Aula investigativa no cálculo com o *software Winplot*

Álvaro Fernandes Serafim Filho
Maria Helena Martinho

Diversos estudos nas últimas quatro décadas no Brasil apontam altos índices de reprovação nas disciplinas iniciais dos cursos de exatas, particularmente na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (BARUFI, 1999; GOMES; LOPES; NIETO, 2005; SABACK, 1980). A grande evasão dos alunos recém-ingressos nesta disciplina e as notórias dificuldades observadas na aprendizagem têm repercutido em diversos fóruns educacionais. Tanto a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) quanto a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) têm manifestado esta preocupação e vêm levantando a necessidade do aprofundamento das discussões em torno dos preocupantes números de reprovações observados na disciplina, nas diversas instituições de ensino superior do país, que oscilam na média dos 50%. Zuchi (2005), em sua tese doutoral, também reflete sobre esta temática e aponta que uma das principais dificuldades encontradas pelos alunos está na compreensão do conceito de limite, particularmente na definição formal com a simbologia ε–δ, conceito este que impacta no desenvolvimento dos demais assuntos da matéria, como derivadas e integrais.

Uma tendência que vem ganhando cada vez mais espaço no ensino da Matemática consiste em envolver os estudantes em atividades matematicamente mais ricas e produtivas, sejam em contextos da realidade ou puramente matemáticos e lógicos (PONTE, 2005). Nesse sentido, a tecnologia entra como um valioso instrumento em auxílio ao aprendizado, pois o computador equipado com um bom *software* matemático pode ser usado não somente como uma sofisticada calculadora, mas também como um precioso instrumento de ajuda no processo de aprendizagem (ANDRADE, 2004).

A proposta deste estudo foi, portanto, investigar uma estratégia diferenciada de ensino para o curso de Cálculo que viesse a colaborar na qualidade da mediação e na aprendizagem dos alunos, contribuindo para reduzir as estatísticas negativas no quadro das reprovações. Através de tarefas exploratórias e investigativas, realizadas em pequenos grupos num laboratório de informática, o primeiro autor deste artigo, como professor da turma, explorou os principais conceitos e aplicações da disciplina. Exercendo o papel de professor/investigador buscou verificar se havia uma mudança de postura no comportamento dos alunos ao propor investigações amparadas nos modernos recursos de animação e análise computacionais. O professor procurou verificar se a atitude dos alunos passou a assumir uma condição mais laborativa e reflexiva, tornando-se um agente ativo na construção do seu próprio conhecimento (BIANCHINI; SANTOS, 2002).

Referencial teórico

Para este estudo, procuramos o suporte teórico do ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, do ensino exploratório em Matemática, além do auxílio dos recursos tecnológicos para as investigações em relevantes problemas da disciplina.

A descoberta do Cálculo no século XVII foi um dos grandes marcos da história da Matemática. Alguns relevantes problemas que haviam preocupado físicos e matemáticos por mais de vinte séculos passaram a ter uma solução relativamente elementar pelo que hoje conhecemos como o Teorema Fundamental do Cálculo. Essencialmente aplicamos os principais resultados teóricos do Cálculo Diferencial para medir taxas de variação em funções e perceber os efeitos dessas mudanças, além de usar o Cálculo Integral para resolver uma série de problemas da física-matemática que estão correlacionados com a quadratura de áreas limitadas por funções (GARBI, 2011). O alcance das suas aplicações tem levado o Cálculo a tratar de uma diversidade enorme de problemas dinâmicos da natureza e das ciências.

As dificuldades apresentadas pelos alunos, além da postura passiva espectadora geralmente manifestada quando o professor expõe os assuntos, evidenciam o grau de complexidade e abstração na exposição formal dos conteúdos do Cálculo, principalmente na sua etapa inicial ao explorar o tema de limites. Talvez seja por este não ser um tema oficial do ensino médio, talvez seja pela inabilidade de explorar os conteúdos de maneira mais rigorosa, numa tendência quase sempre a "decorar" e aplicar fórmulas de maneira "artificial" em detrimento de um entendimento mais amplo e significativo dos conteúdos. Talvez seja por estas e outras razões que os alunos acabam por evidenciar grandes dificuldades ao adentrar um curso introdutório de Cálculo. Alguns estudos focalizam parte desta problemática no aluno, na sua falta de base ou até mesmo na sua metodologia de estudo (CURI; FARIAS, 2008). O problema pode estar no fato da disciplina ser ministrada geralmente no início do curso, tratando-se de um primeiro contato do aluno com uma Matemática "distinta" da trabalhada no ensino médio e as novidades de ser estudante universitário (GOMES; LOPES; NIETO, 2012). Outros estudos apontam para a metodologia de ensino do professor, indicando que a qualidade na mediação dos assuntos ministrados pelo professor tem grande influência na aprendizagem dos alunos (GARZELLA, 2013).

A necessidade de práticas mais dinâmicas, reflexivas e construtivas para o ensino do Cálculo fundamenta também este estudo. As orientações preconizadas nos parâmetros curriculares oficiais assinalam a importância das renovações pedagógicas para o tratamento diversificado dos conteúdos matemáticos, inclusive pelas vias exploratórias e investigativas. Estas orientações sugerem tratamentos diversificados dos conteúdos matemáticos, dando ênfase à resolução de tarefas desafiantes, como sendo esta uma atividade genuinamente matemática (SÃO PAULO, 1991).

Neste estudo, é dado destaque ao ensino exploratório e investigativo. Adentramos este modelo de ensino enfatizando as suas notórias características. No ensino exploratório os estudantes desempenham papéis ativos na aprendizagem. Esta se dá de uma forma reflexiva e construtiva, o pensamento autônomo dos alunos é incentivado e, inclusive, os variados contextos investigativos favorecem que eles reflitam sobre o seu próprio processo de aprendizagem (BISHOP; GOFFREE, 1986). No ensino exploratório as ideias matemáticas que emergem são discutidas em grupos, confrontadas e sistematizadas no coletivo (PONTE, 2005). Esta modalidade de ensino oportuniza aos alunos desenvolverem uma série de capacidades matemáticas ao possibilitar que os conhecimentos surjam com mais significado. A resolução de problemas, as estratégias de abordagem, os raciocínios analíticos e a comunicação matemática são algumas das habilidades potencializadas no ensino exploratório (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003). Estes autores destacam a importância do papel do professor nesta abordagem de ensino. A gestão da aula, a escolha apropriada das tarefas e a maneira de fazer ressaltar o conhecimento destes trabalhos são algumas das suas relevantes atribuições.

Neste sentido, destacamos também a importância da tecnologia em auxílio à aprendizagem do Cálculo. Alguns programas apresentam excelentes recursos que integram dinamicamente as funções numéricas, algébricas e gráficas de forma a privilegiar a abordagem e a compreensão de muitos dos seus assuntos. Se estas ferramentas forem utilizadas em sala de aula, em apoio às tarefas investigativas, devem contribuir significativamente para tornar o ambiente de ensino e aprendizagem mais atraentes e produtivos, desobrigando os alunos de situações mais mecânicas e operacionais e envolvendo-os em cenários mais reflexivos e conceituais (ALLEVATO, 2005). O auxílio do *software* matemático, nesses ambientes, possibilita que os alunos participem mais ativamente na construção do conhecimento. Eles passam a modelar problemas, fazer simulações, formular conjecturas e a visualizar situações que seriam muito complicadas, ou até mesmo inviáveis, sem o suporte da tecnologia.

Metodologia e apresentação da tarefa

A metodologia adotada neste estudo pauta-se nos preceitos da pesquisa qualitativa, alicerçada no paradigma descritivo. Este modelo metodológico busca explorar e compreender um conjunto de conhecimentos que emergem de contextos experimentais e aprofundar as explicações que abrangem o conjunto de atitudes dos seus participantes (MERRIAM, 1988).

A tarefa proposta foi realizada em pequenos grupos no laboratório de informática, numa turma composta por 36 alunos aprovados na disciplina anterior, Introdução ao Cálculo, matéria que estuda tópicos elementares da Matemática. Foram formados 12 grupos de 3 componentes cada, sendo que 2 grupos – G_1 (composto por João, Alberto e Ricardo - pseudônimos) e G_2 (composto por Sandra, Flávia e Mônica - pseudônimos) – se voluntariaram para uma observação mais criteriosa neste relato. Nesse ambiente os dados foram recolhidos pelo próprio professor que recorreu a observações participativas, aplicação de questionários, entrevistas, além dos documentos elaborados pelos grupos de trabalho. Vale destacar o permanente contato do professor com os alunos ao longo do semestre letivo. Este convívio permite um olhar mais atencioso do investigador sobre todas as ações empreendidas no estudo e as expectativas dos participantes (MERRIAM, 1988).

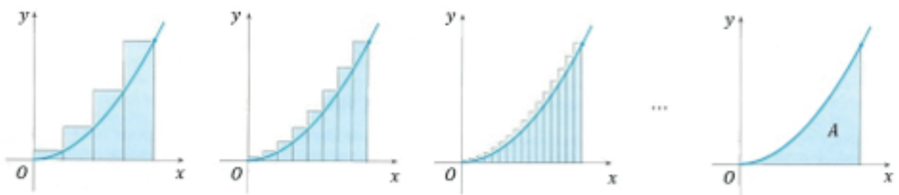
Neste relato, damos destaque a tarefa “aplicação de limites no cálculo de áreas” , constituída por três questões. Nesta atividade pretendia-se que os alunos explorassem, com o uso do computador e do *software Winplot* (apresentado em sala de aula), o conceito de áreas de regiões curvas delimitadas por gráficos de funções contínuas, pondo em prática alguns aspectos teóricos vistos sobre limites.

Quadro 1 - Tarefa aplicada em grupos no laboratório de informática.

APLICAÇÃO DE LIMITES NO CÁLCULO DE ÁREAS

O método da exaustão (que é atribuído ao grego Eudoxo / 406–355 a.C.) consiste em inscrever uma figura, cuja área se quer calcular, com polígonos e então aumentar o número de lados desses polígonos até alcançar a área desejada. A figura 1 abaixo ilustra esse procedimento num caso particular de um ramo parábola exaurido por retângulos. Se A_n é o somatório das áreas dos n retângulos, à medida que aumentarmos n, fica evidente que A_n ficará cada vez mais próxima da área exata “A”, área hachurada abaixo do ramo da parábola limitado pelo eixo x. Dizemos então que a área “A” é o limite do somatório das áreas dos retângulos quando $n \to \infty$ e escrevemos $A = lim_{n \to \infty} (A_n)$.

Figura 1: exaustão por retângulos da área delimitada por um ramo de parábola e o eixo x



PROBLEMA: Determine, através do método da exaustão, a área da região delimitada pela função $f(x) = 16x^3$ no intervalo [0, 1].

Questão 1) Use o *Winplot* para determinar a soma das áreas dos retângulos e preencha a tabela abaixo.

n (quantidade de retângulos)	A_n (área total dos retângulos)
4	
10	
100	
1.000	
10.000	

Questão 2) Pelo comportamento observado dos valores de A_n na tabela, intuitivamente, você diria que o valor da área é quanto?

Questão 3) Use a fórmula de Riemann $A = lim\ n \to \infty\ \Sigma\ i = 1, \ldots, n\ f(x_i)\Delta x_i$ para calcular o valor exato da área e verifique a sua resposta anterior.

Fonte: Autores (2020).

A ideia central é antecipar uma importante aplicação do Cálculo que emprega esta teoria, com a finalidade de estimular os alunos a compreenderem uma utilidade do assunto que eles estavam a desenvolver no início do curso.

A experiência: raciocínios e construções

Antes de apresentar o roteiro da tarefa aos grupos, buscamos refletir brevemente com a turma sobre a importância daquele trabalho e relembramos algumas perguntas que foram colocadas em classe: *Qual a necessidade de estudar limites? Quais as aplicações práticas dos limites?* Frequentemente os alunos indagavam sobre a utilidade dos conteúdos matemáticos que estavam a estudar. Esta tarefa veio também a responder a estes questionamentos. Explicamos que aquela atividade deveria conduzi-los na exploração do tema (limites) num contexto prático, útil e muito importante para o curso. Justificamos ainda a relevância dos aspectos históricos presentes no roteiro e destacamos a atenção que eles deveriam ter nas construções algébricas e nas consultas. Requisitamos ainda que eles encaminhassem por *e-mail* todas as imagens de tela que justificassem as suas análises e argumentações na resolução da tarefa.

Antes que eles iniciassem as explorações fixamos um pouco mais a atenção nos aspectos históricos. A ordem cronológica em destaque no texto evidenciava os avanços das técnicas engenhosas para o cálculo de áreas, desde as primitivas e brilhantes estratégias de Eudoxo e Arquimedes, passando pelas descobertas geniais de Newton e Leibniz e aprimorando-se com as habilidades de Bernhard Riemann. Partimos então para a execução da tarefa, quando já percebíamos um ambiente renovado e dinâmico, completamente diferente das costumeiras aulas de Cálculo em sala de aula. Os alunos já se mostravam mais ativos em seus grupos e as discussões internas aumentavam os “ruídos” no laboratório:

Questão 1)

Use o *Winplot* para determinar a soma das áreas dos retângulos e preencha a tabela ao lado.

n (quantidade de retângulos)	A_n (área total dos retângulos)
4	
10	
50	
100	
500	
1000	
⋮	

Fonte: Autores (2020).

Ao tempo em que circulávamos pelo laboratório e observávamos discretamente as produções das equipes de trabalho, o grupo G_1 já discutia estrategicamente o preenchimento da tabela (Episódio 1):

Episódio 1:

Ricardo: Eu lanço [os números] no computador e você preenche a tabela.

João: Ok! Quanto deu para 4?

Ricardo: 6,25.

Alberto: E para 10?

Ricardo: 4,84. (e seguem)

Esse procedimento continua até o grupo extrapolar os valores indicados na tabela, inserir dez milhões de retângulos e o *software* travar! Porém, antes disso, eles registram um milhão de retângulos e afirmam (conjecturam!) que o valor exato da área é de 4 unidades (Episódio 2). Por mais que buscássemos elucidar precisamente o conceito de conjecturar em Matemática, como uma presunção, uma evidência ou uma forte suposição que necessita de uma demonstração cabal, os alunos acabavam quase sempre por afirmar categoricamente os resultados que encontravam. Obviamente, as provas ou demonstrações são relativizadas em cada nível de ensino, porém, o tempo, a continuidade dos estudos e a maturidade se encarregam de aprimorar e consolidar estes conhecimentos.

Episódio 2:

Alberto: E para 1.000.000?

Ricardo: 4,00001. O valor da área é 4! (neste instante eles conjecturam o valor da área)

João: Verdade! Ponha mais um zero aí... E para 10.000.000?

Ricardo: Travou!

Em épocas recuadas costumávamos realizar todas as etapas e análises desta tarefa em sala de aula, de forma expositiva e com o auxílio do *datashow*. A vantagem que constatamos, do ponto de vista didático, é que ao invés deles acompanharem passivamente estas construções, eles mesmos as produziam em pequenos grupos. A postura mais laborativa dos alunos nas investigações proporciona a mudança significativa na relação de ensino e aprendizagem. Certamente que este é um ganho motivador e qualitativo inestimável que não pode ser mensurado integralmente no momento exato da ação, mas as respostas registradas nos questionários e entrevistas realizadas demonstram isso. Algumas delas foram selecionadas para evidenciar estes aspectos:

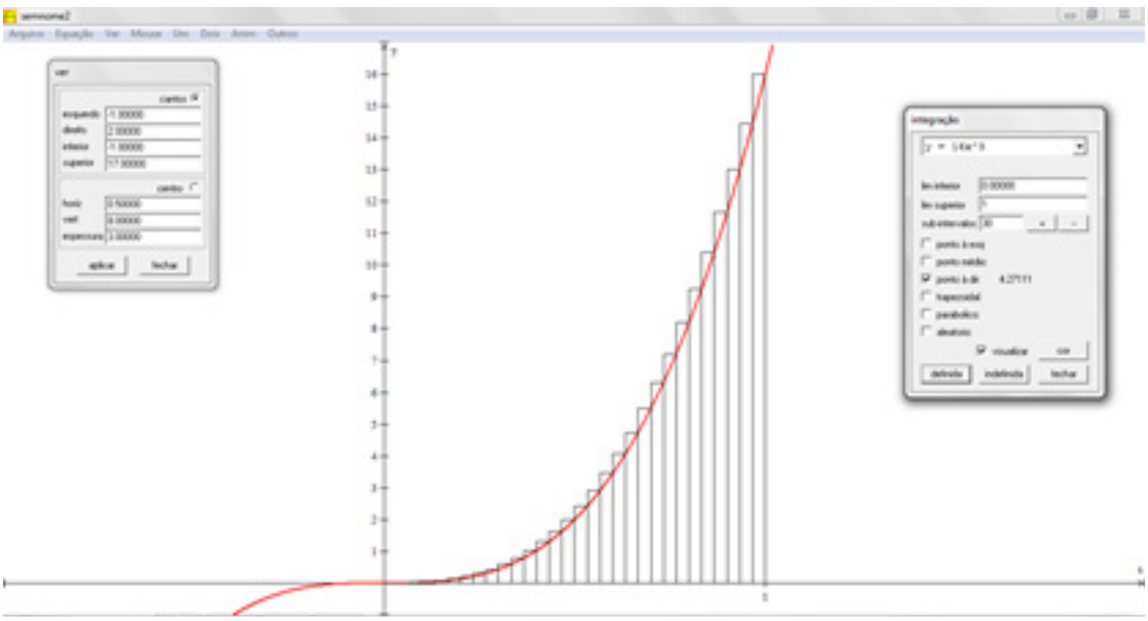
> "Após a introdução do assunto em sala de aula, que por sinal foi muito bem explicado, realizar uma tarefa exploratória em grupo, podendo discutir as ideias e comparar as respostas com o auxílio de um computador, torna a atividade muito mais interessante." (Ricardo)

> "Só o fato de sairmos [da sala de aula] para realizar uma atividade no laboratório, diferente das que estamos acostumados, a aprendizagem fica muito mais motivadora." (João)

> "São [atividades] bastante motivadoras, diferentes e que contribuem muito com a nossa aprendizagem. O conteúdo abordado torna-se mais prático e agradável! É como se estivéssemos construindo o nosso conhecimento a partir das investigações e das observações no software." (Alberto)

No grupo G_2 as discussões eram semelhantes e as ações eram também estrategicamente divididas. Uma aluna manipulava mais o computador, outra fazia os registros escritos enquanto uma terceira mediava as discussões de posse do livro texto do autor Stewart (2013). Nesse instante, as alunas requisitam a nossa presença em função das dificuldades que sentiam para ampliar o gráfico e visualizar melhor a totalidade dos retângulos. A primeira visualização realmente não permite ver com precisão toda a composição. Propositadamente a função $f(x) = 16x^3$ também havia sido escolhida para estimular os alunos a "futucarem" mais o programa. Com isso, foi possível constatar nas respostas aos questionários, que ao tempo em que eles exploravam a tarefa, aprendiam um pouco mais dos seus recursos. Ao percebermos que a visualização gráfica adequada era uma dificuldade mais generalizada, demos algumas orientações coletivas que permitiram os grupos realizarem uma apresentação esteticamente melhor. A figura 1 foi capturada pelo grupo G_2 depois de proceder os ajustes.

Figura 1 – Tela capturada pelo grupo G_2 nas suas investigações.



Fonte: Grupo G_2 (2020)

Em função da ótima precisão fornecida pelo *Winplot* no cômputo das áreas dos retângulos, tanto G1, quanto G2, apresentaram respostas iguais a 4 para a questão 2: “Pelo comportamento observado dos valores de A_n na tabela, intuitivamente, você diria que o valor da área é quanto?” De fato, 4 é a resposta intuitivamente esperada quando se realiza corretamente os procedimentos computacionais.

Após a correção das tarefas pudemos constatar que todos os demais grupos conjecturaram este mesmo valor. Se algum valor diferente fosse encontrado, certamente que este seria confrontado na etapa posterior, quando se exigiria o valor exato da área através da manipulação algébrica da fórmula de Riemann.

Alguns grupos tomaram a evidência computacional como uma prova matemática. Após constatarem, através do *software*, que o valor da área requisitada era de 4 unidades, alguns alunos indagaram a necessidade de demonstrar algebricamente o resultado: “*pra que demonstrar se o computador já calcula o valor exato?*”; “*o computador, ao exibir o valor exato, não deve substituir a longa demonstração?*”. Certamente por esta etapa ser a mais laboriosa e exigente, em termos de análise e raciocínio, algumas resistências a etapa demonstrativa foram percebidas. Nesse instante, foi necessário estimulá-los para prosseguirem nas explorações, inclusive orientando-os sobre as possíveis consultas bibliográficas. As discussões seguiam no grupo G_2 (Episódio 3), ao analisarem a questão 3: “Use a fórmula de Riemann $A = \lim_{n \to \infty} \Sigma_{i = 1, \ldots, n}\ f(x_i)\Delta x_i$ para calcular o valor exato da área e verifique a sua resposta anterior”.

Episódio 3:

Sandra: Qual o valor da base?

Mônica: É igual a 1. Não é o tamanho do intervalo?

Sandra: Não! Não tem que dividir [o intervalo] em n partes!? Observe aqui... (apontando para um trecho do livro)

Flávia: Quantos retângulos vamos colocar?

Mônica: São muitos! Vai tender a infinito... (observando o livro)

Sandra: Acho que por isso usaremos este limite aqui. (novamente apontando para um trecho do livro). Vamos verificar com o professor...

No diálogo acima se percebe ainda um pouco de insegurança nas afirmações preliminares que visam a determinação do valor exato da área através da manipulação da fórmula de Riemann. Porém, com o auxílio eficiente da consulta, o grupo consegue avançar nos raciocínios e investigações. A comunicação prossegue ativa revelando o caráter de protagonismo das alunas na exploração dos conhecimentos:

Sandra: Professor, o valor da [medida] base [de cada retângulo] é $1/n$? Esse é o valor de Δx_1? (como estávamos por perto do grupo, a aluna aproveita e faz uma pergunta. Nos limitamos a apontar para o livro e dizer: observem atentamente este exemplo, ele é muito semelhante! Aí vocês encontrarão a sua resposta!)

Mônica: Deve ser o valor de todos Δx_i...

Flávia: Por que?

Mônica: Ora, não foi dividido tudo [todo o intervalo] em partes iguais? Olhe isto... (analisou no livro e indicou na tela do computador a divisão equitativa dos retângulos. A aluna raciocinava conforme o modelo apresentado no livro)

Sandra: Deve ser... E a altura [do retângulo]?

Mônica: Observe (apontando para o livro), aqui ele usa o valor da função no ponto. É a imagem! (novamente a aluna raciocina conforme o modelo pesquisado no livro)

Sandra: Vai ficar grande demais! (reportando-se a expressão do limite apresentado no livro). Vamos verificar com o professor...

De fato, o limite que expressa o valor da área exata tem desenvolvimento bastante longo e trabalhoso. Elas puderam notar claramente esse aspecto e isso foi bastante comentado nas discussões finais. Mas essa também era uma percepção importante a ser evidenciada na tarefa, pois a turma iria estudar mais adiante, no tema das integrais definidas, o Teorema Fundamental do Cálculo, que simplifica por demais estes resultados. Pudemos perceber que apesar do notável envolvimento e entusiasmo com a tarefa, este grupo requisitava mais a nossa presença para certificar-se dos seus desenvolvimentos.

As investigações seguiam e alguns grupos, a exemplo do grupo G_1, já conseguiam montar a expressão do limite que determinaria o valor exato da área (cabe observar que pelo limite ser expresso através de uma única fórmula – a fórmula de Riemann – as equipes tinham raciocínios e soluções muito próximas). Ao se depararem com a soma $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$, tiveram dificuldades em avançar no problema em função da quantidade infinita de parcelas que surgiam no cálculo do limite. Alguns grupos se equivocaram nos cálculos e chegaram a respostas erradas. Percebendo os enganos, procederam aos ajustes necessários (depois de algumas orientações coletivas) e seguiram. Esta circunstância foi bastante útil para as discussões, onde os grupos puderam comentar sobre os equívocos produzidos. Nas entrevistas realizadas posteriormente aos trabalhos, os alunos recordaram os erros cometidos (inclusive por outras equipes) e revelaram a importância desses momentos para a aprendizagem. As expressões abaixo evidenciam este aspecto:

> Nas discussões finais acabo por aprender mais, pois os erros cometidos por outros grupos esclarecem também as nossas dúvidas. (Flávia).
>
> Os debates finais são muito bons, pois nos estimula a falar sobre as nossas soluções. Com isso melhoramos o nosso raciocínio e reforçamos o nosso aprendizado. (Sandra).

Ainda em relação à soma dos cubos, algumas equipes, a exemplo da equipe G_2, requisitaram a nossa presença para que se fornecesse a fórmula desejada para a simplificação do limite, pois o livro trazia apenas a expressão quadrática $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = [(n^2 + n)(2n + 1)] / 6$. Nós explicamos que esta também era uma etapa investigativa, onde eles deveriam pesquisar a fórmula necessária para dar continuidade à solução do problema. Foi assim que alguns alunos partiram para a biblioteca em busca de alguma obra de Álgebra que abordasse o tema, enquanto outros optaram por pesquisar a fórmula pela internet. Esta situação demonstra o caráter de dinamismo na exploração da tarefa e do protagonismo dos alunos na construção do conhecimento.

O grupo G_1 demonstrava mais segurança no desenvolvimento da tarefa. Os alunos conseguiram a fórmula $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = [n(n + 1) / 2]^2$ através da internet e já discutiam os procedimentos demonstrativos finais (Episódio 4):

Episódio 4:

Ricardo: E agora que já temos [a fórmula]?

Alberto: Aqui ela foi substituída... (apontando para um trecho do livro)

Ricardo: Vamos lá, substitua então e vamos calcular [o limite].

(após a substituição os alunos sentem algumas dificuldades na simplificação. Novamente os raciocínios algébricos utilizados estão baseados no caso pesquisado no livro)

João: Deu errado... Deu 8! (eles já esperavam encontrar 4 como resposta em função da conjectura que fizeram diante das evidências computacionais)

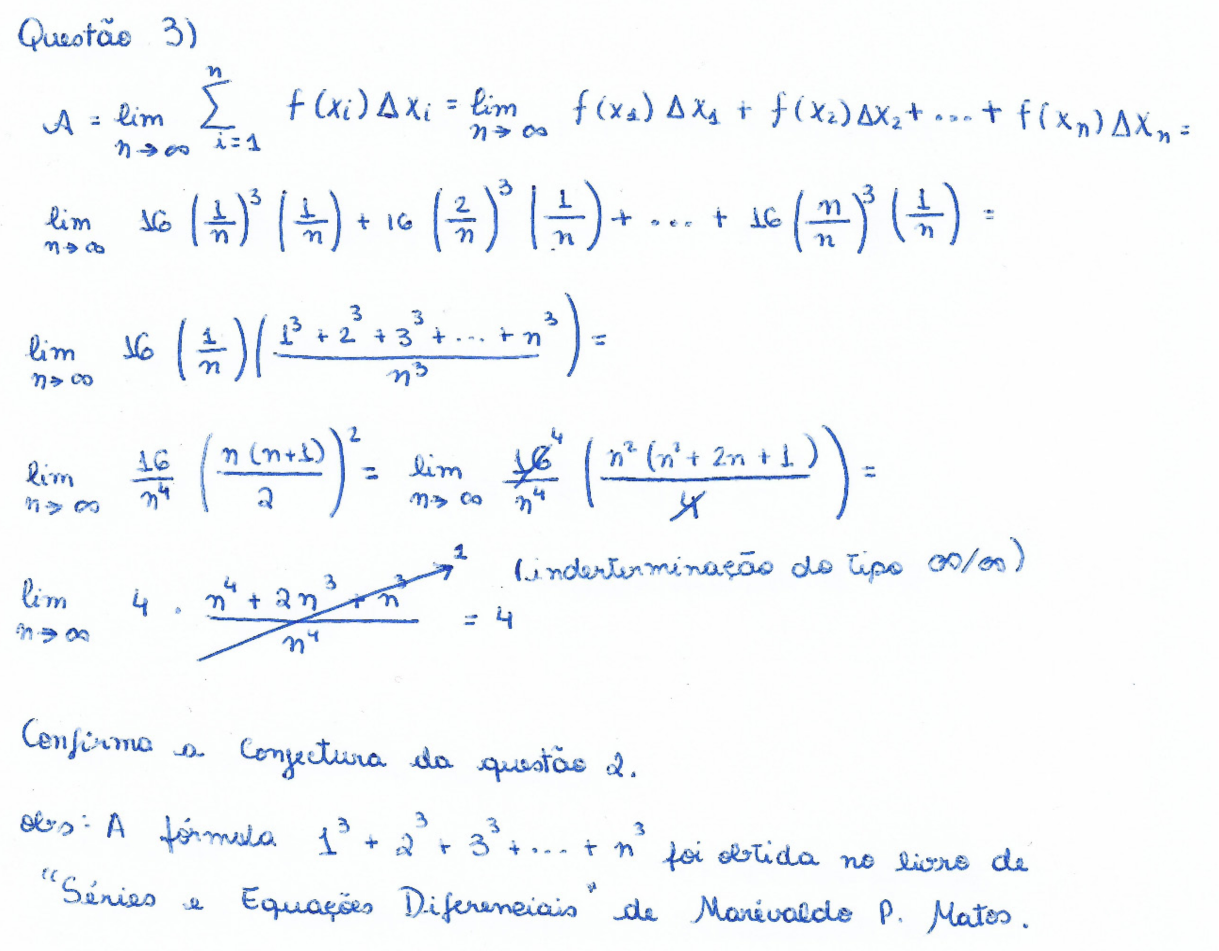
Ricardo: Vamos refazer as contas com calma.

Alberto: Deve ter sido algum sinal...

(depois que observamos detalhadamente as passagens algébricas, percebemos equívocos nas contas e solicitamos que refizessem, desta vez com mais atenção, os cálculos numéricos)

Apesar do contratempo que o grupo apresentou na simplificação da expressão algébrica, que consistia basicamente nas regras de potenciação e fatoração, ao alcançar a sua forma mais simples, calcularam com facilidade o limite. Nesse instante recordaram as técnicas dos limites estudadas em sala de aula e perceberam a sua importância. Fizemos questão de frisar este aspecto, realçando a relevância desse estudo. Depois que o grupo finalmente chegou ao resultado esperado a satisfação foi notória. Alberto ainda me pôde perguntar: *"... e se não existisse uma fórmula pronta para a expressão [soma dos cubos], como chegaríamos até a resposta? Existem fórmulas matemáticas para todas as expressões?"* Essa questão proposta era ótima e seria mais bem explorada nos debates finais, onde todos poderiam localizar as principais dificuldades encontradas na tarefa, como foram superadas e as estratégias utilizadas. A solução desenvolvida pelo grupo G_1 e o raciocínio utilizado na simplificação da fórmula de Riemann podem ser vistas na figura 2. Pode-se perceber que o grupo desenvolveu bem a fórmula. Eles fizeram a substituição apropriada da expressão que reduz o somatório dos cubos, identificaram a indeterminação (do tipo ∞/∞), aplicaram a técnica adequada e confirmaram a conjectura.

Figura 2 – Solução apresentada pelo grupo G_1 a tarefa exploratória.



Questão 3)

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_n)\Delta x_n =$$

$$\lim_{n\to\infty} 16\left(\frac{1}{n}\right)^3\left(\frac{1}{n}\right) + 16\left(\frac{2}{n}\right)^3\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + 16\left(\frac{n}{n}\right)^3\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} 16\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1^3+2^3+3^3+\dots+n^3}{n^3}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{16}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancelto{4}{16}}{n^4}\left(\frac{n^2(n^2+2n+1)}{\cancel{4}}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} 4 \cdot \cancelto{1}{\frac{n^4+2n^3+n^2}{n^4}} = 4$$ (indertenminação do tipo ∞/∞)

Confirma a conjectura da questão 2.

obs: A fórmula $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$ foi obtida no livro de "Séries e Equações Diferenciais" de Marivaldo P. Matos.

Fonte: Grupo G2 (2020).

Ao final dos trabalhos, os alunos tiveram um tempo aproximado de meia hora para responderem ao questionário. As questões versavam mais especificamente sobre o que eles acabaram de vivenciar e produzir na tarefa e buscavam objetivamente focalizar: a compreensão acerca de uma utilidade prática dos limites, as principais dificuldades enfrentadas e a utilização dos recursos tecnológicos.

Considerações finais

Esta tarefa auxiliou a turma a ampliar a sua concepção sobre investigações matemáticas, conjecturas e demonstrações. A abordagem desta tarefa permitiu que os alunos aplicassem os assuntos teóricos ora em estudo (limites) e aprofundassem os seus domínios conceituais, evoluindo os seus conhecimentos na disciplina. Num ambiente diversificado de aprendizagem, em pequenos grupos e fazendo uso dos recursos computacionais, eles vivenciaram os notáveis aspectos das atividades exploratórias e investigativas. Ficou evidente a importância do *software* para este trabalho. Os alunos utilizaram os seus dinâmicos recursos para visualizar gráfico de funções, descobrir padrões e verificar os resultados demonstrados. Foi notável também os recursos do programa que possibilitaram as subdivisões dos retângulos que recobriam a região cuja área buscava-se calcular, promovendo a ampla compreensão do problema.

A introdução da informática na sala de aula, além de ter incorporado importantes fatores motivacionais, permitiu a exploração dinâmica do conhecimento. Os resultados evidenciam as potencialidades que as tarefas exploratórias, com o suporte das tecnologias, agregam ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral. Estas abarcam uma grande diversidade de temas da disciplina e permitem aos alunos: a possibilidade de abordar, do ponto de vista numérico, gráfico e analítico, uma série de atividades contextualizadas; desenvolverem as habilidades típicas dos processos investigativos matemáticos, além de assumirem papéis ativos em pequenos grupos de trabalho no processo de aprendizagem.

Referências

ALLEVATO, N. S. G. Associando o computador à resolução de problemas fechados: Análise de uma experiência. **Tese de Doutoramento**, Unesp, 2005.

ANDRADE, L. N. **Introdução à computação algébrica com o Maple**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

BARUFI, M. C. B. A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral. **Tese de Doutoramento**, USP, 1999.

BIANCHINI, W.; SANTOS A. R. **Aprendendo Cálculo com o Maple - Cálculo de uma variável**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2002.

BISHOP, A.; GOFFREE, F. Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson.; Otte, M. (Eds.), **Perspectives on mathematics education** (p. 309-365). Dordrecht: D. Reidel, 1986.

CURI, R. C.; FARIAS, R. M. S. Métodos de estudo e sua influência no desempenho dos alunos em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. In **Anais do XXXVI Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia** (p. 1–11). São Paulo: ABENGE, 2008.

GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

GARZELLA, F. C. A disciplina de Cálculo I: A análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos. **Tese de Doutoramento**, Unicamp, 2013.

GOMES, G. H.; LOPES, C. M. C.; NIETO, S. S. Cálculo Zero: Uma experiência pedagógica com calouros nos cursos de engenharia. In **XXXIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia** (p. 1–9). Campina Grande: Cobenge, 2005.

MERRIAM, S. B. **Case study research in education:** A qualitative approach. São Francisco, CA: Jossey-Bass, 1988.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2003.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In **Grupo de trabalho de investigação:** o professor e o desenvolvimento curricular (p. 11–34). Lisboa: APM, 2005.

SABACK, M. O desenvolvimento cognitivo e o desempenho em Cálculo na Universidade: Um estudo de caso. **Dissertação de Mestrado**, PUC/RJ, 1980.

SÃO PAULO. **Proposta curricular para o ensino de Matemática:** 2º grau. São Paulo: SE/CENP, 1991.

STEWART, J. **Cálculo Vol. 1.** São Paulo: Cengarge Learning, 2013.

ZUCHI, I. A abordagem do conceito de limite via sequência didática: Do ambiente lápis e papel ao ambiente computacional. **Tese de Doutoramento**, UFSC, 2005.