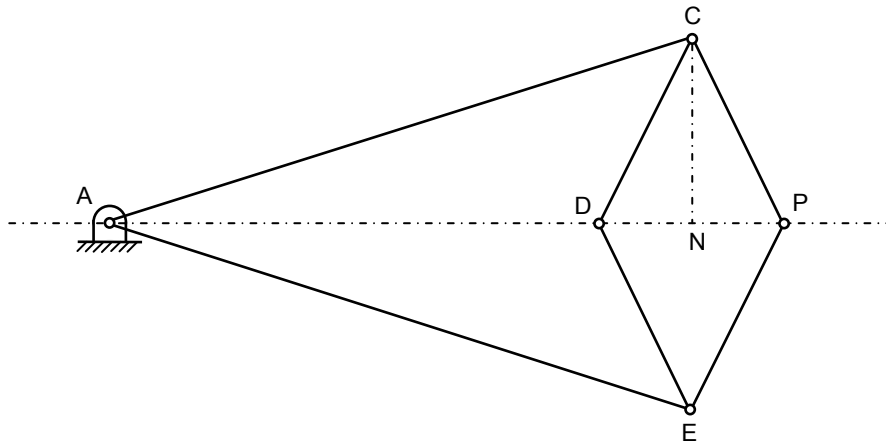


Figura 2.41 – Configuração particular do mecanismo de Peaucellier.

2.7. MECANISMOS DE MOVIMENTO INTERMITENTE

2.7.1. Generalidades

Os mecanismos de movimento intermitente são mecanismos que proporcionam um movimento unidireccional e alternado com o tempo ao órgão movido, à custa de um movimento contínuo de rotação do órgão motor. Um movimento intermitente é caracterizado por uma sucessão de períodos de avanço e de repouso ou estacionamento do órgão movido. Nos mecanismos de movimento intermitente o órgão movido desloca-se sempre no mesmo sentido. Estes mecanismos diferem dos do tipo came-seguidor na medida em que nestes últimos o seguidor descreve movimento alternado num e noutro sentido. Os mecanismos de movimento intermitente são de primordial importância em mecânica quando se pretende converter um movimento contínuo, em geral de rotação, num movimento intermitente. Exemplos típicos são os mecanismos de comando de operações e de alimentação de peças em máquinas-ferramenta e em relojoaria, entre outros.

2.7.2. Mecanismo de Genebra ou Cruz de Malta

O mecanismo de Genebra³⁷, roda de Genebra ou cruz de Malta é o mais popular dos mecanismos de movimento intermitente. Este mecanismo assemelha-se a um sistema do tipo came-seguidor, no qual o movimento contínuo de rotação da manivela proporciona um movimento intermitente da roda, sendo usado em sistemas de baixa e alta velocidade. O mecanismo de Genebra foi originalmente muito empregue em relógios para evitar que fosse dada corda em excesso. Actualmente, é usado em sistemas mecânicos automáticos, tais como, em mecanismos de projecção para possibilitar o movimento intermitente ao avanço das películas dos filmes.

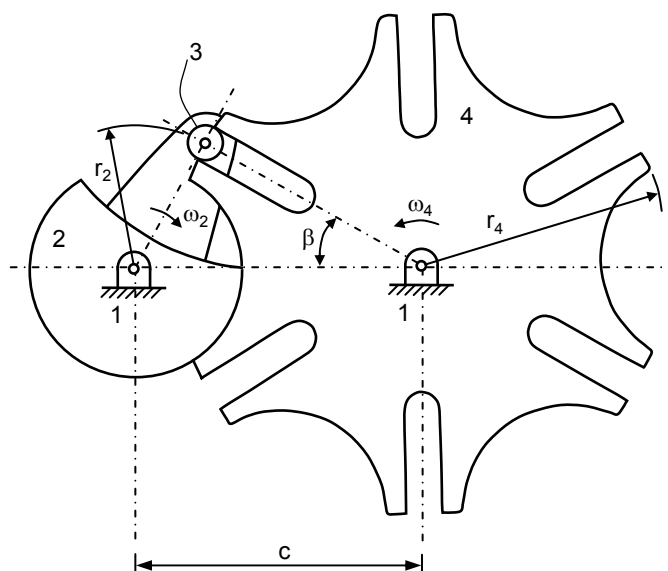


Figura 2.42 – Mecanismo de Genebra ou cruz de Malta.

³⁷ O nome mecanismo de Genebra deve-se ao facto de este tipo de mecanismo ser muito usado nos relógios, no tempo em que os movimentos mecânicos eram dominantes e a Suíça era o centro mundial da indústria relojoeira.

A figura 2.42 representa um mecanismo de Genebra de seis ranhuras, o qual é constituído por quatro corpos, a saber: o fixe (1), a manivela (2), o pino (3) e a roda (4). A manivela, que é o órgão motor e roda, em geral, com velocidade angular constante, dispõe de um pino que engrena nas ranhuras de roda. Durante uma rotação completa da manivela, a roda descreve um movimento circular equivalente a uma fracção de uma rotação, cuja amplitude depende do número de ranhuras. O ângulo β representa metade do ângulo descrito pela roda durante o período de actuação do pino. Deve notar-se que as linhas de centros das ranhuras e da manivela são perpendiculares nos instantes de engrenamento e desengrenamento, deste modo minimizam-se os choques

A manivela dispõe ainda de um ressalto, ou chapa travadora, destinado a reter a roda quando esta não se encontra actuada pelo pino. A parte convexa do ressalto ajusta-se à parte côncava da roda, enquanto que a interrupção do ressalto permite a passagem correcta da ranhura durante o percurso comandado pela actuação do pino.

O mecanismo de Genebra é caracterizado pelo raio da manivela, r_2 , o raio da roda, r_4 , e o número de ranhuras. O número mínimo de ranhuras é de três, sendo que a maior parte dos mecanismos de Genebra usa entre quatro e doze ranhuras.

O ângulo β , que é metade do ângulo medido entre duas ranhuras adjacentes, pode ser expresso por,

$$\beta = \frac{360}{2n} \quad (2.75)$$

em que n é número de ranhuras. A distância entre eixos pode ser calculado como,

$$c = \frac{r_2}{\text{sen}\beta} \quad (2.76)$$

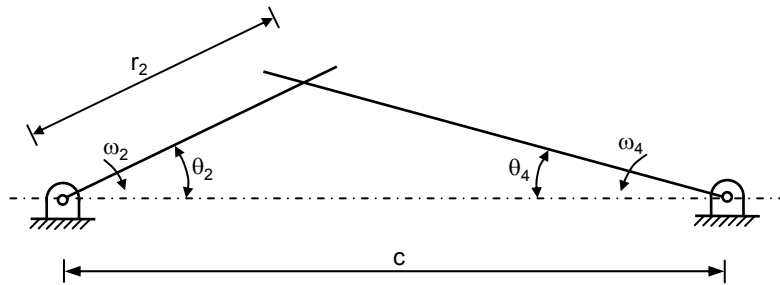


Figura 2.43 – Fase de engrenamento no mecanismo de Genebra.

Depois do pino entrar na ranhura e conduzir a roda, a análise do mecanismo de Genebra é equivalente à análise do mecanismo biela-manivela, como se ilustra na figura 4.43. A relação entre os ângulos θ_2 e θ_4 , que representam os ângulos de rotação da manivela e da roda, respectivamente, pode ser escrita como,

$$\text{tg}\theta_4 = \frac{\text{sen}\theta_2}{(c/r_2) - \text{cos}\theta_2} \quad (2.77)$$

Derivando a equação (2.77) obtém-se a velocidade angular da roda,

$$\omega_4 = \omega_2 \frac{(c/r_2)\text{cos}\theta_2 - 1}{1 + (c/r_2)^2 - 2(c/r_2)\text{cos}\theta_2} \quad (2.78)$$

O valor máximo da velocidade angular da roda verifica-se quando o ângulo da manivela é nulo. Assim, substituindo $\theta_2=0$ na equação (2.78) vem que,

$$\omega_4 = \omega_2 \frac{r_2}{c - r_2} \quad (2.79)$$

A aceleração angular da roda obtém-se derivando a equação (2.78) em ordem ao tempo, resultando,

$$\alpha_4 = \omega_2^2 \frac{(c/r_2) \text{sen} \theta_2 [1 - (c/r_2)^2]}{[1 + (c/r_2)^2 - 2(c/r_2) \text{cos} \theta_2]^2} \quad (2.80)$$

A aceleração atinge o valor máximo quando,

$$\theta_2 = \ar \cos \left\{ \pm \sqrt{\left(\frac{1 + (c/r_2)^2}{4(c/r_2)} \right) + 2 - \frac{1 + (c/r_2)^2}{4(c/r_2)}} \right\} \quad (2.81)$$

o que ocorre quando o pino avança cerca de 30% para dentro da ranhura.

Diversos são os métodos utilizados para reduzir a aceleração da roda com o intuito de minimizar as forças inerciais e, conseqüentemente, reduzir o desgaste nas ranhuras. Um dos métodos é baseado na utilização de ranhuras em forma de curva, reduzindo, assim, a aceleração, porém aumenta a desaceleração e, por conseguinte, o desgaste no outro lado da ranhura.

A figura 2.44 mostra o mecanismo de Genebra inverso, o qual é caracterizado pelo facto de a manivela e a roda descrever um movimento de rotação no mesmo sentido. Este mecanismo necessita de menor atravancamento do que o mecanismo de Genebra apresentado na figura 2.42. A chapa travadora, não ilustrada na figura, actua do modo similar ao demonstrado anteriormente.

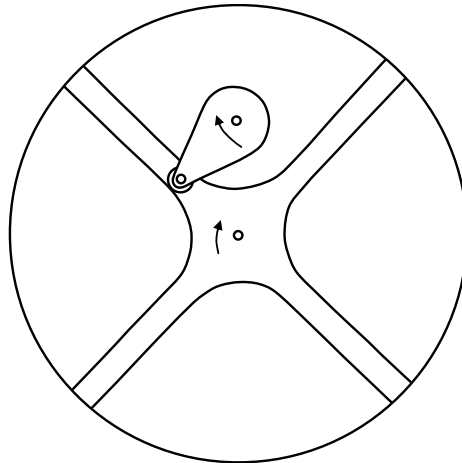


Figura 2.44 – Mecanismo de Genebra inverso.

Existe uma outra variante do mecanismo de Genebra que tem como saída um movimento de translação linear, ilustrado na figura 2.45. Este mecanismo é semelhante ao mecanismo de scotch yoke, a diferença reside no facto de o mecanismo de Genebra ser um mecanismo aberto. Esta variante é usada no accionamento de correias transportadoras intermitentes, em que as ranhuras fazem parte das próprias correias, e o accionamento é feito por um motor de rotação.

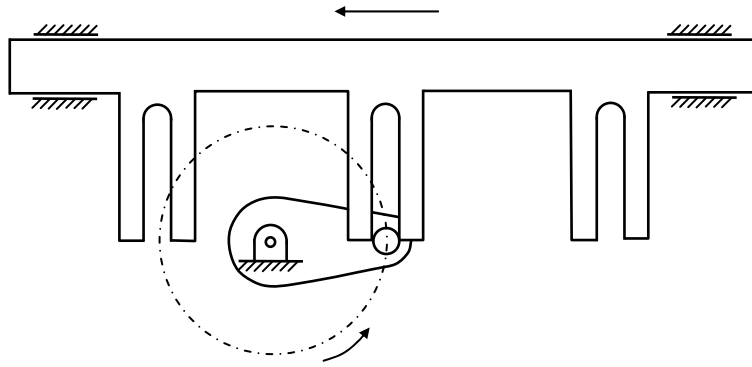


Figura 2.45 – Mecanismo de Genebra linear.

2.7.3. Mecanismo de Catraca ou Trinquete

O mecanismo de catraca ou trinquete pertence à classe de mecanismos que possibilitam que o órgão movido se movimente num sentido e bloqueie no outro. A figura 2.46 ilustra um exemplo simples deste tipo de mecanismo.

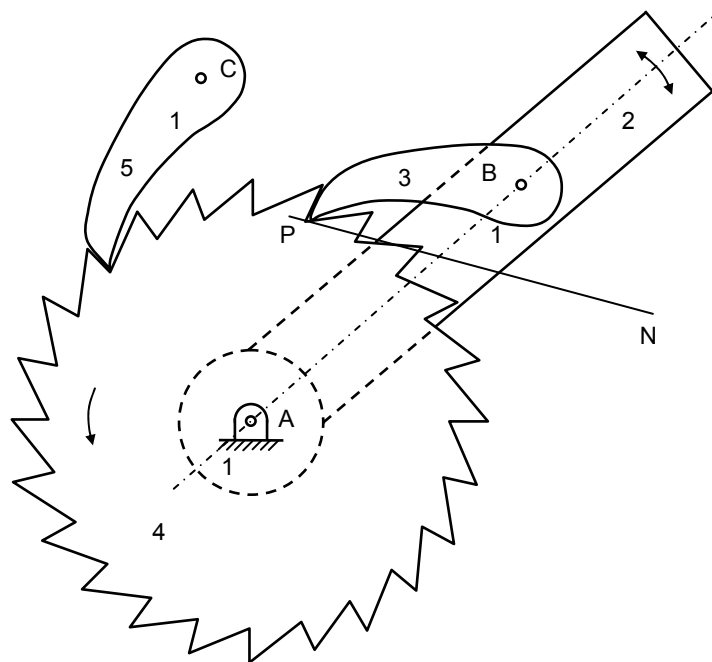


Figura 2.46 – Mecanismo de catraca ou trinquete.

Neste mecanismo, a alavanca 2 é o órgão motor que está dotado de um movimento oscilatório, o qual é transmitido à roda dentada 4 através do trinquete 3. Esta transmissão acontece apenas num dos sentidos da oscilação. O retorno da roda 4 é evitado através de um segundo trinquete 5. Em funcionamento, a linha de acção do trinquete motor 3 sobre o dente actuado, referenciado por PN , deverá passar entre os centros A e B , de forma a manter as superfícies em contacto. Por sua vez, a linha de acção do trinquete 5 sobre o respectivo dente, deverá passar entre os centros A e C .

Este mecanismo encontra aplicação em sistemas de corda de relógios, em freios manuais, em dispositivos mecânicos de contagem, tais como nos sistemas de acesso a recintos desportivos, metropolitanos, entre outros.

2.7.4. Mecanismo de Engrenamento Intermitente

O mecanismo de engrenamento intermitente é constituído por um par de rodas dentadas desenhadas de tal modo que o movimento de rotação contínuo da roda motora induz um movimento de rotação intermitente na roda movida. Este tipo de mecanismo é utilizado em situações em que as cargas envolvidas são baixas ou moderadas, tais como em dispositivos mecânicos de contagem, em sistemas de projecção de películas de filmes, alimentadores mecânicos, entre outras aplicações.

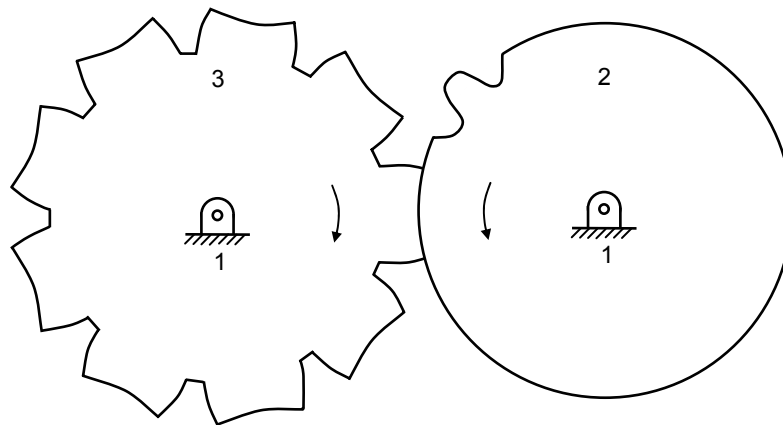


Figura 2.47 – Mecanismo de engrenamento intermitente.

A figura 2.47 mostra uma das configurações mais simples do mecanismo de engrenamento intermitente, em que o órgão movido 3 tem o mesmo tipo de dente que se encontra nas rodas dentadas usadas para movimento contínuo. A roda motora 2 tem apenas um dente que engrena na roda movida, provocando nesta um movimento de rotação intermitente. A travagem ou bloqueio da roda 3, durante o período de não actuação do dente da roda motora, é conseguido através do desenho de um traçado côncavo na crista dos seus dentes, adaptando-se à superfície lateral da roda motora.

Os dentes das rodas podem ser de tal modo desenhados que proporcionem diferentes relações entre os movimentos de entrada e de saída. Assim, por exemplo, a roda motora pode ter um ou mais dentes e os períodos estacionários da roda movida podem ser uniformes ou variar consideravelmente.

2.7.5. Mecanismo de Escape

Um mecanismo de escape é um sistema no qual uma roda move barras distintas, denominadas linguetas, unidas a uma armação que tem um movimento alternativo de rotação ou de translação. A disposição das linguetas é tal que, quando um dente da roda escapa de uma das linguetas, um outro dente contacta a lingueta.

Um dos mais simples mecanismos de escape é o que está representado na figura 2.48, em que a roda motora 2 é dotada de três dentes e a armação 3, que tem duas linguetas, desliza sobre uma guia linear de translação.

No instante representado na figura 2.48, e para o sentido de rotação indicado, o dente *A* termina o contacto com a superfície esquerda da lingueta superior, enquanto que o dente *B* inicia o contacto com a superfície direita da lingueta inferior. Como consequência, a armação termina a sua translação para a esquerda, iniciando, assim, o movimento inverso. Deve referir-se que o mecanismo de escape linear é reversível, isto é, a armação pode ser o órgão motor e a roda o órgão movido.

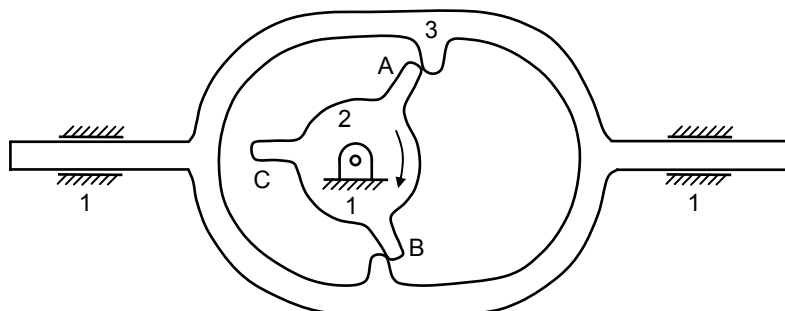


Figura 2.48 – Mecanismo de escape linear.

Um outro mecanismo de escape é a roda de balanço que se encontra representada na figura 2.49. Este mecanismo encontra aplicação em relojoaria.

A roda de balanço está ligada a um pêndulo de período fixo não ilustrado na figura. Este é vulgarmente denominado cabelo nos sistemas mecânicos de menor dimensão. A roda de escape é, em geral, movida por uma mola de torção e possui um movimento intermitente comandado pela alavanca ou âncora.

Para cada oscilação completa da roda de balanço, a âncora permite o avanço de um dente da roda de escape. Simultaneamente, o movimento da roda de escape promove o retorno da âncora à sua posição anterior, transmitindo energia à roda de balanço para iniciar um novo ciclo.

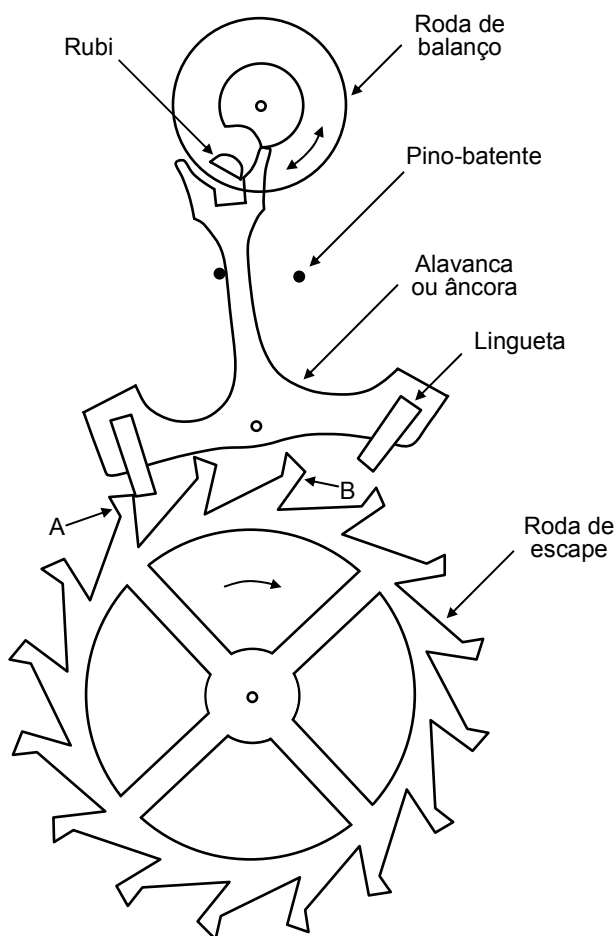


Figura 2.49 – Roda de balanço.

Numa análise mais detalhada do funcionamento deste mecanismo pode considerar-se, como ponto de partida, a posição em que a âncora se encontra encostada ao pino-batente localizado no lado esquerdo. Nesta posição, o dente *A* da roda de escape actua contra a lingueta da esquerda, enquanto que a roda de balanço, rodando no sentido anti-horário por acção da energia acumulada no pêndulo, leva a que o rubi mova a âncora no sentido horário. O movimento da âncora levará a lingueta a soltar o dente *A*, empurrando a lingueta para cima e, a partir deste instante, a âncora fará movimentar o rubi, transmitindo energia ao pêndulo ligado à roda de balanço. Após um certo ângulo de rotação da roda de escape, o dente *B* será bloqueado pela lingueta direita que, entretanto baixou devido à rotação da âncora. O movimento desta é restringido pelo pino-batente da direita, enquanto que a roda de balanço inverte o sentido de rotação, por acção do pêndulo que havia acumulado energia suficiente para o efeito. Uma vez que o rubi contacta com a superfície esquerda do garfo no topo da âncora, esta inicia o movimento de rotação no sentido anti-horário, destravando o dente *B* da roda de escape. Após um certo ângulo de rotação da roda de escape, a lingueta esquerda da âncora bloqueia um novo dente, reiniciando-se o processo.

*The motions of men must be such as to suggest their
dignity or their baseness.*

Leonardo da Vinci

3. POSIÇÃO E DESLOCAMENTO

3.1. DEFINIÇÃO

A posição refere-se ao local adquirido por um corpo, ou um ponto material, após este ter efectuado um dado deslocamento. O deslocamento, por sua vez, diz respeito à trajectória³⁸ contínua descrita por um corpo em movimento relativamente a um referencial. No caso de movimentos planos, a posição de um ponto de um corpo é definida pelas suas coordenadas cartesianas, ao passo que o deslocamento é definido por uma expressão que é função do tempo. A figura 3.1 mostra a posição e o deslocamento de um ponto de um corpo, em que as coordenadas x^P e y^P representam a posição do ponto P para o instante t_1 , enquanto que a função $d(t)$ representa o deslocamento ou trajectória do ponto P ao longo do tempo.

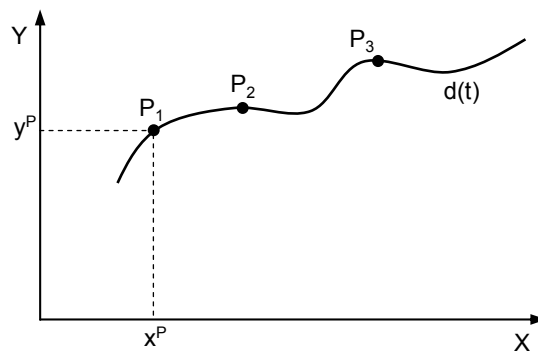


Figura 3.1 – Posição e deslocamento de um ponto.

³⁸ A trajectória pode definir-se como sendo a linha descrita por qualquer ponto de um corpo em movimento.

3.2. DESLOCAMENTO ABSOLUTO

O deslocamento absoluto de um ponto P pode ser definido pela variação do vector posição \mathbf{R}_{P_1} para \mathbf{R}_{P_2} , como se ilustra na figura 3.2.

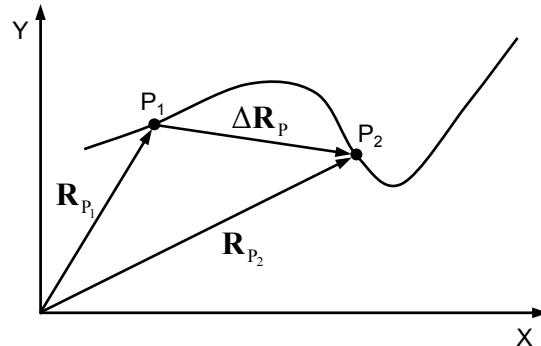


Figura 3.2 – Deslocamento absoluto de um ponto.

Em notação vectorial o deslocamento do ponto P pode ser expresso por,

$$\mathbf{R}_{P_2} = \mathbf{R}_{P_1} + \Delta\mathbf{R}_P \quad (3.1)$$

ou seja,

$$\Delta\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_{P_2} - \mathbf{R}_{P_1} \quad (3.2)$$

Na figura 3.3 estão representadas duas posições de um corpo rígido definido pela barra que une os pontos P e Q . O deslocamento entre estas duas posições pode ser considerado como a translação de cada um dos pontos P e Q ou como a translação de um dos pontos, P ou Q , e a rotação θ do conjunto, mas nunca dos três parâmetros em simultâneo, uma vez que, para um corpo rígido, estas variáveis são dependentes. Com efeito, em notação vectorial tem-se que,

$$\Delta\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_{P_2} - \mathbf{R}_{P_1} \quad (\text{translação}) \quad (3.3)$$

$$\Delta\mathbf{R}_Q = \mathbf{R}_{Q_2} - \mathbf{R}_{Q_1} \quad (\text{translação}) \quad (3.4)$$

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \quad (\text{rotação}) \quad (3.5)$$

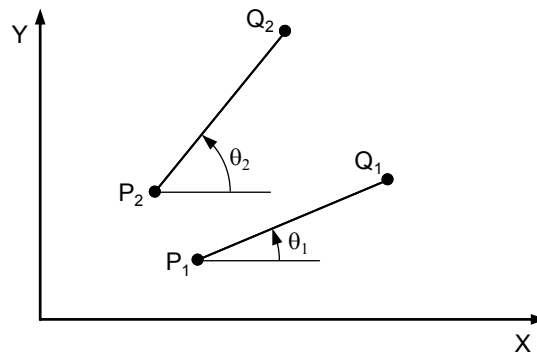


Figura 3.3 – Deslocamento absoluto de um corpo rígido.

3.3. DESLOCAMENTO RELATIVO

A figura 3.4 mostra a posição relativa³⁹ entre os pontos A e B , a qual, em termos matemáticos, pode escrita como,

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_{B/A} \quad (3.6)$$

ou seja,

$$\mathbf{R}_{B/A} = \mathbf{R}_B - \mathbf{R}_A \quad (3.7)$$

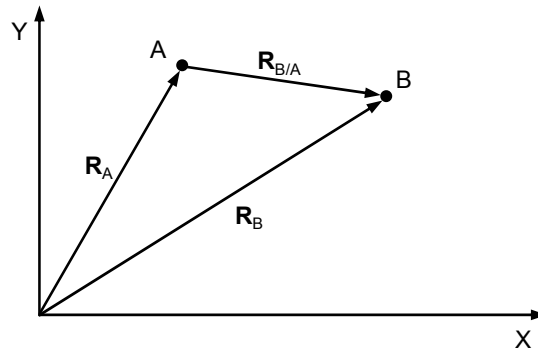


Figura 3.4 – Posição relativa entre dois pontos.

Quando dois pontos A e B pertencentes a um corpo rígido descrevem movimento de translação $\Delta\mathbf{R}_A$ e $\Delta\mathbf{R}_B$, respectivamente, então é nula a variação da posição do ponto B relativamente ao ponto A . Esta situação deve-se ao facto de ambos os pontos pertencerem ao mesmo corpo rígido. A figura 3.5 ilustra o deslocamento relativo de translação entre dois pontos de um mesmo corpo rígido.

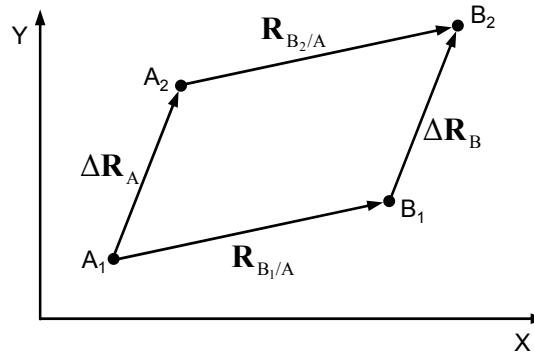


Figura 3.5 – Deslocamento relativo de translação entre dois pontos que pertencem ao mesmo corpo rígido.

Pelo que acima foi exposto observa-se que,

$$\Delta\mathbf{R}_A = \Delta\mathbf{R}_B \quad (3.8)$$

e também que,

$$\mathbf{R}_{B_1/A} = \mathbf{R}_{B_2/A} \quad (3.9)$$

³⁹ $\mathbf{R}_{B/A}$ deve ler-se como sendo a posição do ponto B em relação ao ponto A .

então,

$$\Delta \mathbf{R}_{B/A} = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

A equação (3.10) diz que é nula a variação da posição do ponto B relativamente ao ponto A , o que é de esperar que aconteça, uma vez que ambos os pontos fazem parte do mesmo corpo rígido. Deve notar-se que, contudo, no caso mais geral, é válida a seguinte relação geométrica,

$$\Delta \mathbf{R}_B = \Delta \mathbf{R}_A + \Delta \mathbf{R}_{B/A} \quad (3.11)$$

embora, na situação representada na figura 3.5 o termo $\Delta \mathbf{R}_{B/A}$ seja nulo.

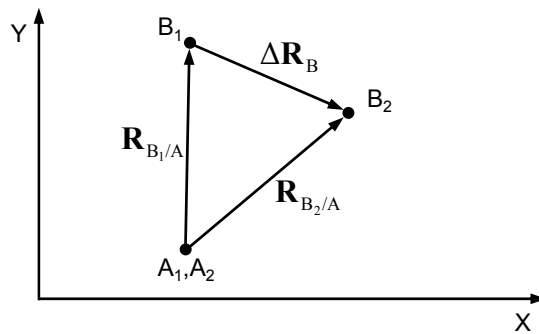


Figura 3.6 – Deslocamento relativo de rotação entre dois pontos que pertencem ao mesmo corpo rígido.

A figura 3.6. mostra o caso em que o ponto B descreve movimento de rotação em relação ao ponto A . À semelhança da situação anterior, ambos os pontos pertencem ao mesmo corpo rígido. Neste caso, verifica-se que,

$$\mathbf{R}_{B_1/A} = \mathbf{R}_{B_2/A} \quad (3.12)$$

e ainda que,

$$\Delta \mathbf{R}_B = \mathbf{R}_{B_2/A} - \mathbf{R}_{B_1/A} = \Delta \mathbf{R}_{B/A} \quad (3.13)$$

Nesta situação, observa-se também que,

$$\Delta \mathbf{R}_B = \Delta \mathbf{R}_A + \Delta \mathbf{R}_{B/A} \quad (3.14)$$

em que é nulo o termo $\Delta \mathbf{R}_A$.

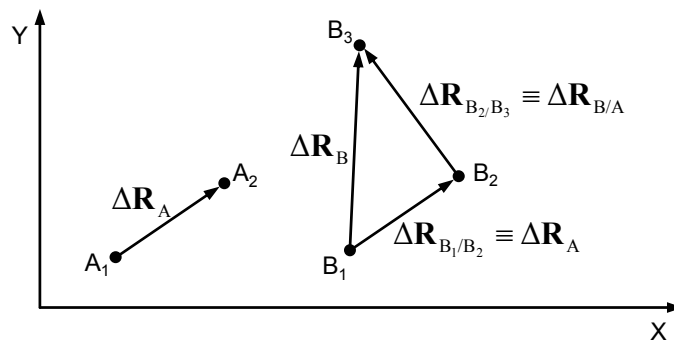


Figura 3.7 – Deslocamento relativo de translação e de rotação entre dois pontos que pertencem ao mesmo corpo rígido.

Na figura 3.7 representam-se as translações $A_1 \rightarrow A_2$ e $B_1 \rightarrow B_2$ seguidas de uma rotação $B_2 \rightarrow B_3$. Neste caso, coexistem os movimentos de translação e de rotação, verificando-se que,

$$\Delta \mathbf{R}_B = \Delta \mathbf{R}_A + \Delta \mathbf{R}_{B/A} \quad (3.15)$$

em que $\Delta \mathbf{R}_A$ e $\Delta \mathbf{R}_{B/A}$ representam, respectivamente, as componentes de translação e de rotação.

3.4. MÉTODOS DE ANÁLISE DE POSIÇÃO E DESLOCAMENTO

São três as principais metodologias que permitem analisar e estudar a posição e o deslocamento nos mecanismos, a saber: os métodos analíticos, os métodos gráficos e os métodos computacionais.

Os métodos analíticos baseiam-se, essencialmente, na dedução de expressões analíticas que traduzem a posição e configuração geométrica dos mecanismos. Para geometrias simples, e uma vez estabelecidas as equações dos deslocamentos dos vários corpos que constituem os mecanismos, é exequível a análise para um número elevado de posições intercalares, através da utilização de programas informáticos de cálculo automático, obtendo-se, deste modo, uma aproximação ao funcionamento do mecanismo em estudo. A utilização dos métodos analíticos torna-se imprescindível quando a análise de um mecanismo exige o estudo de várias fases do seu movimento. Estes métodos, para além de serem mais precisos e exactos que os métodos gráficos, apresentam ainda outra vantagem que se prende com o facto de que, uma vez conhecidas as expressões para a posição de um determinado elemento de um mecanismo, ser possível estudar a influência dos vários parâmetros no movimento global produzido, tais como, as dimensões das barras e o tipo accionamento. Este procedimento é particularmente relevante e útil na síntese de mecanismos. Os principais inconvenientes dos métodos analíticos têm a ver com a difícil detecção de eventuais erros e impossibilidade de visualização dos resultados obtidos em termos do movimento global do mecanismo.

Os métodos gráficos baseiam-se na interpretação geométrica do mecanismo em análise e na sua posterior resolução gráfica. Estes métodos, são bastante expeditos e suficientemente rigorosos para a maioria das aplicações correntes, mas apresentam como inconveniente o facto de serem válidos apenas e exclusivamente para a posição em que são traçados. Os métodos gráficos são usados com alguma frequência uma vez que possibilitam a observar a visualização do movimento do mecanismo em estudo. Estes métodos foram, primeiramente, utilizados na análise estática de sistemas mecânicos e, posteriormente, na cinemática de mecanismos. De facto, os primeiros estudos de mecanismos baseavam-se neste métodos e utilizavam as técnicas e equipamentos tradicionais, o que tornava os resultados algo imprecisos. Porém, o desenvolvimento de sistemas de desenho assistido por computador trouxe, não só um aumento no rigor do traçado, como também uma maior economia de tempo. Deve referir-se que uma das grandes vantagens dos sistemas de desenho assistido por computador consiste no facto de não necessitarem de um factor de escala, uma vez que o limite físico da área de desenho é, teoricamente, infinito. Por outro lado, com a utilização destes sistemas auxiliares de desenho minimizam-se os erros de execução e de leitura na análise gráfica. Com efeito, a grande utilidade dos métodos gráficos resume-se ao estudo de casos particulares, sendo, no entanto assaz trabalhosos e morosos na análise de mecanismos. Uma outra desvantagem da análise gráfica prende-se com a falta de exactidão. Por esta razão, neste trabalho, dá-se particular atenção aos métodos analíticos, não deixando, todavia, de apresentar os métodos gráficos sempre que se entender oportuno e pertinente.

A análise cinemática de mecanismos pode ainda ser levada a cabo com o auxílio de programas computacionais especialmente desenvolvidos para este propósito, os quais se baseiam em soluções obtidas por aproximações sucessivas. Uma vez que estas soluções resultam da aplicação de métodos numéricos, os resultados obtidos

são sempre aproximados, e cujo grau de aproximação e exactidão depende de vários factores, tais como o método de integração⁴⁰, o intervalo de integração, entre outros. Intervalos de integração pequenos originam maior exactidão nos resultados, no entanto, prejudicam o tempo de processamento.

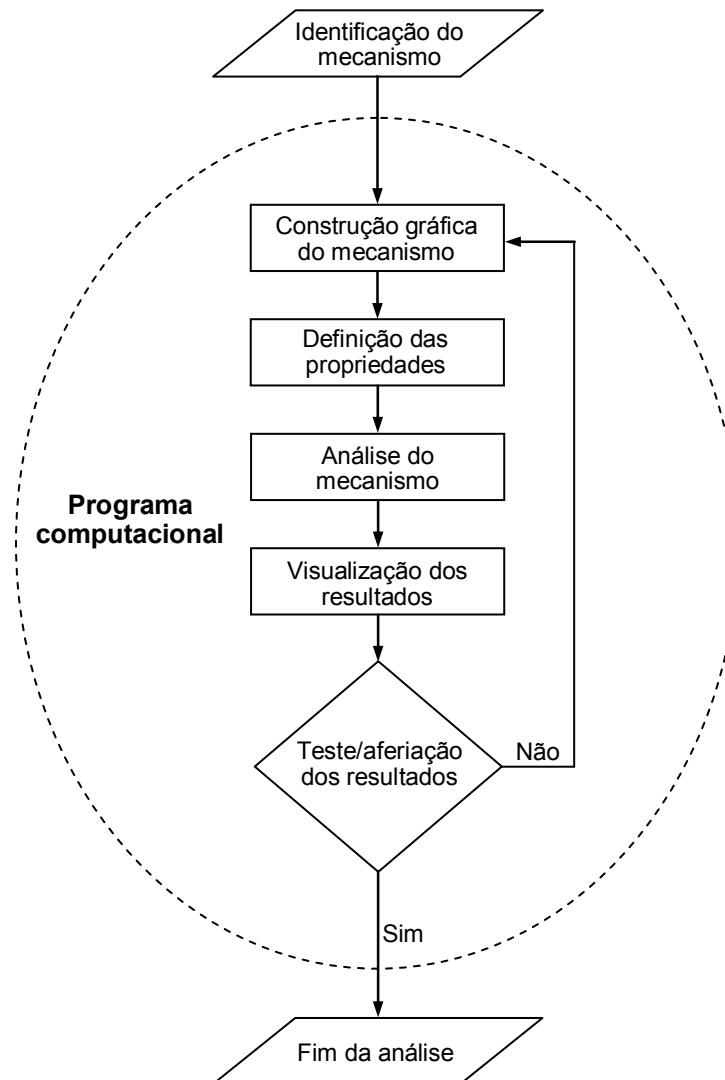


Figura 3.8 – Fluxograma básico que evidencia os vários passos a seguir nos diversos programas computacionais dedicados à análise de mecanismos.

Nos últimos anos, as aplicações informáticas especificamente dedicadas ao estudo cinemático e dinâmico de mecanismos são uma realidade no panorama industrial mundial, com especial destaque nos sectores da metalomecânica e da robótica. Estes programas permitem ao projectista simular (desenhar, avaliar e visualizar) o movimento de um dado mecanismo, sem necessidade de recorrer à construção de um protótipo físico. De facto, são inúmeras as vantagens inerentes à utilização destes programas, das quais se destacam a criação de modelos virtuais, a possibilidade de observar a funcionalidade e operabilidade dos componentes, a flexibilidade e

⁴⁰ Os métodos numéricos de uso corrente são: o método de Euler mais simples e rápido e o método de Kutta-Merson mais exacto e mais lento.

facilidade de processamento de informação, a economia de materiais, de tempo e, conseqüentemente, de dinheiro, e o fácil conhecimento dos esforços envolvidos no movimento dos mecanismos tendo em vista o posterior dimensionamento de seus componentes.

Os passos a seguir na análise de mecanismos não diferem muito de programa para programa. Assim, desde a construção do modelo virtual até à visualização do movimento do mecanismo, podem resumir-se as seguintes etapas,

- Definir a geometria de cada um dos elementos que compõem o mecanismo;
- Caracterizar o tipo de ligação entre os vários elementos;
- Introduzir as características físicas dos componentes;
- Especificar os actuadores e o tipo de gerador de movimento;
- Analisar o mecanismo (cinemática e/ou dinâmica);
- Visualizar o movimento global do mecanismo.

A figura 3.8 apresenta os passos anteriormente apresentados sob a forma de um fluxograma. Obviamente que cada programa computacional dedicado à análise de mecanismos contém as suas particularidades e especificidades que os caracterizam e diferenciam.

3.5. MÉTODOS ANALÍTICOS

3.5.1. Método Algébrico

O método algébrico consiste, essencialmente, na dedução de expressões analíticas que traduzem a posição de um determinado corpo ou ponto de um corpo, em função da configuração geométrica do mecanismo e do tipo de accionamento.

Considere-se o mecanismo biela-manivela representado na figura 3.9, em relação ao qual se pretende deduzir uma equação que expresse, em cada instante, a posição do pistão ou corrediça, ou seja, a posição do ponto C . O ponto C representa o centro de massa ou centro de gravidade do pistão. No presente estudo, considera-se que a manivela é o órgão motor e roda em torno do ponto A com velocidade constante, ou seja, $\theta_2 = \omega_2 t$. Os comprimentos das barras 1, 2, e 3 são representados por r_1 , r_2 e r_3 , respectivamente. Note-se que r_1 é variável com o tempo, enquanto que r_2 e r_3 são constantes. As posições angulares das barras 1, 2 e 3 são, respectivamente, θ_1 , θ_2 e θ_3 , em que, no presente caso, θ_1 é nulo, ao passo que θ_2 e θ_3 variam com o tempo.

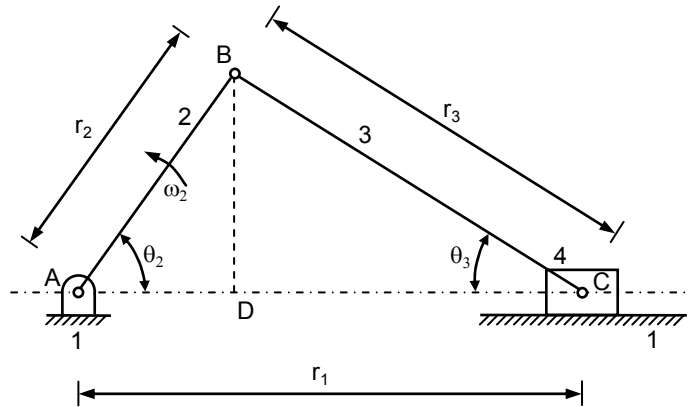


Figura 3.9 – Representação esquemática do mecanismo biela-manivela.

Atendendo à geometria da figura 3.9 pode escrever-se a seguinte expressão para a posição do ponto C ,

$$r_1 = AC = AD + DC \quad (3.16)$$

ou ainda,

$$r_1 = r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 \quad (3.17)$$

Uma vez que o mecanismo biela-manivela tem apenas um grau de liberdade, as variáveis θ_2 e θ_3 não são independentes, pelo que uma delas deve ser expressa em função da outra. Com efeito, ainda da figura 3.9 observa-se que,

$$BD = r_2 \sin \theta_2 = r_3 \sin \theta_3 \quad (3.18)$$

A equação (3.18) não é mais do que a lei dos senos aplicada ao triângulo ABC , a qual pode ser reescrita como,

$$\sin \theta_3 = \frac{r_2}{r_3} \sin \theta_2 \quad (3.19)$$

Substituindo a equação (3.19) na lei fundamental da trigonometria vem que,

$$\cos\theta_3 = \sqrt{1 - \frac{r_2^2}{r_3^2} \text{sen}^2\theta_2} \quad (3.20)$$

Então, introduzindo, agora, a equação (3.20) em (3.17) obtém-se uma expressão que traduz a posição do ponto C em função da posição angular da manivela e dos comprimentos da manivela e da biela,

$$r_1 = r_2 \cos\theta_2 + r_3 \sqrt{1 - \frac{r_2^2}{r_3^2} \text{sen}^2\theta_2} \quad (3.21)$$

Porém, como $\theta_2 = \omega_2 t$, a equação (3.21) pode ser reescrita como,

$$r_1 = r_2 \cos\omega_2 t + \sqrt{r_3^2 - r_2^2 \text{sen}^2\omega_2 t} \quad (3.22)$$

Com efeito, a equação (3.22) permite calcular, em cada instante, a posição do pistão em função das características geométricas do mecanismo biela-manivela. Deste modo, as características cinemáticas da velocidade e aceleração do pistão podem facilmente ser obtidas por derivações sucessivas da equação (3.22) em ordem ao tempo.

No sentido de simplificar a obtenção destas derivadas pode efectuar-se uma simplificação matemática conducente a uma solução mais simples, perceptível e ainda com suficiente exactidão. Com efeito, nos mecanismos biela-manivela de uso corrente, o comprimento da biela é, em geral, cerca de três a quatro vezes superior ao da manivela, ou seja,

$$\frac{r_2}{r_3} = \frac{1}{4} \quad (3.23)$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{r_2^2 \text{sen}^2\omega_2 t}{r_3^2} \leq \frac{1}{16} \quad (3.24)$$

Por outro lado, da análise matemática sabe-se que qualquer expressão do tipo $\sqrt{1 - \varepsilon}$, pode ser desenvolvida numa série de potências do seguinte modo,

$$\sqrt{1 - \varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} - \dots \quad (3.25)$$

Porém, para $\varepsilon = \frac{1}{16}$, o terceiro termo é igual a $\frac{1}{2048}$, pelo que este termo e os seguintes podem ser desprezados, sendo usualmente aceitável o erro associado a esta simplificação. Com efeito, a equação (3.22) pode ser substituída por,

$$r_1 = r_2 \cos\omega_2 t + r_3 - \frac{r_2^2 \text{sen}^2\omega_2 t}{2r_3} \quad (3.26)$$

O primeiro termo do segundo membro da equação (3.26) é AD , o segundo termo é BC e o terceiro termo é, aproximadamente, a diferença entre BC e DB , como se pode observar na figura 3.9.

3.5.2. Método da Notação Complexa

Este método consiste na substituição de cada corpo do mecanismo em análise por um vector posição equivalente, adicionando-os depois ao longo de uma cadeia cinemática fechada. A equação ou equações daí resultantes são, então, escritas em notação complexa. O estudo é, portanto, feito no espaço complexo. Na figura 3.10, o vector \mathbf{R} representa um número complexo, o qual pode ser expresso por,

$$\mathbf{R} = r^x + ir^y \quad (3.27)$$

em que r^x e r^y representam, respectivamente, a parte real e a parte imaginária. A quantidade i representa a unidade imaginária tal que $i = \sqrt{-1}$.

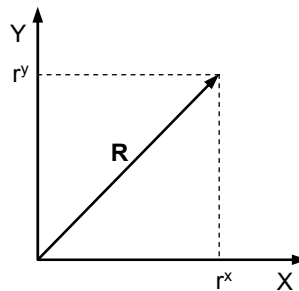


Figura 3.10 – Espaço complexo.

O módulo ou valor absoluto do vector \mathbf{R} é dado por,

$$r = \sqrt{(r^x)^2 + (r^y)^2} \quad (3.28)$$

O vector \mathbf{R} pode ser escrito em notação complexa e coordenadas polares como,

$$\mathbf{R} = r\cos\theta + irsen\theta \quad (3.29)$$

ou ainda,

$$\mathbf{R} = r(\cos\theta + isen\theta) = re^{i\theta} \quad (3.30)$$

Das séries numéricas de MacLaurin sabe-se que,

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \dots \quad (3.31)$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \quad (3.32)$$

$$isen\theta = i\theta - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \dots \quad (3.33)$$

Observe-se que a primeira série é igual à soma das segunda e terceira séries.

A figura 3.11 ilustra o mecanismo biela-manivela em que as respectivas barras estão representadas por vectores posição equivalentes, os quais formam uma cadeia cinemática fechada. Assim, somando estes vectores pode ser escrita a seguinte equação vectorial,

$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1 = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

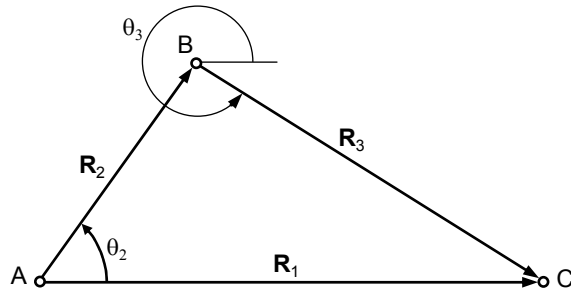


Figura 3.11 – Representação vectorial do mecanismo biela-manivela.

Em notação complexa a equação (3.34) pode ser reescrita como,

$$r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} - r_1 e^{i\theta_1} = 0 \quad (3.35)$$

em que, na presente situação r_2 , r_3 , θ_1 e θ_2 são parâmetros conhecidos à partida.

Pelas séries de MacLaurin, pode escrever-se,

$$r_2 (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) + r_3 (\cos\theta_3 + i \operatorname{sen}\theta_3) - r_1 (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) = 0 \quad (3.36)$$

Separando, agora, as partes real e imaginária tem-se, respectivamente,

$$r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 - r_1 \cos\theta_1 = 0 \quad (3.37)$$

$$r_2 \operatorname{sen}\theta_2 + r_3 \operatorname{sen}\theta_3 - r_1 \operatorname{sen}\theta_1 = 0 \quad (3.38)$$

Como $\cos\theta_1=1$ e $\operatorname{sen}\theta_1=0$, resolvendo em simultâneo as equações (3.37) e (3.38) em ordem a θ_3 e r_1 obtém-se,

$$\theta_3 = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{r_2 \operatorname{sen}\theta_2}{r_3}\right) \quad (3.39)$$

$$r_1 = r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{r_2 \operatorname{sen}\theta_2}{r_3}\right)\right] \quad (3.40)$$

Por outro lado, como,

$$\operatorname{arcsen}\left(-\frac{r_2 \operatorname{sen}\theta_2}{r_3}\right) = \operatorname{arccos}\sqrt{1 - \left(-\frac{r_2 \operatorname{sen}\theta_2}{r_3}\right)^2} \quad (3.41)$$

então, a equação (3.40) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$r_1 = r_2 \cos\theta_2 + \sqrt{r_3^2 - r_2^2 \operatorname{sen}^2\theta_2} \quad (3.42)$$

A equação (3.42) é, como seria de esperar, exactamente igual à equação (3.21) obtida pelo método algébrico, evidenciando, deste modo, a importância e utilidade da notação complexa.

3.5.3. Método da Notação Matricial

Neste método, tal como no método da notação complexa, cada um dos elementos que constitui mecanismo em análise é substituído por um vector posição equivalente de modo a obter-se uma cadeia cinemática fechada. À semelhança das anteriores,

nesta secção pretende-se obter expressões que traduzam a posição do pistão do mecanismo biela-manivela ilustrado na figura 3.12.

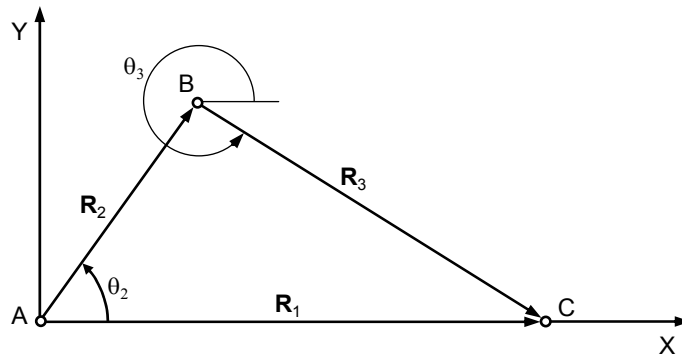


Figura 3.12 – Representação vectorial do mecanismo biela-manivela.

Uma vez estabelecida a cadeia cinemática do mecanismo biela-manivela, os vectores por ela formados devem ser projectados nas direcções X e Y , obtendo-se, respectivamente, as seguintes expressões,

$$r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 - r_1 = 0 \quad (3.43)$$

$$r_2 \sin \theta_2 - r_3 \sin \theta_3 = 0 \quad (3.44)$$

Na presente situação, admite-se que o órgão motor é a manivela, sendo por isso, conhecido o valor de θ_2 . Como os comprimentos das barras são também conhecidos *a priori*, as incógnitas das equações (3.43) e (3.44) são θ_3 e r_1 . Assim, resolvendo simultaneamente as equações (3.43) e (3.44) vem que,

$$\theta_3 = \arcsen \left(\frac{r_2 \sin \theta_2}{r_3} \right) \quad (3.45)$$

$$r_1 = r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \left[\arcsen \left(\frac{r_2 \sin \theta_2}{r_3} \right) \right] \quad (3.46)$$

Deve notar-se que as equações (3.45) e (3.46), são iguais às obtidas anteriormente pelos métodos algébrico e da notação complexa.

No presente exemplo, não é possível, nem necessário, escrever as equações (3.43) e (3.44) na forma matricial. No entanto, caso tal fosse possível, em termos gerais, a forma matricial pode ser escrita do seguinte modo,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{c} \quad (3.47)$$

Em que, a matriz \mathbf{A} contém os coeficientes do sistema, \mathbf{c} contém os termos independentes e \mathbf{x} representa o vector que contém as incógnitas. A equação (3.47) representa um sistema de equações lineares, cuja solução pode obter-se recorrendo, por exemplo, à regra de Cramer⁴¹. Assim, um sistema de equações de dimensão dois pode ser escrito como,

⁴¹ Para matrizes com menos de quatro equações é conveniente utilizar a regra de Cramer. Porém, para matrizes de dimensão superior, esta regra torna-se lenta na resolução de sistemas, pelo que se deve usar outro método, como, por exemplo, o método de eliminação de Gauss.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

cuja solução é dada por,

$$x_1 = \frac{c_1 a_{22} - c_2 a_{12}}{D} \quad (3.49)$$

$$x_2 = \frac{a_{11} c_2 - a_{21} c_1}{D} \quad (3.50)$$

em que o determinante D é calculado como,

$$D = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \quad (3.51)$$

O método na notação matricial é particularmente útil no cálculo das velocidades e acelerações, uma vez que a matriz dos coeficientes é igual para os dois cálculos.

3.5.4. Método da Decomposição do Movimento

No espaço bidimensional, um corpo pode descrever três tipos de movimento, a saber: movimento de translação, movimento de rotação e movimento geral ou misto.

O movimento é de translação quando todos os pontos de um corpo descrevem trajetórias paralelas de tal modo que as linhas que unem dois quaisquer pontos do corpo permanecem sempre paralelas em relação às posições iniciais. A figura 3.13a ilustra o movimento plano de translação curvilínea.

O movimento é de rotação em torno de eixo quando todos os pontos descrevem trajetórias circulares em torno de uma recta designada eixo de rotação. Na figura 3.13b mostra-se o movimento de rotação.

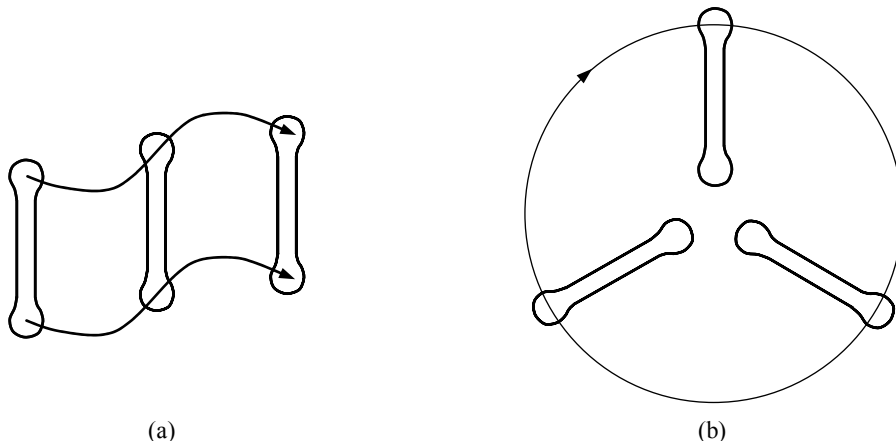


Figura 3.13 – (a) Movimento de translação; (b) Movimento de rotação.

O movimento é denominado geral ou misto quando existem em simultâneo as propriedades associadas aos movimentos de translação e de rotação. O movimento plano geral de um corpo pode sempre ser considerado como a combinação de um movimento de translação com um movimento de rotação. Esta decomposição do movimento geral traduz a lei de Chasles.

A figura 3.14 ilustra um exemplo de um corpo que descreve um movimento geral, o qual consiste numa barra cujos extremos se deslocam ao longo de uma guia

horizontal e outra vertical. Este movimento geral pode ser decomposto e substituído pela soma de uma translação na direcção horizontal e de uma rotação em torno de A , como ilustra a figura 3.14. Em alternativa, o movimento geral pode ser substituído pela soma de uma translação na direcção vertical e de uma rotação em torno do eixo que passo pelo ponto B .

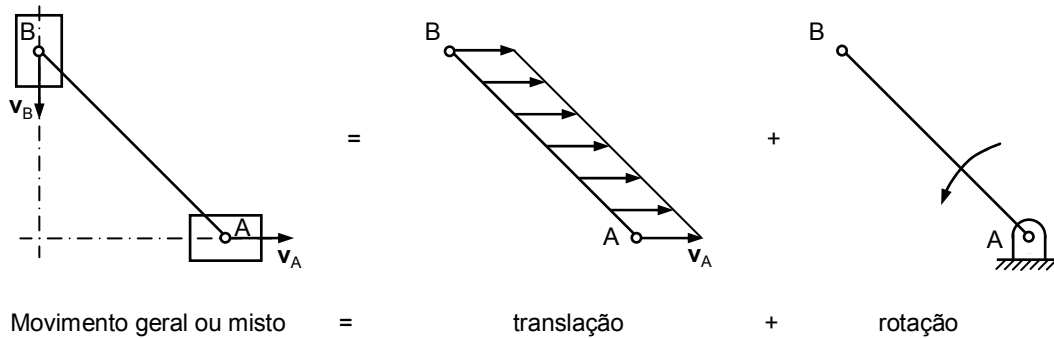


Figura 3.14 – Exemplo do movimento plano geral ou misto.

A maior parte dos mecanismos que se podem encontrar consta não de um, mas sim de vários elementos em movimento. Quando tais elementos se encontram articulados, isto é, constrangidos por juntas cinemáticas, o estudo pode ser feito a cada corpo separadamente sem, contudo, esquecer que os pontos comuns a vários elementos devem ter as mesmas características cinemáticas.

No caso particular do mecanismo biela-manivela, podem ser observados os três tipos de movimento plano anteriormente apresentados. Assim, a manivela descreve um movimento de rotação, o pistão efectua um movimento de translação rectilínea e a biela descreve movimento geral ou misto. Este movimento, pode ser facilmente estudado se for decomposto como a soma de uma translação e uma rotação.

Deve referir-se que o método da decomposição do movimento é particularmente útil e interessante no estudo cinemático de mecanismos planos, especialmente no que diz respeito ao cálculo das velocidades e das acelerações.

3.6. MÉTODOS GRÁFICOS

Os métodos gráficos consistem na representação geométrica do mecanismo em análise na posição, ou posições, de maior interesse para o seu estudo cinemático. A aplicação mais corrente e prática dos métodos gráficos é na determinação das velocidades e acelerações utilizando, nomeadamente, os métodos que se baseiam na construção gráfica dos polígonos de velocidades e acelerações. Estes dois métodos têm como base a resolução gráfica de equações vectoriais.

Em seguida é apresentada, a título de exemplo, uma aplicação prática do cálculo gráfico na análise da posição do mecanismo biela-manivela ilustrado na figura 3.15a. O problema relativo à análise de posição consiste na determinação dos valores de todas as variáveis que caracterizam a configuração geométrica do mecanismo, sendo conhecidos os comprimentos das barras e os valores das variáveis independentes, as quais são escolhidas para representar os graus de liberdade do mecanismo. No presente caso, admite-se que a corredeira é o órgão motor, sendo, por isso, conhecida à partida a posição do ponto C, \mathbf{R}_1 . A questão que se coloca é a de saber qual o valor dos ângulos θ_2 e θ_3 , isto é, quais as direcções da manivela e da biela, representadas pelos vectores \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_3 , \mathbf{R}'_2 e \mathbf{R}'_3 . Assim, a equação vectorial que representa este caso pode ser escrita como,

$$\mathbf{R}_1^{vv} = \mathbf{R}_2^{vo} + \mathbf{R}_3^{vo} \quad (3.52)$$

Esta equação vectorial tem duas soluções, que estão representadas graficamente na figura 3.15b, e em relação às quais correspondem diferentes configurações do mecanismo, isto é, há duas maneiras possíveis de associar a manivela e a biela para uma mesma posição do pistão ou ponto C, sendo ambas válidas.

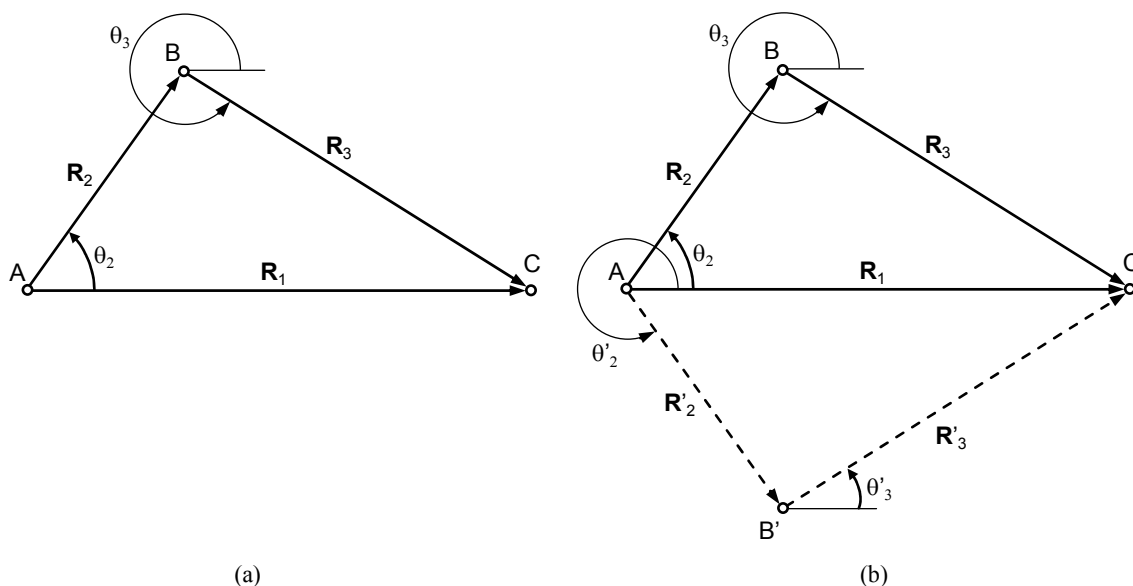


Figura 3.15 – Análise gráfica do mecanismo biela-manivela.

3.7. ANÁLISE DE POSIÇÃO DE MECANISMOS ELEMENTARES

3.7.1. Mecanismo de Quatro Barras

A figura 3.16 ilustra um mecanismo de quatro barras em relação ao qual se pretende efectuar a análise de posição dos seus elementos. Ainda na mesma figura estão representados os vectores que formam a cadeia cinemática equivalente.

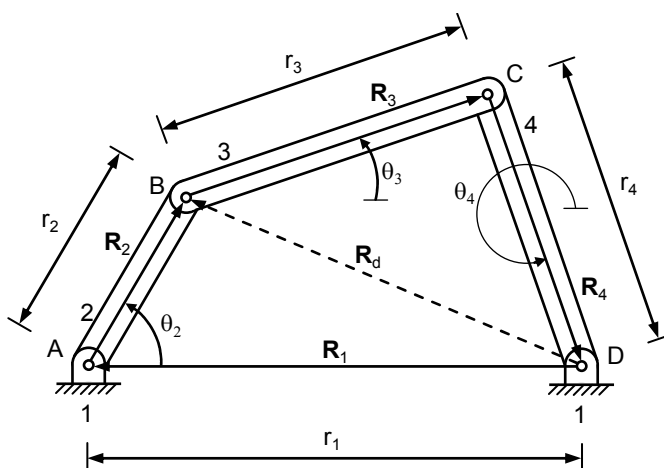


Figura 3.16 – Mecanismo de quatro barras.

A cadeia cinemática relativa ao mecanismo de quatro barras pode ser expressa pela seguinte equação vectorial,

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_4 = \mathbf{0} \quad (3.53)$$

ou ainda em notação complexa,

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} + r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (3.54)$$

Utilizando a fórmula de Euler e separando as partes real e imaginária, a equação (3.54) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 + r_4 \cos\theta_4 = 0 \quad (3.55)$$

$$r_1 \sin\theta_1 + r_2 \sin\theta_2 + r_3 \sin\theta_3 + r_4 \sin\theta_4 = 0 \quad (3.56)$$

Na análise de posição do mecanismo de quatro barras representado na figura 3.16, os comprimentos das barras r_1 , r_2 , r_3 e r_4 são conhecidos, consistindo o problema em determinar os valores dos ângulos θ_3 e θ_4 , sendo dado o valor de θ_2 relativo à posição angular da manivela que é considerada como sendo o elemento motor. Este caso corresponde à solução de equações vectoriais em que as direcções de dois vectores diferentes são desconhecidas, a que correspondem duas soluções distintas e que estão ilustradas na figura 3.17.

Em alternativa à resolução gráfica apresentada, podem usar-se as equações (3.55) e (3.56), as quais constituem um sistema de duas equações a duas incógnitas, θ_3 e θ_4 . Este sistema é, contudo, transcendente não havendo, por isso, solução analítica, pelo que é necessário recorrer a métodos numéricos iterativos para obter as soluções, ou soluções suficientemente próximas.

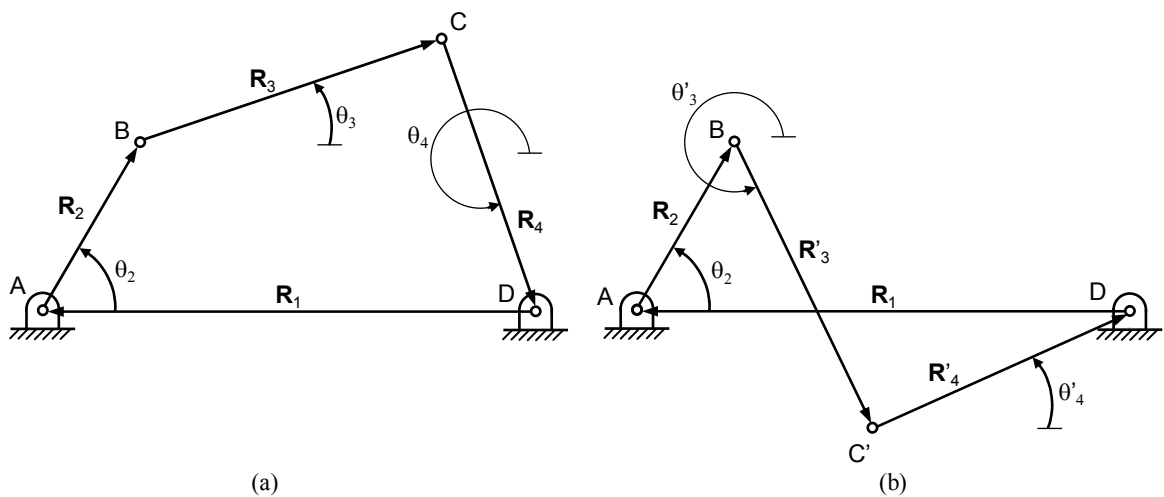


Figura 3.17 – Análise gráfica do mecanismo de quatro barras.

Em seguida é apresentada uma metodologia alternativa que conduz à obtenção dos valores de θ_3 e θ_4 . Assim, considere-se, por simplicidade e comodidade, a existência de um vector auxiliar, \mathbf{R}_d , que representa a diagonal principal do mecanismo de quatro barras, o qual une o ponto D ao ponto B , como ilustra a figura 3.16. Este vector auxiliar pode ser expresso por,

$$\mathbf{R}_d = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \quad (3.57)$$

ou, na forma polar complexa,

$$r_d e^{i\theta_d} = r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} \quad (3.58)$$

ou ainda,

$$r_d \cos\theta_d = r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2 \quad (3.59)$$

$$r_d \sin\theta_d = r_1 \sin\theta_1 + r_2 \sin\theta_2 \quad (3.60)$$

Atendendo a que $\theta_1=180^\circ$, as equações (3.59) e (3.60) podem ser simplificadas da seguinte forma,

$$r_d \cos\theta_d = -r_1 + r_2 \cos\theta_2 \quad (3.61)$$

$$r_d \sin\theta_d = r_2 \sin\theta_2 \quad (3.62)$$

Elevando ao quadrado ambas equações (3.61) e (3.62) e somando-as, membro a membro, resulta que,

$$r_d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2 \quad (3.63)$$

Por outro lado, da equação (3.62) vem directamente que,

$$\theta_d = \arcsen\left(\frac{r_2}{r_d} \sin\theta_2\right) \quad (3.64)$$

Deve referir-se que as equações (3.63) e (3.64) traduzem, respectivamente, a aplicação das leis dos cosenos e dos senos ao triângulo ABD .

O vector \mathbf{R}_d pode também ser expresso como,

$$\mathbf{R}_d = \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_4 \quad (3.65)$$

ou seja,

$$r_d e^{i\theta_d} = r_3 e^{i\theta_3} + r_4 e^{i\theta_4} \quad (3.66)$$

Dividindo a equação (3.66) por $e^{i\theta_3}$ vem que,

$$r_d e^{i(\theta_d - \theta_3)} = r_3 + r_4 e^{i(\theta_4 - \theta_3)} \quad (3.67)$$

Separando as partes real e imaginária e rearranjando os termos resulta em,

$$r_4 \cos(\theta_4 - \theta_3) = r_d \cos(\theta_d - \theta_3) - r_3 \quad (3.68)$$

$$r_4 \sin(\theta_4 - \theta_3) = r_d \sin(\theta_d - \theta_3) \quad (3.69)$$

Elevando ao quadrado ambas as equações e adicionando o resultado vem que,

$$r_4^2 = r_3^2 + r_d^2 - 2r_3 r_d \cos(\theta_d - \theta_3) \quad (3.70)$$

Resolvendo a equação (3.70) em ordem a θ_3 resulta,

$$\theta_3 = \theta_d \mp \arccos \frac{r_d^2 + r_3^2 - r_4^2}{2r_d r_3} \quad (3.71)$$

Procedendo de modo análogo, o valor do ângulo θ_4 é dado por,

$$\theta_4 = \theta_d \pm \arccos \frac{r_d^2 + r_4^2 - r_3^2}{2r_d r_4} \quad (3.72)$$

Com efeito, as equações (3.71) e (3.72) permitem calcular as posições angulares das barras 3 e 4 do mecanismo de quatro barras.

3.7.2. Mecanismo de Corrediça

Na figura 3.18a está representado um mecanismo de quatro barras em que existe uma corrediça entre as barras 3 e 4. Este mecanismo é, por isso, chamado mecanismo de corrediça. Na verdade trata-se de um mecanismo do tipo biela-manivela em que a manivela está fixa, ao passo que a barra anteriormente fixa pode rodar. Este tipo de mecanismo foi muito utilizado em motores de combustão interna nos primórdios da indústria aeroespacial, sendo conhecidos como motores rotativos porque os cilindros rodam em relação à manivela que está fixa. Este mecanismo é também um mecanismo de retorno rápido.

A figura 3.18b ilustra o sistema equivalente ao mecanismo de corrediça em que cada barra foi substituída pelo respectivo vector posição.

Da análise geométrica da figura 3.18b pode escrever-se a seguinte equação vectorial,

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_4 = \mathbf{0} \quad (3.73)$$

ou ainda,

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} - r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (3.74)$$

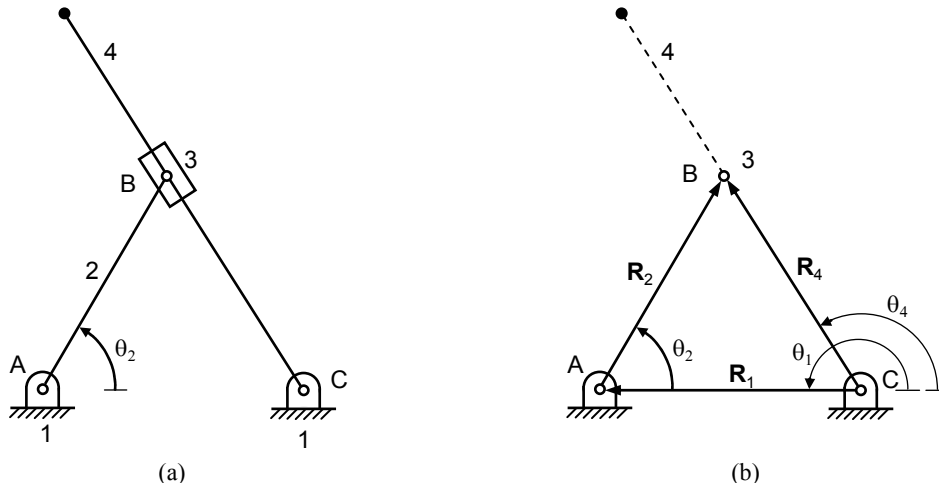


Figura 3.18 – (a) Mecanismo de corredeira; (b) Representação vectorial equivalente.

Utilizando a fórmula de Euler e separando as partes real e imaginária vem que,

$$r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 - r_4 \cos \theta_4 = 0 \quad (3.75)$$

$$r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2 - r_4 \sin \theta_4 = 0 \quad (3.76)$$

Admitindo que a barra 2 é o órgão motor, o valor de θ_2 é, por isso, conhecido à partida. Uma vez que os comprimentos das barras 1 e 2 são também conhecidos, as incógnitas das equações (3.75) e (3.76) são r_4 e θ_4 .

Assim, o valor de θ_4 pode facilmente ser obtido dividindo a equação (3.76) pela equação (3.75), resultando em,

$$\theta_4 = \arctg \frac{r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2} \quad (3.77)$$

Como, na presente situação o valor de θ_1 é igual a 180° , a equação (3.77) pode ser simplificada do seguinte modo,

$$\theta_4 = \arctg \frac{r_2 \sin \theta_2}{r_2 \cos \theta_2 - r_1} \quad (3.78)$$

Substituindo, agora, o valor de θ_4 dado pela equação (3.78) na equação (3.75), e resolvendo esta em ordem a r_4 vem que,

$$r_4 = \frac{r_2 \sin \theta_2 - r_1}{\cos \left(\arctg \frac{r_2 \sin \theta_2}{r_2 \cos \theta_2 - r_1} \right)} \quad (3.79)$$

3.7.3. Mecanismo Biela-Manivela com Excentricidade

A figura 3.19 ilustra um mecanismo do tipo biela-manivela, no qual existe uma excentricidade entre o eixo de rotação da manivela e o eixo que define a direcção de translação da corredeira. Ainda na mesma figura, as barras estão substituídas pelos respectivos vectores posição equivalentes formando uma cadeia cinemática fechada. Uma particularidade deste mecanismo é a diferença de tempo entre os movimentos de avanço e de recuo, sendo, por isso, usado como mecanismo de retorno rápido.

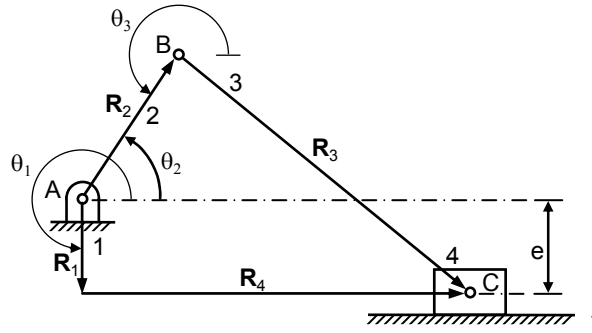


Figura 3.19 – Mecanismo biela-manivela com excentricidade.

Analisando a geometria da figura 3.19 é válida a seguinte equação vectorial,

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3 = \mathbf{0} \quad (3.80)$$

ou, na forma polar complexa,

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_4 e^{i\theta_4} - r_2 e^{i\theta_2} - r_3 e^{i\theta_3} = 0 \quad (3.81)$$

Utilizando a equação de Euler e separando as partes real e imaginária, a equação (3.81) resulta em,

$$r_1 \cos\theta_1 + r_4 \cos\theta_4 - r_2 \cos\theta_2 - r_3 \cos\theta_3 = 0 \quad (3.82)$$

$$r_1 \sin\theta_1 + r_4 \sin\theta_4 - r_2 \sin\theta_2 - r_3 \sin\theta_3 = 0 \quad (3.83)$$

Atendendo a que $\theta_1=270^\circ$ e $\theta_4=0^\circ$, das equações (3.82) e (3.83) vem que,

$$r_4 - r_2 \cos\theta_2 - r_3 \cos\theta_3 = 0 \quad (3.84)$$

$$-r_1 - r_2 \sin\theta_2 - r_3 \sin\theta_3 = 0 \quad (3.85)$$

Por outro lado, como a manivela é o elemento motor, o valor de θ_2 é conhecido *a priori*, pelo que as equações (3.84) e (3.85) devem ser resolvidas em ordem às incógnitas θ_3 e r_4 , ou seja,

$$\theta_3 = \arcsen\left(-\frac{r_1 + r_2 \sin\theta_2}{r_3}\right) \quad (3.86)$$

$$r_4 = r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\left[\arcsen\left(-\frac{r_1 + r_2 \sin\theta_2}{r_3}\right)\right] \quad (3.87)$$

3.7.4. Mecanismo Biela-Manivela Invertido

A figura 3.20 mostra um mecanismo do tipo biela-manivela invertido. Este tipo de inversão do mecanismo biela-manivela é utilizado em bombas manuais usadas para retirar água de poços. No sentido de definir uma cadeia cinemática fechada, consideram-se os vectores \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_3 e \mathbf{R}_4 , tal como se ilustra na figura 3.20, em que \mathbf{R}_3 tem a mesma direcção da velocidade da correia e \mathbf{R}_4 é perpendicular a esta direcção. Assim, pode escrever-se que,

$$\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 = \mathbf{0} \quad (3.88)$$

ou na forma polar complexa,

$$r_2 e^{i\theta_2} - r_1 e^{i\theta_1} - r_3 e^{i\theta_3} - r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (3.89)$$

e em que,

$$\theta_4 = \theta_3 - 90 \quad (3.90)$$

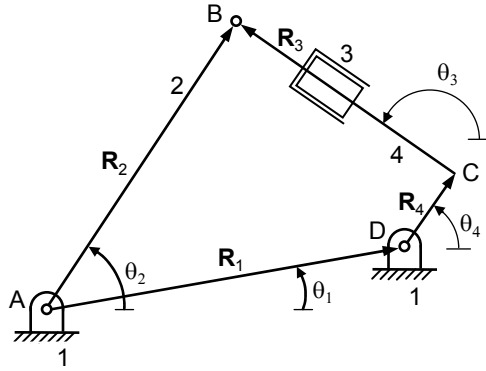


Figura 3.20 – Mecanismo biela-manivela invertido.

Utilizando a equação de Euler separando as partes real e imaginária, da equação (3.89) resulta que,

$$r_2 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1 - r_3 \cos \theta_3 - r_4 \cos \theta_4 = 0 \quad (3.91)$$

$$r_2 \sin \theta_2 - r_1 \sin \theta_1 - r_3 \sin \theta_3 - r_4 \sin \theta_4 = 0 \quad (3.92)$$

Na análise de posição deste mecanismo, as equações (3.90)-(3.92) devem ser verificadas em cada instante. Neste caso, o vector \mathbf{R}_1 permanece constante, quer em módulo, quer em direcção, os vectores \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_4 são constantes em módulo e o vector \mathbf{R}_3 varia, tanto em módulo, como em direcção. Pode, portanto, observar-se que os valores de r_1 , r_2 , r_4 , θ_1 e θ_4 são conhecidos à partida.

Com efeito, se o mecanismo for accionado pela manivela, isto é, θ_2 é dado, então as equações (3.90)-(3.92) devem ser resolvidas para θ_3 e r_3 . Por outro lado, quando θ_3 for conhecido, então as equações referidas devem ser resolvidas para θ_2 e r_3 em função de θ_3 . Finalmente, se r_3 for dado, as equações (3.90)-(3.92) têm de ser resolvidas com o intuito de calcular θ_2 e θ_3 . Na figura 3.21 estão representadas as possíveis soluções quando θ_3 e r_3 são dados.

Com efeito, admitindo que a manivela é o órgão motor, ou seja, θ_2 é dado, então substituindo a equação (3.90) nas equações (3.91) e (3.92) e isolando os termos que contêm θ_3 no segundo membro vem que,

$$r_2 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1 = r_3 \cos \theta_3 - r_4 \sin \theta_3 \quad (3.93)$$

$$r_2 \sin \theta_2 - r_1 \sin \theta_1 = r_3 \sin \theta_3 - r_4 \cos \theta_3 \quad (3.94)$$

Elevando ambas as equações ao quadrado, somando-as e resolvendo em ordem a r_3 resulta que,

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - r_4^2 - 2r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)} \quad (3.95)$$

Deve notar-se que, caso o argumento da raiz quadrada seja negativo, r_3 tem solução complexa, o que significa que para o valor de θ_2 especificado não é possível associar as barras com os comprimentos dados.

Substituindo, agora, os valores de $\cos\theta_3$ e $\sin\theta_3$ na equação (3.93) pelas relações trigonométricas de semi-ângulos, vem que,

$$a(1+t^2) - r_3(1-t^2) - r_4(2t) = 0 \quad (3.96)$$

em que,

$$a = r_2 \cos\theta_2 - r_1 \cos\theta_1 \quad (3.97)$$

e,

$$t = \operatorname{tg} \frac{\theta_3}{2} \quad (3.98)$$

Rearranjando a equação (3.96) obtém-se,

$$(a+r_3)t^2 - 2r_4t + (a-r_3) = 0 \quad (3.99)$$

Resolvendo esta equação em ordem a t vem que,

$$t = \frac{r_4 + \beta \sqrt{r_4^2 - a^2 + r_3^2}}{a+r_3} \quad (3.100)$$

onde $\beta = \pm 1$. Para determinar o valor correcto do parâmetro β , deve, em cada instante, ser calculado θ_3 usando a seguinte expressão,

$$\theta_3 = 2 \operatorname{arctg}(t) \quad (3.101)$$

De seguida deve substituir-se o valor de θ_3 na equação (3.94), em que o valor correcto de θ_3 corresponde ao valor que verifica a igualdade de equação (3.94).

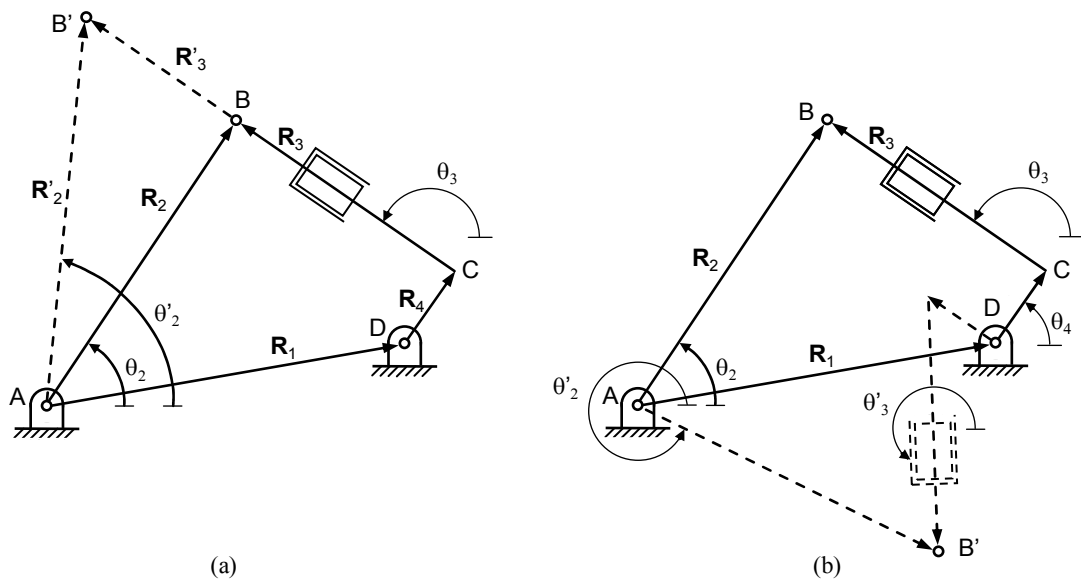


Figura 3.21 – (a) Duas possíveis soluções para a associação das barras sendo conhecido o valor de θ_3 ; (b) Duas possíveis soluções para a associação das barras sendo dado r_3 .

Take to kinematics. It will repay you. It is more fecund than geometry; it adds a fourth dimension to space.

Chebyshev to Sylvester

4. VELOCIDADE

4.1. DEFINIÇÃO

Em mecânica, a velocidade mede a rapidez com que um corpo muda de posição ao longo do tempo. A velocidade pode ser estudada sob o ponto de vista vectorial (direcção, sentido e módulo) ou escalar. A velocidade média pode definir-se como sendo a razão entre um deslocamento e o intervalo de tempo necessário para efectuar esse deslocamento. Quando o intervalo de tempo tende para zero, a velocidade designa-se velocidade instantânea.

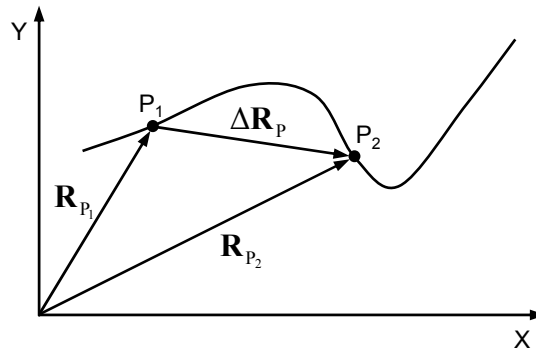


Figura 4.1 – Trajectória de um ponto.

A figura 4.1 ilustra a trajectória descrita por um ponto P , em que P_1 e P_2 representam duas posições do mesmo. Assim, o deslocamento relativo entre estas duas posições pode ser expresso por,

$$\Delta \mathbf{R}_P = \mathbf{R}_{P_2} - \mathbf{R}_{P_1} \quad (4.1)$$

onde \mathbf{R}_{P_1} e \mathbf{R}_{P_2} são os vectores que definem a localização do ponto P no início e fim do intervalo de tempo considerado. Assim, a velocidade média do ponto P , durante o intervalo de tempo Δt , é dada por,

$$\mathbf{V}_{\text{média}} = \frac{\Delta \mathbf{R}_P}{\Delta t} \quad (4.2)$$

A velocidade instantânea, ou simplesmente velocidade, é o limite da razão dada pela equação (4.2), isto é,

$$\mathbf{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_P}{\Delta t} \quad (4.3)$$

ou seja,

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}_P}{dt} \quad (4.4)$$

ou ainda,

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}_p \quad (4.5)$$

Deve notar-se que, como $\Delta \mathbf{R}_p$ é um vector, então o cálculo do limite ou derivada tem duas componentes, uma relacionada com o módulo e outra com a direcção.

Se um vector posição de um ponto for expresso em coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{R}_p = r^x \hat{\mathbf{i}} + r^y \hat{\mathbf{j}} + r^z \hat{\mathbf{k}} \quad (4.6)$$

então, a velocidade instantânea pode, facilmente, ser calculada como,

$$\dot{\mathbf{R}}_p = \dot{r}^x \hat{\mathbf{i}} + \dot{r}^y \hat{\mathbf{j}} + \dot{r}^z \hat{\mathbf{k}} \quad (4.7)$$

Na figura 4.2 está representado um corpo rígido que descreve um movimento de rotação em torno do eixo OA , ou seja, todos os pontos do corpo, tal como o ponto P , descrevem trajectórias circulares em torno de OA . A velocidade angular do corpo é representada pelo vector $\boldsymbol{\omega}$, cuja direcção é a mesma do eixo OA e o sentido é dado pela regra da mão direita. Designando o deslocamento angular de qualquer linha normal ao eixo de rotação por $\Delta\theta$, e o correspondente intervalo por Δt , então, a velocidade angular pode ser escrita como,

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (4.8)$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \quad (4.9)$$

ou ainda,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.10)$$

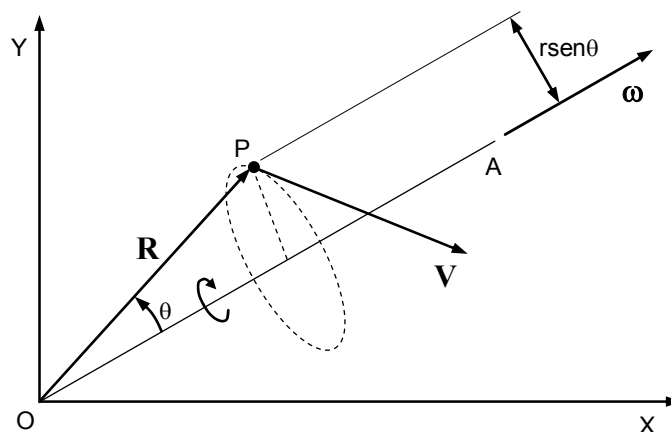


Figura 4.2 – Movimento de rotação.

Admitindo que o eixo de rotação é fixo, então o vector \mathbf{R} define a posição de um ponto P solidário com o corpo. Considerando o vector que resulta do produto externo $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$, cujo módulo é $\omega r \sin\theta$ em que θ representa o ângulo formado pelos vectores $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{R} , e cuja direcção é tangente à trajectória em P , então, a velocidade do ponto P pode ser calculada como,

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (4.11)$$

A equação (4.11) representa, portanto, a velocidade linear de um ponto que pertence a um corpo rígido que roda em torno de um eixo fixo.

4.2. MOVIMENTO CURVILÍNEO

Nos mecanismos de uso corrente, os pontos dos corpos estão, de uma forma geral, constringidos de tal modo que descrevem movimentos conhecidos, tal como por exemplo, o movimento de rotação e o movimento de translação rectilínea.

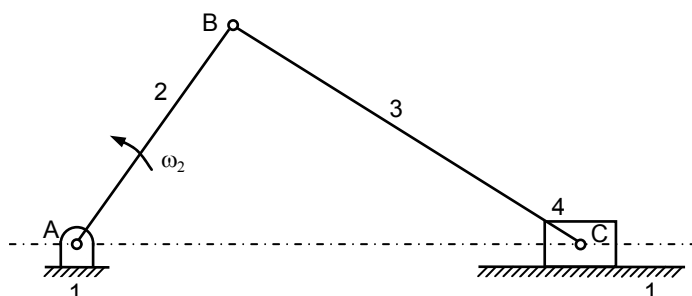


Figura 4.3 – Mecanismo biela-manivela.

Na figura 4.3 os pontos do corpo 2 descrevem trajectórias circulares, ao passo que os pontos do corpo 4 descrevem trajectórias rectilíneas. No entanto, os pontos que pertencem ao corpo 3 descrevem um movimento curvilíneo geral, o qual apresenta as propriedades dos movimentos de rotação e de translação.

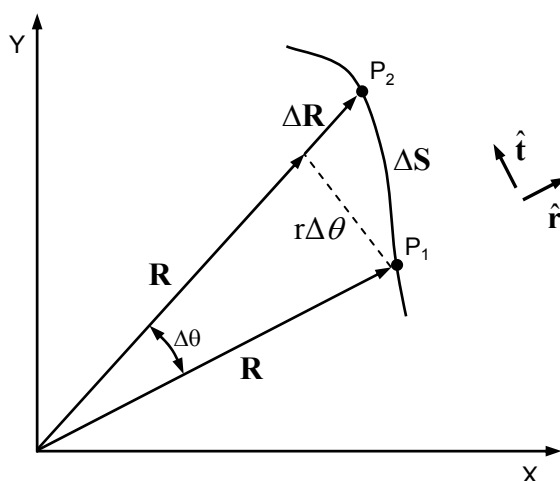


Figura 4.4 – Movimento curvilíneo.

Na figura 4.4 representa-se um ponto P que descreve uma trajectória curvilínea. O deslocamento descrito por este ponto, ao longo da trajectória $P_1 \rightarrow P_2$, é dado por ΔS . Simultaneamente, o vector posição é alterado de \mathbf{R} para $\mathbf{R} + \Delta \mathbf{R}$ e descreve também um movimento de rotação cuja amplitude é igual a $\Delta \theta$. Por isso, o deslocamento total efectuado pelo ponto P é igual à soma do deslocamento na direcção radial com o deslocamento na direcção tangencial, ou seja,

$$\Delta \mathbf{S} = r \hat{\mathbf{r}} + r \Delta \theta \hat{\mathbf{t}} \quad (4.12)$$

em que r é o módulo do vector \mathbf{R} e $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\mathbf{t}}$ representam os vectores unitários das direcções radial e tangencial. O vector $\hat{\mathbf{t}}$ obtém-se rodando o vector $\hat{\mathbf{r}}$ de um ângulo igual a 90° no sentido directo. O vector $\hat{\mathbf{r}}$ é o vector unitário na direcção radial, isto

é, representa a direcção na qual o ponto P se deslocaria caso o vector \mathbf{R} variasse e θ permanecesse constante, ao passo que o vector $\hat{\mathbf{t}}$ é o vector unitário na direcção tangencial, isto é, representa a direcção na qual o ponto P se deslocaria caso θ variasse e \mathbf{R} permanecesse constante.

A velocidade linear do ponto P é dada pela variação instantânea da posição em relação ao tempo,

$$\mathbf{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{S}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{r}{\Delta t} \hat{\mathbf{r}} + \frac{r \Delta \theta}{\Delta t} \hat{\mathbf{t}} \right) \quad (4.13)$$

ou seja,

$$\mathbf{V} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{t}} \quad (4.14)$$

ou ainda,

$$\mathbf{V} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r\omega \hat{\mathbf{t}} \quad (4.15)$$

em que $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

Usando o produto vectorial, a equação (4.15) pode ser reescrita como,

$$\mathbf{V} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (4.16)$$

O movimento curvilíneo pode ainda ser estudado de uma outra forma que se apresenta de seguida. A figura 4.5 ilustra um ponto em trajectória curvilínea. Ainda na mesma figura estão representados os vectores unitários associados aos eixos coordenados X e Y , bem como os vectores unitários relativos às direcções radial e tangencial do movimento do ponto P .

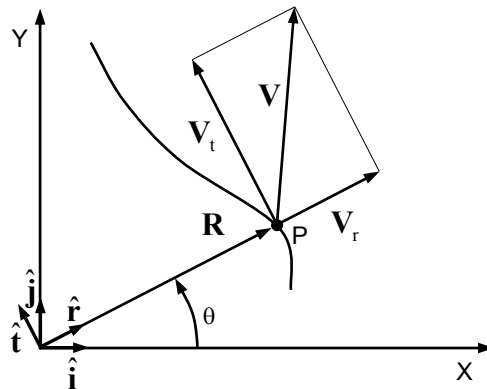


Figura 4.5 – Movimento curvilíneo geral.

O vector posição do ponto P é dado por,

$$\mathbf{R} = r \hat{\mathbf{r}} \quad (4.17)$$

A velocidade do ponto P obtém-se derivando a equação (4.17), isto é,

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad (4.18)$$

ou seja,

$$\mathbf{V} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \quad (4.19)$$

Por outro lado, da análise da figura 4.5 vem que,

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}} \cos \theta + \hat{\mathbf{j}} \sin \theta \quad (4.20)$$

$$\hat{\mathbf{t}} = -\hat{\mathbf{i}} \sin \theta + \hat{\mathbf{j}} \cos \theta \quad (4.21)$$

Então,

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = -\hat{\mathbf{i}} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + \hat{\mathbf{j}} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \quad (4.22)$$

ou seja,

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = (-\hat{\mathbf{i}} \sin \theta + \hat{\mathbf{j}} \cos \theta) \frac{d\theta}{dt} \quad (4.23)$$

ou ainda,

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \hat{\mathbf{t}} \frac{d\theta}{dt} \quad (4.24)$$

Assim, substituindo a equação (4.24) na equação (4.19) resulta que,

$$\mathbf{V} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{t}} \quad (4.25)$$

ou ainda,

$$\mathbf{V} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r \omega \hat{\mathbf{t}} \quad (4.26)$$

Esta equação é igual à equação (4.15), em que os dois termos do segundo membro representam, respectivamente, as componentes radial e tangencial da velocidade do ponto P , como se ilustra na figura 4.5.

4.3. VELOCIDADE DE UM PONTO NUM SISTEMA MÓVEL

Ao analisar os movimentos dos vários elementos que constituem os mecanismos, é, muitas vezes, necessário e conveniente descrever o movimento de um ponto que se move relativamente a um sistema de referência móvel. Na figura 4.6, o movimento do ponto P em relação ao sistema de coordenadas xyz é conhecido. Este sistema de coordenadas move-se relativamente ao sistema de coordenadas fixo XYZ .

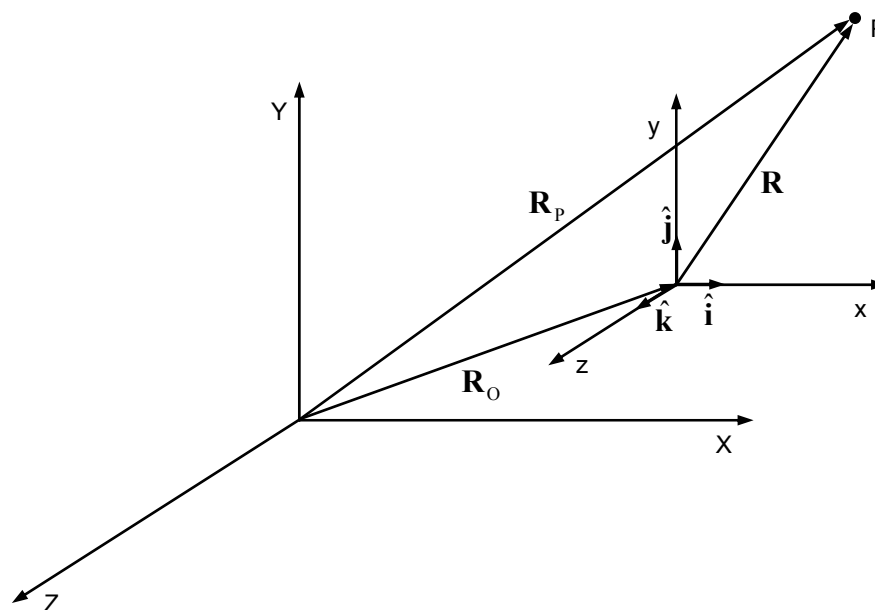


Figura 4.6 – Movimento de um ponto num sistema referencial móvel.

A posição do ponto P em relação ao sistema de coordenadas XYZ é dado por,

$$\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_O + \mathbf{R} \quad (4.27)$$

em que \mathbf{R}_O representa o vector posição da origem do sistema de coordenadas móvel e \mathbf{R} é o vector posição do ponto P em relação a este sistema de coordenadas.

Em coordenadas cartesianas o vector \mathbf{R} é escrito como,

$$\mathbf{R} = r^x \hat{\mathbf{i}} + r^y \hat{\mathbf{j}} + r^z \hat{\mathbf{k}} \quad (4.28)$$

em que r^x , r^y e r^z são os módulos das componentes do vector \mathbf{R} nas direcções x , y e z , respectivamente, e $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ são os vectores unitários correspondentes às mesmas direcções. Deve referir-se que estes vectores variam durante o movimento associado ao sistema de referência móvel.

A velocidade absoluta do ponto P , isto é, a velocidade expressa em relação ao sistema de coordenadas fixo XYZ , pode obter-se derivando em ordem ao tempo a equação (4.27), resultando em,

$$\mathbf{V}_P = \dot{\mathbf{R}}_P = \dot{\mathbf{R}}_O + \dot{\mathbf{R}} \quad (4.29)$$

Por outro lado, derivando a equação (4.28) em ordem ao tempo vem que,

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{r}^x \hat{\mathbf{i}} + \dot{r}^y \hat{\mathbf{j}} + \dot{r}^z \hat{\mathbf{k}} + r^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + r^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + r^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} \quad (4.30)$$

em que os três primeiros termos do segundo membro representam a velocidade do ponto P em relação ao sistema de coordenadas móvel xyz , a qual pode ser, por conveniência, escrita como,

$$\mathbf{V} = \dot{r}^x \hat{\mathbf{i}} + \dot{r}^y \hat{\mathbf{j}} + \dot{r}^z \hat{\mathbf{k}} \quad (4.31)$$

Considerem-se os três últimos termos do lado direito da equação (4.30). Assim, a velocidade do ponto que representa o *terminus* de um vector \mathbf{R} , que passa por um ponto fixo e roda em torno deste ponto com uma velocidade ω , é dada por,

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (4.32)$$

Por outro lado, as derivadas dos vectores unitários podem ser expressas por,

$$\dot{\hat{\mathbf{i}}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{i}} \quad (4.33)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{j}}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{j}} \quad (4.34)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{k}}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{k}} \quad (4.35)$$

em que ω representa a velocidade angular do sistema de coordenadas móvel xyz em relação ao sistema de coordenadas fixo XYZ .

Utilizando as equações (4.33), (4.34) e (4.35), pode escrever-se que,

$$r^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + r^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + r^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} = r^x (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{i}}) + r^y (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{j}}) + r^z (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{k}}) \quad (4.36)$$

ou seja,

$$r^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + r^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + r^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} = \boldsymbol{\omega} \times (r^x \hat{\mathbf{i}} + r^y \hat{\mathbf{j}} + r^z \hat{\mathbf{k}}) \quad (4.37)$$

ou ainda, usando a relação dada pela equação (4.28),

$$r^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + r^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + r^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (4.38)$$

Deve notar-se que a equação (4.38) representa a velocidade linear de um ponto que roda em torno de eixo fixo. Com efeito, pelo que acaba de ser exposto, a equação (4.30) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (4.39)$$

e, conseqüentemente, a velocidade do ponto P dada pela equação (4.29) pode ser expressa do seguinte modo,

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_O + \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (4.40)$$

em que,

$$\mathbf{V}_O = \dot{\mathbf{R}}_O \quad (4.41)$$

e onde \mathbf{V}_P é a velocidade do ponto P expressa no sistema de coordenadas fixo XYZ , \mathbf{V}_O representa a velocidade linear da origem do sistema de coordenadas móvel xyz em relação ao sistema de coordenadas fixo XYZ , \mathbf{V} é a velocidade do ponto P em relação ao sistema de coordenadas móvel xyz , ω representa a velocidade angular do sistema móvel relativamente ao sistema fixo e \mathbf{R} representa a distância da origem do sistema de coordenadas xyz ao ponto P .

Uma aplicação do que acaba de ser exposto pode ser vista ao estudar o movimento do mecanismo ilustrado na figura 4.7, em que a barra 2 roda com uma velocidade angular constante ω_2 . A velocidade do ponto B é, por isso, conhecida, a questão que se coloca é a de saber qual a velocidade do ponto C . O sistema de coordenadas fixo XY tem a origem em A , ao passo que o sistema de coordenadas móvel xy tem origem em B . Assim, a equação da velocidade do ponto C pode ser escrita como,

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_B + \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (4.42)$$

em que \mathbf{V}_C é perpendicular a CD e cujo módulo é desconhecido, \mathbf{V}_B é perpendicular a AB e tem módulo igual a $\omega_2 AB$, \mathbf{V} é um vector nulo porque o ponto C é fixo em relação ao sistema de coordenadas móvel e $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$ é perpendicular a BC e em que $\boldsymbol{\omega} = \omega_3$ e o módulo de \mathbf{R} é igual a BC . A direcção do vector $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$ pode obter-se pela aplicação da regra da mão direita.

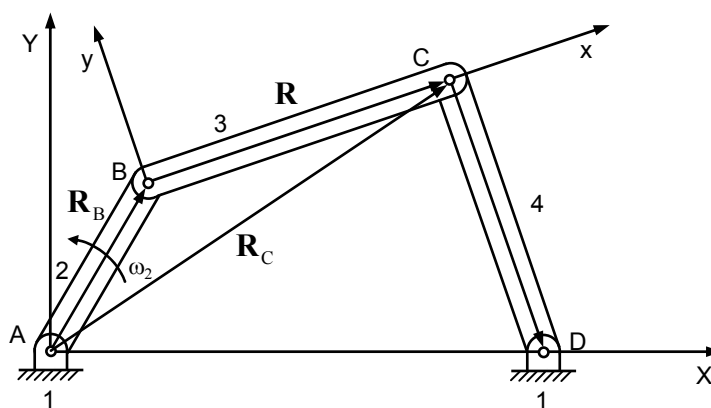


Figura 4.7 – Aplicação do movimento de um ponto num sistema referencial móvel.

4.4. VELOCIDADE DE UM CORPO RÍGIDO

A figura 4.8 representa um corpo rígido animado de um movimento geral, cuja componente de rotação é caracterizada pela velocidade angular ω e a componente de translação associada, por exemplo ao ponto A , é definida pela velocidade linear \mathbf{V}_A .

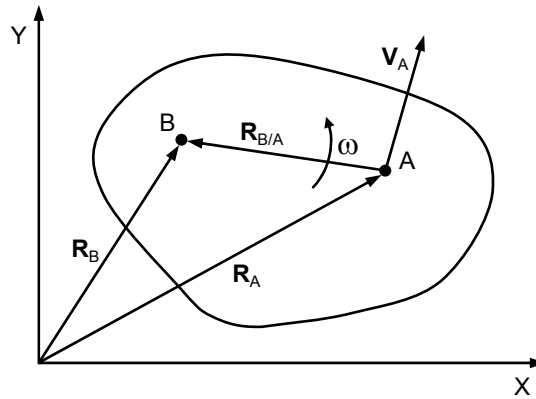


Figura 4.8 – Corpo rígido animado de um movimento geral ou misto.

A posição do ponto B pertencente ao corpo é definida por,

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_{B/A} \quad (4.43)$$

e a velocidade do mesmo ponto B é dada por,

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{B/A} \quad (4.44)$$

em que \mathbf{V}_A é a velocidade do ponto A que é conhecida à partida, $\mathbf{V}_{B/A}$ é a velocidade de B em relação a A , *i.e.*, representa a velocidade de B num sistema de coordenadas que tem A como origem, ou seja,

$$\mathbf{V}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{B/A} \quad (4.45)$$

Substituindo a equação (4.45) em (4.44) vem que,

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{B/A} = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{B/A} \quad (4.46)$$

Comparando a equação (4.46) com a equação (4.42) verifica-se que a primeira é um caso particular da segunda, em que o ponto em estudo tem velocidade nula em relação ao sistema móvel, dado que pertence ao mesmo corpo rígido.

Da análise da equação (4.46) pode também concluir-se que a velocidade relativa de dois pontos quaisquer que pertençam ao mesmo corpo rígido é dada pela diferença das velocidades absolutas dos mesmos, ou seja,

$$\mathbf{V}_{B/A} = \mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A \quad (4.47)$$

Uma aplicação simples e concreta do que acaba de ser exposto é apresentada de seguida. A figura 4.9 mostra um mecanismo biela-manivela, em que a velocidade do ponto B é conhecida à partida e se pretende calcular a velocidade do ponto C . Como os pontos B e C pertencem ao mesmo corpo rígido, pode escrever-se que,

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_{C/B} \quad (4.48)$$

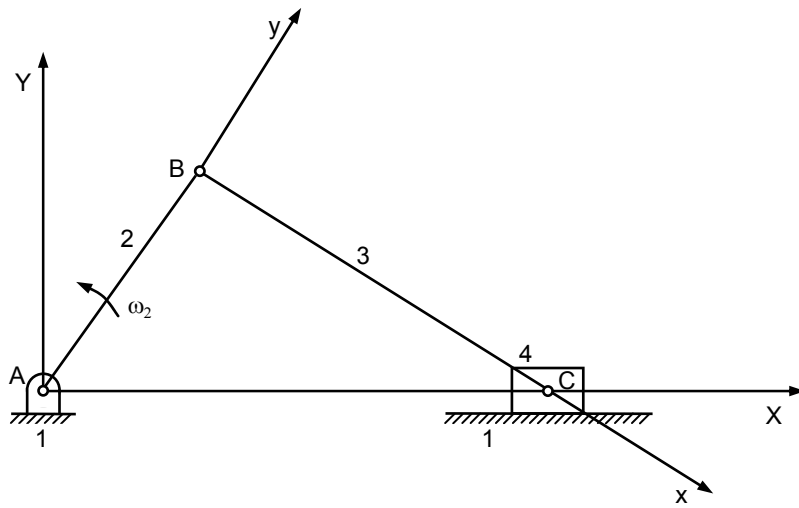


Figura 4.9 – Mecanismo biela-manivela.

4.5. MÉTODOS ANALÍTICOS

4.5.1. Método Algébrico

Considere-se o mecanismo biela-manivela representado na figura 4.10, em relação ao qual se pretende deduzir uma expressão que permita calcular, em cada instante, a velocidade da corredeira, ou seja, a velocidade do ponto C.

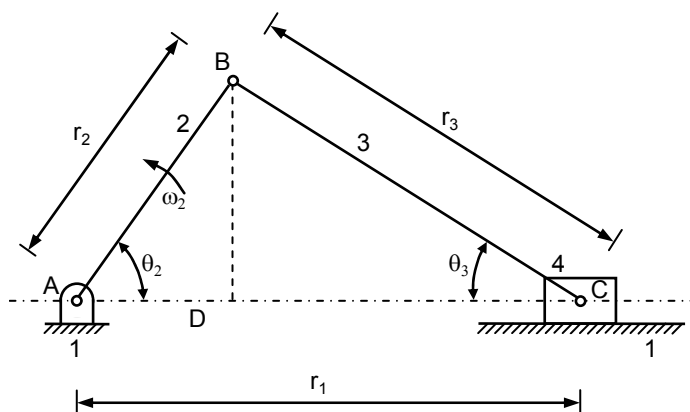


Figura 4.10 – Representação esquemática do mecanismo biela-manivela.

No presente estudo, considera-se que a manivela é o órgão motor, a qual roda em torno de A com uma velocidade angular constante, isto é, $\theta_2 = \omega_2 t$. Da análise de posição do mecanismo biela-manivela pode obter-se a seguinte expressão para a posição do ponto C,

$$r_1 = r_2 \cos \omega_2 t + \sqrt{r_3^2 - r_2^2 \sin^2 \omega_2 t} \quad (4.49)$$

ou, de uma forma simplificada, isto é, quando $r_2/r_3 < 1/4$,

$$r_1 = r_2 \cos \omega_2 t + r_3 - \frac{r_2^2 \sin^2 \omega_2 t}{2r_3} \quad (4.50)$$

As equações (4.49) e (4.50) permitem calcular a posição da corredeira em função do tempo e das características geométricas do mecanismo biela-manivela. Assim, por simples derivação destas equações em ordem ao tempo, é possível determinar uma expressão que traduz a velocidade do ponto C, resultando, respectivamente,

$$v_1 = \dot{r}_1 = -\omega_2 r_2 \left(\sin \omega_2 t + \frac{r_2 \sin \omega_2 t \cos \omega_2 t}{\sqrt{r_3^2 - r_2^2 \sin^2 \omega_2 t}} \right) \quad (4.51)$$

$$v_1 = \dot{r}_1 = -\omega_2 r_2 \left(\sin \omega_2 t + \frac{r_2}{2r_3} \sin 2\omega_2 t \right) \quad (4.52)$$

Deve notar-se que $\omega_2 r_2$ representa a componente tangencial da velocidade do ponto B. De um modo análogo, a aceleração da corredeira, isto é, do ponto C, poderá ser facilmente calculada por derivação das equações (4.51) e (4.52).

4.5.2. Método da Notação Complexa

A figura 4.11 ilustra o mecanismo biela-manivela, em que as respectivas barras foram substituídas por vectores posição equivalentes, formando, assim, uma cadeia cinemática fechada. Utilizando a notação complexa, a equação que traduz a cadeia cinemática constituída pelos vectores \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_3 é dada por,

$$r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} - r_1 e^{i\theta_1} = 0 \quad (4.53)$$

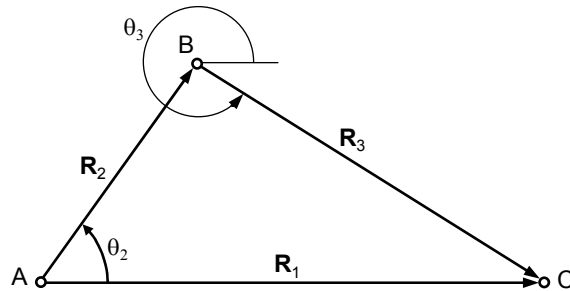


Figura 4.11 – Representação vectorial do mecanismo biela-manivela.

Derivando a equação (4.53) em ordem ao tempo obtém-se a expressão da velocidade da corrediça, ou seja,

$$\frac{dr_2}{dt} e^{i\theta_2} + r_2 i \frac{d\theta_2}{dt} e^{i\theta_2} + \frac{dr_3}{dt} e^{i\theta_3} + r_3 i \frac{d\theta_3}{dt} e^{i\theta_3} - \frac{dr_1}{dt} e^{i\theta_1} - r_1 i \frac{d\theta_1}{dt} e^{i\theta_1} = 0 \quad (4.54)$$

Atendendo a que r_2 , r_3 e θ_1 são constantes, as respectivas derivadas são nulas, por outro lado, como,

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 \quad (4.55)$$

$$\frac{d\theta_3}{dt} = \omega_3 \quad (4.56)$$

$$\frac{dr_1}{dt} = v_1 \quad (4.57)$$

então, a equação (4.54) pode ser simplificada e reescrita como,

$$ir_2 \omega_2 e^{i\theta_2} + ir_3 \omega_3 e^{i\theta_3} - v_1 e^{i\theta_1} = 0 \quad (4.58)$$

Utilizando, agora, a fórmula de Euler, vem que,

$$ir_2 \omega_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) + ir_3 \omega_3 (\cos \theta_3 + i \operatorname{sen} \theta_3) - v_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) = 0 \quad (4.59)$$

Analisando a equação (4.59) observa-se que as incógnitas são ω_3 e v_1 . Assim, atendendo a que $\theta_1=0$, separando as partes real e imaginária e resolvendo o sistema daí resultante em ordem às incógnitas, obtém-se,

$$\omega_3 = -\frac{r_2 \omega_2 \cos \theta_2}{r_3 \cos \theta_3} \quad (4.60)$$

$$v_1 = -r_2 \omega_2 (\operatorname{sen} \theta_2 - \cos \theta_2 \operatorname{tg} \theta_3) \quad (4.61)$$

O valor de θ_3 pode calcular-se utilizando a seguinte expressão, a qual se obtém da análise de posição do mesmo mecanismo,

$$\theta_3 = \arcsen\left(-\frac{r_2 \text{sen}\theta_2}{r_3}\right) \quad (4.62)$$

Deve salientar-se que este método, para além da expressão da velocidade da corrediça, permite também obter uma expressão para a velocidade angular da biela.

4.5.3. Método da Notação Matricial

O mecanismo biela-manivela, ilustrado na figura 4.12, é utilizado para demonstrar a aplicação do método da notação matricial no cálculo das velocidades. Na figura 4.12 as barras que constituem o mecanismo biela-manivela foram substituídas por vectores posição, os quais formam uma cadeia cinemática fechada.

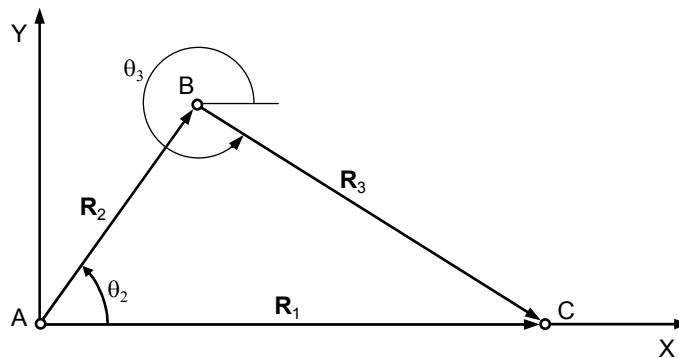


Figura 4.12 – Representação vectorial do mecanismo biela-manivela.

Da análise de posição do mecanismo biela-manivela, verifica-se que projectando os vectores \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_3 segundo as direcções X e Y , obtém-se, respectivamente,

$$r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 - r_1 = 0 \quad (4.63)$$

$$r_2 \text{sen}\theta_2 - r_3 \text{sen}\theta_3 = 0 \quad (4.64)$$

Derivando estas duas expressões em ordem ao tempo resulta em,

$$-r_2 \dot{\theta}_2 \text{sen}\theta_2 - r_3 \dot{\theta}_3 \text{sen}\theta_3 - \dot{r}_1 = 0 \quad (4.65)$$

$$r_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 - r_3 \dot{\theta}_3 \cos\theta_3 = 0 \quad (4.66)$$

Atendendo a que $\dot{\theta}_2 = \omega_2$, $\dot{\theta}_3 = \omega_3$ e $\dot{r}_1 = v_1$, estas equações são reescritas como,

$$-r_2 \omega_2 \text{sen}\theta_2 - r_3 \omega_3 \text{sen}\theta_3 - v_1 = 0 \quad (4.67)$$

$$r_2 \omega_2 \cos\theta_2 - r_3 \omega_3 \cos\theta_3 = 0 \quad (4.68)$$

em que ω_3 e v_1 são as incógnitas. Reescrevendo, as equações (4.67) e (4.68) na forma matricial resulta em,

$$\begin{bmatrix} -r_3 \text{sen}\theta_3 & -1 \\ r_3 \cos\theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_3 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2 \omega_2 \text{sen}\theta_2 \\ r_2 \omega_2 \cos\theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.69)$$

A equação (4.69) representa um sistema de equações lineares do tipo $\mathbf{Ax}=\mathbf{c}$, o qual pode ser resolvido, por exemplo, usando a regra de Cramer. Assim, por exemplo, um sistema de equações lineares de dimensão dois pode ser escrito como,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \quad (4.70)$$

cujas soluções é dada pela regra de Cramer é a seguinte,

$$x_1 = \frac{c_1 a_{22} - c_2 a_{12}}{D} \quad (4.71)$$

$$x_2 = \frac{a_{11} c_2 - a_{21} c_1}{D} \quad (4.72)$$

em que o determinante D é calculado como,

$$D = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \quad (4.73)$$

Com efeito, aplicando a regra de Cramer ao sistema representado pela equação (4.69) vem que,

$$\omega_3 = -\frac{r_2 \omega_2 \cos \theta_2}{r_3 \cos \theta_3} \quad (4.74)$$

$$v_1 = -\frac{r_2 \omega_2 \sin(\theta_2 + \theta_3)}{\cos \theta_3} \quad (4.75)$$

em que θ_3 é dado pela seguinte equação, a qual pode ser obtida pela análise de posição do mecanismo biela-manivela,

$$\theta_3 = \arcsen\left(-\frac{r_2 \sin \theta_2}{r_3}\right) \quad (4.76)$$

Deve referir-se que, à semelhança do método da notação complexa, o método da notação matricial, para além da expressão da velocidade linear da corrediça, permite também obter uma expressão para a velocidade angular da biela.

4.5.4. Método da Decomposição do Movimento

Um movimento denomina-se geral quando nele coexistem as características dos movimentos de translação e de rotação. O movimento geral, que traduz a lei de Chasles, pode sempre ser decomposto na soma de um movimento de translação com um movimento de rotação. Este método de análise é, por conseguinte, denominado método da decomposição do movimento, o qual é de seguida utilizado no estudo do movimento do mecanismo biela-manivela como exemplo de aplicação, de modo a calcular-se a velocidade da corrediça, ou seja, do ponto C .

Na figura 4.13 está representado o mecanismo biela-manivela no qual a manivela descreve um movimento de rotação, a corrediça efectua um movimento de translação rectilínea e a biela descreve um movimento geral. Na presente situação, considera-se que a manivela é o órgão motor, e que roda com uma velocidade angular constante igual a ω_2 .

Assim, para o mecanismo representado na figura 4.13 sabe-se que a velocidade do ponto B é perpendicular à direcção AB e que a velocidade do ponto C é horizontal. Os sentidos dos vectores \mathbf{V}_B e \mathbf{V}_C estão representados na mesma figura. Como a manivela roda com velocidade angular constante, então o módulo da velocidade do ponto B é dado por,

$$v_B = \omega_2 AB \quad (4.77)$$

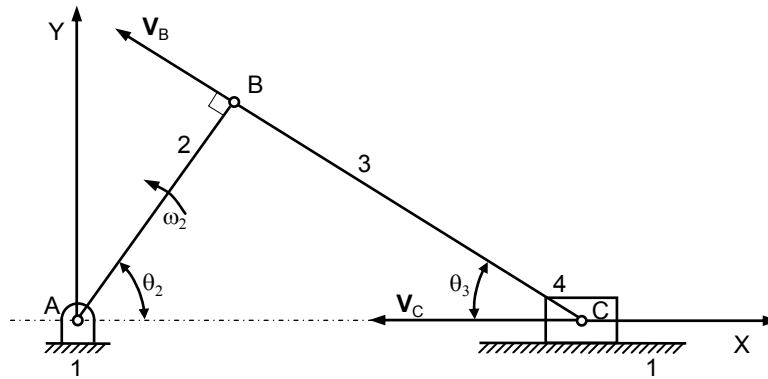
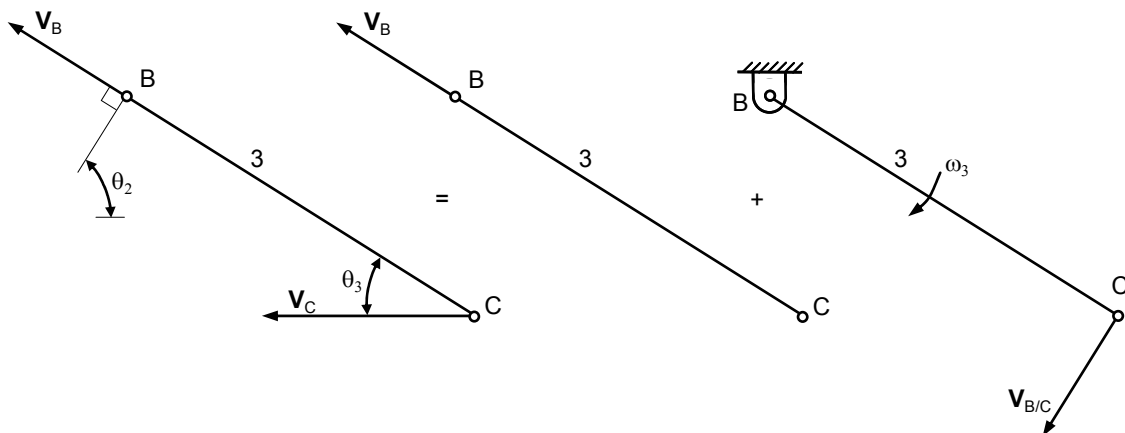


Figura 4.13 – Mecanismo biela-manivela em que estão representadas as velocidades dos pontos B e C .

Atendendo à geometria da figura 4.13, e aplicando a lei dos senos ao triângulo ABC pode calcular-se o ângulo que a biela faz com a direcção horizontal, ou seja,

$$\theta_3 = \arcsen\left(\frac{AB \sin \theta_2}{BC}\right) \quad (4.78)$$

Uma vez que a biela descreve um movimento geral, este movimento pode ser decomposto numa translação com o ponto B e numa rotação em torno do eixo que passa no mesmo ponto B , como se representa na figura 4.14. Atendendo a que o ponto B pertence simultaneamente à biela e à manivela, a sua velocidade é a mesma quer se considere o ponto pertencente a um ou outro corpo. O mesmo acontece ao ponto C , no entanto, agora, em relação à biela e à correia.



Movimento geral ou misto = translação + rotação

Figura 4.14 – Decomposição do movimento geral ou misto da biela, como sendo a soma de uma translação e de uma rotação.

A velocidade da corrediça, ou do ponto C , pode ser escrita vectorialmente como,

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_{C/B} \quad (4.79)$$

em que o módulo de $\mathbf{V}_{C/B}$ é dado por,

$$v_{C/B} = \omega_3 BC \quad (4.80)$$

Projectando, agora, a equação (4.79) nas direcções X e Y obtém-se um sistema de duas equações a duas incógnitas, ou seja,

$$-v_C = -v_B \text{sen} \theta_2 - \omega_3 BC \text{sen} \theta_3 \quad (4.81)$$

$$0 = v_B \text{cos} \theta_2 - \omega_3 BC \text{cos} \theta_3 \quad (4.82)$$

Resolvendo este sistema em ordem a ω_3 e v_C vem que,

$$\omega_3 = \frac{v_B \text{cos} \theta_2}{BC \text{cos} \theta_3} \quad (4.83)$$

$$v_C = v_B \text{sen} \theta_2 + \omega_3 BC \text{sen} \theta_3 \quad (4.84)$$

Atendendo a que $v_B = \omega_2 AB$, $\theta_2 = \omega_2 t$, $AB = r_2$, $BC = r_3$ e que θ_3 é dado pela equação (4.78), após algum tratamento matemático, a equação (4.84) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$v_C = -\omega_2 r_2 \left(\text{sen} \omega_2 t + \frac{r_2 \text{sen} \omega_2 t \text{cos} \omega_2 t}{\sqrt{r_3^2 - r_2^2 \text{sen}^2 \omega_2 t}} \right) \quad (4.85)$$

Esta equação é, como seria de esperar, exactamente igual à expressão obtida pelo método algébrico.

4.5.5. Método das Projecções das Velocidades

Um método simples e prático que permite determinar velocidades de corpos em movimento plano é o que se baseia no teorema das projecções das velocidades, segundo o qual “*são iguais as projecções das velocidades de dois quaisquer pontos de um corpo rígido sobre a recta por eles definida*”. Caso isto não sucedesse, o corpo deformatar-se-ia e deixaria de ser rígido, o que é uma premissa deste teorema.

No mecanismo biela-manivela representado na figura 4.15, a manivela tem um comprimento igual a r_2 e roda com uma velocidade angular constante igual a ω_2 . A biela tem comprimento r_3 , sendo as posições angulares da manivela e da biela representadas por θ_2 e θ_3 , respectivamente. Ainda na figura 4.15 estão ilustrados os vectores velocidade dos pontos B e C , cujas direcções e sentidos são conhecidos. O ângulo formado pela direcção do vector da velocidade \mathbf{V}_B e pela direcção da biela é representado por α . Com efeito, da análise do mecanismo observa-se que o ponto B tem uma velocidade cujo módulo é igual a $\omega_2 r_2$, sendo a direcção deste vector velocidade perpendicular ao segmento AB , ao passo que o ponto C tem velocidade cujo módulo é desconhecido e o suporte é o segmento de recta AC . Assim, de acordo com o teorema das projecções das velocidades, pode escrever-se que,

$$v_B \text{cos} \alpha = v_C \text{cos} \theta_3 \quad (4.86)$$

Atendendo a que,

$$\alpha = 90 - (\theta_2 + \theta_3) \quad (4.87)$$

então a equação (4.86) pode reescrever-se como,

$$v_C = \omega_2 r_2 \frac{\cos[90 - (\theta_2 + \theta_3)]}{\cos \theta_3} \quad (4.88)$$

ou seja⁴²,

$$v_C = \omega_2 r_2 (\sen \theta_2 + \cos \theta_2 \operatorname{tg} \theta_3) \quad (4.89)$$

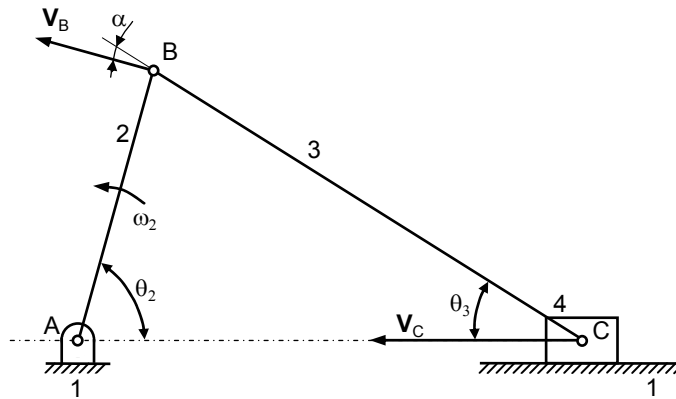


Figura 4.15 – Mecanismo biela-manivela em que estão representadas as velocidades dos pontos B e C.

Deve, agora, eliminar-se a variável θ_3 da equação (4.89), pelo que aplicando a lei dos senos ao triângulo ABC resulta que,

$$\sen \theta_3 = \frac{r_2}{r_3} \sen \theta_2 \quad (4.90)$$

e, como,

$$\operatorname{tg} \theta_3 = \frac{\sen \theta_3}{\sqrt{1 - \sen^2 \theta_3}} \quad (4.91)$$

então, após tratamento matemático, e substituindo o valor de θ_2 por $\omega_2 t$, a expressão que permite calcular a velocidade linear da correia é dada por,

$$v_C = -\omega_2 r_2 \left(\sen \omega_2 t + \frac{r_2 \sen \omega_2 t \cos \omega_2 t}{\sqrt{r_3^2 - r_2^2 \sen^2 \omega_2 t}} \right) \quad (4.92)$$

Note-se que, a equação (4.92) é, tal como seria de esperar, exactamente igual à expressão obtida pelos métodos apresentados anteriormente.

⁴² Deve lembrar-se que $\cos(90 - \gamma) = \sen \gamma$ e que $\sen(\beta + \varphi) = \sen \beta \cos \varphi + \cos \beta \sen \varphi$.

4.6. MÉTODOS GRÁFICOS

4.6.1. Método do Polígono de Velocidades

O método do polígono de velocidades baseia-se na construção e resolução gráfica de equações vectoriais. Este método, aqui, é aplicado ao mecanismo biela-manivela a título demonstrativo. Assim, considere-se o mecanismo representado na figura 4.16, em que a manivela é órgão motor que roda com uma velocidade angular constante igual a ω_2 . Utilizando o método do polígono de velocidades pretende-se determinar a velocidade linear da corredeira, isto é, a velocidade do ponto C .

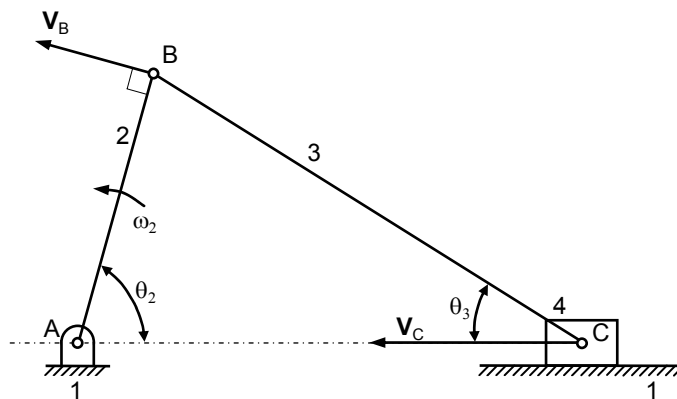


Figura 4.16 – Mecanismo biela-manivela em que estão representadas as velocidades dos pontos B e C .

Por definição de velocidade relativa entre dois pontos que pertencem a um mesmo corpo rígido sabe-se que para os pontos B e C é válida a seguinte relação,

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_{C/B} \quad (4.93)$$

em que se conhece o módulo e a direcção do vector \mathbf{V}_B , isto é, o módulo é igual a $\omega_2 AB$ e direcção é perpendicular ao segmento AB , como se ilustra na figura 4.16. Sabe-se ainda que a direcção do vector $\mathbf{V}_{C/B}$ é perpendicular ao segmento BC .

Deste modo, é possível traçar, a uma escala adequada, o polígono de velocidades dado pela equação (4.93). Assim, tomando uma escala adequada e a partir da escolha de um ponto O_V como sendo a origem das velocidades, representa-se o vector \mathbf{V}_B , cuja direcção é, como se sabe, perpendicular ao segmento AB e o sentido é o correspondente ao sentido de rotação da manivela. Respeitando, na sua colocação em relação a \mathbf{V}_B , as regras da adição e subtracção de vectores, e seguindo a equação (4.93), é possível completar graficamente o polígono de velocidades.

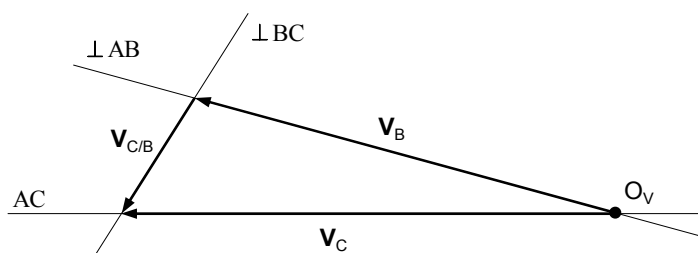


Figura 4.17 – Construção gráfica do polígono de velocidades.

Na figura 4.17 mostra-se o resultado final da construção gráfica do polígono de velocidades, onde, para além da velocidade da corrediça, V_C , é também possível calcular o valor da velocidade relativa $V_{C/B}$, medindo directamente sobre o desenho e afectando as medidas pelo factor de escala.

4.6.2. Método da Imagem de Velocidades

Em mecanismos que contêm elementos ou corpos cuja configuração geométrica é algo complexa, torna-se útil a obtenção de uma imagem de velocidades do próprio elemento sempre que seja necessário conhecer a velocidade em determinados pontos. A título de demonstração, na figura 4.18a encontra-se esquematizado um sistema mecânico constituído por dois corpos em que o corpo 2 tem forma triangular e está animado de um movimento de rotação em torno do ponto A , com uma velocidade angular igual a ω_2 .

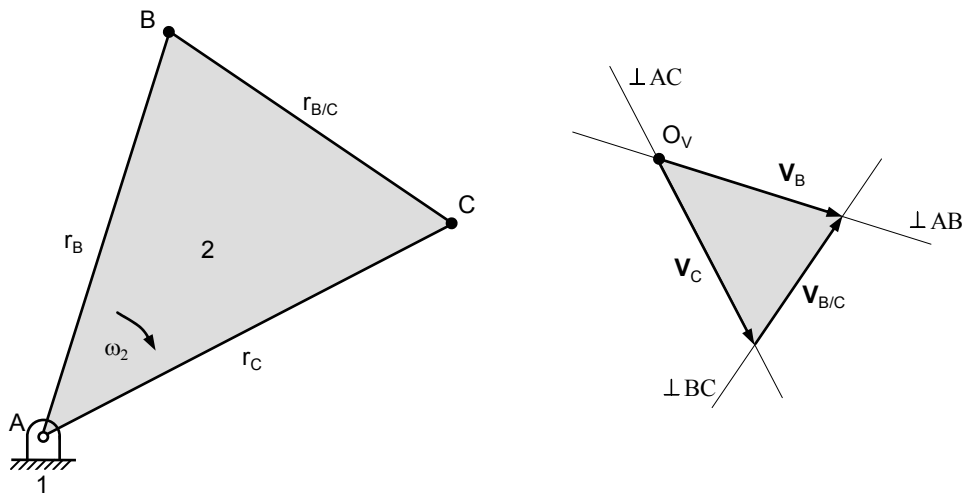


Figura 4.18 – Determinação da imagem de velocidades de um corpo.

Considerando as dimensões dos lados do triângulo ABC representadas pelos vectores R_B , R_C e $R_{C/B}$, então as respectivas velocidades são dadas por,

$$v_B = \omega_2 r_B \quad (4.94)$$

$$v_C = \omega_2 r_C \quad (4.95)$$

$$v_{B/C} = \omega_2 r_{B/C} \quad (4.96)$$

Atendendo a que as dimensões r_B , r_C e $r_{B/C}$ são conhecidas, torna-se possível construir a imagem de velocidades a uma dada escala, obtendo-se, deste modo, uma réplica exacta do elemento rodada 90° e cujos lados representam a velocidade de cada ponto considerado, como está ilustrado na figura 4.18b. Assim, a partir desta imagem de velocidades é possível determinar a velocidade de qualquer outro ponto pertencente ao elemento considerado, desde que seja conhecida a sua localização geométrica, bastando, para o efeito, traçar o respectivo vector com origem em O_V e extremo na imagem desse mesmo ponto.

Para um mecanismo articulado, este método pode ser aplicado sucessivamente aos vários elementos que o constituem, como se mostra na figura 4.19 para o mecanismo do tipo biela-manivela com corrediça.

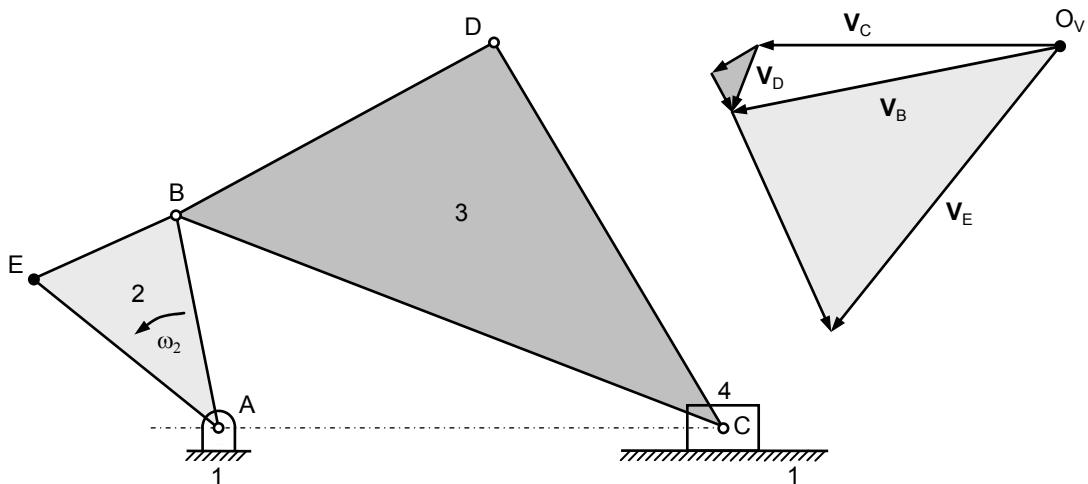


Figura 4.19 – Determinação da imagem de velocidades para o mecanismo biela-manivela.

4.6.3. Método dos Centros Instantâneos de Rotação

Utilizando o conceito de centro instantâneo de rotação é possível efectuar a análise de velocidades, uma vez que, por definição, conhecida a velocidade do ponto de corpo relativamente ao seu centro instantâneo de rotação, então essa velocidade é exactamente a mesma para o ponto de outro corpo cujo centro instantâneo de rotação é comum.

Na figura 4.20 está representado o mecanismo biela-manivela, em relação ao qual se conhece a localização dos seus seis centros instantâneos de rotação. Na presente situação, admite-se que a manivela, sendo o órgão motor, roda com uma velocidade angular constante igual a ω_2 , pelo que a velocidade linear do centro O_{23} é facilmente calculável. Pretende-se, pois, utilizando o conceito de centro instantâneo de rotação determinar a velocidade linear da corredeira.

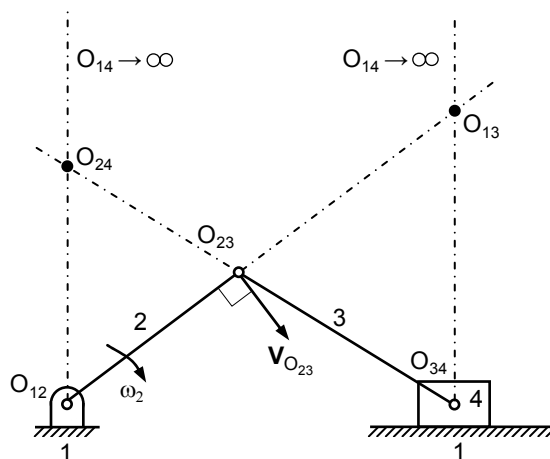


Figura 4.20 – Mecanismo biela-manivela e respectivos centros instantâneos de rotação.

Observando a figura 4.20, verifica-se que o centro O_{23} é um ponto que pertence à manivela e o centro O_{34} é um ponto que pertence à corredeira. Os corpos 2 e 4 têm em comum o centro O_{24} , o qual pode ser considerado, virtualmente, como sendo um ponto comum a ambos os corpos e que, por isso, apresenta a mesma velocidade, quer se considere como fazendo parte de um ou outro corpo. Por outro lado, sabe-se que

todos os pontos que pertencem à manivela, ou a ela virtualmente ligados, rodam em torno do eixo que passa pelo centro O_{12} . Assim, pode escrever-se a seguinte relação,

$$v_{O_{23}} = \omega_2 O_{12} O_{23} \quad (4.97)$$

e que,

$$v_{O_{24}} = \omega_2 O_{12} O_{24} \quad (4.98)$$

Combinando as equações (4.97) e (4.98) vem que,

$$v_{O_{24}} = v_{O_{23}} \frac{O_{12} O_{24}}{O_{12} O_{23}} \quad (4.99)$$

O centro O_{14} está situado no infinito e sobre uma recta perpendicular à direcção descrita pela trajectória da corrediça. Por outro lado, como a velocidade do centro O_{34} é a mesma que a do centro O_{24} , uma vez ambos os centros rodam em torno de um eixo situado no infinito (centro O_{14}), significa que os vectores velocidade dos centros O_{24} e O_{34} têm a mesma amplitude, a mesma direcção e o mesmo sentido. Na figura 4.21 pode observar-se a construção gráfica relativa à determinação da velocidade da corrediça utilizando os centros instantâneos de rotação.

Ainda utilizando o conceito de centro instantâneo de rotação, há um procedimento alternativo que permite obter a velocidade da corrediça. Assim, a velocidade do centro O_{23} é dada por,

$$v_{O_{23}} = \omega_2 O_{12} O_{23} = \omega_3 O_{13} O_{23} \quad (4.100)$$

Por outro lado, a velocidade do centro O_{34} é calculada como,

$$v_{O_{34}} = \omega_3 O_{13} O_{34} \quad (4.101)$$

Da equação (4.100) obtém-se o valor velocidade angular ω_3 , o qual substituído na equação (4.101) permite calcular a velocidade linear da corrediça. Refira-se que a distância $O_{13} O_{34}$ pode obter-se da análise geométrica do mecanismo biela-manivela.

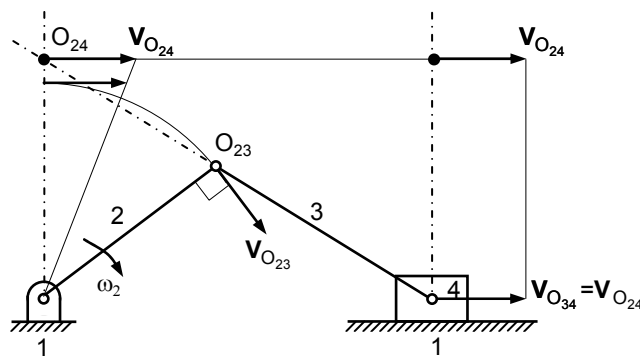


Figura 4.21 – Determinação gráfica da velocidade da corrediça utilizando os centros instantâneos de rotação.

4.6.4. Método da Diferenciação Gráfica

O método diferenciação gráfica é particularmente útil quando o gráfico de deslocamentos é obtido por meios analógicos (e.g., obtidos através de registadores $x-t$, osciloscópios, etc.) ou quando a expressão algébrica do deslocamento é algo

complexa e, por conseguinte, de derivação laboriosa e difícil. Este método apresenta, no entanto, como principal limitação o facto de ser apenas sensível à mudança de magnitude da grandeza em análise, seja de deslocamento linear ou angular, seja de velocidade ou aceleração. Nesta secção é apresentado o procedimento que permite determinar a velocidade da corredeira do mecanismo biela-manivela para várias fases do seu funcionamento, recorrendo ao método da diferenciação gráfica.

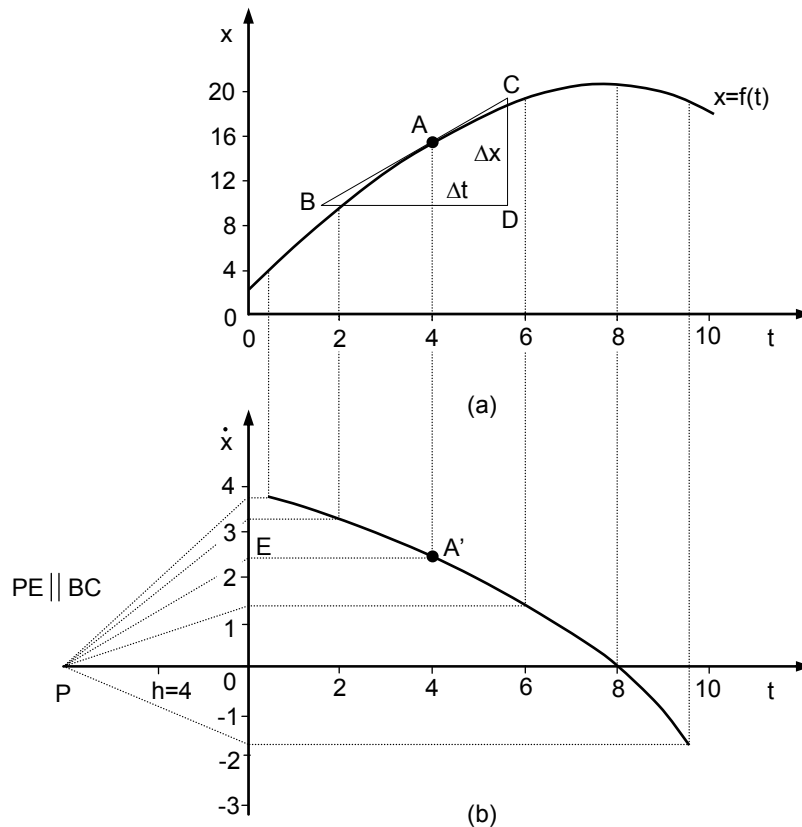


Figura 4.22 – Diferenciação gráfica de uma função: (a) Função; (b) Derivada.

De seguida, é apresentado o processo de diferenciação gráfica de uma função que pode ser escrita como,

$$x = f(t) \quad (4.102)$$

Assim, escolha-se, arbitrariamente, um ponto situado sobre a curva, por exemplo o ponto A , e trace-se a tangente BC . Por definição de derivada sabe-se que,

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (4.103)$$

e, aproximadamente, a derivada no ponto A é igual a,

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \approx \frac{CD}{BD} \quad (4.104)$$

O processo de diferenciação gráfica passa, pois, pela traçagem de segmentos de recta tangentes à curva em vários dos seus pontos, para o efeito devem ser construídos triângulos, preferencialmente de abcissas, BD , iguais. Seguidamente torna-se possível construir um diagrama de derivadas, utilizando o mesmo eixo das

abscissas, t , e para cada ponto considerado, registrando em ordenadas a altura CD do respectivo triângulo, como se ilustra na figura 4.22. A distância PO é chamada distância polar e é representada por h com unidades em segundos, para o gráfico de velocidades. O ponto A' , medido a partir do eixo das abscissas, representa, portanto, a velocidade do ponto A . É conveniente que a escala de tempo nos dois gráficos seja a mesma. A escala da derivada é determinada por,

$$\dot{x} = \frac{x}{h} \quad (4.105)$$

em que h é o dobro do intervalo de tempo utilizado e igual a BD .

A precisão obtida quando se utiliza o método da diferenciação gráfica será tanto maior, quanto menor for o intervalo Δt seleccionado. Por outro lado, a qualidade e o rigor do traçado das tangentes pode também ter alguma influência nos resultados obtidos.

Aplicando o método da diferenciação gráfica ao mecanismo biela-manivela do qual se conhece a curva do deslocamento da corredeira, obtém-se o gráfico de velocidades ilustrado na figura 4.23.

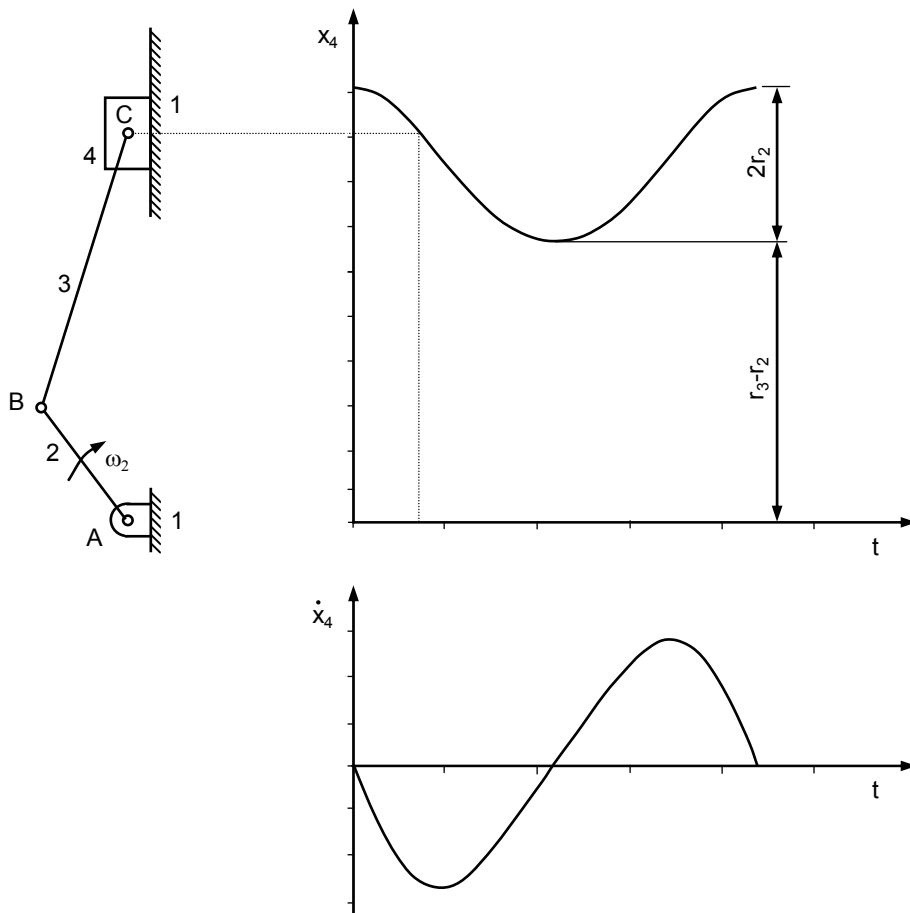


Figura 4.23 – Aplicação do método da diferenciação gráfica à curva de deslocamento da corredeira do mecanismo biela-manivela.

4.7. ANÁLISE DE VELOCIDADES DE MECANISMOS ELEMENTARES

4.7.1. Mecanismo de Quatro Barras

Na figura 4.24 está representado um mecanismo de quatro barras em relação ao qual se pretende efectuar a análise de velocidades de alguns dos seus elementos. Ainda na mesma figura estão representados os vectores posição que formam a cadeia cinemática fechada equivalente. No presente exemplo considera-se que a manivela é o órgão motor, sendo, por isso, conhecido o valor de ω_2 .

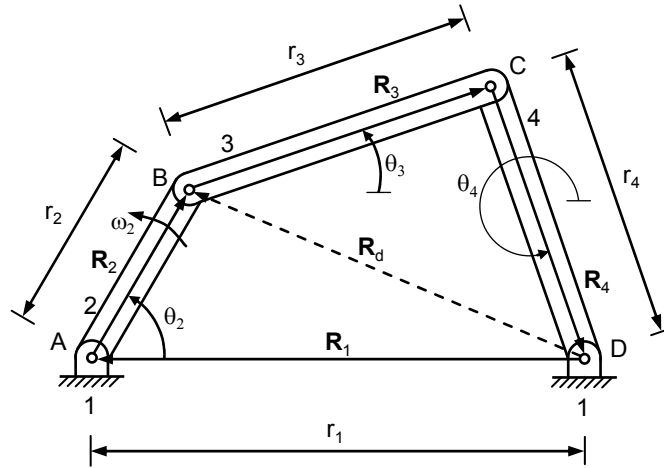


Figura 4.24 – Mecanismo de quatro barras.

Utilizando a notação complexa, a equação que representa a cadeia cinemática formada pelos vectores \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_3 e \mathbf{R}_4 é dada por,

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} + r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (4.106)$$

Atendendo a que r_1 , r_2 , r_3 , r_4 e θ_1 não variam com o tempo, derivando a equação (4.106) em ordem ao tempo tem-se que,

$$r_2 i \frac{d\theta_2}{dt} e^{i\theta_2} + r_3 i \frac{d\theta_3}{dt} e^{i\theta_3} + r_4 i \frac{d\theta_4}{dt} e^{i\theta_4} = 0 \quad (4.107)$$

Por outro, sabe-se que,

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 \quad (4.108)$$

$$\frac{d\theta_3}{dt} = \omega_3 \quad (4.109)$$

$$\frac{d\theta_4}{dt} = \omega_4 \quad (4.110)$$

Assim, utilizando as equações (4.108) a (4.110) conjuntamente com a fórmula de Euler, a equação (4.107) pode ser reescrita como,

$$r_2 i \omega_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) + r_3 i \omega_3 (\cos \theta_3 + i \operatorname{sen} \theta_3) + r_4 i \omega_4 (\cos \theta_4 + i \operatorname{sen} \theta_4) = 0 \quad (4.111)$$

Separando, agora, as partes real e imaginária, vem que,

$$-r_2\omega_2\text{sen}\theta_2 - r_3\omega_3\text{sen}\theta_3 - r_4\omega_4\text{sen}\theta_4 = 0 \quad (4.112)$$

$$r_2\omega_2\text{cos}\theta_2 + r_3\omega_3\text{cos}\theta_3 + r_4\omega_4\text{cos}\theta_4 = 0 \quad (4.113)$$

As equações (4.112) e (4.113) formam um sistema de duas equações a duas incógnitas, ω_3 e ω_4 , do qual resulta que,

$$\omega_3 = \frac{r_2\omega_2}{r_3} \frac{\text{sen}(\theta_2 - \theta_4)}{\text{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \quad (4.114)$$

$$\omega_4 = \frac{r_2\omega_2}{r_4} \frac{\text{sen}(\theta_2 - \theta_3)}{\text{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \quad (4.115)$$

Deve referir-se que os valores dos ângulos θ_3 e θ_4 podem ser obtidos da análise de posição do mecanismo de quatro barras, donde resulta que,

$$\theta_3 = \theta_d \mp \arccos \frac{r_d^2 + r_3^2 - r_4^2}{2r_d r_3} \quad (4.116)$$

$$\theta_4 = \theta_d \pm \arccos \frac{r_d^2 + r_4^2 - r_3^2}{2r_d r_4} \quad (4.117)$$

em que θ_d e r_d são dados por,

$$\theta_d = \arcsen \left(\frac{r_2}{r_d} \text{sen}\theta_2 \right) \quad (4.118)$$

$$r_d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \text{cos}\theta_2 \quad (4.119)$$

Utilizando os centros instantâneos de rotação é também possível e fácil efectuar o cálculo de velocidades. A figura 4.25 mostra a aplicação deste método ao mecanismo de quatro barras em que a manivela 2 é o órgão motor, sendo, por isso, conhecido o valor de ω_2 . As dimensões das barras 1, 2, 3 e 4 são também conhecidas à partida. Assim, para a posição ilustrada na figura 4.25 pretende-se calcular, graficamente, as velocidades de vários pontos de mecanismo.

Após determinar a localização dos centros instantâneos de rotação, conhecendo o valor de ω_2 e r_2 , pode calcular-se a velocidade linear do centro O_{23} , como se ilustra na figura 4.25a e 4.25b. Esta velocidade é expressa por,

$$v_{O_{23}} = \omega_2 r_2 \quad (4.120)$$

Assim, uma vez conhecido o vector $\mathbf{V}_{O_{23}}$, e uma vez que O_{24} pertence também à barra 2, rodando este vector em torno do centro O_{12} , até que O_{23} se situe na linha de centros formada por O_{24} , O_{12} e O_{14} , obtém-se a nova posição para o vector velocidade, $\mathbf{V}'_{O_{23}}$. Por semelhança de triângulos pode facilmente determinar-se o vector $\mathbf{V}_{O_{24}}$, como se ilustra na figura 4.25b.

Por outro lado, como a velocidade do centro O_{24} é a velocidade de um ponto que pertence à barra 2 e ao mesmo tempo à barra 4, então o vector velocidade $\mathbf{V}_{O_{24}}$ pode

ser utilizado para determinar a velocidade de outros pontos que pertençam à barra 4, como por exemplo o ponto P e o centro O_{34} . Neste caso, os triângulos semelhantes têm o centro O_{14} como vértice comum, sendo $V'_{O_{34}}$ e V'_P os respectivos vectores que devem ser rodados até se obterem $V_{O_{34}}$ e V_P , como se ilustra na figura 4.25c.

Finalmente, para se determinar a velocidade V_Q , uma vez que o ponto Q pertence simultaneamente à barra 3 e à barra 2, e que a barra 1 é a referência fixa, então o vector $V_{O_{23}}$ deve ser rodado em torno de O_{13} sobre a linha dos centros O_{13} , O_{12} , e O_{23} , determinando-se, assim, o vector V'_Q , o qual rodado dá origem ao vector V_Q . Adicionalmente, pode ser confirmada a velocidade do centro O_{34} , já que este pertence simultaneamente às barras 3 e 4, como se mostra na figura 4.25d.

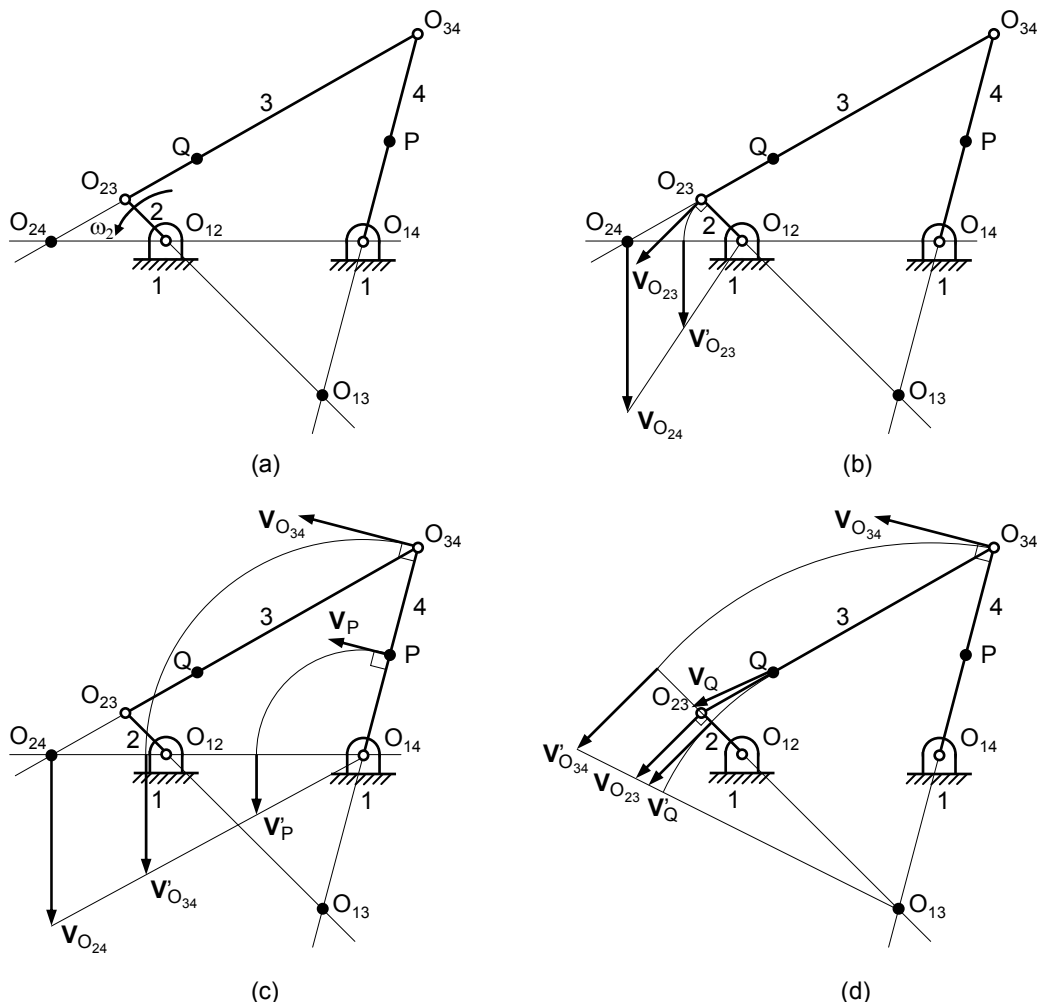


Figura 4.25 – Determinação gráfica de velocidades utilizando o conceito de centro instantâneo de rotação.

Deve ainda referir-se que uma relação válida para qualquer mecanismo de quatro barras, conhecida como teorema da razão de velocidades angulares, postula que, “a razão de velocidades angulares entre dois elementos, relativamente a um terceiro, é inversamente proporcional ao comprimento dos segmentos formados na linha de centros pela intersecção do centro instantâneo de rotação”, e que para o mecanismo da figura 4.25 se pode escrever como,

$$\frac{\omega_4}{\omega_2} = \frac{O_{12}O_{24}}{O_{14}O_{24}} \quad (4.121)$$

Pode também provar-se que esta razão é positiva quando o centro instantâneo comum se encontra para lá dos dois centros fixos, como no presente exemplo, e é negativa quando o centro instantâneo de rotação comum se encontra entre os dois centros fixos.

4.7.2. Mecanismo de Corrediça

A figura 4.26 ilustra o mecanismo de corrediça e os respectivos vectores posição equivalentes. Sabendo que a barra 2 é o órgão motor, *i.e.*, o valor de ω_2 é conhecido, pretende-se determinar, utilizando o método da notação complexa, as componentes de translação e de rotação da velocidade da corrediça.

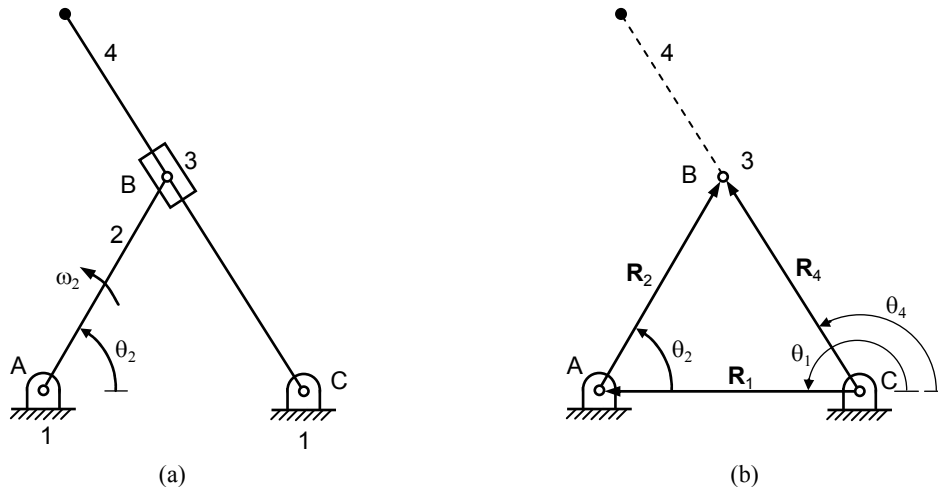


Figura 4.26 – (a) Mecanismo de corrediça; (b) Representação vectorial equivalente.

Assim, com base na notação complexa, a cadeia cinemática fechada constituída pelos vectores \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_4 pode ser escrita como,

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} - r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (4.122)$$

Atendendo a que os parâmetros r_1 , r_2 e θ_1 não variam com o tempo, da derivação da equação (4.122) em ordem ao tempo resulta que,

$$r_2 i \frac{d\theta_2}{dt} e^{i\theta_2} - \frac{dr_4}{dt} e^{i\theta_4} - r_4 i \frac{d\theta_4}{dt} e^{i\theta_4} = 0 \quad (4.123)$$

Por outro lado, como,

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 \quad (4.124)$$

$$\frac{dr_4}{dt} = \dot{r}_4 \quad (4.125)$$

$$\frac{d\theta_4}{dt} = \omega_4 \quad (4.126)$$

então, a equação (4.123) pode ser reescrita como,

$$r_2 i \omega_2 e^{i\theta_2} - \dot{r}_4 e^{i\theta_4} - r_4 i \omega_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (4.127)$$

Aplicando a fórmula de Euler à equação (4.127) e separando as partes real e imaginária, vem que,

$$-r_2 \omega_2 \text{sen} \theta_2 - \dot{r}_4 \text{cos} \theta_4 + r_4 \omega_4 \text{sen} \theta_4 = 0 \quad (4.128)$$

$$r_2 \omega_2 \text{cos} \theta_2 - \dot{r}_4 \text{sen} \theta_4 - r_4 \omega_4 \text{cos} \theta_4 = 0 \quad (4.129)$$

As equações (4.128) e (4.129) formam um sistema de duas equações a duas incógnitas, \dot{r}_4 e ω_4 , cujas soluções são dadas por,

$$\dot{r}_4 = r_2 \omega_2 \text{sen}(\theta_4 - \theta_2) \quad (4.130)$$

$$\omega_4 = \frac{r_2 \omega_2}{r_4} \text{cos}(\theta_4 - \theta_2) \quad (4.131)$$

em que θ_2 é conhecido à partida, uma vez que a barra 2 é o órgão motor, e θ_4 é dado pela seguinte equação obtida na análise de posição,

$$\theta_4 = \text{arctg} \frac{r_2 \text{sen} \theta_2}{r_2 \text{cos} \theta_2 - r_1} \quad (4.132)$$

4.7.3. Mecanismo Biela-Manivela com Excentricidade

Na figura 4.27 está representado o mecanismo biela-manivela com excentricidade entre o eixo de rotação da manivela e o eixo que define a direcção de translação da corredeira. A manivela é o órgão motor, a qual roda com velocidade angular constante igual a ω_2 , e pretende-se conhecer o valor da velocidade linear da corredeira.

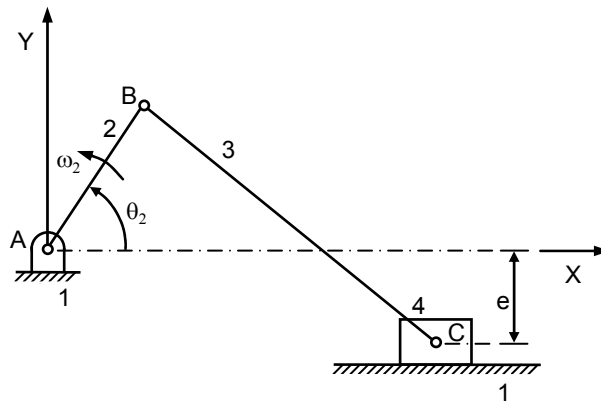


Figura 4.27 – Mecanismo biela-manivela com excentricidade.

Aplicando o método algébrico ao mecanismo ilustrado na figura 4.27, obtém-se a seguinte expressão para a posição da corredeira,

$$x_4 = r_2 \text{cos} \omega_2 t + \sqrt{r_3^2 - (r_2 \text{sen} \omega_2 t + e)^2} \quad (4.133)$$

em que r_2 , r_3 e e são características geométricas do mecanismo, ω_2 é a velocidade angular da manivela e t é a variável tempo.

Assim, derivando a equação (4.133) em ordem ao tempo, e após tratamento matemático, obtém-se uma expressão que permite calcular a velocidade linear da corrediça em cada instante, a qual é expressa como,

$$v_4 = -\omega_2 r_2 \text{sen} \omega_2 t - \frac{\omega_2 r_2^2 \cos \omega_2 t \text{sen} \omega_2 t}{\sqrt{r_3^2 - (r_2 \text{sen} \omega_2 t + e)^2}} \quad (4.134)$$

4.7.4. Mecanismo Biela-Manivela Invertido

A figura 4.28 ilustra um mecanismo biela-manivela invertido, em que as barras foram substituídas por vectores posição equivalentes, os quais constituem uma cadeia cinemática fechada. Admite-se que, na presente situação a manivela é o órgão motor e roda com uma velocidade angular constante igual a ω_2 .

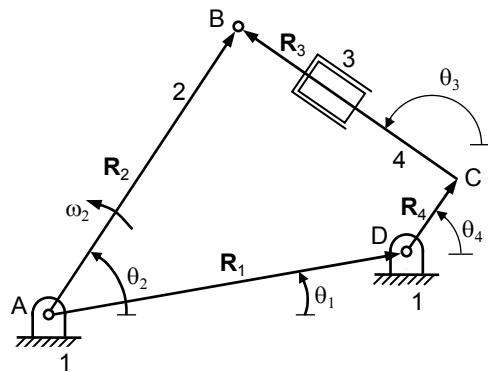


Figura 4.28 – Mecanismo biela-manivela invertido.

Da análise geométrica do mecanismo ilustrado na figura 4.28, e utilizando a notação complexa, pode escrever-se que,

$$r_2 e^{i\theta_2} - r_1 e^{i\theta_1} - r_3 e^{i\theta_3} - r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (4.135)$$

Por outro lado, da análise de posição são válidas as seguintes relações,

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - r_4^2 - 2r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2)} \quad (4.136)$$

$$a = r_2 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1 \quad (4.137)$$

$$\theta_4 = \theta_3 - 90 \quad (4.138)$$

$$\theta_3 = \text{arctg} \left(\frac{r_4 + \beta \sqrt{r_4^2 - a^2 + r_3^2}}{a + r_3} \right) \quad (4.139)$$

onde $\beta = \pm 1$.

Atendendo a que r_1 , r_4 e θ_1 são constantes, derivando em ordem ao tempo a equação (4.135) vem que,

$$r_2 i \omega_2 e^{i\theta_2} - \dot{r}_3 e^{i\theta_3} - r_3 i \omega_3 e^{i\theta_3} - r_4 i \omega_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (4.140)$$

Aplicando a fórmula de Euler, separando as partes real e imaginária e resolvendo as equações daí resultantes obtém-se o seguinte sistema de equações,

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -r_3\sin\theta_3 - r_4\sin\theta_4 \\ \sin\theta_3 & r_3\cos\theta_3 + r_4\cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_2\omega_2\sin\theta_2 \\ r_2\omega_2\cos\theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.141)$$

Este sistema pode ser resolvido, utilizando, por exemplo, a regra de Cramer anteriormente apresentada, em ordem às velocidades \dot{r}_3 e ω_3 . Os restantes parâmetros da equação (4.141) são previamente conhecidos ou calculados usando as equações (4.136)-(4.139).

Inventing is mixing brains and materials. The more brains you use, the less materials you need.

Charles Kettering

5. ACELERAÇÃO

5.1. DEFINIÇÃO

A aceleração mede a rapidez com que um corpo varia a sua velocidade. Como a própria velocidade é uma rapidez, poder-se-á entender a aceleração como sendo a velocidade da velocidade. Acelerar ou desacelerar⁴³ um corpo é, pois, variar a sua velocidade num intervalo de tempo. A aceleração é uma grandeza vectorial que tem a mesma direcção do vector velocidade. No caso em que o é movimento acelerado, os vectores aceleração e velocidade têm o mesmo sentido. Ao passo que, no movimento desacelerado ou retardado, os sentidos destes vectores são contrários.

A aceleração média pode ser definida como sendo a razão entre a diferença de velocidade e o intervalo de tempo necessário para que essa diferença de velocidade aconteça. Quando este intervalo de tempo tende para zero, a aceleração denomina-se aceleração instantânea.

Um valor de uso corrente para a aceleração é o da aceleração da gravidade, o qual para o nível do mar e 45° de latitude é, aproximadamente, igual a 9,81 m/s².

Na mecânica clássica ou newtoniana, a aceleração está relacionada com a força e a massa pela segunda lei de Newton, ou seja,

$$F = ma \quad (5.1)$$

em que F representa a força, m é a massa e a representa a aceleração.

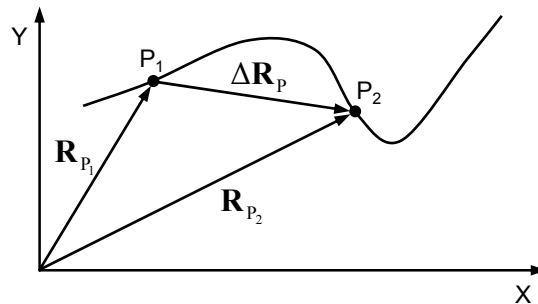


Figura 5.1 – Trajectória de um ponto.

A figura 5.1 ilustra a trajetória de um ponto P , em que P_1 e P_2 representam duas posições do mesmo. Atendendo a que a velocidade média do ponto P é dada por,

$$\mathbf{V}_{\text{média}} = \frac{\Delta \mathbf{R}_P}{\Delta t} \quad (5.2)$$

então, a correspondente aceleração linear média pode ser escrita como,

$$\mathbf{A}_{\text{média}} = \frac{\mathbf{V}_{\text{média}}}{\Delta t} \quad (5.3)$$

⁴³ Desaceleração é a aceleração que provoca a diminuição do valor absoluto da velocidade.

Do mesmo modo, como a velocidade instantânea é dada pelo limite ou derivada da seguinte razão,

$$\mathbf{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_P}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{R}_P}{dt} = \dot{\mathbf{R}}_P \quad (5.4)$$

então, a aceleração linear instantânea, ou simplesmente aceleração linear, é dada por,

$$\mathbf{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \dot{\mathbf{V}} = \ddot{\mathbf{R}}_P \quad (5.5)$$

De forma análoga ao movimento linear, para o movimento angular ou de rotação existe a aceleração angular, α , a qual é definida como,

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \quad (5.6)$$

em que ω é a velocidade angular associada ao movimento de rotação e θ é a posição angular.

5.2. MOVIMENTO CURVILÍNEO

A figura 5.2 mostra um ponto que descreve uma trajectória curvilínea. Na mesma figura estão representados os vectores unitários associados aos eixos coordenados X e Y , bem como os vectores unitários relativos às direcções radial e tangencial da trajectória efectuada pelo ponto P .

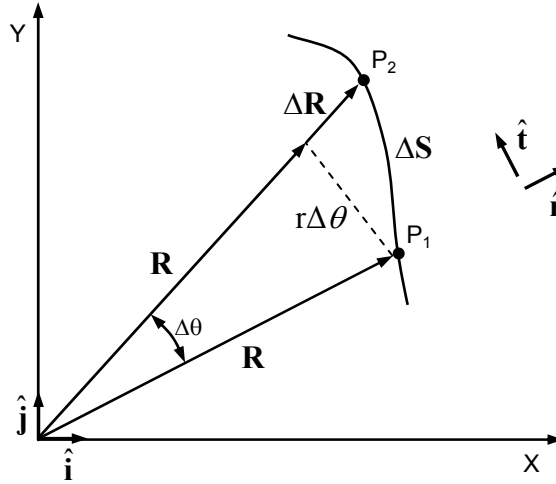


Figura 5.2 – Movimento curvilíneo.

O vector associado ao deslocamento descrito pelo ponto P ao longo da trajectória $P_1 \rightarrow P_2$ é representada por ΔS e pode ser escrita como,

$$\Delta S = r\hat{r} + r\Delta\theta\hat{t} \quad (5.7)$$

sendo r o módulo de \mathbf{R} e \hat{r} e \hat{t} são os versores das direcções radial e tangencial.

A velocidade do ponto P é dada pela variação instantânea da posição em relação ao tempo, isto é,

$$\mathbf{V} = \dot{r}\hat{r} + r\omega\hat{t} \quad (5.8)$$

onde,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} \quad (5.9)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (5.10)$$

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta \quad (5.11)$$

$$\hat{t} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta \quad (5.12)$$

Por definição, a aceleração do ponto P é dada pela derivada da velocidade em ordem ao tempo, ou seja,

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{V}} \quad (5.13)$$

Assim, substituindo as equações (5.8)-(5.12) na equação (5.13), após tratamento matemático, resulta que,

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{V}} = (\ddot{r} - r\omega^2)\hat{\mathbf{r}} + (2\dot{r}\omega + r\dot{\omega})\hat{\mathbf{t}} \quad (5.14)$$

em que,

$$\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} \quad (5.15)$$

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (5.16)$$

sendo os demais parâmetros já definidos anteriormente.

Da análise da equação (5.14) facilmente se observa que a aceleração de um ponto que descreve uma trajectória curvilínea é constituída por duas componentes, uma de magnitude $(\ddot{r} - r\omega^2)$ na direcção $\hat{\mathbf{r}}$ e outra de magnitude $(2\dot{r}\omega + r\dot{\omega})$ na direcção $\hat{\mathbf{t}}$.

Utilizando o produto vectorial, a equação (5.14) pode ser reescrita como,

$$\mathbf{A} = \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + 2\dot{r}\boldsymbol{\omega}\hat{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} \quad (5.17)$$

em que $\boldsymbol{\alpha}$ representa a aceleração angular do ponto P .

Quando a origem do sistema de coordenadas coincide com o centro de curvatura, então os vectores \dot{r} e \ddot{r} são nulos. Com esta premissa, a equação da velocidade do ponto P é simplificada como,

$$\mathbf{V} = r\boldsymbol{\omega}\hat{\mathbf{t}} \quad (5.18)$$

em que o módulo desta velocidade é dado por,

$$v = \omega r \quad (5.19)$$

Do mesmo modo, a equação da aceleração (5.14) é simplificada e escrita como,

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} \quad (5.20)$$

O termo $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$ designa-se aceleração centrípeta e representa a componente da aceleração na direcção radial ou normal, e cuja sentido aponta para o centro da curvatura. O termo $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R}$ é denominado aceleração tangencial e, tal como o nome sugere, representa a componente da aceleração que é tangencial à trajectória no ponto P . Com efeito, a equação (5.20) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^n + \mathbf{A}^t \quad (5.21)$$

em que,

$$\mathbf{A}^n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \quad (5.22)$$

$$\mathbf{A}^t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} \quad (5.23)$$

Os módulos das componentes normal e tangencial da aceleração são dados por,

$$a^n = \omega^2 r = \omega v = \frac{v^2}{r} \quad (5.24)$$

$$a^t = \alpha r \quad (5.25)$$

A figura 5.3 mostra as componentes instantâneas de aceleração do ponto P , bem como a sua velocidade, quando o centro de rotação coincide com a origem do

sistema de coordenadas. Deve referir-se que a componente normal da aceleração, \mathbf{A}^n , está dirigida para o centro da curvatura, sendo responsável pela manutenção da trajectória. Ao passo que a componente tangencial, \mathbf{A}^t , é tangente à trajectória e é responsável pela variação da velocidade. O vector \mathbf{A} representa a aceleração total do ponto P no instante considerado e é igual à soma vectorial das componentes normal e tangencial.

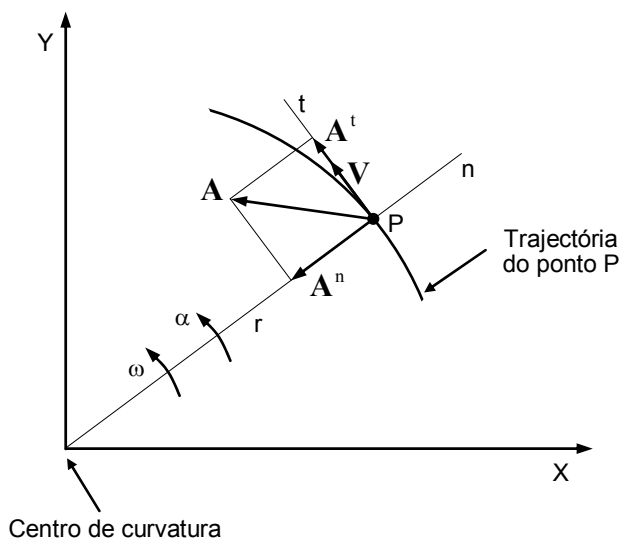


Figura 5.3 – Componentes normal e tangencial da aceleração.

As equações (5.18)-(5.25) são particularmente úteis no cálculo das magnitudes dos vectores velocidade e aceleração de pontos que descrevam trajectórias circulares. Esta situação ocorre com frequência no estudo de mecanismos em que o centro de curvatura é coincidente com a origem do sistema de coordenadas.

5.3. ACELERAÇÃO DE UM PONTO NUM SISTEMA MÓVEL

A figura 5.4 ilustra o movimento de um ponto relativamente a um sistema de coordenadas móvel. O sistema de coordenadas XYZ é fixo, ao passo que o sistema de coordenadas xyz é móvel.

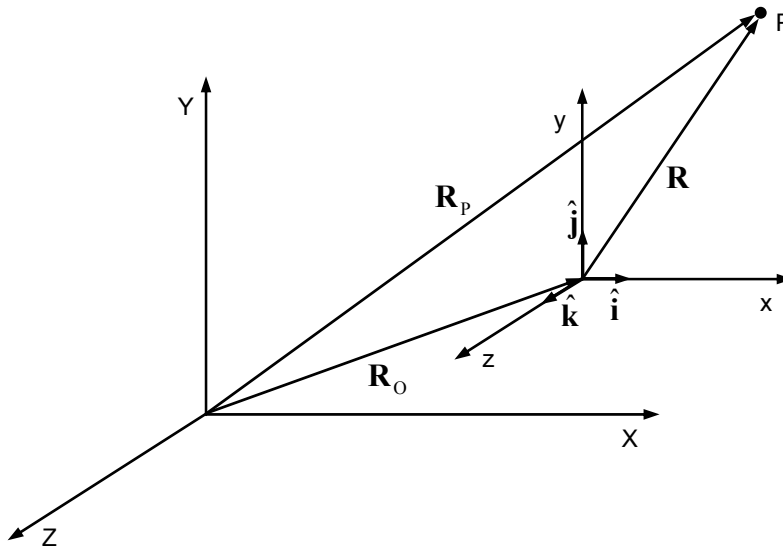


Figura 5.4 – Movimento de um ponto num sistema referencial móvel.

Da análise da figura 5.4, observa-se que a posição do ponto P em relação ao sistema de coordenadas XYZ pode ser escrito como,

$$\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_O + \mathbf{R} \quad (5.26)$$

em que \mathbf{R}_O representa o vector posição da origem do sistema de coordenadas móvel e \mathbf{R} é o vector posição do ponto P em relação a este sistema de coordenadas.

Em coordenadas cartesianas o vector \mathbf{R} é escrito como,

$$\mathbf{R} = r^x \hat{\mathbf{i}} + r^y \hat{\mathbf{j}} + r^z \hat{\mathbf{k}} \quad (5.27)$$

em que r^x , r^y e r^z são os módulos das componentes do vector \mathbf{R} nas direcções x , y e z , respectivamente, e $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ são os vectores unitários correspondentes às mesmas direcções. Deve referir-se que estes vectores variam durante o movimento associado ao sistema de referência móvel.

A velocidade absoluta do ponto P , isto é, a velocidade expressa em relação ao sistema de coordenadas fixo XYZ , pode obter-se derivando em ordem ao tempo a equação (5.26), resultando em,

$$\mathbf{V}_P = \dot{\mathbf{R}}_P = \dot{\mathbf{R}}_O + \dot{\mathbf{R}} \quad (5.28)$$

Por outro lado, derivando a equação (5.27) em ordem ao tempo vem que,

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{r}^x \hat{\mathbf{i}} + \dot{r}^y \hat{\mathbf{j}} + \dot{r}^z \hat{\mathbf{k}} + r^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + r^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + r^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} \quad (5.29)$$

em que os três primeiros termos do segundo membro representam a velocidade do ponto P em relação ao sistema de coordenadas móvel xyz , a qual, por conveniência, pode ser escrita como,

$$\mathbf{V} = \dot{r}^x \hat{\mathbf{i}} + \dot{r}^y \hat{\mathbf{j}} + \dot{r}^z \hat{\mathbf{k}} \quad (5.30)$$

Considerem-se, agora, os três últimos termos do lado direito da equação (5.29). Assim, a velocidade do ponto que representa o *terminus* de um vector \mathbf{R} , que passa por um ponto fixo e roda em torno deste ponto com uma velocidade ω , é dada por,

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (5.31)$$

Por outro lado, as derivadas dos vectores unitários podem ser expressas por,

$$\dot{\hat{\mathbf{i}}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{i}} \quad (5.32)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{j}}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{j}} \quad (5.33)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{k}}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{k}} \quad (5.34)$$

em que ω representa a velocidade angular do sistema de coordenadas móvel xyz em relação ao sistema de coordenadas fixo XYZ .

Utilizando as equações (5.32), (5.33) e (5.34), pode escrever-se que,

$$r^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + r^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + r^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} = r^x (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{i}}) + r^y (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{j}}) + r^z (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{k}}) \quad (5.35)$$

ou seja,

$$r^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + r^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + r^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} = \boldsymbol{\omega} \times (r^x \hat{\mathbf{i}} + r^y \hat{\mathbf{j}} + r^z \hat{\mathbf{k}}) \quad (5.36)$$

ou ainda, usando a relação dada pela equação (5.27),

$$r^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + r^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + r^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (5.37)$$

Deve notar-se que a equação (5.37) representa a velocidade linear de um ponto que roda em torno de eixo fixo. Com efeito, pelo que acaba de ser exposto, a equação (5.29) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (5.38)$$

assim, a velocidade do ponto P dada pela equação (5.28) é escrita como,

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_O + \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (5.39)$$

em que,

$$\mathbf{V}_O = \dot{\mathbf{R}}_O \quad (5.40)$$

Na equação (5.39) \mathbf{V}_P representa a velocidade do ponto P expressa no sistema de coordenadas fixo XYZ , \mathbf{V}_O é a velocidade linear da origem do sistema de coordenadas móvel xyz em relação ao sistema de coordenadas fixo XYZ , \mathbf{V} é a velocidade do ponto P em relação ao sistema de coordenadas móvel xyz , ω representa a velocidade angular do sistema móvel relativamente ao sistema fixo e \mathbf{R} representa a distância da origem do sistema de coordenadas xyz ao ponto P .

A aceleração do ponto P pode ser obtida por derivação da equação (5.39) em ordem ao tempo, resultando em,

$$\mathbf{A}_P = \dot{\mathbf{V}}_P = \dot{\mathbf{V}}_O + \dot{\mathbf{V}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}} \quad (5.41)$$

O termo $\dot{\mathbf{V}}$ pode obter-se por derivação da equação (5.30), ou seja,

$$\dot{\mathbf{V}} = \ddot{r}^x \hat{\mathbf{i}} + \ddot{r}^y \hat{\mathbf{j}} + \ddot{r}^z \hat{\mathbf{k}} + \dot{r}^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + \dot{r}^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + \dot{r}^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} \quad (5.42)$$

em que os três primeiros termos do segundo membro representam a aceleração do ponto P em relação ao sistema de coordenadas móvel xyz , a qual, por conveniência, pode ser escrita da seguinte forma,

$$\mathbf{A} = \ddot{r}^x \hat{\mathbf{i}} + \ddot{r}^y \hat{\mathbf{j}} + \ddot{r}^z \hat{\mathbf{k}} \quad (5.43)$$

Considerando, agora, os três últimos termos do lado direito da equação (5.42), atendendo às relações dadas pelas equações (5.32)-(5.34), pode escrever-se que,

$$\dot{r}^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + \dot{r}^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + \dot{r}^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} = \dot{r}^x (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{i}}) + \dot{r}^y (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{j}}) + \dot{r}^z (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{k}}) \quad (5.44)$$

ou seja,

$$\dot{r}^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + \dot{r}^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + \dot{r}^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} = \boldsymbol{\omega} \times (\dot{r}^x \hat{\mathbf{i}} + \dot{r}^y \hat{\mathbf{j}} + \dot{r}^z \hat{\mathbf{k}}) \quad (5.45)$$

ou ainda,

$$\dot{r}^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + \dot{r}^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + \dot{r}^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \quad (5.46)$$

Utilizando as equações (5.43) e (5.46), a equação (5.42) pode ser reescrita como,

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{A} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \quad (5.47)$$

O último termo da equação (5.47) obtém-se recorrendo à equação (5.38), ou seja,

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \quad (5.48)$$

Assim, substituindo as equações (5.47) e (5.48) na equação (5.41) resulta que,

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{A}_O + \mathbf{A} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \quad (5.49)$$

em que,

$$\mathbf{A}_O = \dot{\mathbf{V}}_O \quad (5.50)$$

O significado físico dos termos que surgem na equação (5.49) é o seguinte,

\mathbf{A}_P - Aceleração do ponto P em relação ao sistema de coordenadas XYZ ;

\mathbf{A}_O - Aceleração da origem do sistema de coordenadas móvel xyz em relação ao sistema de coordenadas fixo XYZ ;

\mathbf{A} - Aceleração do ponto P relativamente ao sistema de coordenadas móvel xyz ;

$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$ - Aceleração de Coriolis que mede o efeito combinado de P em relação ao sistema de coordenadas móvel e da rotação deste mesmo sistema;

$\boldsymbol{\omega}$ - Velocidade angular do sistema de coordenadas xyz em relação ao sistema de coordenadas fixo XYZ ;

\mathbf{V} - Velocidade do ponto P no sistema de coordenadas móvel xyz ;

\mathbf{R} - Vector posição do ponto P no sistema de coordenadas móvel xyz ;

$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$ - Efeito da velocidade angular devida à rotação do sistema móvel xyz ;

$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$ - Efeito da aceleração angular devida à rotação do sistema de coordenadas xyz . Esta aceleração denomina-se centrípeta.

Os dois últimos termos representam a aceleração de transporte do sistema móvel.

Uma aplicação do que acaba de ser exposto pode ser vista ao estudar o movimento do mecanismo ilustrado na figura 5.5, em que a barra 2 roda com uma velocidade angular constante ω_2 . A velocidade do ponto B é, por isso, conhecida, a questão que se coloca é a de saber qual a velocidade do ponto C . O sistema de coordenadas fixo XY tem a origem em A , ao passo que o sistema de coordenadas móvel xy tem origem em B . Assim, a equação da velocidade do ponto C pode ser escrita como,

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_B + \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (5.51)$$

em que \mathbf{V}_C é perpendicular a CD e cujo módulo é desconhecido, \mathbf{V}_B é perpendicular a AB e tem módulo igual a $\omega_2 AB$, \mathbf{V} é um vector nulo porque o ponto C é fixo em relação ao sistema de coordenadas móvel e $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$ é perpendicular a BC e em que $\omega = \omega_2$ e o módulo de \mathbf{R} é igual a BC . A direcção do vector $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$ pode obter-se pela aplicação da regra da mão direita.

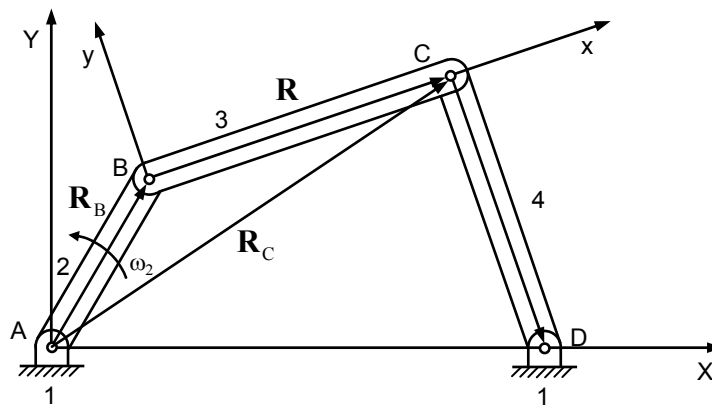


Figura 5.5 – Aplicação do movimento de um ponto num sistema referencial móvel.

Efectuando, agora, o cálculo das acelerações tem-se que,

$$\mathbf{A}_C = \mathbf{A}_B + \mathbf{A} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \quad (5.52)$$

em que, a componente normal da aceleração de C , \mathbf{A}_C^n , tem módulo igual a $\omega_4^2 CD$, sendo a sua direcção a mesma que a da barra 4 e o sentido de C para D , a componente tangencial da aceleração de C , \mathbf{A}_C^t , é perpendicular à barra CD sendo desconhecido o seu módulo. A aceleração do ponto B tem apenas componente normal, uma vez que a manivela 2 roda com velocidade angular constante, sendo o módulo igual a $\omega_2^2 AB$, a direcção é a mesma que a da manivela e o sentido é o de B para A . O vector \mathbf{A} é um vector nulo porque o ponto C é fixo no sistema de coordenadas móvel xy . Pela mesma razão é nula a parcela $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$. O vector $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R}$ actua perpendicularmente à barra 3, sendo desconhecido o seu módulo. Por seu lado, o vector $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$ tem módulo igual a $\omega_2^3 BC$, em que a direcção é a mesma da barra 3 e o sentido é o de C para B .

Deve notar-se que a direcção do vector $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R}$ pode ser determinado sabendo que a direcção do vector $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ é perpendicular ao plano xy . Assim, ao efectuar o produto vectorial de $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ por \mathbf{R} , resulta um vector que pertence ao plano xy e é perpendicular ao vector \mathbf{R} .

5.4. ACELERAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO

A figura 5.6 mostra um corpo rígido animado de um movimento geral, em que a aceleração do ponto B é conhecida. Assim, a aceleração do ponto A do mesmo corpo rígido é dada pela seguinte relação matemática,

$$\mathbf{A}_A = \mathbf{A}_B + \mathbf{A}_{A/B} \quad (5.53)$$

em que $\mathbf{A}_{A/B}$ representa a aceleração do ponto A em relação ao ponto B .

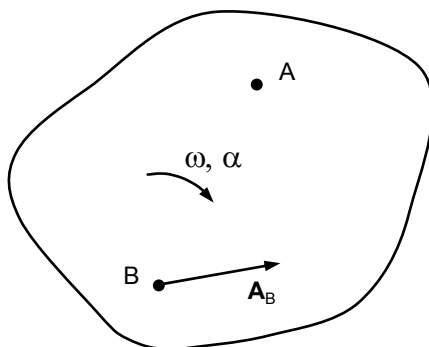


Figura 5.6 – Corpo rígido animado de um movimento geral.

Na figura 5.7a está representado um corpo rígido em que se consideram dois dos seus pontos, A e B . Assim, quando o corpo é sujeito a um determinado movimento, a distância AB mantém-se constante, o que faz com que o movimento do ponto A seja de rotação em torno de B , independentemente do tipo de movimento do ponto B . Por outro lado, como a trajectória do ponto A relativamente ao ponto B é circular, então o vector aceleração \mathbf{A}_A pode ser representado pelas componentes normal e tangencial, $\mathbf{A}_{A/B}^n$ e $\mathbf{A}_{A/B}^t$, as quais são perpendiculares entre si, como se ilustra na figura 5.7a.

Independentemente do movimento do ponto B , o movimento angular do corpo em relação ao ponto B é o mesmo que o do corpo relativamente a um corpo fixo, porque o ponto B não descreve movimento de rotação. Assim, para a trajectória circular de A relativamente a B , a velocidade angular associada à curvatura de raio AB é a mesma que a velocidade angular do corpo. O mesmo sucede com a aceleração angular.

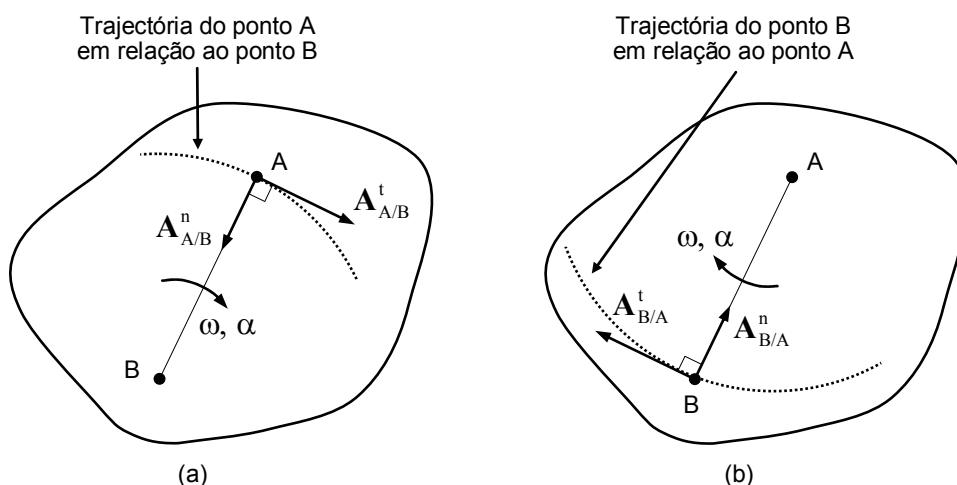


Figura 5.7 – Movimento relativo de dois pontos de um corpo rígido.

Os módulos das acelerações relativas normal e tangencial do ponto A em relação ao ponto B podem ser calculadas como,

$$a_{A/B}^n = \omega^2 AB \quad (5.54)$$

$$a_{A/B}^t = \alpha AB \quad (5.55)$$

A figura 5.7b representa as componentes da aceleração do ponto B em relação ao ponto A , em que as magnitudes e sentidos de ω e α são os mesmos da figura 5.7a. Ainda na figura 5.7b está ilustrada a trajetória do ponto B relativamente ao ponto A . Nestas circunstâncias, deve notar-se que,

$$\mathbf{A}_{B/A}^n = -\mathbf{A}_{A/B}^n \quad (5.56)$$

$$\mathbf{A}_{B/A}^t = -\mathbf{A}_{A/B}^t \quad (5.57)$$

em que o sinal menos significa que os vectores têm sentidos opostos.

No caso em que, por exemplo, o ponto A tem uma dada aceleração, tal como ilustrado na figura 5.8, considerando o ponto A como sendo o centro da curvatura do movimento do ponto B , então,

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{A}_A + \mathbf{A}_{B/A} = \mathbf{A}_A + \mathbf{A}_{B/A}^n + \mathbf{A}_{B/A}^t \quad (5.58)$$

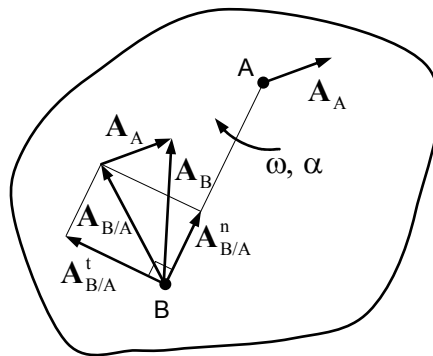


Figura 5.8 – Polígono de acelerações de dois pontos de um mesmo corpo.

Pelo que acaba de ser exposto, dois conceitos importantes devem estar presentes. Em primeiro lugar, verifica-se que a componente normal da aceleração de um ponto, relativamente a outro ponto pertencente ao mesmo corpo rígido, é função da velocidade angular do corpo e da distância entre os dois pontos considerados, sendo a direcção a da linha de união dos dois pontos e o sentido apontando para o ponto de referência. Em segundo lugar, observa-se que a componente tangencial da aceleração de um ponto, em relação a outro ponto pertencente ao mesmo corpo rígido, é função da aceleração angular do corpo e da distância entre os dois pontos, tendo direcção perpendicular à linha de união dos pontos e o mesmo sentido da aceleração angular.

5.5. MÉTODOS ANALÍTICOS

5.5.1. Método Algébrico

A figura 5.9 mostra o mecanismo biela-manivela, em relação ao qual se pretende deduzir uma equação matemática que permita calcular em cada instante a aceleração da corrediça, isto é, a aceleração do ponto C. Na presente situação, considera-se que o mecanismo é accionado pela manivela, a qual roda com uma velocidade angular constante igual a ω_2 . Admite-se, ainda, que os comprimentos da manivela e da biela são conhecidos à partida, sendo representados por r_2 e r_3 , respectivamente.

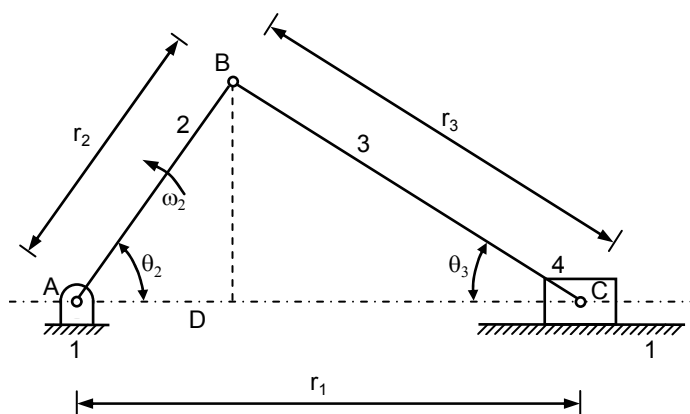


Figura 5.9 – Representação esquemática do mecanismo biela-manivela.

Assim, da análise de posição do mecanismo biela-manivela da figura 5.9 sabe-se a expressão que traduz, em cada instante, a posição da corrediça é dada por,

$$r_1 = r_2 \cos \omega_2 t + \sqrt{r_3^2 - r_2^2 \sin^2 \omega_2 t} \quad (5.59)$$

ou, de forma simplificada, isto é, quando $r_2/r_3 < 1/4$,

$$r_1 = r_2 \cos \omega_2 t + r_3 - \frac{r_2^2 \sin^2 \omega_2 t}{2r_3} \quad (5.60)$$

Analisando as equações (5.59) e (5.60), observa-se que a posição da corrediça depende directamente da variável tempo, bem como das propriedades geométricas do mecanismo. Por isso, derivando uma e outra vez, em ordem ao tempo, estas duas equações obtêm-se as expressões que permitem calcular a aceleração da corrediça, isto é,

$$a_1 = -\omega_2^2 r_2 \cos \omega_2 t - \frac{\omega_2^2 r_2^2 (\cos^2 \omega_2 t - \sin^2 \omega_2 t)}{\sqrt{r_3^2 - r_2^2 \sin^2 \omega_2 t}} - \frac{\omega_2^2 r_2^4 \sin^2 \omega_2 t \cos^2 \omega_2 t}{(r_3^2 - r_2^2 \sin^2 \omega_2 t)^{3/2}} \quad (5.61)$$

$$a_1 = -\omega_2^2 r_2 \left(\cos \omega_2 t + \frac{r_2}{r_3} \cos 2\omega_2 t \right) \quad (5.62)$$

A título de curiosidade deve referir-se que o termo $\omega_2^2 r_2$ representa a aceleração centrípeta.

5.5.2. Método da Notação Complexa

Na figura 5.10 está representado esquematicamente o mecanismo biela-manivela, em que as barras foram substituídas por vectores posição equivalentes. Estes vectores constituem uma cadeia cinemática fechada. Assim, utilizando a notação complexa em coordenadas polares, a equação que traduz a cadeia cinemática constituída pelos vectores \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_3 pode ser escrita como,

$$r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} - r_1 e^{i\theta_1} = 0 \quad (5.63)$$

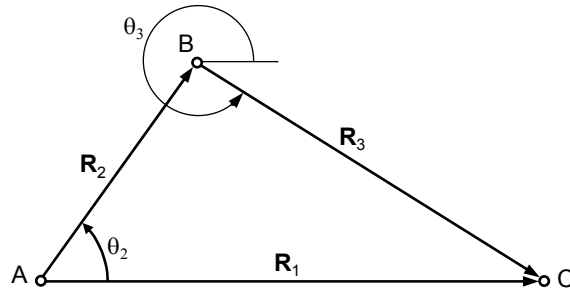


Figura 5.10 – Representação vectorial do mecanismo biela-manivela.

Tal como anteriormente, neste mecanismo o órgão motor é a manivela que roda com velocidade angular constante, ou seja, $\theta_2 = \omega_2 t$. Com efeito, pretende-se também calcular a aceleração da corrediça pelo que a equação (5.63) deve ser derivada duas vezes. Atendendo a que r_2 , r_3 e θ_1 são constantes, as respectivas derivadas são nulas, pelo que derivando a equação (5.63) em ordem ao tempo resulta que,

$$i r_2 \omega_2 e^{i\theta_2} + i r_3 \omega_3 e^{i\theta_3} - v_1 e^{i\theta_1} = 0 \quad (5.64)$$

Derivando agora a equação (5.64) obtém-se,

$$i r_2 \left(\frac{d\omega_2}{dt} e^{i\theta_2} + \omega_2 i \frac{d\theta_2}{dt} e^{i\theta_2} \right) + i r_3 \left(\frac{d\omega_3}{dt} e^{i\theta_3} + \omega_3 i \frac{d\theta_3}{dt} e^{i\theta_3} \right) - \frac{dv_1}{dt} e^{i\theta_1} = 0 \quad (5.65)$$

em que,

$$\frac{d\omega_2}{dt} = 0 \quad (5.66)$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \alpha_3 \quad (5.67)$$

$$\frac{dv_1}{dt} = a_1 \quad (5.68)$$

Então, a equação (5.65) pode ser simplificada e reescrita como,

$$i^2 r_2 \omega_2^2 e^{i\theta_2} + i r_3 \alpha_3 e^{i\theta_3} + i^2 r_3 \omega_3^2 e^{i\theta_3} - a_1 e^{i\theta_1} = 0 \quad (5.69)$$

As incógnitas de equação (5.69) são α_3 e a_1 , pelo que, utilizando a fórmula de Euler, separando as partes real e imaginária e resolvendo o sistema daí resultante vem que,

$$\alpha_3 = \frac{r_2 \omega_2^2 \text{sen} \theta_2 + r_3 \omega_3^2 \text{sen} \theta_3}{r_3 \cos \theta_3} \quad (5.70)$$

$$a_1 = -\omega_2^2 r_2 (\cos \theta_2 + \text{sen} \theta_2 \text{tg} \theta_3) - \omega_3^2 r_3 (\cos \theta_3 + \text{sen} \theta_3 \text{tg} \theta_3) \quad (5.71)$$

onde α_3 e a_1 são, respectivamente, a aceleração angular da biela e a aceleração linear da corrediça. Os valores de θ_3 e de ω_3 necessários para o cálculo destas acelerações obtêm-se da análise de posição e velocidade, respectivamente, ou seja,

$$\theta_3 = \arcsen\left(-\frac{r_2 \text{sen} \theta_2}{r_3}\right) \quad (5.72)$$

$$\omega_3 = -\frac{r_2 \omega_2 \cos \theta_2}{r_3 \cos \theta_3} \quad (5.73)$$

5.5.3. Método da Notação Matricial

O mecanismo biela-manivela representado na figura 5.11 é utilizado para demonstrar a aplicação do método da notação matricial no cálculo da aceleração. Na figura 5.11, tal como anteriormente, as barras que constituem o mecanismo foram substituídas por vectores posição, os quais formam uma cadeia cinemática fechada.

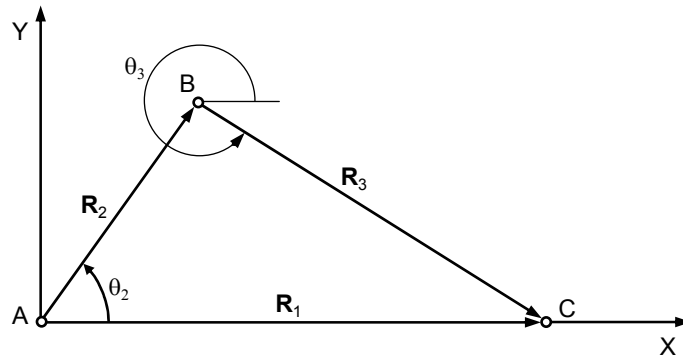


Figura 5.11 – Representação vectorial do mecanismo biela-manivela.

Da análise da configuração geométrica da figura 5.11, projectando os vectores \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_3 nas direcções X e Y vem, respectivamente, que,

$$r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 - r_1 = 0 \quad (5.74)$$

$$r_2 \text{sen} \theta_2 - r_3 \text{sen} \theta_3 = 0 \quad (5.75)$$

Derivando estas duas expressões em ordem ao tempo obtêm-se,

$$-r_2 \omega_2 \text{sen} \theta_2 - r_3 \omega_3 \text{sen} \theta_3 - v_1 = 0 \quad (5.76)$$

$$r_2 \omega_2 \cos \theta_2 - r_3 \omega_3 \cos \theta_3 = 0 \quad (5.77)$$

As equações (5.76) e (5.77) pode ser reescritas na forma matricial como,

$$\begin{bmatrix} -r_3 \text{sen} \theta_3 & -1 \\ r_3 \cos \theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_3 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2 \omega_2 \text{sen} \theta_2 \\ r_2 \omega_2 \cos \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.78)$$

Derivando, agora, as equações (5.76) e (5.77) obtém-se, respectivamente,

$$-r_2\omega_2^2\cos\theta_2 - r_3\alpha_3\sin\theta_3 - r_3\omega_3^2\cos\theta_3 - v_1 = 0 \quad (5.79)$$

$$-r_2\omega_2^2\sin\theta_2 - r_3\alpha_3\cos\theta_3 - r_3\omega_3^2\sin\theta_3 = 0 \quad (5.80)$$

Estas duas equações formam um sistema de duas equações a duas incógnitas, α_3 e a_1 , o qual em notação matricial pode ser escrita como,

$$\begin{bmatrix} -r_3\sin\theta_3 & -1 \\ r_3\cos\theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2\omega_2^2\cos\theta_2 + r_3\omega_3^2\cos\theta_3 \\ r_2\omega_2^2\sin\theta_2 + r_3\omega_3^2\sin\theta_3 \end{Bmatrix} \quad (5.81)$$

Aplicando, por exemplo, a regra de Cramer a este sistema resulta que,

$$\alpha_3 = \frac{r_2\omega_2^2\sin\theta_2 + r_3\omega_3^2\sin\theta_3}{r_3\cos\theta_3} \quad (5.82)$$

$$a_1 = -\frac{r_3\sin\theta_3(r_2\omega_2^2\sin\theta_2 + r_3\omega_3^2\sin\theta_3) + r_3\cos\theta_3(r_2\omega_2^2\cos\theta_2 + r_3\omega_3^2\cos\theta_3)}{r_3\cos\theta_3} \quad (5.83)$$

em que α_3 e a_1 são, respectivamente, a aceleração angular da biela e a aceleração linear da corrediça. Os valores de θ_3 e ω_3 necessários para o cálculo destas duas acelerações obtêm-se, respectivamente, da análise de posição e de velocidade,

$$\theta_3 = \arcsen\left(-\frac{r_2\sin\theta_2}{r_3}\right) \quad (5.84)$$

$$\omega_3 = -\frac{r_2\omega_2\cos\theta_2}{r_3\cos\theta_3} \quad (5.85)$$

Deve notar-se que, quando se utiliza o método da notação matricial no cálculo das velocidades e das acelerações, a matriz dos coeficientes é igual em ambos os casos. Esta particularidade é bastante útil e interessante quando se pretende escrever um programa computacional para o efeito, uma vez que se pode aumentar a eficiência computacional na medida em que, para cada instante, é necessário apenas calcular uma única vez a matriz dos coeficientes.

5.5.4. Método da Decomposição do Movimento

O método da decomposição do movimento, tal como o nome sugere, baseia-se na propriedade que qualquer movimento geral pode ser considerado como a soma de um movimento de translação e um movimento de rotação. Esta propriedade é conhecida como lei de Chasles. Este método de análise do movimento é particularmente útil e interessante no estudo dos movimentos dos mecanismos de uso corrente. O método da decomposição do movimento é aplicado ao mecanismo biela-manivela como exemplo de demonstração no cálculo de acelerações.

A figura 5.12 representa um mecanismo biela-manivela em relação ao qual se pretende determinar a aceleração da corrediça. Neste mecanismo, a manivela, sendo o órgão motor, roda com um velocidade angular constante igual a ω_2 , a corrediça realiza um movimento de translação rectilínea e a biela descreve um movimento geral ou misto.

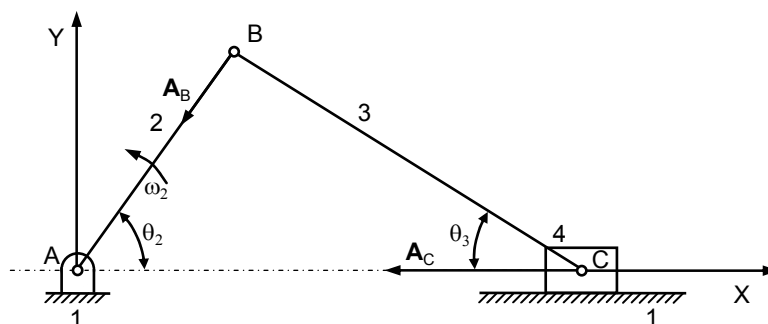


Figura 5.12 – Mecanismo biela-manivela em que estão representadas as acelerações dos pontos B e C.

Assim, para o mecanismo representado na figura 5.12 sabe-se que é nula a componente tangencial da aceleração do ponto B, em virtude de se ter considerado que a manivela roda com velocidade angular constante. A componente normal da aceleração do ponto B está representada na figura 5.13 e pode ser calculada como,

$$a_B^n = \omega_2^2 r_2 \quad (5.86)$$

em que ω_2 e r_2 representam a velocidade angular e o comprimento da manivela.

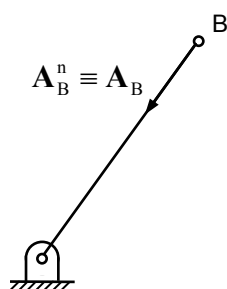


Figura 5.13 – Componente normal da aceleração do ponto B que pertence à manivela.

Dado que a biela descreve um movimento geral, este pode ser decomposto numa translação com o ponto B e numa rotação em torno do eixo que passa no mesmo ponto B, como se ilustra na figura 5.14. Atendendo a que o ponto B é um ponto comum à manivela e à biela, a sua aceleração é a mesma quando se considera como pertencente a um ou outro corpo. O mesmo sucede com o ponto C, mas agora em relação à biela e à corredeira.

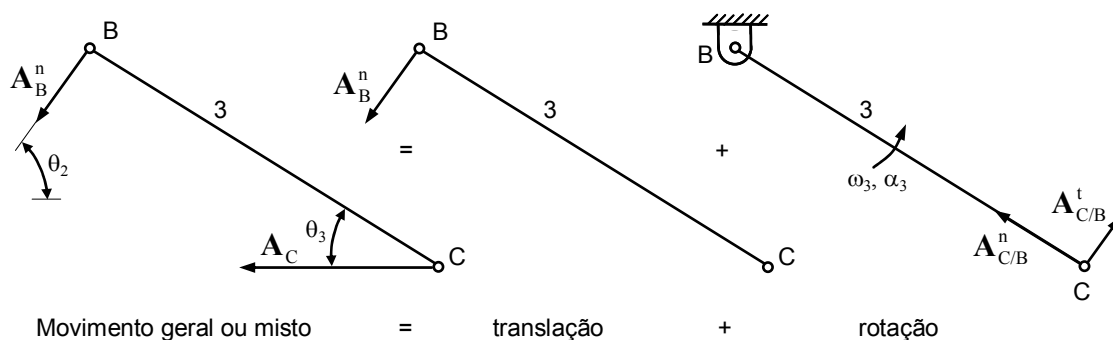


Figura 5.14 – Decomposição do movimento da biela como sendo a soma de uma translação e de uma rotação.

Assim, a equação gráfica da figura 5.14 pode, vectorialmente, ser escrita como,

$$\mathbf{A}_C = \mathbf{A}_B + \mathbf{A}_{C/B} \quad (5.87)$$

Projectando esta equação segundo as direcções X e Y obtém-se o seguinte sistema de equações,

$$-a_C = -a_B^n \cos \theta_2 - a_{C/B}^n \cos \theta_3 + a_{C/B}^t \sin \theta_3 \quad (5.88)$$

$$0 = -a_B^n \sin \theta_2 + a_{C/B}^n \sin \theta_3 + a_{C/B}^t \cos \theta_3 \quad (5.89)$$

em que,

$$a_B^n = \omega_2^2 r_2 \quad (5.90)$$

$$a_{C/B}^n = \omega_3^2 r_3 \quad (5.91)$$

$$a_{C/B}^t = \alpha_3 r_3 \quad (5.92)$$

O valor do ângulo θ_2 é conhecido à partida, uma vez que $\theta_2 = \omega_2 t$, sendo o ângulo θ_3 calculado pela análise geométrica do mecanismo, pelo que aplicando a lei dos senos ao triângulo ABC obtém-se a seguinte relação,

$$\theta_3 = \arcsen\left(\frac{AB \sin \theta_2}{BC}\right) \quad (5.93)$$

Com efeito, observa-se que as equações (5.88) e (5.89) constituem um sistema de duas equações a duas incógnitas, α_3 e a_C , pelo que da sua resolução vem que,

$$\alpha_3 = \frac{\omega_2^2 r_2 \sin \theta_2 - \omega_3^2 r_3 \sin \theta_3}{r_3 \cos \theta_3} \quad (5.94)$$

$$a_C = \omega_2^2 r_2 \left(\cos \theta_2 - \frac{\sin \theta_2}{r_3 \cos \theta_3} \right) + \omega_3^2 r_2 (\cos \theta_3 + \sin \theta_3 \operatorname{tg} \theta_3) \quad (5.95)$$

5.6. MÉTODOS GRÁFICOS

5.6.1. Método do Polígono de Acelerações

O método do polígono de acelerações, tal como o método do polígono de velocidades, baseia-se na construção e resolução gráfica de equações vectoriais. Este método é aplicado ao mecanismo biela-manivela a título de demonstração. Assim, considere-se o mecanismo biela-manivela ilustrado na figura 5.15, em que o órgão motor é a manivela, a qual roda com velocidade angular constante ω_2 . À semelhança dos casos anteriores, pretende-se determinar a aceleração linear da corredeira, ou seja a aceleração linear do ponto C .

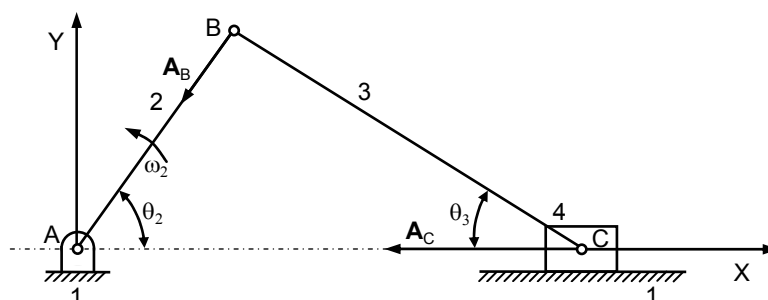


Figura 5.15 – Mecanismo biela-manivela em que estão representadas as acelerações dos pontos B e C .

Por definição de aceleração relativa entre dois pontos que pertencem a um mesmo corpo rígido, sabe-se que para os pontos B e C é válida a seguinte relação,

$$\mathbf{A}_C = \mathbf{A}_B + \mathbf{A}_{C/B} \quad (5.96)$$

Substituindo nesta equação as componentes normais e tangenciais vem que,

$$\mathbf{A}_C^n + \mathbf{A}_C^t = \mathbf{A}_B^n + \mathbf{A}_B^t + \mathbf{A}_{C/B}^n + \mathbf{A}_{C/B}^t \quad (5.97)$$

onde $a_C^n = 0$ porque a trajetória da corredeira é de translação rectilínea e $a_B^t = 0$ uma vez que a manivela roda com velocidade angular constante. Sabe-se ainda que,

$$a_B^n = \omega_2^2 r_2 \quad (5.98)$$

$$a_{C/B}^n = \omega_3^2 r_3 \quad (5.99)$$

$$a_{C/B}^t = \alpha_3 r_3 \quad (5.100)$$

Assim, é possível traçar, a uma escala conveniente, o polígono de acelerações dado pela equação (5.97). Tomando, então, uma escala adequada, e a partir da definição do ponto O_A como sendo a origem das acelerações, representa-se o vector \mathbf{A}_B^n , cuja direcção é a mesma da manivela e o sentido é o da apontar de B para A . Respeitando, na sua colocação em relação a \mathbf{A}_B^n , as regras da adição e subtracção de vectores, e seguindo a equação (5.97), é possível construir o polígono de acelerações ilustrado na figura 5.16. Medindo directamente sobre o polígono de acelerações, afectando a medida pelo factor de escala, é possível determinar a aceleração linear da corredeira, bem como as componentes da aceleração do ponto C em relação a B .

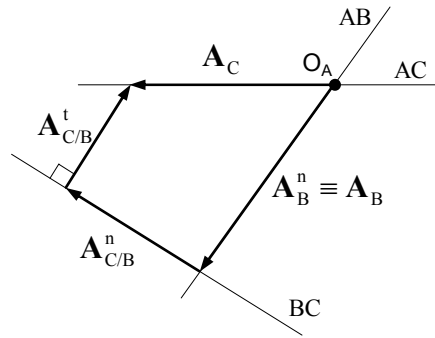


Figura 5.16 – Construção gráfica do polígono de acelerações.

5.6.2. Método da Imagem de Acelerações

O método da imagem de acelerações utiliza os mesmos princípios que o método da imagem de velocidades, isto é, é possível obter uma imagem da aceleração de um corpo quando este tem uma configuração geométrica complexa, como por exemplo, forma triangular.

Antes de aplicar o método da imagem de acelerações convém lembrar que, do módulo da adição de vectores tem-se que,

$$a_{B/A} = \sqrt{(a_{B/A}^n)^2 + (a_{B/A}^t)^2} \quad (5.101)$$

e como,

$$a_{B/A}^n = \omega_{AB}^2 AB \quad (5.102)$$

$$a_{B/A}^t = \alpha_{AB} AB \quad (5.103)$$

então, da equação (5.101) vem que,

$$a_{B/A} = AB \sqrt{\omega_{AB}^4 + \alpha_{AB}^2} \quad (5.104)$$

Da análise da equação (5.104) pode concluir-se que, como ω_{AB} e α_{AB} são constantes, então a aceleração de cada ponto relativamente a outro, num corpo rígido, é proporcional à distância entre eles. É também possível demonstrar que a orientação da imagem de acelerações, de cada corpo, depende da aceleração angular desse mesmo corpo.

Deve notar-se que se a aceleração angular for nula, a imagem de acelerações encontrar-se-á rodada de 180° em relação à posição do respectivo corpo, no sentido da velocidade de rotação. Por outro lado, existindo uma componente de aceleração angular, a imagem encontrar-se-á rodada de um valor de $[180 - \text{tg}(\alpha/\omega^2)]$ em relação à posição desse corpo, no sentido da aceleração angular.

A título de demonstração, o método da imagem de acelerações é aplicado ao mecanismo biela-manivela ilustrado na figura 5.17a, em que os corpos 2 e 3 têm formas triangulares. Considerando a inexistência de aceleração angular do corpo 2 ($\alpha_2=0$), a correspondente imagem de acelerações encontra-se representada na figura 5.17b. Deve notar-se que a imagem de acelerações do corpo 2, que não tem aceleração angular, apresenta uma rotação de 180° . Por seu turno, o corpo 3, animado de uma aceleração angular no sentido directo, a sua imagem aparece com uma rotação menor que 180° .

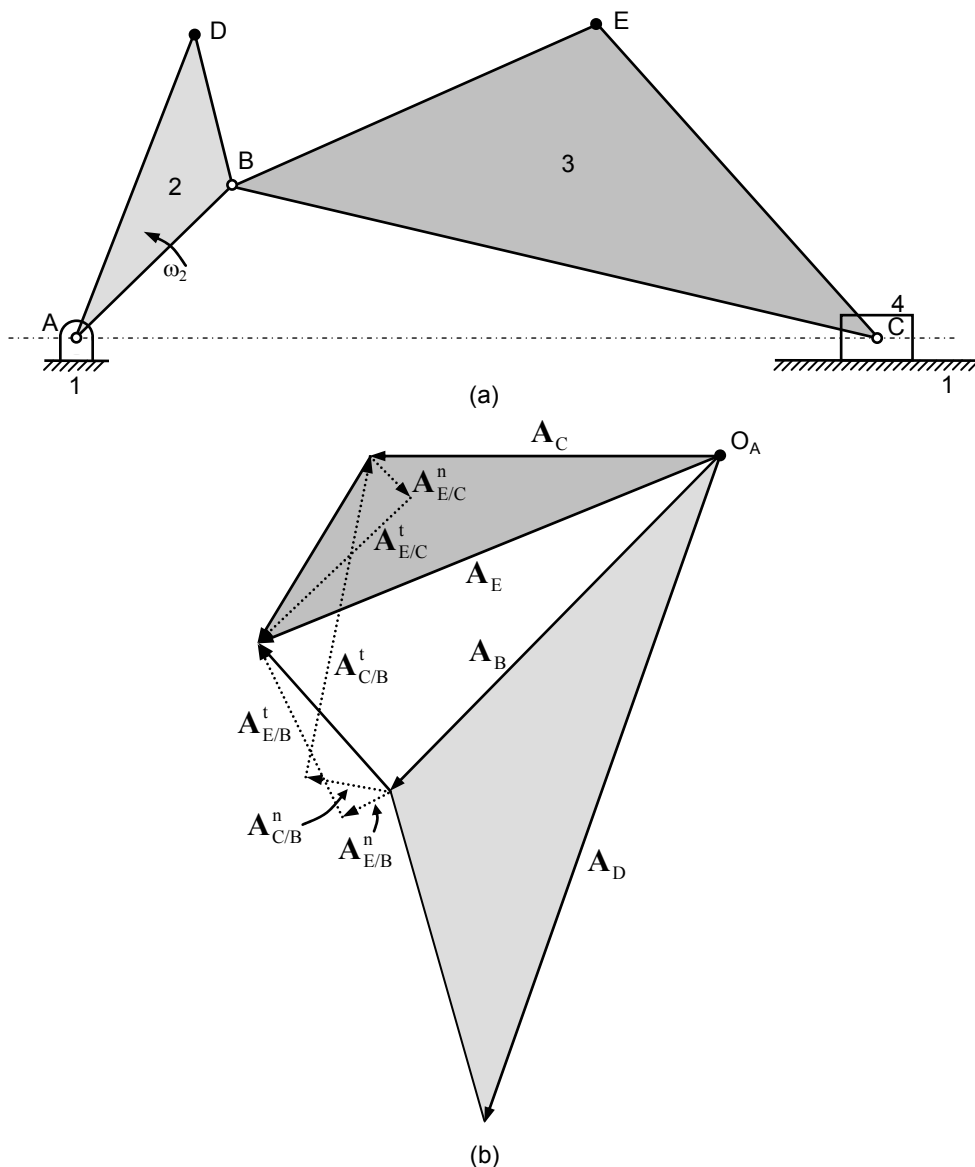


Figura 5.17 – (a) Mecanismo biela-manivela; (b) Imagem de acelerações.

5.6.3. Método dos Centros Instantâneos de Aceleração

Da mesma forma que num mecanismo podem ser localizados centros instantâneos de rotação ou de velocidade, isto é, os pontos para os quais a velocidade relativa é nula, é também possível localizar os centros instantâneos de aceleração (CIA) ou centros de aceleração. Embora a sua utilização prática na análise de mecanismos seja bastante reduzida, é importante abordar, ainda que de forma simples, este conceito.

Com efeito, centro instantâneo de aceleração pode definir-se como sendo *o local instantâneo de dois pontos coincidentes e pertencentes a corpos rígidos diferentes, para os quais a aceleração absoluta é igual*. Quando um dos corpos está fixo e outro descreve um movimento plano, o centro instantâneo de rotação é o ponto do corpo que se move, para o qual a aceleração absoluta, para o instante considerado, é nula.

Na figura 5.18 está representado um corpo rígido, em que o ponto B é o centro instantâneo de aceleração, para o qual a aceleração absoluta é nula e cuja localização é desconhecida. Considerando que o ponto A tem aceleração absoluta A_A e que ω e α

representam, respectivamente, a velocidade e a aceleração angulares do corpo, então, a diferença de acelerações entre os pontos A e B é dada por,

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{A}_A - \omega^2 \mathbf{R}_{BA} + \alpha \times \mathbf{R}_{BA} = \mathbf{0} \quad (5.105)$$

Resolvendo a equação (5.105) em ordem a \mathbf{A}_A , vem que,

$$\mathbf{A}_A = \omega^2 r_{BA} \hat{\mathbf{r}}_{BA} - \alpha r_{BA} (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_{BA}) \quad (5.106)$$

Atendendo a que os vectores $\hat{\mathbf{r}}_{BA}$ e $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_{BA}$ são perpendiculares, os dois termos do segundo membro da equação (5.106) representam as componentes rectangulares do vector \mathbf{A}_A , como se ilustra na figura 5.18.

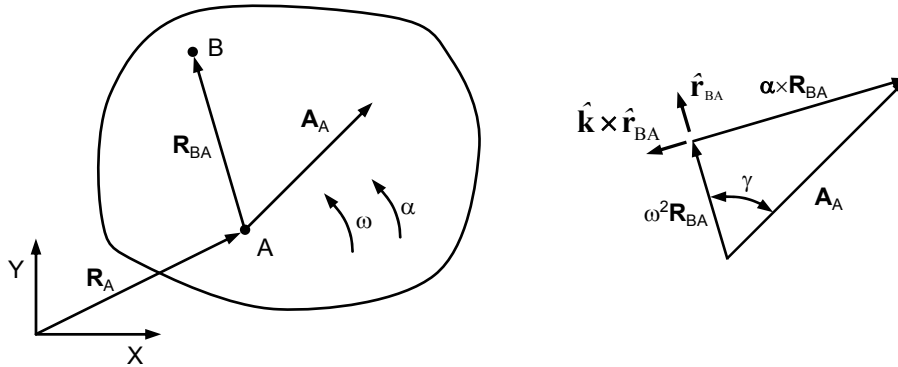


Figura 5.18 – Centro instantâneo de aceleração.

Da observação da figura 5.18, a direcção e a magnitude do vector \mathbf{R}_{BA} podem ser calculadas de acordo com as seguintes expressões,

$$\gamma = \arctg \frac{\alpha}{\omega^2} \quad (5.107)$$

$$r_{BA} = \frac{a_A}{\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}} = \frac{a_A \cos \gamma}{\omega^2} \quad (5.108)$$

em que a_A é o módulo da aceleração \mathbf{A}_A .

Da análise da equação (5.108) pode concluir-se que a distância de um qualquer ponto de um corpo rígido ao centro instantâneo de aceleração pode ser calculada se a magnitude da aceleração desse ponto for conhecida.

A localização dos centros instantâneos de aceleração é uma tarefa bastante trabalhosa, especialmente em mecanismos que apresentem topologias complexas. Há, no entanto, métodos gráficos que permitem, de forma simples e expedita, determinar a localização dos centros instantâneos de aceleração, entre os quais se destaca o método das quatro⁴⁴ circunferências. Este método, é particularmente útil quando se conhecem duas acelerações absolutas de dois pontos do mesmo corpo, como é caso dos pontos A e B da figura 5.19 que pertencem à mesma barra. Assim, o procedimento gráfico conducente à localização do centro instantâneo de aceleração pode ser resumido nos seguintes passos,

⁴⁴ Refira-se, a título de curiosidade que, apesar do nome adoptado, neste método apenas são usadas duas circunferências.

- Prolongar os vectores das acelerações \mathbf{A}_A e \mathbf{A}_B , até que estes se intersectem no ponto I ;
- Desenhar a circunferência que passa pelos pontos A , B e I ;
- Desenhar a circunferência que passa pelos pontos definidos pelos *terminus* dos vectores \mathbf{A}_A e \mathbf{A}_B e pelo ponto I ;
- Intersectar as duas circunferências anteriormente desenhadas, resultando daí o centro instantâneo de aceleração (CIA).

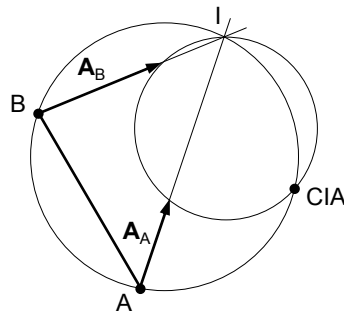


Figura 5.19 – Localização do centro instantâneo de aceleração utilizando o método das quatro circunferências.

5.6.4. Método da Diferenciação Gráfica

Os princípios aplicados no método da diferenciação gráfica com o propósito de efectuar o cálculo de acelerações são os mesmos já enunciados aquando da análise de velocidades, pelo que nesta secção apenas se apresentam os resultados gráficos das acelerações da corrediça do mecanismo biela-manivela, em que o diagrama de deslocamento da corrediça é conhecido. Assim, por sucessivas diferenciações gráficas obtêm-se as curvas de velocidade e de aceleração, como ilustra a figura 5.20.

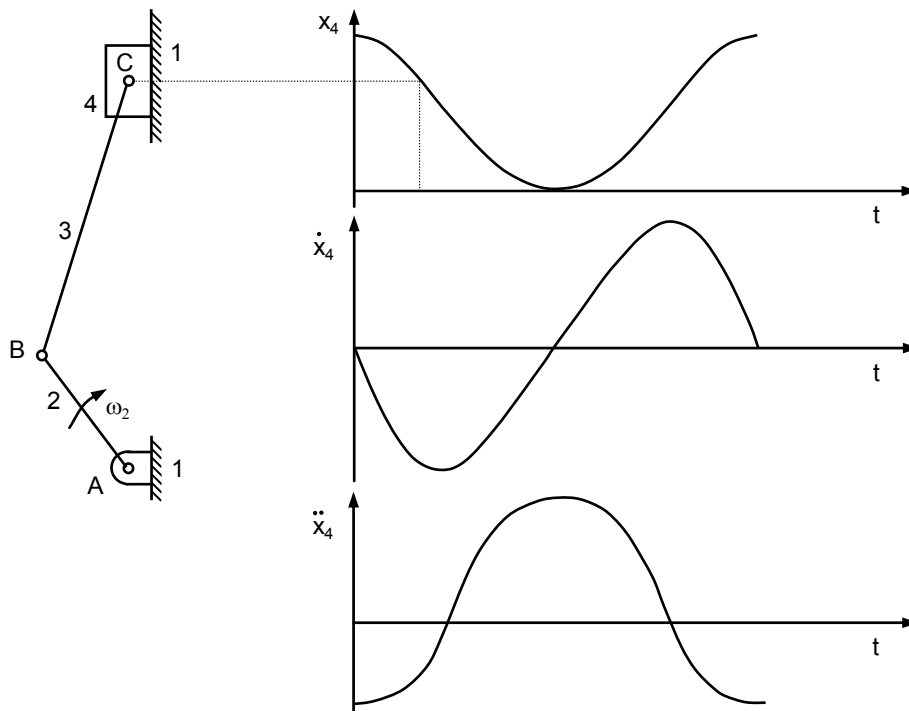


Figura 5.20 – Aplicação do método da diferenciação gráfica ao mecanismo biela-manivela.

5.7. ANÁLISE DE ACELERAÇÃO DE MECANISMOS ELEMENTARES

5.7.1. Mecanismo de Quatro Barras

A figura 5.21 mostra o mecanismo de quatro barras em que o órgão motor é a manivela, a qual roda com velocidade angular constante igual a ω_2 . Ainda na figura 5.21 estão ilustrados os vectores posição correspondentes a cada um das barras que constituem o mecanismo.

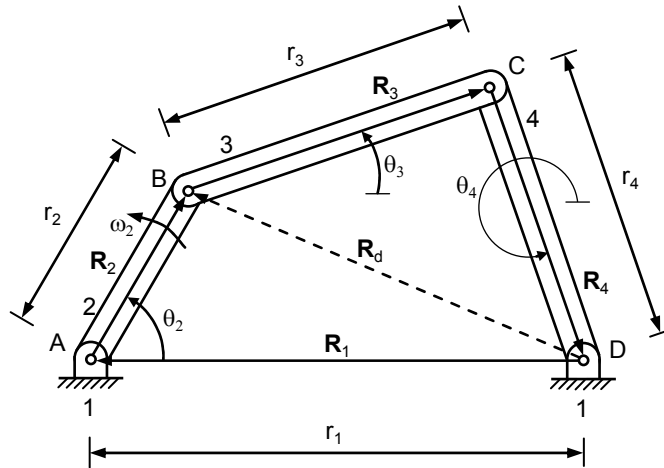


Figura 5.21 – Mecanismo de quatro barras.

Com base na notação complexa polar, a equação que traduz a cadeia cinemática formada pelos vectores \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_3 e \mathbf{R}_4 é escrita como,

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} + r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (5.109)$$

Derivando duas vezes esta equação em ordem ao tempo obtêm-se as expressões que permitem calcular as acelerações das barras deste quadrilátero articulado. Assim, da primeira derivada da equação (5.109) vem que,

$$r_2 i \omega_2 e^{i\theta_2} + r_3 i \omega_3 e^{i\theta_3} + r_4 i \omega_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (5.110)$$

Deve referir-se que r_1, r_2, r_3, r_4 e θ_1 são parâmetros que não variam com o tempo.

Utilizando a fórmula de Euler na equação (5.110), separando as partes real e imaginária e resolvendo o sistema resultante, em ordem a ω_3 e ω_4 , obtêm-se,

$$\omega_3 = \frac{r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \quad (5.111)$$

$$\omega_4 = \frac{r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \quad (5.112)$$

Derivando, agora, a equação (5.110) em ordem ao tempo vem que,

$$r_2 i^2 \omega_2^2 e^{i\theta_2} + r_3 i \alpha_3 e^{i\theta_3} + r_3 i^2 \omega_3^2 e^{i\theta_3} + r_4 i \alpha_4 e^{i\theta_4} + r_4 i^2 \omega_4^2 e^{i\theta_4} = 0 \quad (5.113)$$

As incógnitas desta equação são α_3 e α_4 , pelo que aplicando a fórmula de Euler, separando as partes real e imaginária e resolvendo o sistema daí resultante resulta,

$$\alpha_3 = \frac{r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + r_3 \omega_3^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) + r_4 \omega_4^2}{r_3 \text{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \quad (5.114)$$

$$\alpha_4 = \frac{r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) + r_4 \omega_4^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) + r_3 \omega_3^2}{r_4 \text{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \quad (5.115)$$

Atendendo a que a manivela 2 roda com velocidade angular constante, então o valor do ângulo θ_2 é dado por,

$$\theta_2 = \omega_2 t \quad (5.116)$$

Por seu lado, os valores dos ângulos θ_3 e θ_4 podem ser obtidos da análise de posição do mecanismo de quatro barras, donde resulta que,

$$\theta_3 = \theta_d \mp \arccos \frac{r_d^2 + r_3^2 - r_4^2}{2r_d r_3} \quad (5.117)$$

$$\theta_4 = \theta_d \pm \arccos \frac{r_d^2 + r_4^2 - r_3^2}{2r_d r_4} \quad (5.118)$$

em que θ_d e r_d são dados por,

$$\theta_d = \arcsen \left(\frac{r_2}{r_d} \text{sen} \theta_2 \right) \quad (5.119)$$

$$r_d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta_2 \quad (5.120)$$

5.7.2. Mecanismo de Corrediça

Na figura 5.22a está representado pelas suas barras o mecanismo de corrediça, enquanto na figura 5.22b estão apresentados os correspondentes vectores posição, os quais constituem uma cadeia cinemática fechada. Neste mecanismo considera-se que o órgão motor é a manivela 2, a qual roda com velocidade angular constante ω_2 . Nesta secção, usando o método da notação complexa, é apresentada a análise de acelerações linear e angular da manivela 4.

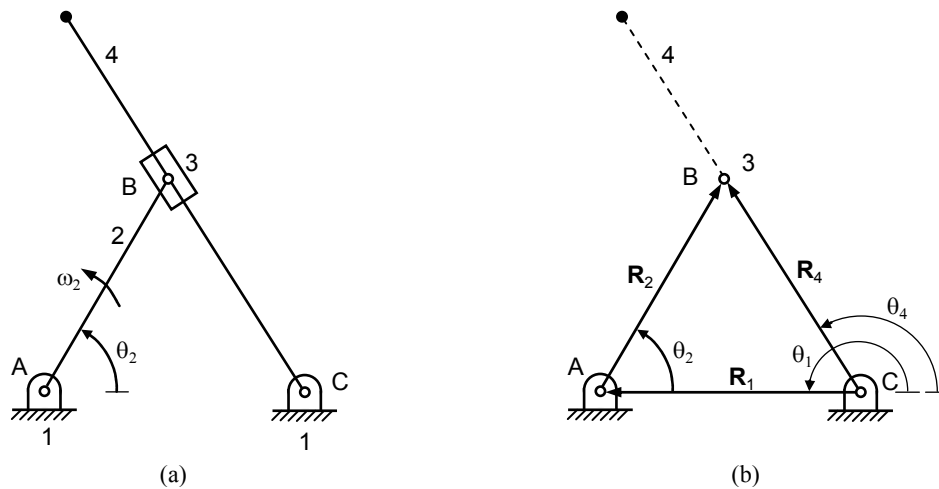


Figura 5.22 – (a) Mecanismo de corrediça; (b) Representação vectorial equivalente.

Assim, com base na notação complexa, a cadeia cinemática fechada formada pelos vectores \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_4 pode ser escrita como,

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} - r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (5.121)$$

Derivando em ordem ao tempo esta equação vem que,

$$r_2 i \omega_2 e^{i\theta_2} - \dot{r}_4 e^{i\theta_4} - r_4 i \omega_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (5.122)$$

Aplicando, agora, a fórmula de Euler à equação (5.122), separando as partes real e imaginária e resolvendo em ordem a \dot{r}_4 e ω_4 vem que,

$$\dot{r}_4 = r_2 \omega_2 \text{sen}(\theta_4 - \theta_2) \quad (5.123)$$

$$\omega_4 = \frac{r_2 \omega_2}{r_4} \text{cos}(\theta_4 - \theta_2) \quad (5.124)$$

Derivando, agora, a equação (5.122) em ordem ao tempo obtém-se,

$$r_2 i^2 \omega_2^2 e^{i\theta_2} - \ddot{r}_4 e^{i\theta_4} - \dot{r}_4 i \omega_4 e^{i\theta_4} - \dot{r}_4 i \omega_4 e^{i\theta_4} - r_4 i \alpha_4 e^{i\theta_4} - r_4 i^2 \omega_4^2 e^{i\theta_4} = 0 \quad (5.125)$$

As incógnitas desta equação são \ddot{r}_4 e α_4 , pelo que ao aplicar a fórmula de Euler, separando as partes real e imaginária, vem que,

$$-r_2 \omega_2^2 \text{cos} \theta_2 - \ddot{r}_4 \text{cos} \theta_4 + 2\dot{r}_4 \omega_4 \text{sen} \theta_4 + r_4 \alpha_4 \text{sen} \theta_4 + r_4 \omega_4^2 \text{cos} \theta_4 = 0 \quad (5.126)$$

$$-r_2 \omega_2^2 \text{sen} \theta_2 - \ddot{r}_4 \text{sen} \theta_4 - 2\dot{r}_4 \omega_4 \text{cos} \theta_4 - r_4 \alpha_4 \text{cos} \theta_4 + r_4 \omega_4^2 \text{sen} \theta_4 = 0 \quad (5.127)$$

As equações (5.126) e (5.127) constituem um sistema de duas equações a duas incógnitas, cujas soluções são,

$$\ddot{r}_4 = r_4 \omega_4^2 - r_2 \omega_2^2 \text{cos}(\theta_2 - \theta_4) \quad (5.128)$$

$$\alpha_4 = \frac{r_2 \omega_2^2 \text{sen}(\theta_4 - \theta_2) - 2\dot{r}_4 \omega_4}{r_4} \quad (5.129)$$

em que θ_2 é conhecido à partida, uma vez que a barra 2 é o órgão motor, sendo θ_4 dado pela seguinte equação obtida da análise de posição,

$$\theta_4 = \text{arctg} \frac{r_2 \text{sen} \theta_2}{r_2 \text{cos} \theta_2 - r_1} \quad (5.130)$$

Por seu lado os valores relativos às velocidades \dot{r}_4 e ω_4 podem ser calculados utilizando as equações (5.123) e (5.124), respectivamente.

5.7.3. Mecanismo Biela-Manivela com Excentricidade

A figura 5.23 mostra o mecanismo biela-manivela com excentricidade entre o eixo de rotação da manivela e a linha recta que define a direcção de translação da corrediça. A manivela é o órgão motor, a qual roda com velocidade angular constante igual a ω_2 . Aplicando o método algébrico ao mecanismo ilustrado na figura 5.23, obtém-se a seguinte expressão para a posição da corrediça,

$$x_4 = r_2 \text{cos} \omega_2 t + \sqrt{r_3^2 - (r_2 \text{sen} \omega_2 t + e)^2} \quad (5.131)$$

em que r_2 , r_3 e e são características geométricas do mecanismo, ω_2 é a velocidade angular da manivela e t é a variável tempo.

Assim, derivando duas vezes a equação (5.131) em ordem ao tempo, e após tratamento matemático, obtém-se uma expressão que permite calcular a aceleração linear da corrediça em cada instante, a qual é expressa como,

$$a_4 = -\omega_2^2 r_2 \sin \omega_2 t - \frac{\omega_2^2 r_2^2 (\cos^2 \omega_2 t - \sin^2 \omega_2 t)}{\sqrt{r_3^2 - (r_2 \sin \omega_2 t + e)^2}} - \frac{\omega_2^2 r_2^4 \sin^2 \omega_2 t \cos^2 \omega_2 t}{[r_3^2 - (r_2 \sin \omega_2 t + e)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (5.132)$$

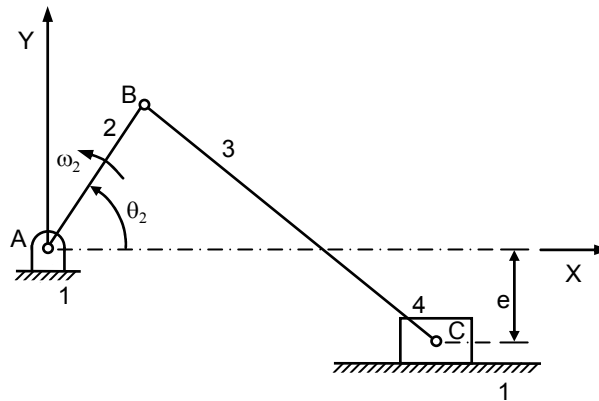


Figura 5.23 – Mecanismo biela-manivela com excentricidade.

5.7.4. Mecanismo Biela-Manivela Invertido

A figura 5.24 ilustra um mecanismo biela-manivela invertido, em que as barras foram substituídas por vectores posição equivalentes, os quais constituem uma cadeia cinemática fechada. Admite-se que, na presente situação a manivela é o órgão motor e roda com uma velocidade angular constante igual a ω_2 .

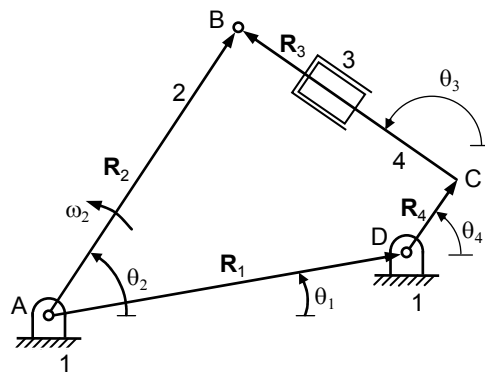


Figura 5.24 – Mecanismo biela-manivela invertido.

Da análise geométrica do mecanismo ilustrado na figura 5.24, e utilizando a notação complexa polar, pode escrever-se que,

$$r_2 e^{i\theta_2} - r_1 e^{i\theta_1} - r_3 e^{i\theta_3} - r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (5.133)$$

Por outro lado, da análise de posição são válidas as seguintes relações,

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - r_4^2 - 2r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)} \quad (5.134)$$

$$a = r_2 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1 \quad (5.135)$$

$$\theta_4 = \theta_3 - 90 \quad (5.136)$$

$$\theta_3 = \arctg \left(\frac{r_4 + \beta \sqrt{r_4^2 - a^2 + r_3^2}}{a + r_3} \right) \quad (5.137)$$

onde $\beta = \pm 1$.

Atendendo a que r_1 , r_4 e θ_1 são constantes, derivando em ordem ao tempo a equação (5.133), vem que,

$$r_2 i \omega_2 e^{i\theta_2} - \dot{r}_3 e^{i\theta_3} - r_3 i \omega_3 e^{i\theta_3} - r_4 i \omega_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (5.138)$$

Aplicando a fórmula de Euler na equação (5.138), separando as partes real e imaginária e rearranjando as equações daí resultantes obtém-se o seguinte sistema de equações,

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -r_3 \sin \theta_3 - r_4 \sin \theta_4 \\ \sin \theta_3 & r_3 \cos \theta_3 + r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_2 \omega_2 \sin \theta_2 \\ r_2 \omega_2 \cos \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.139)$$

Este sistema pode ser resolvido, utilizando, por exemplo, a regra de Cramer anteriormente apresentada, em ordem às velocidades \dot{r}_3 e ω_3 . Os restantes parâmetros da equação (5.139) são previamente conhecidos ou calculados usando as equações (5.134)-(5.137).

Procedendo de módulo análogo para o cálculo das acelerações, isto é, derivando em ordem ao tempo a equação (5.138), a após tratamento matemático obtém-se que,

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -r_3 \sin \theta_3 - r_4 \sin \theta_4 \\ \sin \theta_3 & r_3 \cos \theta_3 + r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_3 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 + r_3 \omega_3^2 \cos \theta_3 + 2\dot{r}_3 \omega_3 \sin \theta_3 + r_4 \omega_3^2 \cos \theta_4 \\ -r_2 \omega_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \omega_3^2 \sin \theta_3 - 2\dot{r}_3 \omega_3 \cos \theta_3 + r_4 \omega_3^2 \sin \theta_4 \end{Bmatrix} \quad (5.140)$$

O sistema dado pela equação (5.140) deve ser resolvido em ordem às incógnitas \ddot{r}_3 e α_3 , em que os restantes parâmetros envolvidos são conhecidos pela análise de posição e velocidade anteriormente apresentada.

Deve salientar-se que as matrizes dos coeficientes das equações (5.139) e (5.140) são iguais. Este facto é bastante útil e interessante quando se pretende escrever um programa computacional para o efeito, uma vez que se pode aumentar a eficiência computacional na medida em que, para cada instante, é necessário apenas calcular uma única vez a matriz dos coeficientes.

*The next best thing to knowing something
is knowing where to find it.*

Samuel Johnson

BIBLIOGRAFIA

- Alain, G., *Dicionário Prático de Matemática*. Terramar, Lisboa, Portugal, 2001.
- Albuquerque, O.A.L.P., *Dinâmica das Máquinas*. McGraw-Hill, 1974.
- Alonso, M. e Finn, E.J., *Física: um curso universitário*; Vol. I – Mecânica. Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, Brasil, 1981.
- Ambrósio, J. e Pereira, M.S., “Desenvolvimentos Recentes no Cálculo Automático de Sistemas Mecânicos: Teoria e Aplicação”. *Proceedings of VI Congresso Ibero-Americano de Engenharia Mecânica – CIBEM6*. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Coimbra, Coimbra, Portugal, editado por A.M. Dias, Volume I, pp. 1-20, 2003.
- Amorim, D.P. e Amorim, J.B.P., *Lições de Mecânica Racional*. 2ª edição, Atlântica, Coimbra, 1954.
- Ampère, A.M., *Essai sur la Philosophie des Sciences*. Paris, 1834.
- Anand, D.K. e Cunniff, P.F., *Engineering Mechanics Dynamics*. Houghton Mifflin Company, Boston, Massachusetts, 1973.
- Angeles, J., *Spatial Kinematic Chains*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- Armytage, W.H.G., *A Social History of Engineering*. Faber & Faber, Ltd., London, 1961.
- Arnold, V.I., *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica*. Editora Mir Moscovo, Rússia, 1987.
- Artobolevsk, I.I., *Mechanisms in Modern Engineering Design*. Vol. I, II, Lever Mechanisms, Mir Publishers Moscow, 1975.
- Barton, L.O., *Mechanism Analysis, Simplified Graphical and Analytical Techniques*. Second edition, Marcel Dekker, Inc., New York, 1993.
- Bayo, E., Jalón, J.G. e Serna, A., “A Modified Lagrangian Formulation for the Dynamic Analysis of Constrained Mechanical Systems”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71, pp. 183-195, 1988.
- Beegs, J.S., *Mechanism*. McGraw-Hill, New York, 1955.
- Beyer, R., *The Kinematics Synthesis of Mechanisms*. Chapman & Hall, Ltd, London, 1963.
- Burton, P., *Kinematics and Dynamics of Planar Machinery*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1979.
- Capecchi, D. e Drago, A., “On Lagrange’s History of Mechanics”, *Meccanica*, 40, pp. 19-33, 2005.
- Ceccarelli, M., “Mechanism Schemes in Teaching: A Historical Overview”. *Journal of Mechanical Design*, 120, pp. 533-541, 1998.
- Ceccarelli, M. e Cigola, M., “Trends in the drawing of mechanisms since the early Middle Ages”. *Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal Mechanical Engineering Science*, 215, Part C, pp. 269-289, 2001.
- Chace, M.A., “Analysis of the Time-Dependence of Multi-Freedom Mechanical Systems in Relative Coordinates”. *Journal of Engineering for Industry*, 89, pp. 119-125, 1967.

- Chace, M.A., "Using DRAM and ADAMS Programs to Simulate Machinery Vehicles". *Agricultural Engineering*, pp. 16-18, 1978.
- Chace, M.A., "Vector Analysis of Linkages". *Journal of Engineering for Industry*, Series B 55(3), pp. 289-297, 1963.
- Chace, M.A., *Development and Application of Vector Mathematics for Kinematic Analysis of Three Dimensional Mechanisms*. Ph.D. Dissertation, University of Michigan, Michigan, USA. 1964.
- Chebyshev, P.L., *Ouvres de P.L. Tchebychef*. Imp. de la Academie de Sciences de St. Petersburg, St. Petersburg, 1899.
- Chironis, N.P., *Mechanisms & Mechanical Devices Sourcebook*. McGraw-Hill, New York, 1991.
- Chironis, N.P., *Mechanisms, Linkages and Mechanical Controls*. McGraw-Hill, New York, 1965.
- Cigola, M. e Ceccarelli, M., "On the evolution of mechanisms drawing". *Proceedings of 9th IFToMM World Congress*, Milan, Vol. 4, pp. 3191-3195, 1995.
- Claro, J.C.P. e Fernandes, J.P.F., "Influência da modelização das juntas na análise do desempenho de um mecanismo". *8as Jornadas Portuguesas de Tribologia*, editado por José Grácio, Paulo Davim, Qi Hua Fan and Nasar Ali, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal, Maio 8-9, pp. 215-219, 2002.
- Crossley, F.E., "Recollections From Forty Years of Teaching Mechanisms". *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 110, pp. 232-242, 1988.
- D'Alembert, J.B. e Diderot, D., *Recueil de Planches, sur les Sciences, les Arts Liberaux, et les Arts Mechaniques*. 3 edition, Livourne, 1774.
- Denavit, J. e Hartenberg, R.S., "A Kinematic Notation for Lower Pair Mechanisms Based on Matrices". *Journal of Applied Mechanics*, 22, pp. 215-222, 1955.
- Derry, T.K. e Williams T.I., *A Short History of Technology, From The Earliest Times to A.D. 1900*. Dover Publications, Inc., New York, 1993.
- Dijksman, E.A., *Motion Geometry of Mechanisms*. Cambridge University Press, London, 1976.
- Durley, R.J., *Kinematics of Machines*. John Wiley and Sons, New York, 1903.
- Eckhardt, H.D., *Kinematic Design of Machines and Mechanisms*. McGraw-Hill, New York, 1998.
- Erdman, A.G. e Gustafson, J.E., "LINCAGES: Linkage INteractive Computer Analysis and Graphically Enhanced Synthesis Package". *ASME paper No. 77-DTC-5*, 1977.
- Erdman, A.G. e Sandor, G.N., *Mechanism Design Analysis and Synthesis*. Vol. I, 3rd edition, Prentice Hall, 1997.
- Erdman, A.G., "Computer-Aided Design of Mechanisms: 1984 and Beyond". *Mechanism and Machine Theory*, 20(4), pp. 245-249, 1985.
- Erdman, A.G., "Computer-Aided Mechanism Design: Now and the Future". *50th Anniversary of the Design Engineering Division Combined Issue, Journal of Mechanical Design*, 117(B), pp. 93-100, 1995.
- Fawcett, J. N. e Burdess, J. S., *Basic Mechanics with Engineering Applications*. Edward Arnold, London, 1988.
- Ferguson, E.S., "Kinematics of Mechanisms from the Time of Watt". *Contributions from the Museum of History and Technology*, Washington, Paper 27, pp. 186-230, 1962.
- Fernandes, J.P.F., *Análise Cinemática e Dinâmica de Mecanismos com Recurso a Meios Computacionais*. Trabalho de Síntese integrado nas Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica. Universidade do Minho, Guimarães, Portugal, Abril, 2000.

- Fernandes, J.P.F., Claro, J.C.P. e Lima, M., “Projecto de equipamento para ensaio dinâmico de mecanismos”. 2^{as} Jornadas Politécnicas de Engenharia, Escola Superior de Tecnologia de Setúbal, Setúbal, Portugal, Novembro 13-14, 10p, 2002.
- Flores, P. e Ambrósio, J., “Dinâmica Planar de Sistemas Multicorpo Incluindo Juntas Cinemáticas com Folga”. *VII Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional*, Universidade de Évora, Évora, Portugal, Abril 14-16, pp. 535-550, 2003.
- Flores, P. e Ambrósio, J., “Revolute joints with clearance in multibody systems”. *Computers and Structures*, Special Issue: Computational Mechanics in Portugal, Vol. 82/17-19, pp. 1359-1369, 2004.
- Flores, P., Ambrósio J. e Claro, J.P., “Dynamic Analysis for Planar Multibody Mechanical Systems with Real Joints”. *Proceedings of ECCOMAS Thematic Conference on Advances in Computational Multibody Dynamics 2003*, (editado por Jorge A.C. Ambrósio), Lisboa, Portugal, Julho 1-4, 26p, 2003.
- Flores, P., Ambrósio, J. e Claro, J.P., “Dynamic Analysis for Planar Multibody Mechanical Systems with Lubricated Joints”. *Multibody System Dynamics*, 12, pp. 47-74, 2004.
- Flores, P., Ambrósio, J., Claro, J.C.P. e Lankarani, H.M., “Modeling of Joints with Translational Clearances in Planar Multibody Systems”. *Congresso de Métodos Computacionais em Engenharia*, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, Portugal, Maio 31 – Junho 2, 18p, 2004.
- Flores, P., Claro, J.C.P. e Ambrósio, J., “Influência da modelação de juntas cinemáticas com folga na resposta dinâmica de sistemas mecânicos: uma abordagem teórica”. 4^{as} Jornadas Politécnicas de Engenharia, Instituto Superior de Engenharia do Porto, Porto, November 17-18, 14p, 2004.
- Flores, P., Lankarani, H.M., Ambrósio, J. e Claro, J.C.P., “Dynamic Behavior of a Revolute Clearance Joint in Multibody Mechanical Systems”. *Proceeding of DETC’03 ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Chicago, Illinois USA, Setembro 2-6, 9p, 2003.
- Flores, P., Lankarani, H.M., Ambrósio, J. e Claro, J.C.P., “Modeling lubricated revolute joints in multibody mechanical systems”. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part-K Journal of Multi-body Dynamics*, 218, pp. 183-190, 2004.
- Flores, P., Orden, J.C.G., Ambrósio, J. e Claro, J.C.P., “Modeling Joint Clearances in Multibody Mechanical Systems”. *Congresso de Métodos Computacionais em Engenharia*, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, Portugal, Maio 31 – Junho 2, 12p, 2004.
- Frolov, K.V., *Applications of Mechanics to Technological Problems*. Taylor & Francis Inc., 1999.
- Galileo, G., *Dialogues Concerning Two New Sciences*. (Translated by H. Crew and A. de Salvio, 1914, reprinted in 1956), Macmillan, New York, 1638.
- Gérardin, M. e Cardona, A., “Kinematics and dynamics of rigid and flexible mechanisms using finite elements and quaternion algebra”. *Computational Mechanics*, 4, pp. 115-135, 1989.
- Gieck, K., *Manual de Fórmulas Técnicas*. Dinalivro, 1974.
- Grashof, F., *Theorie der Getriebe und der Mechanischen Messinstrumente*. Hamburg, 1883.
- Greewood, D.T., *Principles of Dynamics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- Hartenberg, R.S. e Denavit, J., *Kinematics Synthesis of Linkages*. McGraw-Hill, New York, 1984.
- Hartog, J.P., *Mechanics*. Dover Publications, Inc., New York, 1948.

- Haug, E.J., *Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems - Volume I: Basic Methods*. Allyn and Bacon, Boston, Massachusetts, 1989.
- Haug, E.J., Wehage, R.A. e Barman, N.C., "Dynamic Analysis and Design of Constrained Mechanical Systems". *Journal of Mechanical Design*, 104, pp. 778-784, 1982.
- Huckert, J., *Analytical Kinematics of Plane Motion Mechanisms*. The Macmillan, New York, 1958.
- Hunt, K.H., *Kinematic Geometry of Mechanisms*. Oxford University Press, Oxford, 1978.
- Huston, R.L., *Multibody Dynamics*. Butterworth-Heinemann, Boston, Massachusetts, 1990.
- Isaacs, A., *Dicionário Breve de Física*. (Tradução de M.T.R. Escoval), Editorial Presença, Lisboa, Portugal, 1996.
- Jalón, J.G. e Bayo, E., *Kinematic and Dynamic Simulations of Multibody Systems*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- Jones, F.D., *Manual Técnico para Desenhistas e Projectistas de Máquinas*. (Tradução de J.B. Soares), Vol. II, Hemus editora, S. Paulo, Brasil, 1975.
- Kane, T.R. e Levinson, D.A., *Dynamics: Theory and Applications*. McGraw-Hill, New York, 1985.
- Kaufman, R.E., "Mechanism Design by Computer". *Machine Design*, 50(24), pp. 94-100, 1978.
- Kempe, A.B., *How To Draw a Straight Line; A Lecture on Linkages*. Macmillan, London, 1877.
- Khulief, Y.A. e Shabana, A.A., "Dynamic Analysis of Constrained System of Rigid and Flexible Bodies with Intermittent Motion". *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 108, pp. 38-45, 1986.
- Kimbrell, J.T., *Kinematic Analysis and Synthesis*, McGraw-Hill, New York, 1991.
- Kirby, R.S., Withington, S., Darling A.B. e Kilgour, F.G., *Engineering in History*. Dover Publications, Inc., New York, 1990.
- Koetsier, T., "A contribution to the history of kinematics". *Mechanism and Machine Theory*, 18(1), pp. 37-42, 1983.
- Krutz, G.W., Schueller, J.S. e Claar, P.W., *Machine Design for Mobile and Industrial Applications*. Society of Automotive Engineers, Inc., 1994.
- Lee, T.W. e Wang, A.C., "On The Dynamics of Intermittent-Motion Mechanisms. Part 1. Dynamic Model and Response". *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 105, pp. 534-540, 1983
- Lent, D., *Analysis and Design of Mechanisms*. 2nd edition, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1970.
- Levinson, L., *Fundamentals of Engineering Mechanics*. Mir Publishers, Moscow, Soviet Union, 1970.
- Lockwood, E.H., *A Book of Curves*. Cambridge University Press, England, 1967.
- Mabie, H.H. e Reinholtz, C.F., *Mechanisms and Dynamics of Machinery*. Fourth edition, John Willey & Sons, New York, 1987.
- Martin, G.H., *Kinematics and Dynamics of Machines*. McGraw-Hill, New York, 1982.
- McCarthy, J.M., *Geometric Design of Linkages*. Springer, New York, 2000.
- Molian, S., *Mechanism Design, The Practical Kinematics and Dynamics of Machinery*. 2nd edition, Pergamon, 1997.
- Myszka, D., *Machines and Mechanisms, Applied Kinematic Analysis*. Prentice, Hall, Inc., New Jersey, 1999.

- Newton, I., 1687, *Mathematical Principles of Nature Philosophy and his Systems of the World*. (Translated by A. Motte, revised and annotated by F. Cajori, 1934), University of California Press, Berkeley, California.
- Nikravesh, P.E. e Chung, I.S., “Application of Euler Parameters to the Analysis of Three-Dimensional Constrained Mechanical Systems”. *Journal of Mechanical Design*, 104, pp. 785-791, 1982.
- Nikravesh, P.E., “Some Methods for Dynamic Analysis of Constrained Mechanical Systems: A Survey”. *Computer-Aided analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics*, edited by E.J. Haug, Springer-Verlag, Berlin, Germany, pp. 351-368, 1984.
- Nikravesh, P.E., *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.
- Nils, J., *Artificial Intelligence: A New Synthesis*. Morgan Kaufmann Publishers, 1998.
- Orlandea, N., Chace, M.A. e Calahan, D.A., “A Sparsity-Oriented Approach to the Dynamic Analysis and Design of Mechanical Systems - Part 1 and 2”. *Journal of Engineering for Industry*, 99, pp. 773-784, 1977.
- Paul, B. e Krajcinovic, D., “Computer Analysis of Machines with Planar Motion, Part 1 - Kinematics, Part 2 - Dynamics”. *Journal of Applied Mechanics*, pp. 37, 697-712, 1970.
- Pfeiffer, F. e Glocker, C., *Multibody Dynamics With Unilateral Constraints*. John Wiley and Sons, New York, 1996.
- Phelan, R.M., *Dynamics of Machinery*. McGraw-Hill, London, 1967.
- Rahnejat, H. “Multi-body dynamics: historical evolution and application”. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal Mechanical Engineering Science*. Special Millennium Issue, 214(C1), 149-173, 2000.
- Raven, F.H., “Velocity and Acceleration Analysis of Plane and Space Mechanisms by Means of Independent-Position Equations”. *Journal of Applied Mechanics*, 80, pp. 1-6, 1958.
- Reuleaux, F., *The Kinematics of Machinery*. (Translated and annotated by A.B.W. Kennedy). Dover, New York, 1963.
- Rosen, A. e Edelstein, E., “Investigation of a New Formulation of the Lagrange Method for Constrained Dynamic Systems”. *Journal of Applied Mechanics*, 64, pp. 116-122, 1997.
- Rothbart, H.A., *Mechanical Design and Systems Handbook*. McGraw-Hill, New York, 1985.
- Rubel, A.J. e Kaufman, R.E., “KINSYN III: A New Human-Engineering System for Interactive Computer-Aided Design of Planar Linkages”. *Journal of Engineering for Industry*, Series B, 99(2), pp. 440-448, 1977.
- Rulka, W., “SIMPACK – A computer program for simulation of large-motion multibody systems”. In W. Schiehlen, editor, *Multibody Systems Handbook*, pp. 265-284. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1990.
- Ryan, D.L., *Computer Aided Kinetics for Machine Design*. Marcel Dekker Inc., New York, 1981.
- Ryan, R.R., *ADAMS-Multibody System Analysis Software*. Multibody Systems Handbook, Berlin, Springer-Verlag, 1990.
- Schiehlen, W., “Multibody System Dynamics: Roots and Perspectives”. *Multibody System Dynamics*, 1, pp. 149-188, 1997.
- Schwamb, P, Merrill, A.L. e James, W.H., *Nociones de Mecanismos*. (Tradução de G.M. Callejon), Tolle, Lege, Aguilar, Madrid, Espanha, 1973.
- Sensenbaugh, R., *The Bernoulli Family – Great Lives from History Renaissance to 1900 Series*. Englewood Cliffs, New Jersey, Vol. 1, pp. 185-188, 1989.

- Shabana, A.A., "Flexible Multibody Dynamics: Review of Past and Recent Developments". *Multibody System Dynamics*, 1, pp. 189-222, 1997.
- Shabana, A.A., *Dynamics of Multibody Systems*. John Wiley and Sons, New York, 1989.
- Sheth, P.N. e Uicker, J.J., "IMP (Integrated Mechanism Program): A Computer-Aided Design Analysis System for Mechanisms and Linkages". *Journal of Engineering for Industry*, Series B 94(2), pp. 454-464, 1971.
- Shigley, J.E. e Uicker, J.J., *Theory of Machines and Mechanisms*. McGraw-Hill, New York, 1995.
- Shigley, J.E., *Dynamics Analysis of Machines*. McGraw-Hill, New York, 1961.
- Shigley, J.E., *Kinematics Analysis of Mechanisms*. McGraw-Hill, New York, 1969.
- Sloane, A., *Engineering Kinematics*. The MacMillan Company, New York, 1959.
- Smith, R.C. e Haug, E.J., *DADS-Dynamic Analysis and Design System*. Multibody Systems Handbook, Berlin, Springer-Verlag, 1990.
- Soni, A.H., *Mechanism Synthesis and Analysis*. Scripta Book Company, Washington, 1974.
- Targ, S., *Curso Técnico-prático de Mecânica*. Lopes da Silva Editora, Rio de Janeiro, Brazil, 1976.
- Timings, R.L. e Twigg, P., *The Pocket Illustrated Dictionary of Engineering Terms*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2001.
- Uicker, J.J., "Dynamic Behavior of Spatial Linkages Part 1 - Exact Equations of Motion, Part 2 - Small Oscillations about Equilibrium". *Journal of Engineering for Industry*, 91, pp. 251-265, 1969.
- Usher, A.P., *A History of Mechanical Inventions*. Harvard University Press, Cambridge Press, 1954.
- Wehage, R.A. e Haug, E.J., "Generalized Coordinate Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Systems". *Journal of Mechanical Design*, 104, pp. 247-255, 1982.
- White, L., *Medieval Technology and Social Change*. Oxford University Press, New York, 1962.
- Willis, R. *Principles of Mechanisms*. Cambridge University Press, England, 1841.
- Wilson, C.E. e Salder, J.P., *Kinematics and Dynamics of Machinery*. 2nd edition, Harper Collins College Publishers, New York, 1993.
- Wittenburg, J., "Dynamics of Multibody Systems". *Proceedings of the XVth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, edited by F.P.J. Rimrott and B. Tabarrok, University of Toronto, Canada, August 17-23, pp. 197-207, 1980.
- Wittenburg, J., *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*. B.G. Teubner, Stuttgart, Germany, 1977.

It is the glory of geometry that from so few principles, fetched from without, it is able to accomplish so much.

Isaac Newton

ANEXO A – VECTORES

A.1. GENERALIDADES

Em mecânica há dois tipos de grandezas, a saber, as escalares e as vectoriais.

As primeiras são caracterizadas por uma quantidade numérica, que representa a magnitude ou módulo da grandeza, seguida de uma unidade adequada. Exemplos de grandezas escalares são a massa de um corpo, o tempo, a temperatura, entre outras.

As grandezas físicas cuja completa especificação exige, para além de um valor numérico, o conhecimento de uma direcção e sentido de actuação denominam-se grandezas vectoriais. Assim, por exemplo, o deslocamento de um corpo só fica completamente especificado pela caracterização da distância percorrida e pela direcção e sentido associados à trajectória. As grandezas vectoriais devem ser estudadas com base na álgebra vectorial, como, por exemplo, a resultante de dois vectores pode ser obtida pela regra do paralelogramo de vectores.

A caracterização geométrica do movimento e das forças transmitidas nos sistemas mecânicos constitui o cerne da análise cinemática e dinâmica. Com efeito, a análise vectorial pode ser aplicada, quer no estudo de deslocamentos, velocidades e acelerações, quer no estudo de forças e momentos transmitidos pelos elementos que constituem os sistemas mecânicos.

A representação vectorial forma a base matemática do estudo cinemático e dinâmico de mecanismos, bem como de outras áreas da mecânica. De facto, a análise vectorial permite obter, de forma simples e conveniente, expressões matemáticas que de outro modo seria difícil, se não mesmo impossível, de traduzir em linguagem científica.

A.2. TIPOS DE COORDENADAS

Os tipos de coordenadas mais frequentemente utilizados na álgebra vectorial aplicada ao estudo cinemático e dinâmico de mecanismos articulados são as coordenadas cartesianas e as coordenadas polares, como ilustra, esquematicamente, a figura A.1. As coordenadas cartesianas, também denominadas retangulares, de um ponto são as componentes x^P e y^P da posição desse ponto, ao passo que em coordenadas polares o mesmo ponto é localizado pela distância r e pelo ângulo θ .

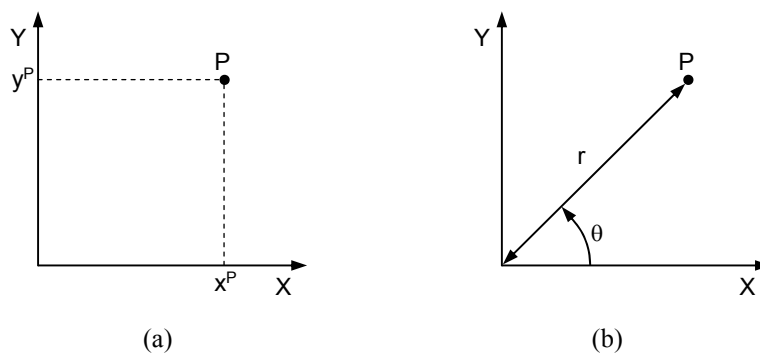


Figura A.1 – Tipos de coordenadas: (a) Cartesianas; (b) Polares.

A.3. NOTAÇÃO VECTORIAL

Convencionalmente, os vectores são representados por setas que unem os seus pontos inicial e final. Na figura A.2 está representado o vector \vec{a} que começa no ponto A e termina no ponto B , cuja magnitude é igual a a .

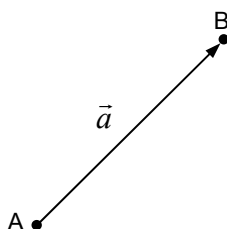


Figura A.2 – Representação convencional de um vector.

Por simplicidade e comodidade, no presente trabalho, os vectores são representados por uma letra maiúscula em negrito⁴⁵, \mathbf{R} , em vez da representação convencional, \vec{r} , como se ilustra na figura A.3. O módulo ou magnitude de um vector, que é uma grandeza escalar, é representado por uma letra minúscula, $r = |\mathbf{R}|$. O vector unitário, ou versor, na direcção do vector \mathbf{R} é representado por $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}$.

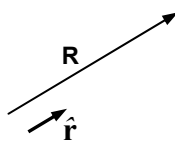


Figura A.3 – Representação de um vector e respectivo vector unitário.

Em suma, no presente trabalho a notação adoptada para a representação vectorial encontra-se resumida na figura A.4.

NOTAÇÃO VECTORIAL		
TIPO DE LETRA	SIGNIFICADO	EXEMPLO
Maiúscula	Vector (magnitude, direcção e sentido)	\mathbf{R}
	Componente vectorial numa dada direcção	\mathbf{R}^x
Minúscula	Magnitude de um vector (grandeza escalar)	r
	Magnitude de um vector numa dada direcção	r^x
	Vector unitário numa dada direcção (versor)	$\hat{\mathbf{r}}$

Figura A.4 – Notação vectorial adoptada no presente trabalho.

⁴⁵ A distinção entre a representação de um ponto e de um vector reside no facto de que, apesar de em ambos os casos se usar letras maiúsculas, os pontos serem representados em itálico, por exemplo, o ponto P , enquanto que os vectores serem representados em negrito, por exemplo, o vector \mathbf{R} .

Com efeito, um vector pode ser representado e descrito de diferentes modos. Assim, o vector representado na figura A.5 pode ser escrito como,

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^x + \mathbf{R}^y \quad (\text{coordenadas cartesianas}) \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{R} = r \angle \theta \quad (\text{coordenadas polares}) \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{R} = r^x \hat{\mathbf{i}} + r^y \hat{\mathbf{j}} \quad (\text{coordenadas cartesianas}) \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{R} = r^x + ir^y \quad (\text{coordenadas cartesianas e notação complexa}) \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{R} = re^{i\theta} \quad (\text{coordenadas polares e notação complexa}) \quad (\text{A.5})$$

onde i nas equações (A.4) e (A.5) representa a unidade complexa, em que $i = \sqrt{-1}$, e $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, que representa a equação de Euler.

Deve notar-se ainda que da análise geométrica da figura A.5 tem-se que,

$$r^x = r \cos \theta \quad (\text{A.6})$$

$$r^y = r \sin \theta \quad (\text{A.7})$$

$$r = \sqrt{(r^x)^2 + (r^y)^2} \quad (\text{A.8})$$

$$\theta = \arctg \frac{r^y}{r^x} \quad (\text{A.9})$$

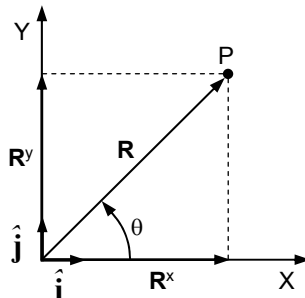


Figura A.5 – O vector \mathbf{R} localiza a posição do ponto P no sistema de coordenadas XY .

A.4. COMPONENTES DE UM VECTOR

É oportuno recordar alguns conceitos elementares no âmbito da análise vectorial. Com efeito, vectores que actuam no mesmo plano são denominados vectores coplanares. Vectores colineares têm a mesma direcção e a mesma linha de acção. Vectores iguais têm o mesmo módulo, a mesma direcção e o mesmo sentido. Vector nulo ou zero tem módulo zero e, por isso, a sua direcção não é especificada. A multiplicação de um vector por um escalar é definida como sendo um vector com a mesma direcção e módulo igual ao produto da magnitude do vector pelo escalar. Um vector negativo consegue-se por simples multiplicação por -1 , invertendo-se, por isso, o seu sentido.

Na figura A.6 está representado um vector \mathbf{R} que une a origem do sistema de eixos coordenados ao ponto P . As componentes vectoriais de \mathbf{R} ao longo dos eixos são \mathbf{R}^x , \mathbf{R}^y e \mathbf{R}^z , respectivamente. Ainda na figura A.6 estão representados os vectores unitários dos eixos X , Y e Z , ou seja, $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$, respectivamente.

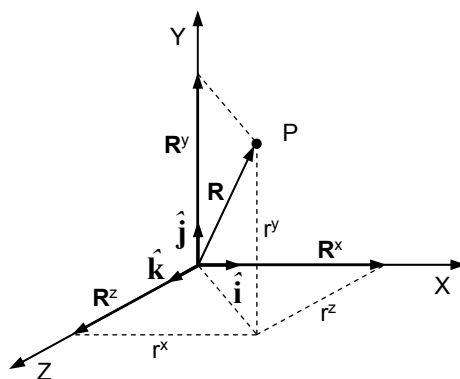


Figura A.6 – Componentes de um vector ao longo dos eixos coordenados.

As grandezas escalares r^x , r^y e r^z representam, respectivamente, o módulo dos vectores \mathbf{R}^x , \mathbf{R}^y e \mathbf{R}^z , pelo que se podem escrever as seguintes relações,

$$\mathbf{R}^x = r^x \hat{\mathbf{i}} \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{R}^y = r^y \hat{\mathbf{j}} \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{R}^z = r^z \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{A.12})$$

Quando dois vectores são iguais, então são também iguais as suas componentes. Assim, se os vectores \mathbf{A} e \mathbf{B} forem iguais, tal que,

$$\mathbf{A} = a^x \hat{\mathbf{i}} + a^y \hat{\mathbf{j}} + a^z \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{B} = b^x \hat{\mathbf{i}} + b^y \hat{\mathbf{j}} + b^z \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{A.14})$$

então, sabe-se que,

$$a^x = b^x \quad (\text{A.15})$$

$$a^y = b^y \quad (\text{A.16})$$

$$a^z = b^z \quad (\text{A.17})$$

A.5. ÁLGEBRA VECTORIAL

A.5.1. Adição e Subtração

A adição de vectores envolve simplesmente a soma individual de cada uma das componentes nas direcções X , Y e Z . Assim, considerando o vector \mathbf{C} como sendo a adição dos vectores \mathbf{A} e \mathbf{B} , isto é, $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$, tem-se que,

$$\mathbf{C} = (a^x + b^x)\hat{\mathbf{i}} + (a^y + b^y)\hat{\mathbf{j}} + (a^z + b^z)\hat{\mathbf{k}} \quad (\text{A.18})$$

em que os vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} estão representados pelas suas coordenadas cartesianas.

Graficamente, a adição de vectores pode representar-se como na figura A.7, em que o vector \mathbf{C} é igual à soma dos vectores \mathbf{A} e \mathbf{B} . Ainda na figura A.7 observa-se que a adição de vectores goza da propriedade comutativa, isto é, o resultado é o mesmo independentemente da ordem pela qual os vectores são adicionados.

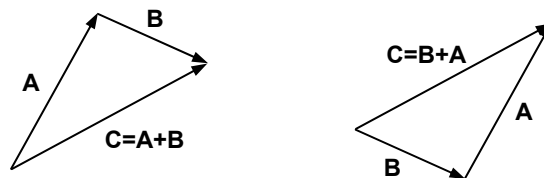


Figura A.7 – Propriedade comutativa da adição de vectores.

A figura A.8 ilustra também a adição gráfica de dois vectores, a qual é usada como base para se obter uma expressão matemática que permite calcular o módulo da soma de dois vectores.

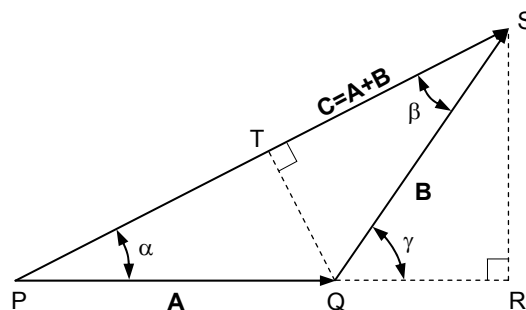


Figura A.8 – Adição gráfica de dois vectores.

Da observação da figura A.8 pode escrever-se que,

$$PS^2 = PR^2 + RS^2 \quad (\text{A.19})$$

$$PR = PQ + QR \quad (\text{A.20})$$

$$PR = a + b \cos \gamma \quad (\text{A.21})$$

$$RS = b \sin \gamma \quad (\text{A.22})$$

onde a e b representam os módulos dos vectores \mathbf{A} e \mathbf{B} , respectivamente.

Assim, das equações (A.19)-(A.22), o módulo do vector \mathbf{C} pode ser expresso por,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma} \quad (\text{A.23})$$

A direcção do vector **C** pode facilmente ser conhecida se o valor do ângulo α for calculado, pelo que aplicando a lei dos senos ao triângulo *PQS* vem que,

$$\frac{a}{\text{sen}\beta} = \frac{b}{\text{sen}\alpha} = \frac{c}{\text{sen}(180-\gamma)} \quad (\text{A.24})$$

Considerando, agora, os vectores **A**, **B** e **C** e ainda o escalar *s*, verificam-se as seguintes propriedades em relação à álgebra vectorial,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (\text{propriedade comutativa da adição}) \quad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad (\text{propriedade associativa da adição}) \quad (\text{A.26})$$

$$s\mathbf{A} = \mathbf{A}s \quad (\text{propriedade comutativa da multiplicação}) \quad (\text{A.27})$$

$$s(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = s\mathbf{A} + s\mathbf{B} \quad (\text{propriedade distributiva da multiplicação}) \quad (\text{A.28})$$

A subtracção de dois vectores é em tudo semelhante à adição de vectores anteriormente apresentada. Assim, considerando o vector **C** como sendo a subtracção dos vectores **A** e **B**, isto é, $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ ou $\mathbf{C} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$, tem-se que,

$$\mathbf{C} = (a^x - b^x)\hat{\mathbf{i}} + (a^y - b^y)\hat{\mathbf{j}} + (a^z - b^z)\hat{\mathbf{k}} \quad (\text{A.29})$$

Graficamente, a subtracção de vectores é obtida somando-se o primeiro vector com o negativo ou oposto do segundo, como ilustra a figura A.9.

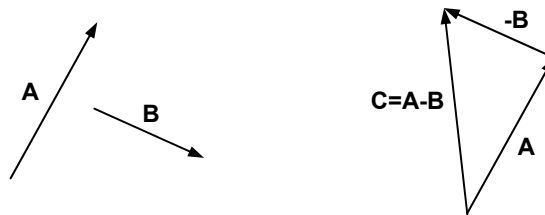


Figura A.9 – Subtracção de dois vectores.

Deve notar-se que a subtracção de vectores não goza da propriedade comutativa, como se demonstra graficamente na figura A.10.

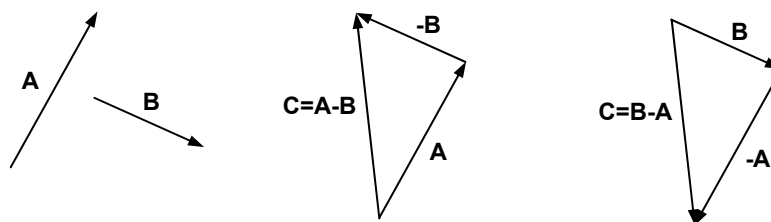


Figura A.10 – Propriedade não comutativa da subtracção de vectores.

A.5.2. Produto Externo ou Vectorial

O produto externo ou vectorial de dois vectores **A** e **B** é definido como sendo um vector perpendicular ao plano definido por **A** e **B**. O produto vectorial é representado por $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ou $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$. O sentido do vector resultante do produto vectorial é o correspondente ao sentido do avanço de um parafuso de rosca direita que roda de **A** para **B**. Um parafuso de rosca direita avança na direcção de um polegar quando se

coloca a mão direita na forma indicada na figura A.11, isto é, com os dedos a apontar no sentido de rotação. Deve notar-se que a maior parte dos parafusos são de rosca direita. Por outro lado, da definição de produto vectorial decorre que,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (\text{A.30})$$

uma vez que o sentido de rotação do parafuso é invertido quando a ordem dos dois vectores é alterada, pelo que o produto vectorial é anticomutativo.

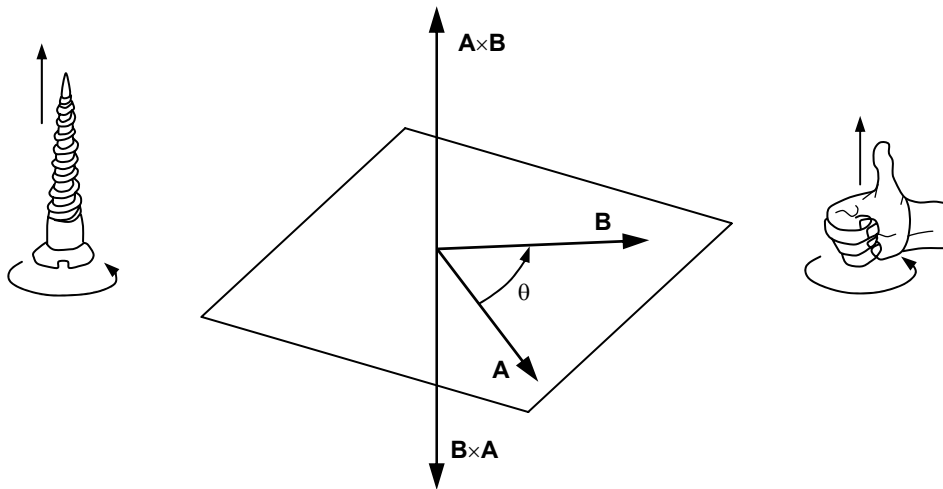


Figura A.11 – Representação do produto externo ou vectorial de dois vectores.

Uma outra regra simples, que permite saber o sentido do produto vectorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, é a bem conhecida regra da mão direita, a qual pode ser resumida do seguinte modo, ao colocar o dedo polegar, o dedo indicador e o dedo médio da mão direita na posição ilustrada na figura A.12, se o indicador e o dedo médio apontarem nos sentidos de \mathbf{A} e \mathbf{B} , respectivamente, então o polegar indica o sentido de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

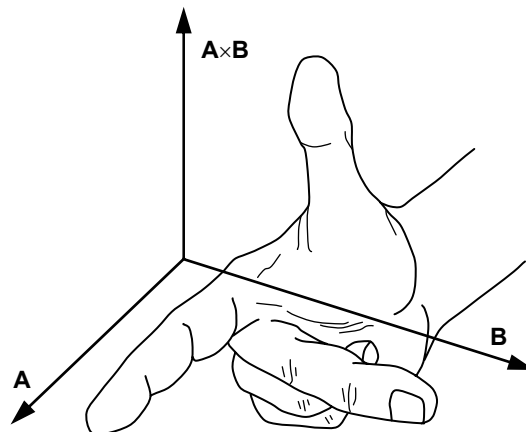


Figura A.12 – Regra da mão direita usada no produto vectorial de dois vectores.

A magnitude ou módulo do produto vectorial $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ pode ser calculada por,

$$c = ab \sin \theta \quad (\text{A.31})$$

em que a e b representam os módulos dos vectores \mathbf{A} e \mathbf{B} , respectivamente, e θ define o ângulo formado pelos dois vectores considerados.

Deve notar-se que é nulo o produto vectorial de dois vectores paralelos, uma vez que é nulo o ângulo por eles formado e, conseqüentemente, é também nulo o seno desse ângulo. Com efeito, pode concluir-se que a condição necessária e suficiente para garantir o paralelismo entre dois vectores é dada pelo seu produto vectorial, ou seja,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (\text{A.32})$$

Deve ainda observar-se que o produto vectorial dos vectores unitários associados aos eixos coordenados X , Y e Z apresenta os seguintes resultados,

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.33})$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.34})$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.35})$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{A.36})$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}} \quad (\text{A.37})$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \quad (\text{A.38})$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}} \quad (\text{A.39})$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \quad (\text{A.40})$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}} \quad (\text{A.41})$$

Quando os vectores são expressos pelas suas componentes cartesianas,

$$\mathbf{A} = a^x \hat{\mathbf{i}} + a^y \hat{\mathbf{j}} + a^z \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{A.42})$$

$$\mathbf{B} = b^x \hat{\mathbf{i}} + b^y \hat{\mathbf{j}} + b^z \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{A.43})$$

então, o produto vectorial de \mathbf{A} por \mathbf{B} é dado por,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (a^y b^z - a^z b^y) \hat{\mathbf{i}} + (a^z b^x - a^x b^z) \hat{\mathbf{j}} + (a^x b^y - a^y b^x) \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{A.44})$$

A equação (A.44) pode ser escrita na forma mais compacta de um determinante da seguinte matriz,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a^x & a^y & a^z \\ b^x & b^y & b^z \end{vmatrix} \quad (\text{A.45})$$

A.5.3. Produto Interno ou Escalar

O produto interno ou escalar de dois vectores \mathbf{A} e \mathbf{B} é definido como sendo um escalar resultante do produto dos seus módulos pelo coseno do ângulo por eles formado. O produto escalar é representado por $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Matematicamente, o produto escalar é escrito como,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = ab \cos \theta \quad (\text{A.46})$$

em que a e b representam os módulos dos vectores \mathbf{A} e \mathbf{B} , respectivamente, e θ define o ângulo formado pelos dois vectores considerados.

Deve notar-se que é nulo o produto escalar de dois vectores perpendiculares, uma vez que é igual a 90° o ângulo por eles formado e, conseqüentemente, é nulo o coseno deste ângulo. Com efeito, pode concluir-se que a condição necessária e suficiente para garantir a perpendicularidade entre dois vectores é dada por um produto interno, isto é,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.47})$$

Deve ainda observar-se que o produto escalar dos vectores unitários associados aos eixos coordenados X , Y e Z apresenta os seguintes resultados,

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 1 \quad (\text{A.48})$$

$$\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 1 \quad (\text{A.49})$$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1 \quad (\text{A.50})$$

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0 \quad (\text{A.51})$$

$$\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad (\text{A.52})$$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0 \quad (\text{A.53})$$

Quando os vectores são expressos pelas suas componentes cartesianas,

$$\mathbf{A} = a^x \hat{\mathbf{i}} + a^y \hat{\mathbf{j}} + a^z \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{A.54})$$

$$\mathbf{B} = b^x \hat{\mathbf{i}} + b^y \hat{\mathbf{j}} + b^z \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{A.55})$$

então, o produto escalar de \mathbf{A} por \mathbf{B} é dado por,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a^x b^x + a^y b^y + a^z b^z \quad (\text{A.56})$$

O produto escalar de um vector por ele próprio, isto é, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, é dado por,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = a^2 \quad (\text{A.57})$$

Algumas considerações adicionais em relação ao produto escalar de vectores devem ainda ser tidas em linha de conta. Em primeiro lugar deve referir-se que o produto escalar goza da propriedade comutativa, isto é,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A.58})$$

A propriedade distributiva é também aplicável ao produto escalar de vectores,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (\text{A.59})$$

Deve notar-se ainda a equivalência entre os produtos escalares e vectoriais de vários vectores, tal como exemplifica a equação (A.60).

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} a^x & a^y & a^z \\ b^x & b^y & b^z \\ c^x & c^y & c^z \end{bmatrix} \quad (\text{A.60})$$

A.5.4. Multiplicação e Divisão

Nesta secção são apenas apresentados os casos da multiplicação e divisão de dois vectores, usando para o efeito a notação complexa. Assim, considerando os vectores **A** e **B** expressos em notação complexa, a multiplicação destes dois vectores pode ser expressa como,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = ae^{i\theta_A} \times be^{i\theta_B} = ab[\cos(\theta_A + \theta_B) + i\text{sen}(\theta_A + \theta_B)] \quad (\text{A.61})$$

De modo análogo, a divisão de dois vectores **A** e **B** expressos em notação complexa pode ser calculada como,

$$\mathbf{A} / \mathbf{B} = ae^{i\theta_A} / be^{i\theta_B} = (a/b)[\cos(\theta_A - \theta_B) + i\text{sen}(\theta_A - \theta_B)] \quad (\text{A.62})$$

A.5.5. Rotação de Eixos no Plano

A rotação dos eixos coordenados com o intuito de definir novos sistemas de eixos é uma necessidade frequente na análise de mecanismos. A figura A.13 ilustra um vector **R** cuja notação em coordenadas polares, relativamente ao sistema de eixos *XY*, pode ser escrita como,

$$\mathbf{R} = r \angle \theta \quad (\text{A.63})$$

e relativamente ao sistema de eixos *X'Y'* rodado de um ângulo γ em relação ao sistema de eixos original, é expresso por,

$$\mathbf{R} = r \angle (\theta - \gamma) \quad (\text{A.64})$$

Deve notar-se que esta técnica pode ser particularmente útil e interessante no caso de se pretender determinar a magnitude das componentes coordenadas de um vector, sendo conhecida a sua direcção, pois desde que se proceda a uma rotação de valor igual a θ , então, após a rotação vem que,

$$|\mathbf{R}| = r \quad (\text{A.65})$$

ou seja,

$$r^{x'} = r \quad (\text{A.66})$$

$$r^{y'} = 0 \quad (\text{A.67})$$

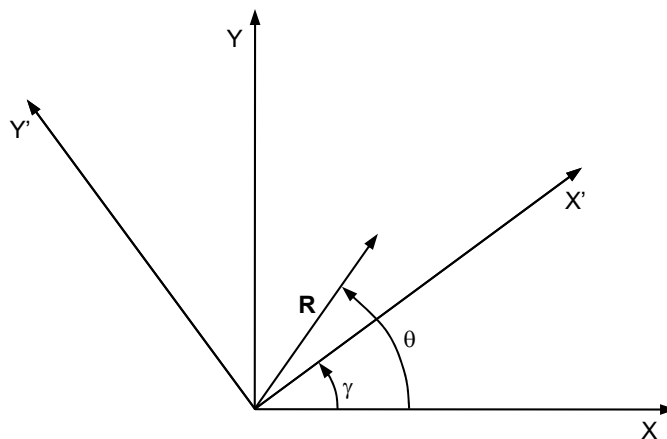


Figura A.13 – Rotação de um vector.

A.5.6. Diferenciação Vectorial

Se o vector \mathbf{A} variar em módulo e em direcção ao longo do tempo, então a derivada de \mathbf{A} em ordem ao tempo é dada por,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} \quad (\text{A.68})$$

onde Δt representa o incremento de tempo.

Considerando que os vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} e o escalar s são funções que variam com o tempo, então, quando incluídos em expressões vectoriais, a sua diferenciação obedece às seguintes regras,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (\text{A.69})$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} \quad (\text{A.70})$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{A.71})$$

$$\frac{d}{dt}(s\mathbf{A}) = s \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{ds}{dt} \mathbf{A} \quad (\text{A.72})$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{C}}{dt}) + \mathbf{A} \times (\frac{d\mathbf{B}}{dt} \times \mathbf{C}) + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \quad (\text{A.73})$$

Atendendo a que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$, então a ordem pela qual os vectores surgem no produto vectorial não pode ser alterada na diferenciação de vectores quando envolve produtos vectoriais. A derivada dos vectores unitários relativos a um sistema de coordenadas fixo é nula, em virtude de, nem o módulo, nem a direcção variarem ao longo do tempo. Contudo, a derivada dos vectores unitários associados a um sistema de coordenadas móvel não é nula. Quando os vectores são expressos em termos das suas componentes cartesianas, a derivada em ordem ao tempo é obtida pela derivação parcial de cada uma das suas componentes.

Considerando \mathbf{A} um vector que varia com o tempo tal que,

$$\mathbf{A} = f(t) \quad (\text{A.74})$$

então a derivada⁴⁶ de \mathbf{A} em ordem ao tempo pode ser representada por,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt} f(t) = \dot{\mathbf{A}} \quad (\text{A.75})$$

De modo análogo, a segunda derivada do vector \mathbf{A} é representada por,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = \ddot{\mathbf{A}} \quad (\text{A.76})$$

⁴⁶ A notação \dot{x} , abreviatura de dx/dt , foi original e primeiramente empregue por Newton para o quociente de duas quaisquer derivadas. Actualmente, significa sempre a derivação da variável x em ordem ao tempo e nunca em relação a uma outra variável qualquer.

A.6. RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES VECTORIAIS

A.6.1. Equações Vectoriais

Considerando os vectores **A**, **B**, **C** e **D** dados pelas suas componentes cartesianas, então a equação vectorial,

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \quad (\text{A.77})$$

pode ser escrita como,

$$d^x \hat{\mathbf{i}} + d^y \hat{\mathbf{j}} + d^z \hat{\mathbf{k}} = (a^x + b^x + c^x) \hat{\mathbf{i}} + (a^y + b^y + c^y) \hat{\mathbf{j}} + (a^z + b^z + c^z) \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{A.78})$$

a qual, por sua vez, origina o seguinte sistema de equações escalares,

$$\begin{cases} d^x = a^x + b^x + c^x \\ d^y = a^y + b^y + c^y \\ d^z = a^z + b^z + c^z \end{cases} \quad (\text{A.79})$$

O sistema dado pela equação (A.79) é passível de ser resolvido para um qualquer conjunto de três incógnitas, entre os módulos e as direcções dos vectores envolvidos. Por exemplo, a equação (A.79) pode ser resolvida para determinar d^x , d^y e d^z se as componentes dos restantes vectores forem conhecidas. Deve notar-se que para outras combinações, o sistema de equações que se obtém é altamente não linear, sendo, por isso, necessário recorrer aos métodos numéricos iterativos.

No espaço bidimensional, como é evidente, a resolução de equações vectoriais apenas pode ser levada a cabo para duas incógnitas, duas magnitudes, duas direcções ou a combinação de uma magnitude com uma direcção.

É conveniente, por vezes, indicar se as variáveis são conhecidas (v) ou não (o), utilizando para o efeito o respectivo símbolo superior à linha em cada vector, como por exemplo, na seguinte equação,

$$\overset{ov}{\mathbf{C}} = \overset{vv}{\mathbf{A}} + \overset{vo}{\mathbf{B}} \quad (\text{A.80})$$

em que o primeiro símbolo se refere à magnitude e o segundo à direcção.

Na resolução da equação vectorial $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$, quatro diferentes situações podem ocorrer, a saber:

- A magnitude e a direcção do mesmo vector são desconhecidas, *e.g.*, c e $\hat{\mathbf{c}}$;
- As magnitudes de dois vectores diferentes são desconhecidas, *e.g.*, a e b ;
- A magnitude de um vector e a direcção de outro são desconhecidas, *e.g.*, a e $\hat{\mathbf{b}}$;
- As direcções de dois vectores diferentes são desconhecidas, *e.g.*, $\hat{\mathbf{a}}$ e $\hat{\mathbf{b}}$.

A.6.2. Solução Gráfica

Um das metodologias utilizadas na resolução de equações vectoriais baseia-se na construção ou solução gráfica. De seguida, são apresentadas as soluções gráficas relativas a cada uma das situações descritas na secção anterior.

No caso em que a magnitude e a direcção do mesmo vector são desconhecidas, a equação vectorial (A.80) pode ser fácil resolvida recorrendo aos conceitos de adição e subtracção dos restantes vectores, cujas características são *a priori* conhecidas. Este assunto foi abordado na secção A.5.1., e resume-se na figura A.14.

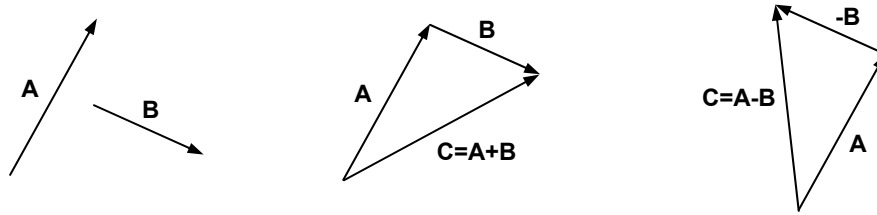


Figura A.14 – Adição e subtração de vectores.

Na situação em que as magnitudes de dois vectores diferentes são desconhecidas, a equação vectorial pode ser escrita como,

$$\overset{vv}{\mathbf{C}} = \overset{ov}{\mathbf{A}} + \overset{ov}{\mathbf{B}} \quad (\text{A.81})$$

Os passos concernentes à resolução gráfica da equação (A.81) estão ilustrados na figura A.15 e podem resumir-se do seguinte modo,

- Escolher um sistema de coordenadas;
- Definir uma escala de desenho;
- Desenhar o vector **C**;
- Construir um segmento de recta a partir da origem do vector **C** e paralelo à direcção do vector **A**;
- Construir outro segmento de recta a partir do fim do vector **C** e paralelo à direcção do vector **B**;
- Intersectar os dois segmentos de recta anteriormente desenhados, resultando daí as magnitudes dos vectores **A** e **B**.

Deve notar-se que a equação (A.81) tem solução única, exceptuando o caso em que os vectores **A** e **B** são colineares. Quando os vectores **A** e **B** são paralelos, as suas magnitudes são infinitas.

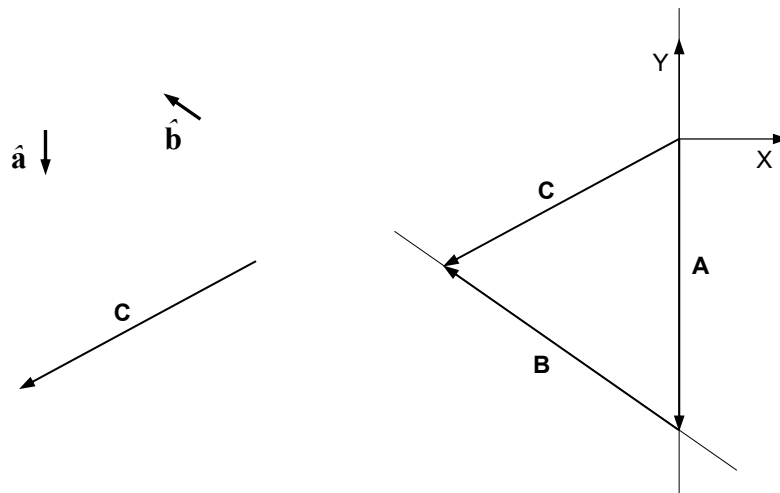


Figura A.15 – Solução gráfica de equações vectoriais em que as magnitudes de dois vectores diferentes são desconhecidas.

Na situação em que a magnitude de um vector e a direcção de outro são as incógnitas, a equação vectorial é escrita como,

$$\overset{vv}{\mathbf{C}} = \overset{ov}{\mathbf{A}} + \overset{vo}{\mathbf{B}} \quad (\text{A.82})$$

A solução gráfica da equação (A.82), ilustrada na figura A.16, é resumida nos passos que em seguida são apresentados,

- Escolher um sistema de coordenadas;
- Definir uma escala de desenho;
- Desenhar o vector **C**;
- Construir um segmento de recta a partir da origem do vector **C** e paralelo à direcção do vector **A**;
- Ajustar o compasso à magnitude do vector **B** e desenhar, com centro no fim do vector **C**, um arco de circunferência;
- Intersectar o segmento de recta com o arco de circunferência anteriormente desenhado, donde resultam duas soluções possíveis, a saber, $(a, \hat{\mathbf{b}})$ e $(a', \hat{\mathbf{b}}')$.

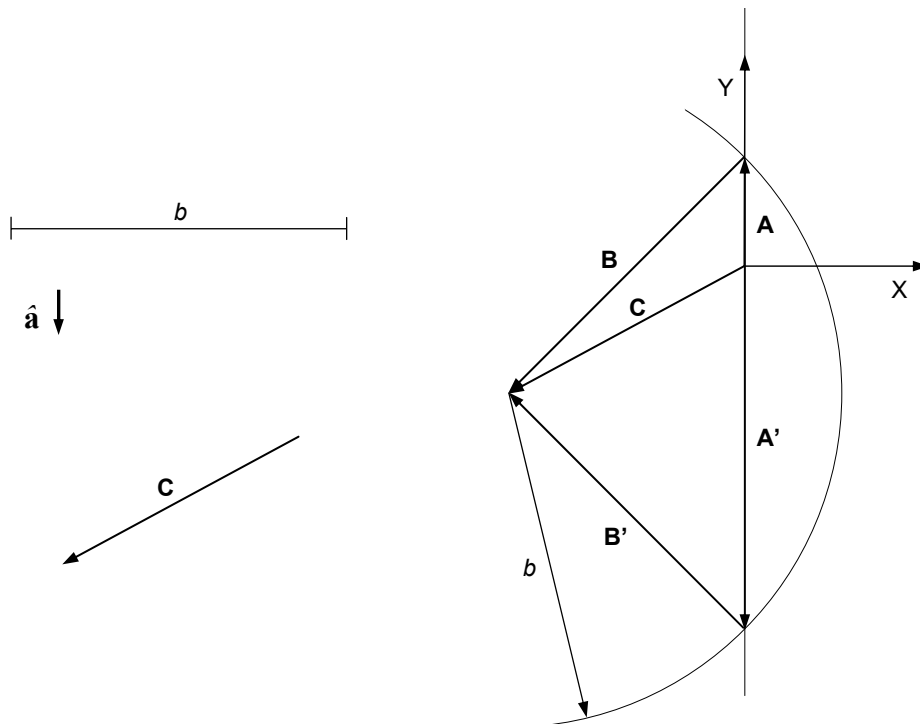


Figura A.16 – Solução gráfica de equações vectoriais em que a magnitude de um vector e a direcção de outro são desconhecidas.

Finalmente, no caso em que as direcções de dois vectores diferentes são desconhecidas, a equação vectorial é dada por,

$$\overset{vw}{\mathbf{C}} = \overset{vo}{\mathbf{A}} + \overset{vo}{\mathbf{B}} \quad (\text{A.83})$$

Os passos correspondentes à solução gráfica da equação (A.83) estão ilustrados na figura A.17 e podem ser resumidos do seguinte modo,

- Escolher um sistema de coordenadas;
- Definir uma escala de desenho;
- Desenhar o vector **C**;
- Construir um arco de circunferência de raio a e centrado na origem do vector **C**;
- Construir outro arco de circunferência de raio b e centrado no fim do vector **C**;
- Intersectar os dois arcos de circunferência anteriormente desenhados, resultando duas soluções distintas, a saber, $(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$ e $(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}')$.

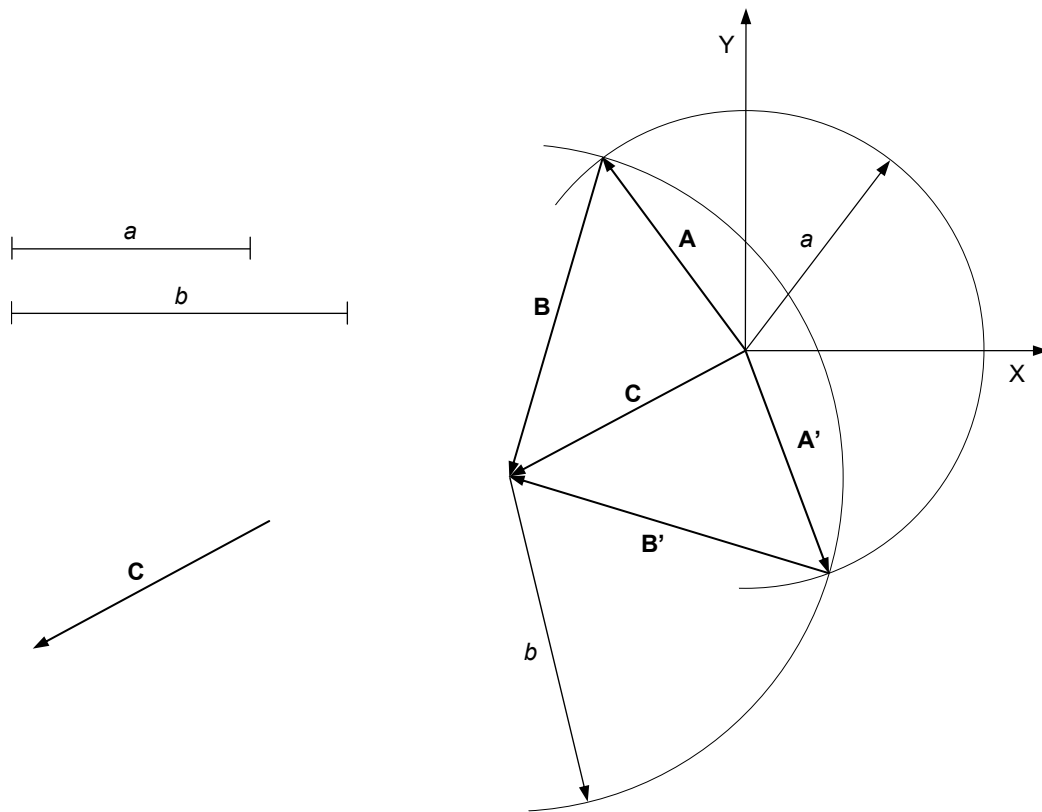


Figura A.17 – Solução gráfica de equações vectoriais em que as direcções de dois vectores diferentes são desconhecidas.

A.6.3. Solução Analítica

Nesta secção é apresentada a resolução analítica de equações vectoriais utilizando a notação complexa. Com efeito, em notação complexa a equação vectorial $C=A+B$ pode ser escrita do seguinte modo,

$$ce^{i\theta_C} = ae^{i\theta_A} + be^{i\theta_B} \quad (\text{A.84})$$

De seguida, são apresentadas e discutidas as soluções analíticas correspondentes às quatro situações abordadas na secção anterior. Assim, para o caso em que a magnitude e a direcção do mesmo vector são desconhecidas, como, por exemplo, c e θ_C , com base na equação de Euler para a trigonometria, a equação (A.84) pode ser reescrita do seguinte modo,

$$c(\cos\theta_C + isen\theta_C) = a(\cos\theta_A + isen\theta_A) + b(\cos\theta_B + isen\theta_B) \quad (\text{A.85})$$

Separando as partes real e imaginária vem que,

$$c \cos\theta_C = a \cos\theta_A + b \cos\theta_B \quad (\text{A.86})$$

$$c \text{sen}\theta_C = a \text{sen}\theta_A + b \text{sen}\theta_B \quad (\text{A.87})$$

Elevando ao quadrado as equações (A.86) e (A.87), igualando o resultado, eliminando a variável θ_C , e resolvendo em ordem a c resulta em,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(\theta_B - \theta_A)} \quad (\text{A.88})$$

O valor do ângulo θ_C pode ser obtido dividindo a equação (A.87) pela equação (A.86), e eliminando a variável c , vem que,

$$\theta_C = \text{arctg} \frac{a \text{sen} \theta_A + b \text{sen} \theta_B}{a \cos \theta_A + b \cos \theta_B} \quad (\text{A.89})$$

No caso em que as duas incógnitas da equação vectorial são as magnitudes de **A** e **B**, deve começar-se por dividir a equação (A.84) por $e^{i\theta_A}$, resultando em,

$$c e^{i(\theta_C - \theta_A)} = a + b e^{i(\theta_B - \theta_A)} \quad (\text{A.90})$$

Deve notar-se que a divisão de equações polares complexas pelo vector unitário $e^{i\theta_A}$ tem o efeito de rodar os eixos real e imaginário de um ângulo θ_A tal que o eixo real fica alinhado com o vector **A**, como se demonstra na figura A.18.

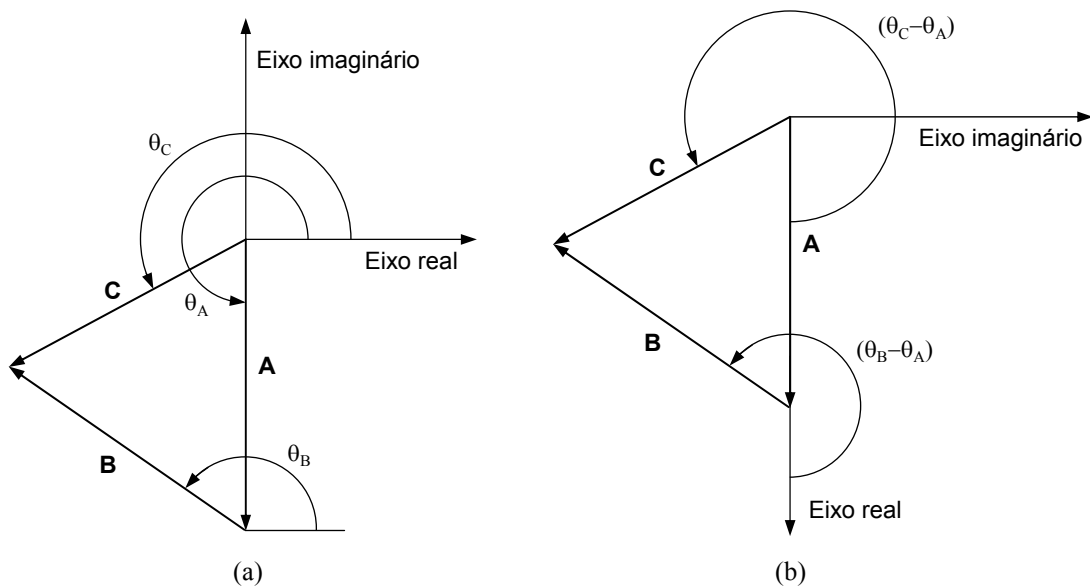


Figura A.18 – Rotação de eixos resultante da divisão de uma equação polar complexa por $e^{i\theta_A}$: (a) Eixos originais; (b) Eixos rodados.

Separando as partes real e imaginária da equação (A.90) vem que,

$$c \cos(\theta_C - \theta_A) = a + b \cos(\theta_B - \theta_A) \quad (\text{A.91})$$

$$c \text{sen}(\theta_C - \theta_A) = b \text{sen}(\theta_B - \theta_A) \quad (\text{A.92})$$

Da equação (A.92) obtém-se a magnitude do vector **B**,

$$b = c \frac{\text{sen}(\theta_C - \theta_A)}{\text{sen}(\theta_B - \theta_A)} \quad (\text{A.93})$$

O valor da magnitude do vector **A** pode ser determinado de forma idêntica, isto é, dividindo a equação (A.84) por $e^{i\theta_B}$, significando, por isso, alinhar o eixo real com o vector **B** e, conseqüentemente, vem que,

$$a = c \frac{\text{sen}(\theta_C - \theta_B)}{\text{sen}(\theta_A - \theta_B)} \quad (\text{A.94})$$

Na situação em que as incógnitas são a magnitude do vector **A** e a direcção do vector **B**, deve começar-se por alinhar o eixo real com o vector **A**, e separando as partes real e imaginária resultam novamente as equações (A.91) e (A.92), obtendo-se as seguintes soluções para θ_B e a ,

$$\theta_B = \theta_A + \arcsen \frac{c \sen(\theta_C - \theta_A)}{b} \quad (\text{A.95})$$

$$a = c \cos(\theta_C - \theta_A) - b \cos(\theta_B - \theta_A) \quad (\text{A.96})$$

Atendendo a que a função arcoseno tem solução dupla, na presente situação resultam duas soluções distintas, ou seja, (a, θ_B) e (a', θ_B') .

Finalmente, no caso em que as incógnitas são as direcções dos vectores **A** e **B**, isto é, θ_A e θ_B , deve alinhar-se o eixo real com o vector **C**,

$$c = a e^{i(\theta_A - \theta_C)} + b e^{i(\theta_B - \theta_C)} \quad (\text{A.97})$$

Separando as partes real e imaginária e rearranjando os termos resulta em,

$$a \cos(\theta_A - \theta_C) = c - b \cos(\theta_B - \theta_C) \quad (\text{A.98})$$

$$a \sen(\theta_A - \theta_C) = -b \sen(\theta_B - \theta_C) \quad (\text{A.99})$$

Elevando ao quadrado ambas as equações e adicionando o resultado, vem que,

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos(\theta_B - \theta_C) \quad (\text{A.100})$$

Esta equação traduz a lei dos cosenos para um triângulo, a qual é resolvida para θ_B originando,

$$\theta_B = \theta_C \mp \arccos \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} \quad (\text{A.101})$$

De modo análogo, mudando c para o primeiro membro da equação (A.98) antes de elevar ao quadrado e de adicionar, resultando em,

$$\theta_A = \theta_C \pm \arccos \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \quad (\text{A.102})$$

Os sinais mais-ou-menos nas equações (A.101) e (A.102) resultam do facto da função arcocoseno ter solução dupla e, por conseguinte, θ_A e θ_B têm também duas soluções distintas, a saber (θ_A, θ_B) e (θ_A', θ_B') .

A.6.4. Solução de Chace

A resolução de equações vectoriais utilizando os métodos gráficos e analíticos, embora sejam metodologias simples, são de difícil utilização, bastante laboriosa e de limitada aplicação e generalização à prática da cinemática de mecanismos. A utilização de álgebra vectorial é, sem dúvida, uma alternativa extremamente interessante para este tipo de problemas. Chace⁴⁷ foi pioneiro na utilização da análise vectorial para obter soluções explícitas de equações vectoriais. Nesta secção são

⁴⁷ Chace, um dos gurus na análise e síntese de mecanismos, desenvolveu a sua actividade docente e de investigação na Universidade de Michigan.

apresentadas as soluções de Chace para equações vectoriais relativas aos quatro casos descritos anteriormente. Assim, no caso em que a magnitude e a direcção do mesmo vector são as incógnitas, a equação vectorial pode ser escrita como,

$$\overset{oo}{\mathbf{C}} = \overset{vv}{\mathbf{A}} + \overset{vv}{\mathbf{B}} \quad (\text{A.103})$$

A solução é trivial e é dada por,

$$\mathbf{C} = (a^x + b^x)\hat{\mathbf{i}} + (a^y + b^y)\hat{\mathbf{j}} \quad (\text{A.104})$$

No caso em que as magnitudes de dois vectores diferentes são desconhecidas, a equação vectorial é escrita como,

$$\overset{vv}{\mathbf{C}} = \overset{ov}{\mathbf{A}} + \overset{ov}{\mathbf{B}} \quad (\text{A.105})$$

ou ainda,

$$\overset{vv}{c\hat{\mathbf{c}}} = a\overset{ov}{\hat{\mathbf{a}}} + b\overset{ov}{\hat{\mathbf{b}}} \quad (\text{A.106})$$

A solução de Chace para este caso baseia-se na eliminação de uma das incógnitas através do produto interno da equação (A.106) por um vector adequadamente escolhido. Com efeito, por exemplo, o vector \mathbf{B} pode ser eliminado se o vector $\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{k}}$ for escolhido para efectuar o produto interno, resultando da equação (A.106),

$$c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{k}}) = a\hat{\mathbf{a}} \cdot (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{k}}) + b\hat{\mathbf{b}} \cdot (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{k}}) \quad (\text{A.107})$$

Como os vectores $\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{k}}$ e $\hat{\mathbf{b}}$ são perpendiculares, da equação (A.107) vem que,

$$a = \frac{c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{k}})}{\hat{\mathbf{a}} \cdot (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{k}})} \quad (\text{A.108})$$

De modo análogo, a solução para a magnitude do vector \mathbf{B} é dada por,

$$b = \frac{c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})}{\hat{\mathbf{b}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})} \quad (\text{A.109})$$

Na situação em que as incógnitas são a magnitude de um vector e a direcção de outro, a equação vectorial pode ser escrita como,

$$\overset{vv}{\mathbf{C}} = \overset{ov}{\mathbf{A}} + \overset{vo}{\mathbf{B}} \quad (\text{A.110})$$

ou ainda

$$\overset{vv}{c\hat{\mathbf{c}}} = a\overset{ov}{\hat{\mathbf{a}}} + \overset{vo}{b\hat{\mathbf{b}}} \quad (\text{A.111})$$

Para este caso, Chace sugere começar pela eliminação da magnitude do vector \mathbf{A} , para tal deve escolher-se o vector $\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}$ para efectuar o produto interno com a equação (A.111), resultando em,

$$c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}) = b\hat{\mathbf{b}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}) \quad (\text{A.112})$$

Por definição, o produto interno de dois vectores, \mathbf{R} e \mathbf{S} , é dado por,

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{S} = rscos\theta \quad (\text{A.113})$$

então, o segundo membro da equação (A.112) pode ser reescrito como,

$$b\hat{\mathbf{b}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}) = b |\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}| \cos\theta \quad (\text{A.114})$$

Por outro lado, como $|\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}| = 1$, a equação (A.114) resulta em,

$$b\hat{\mathbf{b}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}) = b \cos\theta \quad (\text{A.115})$$

em que θ representa o ângulo formado pelos vectores \mathbf{B} e $\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}$, e, por conseguinte,

$$\cos\theta = \hat{\mathbf{b}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}) \quad (\text{A.116})$$

Como os vectores $\hat{\mathbf{a}}$ e $\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}$ são perpendiculares entre si, pode definir-se um sistema de coordenadas UV , em que os respectivos vectores unitários são dados por,

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{A.117})$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{a}} \quad (\text{A.118})$$

Neste novo sistema de coordenadas, o vector unitário $\hat{\mathbf{b}}$ pode ser escrito como,

$$\hat{\mathbf{b}} = \cos\theta(\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}) + \sin\theta\hat{\mathbf{a}} \quad (\text{A.119})$$

Por outro lado, substituindo a equação (A.116) em (A.112) vem que,

$$\cos\theta = \frac{c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})}{b} \quad (\text{A.120})$$

Pela lei fundamental da trigonometria tem-se que,

$$\sin\theta = \pm \frac{1}{b} \sqrt{b^2 - [c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})]^2} \quad (\text{A.121})$$

Substituindo as equações (A.120) e (A.121) na equação (A.119), e multiplicando ambos os membros por b , resulta que,

$$b\hat{\mathbf{b}} = [c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})](\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}) \pm \sqrt{b^2 - [c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})]^2} \hat{\mathbf{a}} \quad (\text{A.122})$$

O vector \mathbf{A} pode obter-se directamente da equação (A.111), fazendo a subtracção de vectores. Em alternativa, pode substituir-se a equação (A.122) em (A.111) resultando em,

$$a\hat{\mathbf{a}} = c\hat{\mathbf{c}} - [c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})](\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}) \pm \sqrt{b^2 - [c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})]^2} \hat{\mathbf{a}} \quad (\text{A.123})$$

Com referência à figura A.19, os dois primeiros termos do segundo membro da equação (A.123) podem ser simplificados. Ainda na mesma figura, a direcção $\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}$ está rodada 90° no sentido horário relativamente à direcção $\hat{\mathbf{a}}$. Assim, a magnitude $c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})$ é dada pela projecção de \mathbf{C} na direcção $\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}$. Por isso, quando $[c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})](\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})$ é subtraída ao vector \mathbf{C} , o resultado é a magnitude $c\hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\mathbf{a}}$ na direcção $\hat{\mathbf{a}}$. Pelo que se acaba de expor, a equação (A.123) pode ser simplificada e escrita como,

$$a\hat{\mathbf{a}} = [c\hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\mathbf{a}} \mp \sqrt{b^2 - [c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})]^2}] \hat{\mathbf{a}} \quad (\text{A.124})$$

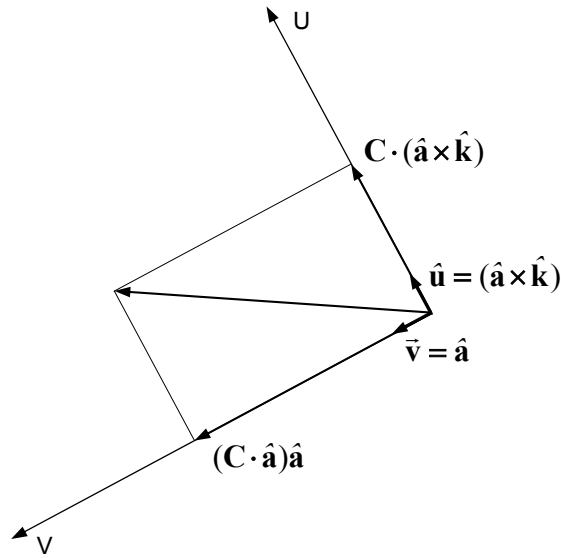


Figura A.19 – Sistema de coordenadas auxiliar usado na resolução de equações vectoriais.

Finalmente, no caso em que duas direcções de dois vectores diferentes são desconhecidas, a respectiva equação vectorial pode ser escrita como,

$$\overset{vw}{\mathbf{C}} = \overset{vo}{\mathbf{A}} + \overset{vo}{\mathbf{B}} \quad (\text{A.125})$$

ou ainda,

$$\overset{vw}{c\hat{\mathbf{c}}} = a\overset{vo}{\hat{\mathbf{a}}} + b\overset{vo}{\hat{\mathbf{b}}} \quad (\text{A.126})$$

A solução para este caso está ilustrada na figura A.20, onde a vector \mathbf{C} e as magnitudes a e b são conhecidos. Assim, a solução deste problema consiste em determinar os pontos de intersecção dos dois arcos de circunferência de raios a e b . Deve começar-se por definir um sistema de coordenadas UV , cujas direcções dos eixos são dados por,

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{c}} \times \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{A.127})$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{c}} \quad (\text{A.128})$$

Se as coordenadas de um dos pontos de intersecção dos arcos de circunferência, no sistema de coordenadas UV , forem s e t , então,

$$a\hat{\mathbf{a}} = s\hat{\mathbf{u}} + t\hat{\mathbf{v}} \quad (\text{A.129})$$

$$b\hat{\mathbf{b}} = -s\hat{\mathbf{u}} + (c - t)\hat{\mathbf{v}} \quad (\text{A.130})$$

Por um lado, a equação da circunferência de raio a é dada por,

$$s^2 + t^2 = a^2 \quad (\text{A.131})$$

Por outro lado, a circunferência de raio b tem a equação,

$$s^2 + (t - c)^2 = b^2 \quad (\text{A.132})$$

ou

$$s^2 + t^2 - 2ct + c^2 = b^2 \quad (\text{A.133})$$

Substituindo a equação (A.133) em (A.131) e resolvendo em ordem a t vem que,

$$t = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} \quad (\text{A.134})$$

Por outro lado, substituindo a equação (A.134) em (A.131) e resolvendo em ordem a s resulta em,

$$s = \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} \right)^2} \quad (\text{A.135})$$

O último passo a dar no sentido de encontrar a solução para $\hat{\mathbf{a}}$ e $\hat{\mathbf{b}}$ consiste em substituir as equações (A.134) e (A.135) em (A.129) e (A.130), e substituindo também os valores de $\hat{\mathbf{u}}$ e $\hat{\mathbf{v}}$ de acordo com as suas definições, resultando em,

$$a\hat{\mathbf{a}} = \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} \right)^2} (\hat{\mathbf{c}} \times \hat{\mathbf{k}}) + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} \hat{\mathbf{c}} \quad (\text{A.136})$$

$$b\hat{\mathbf{b}} = \mp \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} \right)^2} (\hat{\mathbf{c}} \times \hat{\mathbf{k}}) + \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c} \hat{\mathbf{c}} \quad (\text{A.137})$$

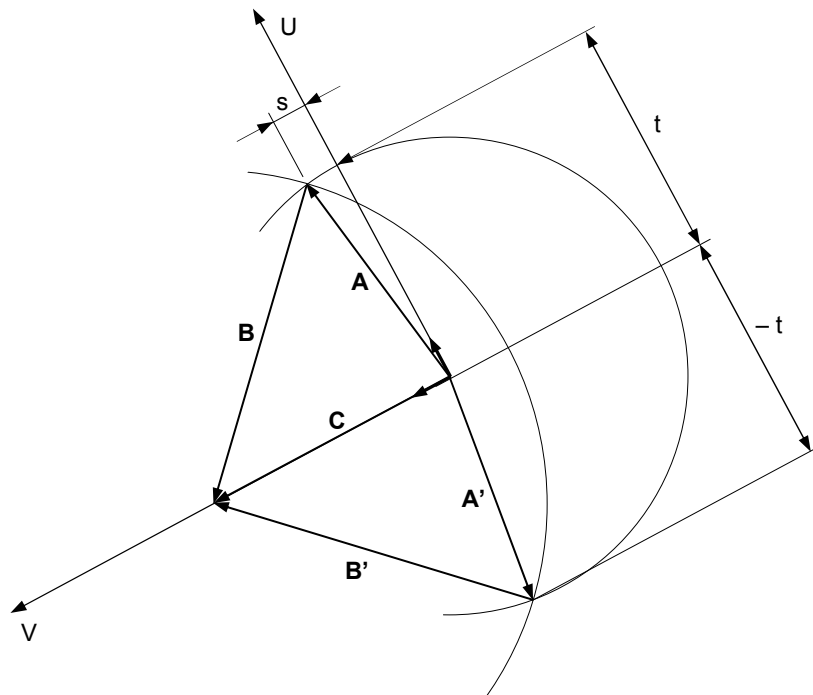


Figura A.20 – Sistema de eixos auxiliar usado na resolução de equações vectoriais em que duas direcções de dois vectores diferentes são desconhecidas.

*I really hate this damned machine; I wish that they would sell it.
It never does quite what I want but only what I tell it.*

In Fortune Database, Berkeley Unix

ANEXO B – CENTROS INSTANTÂNEOS DE ROTAÇÃO

B.1. DEFINIÇÃO

Quando um corpo roda no espaço tridimensional em relação a outro corpo pode considerar-se a existência de um eixo comum de rotação, cuja posição relativamente aos dois corpos pode ou não variar de instante para instante. A estes eixos dá-se o nome de eixos instantâneos de rotação. Em movimentos planos, os eixos instantâneos de rotação são sempre perpendiculares ao plano do movimento e intersectam os corpos num ponto que se denomina centro instantâneo de rotação⁴⁸ (CIR).

Com efeito, centro instantâneo de rotação pode ser definido como sendo *o local instantâneo de um par de pontos coincidentes e pertencentes a corpos diferentes, para os quais a velocidade absoluta é igual*. De outro modo, o conceito de centro instantâneo de rotação pode ser enunciado como sendo *o local de um par de pontos coincidentes de dois corpos diferentes, para os quais a velocidade aparente de um dos pontos é nula quando o observador se situa no outro corpo, ou seja, é nula a velocidade relativa dos dois pontos*. Como consequência, no instante considerado, existe apenas movimento puro de rotação entre os dois corpos em torno do centro instantâneo de rotação.

Em suma, um centro instantâneo de rotação é um ponto comum a dois corpos, é um ponto para o qual não existe velocidade relativa, e é um ponto de um corpo em relação ao qual o corpo roda relativamente a outro corpo. Assim, por exemplo, dois corpos constrangidos por uma junta cinemática de rotação têm um centro instantâneo de rotação que coincide com o centro geométrico da junta, como se ilustra na figura B.1. O centro instantâneo de rotação O_{23} (leia-se centro *ó-dois-três*) é o ponto comum aos corpos 2 e 3, e é, no instante considerado, o ponto do corpo 2 em relação ao qual o corpo 3 roda. As designações O_{23} e O_{32} são equivalentes, isto é, referem-se ao mesmo centro instantâneo de rotação.

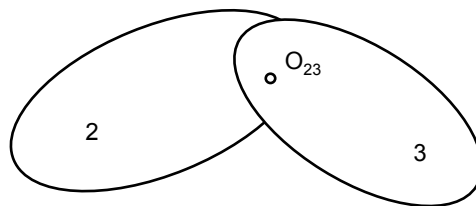


Figura B.1 – Exemplo de um centro instantâneo de rotação: junta de rotação.

⁴⁸ Durley chama aos centros instantâneos de rotação centros virtuais ou centroides. Outros autores usam ainda as designações centros instantâneos de velocidade, pólos ou simplesmente centros.

B.2. PROPRIEDADES DOS CENTROS INSTANTÂNEOS DE ROTAÇÃO

Sabe-se que a velocidade de um ponto de um corpo rígido⁴⁹ relativamente a outro ponto do mesmo corpo tem a direcção perpendicular ao segmento de recta que une os dois pontos considerados. Este teorema pode ser demonstrado recorrendo ao método de redução ao absurdo, *i.e.*, provando que a velocidade relativa de dois pontos de um corpo rígido não pode ter componente segundo a direcção do segmento que os une.

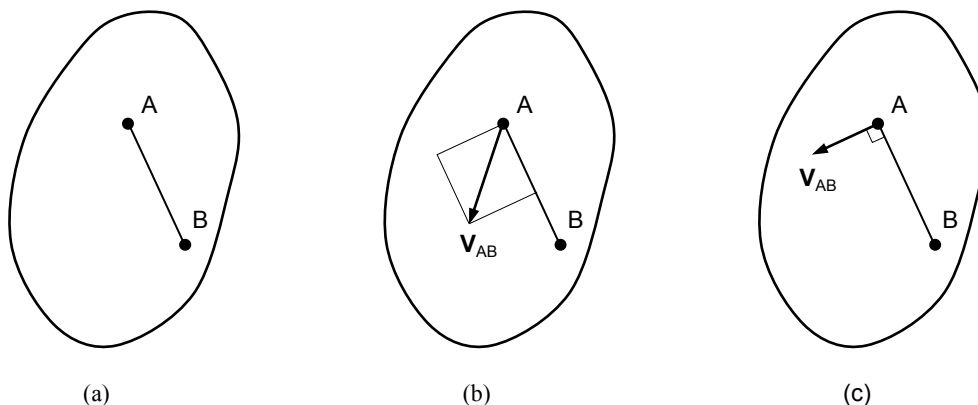


Figura B.2 – A direcção da velocidade relativa entre dois pontos de um corpo rígido é sempre perpendicular ao segmento que os une.

Na figura B.2a está representado um corpo rígido no qual se consideram os pontos A e B . Admitindo que a velocidade de A em relação a B , ou seja, V_{AB} , é tal como se ilustra na figura B.2b. Assim, esta velocidade pode ser decomposta em duas direcções perpendiculares entre si, sendo uma delas a direcção do segmento de recta que une os pontos A e B . Todavia, como esta última componente não é nula significa que os pontos A e B se estão a aproximar (ou a afastar), o que é contrário ao conceito de corpo rígido. Com efeito, a velocidade relativa entre A e B não pode ter componente segundo a direcção do segmento que une estes dois pontos, mas sim, e apenas, segunda a sua perpendicular, como se ilustra na figura B.2c.

Considerando, agora, os corpos 1 e 2 representados na figura B.3, em que o corpo 2 está fixo e o corpo 1 se move no plano em relação ao corpo 2. Os pontos A e B , pertencentes ao corpo 1, têm velocidades V_A e V_B , respectivamente. Considerando ainda as rectas op e qr , que passam pela origem dos vectores das velocidades V_A e V_B , e são perpendiculares às respectivas linhas de acção, então todos os pontos pertencentes a op , em relação ao corpo 2, têm velocidades cujos vectores são perpendiculares a op . O mesmo acontece ao ponto I de intersecção das duas rectas.

Do mesmo modo, todos os pontos pertencentes à recta qr têm velocidades cujos vectores são perpendiculares a qr . O mesmo sucedendo ao ponto I . Contudo, como as velocidades dos pontos A e B são absolutas, uma vez que o corpo 2 está fixo, o ponto I teria velocidade segundo duas direcções distintas, o que é de todo impossível atendendo ao conceito de corpo rígido. Conclui-se, portanto, que a velocidade do ponto I tem de ser nula, ou seja, é o ponto do corpo 2 em torno do qual o corpo 1 roda. Este ponto é, por definição, o centro instantâneo de rotação dos dois corpos.

⁴⁹ Deve referir-se que num corpo rígido ou inelástico as distâncias entre os seus pontos permanecem constantes quando sujeito à acção de uma acção exterior. Um corpo rígido conserva, portanto, a forma e a dimensão durante o movimento.

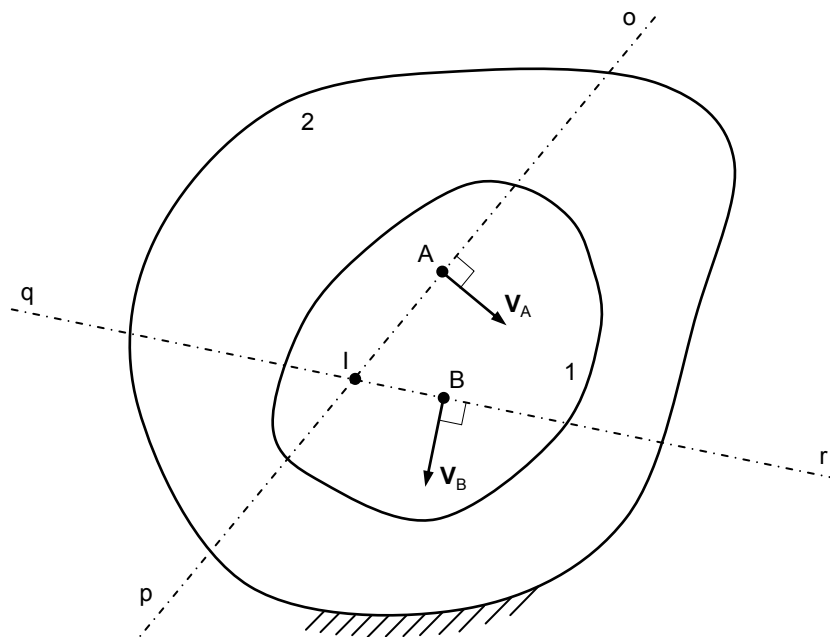


Figura B.3 – Centro instantâneo de rotação de dois corpos rígidos em movimento relativo.

A análise é em tudo semelhante no caso de nenhum dos corpos ser fixo. Nesta situação, no entanto, o centro instantâneo de rotação seria o ponto em torno do qual ambos os corpos não teriam movimento relativo.

Com efeito, de acordo com o que acaba de ser exposto podem tirar-se as seguintes conclusões relativamente aos centros instantâneos de rotação:

- Centro instantâneo de rotação é um ponto de um corpo em torno do qual roda outro corpo;
- Um centro instantâneo de rotação tem a mesma velocidade, quer se considere como pertencente a um ou outro corpo;
- O conhecimento da localização do centro instantâneo de rotação permite calcular imediatamente a velocidade de qualquer ponto do corpo;
- Inversamente, conhecidas as velocidades de dois quaisquer pontos de um corpo, a localização do centro instantâneo de rotação é determinada pela intersecção das rectas normais aos vectores velocidade desses mesmos pontos e que passam pela origem dos vectores.

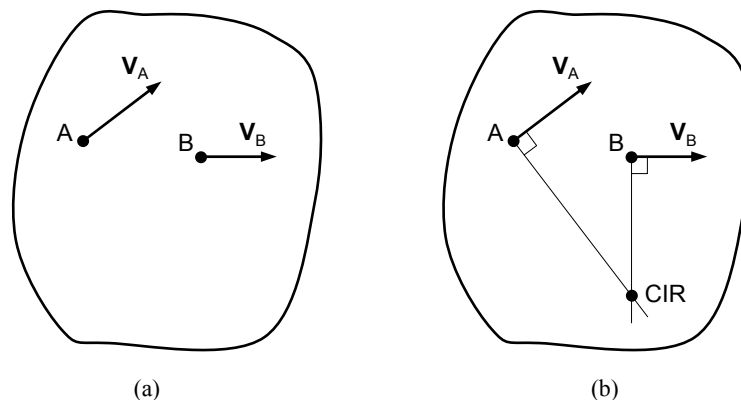


Figura B.4 – Localização do centro instantâneo de rotação de um corpo em movimento, sendo conhecidas as velocidades de dois dos seus pontos.

Quando as velocidades de dois pontos de um corpo rígido são conhecidas, então a localização do centro instantâneo de rotação obtém-se pela intersecção das rectas tiradas perpendicularmente a cada um dos vectores, como se ilustra na figura B.4.

Quando as velocidades têm a mesma direcção, isto é, os vectores \mathbf{V}_A e \mathbf{V}_B são paralelos, a localização do centro instantâneo de rotação depende do módulo das velocidades. Assim, se as velocidades forem diferentes em módulo, o centro instantâneo de rotação situa-se na intersecção da normal comum desenhada a partir dos dois vectores velocidade, com a recta que passa pelos *terminus* dos vectores velocidade, como se ilustra na figura B.5.

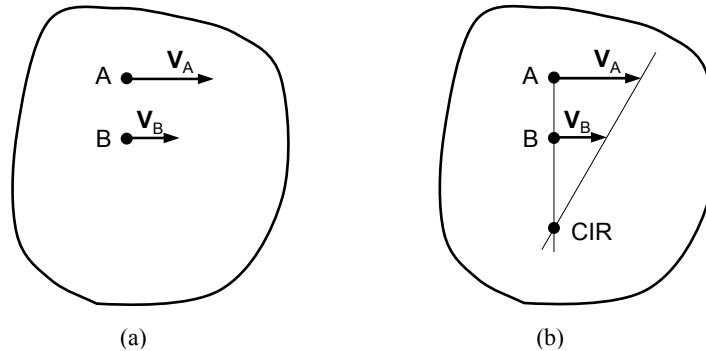


Figura B.5 – Localização do centro instantâneo de rotação de um corpo em movimento, sendo paralelas as direcções das velocidades de dois dos seus pontos.

Quando as velocidades têm a mesma direcção e o mesmo módulo, a localização do centro instantâneo de rotação está situada no infinito, significando que o corpo não descreve um movimento de rotação, mas sim um movimento de translação, como o que se representa na figura B.6.

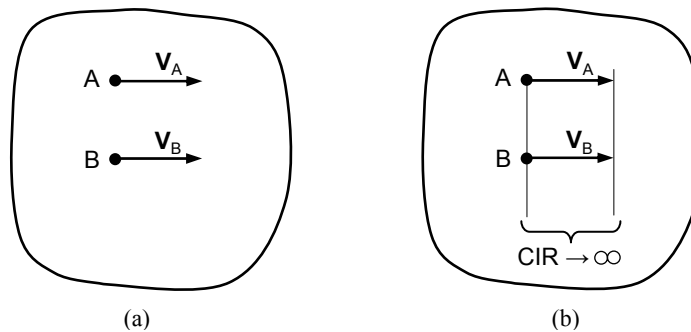


Figura B.6 – Localização do centro instantâneo de rotação de um corpo em movimento, sendo as velocidades de dois dos seus pontos iguais em módulo e direcção.

B.3. MOVIMENTO PURO DE ROTAÇÃO

Pelo que foi apresentado anteriormente, pode observar-se que utilizando o conceito de centro instantâneos de rotação, qualquer movimento geral ou misto pode ser considerado como sendo um movimento puro de rotação em cada instante, daí se torna evidente a importância dos centros instantâneos de rotação. A possibilidade de descrever um qualquer movimento como sendo um movimento puro de rotação simplifica sobremaneira a análise cinemática de mecanismos, quer os mais simples, quer os mais complexos. Com efeito, a chave do sucesso na utilização do conceito de centro instantâneo de rotação na cinemática de mecanismos passa, em primeiro lugar, pela sua localização e, posteriormente, pelo correcto cálculo de velocidades.

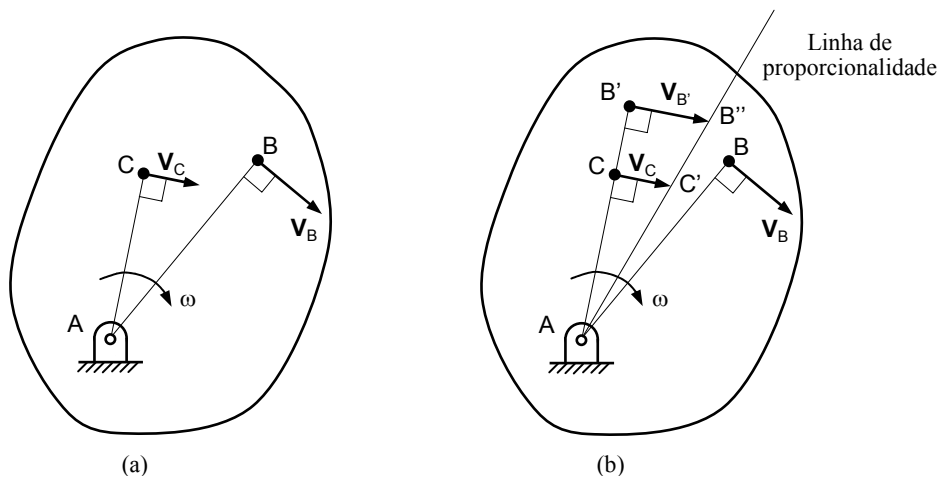


Figura B.7 – Velocidades de pontos que pertencem a um corpo em movimento de rotação.

Com o intuito de compreender aprofundadamente o conceito de centro instantâneo de rotação, é necessário, em primeiro lugar, considerar alguns princípios básicos associados ao movimento puro de rotação. Assim, para um corpo rígido em rotação, a velocidade de um qualquer dos seus pontos é tangente à trajectória descrita por esse ponto e tem o mesmo sentido que o sentido de rotação do corpo. Considerando, por exemplo, o ponto B do corpo ilustrado na figura B.7a, se o ponto A for o eixo de rotação do corpo, sabe-se que a velocidade do ponto B é dada por,

$$v_B = \omega AB \quad (\text{B.1})$$

em que ω é a velocidade angular do corpo e AB é o raio de rotação do ponto B . Então, a velocidade angular do corpo pode ser expressa como,

$$\omega = \frac{v_B}{AB} \quad (\text{B.2})$$

De modo análogo, a velocidade do ponto C do mesmo corpo é dada por,

$$v_C = \omega AC \quad (\text{B.3})$$

e, conseqüentemente,

$$\omega = \frac{v_C}{AC} \quad (\text{B.4})$$

Das equações (B.2) e (B.4) vem que,

$$\frac{v_B}{AB} = \frac{v_C}{AC} \quad (\text{B.5})$$

ou ainda,

$$\frac{v_B}{v_C} = \frac{AB}{AC} \quad (\text{B.6})$$

o que significa que v_B é proporcional a v_C , tal como AB é proporcional a AC .

As velocidades \mathbf{V}_B e \mathbf{V}_C estão representadas graficamente na figura B.7b, em que se pode observar a sua proporcionalidade em relação ao centro de rotação, pela rotação de \mathbf{V}_B em torno de A até que o ponto B alcance a posição B' na linha radial AC . A linha de proporcionalidade pode ser construída a partir de A e passando nos *terminus* dos vectores \mathbf{V}_C e $\mathbf{V}_{B'}$, como se ilustra na figura B.7b. Da semelhança entre os triângulos ACC' e $AB'B''$ observam-se as seguintes relações geométricas,

$$\frac{B'B''}{CC'} = \frac{AB'}{AC} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{v_{B'}}{v_C} = \frac{AB'}{AC} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{v_B}{v_C} = \frac{AB}{AC} \quad (\text{B.9})$$

Pelo que acaba de ser exposto, podem ser tiradas as seguintes ilações:

- A velocidade linear de um ponto de um corpo em rotação é sempre tangente à sua trajectória e perpendicular à linha radial que une esse ponto ao centro de rotação;
- A direcção da velocidade é sempre a mesma da direcção de rotação do corpo;
- O módulo da velocidade é sempre proporcional à distância do ponto considerado ao centro de rotação.

B.4. ROLAMENTO PURO

Um outro caso importante de movimento plano é o movimento de uma roda ou disco que rola sem escorregar sobre uma superfície plana. Neste caso, coexistem as propriedades associadas ao movimento de rotação e de translação, tratando-se, por isso, de um movimento geral ou misto. A figura B.8 ilustra a decomposição deste movimento geral como sendo a soma dos movimentos de rotação e de translação.

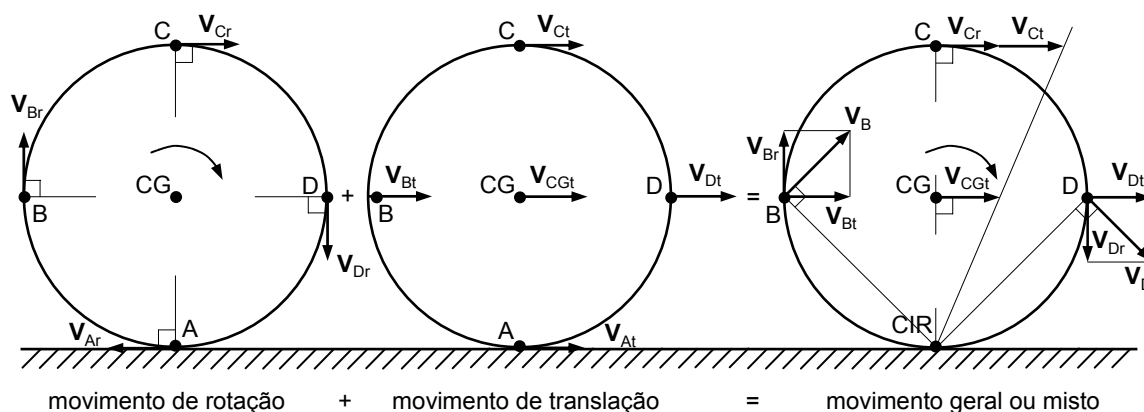


Figura B.8 – Roda em rolamento puro: velocidades rotacionais (r) e translacionais (t).

Quando uma roda ou um disco rola sem escorregar, verifica-se que no ponto de contacto com a superfície não existe movimento relativo. Este ponto é, portanto, um centro instantâneo de rotação. Da análise da figura B.8, pode observar-se que:

- É nula a velocidade do ponto A (CIR);
- A direcção da velocidade de qualquer ponto da roda é sempre perpendicular ao segmento de recta que o une ao ponto A ;
- A magnitude da velocidade de qualquer ponto é proporcional à distância deste ao ponto A ;

B.5. TIPOS DE CENTROS INSTANTÂNEOS DE ROTAÇÃO

Os centros instantâneos de rotação podem ser fixos, permanentes ou imaginários.

Os centros instantâneos de rotação fixos, também denominados centros do tipo 1, são, em geral, eixos de rotação nos mecanismos, isto é, são pontos estacionários num corpo fixo em relação ao qual roda outro corpo. Os centros instantâneos de rotação O_{12} e O_{14} do mecanismo biela-manivela representado na figura B.9 são exemplos evidentes de centros instantâneos de rotação fixos.

Os centros instantâneos de rotação permanentes são pontos comuns a dois corpos cuja velocidade é a mesma, quer se considerem pertencentes a um ou outro corpo, tal como nas juntas cinemáticas de rotação. O vocábulo permanente implica que a posição relativa entre os corpos é sempre a mesma, independentemente da configuração geométrica do mecanismo. Os centros instantâneos de rotação permanentes são vulgarmente designados centros do tipo 2. Os centros O_{23} e O_{34} do mecanismo biela-manivela da figura B.9 são centros instantâneos de rotação do tipo 2 ou permanentes.

Os centros instantâneos de rotação imaginários, também chamados centros do tipo 3, são pontos que, num dado instante, apresentam as mesmas características dos centros do tipo 1 ou do tipo 2. Estes pontos podem pertencer aos corpos de um dado mecanismo, ou estar situados fora dos corpos. Os centros O_{13} e O_{24} do mecanismo biela-manivela da figura B.9 exemplificam centros instantâneos de rotação do tipo 3 ou imaginários. O centro O_{24} , por exemplo, tem a mesma velocidade que o centro O_{34} , e representa o ponto do corpo 2 em relação ao qual o corpo 4 roda, no instante considerado.

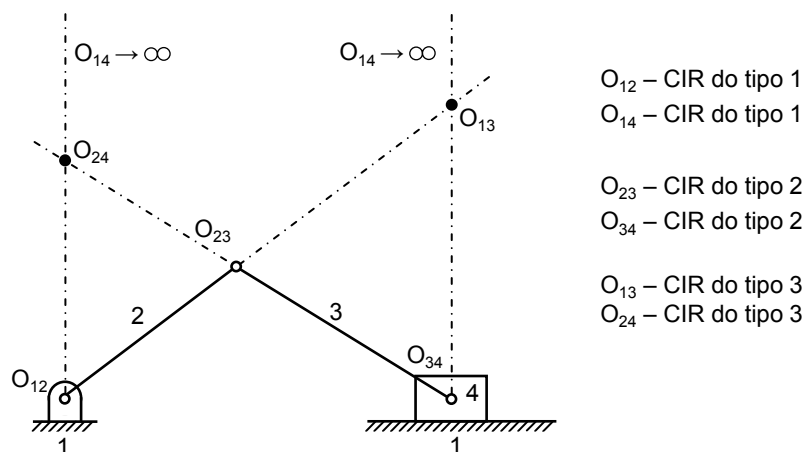


Figura B.9 – Centros instantâneos de rotação do mecanismo biela-manivela.

Os centros instantâneos de rotação do tipo 1 e 2 podem facilmente ser localizados por simples inspeção ou observação directa do mecanismo em análise, ao passo que a localização dos centros do tipo 3 exige métodos de análise adicionais.

Deve referir-se que o centro instantâneo de rotação O_{14} é indeterminado, o que significa que, na verdade, o corpo 4 não roda em relação ao corpo 1, mas descreve um movimento de translação rectilínea. Este tipo de movimento é, de facto, um movimento de rotação em torno de um eixo localizado no infinito. Os centros instantâneos de rotação situados no infinito podem ser representado por uma linha recta perpendicular à trajectória rectilínea descrita, como ilustra a figura B.9.

B.6. CÁLCULO DO NÚMERO DE CENTROS INSTANTÂNEOS DE ROTAÇÃO

Num mecanismo constituído por n corpos, há $n-1$ centros instantâneos de rotação em relação a um determinado corpo. Para os n corpos há, por conseguinte, um total de $n(n-1)$ centros instantâneos de rotação. Contudo, como para o mesmo centro há duas designações distintas, isto é, O_{ij} é equivalente O_{ji} , então, o número total de centros instantâneos de rotação num dado mecanismo formado por n corpos pode ser calculado como sendo o número de combinações binárias que se podem estabelecer entre os seus corpos. Com efeito, o número de centros instantâneos de rotação que existe num mecanismo é dado pela seguinte expressão,

$$N_{CIR} = C_2^n = \frac{n(n-1)}{2} \quad (\text{B.10})$$

em que n é número de corpos do mecanismo em análise.

Da análise da equação (B.10) facilmente se observa que o número de centros instantâneos de rotação aumenta rapidamente com o número de corpos, como se mostra na figura B.10.

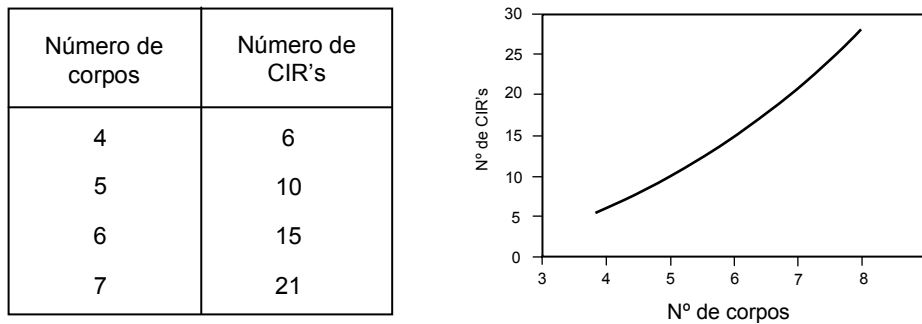


Figura B.10 – Variação do número de centros instantâneos de rotação com o número de corpos de um mecanismo.

B.7. LOCALIZAÇÃO DOS CENTROS INSTANTÂNEOS DE ROTAÇÃO

B.7.1. Simples Inspeção

Um dos métodos utilizados na determinação do local dos centros instantâneos de rotação baseia-se na observação do mecanismo em análise. Assim, na figura B.11 estão representados alguns casos evidentes, em que a localização dos centros instantâneos de rotação é feita por simples inspeção ou observação directa.

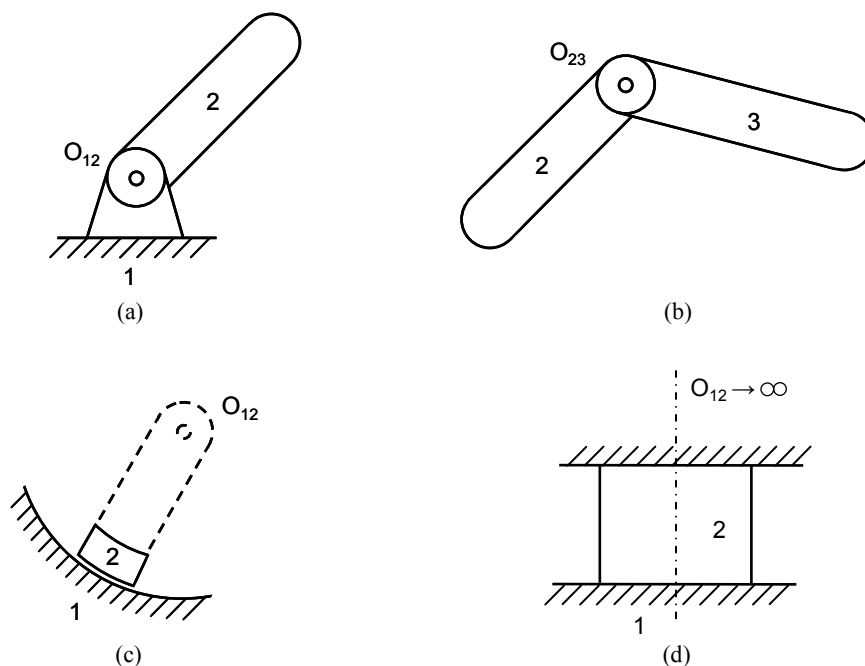


Figura B.11 – Exemplos em que a localização dos centros instantâneos de rotação se faz por simples inspeção ou observação directa.

B.7.2. Teorema dos Três Centros ou de Aronhold-Kennedy

O teorema dos três centros ou de Aronhold-Kennedy⁵⁰ estabelece que, “quando três corpos têm movimento relativo entre si, existem três centros instantâneos de rotação situados sobre a mesma linha recta”. Este teorema pode ser demonstrado recorrendo à redução ao absurdo.

Considere-se o sistema ilustrado na figura B.12, em que a forma geométrica dos corpos 2 e 3 é arbitrária. Da aplicação da equação (B.10) observa-se que no sistema existem três centros instantâneos de rotação. Por simples observação directa podem localizar-se os centros O_{12} e O_{13} . Pelo teorema acima enunciado, sabe-se que o terceiro centro, O_{23} , se situa na linha recta que une os centros O_{12} e O_{13} . Admitindo que isto não é verdade, e considerando que o ponto de contacto, P , entre os corpos 2 e 3 é o centro O_{23} , então \mathbf{V}_{P2} e \mathbf{V}_{P3} são as velocidades do ponto P quando considerado como pertencente aos corpos 2 e 3, respectivamente. Assim, facilmente

⁵⁰ O teorema dos três centros ou teorema do Aronhold-Kennedy, foi primeiramente desenvolvido por Aronhold em 1872 e, posteriormente, por Kennedy em 1886. Os trabalhos de Aronhold e de Kennedy foram realizados de forma independente. Na literatura alemã é comum encontrar-se a referência a este teorema, como o teorema de Aronhold, ao passo que, na literatura anglo-saxónica encontra-se a referência ao teorema de Kennedy.

se observa que estes dois vectores velocidade têm direcções diferentes, facto que é inconsistente com a definição de centro instantâneo de rotação. Esta contradição para as velocidades V_{P2} e V_{P3} verifica-se para todo e qualquer ponto escolhido, a menos que este se situe na linha recta definida pelos centros O_{12} e O_{13} .

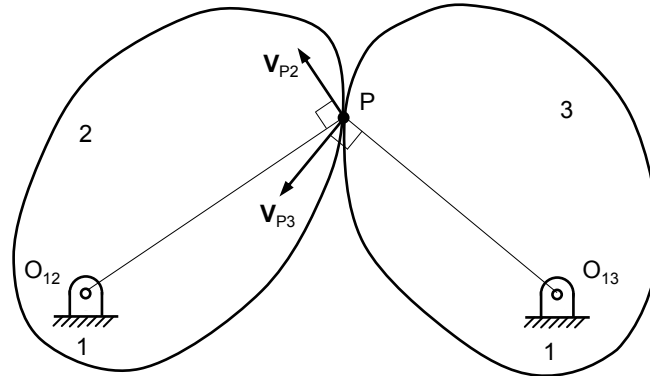


Figura B.12 – Teorema dos três centros ou de Aronhold-Kennedy.

B.7.3. Teorema de Normal Comum

O teorema da normal comum enuncia-se do seguinte modo, “o centro instantâneo de rotação de dois corpos em contacto directo segundo um ponto, situa-se na normal comum aos dois corpos no ponto de contacto”. Combinando este teorema com o anteriormente enunciado, torna-se possível localizar o centro instantâneo de rotação O_{23} em falta no sistema apresentado na secção anterior. Na figura B.13, está ilustrado o mesmo sistema, em que está já incluída a localização do centro O_{23} .

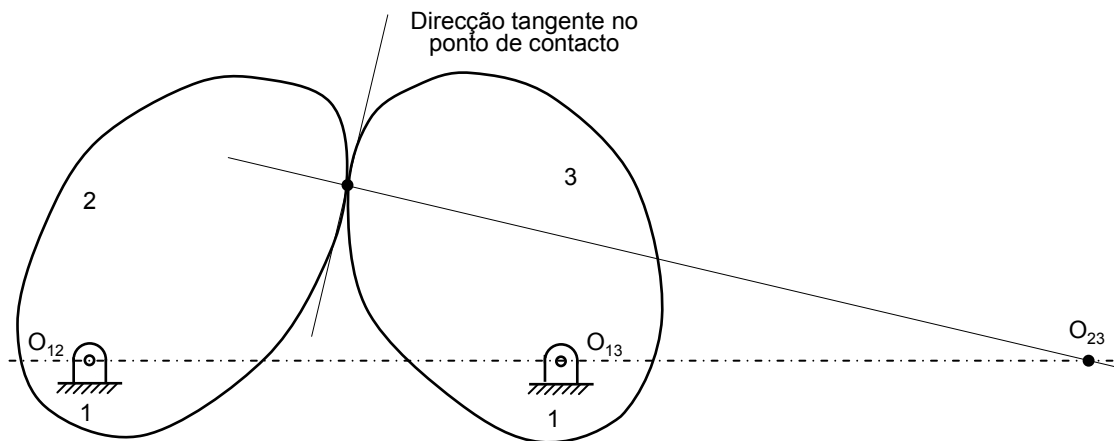


Figura B.13 – Aplicação do teorema da normal comum e do teorema dos três centros.

B.7.4. Métodos Expeditos

A determinação do número de centros instantâneos de rotação, bem como a sua localização baseia-se nos conceitos apresentados nas secções anteriores. Há, contudo, outros métodos, simples e expeditos, que permitem localizar os centros instantâneos de rotação, os quais são apresentados na presente secção. Com efeito, considere-se o mecanismo representado na figura B.14, ao qual aplicando a equação (B.10) resulta que o número de centros instantâneos de rotação é igual a seis, e que são O_{12} , O_{13} , O_{14} , O_{23} , O_{24} e O_{34} .

Observando este mecanismo de quatro barras, é possível, por simples inspecção directa, localizar os centros O_{12} , O_{23} , O_{34} e O_{14} , já representados na figura B.14, faltando, assim, determinar a localização dos centros O_{13} e O_{24} .

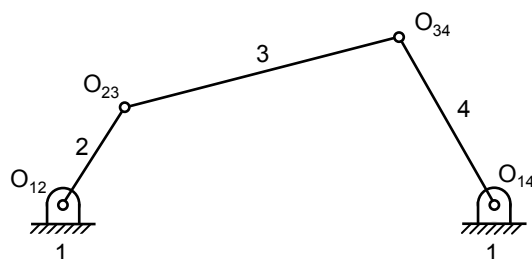


Figura B.14 – Mecanismo de quatro barras: localização dos centros instantâneos de rotação por simples inspecção directa.

Agrupando as barras 1, 2 e 3, e as barras 1, 3 e 4, tem-se, respectivamente, os seguintes conjuntos de centros O_{12} , O_{23} e O_{13} , e O_{13} , O_{34} e O_{14} . Pelo teorema dos três centros ou de Aronhold-Kennedy, sabe-se que os centros O_{12} , O_{23} e O_{13} estão situados na mesma linha recta. O mesmo acontece aos centros O_{13} , O_{34} e O_{14} . Assim, observa-se que o centro O_{13} , centro comum aos dois conjuntos de centros acima definidos, se situa no ponto de intersecção das rectas definidas pelos centros $O_{12}O_{23}$ e $O_{34}O_{14}$, como se ilustra na figura B.15.

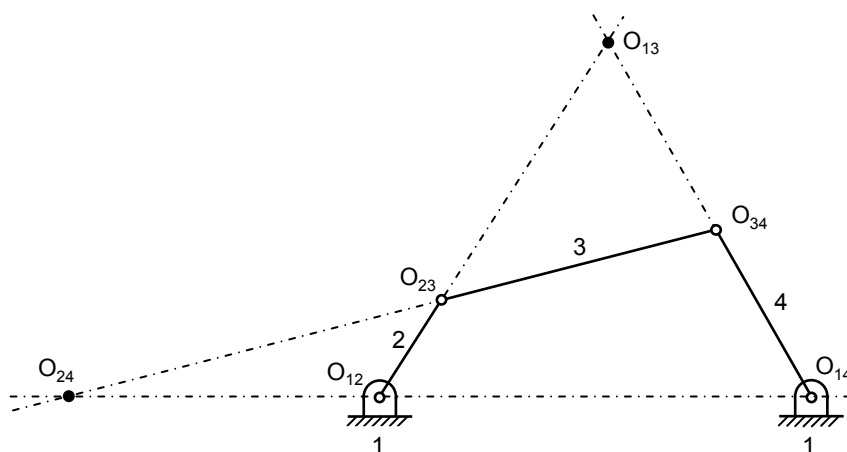


Figura B.15 – Mecanismo de quatro barras: localização dos centros instantâneos de rotação aplicando o teorema dos três centros ou de Aronhold-Kennedy.

Analogamente, agrupando as barras 2, 3 e 4, e as barras 1, 2 e 4, observa-se a existência dos seguintes conjuntos de centros instantâneos de rotação O_{23} , O_{34} e O_{24} , e O_{12} , O_{24} e O_{14} , respectivamente. Do mesmo modo que anteriormente, o centro O_{24} fica situado no ponto de intersecção das rectas definidas pelos pontos $O_{23}O_{34}$ e $O_{12}O_{14}$, como se ilustra na figura B.15.

Um processo alternativo, simples e expedito que permite determinar a localização dos centros instantâneos de rotação é o que em seguida se expõe. Em primeiro lugar representam-se os números correspondentes a cada uma das barras que constituem o mecanismo em análise. A disposição dos números deve ser em forma de polígono, como ilustra a figura B.16a. De seguida, representam-se os centros cuja localização é conhecida por simples inspecção, unindo os números correspondentes às respectivas

barras com um segmento de recta contínuo, como mostra a figura B.16b. Para o mecanismo de quatro barras os centros instantâneos de rotação conhecidos, por simples inspecção, são os centros O_{12} , O_{23} , O_{34} e O_{14} . Deve observar-se que os segmentos que ainda não estão representados são os segmentos comuns a dois triângulos, representados a traço interrompido. Da figura B.16c verifica-se que o segmento relativo ao centro O_{13} é o lado comum aos triângulos 123 e 134, pelo que o centro O_{13} se pode obter pela intersecção das rectas $O_{12}O_{23}$ e $O_{14}O_{34}$. De modo análogo, verifica-se que o centro O_{24} se obtém pela intersecção das rectas $O_{12}O_{14}$ e $O_{23}O_{34}$.

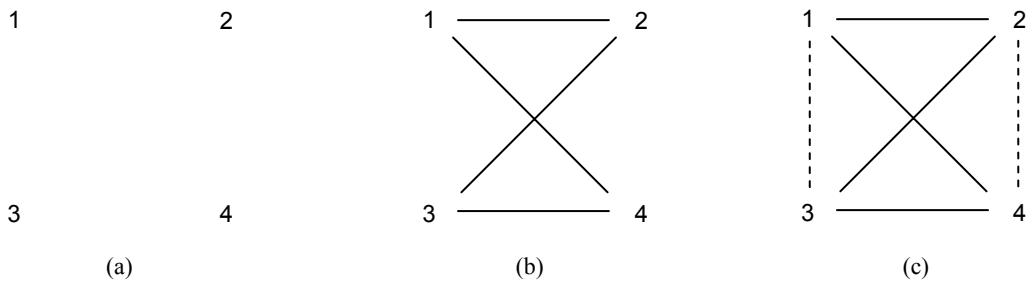


Figura B.16 – Representação de um método expedito que permite determinar a localização dos centros instantâneos de rotação em mecanismos articulados.

Considerando, agora, o mecanismo came-seguidor da figura B.17, verifica-se que este mecanismo tem três centros instantâneos de rotação, a saber, O_{12} , O_{13} e O_{23} . Por simples inspecção directa, facilmente se observa que o centro O_{12} se situa no centro de rotação da came. É também evidente que, descrevendo o seguidor movimento de translação rectilínea, o centro instantâneo de rotação O_{13} se situa a uma distância infinita segunda a perpendicular à direcção o movimento. Pelo teorema dos três centros sabe-se que o centro instantâneo de rotação O_{23} está situado na linha recta que une os centros O_{12} e O_{13} , e pelo teorema da normal comum, o centro O_{23} está localizado na normal tirada no ponto de contacto. Neste caso a normal é representada por uma linha vertical, cuja intersecção com a linha recta horizontal determina a localização do centro instantâneo de rotação O_{23} .

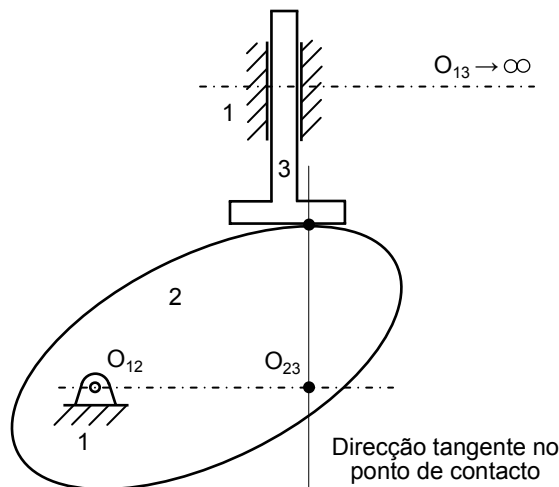


Figura B.17 – Mecanismo came-seguidor: localização dos centros instantâneos de rotação por simples inspecção directa e pelo teorema dos três centros ou de Aronhold-Kennedy combinado com o teorema da normal comum.

B.8. CENTROS INSTANTÂNEOS DE ACELERAÇÃO

Da mesma forma que num mecanismo podem ser localizados centros instantâneos de rotação ou de velocidade, isto é, os pontos para os quais a velocidade relativa é nula, é também possível localizar os centros instantâneos de aceleração (CIA) ou centros de aceleração. Embora a sua utilização prática na análise de mecanismos seja bastante reduzida, é importante abordar, ainda que de forma simples, este conceito.

Com efeito, centro instantâneo de aceleração pode definir-se como sendo *o local instantâneo de dois pontos coincidentes e pertencentes a corpos rígidos diferentes, para os quais a aceleração absoluta é igual*. Quando um dos corpos está fixo e outro descreve um movimento plano, o centro instantâneo de rotação é o ponto do corpo que se move, para o qual a aceleração absoluta, para o instante considerado, é nula.

Na figura B.18 está representado um corpo rígido, em que o ponto B é o centro instantâneo de aceleração, para o qual a aceleração absoluta é nula e cuja localização é desconhecida. Considerando que o ponto A tem aceleração absoluta \mathbf{A}_A e que ω e α representam, respectivamente, a velocidade e a aceleração angulares do corpo, então, a diferença de acelerações entre os pontos A e B é dada por,

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{A}_A - \omega^2 \mathbf{R}_{BA} + \alpha \times \mathbf{R}_{BA} = \mathbf{0} \quad (\text{B.11})$$

Resolvendo a equação (B.11) em ordem a \mathbf{A}_A , vem que,

$$\mathbf{A}_A = \omega^2 r_{BA} \hat{\mathbf{r}}_{BA} - \alpha r_{BA} (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_{BA}) \quad (\text{B.12})$$

Atendendo a que os vectores $\hat{\mathbf{r}}_{BA}$ e $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_{BA}$ são perpendiculares, os dois termos do segundo membro da equação (B.12) representam as componentes rectangulares do vector \mathbf{A}_A , como se ilustra na figura B.18.

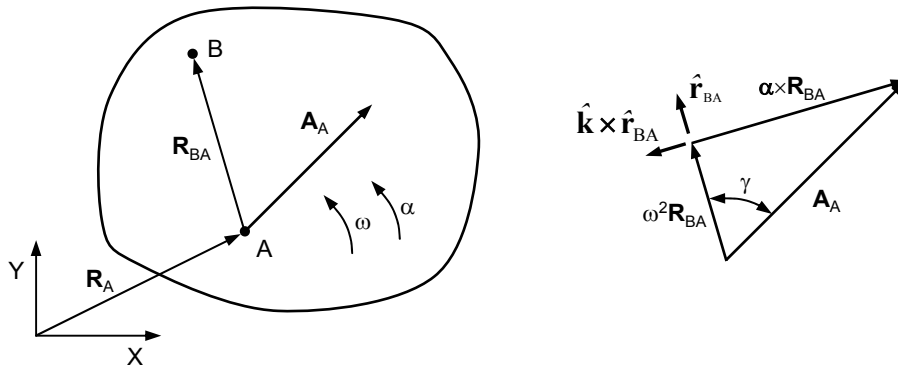


Figura B.18 – Centro instantâneo de aceleração.

Da observação da figura B.18, a direcção e a magnitude do vector \mathbf{R}_{BA} podem ser calculadas de acordo com as seguintes expressões,

$$\gamma = \arctg \frac{\alpha}{\omega^2} \quad (\text{B.13})$$

$$r_{BA} = \frac{a_A}{\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}} = \frac{a_A \cos \gamma}{\omega^2} \quad (\text{B.14})$$

em que a_A é o módulo da aceleração \mathbf{A}_A .

Da análise da equação (B.14) pode concluir-se que a distância de um qualquer ponto de um corpo rígido ao centro instantâneo de aceleração pode ser calculada se a magnitude da aceleração desse ponto for conhecida.

A localização dos centros instantâneos de aceleração é uma tarefa bastante trabalhosa, especialmente em mecanismos que apresentam topologias complexas. Há, contudo, métodos gráficos que permitem, de forma simples e expedita, determinar a localização dos centros instantâneos de aceleração, entre os quais se destaca o método das quatro⁵¹ circunferências. Este método, é particularmente útil quando se conhecem duas acelerações absolutas de dois pontos do mesmo corpo, como é caso dos pontos A e B da figura B.19 que pertencem à mesma barra. Assim, o procedimento gráfico conducente à localização do centro instantâneo de aceleração pode ser resumido nos seguintes passos,

- Prolongar os vectores das acelerações \mathbf{A}_A e \mathbf{A}_B , até que estes se intersectem no ponto I ;
- Desenhar a circunferência que passa pelos pontos A , B e I ;
- Desenhar a circunferência que passa pelos pontos definidos pelos *terminus* dos vectores \mathbf{A}_A e \mathbf{A}_B e pelo ponto I ;
- Intersectar as duas circunferências anteriormente desenhadas, resultando daí o centro instantâneo de aceleração (CIA).

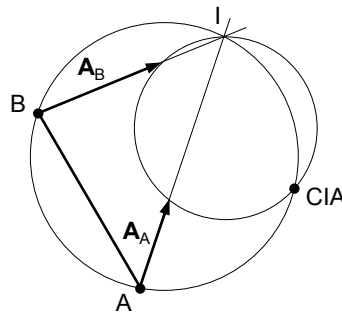


Figura B.19 – Localização do centro instantâneo de aceleração utilizando o método das quatro circunferências.

⁵¹ Refira-se, a título de curiosidade que, apesar do nome adoptado, neste método apenas são usadas duas circunferências.

In language, clarity is everything.

Confucius

ANEXO C – GLOSSÁRIO DE TERMOS

Aceleração	Taxa de variação da velocidade por unidade de tempo.
Análise cinemática	Determinação das características geométricas, posição, velocidade e aceleração, de um dado movimento.
Ângulo de transmissão	Ângulo medido entre a barra intermédia e a barra movida.
Articulação	Junta ou par cinemático que permite aos órgãos rodar ou oscilar num único plano.
Biela	Órgão mecânico que estabelece a ligação entre duas manivelas ou entre uma manivela e uma corrediça.
Binário de forças	Sistema formado por duas forças de módulo igual que actuam em linhas de acção paralelas mas em sentidos opostos.
Bloco	Elemento que num mecanismo se considera fixo.
Came	Órgão mecânico cuja finalidade é transmitir, por contacto directo, um determinado movimento a outro órgão, denominado elemento movido ou seguidor.
Centro de gravidade ou de massa	Ponto de um corpo através do qual actua a força resultante devido a acção de um campo gravítico. Se este for uniforme, o centro de gravidade coincide com o centro de massa.
Centro instantâneo de aceleração	Ponto de uma secção de um corpo, animado de um movimento que não seja de translação, que, num dado instante, tem aceleração nula.
Centro instantâneo de rotação	Ponto de uma secção de um corpo que, num dado instante, tem velocidade nula.
Choque	Variação da aceleração com o tempo.
Ciclo	Repetição das características de um movimento em intervalos de tempo sucessivos.
Ciência	Conjunto de conhecimentos exactos, universais e verificáveis, expressos por meio de leis, que o Homem tem sobre si próprio, sobre a natureza, a sociedade, o pensamento, etc. Sistema ou conjunto de conhecimentos relativos a um assunto ou objecto determinado, em

	especial, os obtidos mediante a observação, a experiência dos factos e um método próprio; domínio do saber.
Cinemática	Disciplina da mecânica em que se estuda o movimento, independentemente das causas que o provocam.
Conexão	Conjunto de superfícies que estabelece o contacto entre os elementos de um mecanismo.
Constrangimento	Ligação entre corpos que tem por objectivo reduzir ou restringir o número de graus de liberdade.
Corpo rígido ou inelástico	Corpo em que as distâncias entre as suas partículas permanecem constantes quando sujeito à acção de uma força exterior. Um corpo rígido conserva, portanto, a forma e a dimensão durante o movimento.
Deslocamento	Trajectória contínua descrita por um ponto em movimento relativamente a um referencial.
Diagrama do corpo livre	Esquema do corpo, isolado do sistema (estrutura, mecanismo, máquina), sobre o qual se representam as acções que nele actuam.
Dimensionamento	Estabelecimento das dimensões características dos elementos que constituem os sistemas mecânicos, de modo a que estes possam resistir satisfatoriamente durante toda a sua vida aos esforços aplicados.
Dinâmica	Disciplina da mecânica em que se estudam as leis dos movimentos dos corpos sujeitos à acção de forças e momentos.
Elemento motor	Componente que, num mecanismo, recebe o movimento que se pretende transmitir ou transformar.
Elemento movido	Componente que, num mecanismo, segue o movimento de elemento motor.
Estática	Disciplina da mecânica em que se estudam as leis de composição das forças e as condições de equilíbrio dos corpos materiais sujeitos à acção de esforços.
Estrutura	Conjunto de corpos rígidos capazes de suportar esforços sem que haja movimento relativo entre as suas partes.
Excêntrico	Órgão mecânico, de forma circular, que roda em torno de um eixo paralelo ao eixo que passa pelo centro de gravidade.
Fase	Posição instantânea de um mecanismo.
Fixe	Ver bloco.

Força	Grandeza física que dá a medida quantitativa da interacção mecânica dos corpos.
Força aplicada	Força de natureza física que não depende da geometria do sistema e pode ser determinada experimentalmente.
Força de ligação	Força de natureza geométrica que resulta de restrições ao movimento dos vários corpos que constituem o sistema.
Graus de liberdade	Número de movimento independentes. Número de variáveis ou coordenadas necessário para caracterizar ou descrever a configuração de um mecanismo.
Impulso	Ver choque.
Inércia	Propriedade que os corpos materiais possuem e que se caracteriza pelo facto de estes se oporem à variação do estado de movimento, sob a acção de forças que lhes são aplicadas.
Inversão de um mecanismo	Situação que ocorre quando, num mecanismo, se liberta a barra fixa e se fixa uma barra anteriormente livre.
Junta cinemática	Conjunto de superfícies que ligam os corpos entre si.
Junta primária	Junta cinemática que retira ou constringe dois graus de liberdade.
Junta secundária	Junta cinemática que retira ou constringe apenas um grau de liberdade.
Ligação	Componente, elemento ou barra que num mecanismo é susceptível de transmitir força e movimento.
Ligação binária	Ligação que possui apenas dois elementos de par cinemático.
Ligação ternária	Ligação que possui três elementos de par cinemático.
Manivela	Elemento que roda ou oscila em torno de um eixo fixo.
Máquina	Sistema mecânico cujo objectivo é transmitir ou transformar movimento, força e produzir trabalho útil.
Massa	Quantidade de matéria que existe num dado corpo.
Mecânica	Ciência em que se estuda as leis do movimento dos corpos, quer do ponto de vista da sua descrição geométrica, quer da sua causa e leis.
Mecânica clássica	Parte da Física em que se estuda o aspecto experimental e as leis teóricas fundamentais dessa ciência.
Mecânica de Newton	Ver mecânica clássica.

Mecânica quântica	Teoria fundamental dos fenómenos físicos em escala microscópica, tais como os movimentos dos electrões.
Mecanismo	Colecção de corpos, sendo um deles fixo, ligados entre si de modo a transmitir ou transformar movimento.
Mecanismos equivalentes	Dois mecanismos designam-se equivalentes quando são cinematicamente equivalentes.
Mobilidade	Ver graus de liberdade.
Momento de uma força	Grandeza que mede o efeito rotativo da força em torno de um eixo.
Movimento	Variação temporal da posição relativa dos corpos no espaço.
Movimento bidimensional	Ver movimento plano.
Movimento contínuo	Movimento que um ponto ou corpo descreve indefinidamente no mesmo sentido.
Movimento espacial	Movimento durante os qual os corpos descrevem trajectórias no espaço tridimensional.
Movimento intermitente	Movimento que um ponto ou corpo descreve e que é interrompido por períodos de repouso.
Movimento plano	Movimento durante o qual os pontos de um corpo rígido se deslocam paralelamente a um plano.
Movimento tridimensional	Ver movimento espacial.
Par cinemático	Ver junta cinemática.
Par deslizante	Par cinemático em que o movimento relativo dos corpos é de translação, o órgão fixo designa-se guia e o movido corredeira.
Par inferior	Par cinemático em que o contacto é uma superfície.
Par primário	Ver junta primária.
Par secundário	Ver junta secundária.
Par superior	Par cinemático em que o contacto é uma linha ou um ponto.
Período	Intervalo de tempo necessário para completar um ciclo.
Peso	Intensidade da força que um corpo em repouso, situado num campo gravítico, exerce sobre o apoio que o impede

	de cair no sentido de actuação do campo gravítico.
Ponto de interesse	Ponto de um corpo cujas características do movimento são de particular interesse.
Ponto material	Ponto geométrico a que se associa um número chamada massa.
Ponto morto	Posição em que o órgão motor e o órgão movido se encontram alinhados ficando o sistema numa fase de instabilidade na medida em que, a partir desta posição, o órgão movido poderá rodar em sentidos diferentes.
Posição	Local adquirido por corpo após ter efectuado um deslocamento.
Restrições cinemáticas	Limitações ou constrangimentos nos movimentos de um corpo ou mecanismo impostas por juntas cinemáticas ou condições de fronteira.
Rotação	Movimento no qual cada ponto de um corpo rígido permanece a uma distância constante de um eixo normal ao plano do movimento.
Rotóide	Ver articulação.
Rótula	Junta ou par cinemático esférico em que os órgãos podem rodar ou oscilar no espaço tridimensional.
Seguidor	Ver elemento movido.
Síntese cinemática	Determinação da geometria que um determinado mecanismo deve ter para ser capaz de produzir um movimento com características cinemáticas previamente especificadas.
Sistema material	Conjunto de pontos materiais.
Sistema mecânico	Arranjo de corpos no qual a posição ou o movimento de cada corpo depende da posição e do movimento dos demais corpos.
Tecnologia	Conjunto de conhecimentos científicos, dos processos e dos métodos usados na produção, distribuição e utilização de bens e serviços. Grupo de processos, métodos e instrumentos usados numa arte, numa técnica ou ofício.
Trajectória	Ver deslocamento.
Translação	Movimento durante o qual qualquer segmento de recta que une dois pontos de um corpo rígido se desloca mantendo-se paralelo a si mesmo.

Velocidade

Taxa de variação da posição com o tempo.

Versor

Vector unitário numa dada direcção.