



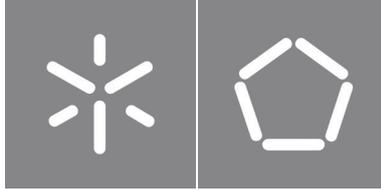
**Universidade do Minho**  
Escola de Engenharia

Miguel José dos Reis Silva

**Metamateriais Mecânicos**  
**Produzidos por Fabrico Digital Direto**

Miguel José dos Reis Silva  
**Metamateriais Mecânicos**  
**Produzidos por Fabrico Digital Direto**





**Universidade do Minho**

Escola de Engenharia

Miguel José dos Reis Silva

**Metamateriais Mecânicos  
Produzidos por Fabrico Digital Direto**

Tese de Doutoramento

Doutoramento em Ciência e Engenharia de Polímeros e  
Compósitos

Trabalho efetuado sob a orientação de:

**Professor Doutor António José Vilela Pontes**

**Professor Doutor António Mário Henriques Pereira**

**Professor Doutor Álvaro Miguel do Céu Gramaxo**

**Oliveira Sampaio**

## **DIREITOS DE AUTOR E CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO DO TRABALHO POR TERCEIROS**

Este é um trabalho académico que pode ser utilizado por terceiros desde que respeitadas as regras e boas práticas internacionalmente aceites, no que concerne aos direitos de autor e direitos conexos.

Assim, o presente trabalho pode ser utilizado nos termos previstos na licença abaixo indicada.

Caso o utilizador necessite de permissão para poder fazer um uso do trabalho em condições não previstas no licenciamento indicado, deverá contactar o autor, através do RepositoriUM da Universidade do Minho.

### ***Licença concedida aos utilizadores deste trabalho***



**Creative Commons Atribuição-NãoComercial-Compartilhalgal 4.0 Internacional**

**CC BY-NC-SA 4.0**

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.pt>

# Agradecimentos

Na realização da presente dissertação, contei com o apoio direto ou indireto de múltiplas pessoas e instituições às quais estou profundamente grato. Correndo o risco de injustamente não mencionar algum dos contributos quero deixar expresso os meus agradecimentos:

Ao Professor Doutor António José Vilela Pontes, como orientador deste trabalho. pela valiosa transmissão de conhecimentos, pelo apoio, sentido prático e amizade sempre demonstrados no decorrer do trabalho.

Ao Professor Doutor António Mário Henriques Pereira, pela coorientação neste trabalho, constante apoio, amizade, otimismo e por sempre me encorajar nesta caminhada sem nunca ter permitido que o desalento se instalasse, mesmo quando as coisas não corriam bem.

Ao Professor Doutor Álvaro Miguel do Céu Gramaxo Oliveira Sampaio, pela sua coorientação, apoio, disponibilidade, pelas opiniões e críticas ao longo da realização deste trabalho.

Ao Professor Doutor João Alexandre Dias de Oliveira, pela forma generosa e amigável com que sempre me ajudou e pelas conversas que, de uma forma ou de outra, sempre contribuíram para resultados práticos importantes.

Ao DONE LAB, pelos recursos disponibilizados na realização deste trabalho.

Ao CDRSP, pelo apoio e disponibilização dos recursos necessário ao desenvolvimento deste trabalho.

A todas as pessoas que contribuíram para a execução deste trabalho.

À Fundação para a Ciência e a tecnologia (FCT), pelo apoio concedido no âmbito da bolsa de doutoramento SFRH/BD/130908/2017.

À minha mulher, Helena Maria, pelo apoio e sacrifício pessoal que me permitiram realizar este trabalho. Por fim, quero demonstrar o meu agradecimento, a todos aqueles que, de um modo ou de outro, tornaram possível a realização do presente trabalho.

A todos os meus sinceros agradecimentos.

Dedico este trabalho à minha mulher Helena, que me deu tranquilidade, o que me possibilitou empenhar-me no que mais gosto de fazer, estudar.

### **DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE**

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

Universidade do Minho,        de julho de 2022

---

Miguel José dos Reis Silva

# Resumo

## **Metamateriais Mecânicos Produzidos por Fabrico Digital Direto**

Atualmente, existe necessidade de materiais inovadores, com novas propriedades, capazes de conferir desempenho superior aos componentes e sistemas. Os materiais sólidos contínuos apresentam propriedades fortemente dependentes dos seus constituintes base. Contudo, com o desenvolvimento dos metamateriais nas últimas décadas, dá origem a uma nova classe de materiais com novas propriedades que resultam da sua microestrutura interna. Os metamateriais mecânicos, especificamente, são uma categoria de materiais celulares cujas propriedades mecânicas são obtidas pela distribuição ótima do material. O principal objetivo deste trabalho é a produção de metamateriais mecânicos através de Fabrico digital direto, estabelecendo relações entre a conceção por intermédio de ferramentas computacionais, a tecnologia de fabrico e a validação experimental. A metodologia utilizada aplica o método numérico de otimização topologia SIMP e explora a conjugação de diferentes restrições de densidade e forças aplicadas nas soluções iniciais com os parâmetros de otimização na conceção de microestruturas ótimas. A homogeneização numérica, é utilizada para estimar as propriedades mecânicas das microestruturas otimizadas. Através da fabricação aditiva por Material Jetting as microestruturas ótimas são produzidas sendo posteriormente sujeitas a ensaios mecânicos. As microestruturas obtidas pela metodologia proposta possuem propriedades mecânicas diversas. As propriedades mecânicas experimentais à tração, compressão e corte são inferiores às homogeneizadas e dependentes do tamanho de escala e da fração volúmica de material sólido empregue nos provetes. Sendo os desvios do módulo de Young e de elasticidade transversal inversamente proporcional como aumento da escala e frações volúmicas dos provetes. Apesar das diferenças entre as propriedades homogeneizadas e as experimentais estarem de acordo com o pressuposto de periodicidade assumida nos métodos de homogeneização, existem outros fatores que podem influenciar estes desvios como, o tipo e tamanho de malha empregue na discretização do domínio, o tamanho dos provetes e as condições de fronteira e carregamentos impostos, especificidades do processo produtivo e dos materiais empregues. Este trabalho conclui que a metodologia aplicada é válida para a conceção e produção de metamateriais mecânicos por fabricação aditiva e que as propriedades experimentais destes produzidos por Material Jetting são inferiores às homogeneizadas.

### **Palavras-chave:**

Fabrico digital direto, Homogeneização, Metamateriais mecânicos, Otimização topológica, Polímeros.

# Abstract

## **Mechanical Metamaterials Produced by Direct Digital Manufacturing**

Currently, there is a need for innovative materials with new properties capable of providing superior performance to components and systems. Continuous solid materials have properties that are strongly dependent on their base constituents. However, the development of metamaterials in the last decades gives rise to a new class of materials with new properties that result from their internal microstructure. Mechanical metamaterials, specifically, are a category of cellular materials whose mechanical properties are obtained by the optimal distribution of the material. The main objective of this work is the production of mechanical metamaterials through direct digital fabrication, establishing relationships between design using computational tools, manufacturing technology and experimental validation. The methodology used applies the numerical method of SIMP topology optimization and explores the combination of different density constraints and forces applied in the initial solutions with the optimization in the design of optimal microstructures. Numerical homogenization is used to estimate the mechanical properties of optimized microstructures. Through additive fabrication by Material Jetting, optimal microstructures are produced at different scales being subsequently subjected to mechanical tests. The microstructures obtained by the proposed methodology have different mechanical properties. The experimental mechanical properties in traction, compression, and shear are inferior to the homogenized ones and dependent on the scale size factors and the volume fraction of solid material used in the specimens. The deviations of Young's modulus and transverse elasticity are inversely proportional to the increase in scale and specimens volume fractions. Although the differences between the homogenized and experimental properties are under the periodicity assumption assumed in the homogenization methods, other factors can influence these deviations, such as the type and size of mesh used in the discretization of the domain, the size of the specimens and the border conditions and loads imposed, specificities of the production process and the materials used. This work concludes that the methodology applied is valid for the design and production of mechanical metamaterials by additive manufacturing. The experimental properties of these produced by Material Jetting are lower than those estimated by homogenization.

**Keywords:** Direct digital manufacturing, Homogenisation, Mechanical metamaterials, Polymers, Topology optimisation.

# Índice

<b>Índice de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Índice de Tabelas</b>	<b>xv</b>
<b>Siglas</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Enquadramento . . . . .	1
1.2 Metodologias de investigação . . . . .	10
1.3 Objetivos . . . . .	12
<b>2 Revisão Bibliográfica</b>	<b>15</b>
2.1 Introdução . . . . .	15
2.2 Metamateriais mecânicos . . . . .	16
2.3 Otimização topológica e interpolação de material . . . . .	22
2.3.1 Otimização estrutural . . . . .	22
2.3.2 Tipos de otimização estrutural . . . . .	24
2.3.3 Fundamentos matemáticos . . . . .	25
2.3.4 Condições de ótimo do problema de variáveis contínuas . . . . .	28
2.3.5 Problema não estrangido . . . . .	29
2.3.6 Problema estrangido . . . . .	30
2.3.7 Ótimo global e convexidade . . . . .	31
2.3.8 Métodos de otimização de estruturas e sistemas mecânicos . . . . .	34
2.3.9 Métodos de gradiente . . . . .	35
2.4 Homogeneização computacional das propriedades elásticas . . . . .	39
2.4.1 Homogeneização e localização . . . . .	42
2.4.2 Elementos de volume . . . . .	43

2.4.3	Comportamento geral e simetrias do material . . . . .	44
2.4.4	Estratégias de modelação . . . . .	46
2.4.5	Condições de fronteira . . . . .	50
2.5	Fabrico digital direto . . . . .	52
2.6	Regras de projeto para jato de material . . . . .	68
2.7	Propriedades mecânicas de polímeros produzidos por Material Jetting . . . . .	78
2.8	Propriedades mecânicas de materiais celulares . . . . .	80
2.9	Mínimo detalhe de impressão . . . . .	84
2.10	Ligações cinemáticas . . . . .	85
<b>3</b>	<b>Processos e Métodos</b>	<b>87</b>
3.1	Componente computacional . . . . .	87
3.1.1	Implementação das ferramentas computacionais . . . . .	88
3.1.2	Homogeneização computacional direta . . . . .	111
3.1.3	Ensaio de desempenho . . . . .	121
3.2	Componente experimental . . . . .	128
3.2.1	Caracterização mecânica . . . . .	128
3.2.2	Normalização . . . . .	129
3.2.3	Ensaio mecânicos do material base . . . . .	130
3.2.4	Ensaio mecânicos – volumes repetitivos unitários . . . . .	134
<b>4</b>	<b>Resultados e Discussão</b>	<b>145</b>
4.1	Introdução . . . . .	145
4.2	Influência das soluções iniciais e parâmetros SIMP . . . . .	146
4.3	Ensaio de desempenho . . . . .	151
4.4	Topologias ótimas . . . . .	156
4.5	Pós-processamento das topologias ótimas . . . . .	165
4.6	Caracterização do material base . . . . .	165
4.6.1	Ensaio de tração materiais base . . . . .	165
4.6.2	Ensaio de compressão . . . . .	169
4.7	Resultados das topologias ótimas . . . . .	173
4.7.1	Ensaio de tração das topologias ótimas . . . . .	173
4.7.2	Ensaio de compressão das topologias ótimas . . . . .	174
4.7.3	Ensaio de corte das topologias ótimas . . . . .	177
<b>5</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>183</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>187</b>

**Apêndices**

<b>A</b>	<b>Resultados Experimentais da Caracterização Mecânica</b>	<b>213</b>
A.1	Resultados do ensaio tração material base . . . . .	213
A.2	Resultados do ensaio compressão material base . . . . .	217
<b>B</b>	<b>Classificação da literatura das Regras de Projeto PolyJet</b>	<b>223</b>
<b>C</b>	<b>Resultados Experimentais da Caracterização Mecânica de VRU</b>	<b>239</b>
C.1	Resultados do ensaio de tração dos VRU . . . . .	239
C.2	Resultados do ensaio de compressão dos VRU . . . . .	241
C.3	Acessório de fixação ensaio de corte . . . . .	242
C.4	Resultados do ensaio de corte dos VRU . . . . .	243
<b>D</b>	<b>Lista de Publicações</b>	<b>245</b>
D.1	Publicação 1 . . . . .	245
D.2	Publicação 2 . . . . .	245



## Índice de Figuras

Figura 1	Diagrama de Ashby . . . . .	4
Figura 2	Escalas de comprimento em análise micromecânica . . . . .	6
Figura 3	Geometria dos conceitos de Volume Característico Unitário (VCU) e de Volume Repetitivo Unitário (VRU) . . . . .	6
Figura 4	Método de Otimização Topológica multiescala . . . . .	8
Figura 5	Método de investigação . . . . .	10
Figura 6	Estudo da forma ótima de uma viga encastrada . . . . .	23
Figura 7	Estruturas reticuladas de Michell . . . . .	23
Figura 8	Categorias de otimização estrutural . . . . .	24
Figura 9	Otimização topológica, variáveis contínuas e discretas . . . . .	25
Figura 10	Mínimos locais e globais de uma função . . . . .	29
Figura 11	Exemplos de funções convexas e côncavas . . . . .	32
Figura 12	Exemplos de conjuntos convexos e não-convexos . . . . .	32
Figura 13	Níveis de escala empregues na análise multiescala . . . . .	40
Figura 14	Etapas genéricas entre o CAD e a peça final . . . . .	54
Figura 15	Variantes do processo Vat Polymerization . . . . .	57
Figura 16	Processo de Selective Laser Sintering . . . . .	58
Figura 17	Processo de Fused Filament Fabrication . . . . .	59
Figura 18	Processo de Material Extrusion . . . . .	60
Figura 19	Processo de Sheet Lamination . . . . .	62
Figura 20	Processo de Directed Energy Deposition . . . . .	63
Figura 21	Processo de Material Jetting . . . . .	64
Figura 22	Principais métodos de produção de gotículas empregues no processo Material Jetting . . . . .	66
Figura 23	Sistema de impressão Drop-on-demand . . . . .	67
Figura 24	Fluxograma regras de projeto para o processo PolyJet . . . . .	71
Figura 25	Tipos de células unitárias tridimensionais . . . . .	81

Figura 26 Modelos de células unitárias tridimensionais de Gibson-Ashby . . . . .	82
Figura 27 Curvas de tensão-deformação à compressão típicas para materiais celulares dominados por flexão e alongamento . . . . .	84
Figura 28 Função de penalização SIMP . . . . .	93
Figura 29 Instabilidades numéricas em otimização topológica . . . . .	100
Figura 30 Raio de filtro . . . . .	104
Figura 31 Fluxograma método SIMP . . . . .	106
Figura 32 Domínio admissível inicial com nucleações . . . . .	107
Figura 33 Variações das variáveis deslocamento e deformação . . . . .	113
Figura 34 Diferentes mas equivalentes células unitárias, caso bidimensional . . . . .	114
Figura 35 Volume unitário periódico . . . . .	115
Figura 36 Condições de fronteira periódicas célula unitária 2d . . . . .	116
Figura 37 Célula unitária periódica, solicitações . . . . .	118
Figura 38 Tensões resultantes da aplicação dos seis deslocamentos uniformes característicos	119
Figura 39 Elementos finitos sólidos utilizados . . . . .	121
Figura 40 Condições de fronteira impostas testadas . . . . .	122
Figura 41 Condições de fronteira impostas no estudo do problema 4 . . . . .	124
Figura 42 Malhas de elementos finitos utilizadas na avaliação de desempenho . . . . .	125
Figura 43 Soluções iniciais e condições de fronteira impostas no estudo do problema 4 . . . . .	126
Figura 44 Condições fronteira para prevenir o movimento de corpos rígidos . . . . .	126
Figura 45 Visualização de ficheiro .stl de um VRU . . . . .	128
Figura 46 Orientação dos provetes de tração na plataforma de fabrico . . . . .	132
Figura 47 Ensaio mecânicos de tração . . . . .	132
Figura 48 Orientação dos provetes de compressão na plataforma de fabrico . . . . .	134
Figura 49 Modelos de provete osso-de-cão empregues nos ensaio de tração . . . . .	137
Figura 50 Provetes de ensaio de tração após produção . . . . .	137
Figura 51 Provetes cúbicos com fração volúmica 30 % com três arranjos distintos de VRU . . . . .	139
Figura 52 Teste de corte por sobreposição simples provete no estado inicial e carregado . . . . .	141
Figura 53 Montagem proposta para o ensaio de corte por sobreposição simples . . . . .	142
Figura 54 Provelte com 30 % fração volúmica para ensaio de corte após produção . . . . .	143
Figura 55 Tempo de cálculo em função do tamanho da malha e do tipo de elemento finito . . . . .	151
Figura 56 Malhas de elementos finitos empregues no estudo da rigidez em função do tamanho da malha e do tipo de elemento finito . . . . .	154
Figura 57 Rigidez por tipo elemento finito em função do tamanho da malha . . . . .	155
Figura 58 Diagramas módulo de Young normalizado ( $E_{11}$ )–fração volúmica das famílias FFA e FFV de topologias ótimas obtidas por imposição de forças . . . . .	158

Figura 59 Diagramas módulo de Young normalizado ( $E_{11}$ )–fração volúmica das famílias FVA e FFVA de topologias ótimas obtidas por imposição de forças . . . . .	159
Figura 60 Padrões de tabuleiro de xadrez originados em topologias otimizadas ao corte . . . . .	160
Figura 61 Região do espaço de propriedades das famílias de VRU . . . . .	163
Figura 62 Região do espaço de propriedades das famílias de VRU (cont.) . . . . .	164
Figura 63 Exemplo de topologias ótimas concatenadas pós-processamento . . . . .	165
Figura 64 Propriedades mecânicas nas orientações de produção xy e xz . . . . .	168
Figura 65 Efeito do material de suporte no aumento de espessura . . . . .	170
Figura 66 Provete longo após realização do ensaio de compressão . . . . .	172
Figura 67 Desvios do módulo de Young à tração experimental relativamente ao homogeneizado	175
Figura 68 Padrões de <i>checkerboard</i> no interior de VRU . . . . .	176
Figura 69 Diagramas dos desvios do módulo de Young à compressão experimental relativamente ao homogeneizado . . . . .	178
Figura 70 Diagrama dos desvios do módulo de Young à compressão experimental relativamente ao homogeneizado (cont.) . . . . .	179
Figura 71 Ensaio de corte dos provetes com fração volúmica 30 % . . . . .	180
Figura 72 Provetes após o ensaio de corte . . . . .	181
Figura A.1 Provete de tração tipo 1A . . . . .	213
Figura A.2 Diagramas tensão-deformação à tração VeroClear . . . . .	215
Figura A.3 Diagramas tensão-deformação à compressão material VeroClear . . . . .	218
Figura C.1 Diagramas tensão–deformação ensaios de tração de topologias ótimas . . . . .	240
Figura C.2 Diagramas tensão-deformação à compressão de topologias ótimas . . . . .	241
Figura C.3 Diagramas tensão-deformação à compressão de topologias ótimas . . . . .	242
Figura C.4 Desenho 2D do acessório para ensaio de corte . . . . .	242
Figura C.5 Diagramas força-deslocamento obtidos no ensaio de corte . . . . .	243



## Índice de Tabelas

Tabela 1	Resumo da classificação de literatura dos Metamateriais Mecânicos . . . . .	21
Tabela 2	Grupos de trabalho ISO/TC261 e ASTM F42 . . . . .	56
Tabela 3	Materiais testados e respetivos ataques químicos . . . . .	77
Tabela 4	Materiais de Fabrico Digital Direto (FDD), processo jato de material Polyjet . . . . .	79
Tabela 5	Algoritmo 1, conversão da geometria em ficheiro formato .stl . . . . .	110
Tabela 6	Algoritmo 2, manipulação/combinção de ficheiro formato .stl . . . . .	110
Tabela 7	Algoritmo 3, refinamento de malha . . . . .	111
Tabela 8	Parâmetros utilizados no estudo dos diferentes problemas . . . . .	123
Tabela 9	Especificações do material VeroClear . . . . .	131
Tabela 10	Configurações dos VRU otimizados a solicitação hidrostática . . . . .	136
Tabela 11	Configurações dos VRU otimizados a solicitação de corte . . . . .	138
Tabela 12	Topologias resultantes do problema 1 . . . . .	146
Tabela 13	Topologias resultantes do problema 2 . . . . .	147
Tabela 14	Topologias resultantes do problema 3 . . . . .	148
Tabela 15	Topologias resultantes do problema 4 . . . . .	149
Tabela 16	Topologias resultantes do problema 5 . . . . .	150
Tabela 17	Topologias ótimas obtidas nos ensaios de desempenho . . . . .	153
Tabela 18	Propriedades homogeneizadas para duas malhas com diferentes elementos finitos .	153
Tabela 19	Topologias ótimas obtidas a partir de soluções iniciais com restrições de densidade e imposição de deslocamentos caso N1E, N1G, N2E e N2G . . . . .	157
Tabela 20	Topologias ótimas obtidas a partir de soluções iniciais com restrições de densidade e imposição de deslocamentos caso N3E e N3G . . . . .	160
Tabela 21	Topologias ótimas imposição de forças . . . . .	161
Tabela 22	Média e desvio padrão das dimensões dos provetes ensaio tração do material VeroClear	166
Tabela 23	Resumo das propriedades mecânicas VeroClear à tração, orientação xy . . . . .	167
Tabela 24	Resumo das propriedades mecânicas VeroClear à tração, orientação xz . . . . .	167

Tabela 25	Dimensões dos provetes para determinação das propriedades mecânicas à compressão do material VeroClear . . . . .	170
Tabela 26	Propriedades mecânicas médias do VeroClear à compressão . . . . .	171
Tabela 27	Estudo comparativo dos módulos de elasticidade à tração . . . . .	174
Tabela 28	Resultados do estudo comparativo dos módulos de elasticidade à compressão . . .	177
Tabela 29	Estudo comparativo dos módulos de elasticidade transversal homogeneizados e obtidos no ensaio de corte . . . . .	180
Tabela A.1	Dimensões do provete para ensaio à tração . . . . .	214
Tabela A.2	Dimensões dos provetes para determinação das propriedades mecânicas à tração do material VeroClear . . . . .	214
Tabela A.3	Propriedades mecânicas VeroClear à tração, orientação xy . . . . .	216
Tabela A.4	Propriedades mecânicas VeroClear à tração, orientação xz . . . . .	217
Tabela A.5	Dimensões dos provetes para determinação das propriedades mecânicas à compressão do material VeroClear . . . . .	219
Tabela A.6	Propriedades mecânicas VeroClear à compressão, provetes curtos . . . . .	220
Tabela A.7	Propriedades mecânicas VeroClear à compressão, provetes longos . . . . .	221
Tabela B.1	Classificação de bibliografia da caracterização dos materiais produzidos por tecnologia PolyJet . . . . .	224

# Siglas

<b>.3mf</b>	<i>Manufacturing Format</i>
<b>.VRML</b>	<i>Virtual Reality Modeling Language</i>
<b>.amf</b>	<i>Additive Manufacturing File Format</i>
<b>.cae</b>	<i>Model Database</i>
<b>.obj</b>	<i>Wavefront .obj file</i>
<b>.stl</b>	<i>STereoLithography ou Standard Tessellation Language</i>
<b>3DP</b>	<i>Three-Dimensional Printing</i>
<b>ABS</b>	<i>Acrilonitrilo Butadieno Estireno</i>
<b>ASCII</b>	<i>American Standard Code for Information Interchange</i>
<b>ASI</b>	<i>Abaqus Scripting Interface</i>
<b>ASTM</b>	<i>American Society for Testing and Materials</i>
<b>BC</b>	<i>Boundary Condition</i>
<b>BESO</b>	<i>Bi-directional Evolutionary Structural Optimisation</i>
<b>BJ</b>	<i>Binder Jetting</i>
<b>BM</b>	<i>Bounding Method</i>
<b>CAD</b>	<i>Computer-Aided Design</i>
<b>CAE</b>	<i>Computer Aided Engineering</i>
<b>CDRSP</b>	<i>Centro para o Desenvolvimento Rápido e Sustentável do Produto</i>
<b>CS</b>	<i>Continuous Stream</i>
<b>DDM</b>	<i>Direct Digital Manufacturing</i>
<b>DED</b>	<i>Directed Energy Deposition</i>

<b>DMA</b>	<i>Dynamic Mechanical Analysis</i>
<b>DMD</b>	<i>Digital Micromirror Device</i>
<b>DMLS</b>	<i>Direct Metal Laser Sintering</i>
<b>DOD</b>	<i>Drop-on-demand</i>
<b>DOE</b>	<i>Design of Experiments</i>
<b>DONE Lab</b>	Advanced Manufacturing of Products and Tools
<b>EBM</b>	<i>Electron Beam Melting</i>
<b>ECA</b>	<i>Embedded Cell Approach</i>
<b>ESO</b>	<i>Evolutionary Structural Optimisation</i>
<b>FA</b>	Fabrico Aditivo
<b>FDD</b>	Fabrico Digital Direto
<b>FFF</b>	<i>Fused Filament Fabrication</i>
<b>FFT</b>	<i>Fast Fourier Transforms</i>
<b>GMC</b>	<i>Generalized Method of Cell</i>
<b>GUI</b>	<i>Graphical User Interface</i>
<b>HCD</b>	Homogeneização Computacional Direta
<b>HP</b>	<i>Homogeneização Periódica</i>
<b>IJ</b>	<i>Inkjet</i>
<b>IPC</b>	Instituto de Polímeros e Compósitos
<b>ISO</b>	<i>International Organization for Standardization</i>
<b>KKT</b>	Karush-Kuhn-Tucker
<b>KUBC</b>	<i>Kinematically Uniform Boundary Condition</i>
<b>LOM</b>	<i>Laminated Object Manufacturing</i>
<b>LSM</b>	<i>Level-Set Methods</i>
<b>MC</b>	<i>Method of Cell</i>
<b>mD</b>	Micro-detalhe
<b>MD</b>	Materiais Digitais
<b>ME</b>	<i>Material Extrusion</i>
<b>MEF</b>	Método dos Elementos Finitos

---

<b>MFA</b>	<i>Mean-Field Approach</i>
<b>MJ</b>	<i>Material Jetting</i>
<b>MM</b>	Metamaterial
<b>MMDF</b>	<i>Method of Macroscopic Degrees of Freedom</i>
<b>MMM</b>	Metamaterial Mecânico
<b>MSAH</b>	<i>Main Stream Averaging Homogenization</i>
<b>MUBC</b>	<i>Mixed Uniform Boundary Condition</i>
<b>NE</b>	Norma Europeia
<b>OC</b>	Critério de Ótimo
<b>OT</b>	Otimização Topológica
<b>PA</b>	Poliamida
<b>PAEK</b>	Poliarletocercetona
<b>PBC</b>	<i>Periodic Boundary Condition</i>
<b>PBF</b>	<i>Powder Bed Fusion</i>
<b>PC</b>	Policarbonato
<b>PEEK</b>	Poli(éter-éter-cetona)
<b>PEI</b>	Polieterimida
<b>PJet</b>	Polyjet
<b>PL</b>	Programação Linear
<b>PLA</b>	Ácido Polilático
<b>PMA</b>	<i>Periodic Microfield Approach</i>
<b>PNL</b>	Programação não-Linear
<b>PQ</b>	Programação Quadrática
<b>PS</b>	Poliestireno
<b>RP</b>	Regras de Projeto
<b>SHS</b>	<i>Selective Heat Sintering</i>
<b>SIMP</b>	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
<b>SL</b>	<i>Sheet Lamination</i>
<b>SLA</b>	<i>Stereolithography</i>
<b>SLM</b>	<i>Selective Laser Melting</i>
<b>SLS</b>	<i>Selective Laser Sintering</i>
<b>SUBC</b>	<i>Statically Uniform Boundary Condition</i>

<b>TPMS</b>	<i>Triply Periodic Minimal Surface</i>
<b>TPP</b>	<i>Two-Photon Polymerization</i>
<b>UDBC</b>	<i>Uniform Dirichlet Boundary Condition</i>
<b>UNBC</b>	<i>Uniform Neumann Boundary Condition</i>
<b>UV</b>	Ultravioleta
<b>VCU</b>	Volume Característico Unitário
<b>VP</b>	<i>Vat Polymerization</i>
<b>VRU</b>	Volume Repetitivo Unitário
<b>WA</b>	<i>Windowing Approach</i>

# Introdução

*Neste capítulo introduzem-se os temas as motivações e objetivos do projeto de investigação desenvolvido. É apresentado o enquadramento geral da temática da produção de metamateriais mecânicos por tecnologias aditivas e as metodologias de investigação adotadas. É igualmente apresentado um guia de leitura com a organização adotada ao longo deste trabalho.*

## 1.1 Enquadramento

A evolução dos materiais acompanha a evolução da própria humanidade. Ao longo dos tempos assistiu-se à mudança do relevo relativo dos materiais utilizados pelo homem. O domínio absoluto inicial dos materiais naturais foi paulatinamente reduzido a dar lugar a materiais produzidos pelo homem (i.e., artificiais). Esta necessidade de melhoria constante está na génese da procura de novos materiais e componentes com propriedades singulares e novas funcionalidades. Atualmente, o desenvolvimento de novos materiais de engenharia com resposta programada como função da solicitação é uma área do conhecimento com especial interesse por parte da comunidade científica e tecnológica. A conceção e desenvolvimento de novos materiais de engenharia pode ser alcançada pela manipulação dos seus constituintes ao nível da composição e/ou da microestrutura. Esta última forma de manipulação destaca-se pelo notável interesse expresso ao estudo e manipulação da distribuição dos materiais e fases no interior da sua microestrutura. Nestes materiais cujas propriedades são fortemente dependentes da sua microestrutura interna é possível obter propriedades específicas. A esta nova classe de materiais com propriedades distintas dos materiais encontrados na natureza designam-se de Metamateriais (MM). Estes materiais podem ser classificados de diferentes formas. Uma forma de classificação, divide os MM em quatro classes, eletromagnéticos, termodinâmicos, acústicos e mecânicos (Casadei, Beck et al., 2012; N. Li et al., 2012; X. C. Tong, 2017; P. Wang et al., 2013). Estes últimos, os Metamateriais Mecânicos (MMM), são um grupo de estruturas artificiais que exibem propriedades mecânicas incomuns, resultantes da sua geometria microestrutural,

e cuja materialização é estimulante. A utilização de ferramentas computacionais permite conceber, simular e otimizar novos componentes para uma determinada aplicação. Nestas abordagens os modelos são validados através de métodos computacionais com poupanças de tempo e financeiras sem necessidade de construção de protótipos. Para que estas ferramentas sejam vantajosas e de aplicabilidade prática, os seus resultados deverão estar de acordo com os observados experimentalmente (i.e., possuir uma natureza preditiva). Mais, as ferramentas de simulação deverão prever com precisão a influência da mudança do *design* (ou variáveis de projeto) no desempenho do componente. Por outro lado, o fabrico destes materiais representa um desafio tecnológico para as tecnologias convencionais, requerendo uma tecnologia com poucos limites nas formas geométricas possíveis de produção. As tecnologias convencionais (e.g., corte por arranque de apara) possuem limitações intrínsecas aos próprios processos, que impedem a produção de metamateriais tridimensionais (3D), ficando limitados à materialização de geometrias com duas dimensões (2D), a tecnologia de Fabrico Digital Direto (FDD) surge como resposta natural ao fabrico dos MM. A recente evolução da tecnologia de FDD permite a produção de componentes com geometrias complexas. A utilização do FDD apresenta-se como a tecnologia mais promissora na materialização dos MM. Porém por ser uma tecnologia recente as suas metodologias para produção de MMM não estão solidamente estruturadas, encontrando-se dispersas. Outro aspeto prende-se com a necessidade de caracterizar experimentalmente as propriedades mecânicas efetivas e a sua comparação com as resultantes dos modelos de previsão. Do ponto de vista experimental a determinação das propriedades mecânicas reveste-se de dificuldades de vária ordem (e.g., imposição de condições fronteira e de carregamento reais, tamanho dos provetes). Pelo exposto, a materialização dos MMM por FDD levanta três questões principais:

- Qual a melhor metodologia a adotar para a produção de MMM por FDD?
- Que propriedades mecânicas efetivas terão os MMM produzidos por FDD?
- As propriedades experimentais dos MMM estarão de acordo com os modelos teóricos?

Estas três questões sintetizam a motivação desta tese de doutoramento e estão na origem dos métodos de investigação e planeamento das atividades.

As propriedades dos componentes são fortemente dependentes das suas geometrias internas (i.e., da distribuição dos materiais no seu interior) e dos materiais base de que são constituídos (M. F. Ashby e Cebon, 1993). A expansão do domínio das propriedades dos materiais nos últimos 60 anos, ocorreu de forma significativa (Fleck et al., 2010). Apesar de atualmente existirem mais de 150 000 materiais diferentes, distribuídos por sete categorias: metais, cerâmicos, polímeros, elastômeros, vidros, materiais naturais e compósitos, existem limites teóricos das propriedades que os componentes podem exibir (M. F. Ashby, 1989; Dieter, 2000). São várias as motivações para procurar novos materiais com maior resistência mecânica: ferramentas com melhor desempenho, mais duráveis; transportes mais eficientes; estruturas mais arrojadas; materiais e sistemas mais complexos (Fleck et al., 2010; J. Christensen et al.,

2015). É na área da engenharia que existe forte competição, novos materiais criam oportunidades de inovação para novos produtos e para a evolução dos já existentes, com melhor desempenho e menor custo. Neste contexto a seleção adequada dos materiais é fundamental (M. F. Ashby, 1989; J. Christensen et al., 2015).

O processo de seleção dos materiais de acordo com as solicitações e especificações da aplicação compara diferentes propriedades alvo, mecânicas, térmicas, físicas e restrições como o custo, com vista à maximização de um ou mais índices de desempenho (M. F. Ashby, 1989). Atualmente a escolha dos materiais é majoritariamente realizada através de métodos (e.g., diagrama de Ashby), que representam uma dimensão do espaço multidimensional, que são as propriedades dos materiais (Fleck et al., 2010). Do ponto de vista mecânico, é comum ter como objetivo maximizar a resistência mecânica e reduzir o peso. Contudo estas duas propriedades exibem uma relação de proporcionalidade direta, conflituante considerando o objetivo. A Figura 1 apresenta a relação entre a resistência mecânica e a densidade das principais classes de materiais. As limitações dos materiais sólidos contínuos existem, sempre que pretendemos otimizar inversamente propriedades dependentes, quer sejam mecânicas, térmicas ou físicas. Uma solução é alargar os intervalos de variação das propriedades dos materiais. Existem espaços, que por razões fundamentais, são inacessíveis de preencher em virtude do tamanho dos átomos ou da natureza das forças de atração que garantem a coesão da matéria, representada na Figura 1. Apesar destas limitações físicas fundamentais existem regiões que podem ser preenchidas com novos materiais ou propriedades (Figura 1). O Desenvolvimento de novos materiais, em especial com resistência mecânica específica elevada é de particular interesse da indústria automóvel, aeronáutica e aeroespacial, nas quais as poupanças no peso incrementam a eficiência e o desempenho dos produtos (Kaur et al., 2017). Este progresso poderá ser alcançado através de três diferentes abordagens.

A primeira através do desenvolvimento de novas combinações dos elementos base: (i) manipulação química, (ii) desenvolvimento de novas ligas, (iii) novos polímeros e composições de cerâmicas e vidros. A segunda abordagem pela manipulação da estrutura à escala molecular ou nano através de processos termomecânicos de controlo da distribuição das fases e dos defeitos na estrutura interna dos materiais. A terceira abordagem pelo controlo da sua micro arquitetura: (i) combinação de diferentes materiais, (ii) distribuição dos materiais, espaços vazios e suas ligações (*i.e.*, microestrutura interna) (Berger et al., 2017). Esta última abordagem permite conceber materiais com propriedades definidas para povoar a região alvo, mas também criar uma nova classe de materiais, os metamateriais.

O conceito de produzir materiais celulares com arquiteturas artificiais não é recente. Em 1873 James Clerk Maxwell e J. J. Thompson (1904) sugeriam a possibilidade de utilizar laminados. O trabalho de Bose (1898) sobre propriedades óticas, birrefringência artificial linear e circular em compósitos dielétricos curvos, influenciou o conceito de metamaterial. Mais tarde Lindman (1920) publicou estudos sobre materiais com ressonância ótica quando solicitados em frequências micro-ondas. O termo metamaterial surgiu no início de 2000 nos trabalhos experimentais de Smith e de Pendry, acerca da refração negativa (Lapine e Tretyakov, 2007). Contudo trabalhos anteriores como o de Veselago em 1960, já conceptualizavam materiais com parâmetros eletromagnéticos negativos (X. C. Tong, 2017). A evolução, com início da década

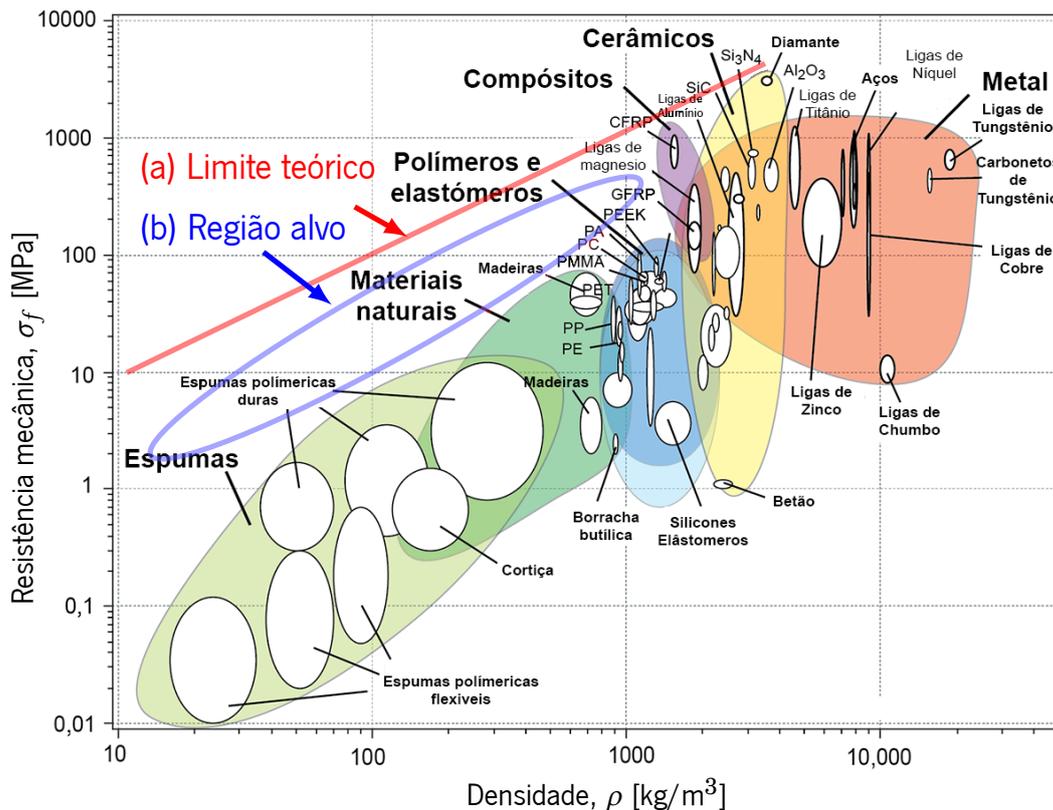


Figura 1: Diagrama de Ashby (adaptado de Granta (2018)).

de oitenta do século passado, das tecnologias de FDD ao nível dos processos, equipamentos e materiais, permitiu validar experimentalmente modelos e conceitos teóricos de MM (J. Christensen et al., 2015; H. Yang et al., 2017). O termo MM teve origem nos estudos realizados na área do eletromagnetismo e na ótica, apesar de ser conotado com estes materiais, o conceito MM estende-se a outras áreas como a termodinâmica, acústica e mecânica (Vehmas, 2015).

Os MMM são um grupo de estruturas artificiais que exibem propriedades mecânicas incomuns, resultantes da geometria da microestrutura. Os primeiros MMM foram desenvolvidos para controlo das ondas acústicas, através do comportamento auxético, gerado pelas instabilidades em microestruturas treliça e cascas finas elásticas (Bertoldi et al., 2009; Bertoldi, 2017; Y. Zhang et al., 2008). Esta classe de MM está relacionada com os quatro coeficientes elásticos, módulo de Young ( $E$ ), módulo de corte ( $G$ ), módulo de compressibilidade ( $K$ ) e coeficiente de Poisson ( $\nu$ ). Os MMM exibem propriedades macro atípicas, como coeficientes de Poisson zero ou negativos, rigidez, compressibilidade negativas (Grima et al., 2008) e comportamento não-linear (Graeme Walter Milton, 2013; Kochmann e Bertoldi, 2017).

Nesta classe as funcionalidades são programadas intrinsecamente na sua microestrutura, potenciando a criação de novos metamateriais mecânicos, metamecanismos e em última instância metamáquinas com propriedades para além das restrições físicas atuais (J. Christensen et al., 2015; Ion, Frohnhofen et al., 2016; Zheludev e Kivshar, 2012). Estas características apresentam-se com potencial para conduzir

a uma nova geração de materiais para aplicação em áreas como a indústria aeroespacial, automóvel e saúde. Contudo é fundamental compreender os vários MM, as principais características, os desafios científicos e tecnológicos que se colocam na construção de novas abordagens, como primeiro desafio podemos considerar a sua conceção. Conceber estes materiais microestruturados representa um conjunto de desafios, mesmo os casos mais simples revelam-se difíceis ou mesmo impossíveis de conceber com base em conhecimento empírico é necessário aplicar outros métodos computacionais como a Otimização Topológica (OT).

Os materiais microestruturados apresentam uma estrutura heterogénea, formada por constituintes dissimilares que se distinguem em diversas escalas de comprimento. De facto, os modelos que empregam várias escalas de comprimento podem ser úteis na compreensão de materiais complexos usados em aplicações de engenharia. As aplicações relacionadas com esta classe de problemas incorporam diferentes escalas de comprimento na faixa do nm a m e podem ser classificadas em: (i) microescala, é a menor escala do modelo e reproduz a menor partícula do sistema com base no seu tensor de elasticidade; (ii) a mesoescala, é a escala intermédia e a ordem de escala sobre a qual as propriedades dos materiais com microestrutura interna são homogeneizadas; (iii) a macroescala, representa a estrutura cujo o comportamento do material compósito é considerado homogéneo e cujos materiais que a constituem são caracterizados pelas propriedades efetivas homogeneizadas na mesoescala. A Figura 2 ilustra as diferentes escalas de comprimento.

Análise micromecânica destes materiais com distribuição heterogénea uniforme, cujos detalhes microestruturais locais são representados explicitamente, podem ser agrupados em duas categorias baseadas na representação geométrica da microestrutura do material. Estas classes envolvem os conceitos de periodicidade e de homogeneidade estatística, a que correspondem as definições de Volume Repetitivo Unitário (VRU) e Volume Característico Unitário (VCU), respetivamente (A. Drago e M. Pindera, 2007; M.-J. Pindera et al., 2009). A Figura 3 ilustra os conceitos de VRU e de VCU adotados ao longo deste trabalho.

A OT é uma ferramenta que permite gerar de modo automático uma disposição estrutural com máximo desempenho sujeito a especificações de *design*. Isto é, um problema de conceção estrutural pode ser formulado como a otimização da distribuição do material num determinado  $\Omega$  domínio admissível discretizado, sendo que, o *design* final não é restrito à topologia inicial (Martin P. Bendsøe, 1989). Os primeiros estudos apresentados nesta área de conhecimento, em especial o trabalho de Bendsøe e Kikuchi (1988), utilizava como modelo de material células unitárias quadradas com furos retangulares, estas células apresentavam dimensões infinitamente reduzidas comparativamente à escala do objeto por elas constituído (i.e., método multiescala). Neste trabalho as propriedades mecânicas das células unitárias foram calculadas através de homogeneização numérica. Na década de 90 do século passado, as dificuldades de fabrico destas estruturas multiescala, levou a comunidade científica a procurar outras abordagens, tendo surgido os métodos monoescala (i.e., otimização global) que otimizam a distribuição de material isotrópico homogéneo no interior do macro componente (Martin P. Bendsøe, 1989; M. P. Bendsøe e O. Sigmund, 1999; Zhou e Rozvany, 1991; Mlejnek, 1992; Zhou e Rozvany, 1991). Diversos

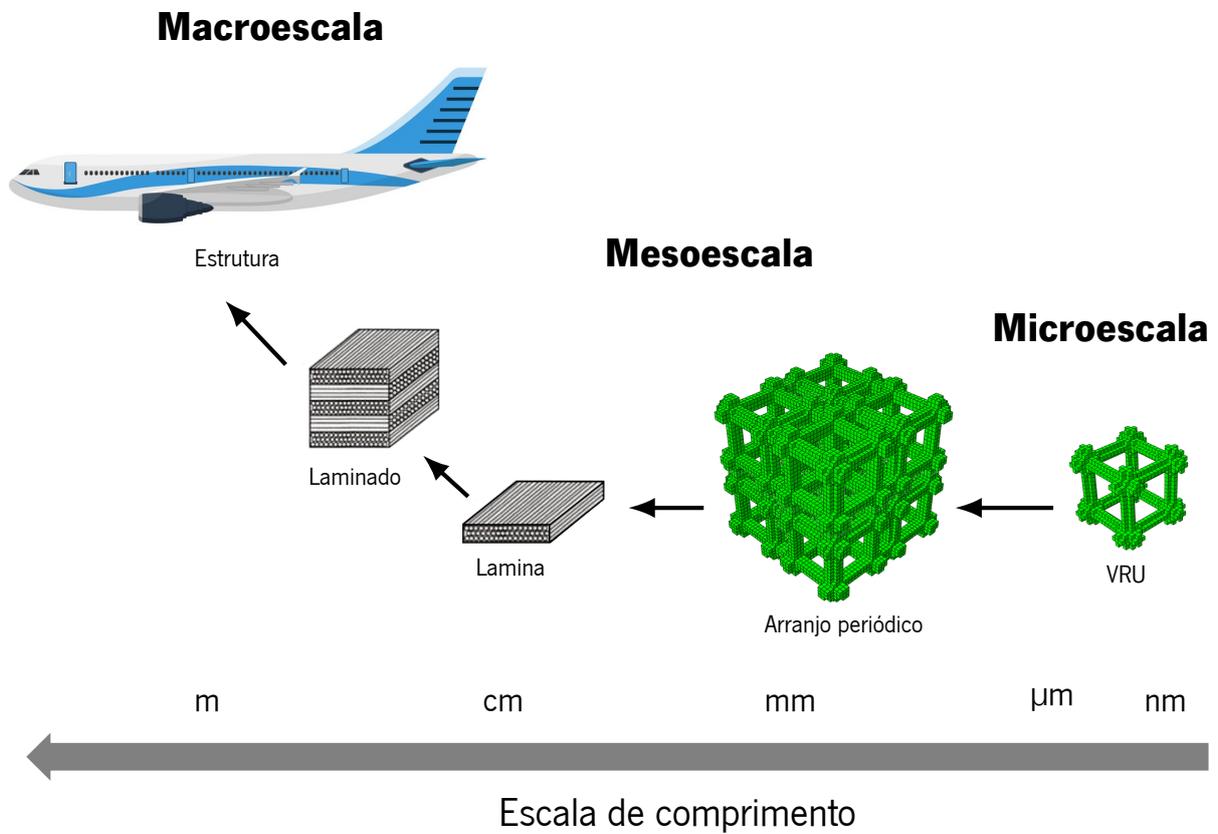


Figura 2: Escalas de comprimento utilizadas na análise micromecânica de materiais complexos e estruturas.

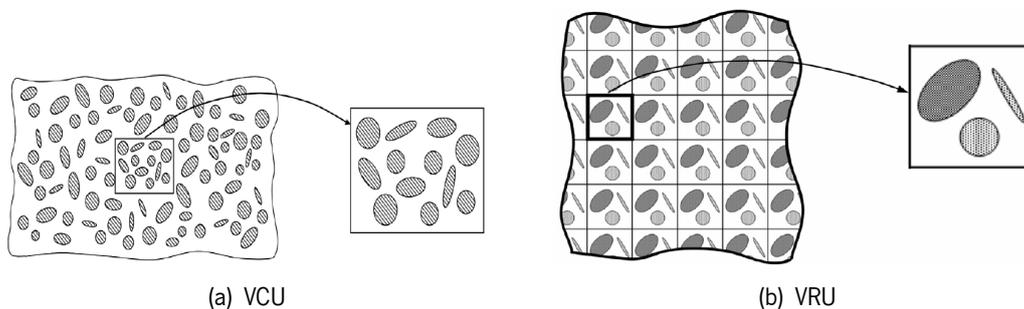


Figura 3: Geometria dos conceitos de Volume Característico Unitário e de Volume Repetitivo Unitário: (a) Microestrutura bifásica homogênea à macroescala caracterizada por VCU, (b) Matriz periódica de diferentes tipos de reforço definidos por um VRU (adaptado de A. Drago e M. Pindera (2007)).

métodos se enquadram nesta classe como baseados em densidade (Ole Sigmund, 1997), *level-sets* (M. Y. Wang, Xiaoming Wang e Guo, 2003) e processos evolucionários (Y. M. Xie e Steven, 1993).

Mais recentemente, ressurgiu o interesse pelos métodos de otimização multiescala, a par com os avanços da tecnologia de FDD. Esta última, tem evoluído consistentemente, com base nas melhorias verificadas ao nível dos equipamentos de produção, *software* e da disponibilidade de novos materiais. De facto, o FDD possui a capacidade de virtualmente produzir qualquer geometria, o que o torna elegível no fabrico de estruturas complexas, quer sejam monoescala ou multiescala. Atualmente, a otimização monoescala e o uso de treliças são consideradas as duas estratégias principais aplicadas no *design* de estruturas leves, que melhor aproveitam as capacidades do FDD (Plocher e Panesar, 2019). Estas expectativas estão em linha com as estruturas multiescala naturais (i.e., não concebidas pelo homem) e que servem de inspiração/modelo a diversas linhas de investigação, apesar de nem sempre os mecanismos da sua génese serem totalmente conhecidos (Wu et al., 2021). Na natureza podemos encontrar diversos exemplos de estruturas multiescala, como osso, madeira, bambu e madrepérola (P. Fratzl et al., 2004; Peter Fratzl e Weinkamer, 2007; Pokroy et al., 2009; Weiner e Wagner, 1998). A Figura 4 ilustra abordagem de OT multiescala, cada ponto da macroestrutura representa a microestrutura periódica local. Esta abordagem acenta em duas premissas assumidas pela literatura acerca da OT. A primeira é que a escala da microestrutura não está relacionada com uma dimensão física específica (e.g.,  $\mu\text{m}$ ), mas sim que é muito menor que a da macroestrutura. Outra premissa é que os princípios da mecânica dos sólidos contínuos são aplicados em ambas as escalas (i.e., macro e microescala)

Nos materiais microestruturados o comportamento mecânico que pode ser difícil de prever com os métodos de previsão analíticos, já que as suas propriedades mecânicas à macroescala são fortemente influenciadas pela morfologia da microestrutura interna, fração volúmica e propriedades dos seus constituintes. Nos materiais formados por VRU (i.e., periódicos) existem uma hierarquia de escalas que se traduzem em propriedades não homogêneas à microescala (Cheng et al., 2013). A ideia básica da teoria da homogeneização consiste em medir as propriedades efetivas à macroescala (escala global) de um material periódico, apenas considerando o comportamento de uma VRU (i.e., escala local ou microescala). A homogeneização é um método para determinar as propriedades efetivas de materiais heterogêneos, permitindo substituir este material por um material homogêneo equivalente. Os métodos de homogeneização podem ser divididos em três categorias, analítica/matemática, numérica e computacional (Nguyen et al., 2011).

Diversas metodologias de *design* utilizam abordagens multiescala, assumindo a separação de escalas. Porém, a OT monoescala também pode ser aplicada no *design* de estruturas multiescala, bastando para tal considerar a microestrutura como domínio admissível  $\Omega$  a otimizar. No entanto, a otimização computacional multiescala de componentes microestruturados com elevada resolução, inclusive de dimensões moderadas, traduz-se facilmente em problemas de otimização de forma ou topologia com milhões de variáveis (Panetta et al., 2015). Como forma de minimizar esta dificuldade surgiu outra abordagem baseada na criação de bibliotecas de microestruturas unitárias.

A criação de bibliotecas de microestruturas consiste no pré-processamento de um elevado número

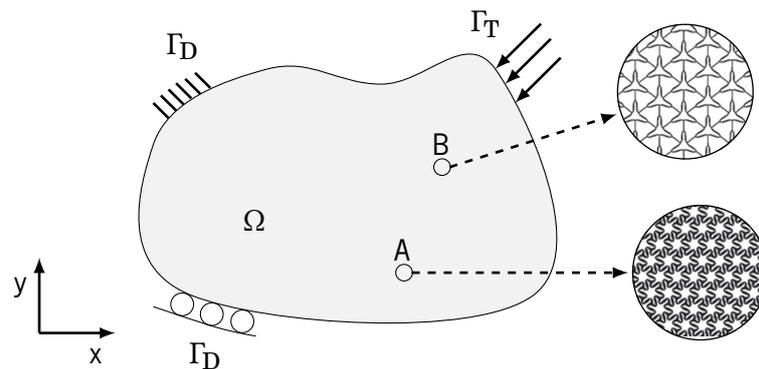


Figura 4: Método de OT multiescala.

de microestruturas unitárias, cujas topologias e propriedades foram calculadas para posterior integração na análise da macroestrutura. Posteriormente, esta biblioteca é utilizada no *design* de macroestruturas, para seleção da microestrutura ótima de acordo com as propriedades mecânicas locais alvo. Esta abordagem poderá originar macroestruturas com propriedades mecânicas sub-ótimas, porém pode oferecer um desempenho superior em casos de incerteza nas condições de carregamento. Por outro lado, permite reduzir o tempo de otimização da macroestrutura (Maskery et al., 2017).

Os primeiros trabalhos desenvolvidos nesta área foram realizados no contexto do *design* de *scaffolds* através de microestruturas com propriedades mecânicas e de porosidade otimizadas (Lin, Kikuchi et al., 2004a; Lin, Hsiao et al., 2004b; Hollister, 2005). A possibilidade de produzir materiais auxéticos (com coeficiente de Poisson negativo) foi demonstrada nos trabalhos de (Tiemo Bückmann, Stenger et al., 2012; Greaves et al., 2011). A ideia de fabricar estruturas constituídas por VRU com diferentes propriedades mecânicas também está presente no trabalho apresentado por Hiller e Lipson (2009), no qual os autores discutem o conceito de material digital, formado por um conjunto de voxels<sup>1</sup> discretos (de forma predefinida), que podem ser montados. Noutro trabalho, os autores L. Xia e Breitkopf (2015) propuseram um método baseado numa biblioteca de estruturas, como forma de reduzir o tempo de computação na otimização das macroestruturas.

Outros trabalhos relacionados foram desenvolvidos na área da computação gráfica. Em particular na otimização da melhor combinação de microestruturas de acordo com os objetivos iniciais de deformação, de objetos tridimensionais (Bickel et al., 2010). Na criação de uma estrutura de dados que permite um mecanismo de abstração para transformar objetos 3D para equipamentos de FDD e materiais específicos (Desai Chen et al., 2013; Vidimče, Kaspar et al., 2016; Vidimče, S. P. Wang et al., 2013).

Mais recentemente outras abordagens foram propostas para o *design* de objetos microestruturados com base em bibliotecas de microestruturas. Os autores Xu et al. (2015) apresentaram uma ferramenta que permite o *design* interativo de objetos flexíveis baseados em materiais heterogêneos e o método proposto por Panetta et al. (2015) de otimização de material com restrições (e.g., ligações cinemáticas,

<sup>1</sup>Uma técnica alternativa que usa elementos contínuos 3D é a malha de voxel. O volume do VRU é subdividido em cubóides de igual tamanho, que são designados como pixels volumétricos - **volumetric pixels**.

fabrico e materiais com propriedades específicas).

Embora muitos dos trabalhos desenvolvidos estejam relacionados com a modelação de VRU (ou das suas famílias) com propriedades específicas, o estudo das propriedades individuais e do espaço de *design* por elas ocupado como família (ou o espectro de propriedades por elas ocupado como família) é muito menos investigado. Os limites teóricos das propriedades foram derivados sem validação experimental (Lipton, 1994; Graeme W. Milton e Cherkaev, 1995; Ting e T. Chen, 2005). Considerando as restrições impostas pelo FDD os autores Panetta et al. (2015), Schumacher et al. (2015) e Zhu et al. (2017) investigaram a produção por FDD de objetos formados por VRU. Nestes estudos são igualmente apresentados métodos para compilação das bibliotecas de VRU.

A otimização multiescala de estruturas baseada na utilização de bibliotecas de VRU pré-compiladas, constitui uma alternativa mais eficiente na redução do tempo de computação. Este facto abre caminho a novas abordagens do problema e, em particular, às abordagens de geração de bibliotecas de VRU estudadas neste trabalho. Resultado do acima exposto, outro aspeto basilar deste trabalho foca-se na produção dos VRU e na caracterização das suas propriedades mecânicas. A natureza da discretização dos VRU (i.e., voxéis), a reduzida dimensão e a sua topologia muitas das vezes intrincada, requerem tecnologias de fabrico com capacidade de produzir geometrias complexas. Neste contexto, o FDD preenche os requisitos necessários à produção dos VRU. Nomeadamente, o processo Polyjet (PJet) que possui capacidade de produzir estruturas poliméricas complexas em diferentes tipos de resina. Este processo de FDD é baseado na deposição seletiva de gotículas de resina líquida, através de uma cabeça de finos orifícios, numa plataforma de fabrico. Posteriormente, a resina é polimerizada (curada) por feixes de luz ultravioleta e o processo é repetido camada-a-camada. Além disso, emprega suportes de fabrico solúveis em água, o que permite a produção de estruturas celulares complexas, sem necessidade de operações de pós-processamento complicadas.

No decorrer da última década, o FDD cresceu de forma significativa, sendo hoje não só uma tecnologia de prototipagem mas uma alternativa efetiva às tecnologias de fabrico convencionais (e.g., subtrativas). A rápida expansão deve-se em especial a três fatores. Primeiro, a evolução dos processos (i.e., *software* e *hardware*) e materiais disponíveis o que permitiu aumentar a variedade e qualidade dos produtos. Segundo, a redução dos preços dos equipamentos, consumíveis e materiais, contribuiu para democratização do acesso a esta tecnologia por parte da comunidade científica, empresas e público em geral. Em terceiro, a maturidade crescente da tecnologia como a sua certificação e adoção por indústrias altamente tecnológicas (e.g., saúde, automóvel, aeronáutica, aeroespacial). Este último ponto resulta em grande parte dos dois primeiros pontos anteriormente descritos. Enquanto as tecnologias convencionais continuam sendo o padrão para a produção em massa, o FDD é uma tecnologia disruptiva para a produção de objetos em diferentes materiais incluindo, polímeros, metais, cerâmicos, compósitos e bio-materiais, com potencial de transformar a produção em massa em customização em massa (Dizon et al., 2018; J. Y. Lee et al., 2017; R. Liu et al., 2017).

Como todas as tecnologias produtivas o FDD também tem restrições e limites de fabrico, contudo, por ser uma tecnologia mais recente as regras de projeto e boas práticas de produção ainda não estão

totalmente estabelecidas. Um exemplo de restrição é a dimensão mínima de um determinado detalhe que é possível fabricar com rigor dimensional e geométrico. Além disso, os objetos produzidos por FDD apresentam propriedades mecânicas anisotrópicas, dependentes da estrutura e parâmetros do processo, para além das propriedades dos materiais base de que são constituídas (I. Gibson et al., 2015b). Por outro lado, não existem normas ou métodos específicos sugeridos para obter o módulo de elasticidade para estruturas celulares poliméricas.

Assim uma parte deste trabalho centra-se na avaliação dos limites do processo de FDD PJet (Stratasys, Eden Prairie, MN, USA), na reprodução de geometrias hexaédricas e na caracterização experimental dos materiais base e dos VRU.

## 1.2 Metodologias de investigação

O modelo de investigação aplicado na presente tese está estruturado de acordo com o método da cebola proposto por Saunders et al. (2009) (Figura 5). O tema dos Metamateriais Mecânicos, como referido anteriormente, para além de ser considerado de grande atualidade e potencial de inovação, pode contribuir para novas aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento. Na medicina com aparelhos, próteses e ortóteses multifuncionais, na engenharia com componentes ativos e multiconfiguráveis para as indústrias automóvel e aeroespacial.

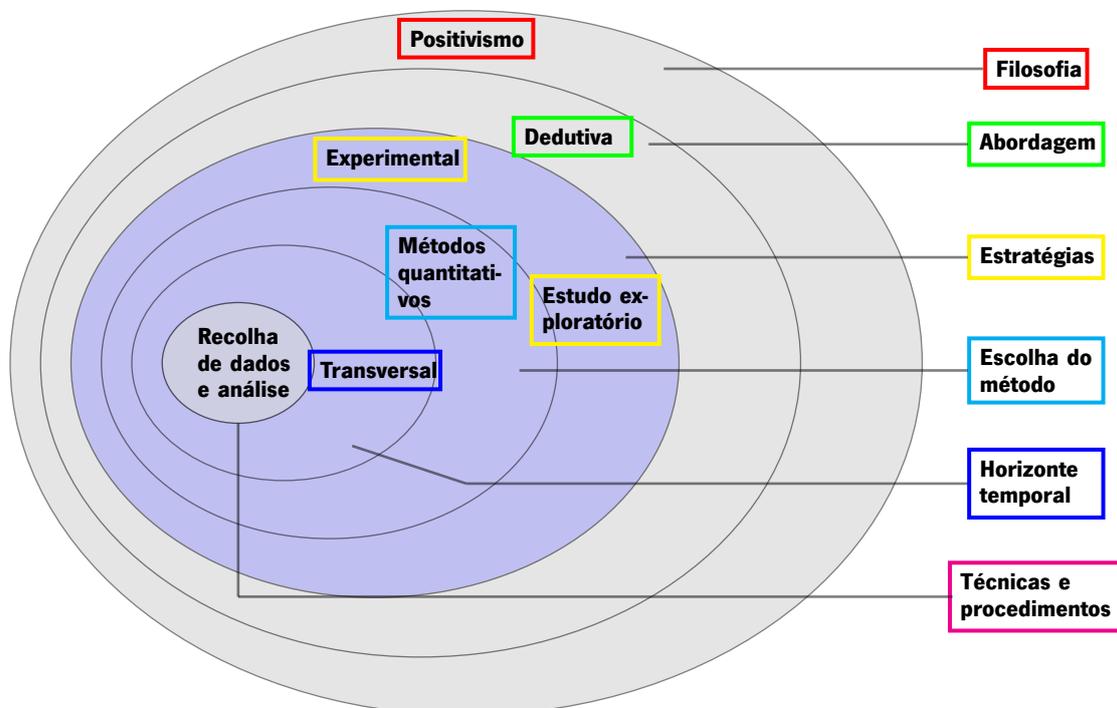


Figura 5: Método de investigação proposto para “Metamateriais Mecânicos Produzidos por Fabrico Direto Digital”, (adaptado de Saunders et al. (2009)).

A investigação a desenvolver propõem estudar a produção por FDD de MMM com o propósito de

contribuir para a sua compreensão e conhecimento nesta temática. Propondo uma metodologia sistemática para gerar e produzir de MMM através de FDD e estudar as suas propriedades efetivas (*i.e.* experimentais). Sendo o âmbito deste projeto o contributo com foco nesta classe de metamateriais, sem preocupação de dar resposta a outros problemas ou desafios em concreto. Os objetivos foram estabelecidos, tendo em consideração a oportunidade de investigação, recurso e o horizonte temporal para o desenvolvimento. Este projeto foi realizado na Escola de Engenharia da Universidade do Minho nos centros de investigação Instituto de Polímeros e Compósitos (IPC), Centro para o Desenvolvimento Rápido e Sustentável do Produto (CDRSP) e no laboratório Advanced Manufacturing of Products and Tools (DONE Lab). O horizonte temporal para a conclusão deste projeto foi de 4 anos. Pelo exposto, este projeto enquadra-se na categoria de investigação aplicada.

O desenvolvimento deste projeto é baseado num conjunto de conhecimentos teóricos reconhecidos e aceites como válidos, assim como dos métodos de investigação a utilizar. Os objetivos deste trabalho foram definidos com base na literatura científica acerca dos MMM, coloca este trabalho numa posição epistemológica, partindo do conhecimento válido e aceite na área da engenharia de polímeros e mecânica. A filosofia de investigação adotada é o positivismo, uma vez que todas as hipóteses e conceitos propostos neste projeto só serão validados com informação e dados fiáveis obtidos por métodos observáveis. Este projeto parte de conceitos e teorias existentes para a formulação de hipóteses: O FDD é uma metodologia eficaz para a produção de MMM e as propriedades mecânicas reais dos MMM poderão ser previstas por homogeneização. Estas hipóteses só serão válidas após testes e observação de dados válidos, contribuindo para o progresso científico na área dos polímeros, mecânica e dos metamateriais mecânicos.

O desenvolvimento deste projeto parte de conceitos e teorias apresentadas no Capítulo 2 a partir das quais foi enunciada uma nova hipótese que pretende integrar as principais áreas do conhecimento envolvidas na produção de metamateriais mecânicos por manufatura aditiva. Para testar e validar este novo conceito (hipótese) é necessário usar um conjunto de métodos, estratégias de investigação, observar os dados obtidos, realizar generalizações empíricas e por último validar as hipóteses colocadas inicialmente. Este projeto assenta numa abordagem estruturada em metodologias científicas de investigação partindo de teorias e princípios científicos acerca dos metamateriais, enunciados na revisão da bibliografia (*vd.* Capítulo 2). Deduz uma hipótese acerca da relação do FDD no comportamento dos MMM. Testa a hipótese através de experimentação e recolha de dados quantitativos, mantendo a independência do observador em relação aos resultados. De seguida analisa os resultados e verifica a conformidade com a teoria. Este processo pode ter de ser repetido caso os resultados não confirmem a teoria. Voltando à primeira etapa, modificando a teoria e repetindo o processo. Pelo exposto é possível concluir que a abordagem de investigação proposta é dedutiva.

O presente projeto poderá ser classificado quanto à natureza da investigação a desenvolver como estudo exploratório. Uma vez que pretende descobrir novas metodologias para a produção de MMM através de FDD e investigar a relação entre as propriedades experimentais e os modelos de previsão. Neste projeto de investigação tendo em conta a área científica e o tema em questão MMM e as perguntas de

investigação, serão usadas maioritariamente como estratégia a experimentação. Contudo no desenvolvimento do projeto e em virtude de estar a explorar novas áreas do conhecimento, haverá necessidade de validar modelos analíticos e numéricos através da experimentação e realização de ensaios físicos. Caso os resultados não confirmem os modelos é necessário introduzir alterações nos mesmos e repetir o processo de validação experimental. Neste caso, que exige interações recursivas, será utilizada a estratégia de investigação-ação.

Quanto à escolha do método, de acordo com a filosofia, abordagem e estratégia de investigação deste projeto a seleção será métodos quantitativos. Serão tidas em conta ações de modo a garantir a credibilidade dos resultados de investigação. Para tal as escolhas das técnicas de recolha e análise dos dados terá em conta a produção de resultados consistentes a sua validade. Neste projeto os dados serão maioritariamente resultado dos métodos numéricos e ensaios mecânicos de caracterização dos materiais aos quais serão aplicadas ferramentas estatísticas de análise.

Este projeto de investigação apresenta um horizonte temporal transversal de quatro anos, estando segmentado em 5 atividades principais, sendo estas divididas em tarefas de acordo com a execução lógica do plano de trabalhos, exibindo um certo grau de dependência entre as mesmas.

A natureza do presente trabalho de investigação não envolve questões de acesso e éticas que necessitem de ser acordadas ou negociadas. As questões relacionadas com a propriedade industrial e intelectual estão devidamente salvaguardadas por legislação específica.

Nesta secção foi apresentado o método de investigação aplicado no desenvolvimento deste projeto académico. A justificação das escolhas foi realizada de forma lógica e sistemática de acordo com o método da cebola proposto por Saunders et al. (2009). Em resumo, a Figura 5 apresenta a metodologia de investigação deste projeto adota uma posição epistemológica, com filosofia positivista, com uma abordagem dedutiva. A estratégia de investigação será experimentação e os métodos utilizados serão quantitativos. O horizonte temporal é transversal. Este projeto é viável de acordo com o plano de trabalho definido e com os recursos financeiros, equipamentos e materiais ao dispor, não envolvendo questões de acesso e éticas que necessitem de ser acordadas ou negociadas.

### **1.3 Objetivos**

O presente trabalho aborda a produção de metamateriais mecânicos através de FDD. O principal objetivo deste trabalho é a produção de metamateriais mecânicos através de FDD, estabelecendo relações entre a conceção por intermédio de ferramentas computacionais, a tecnologia de FDD e a validação experimental. Assim, este trabalho pretende estabelecer metodologias de conceção, produção e validação experimental de MMM que promovam a sua materialização. Este materiais podem ser concebidos com base em diferentes metodologias. Assim, pretende-se desenvolver métodos de conceção de VRU para construção de bibliotecas. Também entre os objetivos do presente estudo consta o estudo da adequação das topologias ao processo de FDD para a sua efetiva materialização. Além disso, o conhecimento do

comportamento real destes materiais é fundamental, para que as propriedades mecânicas experimentais possam ser previstas por modelos de previsão. Neste contexto, visa-se estudar e quantificar de forma sistemática e abrangente as propriedades mecânicas experimentais dos VRU e as suas interdependências, através da realização de ensaios mecânicos, e a sua comparação com as propriedades efetivas homogeneizadas. Para este propósito, os objetivos específicos do presente trabalho podem ser definidos como:

- (i) Implementar algoritmo de OT baseado no *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP) para conceção de microestruturas tridimensionais;
- (ii) Implementar um algoritmo de homogeneização das propriedades dos VRU;
- (iii) Metodologias de conceção de VRU com diferentes propriedades mecânicas, passíveis de serem produzidas por FDD;
- (iv) Estudar os limites produtivos do processo de FDD PJet;
- (v) Desenvolvimento de ensaio experimental para determinação das propriedades mecânicas dos VRU.

Este trabalho foi elaborado com a finalidade de permitir uma fácil compreensão da temática abordada. Para tal, a organização dos temas expostos é baseada na leitura sequencial de forma a permitir uma fácil apreensão dos mesmos. Este trabalho está organizado em cinco capítulos, sendo que o presente Capítulo 1 introduz os temas, as motivações, as metodologias de investigação adotadas e objetivos do projeto de investigação desenvolvido. No Capítulo 2 introduzem-se alguns conceitos fundamentais acerca da otimização de materiais de microestrutura periódica pertinentes no enquadramento do presente trabalho. Caracterizam-se igualmente os metamateriais mecânicos. Descrevem-se os diferentes métodos de OT e de homogeneização. De seguida, procede-se ao enquadramento de alguns conceitos de carácter experimental no que concerne ao FDD, aos principais materiais e aplicações. Introduzem-se alguns conceitos fundamentais acerca do fabrico digital direto e ao processo Polyjet, oportunos no âmbito do presente trabalho e evidenciam-se recomendações e regras de projeto para o processo Jato de material-PJet. Posteriormente, definem-se as propriedades e a classificação dos materiais celulares. Por fim, é discutida a capacidade do processo PJet na produção de microdetalhes.

No Capítulo 3 descrevem-se os processos e métodos das ferramentas de OT de materiais de microestrutura periódica pertinentes no enquadramento do presente trabalho. Define-se a parametrização, formulação e os métodos de resolução do problema de OT estrutural. Abordam-se igualmente as instabilidades numéricas típicas em OT e as metodologias aplicadas no seu controlo. Posteriormente, descreve-se os conceitos fundamentais da homogeneização computacional direta e os pormenores da sua implementação. Apresentam-se as normas de caracterização experimental atuais e em preparação para utilização na área do FDD. Descreve-se os detalhes da implementação experimental. Por último, apresenta-se os materiais utilizados, descreve-se os diferentes métodos e ensaios de caracterização experimental.

No Capítulo 4 apresentam-se e discutem-se os resultados dos estudos numéricos de teste e validação. Explorara-se a influência dos parâmetros de configuração do programa de otimização topológica na concepção de topologias ótimas para bibliotecas de microestruturas. Apresentam-se igualmente famílias de VRU geradas a partir de diferentes estratégias e soluções iniciais. Testa-se o cálculo das propriedades elásticas efetivas através da homogeneização computacional direta. Apresentam-se e discutem-se os resultados experimentais dos ensaios de caracterização das propriedades mecânicas dos materiais base e dos VRU.

No Capítulo 5 apresentam-se as principais conclusões obtidas ao longo do presente trabalho. Enuncia-se igualmente os potenciais trabalhos futuros a desenvolver.

## Revisão Bibliográfica

*Descrevem-se os diferentes métodos de otimização topológica e de homogeneização. Introduzem-se alguns conceitos fundamentais acerca do fabrico digital direto e ao processo Polyjet™, oportunos no âmbito do presente trabalho. Evidenciam-se recomendações e regras de projeto para o processo Jato de material – Polyjet™. Procede-se ao enquadramento de alguns conceitos de carácter experimental no que concerne ao FDD, aos principais materiais. Posteriormente, definem-se as propriedades e a classificação dos materiais celulares. Por fim, é discutida a capacidade do processo MJ na produção de microdetalhes e da imposição de ligações cinemáticas.*

### 2.1 Introdução

O facto dos materiais convencionais (sólidos contínuos) possuírem uma gama de propriedades limitada restringe a sua aplicação prática na exploração de novas respostas e comportamentos mecânicos. Os MM surgem como resposta à necessidade de materiais singulares, com novas propriedades e funcionalidades, nos quais as propriedades físicas e mecânicas à macroescala dependem fortemente da microestrutura interna (Frenzel et al., 2017). A conceção de novas microarquitecturas internas conjugadas com diferentes materiais, permite produzir metamateriais, com propriedades físicas e mecânicas programadas, distintas dos materiais convencionais. Estes novos modelos podem ser explorados para criar materiais avançados com novas funcionalidades, nomeadamente os MMM (J. Liu et al., 2018).

A possibilidade de projetar materiais com microarquitecturas internas assume especial relevo uma vez que permite dissociar a dependência das propriedades dos materiais que os constituem, e alcançar combinações de comportamento extremos, não alcançáveis com os materiais naturais, as ligas ou os compósitos. Assim, a microarquitectura interna dos metamateriais assume uma importância fundamental, a sua conceção convencional é baseada na intuição e em geometrias já conhecidas. Atualmente, as ferramentas computacionais permitem alcançar distribuições e geometrias ótimas de acordo com constrangimentos e requisitos funcionais (Martin P. Bendsøe e Ole Sigmund, 2004; Rozvany, 2008).

## 2.2 Metamateriais mecânicos

*“A metamaterial is a heterogeneous hybrid material that can be designed and manipulated to obtain extraordinary properties arising from the combination of its structure and composition beyond those that a classical composite of the same constituent materials exhibits. “Meta” comes from Greek and means “beyond” or “more than.” (Xingcun Colin Tong, 2017, p. 219).*

Esta definição é usada por vários autores para descrever o conceito genérico de MM. A evolução dos materiais ao longo da história da humanidade ocorreu de forma não linear, de acordo com a própria evolução da humanidade (idade da pedra, do cobre, do bronze, do ferro até aos tempos atuais). Nas últimas décadas a inovação dos materiais tem ocorrido a ritmo elevado (J. Christensen et al., 2015; Fleck et al., 2010). *Será a próxima idade a dos Metamateriais?*

Das quatro classes de MM, os eletromagnéticos são os mais estudados. Estes materiais possuem estrutura artificial com inclusões de nano partículas. Apresentam propriedades não convencionais, indisponíveis nos sistemas naturais (e.g., permeabilidade e permissividade negativas), exibindo comportamentos como refração negativa, (e.g., radiofrequência e micro-ondas, terahertz, infravermelhos e óticos) (Y. Liu e X. Zhang, 2011; X. C. Tong, 2017). Os MM termodinâmicos manipulam os fonões de forma idêntica aos elétrões o que permite controlar a transferência de calor (N. Li et al., 2012). Os MM acústicos são constituídos por estruturas periódicas de múltiplos materiais com propriedades mecânicas díspares. Permitem direcionar, modelar ou anular a propagação de ondas sonoras e elásticas (P. Wang et al., 2013). Estas propriedades são determinadas pelo nível de anisotropia da estrutura que é controlada pela distribuição dos materiais ao nível da célula unitária. Têm potencial aplicação em guias de onda, moduladores de frequência, isoladores de vibração e ruído (Casadei, Dozio et al., 2010; Casadei, Beck et al., 2012). Os MM acústicos que exibem módulo de elasticidade transversal nulo podem ser considerados metafluidos, assim como os pertencentes a uma classe específica de MMM, os pentamodo. MMM são um grupo de estruturas artificiais que exibem propriedades mecânicas incomuns, resultantes da sua geometria microcelular. Os primeiros MMM foram desenvolvidos para controlo das ondas acústicas, através do comportamento auxético, gerado pelas instabilidades em microestruturas treliça e cascas finas elásticas (Bertoldi et al., 2009; Bertoldi, 2017; Y. Zhang et al., 2008). Esta classe de MM está relacionada com os quatro coeficientes elásticos, módulo de Young ( $E$ ), módulo de corte ( $G$ ), módulo de compressibilidade ( $K$ ) e coeficiente de Poisson ( $\nu$ ). Na perspetiva da engenharia, as três primeiras constantes elásticas enunciadas correspondem a propriedades dos materiais, rigidez, resistência à distorção e compressibilidade (Muamer Kadic, Tiedo Bückmann, Schittny et al., 2013b). Os MMM exibem propriedades macro atípicas, como coeficientes de Poisson zero ou negativos, rigidez, compressibilidade negativas (Grima et al., 2008), comportamento não linear (Kochmann e Bertoldi, 2017; Graeme Walter Milton, 2013) e microestruturas com topologia personalizada (Paulose et al., 2015). Estas classes de MMM contemplam sobretudo as propriedades mecânicas, contudo existe uma classe mais recente, com

comportamento ativo e multiconfigurável, os mecanismos flexíveis. Se considerarmos os materiais comuns com características funcionais, como adaptabilidade, mudança de forma ou outra dimensão de projeto como o tempo, constatamos que para tal, é necessário incorporar outros subsistemas (sensores, atuadores e sistemas de controlo), para que exibam comportamentos funcionais (Ion, Frohnhofen et al., 2016; Ion, Wall et al., 2017; X. C. Tong, 2017).

As propriedades mecânicas e físicas dos materiais naturais, podem variar num determinado intervalo e são interdependentes, e.g., módulo de elasticidade e densidade. Estes constrangimentos limitam a conceção e as aplicações práticas dos materiais naturais (M. F. Ashby, 1989). Os metamateriais mecânicos permitem ultrapassar estes limites, ao admitir conceber materiais com propriedades mecânicas e físicas desejadas, através da manipulação da sua microestrutura interna. As suas propriedades são dependentes da: (i) geometria e escala da sua microestrutura interna, (ii) estruturas com diferentes tamanhos de escala e (iii) hierarquia estrutural. Estas propriedades homogeneizadas à macroescala são dependentes da microestrutura, concebida para que os MMM apresentem comportamentos raros, únicos ou exibam propriedades físicas e mecânicas com ordem de grandeza inéditas. Quando observados à escala micro/nano comportam-se como uma estrutura, contudo a homogeneização do comportamento das células unitárias à macroescala assemelha-se a um material sólido (Vogiatzis et al., 2017). Estes metamateriais mecânicos são classificados de acordo com as suas propriedades em extremos, negativos, com ultra propriedades e ativos, adaptáveis e multiconfiguráveis (Zadpoor, 2016).

### **Metamateriais extremos**

São materiais que possuem elevada rigidez em determinados modos de deformação enquanto noutros modos apresentam grande flexibilidade. Os valores próprios do tensor de elasticidade determinam o seu comportamento nos modos de deformação. Um baixo valor do vetor próprio indica que o material oferece pouca resistência à deformação nessa direção específica do tensor de elasticidade (Muamer Kadic, Tiedo Bückmann, Stenger et al., 2012). Estes MMM podem ser classificados de acordo com os valores reduzidos dos vetores próprios do tensor de elasticidade. De acordo com Graeme W. Milton e Cherkaev (1995) um único valor próprio baixo do vetor é designado unimodo, no caso de ter dois, três, quatro ou cinco, designa-se bimodo, trimodo, quadromodo e pentamodo, respetivamente. A combinação das duas fases, uma muito rígida e outra flexível, permite fabricar materiais com qualquer tensor de elasticidade (Graeme W. Milton e Cherkaev, 1995). Entre os diferentes processos de fabrico, as tecnologias de FDD pelas suas características são as mais adequadas para a produção de materiais compósitos e monomateriais anisotrópicos com qualquer tensor de elasticidade positivo, predeterminado pela distribuição espacial de material e vazios na sua microestrutura (Graeme W. Milton e Cherkaev, 1995).

### **Metamateriais pentamodo**

São uma categoria de MMM extremo que exibem um valor baixo em cinco dos seis valores próprios do tensor de elasticidade, oferecem reduzida resistência em cinco das seis principais direções. Resultando

num módulo de elasticidade volumétrica ( $K$ ) muito elevado quando comparado com o módulo de elasticidade transversal ( $G$ ). O volume destes materiais quando sujeitos a uma deformação é constante em virtude do seu módulo de elasticidade volumétrico elevado (T. Bückmann et al., 2015; Muamer Kadic, Tiamo Bückmann, Stenger et al., 2012; M. Kadic et al., 2014). Um exemplo são microestruturas formadas por vigas cónicas ligadas entre si pelas suas bases dispostas em forma de diamante (Graeme W. Milton e Cherkaev, 1995). Outros trabalhos generalizaram o mesmo conceito aplicando a outras microarquitecturas anisotrópicas e estruturas alveolares de Bravais (Muamer Kadic, Tiamo Bückmann, Schittny et al., 2013a; Layman et al., 2013; Méjica e Lantada, 2013). Estes MMM pelas suas características tem potencial de aplicação em controlo de vibrações e na engenharia de tecidos. Diferentes MMM pentamodo podem ser combinados na mesma macroestrutura, possibilitando a construção de materiais com uma distribuição de propriedades complexas (Zadpoor, 2016).

### **Metamateriais dilatacionais**

Contrariamente aos pentamodo apresentam um módulo de compressibilidade ( $K$ ) muito baixo relativamente ao módulo elasticidade transversal ( $G$ ), que resulta num coeficiente de Poisson negativo ( $\nu$ ). Podemos considerar estes MMM como unimodo opostos dos pentamodo, mantêm a forma quando submetidos a qualquer deformação, variando o volume (Tiamo Bückmann, Schittny et al., 2014). Podem ser obtidos por diversas geometrias baseadas em ligações Sarrus, octaedros regulares e estruturas hexagonais (Graeme Walter Milton, 2015). Exibem módulos de elasticidade, longitudinal ( $E$ ), transversal ( $G$ ), volumétrico ( $K$ ) negativo e comportamento auxético (i.e., com coeficiente de Poisson negativo). Tem aplicação em estruturas resistentes ao impacto (elevada resistência ao dano e capacidade de distribuição das tensões) (Greaves et al., 2011; Imbalzano et al., 2015; R. Lakes e Wojciechowski, 2008).

### **Metamateriais com compressibilidade negativa**

Por definição são MMM que expandem quando sujeitos a uma pressão hidrostática. Esta expansão pode ser volumétrica, linear ou de área, consoante as dimensões envolvidas. Este comportamento de compressibilidade 2D pode ser alcançado por estruturas celulares, em forma de favo de abelha hexagonais (Nicolaou e Motter, 2012). Por outro lado estruturas em treliça formadas por dodecaedros hexagonais alongados são arquitecturas tridimensionais que exibem compressibilidade negativa ( $K < 0$ ) e coeficiente de Poisson ( $\nu < 0$ ). Outra forma de alcançar este comportamento é pela combinação de múltiplos materiais com propriedades distintas (Grima et al., 2008).

### **Metamateriais com rigidez negativa**

São materiais que deformam na direcção e sentido da força aplicada, formando uma força que assiste à deformação. Exibem comportamentos biestáveis e elevada deformação comparados com materiais comuns de rigidez positiva. Apesar de instáveis podem ser combinados com materiais rígidos para controlar a instabilidade. Os compósitos formados pela combinação de materiais com rigidez positiva e negativa

podem alcançar uma rigidez muito elevada, se forem colocados em série, possuem valores absolutos das constantes de elasticidade próximos e instabilidade controlada (Kochmann e Bertoldi, 2017; Y. C. Wang e R. S. Lakes, 2004). Os autores Coulais, Overvelde et al. (2015) apresentam um estudo acerca da influência das não-linearidades no comportamento à encurvadura de vigas elásticas produzidas em metamateriais mecânicos. Demonstrado a possibilidade de projetar vigas com espessura considerável e comportamento descontínuo à encurvadura, exibindo instabilidade e rigidez negativa na posição deformada (encurvada).

### **Metamateriais com ultra propriedades**

Estes materiais exibem elevada rigidez, resistência e resiliência conjugada com massa reduzida. Contudo devido à sua natureza antagônica a conjugação destas propriedades é difícil. A observação e estudo de estruturas naturais, como a madre pérola, esponjas do mar e diatomáceas, permite desenvolver novos metamateriais com elevada rigidez, resiliência e leveza (Barthelat e Rabiei, 2011; Berger et al., 2017; Ritchie, 2011). Os cerâmicos possuem elevada relação resistência e rigidez relativamente ao peso, mas o seu comportamento frágil e sensibilidade aos defeitos limitam o seu uso como material estrutural (Meza et al., 2014). Os investigadores Jang et al. (2013) fabricaram nanoestruturas em tubos cerâmicos inspirados em materiais biológicos, imitando a sua escala e hierarquia. Estes MMM suportaram tensões de tração de 1,75 GPa sem rutura, após múltiplos ciclos. Recentemente, Meza et al. (2014) produziram MMM estruturais à nanoescala em cerâmica (alumina) simultaneamente ultra leves e resilientes, que recuperam a forma original após uma deformação de 50% por compressão. O comportamento mecânico destes MMM deve-se, para além da microarquitetura, à otimização da razão entre a espessura e o raio dos tubos ocos da nanoestrutura que permite transformar o comportamento frágil em elástico. Os MMM com propriedades extremas permitem manter a rigidez ( $\approx$ ) constante por densidade de massa. Este comportamento é válido para materiais como polímeros, cerâmicos e metais, todos eles apresentam ultra rigidez ( $\approx$ ) constante por unidade de massa, mesmo quando esta é reduzida para um terço (Zheng et al., 2014).

### **Metamateriais ativos, adaptáveis e multiconfiguráveis**

Os materiais comuns apresentam limitações ao nível estrutural e de massa, além disso, são incapazes de interagir com solicitações externas, sem incorporação ou montagem de sistemas, que permitam a sua utilização como sensores, atuadores e sistemas de controlo (Ion, Frohnhofen et al., 2016). Os MM são mais que simples materiais comportando-se como mecanismos, através da programação das funcionalidades na sua microestrutura interna (Ion, Frohnhofen et al., 2016; Ion, Wall et al., 2017; Restrepo et al., 2016b; X. C. Tong, 2017). Este conceito surgiu na sequência de estudos relacionados com regimes instáveis, grandes deformações e materiais flexíveis (J. Christensen et al., 2015; Zadpoor, 2016). A multiestabilidade mecânica e o comportamento não linear dos materiais flexíveis permite que a mudança

biestável na curva tensão-deformação provoque histerese e alteração da geometria (Kochmann e Bertoldi, 2017; Graeme Walter Milton, 2013). A programação do MM é alcançada pela introdução de defeitos morfológicos em algumas células unitárias do sólido celular periódico, que atuam como interruptores de instabilidade e permitem a reconfiguração da geometria interna (Kirkhope e Dias, 2016; Kochmann e Bertoldi, 2017). Estes defeitos localizados são estados de auto-tensão, semelhantes a estados quânticos topológicos, integrados na microestrutura (Paulose et al., 2015). A geometria, distribuição dos vazios, dimensões de parede e razão de tamanho, influenciam o comportamento biestáveis destes materiais. Dois importantes desafios na sua concepção são o controle da instabilidade e a dissipação da energia na microestrutura (Florijn et al., 2016). Estudos recentes materializaram este conceito através de células unitárias cúbicas anisotrópicas com metamorfismo local (Coulais, Teomy et al., 2016; Ion, Wall et al., 2017). Outra abordagem são os metamateriais mecânicos inspirados em origami (e.g., *kirigami* e *miura-ori*) que oferecem larga flexibilidade de desempenho, permitindo programar intrinsecamente no material multiconfigurações estáveis (Silverberg et al., 2014).

A complexidade na modelação de novos materiais, com propriedades inovadoras requer novas abordagens e métodos. A concepção convencional de MM está limitada à intuição de quem concebe ou da aplicação de soluções construtivas já existentes (Vogiatzis et al., 2017). A OT é uma ferramenta computacional que transforma o problema da concepção da geometria dos MM numa otimização da distribuição espacial dos constituintes, de modo a cumprir os requisitos funcionais, quantificados pelas funções dos constrangimentos ou restrições (Vogiatzis et al., 2017). Atualmente diversos métodos são aplicados na otimização topológica de metamateriais, e.g., baseados em gradientes, método SIMP (Schwerdtfeger et al., 2011), método *Level-set* (Vogiatzis et al., 2017; M. Y. Wang e Xiaoming Wang, 2005) ou baseados na energia de deformação elástica (Clausen et al., 2015; W. Zhang et al., 2007). Os avanços recentes das tecnologias de fabrico direto digital possibilitam a produção de componentes multimaterial com microestruturas internas complexas (Jang et al., 2013; Khoo et al., 2015; Meza et al., 2014). Este fato é determinante para a validação experimental dos MM. Do ponto de vista do impacto ambiental e da sustentabilidade os MM apresentam um desempenho positivo, mais funcionalidades, redução de massa, energia e emissões de CO<sub>2</sub> (Danfang Chen et al., 2015; Huang et al., 2013). A Tabela 1 apresenta o resumo dos trabalhos estudados na revisão da bibliografia com classificação por tema abordado.

Tabela 1: Resumo da classificação de literatura dos Metamateriais Mecânicos.

Referência	Tema	Referência	Tema
Graeme W. Milton e Cherkaev (1995)	<i>PM</i>	Berger et al. (2017)	<i>UP</i>
Muamer Kadic, Tiemo Bückmann, Stenger et al. (2012)	<i>PM</i>	Graeme Walter Milton (2013)	<i>AAC</i>
Layman et al. (2013)	<i>PM</i>	Silverberg et al. (2014)	<i>AAC</i>
Muamer Kadic, Tiemo Bückmann, Schittny et al. (2013a)	<i>PM</i>	J. Christensen et al. (2015)	<i>AAC</i>
Méjica e Lantada (2013)	<i>PM</i>	Paulose et al. (2015)	<i>AAC</i>
M. Kadic et al. (2014)	<i>PM</i>	Florijn et al. (2016)	<i>AAC</i>
T. Bückmann et al. (2015)	<i>PM</i>	Restrepo et al. (2016b)	<i>AAC</i>
R. Lakes e Wojciechowski (2008)	<i>DL</i>	Ion, Frohnhofen et al. (2016)	<i>AAC</i>
Greaves et al. (2011)	<i>DL</i>	Kirkhope e Dias (2016)	<i>AAC</i>
Tiemo Bückmann, Schittny et al. (2014)	<i>DL</i>	Coulais, Teomy et al. (2016)	<i>AAC</i>
Graeme Walter Milton (2015)	<i>DL</i>	X. C. Tong (2017)	<i>AAC</i>
Imbalzano et al. (2015)	<i>DL</i>	Ion, Wall et al. (2017)	<i>AAC</i>
Grima et al. (2008)	<i>CN</i>	M. Y. Wang e Xiaoming Wang (2005)	<i>TVL</i>
Nicolaou e Motter (2012)	<i>CN</i>	W. Zhang et al. (2007)	<i>TVL</i>
Y. C. Wang e R. S. Lakes (2004)	<i>RN</i>	Jang et al. (2013)	<i>TVL</i>
Coulais, Overvelde et al. (2015)	<i>RN</i>	Huang et al. (2013)	<i>TVL</i>
Kochmann e Bertoldi (2017)	<i>RN,AAC</i>	Meza et al. (2014)	<i>TVL</i>
Barthelat e Rabiei (2011)	<i>UP</i>	Clausen et al. (2015)	<i>TVL</i>
Ritchie (2011)	<i>UP</i>	Danfeng Chen et al. (2015)	<i>TVL</i>
Jang et al. (2013)	<i>UP</i>	Khoo et al. (2015)	<i>TVL</i>
Meza et al. (2014)	<i>UP</i>	Vogiatzis et al. (2017)	<i>TVL</i>
Zheng et al. (2014)	<i>UP</i>		

Nota: *PM*, Pentamodo; *DL*, Dilatacionais; *CN*, Compressibilidade Negativa; *RN*, Rigidez Negativa; *UP*, Ultra Propriedades; *AAC*, Ativos Adaptáveis e Multiconfiguráveis; *TVL*, Transversal a todas as classes.

## 2.3 Otimização topológica e interpolação de material

Pode ser definida como a tomada de decisão para um conjunto de variáveis do problema, visando um determinado objetivo que quantifica o desempenho da decisão. Na formulação destes problemas o objetivo é maximizado ou minimizado, estando sujeito a restrições. A otimização, à semelhança do que acontece com os métodos numéricos, deve ser utilizada como uma aproximação não universal e única da solução do problema enunciado. Este facto deve-se à dificuldade em incluir na formulação do problema (i.e., modelo matemático) todos os fatores que influenciam o processo de resolução. Dessa forma, os fundamentos teóricos assumem especial importância, bem como o correto enunciar dos problemas, afinação dos modelos e interpretação dos resultados (Oliveira, 2013).

No contexto da engenharia, diversas abordagens são empregues na obtenção de soluções ótimas. Os métodos analíticos (baseados na análise matemática) apresentam elevada complexidade o que os torna de difícil aplicabilidade em problemas de engenharia. Outra abordagem, comum na otimização estrutural aplica métodos empíricos ou análises parametrizadas (e.g., simulação numérica). Porém, a sua utilização não faz sentido, nem é exequível, quando o número de casos a estudar seja elevado. A mecânica computacional, por outro lado, oferece métodos de otimização mais adequados e eficientes. Com efeito, os algoritmos de otimização numérica são uma opção eficiente para lidar com problemas ou gama de variáveis de grande dimensão. Porquanto, para além de reduzirem o tempo computacional, apresentam maior segurança de obtenção da solução efetivamente ótima para as condições enunciadas.

### 2.3.1 Otimização estrutural

A otimização estrutural (*Structural optimisation* - SO) pode ser definida como o estudo da melhor configuração/montagem de materiais com objetivo de estabelecer o melhor compromisso entre rigidez, peso ou custo. Evidentemente, tais objetivos (maximizações ou minimizações conforme a formulação) só podem ser alcançados com algum tipo de restrição. Tipicamente, em problemas de otimização estrutural as restrições são os deslocamentos, tensões, dimensões ou peso. De salientar, que a maioria das restrições também pode ser utilizada como função objetivo.

Os primeiros trabalhos na área da otimização estrutural remontam aos séculos XVI e XVII, em 1638, Galileo Galilei (1564-1642) apresentou a formulação dos primeiros conceitos de otimização de formas ótimas de elementos estruturais de acordo com a distribuição das tensões (Timoshenko, 1983). A Figura 6 ilustra a otimização de uma viga encastrada proposta por Galileo Galilei. O trabalho de Wilhelm Leibniz (1646-1716) na área da matemática lançou a base do procedimento analítico. Noutro estudo Leonard Euler (1707-1783) forneceu a base para o desenvolvimento do cálculo variacional. Mais tarde, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) contribuiu para aprofundar o estudo desenvolvido por Euler, dando origem à equação Euler-Lagrange, que é uma das condições necessárias de ótimos (Brunt, 2004; Malinowska et al., 2015). Contudo, foi Maxwell (J. Clerk Maxwell, 1870) que primeiro abordou os problemas de otimização estrutural numa perspetiva científica. Neste trabalho, Maxwell estudou o projeto duma ponte

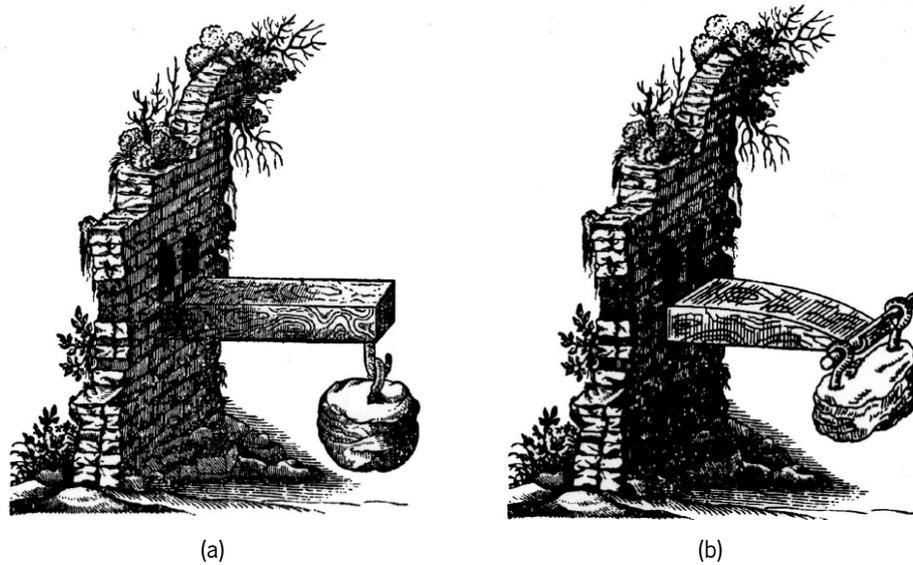


Figura 6: Estudo da forma ótima de uma viga encastrada apresentado por Galileo Galilei: (a) ilustração do teste de flexão, (b) derivação proposta por Galileo da viga encastrada com secção transversal retangular com resistência equivalente (adaptado de Timoshenko (1983)).

com recurso ao mínimo material. Aplicou princípios da teoria da elasticidade na otimização da distribuição de material num domínio infinito, dependente de carregamentos e apoios. Como resultado, Maxwell baseado na análise do campo de tensões, propôs uma estrutura otimizada constituída por elementos barra (treliça) orientados de acordo com as principais direções do campo de tensões. Posteriormente, Michell (Michell, 1904) deu continuidade a esta abordagem, na otimização de estruturas com minimização do material. Estas estruturas têm sido amplamente usadas em *benchmarks* para OT de estruturas reticuladas (treliça) (Ole Sigmund, Aage et al., 2016). Por razões estéticas, estruturas semelhantes tem sido usadas em aplicações arquitetónicas (Beghini et al., 2014). Todavia, este tipo de estruturas foram consideradas demasiado académicas, essencialmente devido aos limites das tecnologias de fabrico à data, vindo a ser retomadas mais tarde. A Figura 7 ilustra duas estruturas reticuladas.

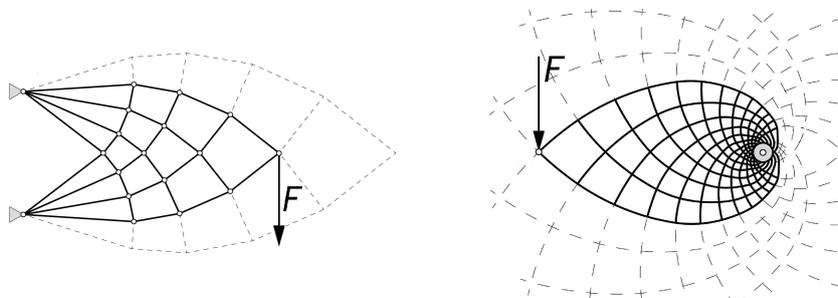


Figura 7: Estruturas reticuladas de Michell (Michell-like structures).

### 2.3.2 Tipos de otimização estrutural

A otimização estrutural é usualmente dividida em três abordagens principais: A otimização dimensional ou paramétrica; otimização de forma e otimização topológica (Martin P. Bendsøe e Ole Sigmund, 2004). Na Figura 8 são representados os três tipos de abordagem empregues na otimização estrutural.

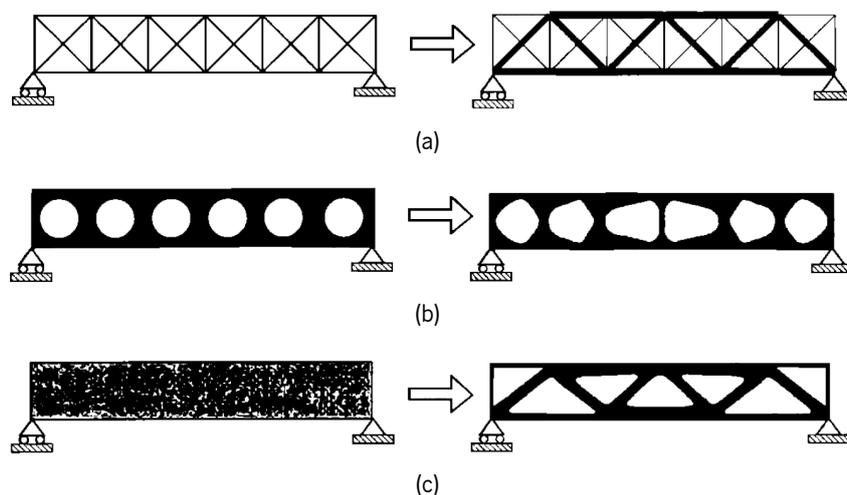


Figura 8: Categorias de otimização estrutural: (a) otimização dimensional, (b) otimização de forma e (c) otimização topologia (adaptado de Martin P. Bendsøe e Ole Sigmund (2004)).

A otimização dimensional ou paramétrica é utilizada para determinar a área da secção transversal ótima dos elementos viga num pórtico ou calcular a espessura de elementos casca (plate) satisfazendo o critério de design. Neste método a forma e a conectividade dos elementos não é alterada, contudo podem ser adicionados ou removidos durante o processo (Ole Sigmund, 2000). Na otimização dimensional, as variáveis de projeto representam parâmetros importantes no comportamento de uma estrutura. Outra abordagem, a otimização de forma, considera a forma inicial e transforma as fronteiras (limites de forma) para obter a solução ótima. Neste método, a otimização pode remodelar o material dentro do domínio admissível, sem contudo alterar as suas propriedades topológicas, como o número de furos. Deste modo, as variáveis de projeto são geralmente as coordenadas de pontos relevantes ou parâmetros de definição geométrica (Ole Sigmund, 2000).

A otimização topológica pode ser classificada em discreta ou contínua, com base na natureza das suas variáveis (i.e., problema), a Figura 9 ilustra os dois tipos de variáveis. Designam-se de problemas discretos se as variáveis de projeto são finitas. Exemplos típicos são problemas de otimização para estruturas onde as variáveis de projeto  $x$  representam as áreas da secção transversal das barras. Para estruturas essencialmente discretas, a topologia ótima do problema consiste em determinar o número ideal, posições, e conectividade dos membros estruturais. Por outro lado, se as variáveis de projeto consistem num campo, é designado de problema contínuo. Exemplos representativos, são problemas de otimização de forma ou problemas de OT. No caso de OT de estruturas contínuas, as fronteiras de forma externas, internas e o número de orifícios internos são simultaneamente otimizados de acordo

com a função objetivo. Assume-se que, o carregamento é prescrito e que uma determinada quantidade de material estrutural é especificada dentro de um domínio admissível (2D ou 3D) com determinadas condições de contorno (Eschenauer e Olhoff, 2001).

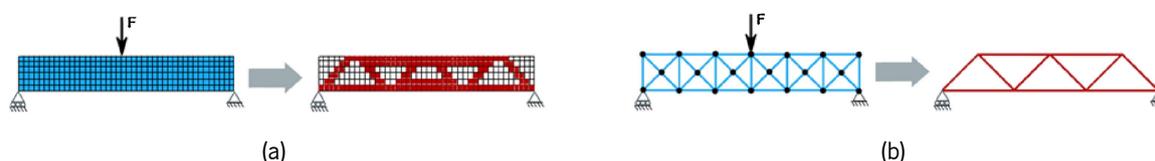


Figura 9: Otimização topológica: (a) variáveis contínuas e (b) discretas.

Idealmente, a otimização de forma é uma subclasse de OT, embora as implementações práticas sejam baseadas em técnicas distintas. No que concerne à relação entre OT e otimização dimensional, a situação é oposta. Apesar de, serem fundamentalmente diferentes estão intimamente relacionados a partir de considerações práticas. Visto que, quando o problema de estado é uma equação diferencial, a otimização da forma corresponde ao controle do domínio da equação, enquanto a OT e dimensional dizem respeito ao controle de seus parâmetros (P. W. Christensen e Klarbring, 2008). Fundamentalmente, na OT a função objetivo é otimizada (i.e., maximizada ou minimizada) pela manipulação da topologia da estrutura dentro do domínio admissível. As variáveis consideradas, são a densidade ou magnitude das propriedades em estudo, podendo variar entre diferentes materiais, fase do mesmo material ou mesmo vazio. Assim, a OT baseada em métodos matemáticos, geralmente (mas nem sempre) utiliza gradientes para determinar a localização da distribuição do material no interior do domínio admissível, com base nas condições fronteira e solicitações de acordo com objetivo definido (e.g., mínima flexibilidade, deslocamentos e valores próprios), respeitando as restrições. Além disso, as soluções admissíveis podem assumir qualquer formato, tamanho ou conectividade. Usualmente esta técnica utiliza o Método dos Elementos Finitos (MEF), dividindo um domínio admissível em elementos finitos áreas ou volumes no caso 2D ou 3D, respetivamente (Rozvany, 2008). Para distinguir entre problemas discretos derivados e problemas discretos originais, estes últimos, são designados problemas naturalmente discretos. A solução do contínuo discretizado converge para a solução do contínuo real quando a discretização é feita cada vez mais fina. No entanto, nem sempre, as soluções são matematicamente possíveis de obter e podem não convergir para a solução ótima. Na secção seguinte são introduzidos os princípios fundamentais da formulação matemática do problema.

### 2.3.3 Fundamentos matemáticos

Para compreensão dos problemas de otimização estrutural baseada em métodos matemáticos tratados neste trabalho é necessário apresentar alguns conceitos básicos relacionados com o tema. Estes conceitos são transversais em otimização independentemente da sua aplicação.

O processo de formulação de um problema de otimização em linguagem matemática é composto por diferentes passos. Em primeiro, é necessário descrever o problema, os principais objetivos do projeto e os requisitos a cumprir. Em segundo, definição das variáveis que descrevem o problema, designadas variáveis do problema. Geralmente, também referidas como variáveis de otimização já que para diferentes valores produzem diferentes soluções distintas. Estas variáveis devem ser expressas independentemente entre elas (i.e., sem restrições entre elas) sendo que, o seu número traduz o número de graus de liberdade do problema (Jasbir Singh Arora, 2017). Em terceiro, deve ser definido o critério de otimização baseado numa função do vetor das variáveis do problema ( $\mathbf{x}$ ). Esta função, tipicamente designada de função objetivo do problema, é válida somente se for influenciada direta ou indiretamente pelas variáveis do problema. Caso contrário, não é uma função objetiva significativa. Assim, a função objetivo do problema terá de ser maximizada (e.g., lucro) ou minimizada (e.g., custo, peso, energia) de acordo com o objetivo. Neste trabalho, à semelhança do que é apresentado na maioria da literatura (Jasbir Singh Arora, 2017; Luenberger, 2008) consideram-se problemas de minimização.

A transcrição de um problema de otimização em formulação matemática é uma etapa crítica no processo de resolução do problema. Se a formulação do problema de otimização for inadequada, a solução do problema provavelmente será inaceitável. De acordo, com descrição anterior, cada problema é composto por três elementos fundamentais: As variáveis do projeto ou de otimização, expressas pelo vetor  $\mathbf{x}$ ; a função objetivo,  $f(\mathbf{x})$ ; as restrições  $g_i(\mathbf{x})$  expressas como restrições de igualdade ou desigualdade (i.e., equações e inequações, respetivamente). As variáveis do problema podem ser contínuas ou discretas. Dependendo dos tipos de variáveis e das funções objetivo, obtemos problemas de variáveis contínuas, variáveis discretas, variáveis diferenciáveis e não diferenciáveis. Os diferentes tipos de problema são enunciados de seguida.

Qualquer problema de otimização com variáveis contínuas pode ser transcrito num modelo de Programação não-Linear (PNL). Definido como a procura de um vetor  $\mathbf{x}$  de  $n$  variáveis, que minimiza a função objetivo  $f(\mathbf{x})$  sujeita a restrições de igualdade e restrições de desigualdade (i.e., na forma “ $\leq$ ”). A formulação de um problema padrão expressa-se na procura a de um vetor  $\mathbf{x}$ , composto por  $n$  variáveis do problema, que minimiza a função objetivo  $f(\mathbf{x})$ , sujeita a um conjunto de restrições  $g(\mathbf{x})$  de igualdade ou desigualdade. O Problema 2.1 expressa o problema em linguagem matemática.

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ \text{suj. a } g_i(\mathbf{x}) = 0, & i = 1, \dots, p \\ g_i(\mathbf{x}) \leq 0, & i = m + 1, \dots, m \end{cases} \quad (2.1)$$

Em que  $p$  é o número de restrições de igualdade e  $m$  representa o número total de restrições. O domínio admissível de  $\mathbf{x}$  expresso pela Equação 2.2, representa todos os pontos que satisfazem as restrições  $g$ .

$$\mathbf{R} = \{\mathbf{x} | g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \dots, p; \quad g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = m + 1, \dots, m\} \quad (2.2)$$

O domínio admissível de um problema pode ser vazio se houver um excesso de restrições, ou se estas foram incompatíveis. Geralmente, esta ocorrência é difícil de determinar antes da resolução do problema. Neste caso, a formulação do problema deve ser verificada e eventualmente relaxar algumas das restrições ou eliminar o conflito. Além disso, nem sempre é possível saber antes da sua resolução se o problema tem solução. Contudo, a questão da existência de uma solução pode ser verificada com base na verificação de certas suposições iniciais acerca das funções do problema. Se  $f(\mathbf{x})$  é contínua num domínio admissível  $R$  não vazio, todas as funções de restrição são contínuas e todas as desigualdades contêm seus pontos de fronteira (i.e., expressas como  $\leq$  ou  $\geq$ ), então existe uma solução para o problema. Quando esses requisitos são satisfeitos, garante-se que um algoritmo numérico robusto converge para uma solução (Jasbir S. Arora, 2007). Se não houver restrições nas variáveis, o domínio  $R$  corresponde a todo o espaço de  $\mathbf{x}$  e o problema é chamado de problema de otimização não restringida (i.e., sem restrições). A sua aplicabilidade a problemas reais, poderá ser viável, caso a formulação do problema contemple todas as variáveis relevantes para a decisão (Luenberger, 2008). Na maioria dos casos, as restrições funcionam como uma forma artificial de impor limitações a problemas cuja formulação não é suficientemente abrangente. Em contrapartida, existem problemas com restrições em que a sua resolução efetiva requerem a sua transcrição em problemas não restringidos. Além disso, a otimização sem restrições é aplicada no estudo inicial de diversos problemas e algoritmos, antes de serem generalizados para problemas com restrições. Porém, muitos problemas são formulados de base como problemas com restrições. Tal deve-se geralmente, à necessidade de reduzir a complexidade do problema (por incapacidade ou conveniência de resolução), dividindo em vários problemas menores (i.e., subproblemas). Deste modo, cada subproblema é restringido e resolvido de forma independente do problema geral (Jasbir Singh Arora, 2017). Esta abordagem, dá origem aos problemas de programação matemática não-linear restringida. Se todas as funções são lineares em termos de variáveis, o problema é denominado de Programação Linear (PL). Se a função objetivo é quadrática e as restrições são lineares, o problema é chamado de problema de Programação Quadrática (PQ). Uma restrição de desigualdade  $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$  é considerada ativa num ponto  $\mathbf{x}$  se a condição de igualdade for satisfeita nesse ponto, ou seja,  $g_i(\mathbf{x}) = 0$ . A restrição é inativa se tiver valor negativo naquele ponto e violada se tiver valor positivo. Mais, uma restrição de igualdade é sempre ativa ou violada em qualquer ponto.

Muitas aplicações práticas de otimização requerem variáveis inteiras ou discretas de acordo com a sua formulação (e.g., número e dimensões de elementos estruturais e propriedades tabeladas dos materiais). A Figura 9 ilustra os dois tipos de variáveis utilizados em otimização topológica. Este facto origina um problema de variáveis discretas ou um problema misto (i.e., com variáveis contínuas e discretas). A sua formulação geral é obtida pela modificação do problema definido no Problema 2.1, acrescentando à função-objetivo e às restrições a condição de seleção das variáveis discretas pertencentes ao conjunto 2.3:

$$x_i \in D_i, \quad D_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iq_i}); \quad i = 1, \dots, n_d, \quad (2.3)$$

Onde  $n_d$  é o número de variáveis discretas,  $D_i$  representa o domínio dos valores discretos admissíveis

e  $q_i$  o número de valores discretos admissíveis para a variável  $x_i$ . Esta definição inclui problemas de variáveis inteiras, bem como de variáveis 0/1 (i.e., variáveis *on/off* ou binárias). Se o problema tem apenas variáveis contínuas, e tanto a função objetivo como as restrições são contínuas e duplamente diferenciáveis, obtemos o problema geral contínuo (vd. Equação 2.1). Muitos problemas de otimização de variáveis discretas contêm funções não diferenciáveis. Consequentemente, os métodos baseados em gradientes não podem ser usados para resolver esses problemas, existem porém métodos alternativos. É também importante sublinhar que os problemas de otimização com variáveis discretas geralmente requerem consideravelmente mais esforço computacional em comparação com os problemas de variáveis contínuas. Este facto também é válido mesmo que o número de valores discretos admissíveis seja finito e os valores admissíveis com variáveis contínuas sejam infinitos (Jasbir S. Arora, 2007).

### 2.3.4 Condições de ótimo do problema de variáveis contínuas

As condições de ótimo (também referidas na literatura como condições de otimalidade) são as condições matemáticas que caracterizam o ponto ótimo de um problema. Considera-se o problema de minimização da função  $f(\mathbf{x})$  expresso na Equação 2.1. Antes de discutir as condições de ótimo, é necessário definir o conceito de ponto mínimo local e mínimo global ou absoluto, de uma função objetivo. A função objetivo  $f(\mathbf{x})$  tem um mínimo local (i.e., mínimo relativo) num ponto  $\mathbf{x}^*$ , no domínio  $R$ , se o valor  $f(\mathbf{x}^*)$  é mínimo numa dada vizinhança  $\delta$  de  $\mathbf{x}^*$ , ou seja,

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\| < \delta \Rightarrow f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

Se a desigualdade for estrita (i.e.,  $f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x})$ ) for mantida, então  $\mathbf{x}^*$  é chamado de mínimo local estrito ou isolado. A função objetivo tem um mínimo global (também designado de mínimo absoluto) no ponto  $\mathbf{x}^*$  se a desigualdade expressa pela Equação 2.4 for válida para todo o domínio  $R$  (i.e., para qualquer valor de  $\delta > 0$ ). Se a desigualdade for estrita, então  $\mathbf{x}^*$  é chamado de mínimo global estrito ou único. Estas definições mostram que, um mínimo local é testado em torno de uma vizinhança limitada, já o ponto mínimo global tem de satisfazer as condições enunciadas em todo o domínio admissível. Uma função objetivo  $f(\mathbf{x})$  pode ter muitos mínimos globais, desde que tenha o mesmo valor em todos estes pontos. De igual modo, pode haver vários mínimos locais, numa dada vizinhança. A Figura 10 ilustra os mínimos locais e globais de uma função. As definições anteriores de pontos mínimos locais e globais não podem ser usadas diretamente para encontrar os pontos mínimos para o problema de otimização. Contudo, podem ser usadas para derivar as condições ou critérios de ótimo que caracterizam mínimos locais. Por outro lado, que estas definições não podem ser usadas para determinar condições para pontos mínimos globais, uma vez que requerem o comportamento global (i.e., em todo o domínio admissível) da função objetivo. No caso de um problema de variáveis discretas, estas definições são úteis, uma vez que existe apenas um número finito de pontos a serem verificados.

As condições de ótimo podem ser divididas em duas categorias: necessárias e suficientes. As condições necessárias devem ser obrigatoriamente satisfeitas para que um ponto seja candidato a mínimo

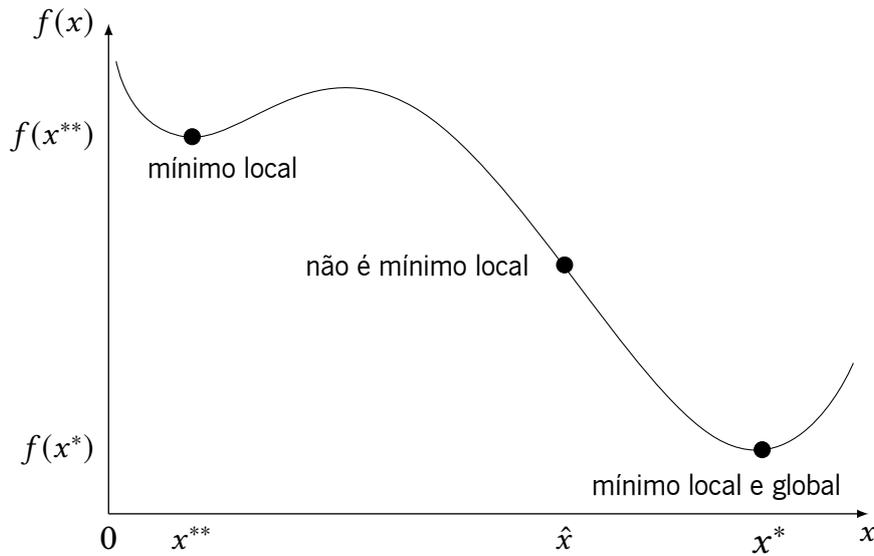


Figura 10: Mínimos locais e globais de uma função. Mínimos locais da função  $f(x^*)$  e  $f(x^{**})$  com os pontos mínimos correspondentes  $x^*$  e  $x^{**}$  do domínio  $R$ . O ponto  $x^*$  é o ponto mínimo global e  $f(x^*)$  corresponde ao mínimo global da função objetivo no domínio  $R$ .

da função. Os pontos que satisfazem as condições necessárias são designados de pontos estacionários. No entanto, um ponto que satisfaça as condições necessárias pode não ser um mínimo da função objetivo, tendo que satisfazer as condições suficientes simultaneamente para ser ponto ótimo. Ou seja, a satisfação das condições suficientes determina se um ponto estacionário é um mínimo local.

As condições de ótimo são utilizadas de duas maneiras: (i) para desenvolver métodos numéricos para encontrar pontos mínimos (i.e., ótimos) e (ii) para verificar a otimalidade de um determinado ponto e definição de critérios de paragem em algoritmos numéricos iterativos (Jasbir S. Arora, 2007). Nas secções seguintes são descritas os dois tipos de condições, as necessárias e as suficientes. Primeiramente para o caso do problema não constrangido de seguida para o caso do problema constrangido.

### 2.3.5 Problema não constrangido

No caso de não existirem restrições, o problema enunciado consubstancia-se à minimização da função objetivo  $f(\mathbf{x})$ . As condições para  $\mathbf{x}^*$  seja um ponto mínimo para a função  $f(\mathbf{x})$  são derivadas da análise do comportamento local da função objetivo no ponto  $\mathbf{x}^*$  (i.e., pela expansão da função com a série de Taylor) (Quarteroni et al., 2007). A condição necessária de segunda ordem pode ser enunciada como: se  $\mathbf{x}^*$  é um mínimo local a função objetivo  $f(\mathbf{x})$ , então o gradiente de  $f(\mathbf{x})$  (primeiras derivadas) de  $f(\mathbf{x})$  em  $\mathbf{x}^*$  deve ser nulo (i.e.,  $\partial f / \partial x_i = 0, i = 1, \dots, n$ ). Por outro lado, a condição necessária de segunda ordem estabelece-se como: se  $\mathbf{x}^*$  é um mínimo local da função objetivo  $f(\mathbf{x})$ , então a sua matriz Hessiana,  $\mathbf{H} = [\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j]$ , deve ser positiva semidefinida em  $\mathbf{x}^*$  (i.e., todos os valores próprios devem ser não-negativos). A condição suficiente de segunda ordem define-se como: se a matriz  $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$  for positiva definida (i.e., todos os valores próprios positivos), então o ponto estacionário  $\mathbf{x}^*$  corresponde

a um mínimo local isolado da função objetivo. Qualquer ponto  $\mathbf{x}^*$  que satisfaça as condições necessárias é chamado de ponto estacionário. Se um ponto estacionário não for mínimo nem máximo, é designado de ponto de inflexão.

As condições de ótimo são baseadas nas derivadas de  $f(\mathbf{x})$  e não no valor da função. Por consequência, o ponto mínimo não é alterado se for adicionada uma constante à função ou se esta for transformada por uma constante escalar. Nesta circunstância, altera-se somente o valor da função objetivo no ponto ótimo.

### 2.3.6 Problema constringido

Apesar de um problema de otimização constringido possa ter um ponto ótimo sem nenhum constringimento ativo (i.e., igual ao problema não constringido), este facto geralmente não se verifica em aplicações práticas. As condições de ótimo do problema não constringido, correspondem na realidade a um caso especial das condições do problema constringido. estas podem ser enunciadas de várias maneiras alternativas equivalentes. As mais comuns empregues na literatura são as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) (Jasbir S. Arora, 2007; Luenberger, 2008). Antes de enunciar estas condições é necessário introduzir o conceito de ponto regular. Um ponto  $\mathbf{x}$  é denominado ponto regular do domínio admissível  $R$  se a função objetivo  $f(\mathbf{x})$  for contínua e os gradientes de todos os constringimentos (restrições) ativos são linearmente independentes nesse ponto. O número de vetores linearmente independentes não pode ser superior a  $n$  (i.e., número de variáveis), ou seja, a dimensão de cada vetor. Como resultado, o número total de restrições ativas não pode superar o número de variáveis no ponto regular, ou seja, num ponto mínimo. Enunciam-se as condições necessárias de KKT. Considerando o Lagrangiano do problema definido pela Expressão 2.5.

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

Onde  $\boldsymbol{\lambda}$  representa o vetor de multiplicadores de Lagrange para as restrições  $\mathbf{g}$ . Seja  $\mathbf{x}^*$  um mínimo local de  $f(\mathbf{x})$  e as restrições ativas em  $\mathbf{x}^*$  linearmente independentes (i.e., o ponto  $\mathbf{x}^*$  é um ponto regular do domínio admissível). Então, existem multiplicadores de Lagrange únicos  $\lambda_i^*$ , tais que,

$$\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \text{ ou } \nabla f(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\lambda}^{*T} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \quad (2.6)$$

$$\lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad i = (p + 1), \dots, m, \quad (2.7)$$

$$\lambda_i^* \geq 0, \quad i = (p + 1), \dots, m. \quad (2.8)$$

Onde  $\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}^*)$  é uma matriz de dimensão  $n \times m$ . A Equação 2.6 mostra que o Lagrangiano  $\mathcal{L}$  é estacionário em relação a  $\mathbf{x}$ , já que gradiente do Lagrangiano é zero. Esta equação define as condições de estacionaridade. A Equação 2.7 define a condição de folgas complementares, além de identificar os constringimentos ativos e inativos. Nesta equação o multiplicador de Lagrange  $\lambda_i^*$  é zero ou a restrição  $g_i$

está ativa no ponto mínimo. A Inequação 2.8 mostra que os multiplicadores de Lagrange dos constrangimentos de desigualdade devem ser não negativos. A Equação 2.6 possui  $n$  variáveis e  $m$  multiplicadores de Lagrange, num total de  $(n + m)$  incógnitas. Existem igualmente  $(n + m)$  equações ( $n$  equações na Expressão 2.7),  $p$  constrangimentos de igualdade e  $m - p$  equações dadas pela expressão 2.7. Assim, as condições necessárias KKT de primeira ordem traduzem-se num sistema de equações, geralmente não linear. A Equação 2.6 pode ser reescrita na forma:

$$-\nabla f(\mathbf{x}^*) = \boldsymbol{\lambda}^{*T} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^*). \quad (2.9)$$

A Equação 2.9 expressa o significado físico da condição de gradiente. Mostra que, num ponto mínimo, a direção de gradiente com declive mais acentuado (i.e., simétrico do gradiente da função objetivo) é paralela à combinação linear dos gradientes das restrições ativas. Sendo os multiplicadores de Lagrange os escalares da combinação linear, e que representam o peso ponderado de cada restrição no problema de otimização. A verificação de regularidade para o ponto é um aspeto relevante das condições KKT. Se esta condição não for satisfeita, todas as outras condições KKT podem ou não ser satisfeitas no ponto  $\mathbf{x}^*$  (Jasbir S. Arora, 2007).

As condições de ótimo necessárias de segunda ordem podem ser usadas para distinguir os pontos ótimos de outros pontos regulares. Estas condições envolvem matrizes Hessianas das funções, como no caso dos problemas não constrangidos.

### 2.3.7 Ótimo global e convexidade

Uma questão relevante que resulta do processo de otimização é: será a solução ótima um mínimo local? A resposta a esta pergunta é que o ponto ótimo é somente um ótimo local. A solução global pode ser calculada através da pesquisa exaustiva de todo o domínio admissível ou demonstrando que o problema é convexo. No entanto, ambos os procedimentos requerem cálculos computacionalmente exigentes. No caso do problema ser convexo, então qualquer mínimo local também é um mínimo global e as condições KKT necessárias de primeira ordem são simultaneamente suficientes.

Um problema é chamado de convexo se a função objetivo  $f(x)$  é convexa em todo o domínio admissível. A Figura 11(a) e Figura 11(b) ilustram uma função côncava e convexa, respetivamente. Assim, um conjunto de pontos é designado convexo se e só se, para quaisquer dois pontos A e B do domínio admissível, o segmento que os une também pertence ao domínio. Do ponto de vista gráfico, isto significa que um conjunto convexo não possui cantos ou reentrâncias. Por isso, verifica-se que as igualdades e desigualdades lineares definem sempre um domínio convexo admissível. Em contraste com igualdades não-lineares, que definem sempre domínios admissíveis não-convexos. As Figuras 12(a) e 12(b) ilustram conjuntos convexo e não-convexo, respetivamente. No entanto, a definição gráfica é geralmente difícil de utilizar na verificação da convexidade de um domínio, sendo necessário recorrer a procedimentos computacionais mais eficazes. Sendo o domínio admissível do problema definido pelas funções (i.e., restrições)  $g_i(\mathbf{x})$ ,  $1, \dots, m$ , se todas as funções forem convexas, então este também é convexo. Por

seu turno, uma função é convexa se e somente se a sua matriz Hessiana for pelo menos semidefinida positiva em todo o domínio. Se uma função  $g_i(\mathbf{x})$  é convexa, então o domínio definido pela inequação  $g_i(\mathbf{x}) \leq e_i$  é convexo, sendo  $e_i$  uma qualquer constante. Esta é apenas uma condição suficiente, mas não necessária. Deste modo, se uma função  $g_i(\mathbf{x})$  não for convexa ainda assim é possível definir um domínio admissível convexo (Jasbir S. Arora, 2007).

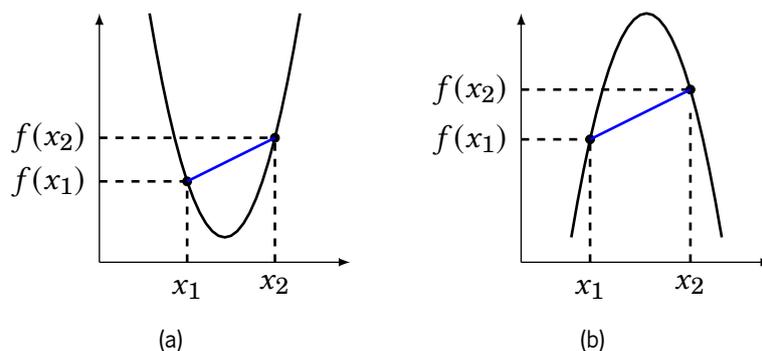


Figura 11: Exemplos de funções: (a) função convexa, (b) função côncava.

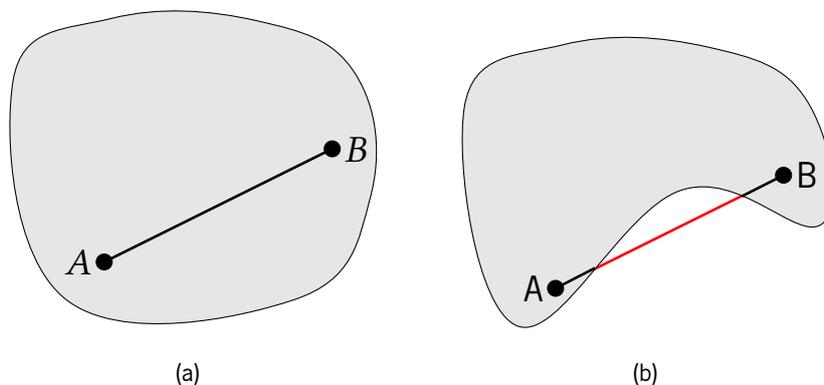


Figura 12: Exemplos de conjuntos: (a) convexo, (b) não-convexo.

Os valores ótimos dos multiplicadores de Lagrange para as restrições expressam a importância relativa das restrições relativamente à função objetivo. Por outro lado, muitas vezes em aplicações práticas, é usual aplicar um fator de escala à função objetivo e as restrições para evitar instabilidades numéricas. No entanto deve-se aferir o efeito nos multiplicadores de Lagrange. Considere-se um problema em que os valores limite atuais para as restrições são zero. Seja  $e_i$  uma pequena variação no segundo termo da restrição  $g_i$ . O ponto ótimo para o problema perturbado é uma função do vetor  $\mathbf{e}$ , ou seja,  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\mathbf{e})$  e  $f = f(\mathbf{e})$ . Em virtude destas funções implícitas de  $\mathbf{e}$  advém as derivadas implícitas de  $\frac{\partial f}{\partial e_i}$  e surge o conceito de sensibilidade a variações nas restrições. Seja  $\mathbf{x}_*$  um ponto regular e  $\lambda_i^*$  os multiplicadores de Lagrange, satisfaçam as condições necessárias KKT e as condições suficientes para que  $\mathbf{x}^*$  um ponto mínimo local do problema. Se para cada  $g_i(\mathbf{x}) = 0$  para  $i > p$ , se  $\lambda_i^* > 0$ , então

a solução  $\mathbf{x}^*(\mathbf{e})$  do problema modificado é uma função continuamente diferenciável de  $\mathbf{e}$  numa dada vizinhança de  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ , e

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*(\mathbf{0}))}{\partial e_i} = -\lambda_i^*, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.10)$$

Estas condições estabelecidas não forem satisfeitas, a derivada implícita dada pela Equação 2.10 pode ainda assim existir, mas a sua existência não pode ser garantida. Através da Equação 2.10, podemos estimar o custo na função objetivo devido a uma mudança no segundo termo da restrição  $i$ . O termo de primeira ordem da série de Taylor da função objetivo no ponto  $e_i$  é dado como,

$$f(e_i) = f(\mathbf{0}) + \frac{\partial f(\mathbf{0})}{\partial e_i} e_i, \quad (2.11)$$

onde  $f(\mathbf{0})$  é o valor ótimo da função objetivo obtido com  $e_i = \mathbf{0}$ . Através da Equação 2.10, pode-se calcular a variação na função objetivo  $\Delta f$ , como,

$$\Delta f = f(e_i) - f(\mathbf{0}) = -\lambda_i^* e_i. \quad (2.12)$$

Através da Equação 2.12 mostra-se que o multiplicador de Lagrange correspondente a uma restrição do tipo  $\leq$  deve ser não negativo. Esta afirmação pode ser exemplificada relaxando uma restrição de desigualdade ativa  $g_i \leq 0$  selecionando  $e_i = 0$ , assim, o domínio admissível do problema é expandido. Como resultado, o valor mínimo para a função objetivo devia reduzir-se ou permanecer inalterado com o domínio admissível expandido. Todavia, a Equação 2.12 mostra que se  $\lambda_i \leq 0$ , o relaxamento da restrição  $e_i > 0$  resultaria num aumento do valor da função objetivo (i.e.,  $\Delta f > 0$ ). Tal não é possível e, portanto, o multiplicador de Lagrange para uma restrição do tipo  $\leq$  não pode ser negativo.

Algumas vezes, em aplicações práticas, pode haver a necessidade de normalizar a função objetivo, multiplicando-a por uma constante positiva. Embora esta alteração não altere o ponto ótimo, altera os multiplicadores de Lagrange para todas as restrições. Recorrendo às condições KKT enunciadas na Expressão 2.6, pode-se mostrar que todos os multiplicadores de Lagrange também são multiplicados pelo mesmo fator de escala. Seja  $\lambda_i^*$  o multiplicador de Lagrange para a restrição  $g_i$  com a função objetivo original. Seja a nova função objetivo como  $f^{nov} = \alpha f$ , onde  $\alpha > 0$  é uma dada constante, e  $\lambda_i^{*nov} = \alpha \lambda_i^*$ ,  $i = 1, \dots, m$  é o novo valor do multiplicador de Lagrange para a restrição  $g_i$  no ponto ótimo. Do mesmo modo, em aplicações praticas, é vantajoso normalizar também todas as restrições, de forma a facilitar a identificação das restrições violadas sem normalização. Sobretudo, se as restrições incluírem grandezas físicas com diferentes ordens de grandeza. Assim, a normalização de uma restrição é, em tudo, idêntica à realizada anteriormente para a função objetivo. Estas alterações não alteram seu limite, portanto, não afetam o ponto ótimo ou a função objetivo. No entanto, o multiplicador de Lagrange para a restrição é afetado. Usando novamente as condições KKT definidas na Expressão 2.6 pode ser demonstrado que o multiplicador de Lagrange de uma restrição  $g_i$  é dividido pelo mesmo fator de escala. Seja uma restrição  $g_i$  dividida por  $\beta_i > 0$  pois  $g_i^{nov} = g_i / \beta_i$  sendo  $\lambda_i^*$  e  $\lambda_i^{*nov}$  os multiplicadores de Lagrange original e novo, respetivamente. Deste forma, os novos e os originais multiplicadores de Lagrange no ponto ótimo estão relacionados como  $\lambda_i^{*nov} = \beta_i \lambda_i^*$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

### 2.3.8 Métodos de otimização de estruturas e sistemas mecânicos

Atualmente, diversos métodos de otimização de estruturas e sistemas mecânicos, são usados rotineiramente em muitas aplicações práticas. Os diferentes graus de complexidade dos problemas reais requerem algoritmos com níveis distintos de sofisticação e complexidade. Por outro lado, cada algoritmo de otimização possui requisitos, métodos de simulação e restrições a serem atendidos. Além disso, nas últimas décadas, o desejo de resolver problemas maiores e mais complexos tem aumentado a par com a evolução da capacidade computacional e dos próprios métodos. Assim, estas considerações ditam o uso de algoritmos teoricamente sólidos e numericamente confiáveis, que afastem a incerteza acerca do seu comportamento. Nesta secção descreve-se brevemente alguns conceitos básicos dos algoritmos de otimização.

Os algoritmos de otimização baseados em gradiente são muito comuns em otimização. Ainda que, só garantam a convergência para pontos ótimos locais, já que as direções de descida são propriedades locais e não globais (Rao, 2009). A Expressão 2.13 descreve o procedimento iterativo utilizado pelos algoritmos de gradiente.

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)}; k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

Onde  $k$  representa o número da iteração,  $\mathbf{x}^{(k)}$  é a estimativa de ponto ótimo atual e  $\alpha_k \mathbf{d}^{(k)}$  representa a variação que leva a estimativa seguinte,  $\alpha_k > 0$  é a grandeza do passo,  $\mathbf{d}^{(k)}$  é uma direção de procura, e  $\mathbf{x}^{(0)}$  um ponto estimado de partida inicial.

Os algoritmos baseados em gradiente são classificados como métodos primais e métodos de transformação. Nos métodos primais, o vetor de direção  $\mathbf{d}^{(k)}$  é calculado através das funções do problema e os seus gradientes no ponto  $\mathbf{x}^{(k)}$ . Logo a dimensão do passo é calculada ao longo de  $\mathbf{d}^{(k)}$ , que necessita apenas dos valores da função. Diferentes algoritmos podem ser gerados dependendo de como a direção  $\mathbf{d}$  e o tamanho do passo  $\alpha$  são calculados. Em muitos algoritmos,  $\mathbf{d}$  é calculado resolvendo um subproblema de programação linear ou quadrática. Várias filosofias foram empregues no desenvolvimento de diferentes métodos primais. Por exemplo, se um ponto estimado de partida inicial ou um ponto intermédio não pertence ao domínio admissível, muitos métodos iteram através do domínio não admissível para alcançar a solução ótima. Outros métodos, corrigem as restrições para alcançar o domínio admissível primeiro e, em seguida, movem-se ao longo da fronteira para alcançar o ponto ótimo. Outros ainda, efetuam cálculos especiais, para não violarem as restrições no decorrer do processo iterativo (Jasbir S. Arora, 2007).

Nos métodos de transformação, o processo de solução do problema de otimização constringido é transformado numa série de problemas de minimização não constringidos. As soluções dos problemas não constringidos convergem para a solução do problema original. Exemplos destes métodos são, métodos de função barreira e penalidade, assim como Lagrangiano aumentado ou métodos multiplicadores (Jasbir Singh Arora, 2017; Belegundu e Jasbir S. Arora, 1985). Nos métodos de transformação, uma função transformada é construída adicionando um termo de penalidade às violações de restrições na função objetivo, sendo dado como  $F(\mathbf{x}, r) = f(\mathbf{x}) + P(g(\mathbf{x}), r)$ , onde  $r$  é um escalar ou vetor de

parâmetros de penalidade e  $P$  é uma função de valor real cuja ação de imposição de penalidade é função de  $r$ . Assim, algoritmos robustos e gerais são baseados em quatro etapas: (i) linearização da funções objetivo e restrições sobre o ponto atual; (ii) definição de um subproblema de determinação da direção de procura; (iii) resolução do subproblema da direção da procura e (iv) cálculo do tamanho do passo de atualização ao longo da direção de procura.

Em muitos casos, é útil normalizar todas as funções de restrição em cálculos numéricos. Uma vez que, não é fácil determinar qual restrição é mais gravemente violada se não forem normalizadas. Além disso, em cálculos numéricos, não pode ser usado o mesmo valor para o parâmetro de verificação da viabilidade de todas as restrições. Como exemplos, considere uma restrição de tensão como  $\sigma \leq \sigma_a$  e uma restrição de deslocamento como  $\delta \leq \delta_a$ , onde  $\sigma$  é a tensão calculada,  $\sigma_a > 0$  é uma tensão admissível,  $\delta$  é a deflexão calculada e  $\delta_a > 0$  é uma deflexão admissível. Uma vez que as unidades para as duas restrições são diferentes, os seus valores são de ordens de grandeza amplamente distinta. Logo, se forem violados durante o processo resolução iterativo, será difícil avaliar a magnitude da violação. No entanto, se forem normalizados como  $R - 1, 0 \leq 0$ , onde  $R = \sigma/\sigma_a$  para a restrição de tensão e  $R = \delta/\delta_a$  para a restrição de deflexão, é fácil comparar os seus valores.

Os algoritmos iterativos de busca de mínimos globais e locais possuem propriedades de convergência distintas. Para o primeiro caso, de análise de convergência global, as questões mais relevantes são a dependência da trajetória de convergência e a garantia de obtenção de um mínimo global dado um determinado ponto inicial aleatório. Já no segundo caso, a convergência local, analisa-se a velocidade de convergência para a solução local. Assim, um bom algoritmo iterativo para aplicações práticas deve possuir as seguintes características (Jasbir S. Arora, 2007):

- robustez, o algoritmo deve ser convergente para um ponto mínimo local a partir de qualquer estimativa inicial;
- generalidade, deve ser capaz de acomodar restrições de igualdade, bem como de desigualdade;
- precisão, o algoritmo deve ser capaz de convergir para um ponto ótimo como a precisão desejada;
- facilidade de utilização, a implementação deve ser tal que exija o mínimo de parâmetros de entrada na sua utilização;
- eficiência, o algoritmo deve ter uma taxa de convergência mais rápida, ou seja, pelo menos superlinear. Deve ser capaz de tratar restrições lineares com eficiência, e de explorar a estrutura esparsa das funções do problema, especialmente para problemas de grande escala.

### 2.3.9 Métodos de gradiente

Os métodos baseados em gradientes são adequados para a resolução de problemas de variáveis contínuas e funções diferenciáveis, uma vez que utilizam gradientes das funções do problema. Nesta secção, são apresentadas de forma sucinta as classes mais pertinentes no enquadramento deste trabalho.

### Linearização e programação linear sequencial

Todos os métodos de busca começam com uma estimativa inicial do ponto ótimo, a partir da qual é melhorado iterativamente. A aproximação da solução ótima é calculada resolvendo um subproblema obtido através da expansões lineares da serie de Taylor da função objetivo e restrições. Seja  $x^{(k)}$  a estimativa  $k$  para o ponto ótimo e  $\Delta \mathbf{x}^k$  a mudança pretendida. Em substituição de  $\Delta(\mathbf{x}^k)$  como uma mudança no ponto atual, usualmente são considerados a direção de busca  $\mathbf{d}^k$  e um tamanho de passo calculado nessa direção para determinar o novo ponto. Assim, o subproblema linearizado obtido pela série de Taylor das funções objetivo e das restrições, pode ser enunciado como

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{d}, \quad (2.14)$$

Sujeito às restrições de igualdade linearizadas

$$(\nabla g_j)^T \mathbf{d} = e_j, \quad j = 1, \dots, p, \quad (2.15)$$

$$(\nabla g_j)^T \mathbf{d} \leq e_j, \quad j > p \text{ e } j \in I_k, \quad (2.16)$$

em que  $e_j = -g_j(\mathbf{x}^{(k)})$  e  $\mathbf{c} = \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$ .

### Programação convexa sequencial - Métodos duais

A solução direta do problema geral de otimização enunciado em 2.1 é proibitiva em OT estrutural. Tal facto, deve-se ao custo computacional da análise estrutural e cálculo das sensibilidades do problema. Com efeito, sendo o problema de otimização estrutural não linear e implícito em termos das variáveis de projeto, cada avaliação de função objetivo exige uma análise pelo MEF.

Uma estratégia para resolver esta classe de problemas consiste na utilização de ferramentas de programação matemática (Duysinx et al., 2003; L. A. Schmit e Farshi, 1974; Lucien A. Schmit e Claude Fleury, 1980). A abordagem que recorre a métodos de aproximação substitui o problema original por uma sequência de subproblemas aproximados explícitos, com uma estrutura algébrica simples construída com base nas informações disponíveis (i.e., valores da função e suas derivadas) no ponto estimado atual ou de iterações anteriores. Assim, o Problema 2.1 pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \tilde{f}_0(\mathbf{x}) \\ \text{suj. a } \tilde{g}_j(\mathbf{x}) \leq \bar{g}_j, & j = 1, \dots, m \\ \underline{x}_i(\mathbf{x}) \leq x_i \leq \bar{x}_i, & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.17)$$

em que  $\tilde{f}_0$  e  $\tilde{g}_j$  são as aproximações da função objetivo  $f_0$  e das restrições  $g_j$ ,  $n$  representa o número de variáveis do problema  $x_i$ , que neste contexto é a densidade de cada elemento. Estas aproximações podem ser consideradas como uma expansão das funções de resposta em torno da atual estimativa  $x^{(k)}$

na iteração  $k$ . Apesar de existirem diferentes métodos adequados (e.g., CONLIN, MMA - *Method of Moving Asymptotes*) à resolução desta classe de problemas, a estratégia de aproximação apresenta vantagens pelo fato de os subproblemas expressos em 2.17 poderem ser resolvidos eficientemente com algoritmos de programação matemática adaptados (Duysinx et al., 2003).

Por outro lado, os métodos duais (C. Fleury, 1979) são adequados a problemas estruturais, em virtude da dimensionalidade da solução admissível dual ser usualmente muito menor que o domínio admissível do problema primário. Além disso, com algoritmos eficientes os métodos duais resolvem subproblemas em menor tempo computacional. Por exemplo, em problemas de OT o tempo de solução é inferior a 1 por cento do tempo de cálculo do MEF (Duysinx et al., 2003). Resumindo, a estratégia descrita que combina os dois conceitos de aproximação e solução dual na resolução de problemas de OT, é usualmente designada de programação convexa sequencial (C. Fleury, 1993). Do ponto de vista da sua implementação computacional, é baseada nos seguintes passos:

1. resolver o problema de elementos finitos para as variáveis atuais  $\mathbf{x}^k$  do problema e calcular as sensibilidades;
2. definir um subproblema aproximado a partir dos resultados da análise estrutural atual;
3. resolver o subproblema através do método dual
4. assumir a solução do subproblema aproximado  $\mathbf{x}^*$  como a nova estimativa  $\mathbf{x}^{k+1}$  e voltar para 1 até convergir.

Os métodos duais de programação convexa podem ser considerados com origem na técnica de multiplicadores de Lagrange para problemas que envolvem restrições de igualdade. Considere-se o seguinte problema de otimização não linear:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a } g_j(\mathbf{x}) \leq 0, & j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (2.18)$$

em que as funções  $f(\mathbf{x})$  e  $g_j(\mathbf{x})$  são contínuas e diferenciáveis. É usual definir o Lagrangiano associado ao Problema 2.18 por:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{x}) \quad (2.19)$$

em que  $\lambda_j \geq 0$  são os multiplicadores de Lagrange associados a cada uma das  $m$  restrições  $g_j$ . As novas variáveis  $\lambda_j$  são usualmente denominadas variáveis duais, uma vez que existe uma associação um-para-um com as restrições do problema. Inversamente, as variáveis originais do problema  $\mathbf{x}$  são designadas variáveis primárias do problema. Observe-se que, a transformação resultante do Lagrangiano substitui as restrições  $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$  por um termo linear  $\lambda_j g_j(\mathbf{x})$  na função objetivo. Isso pode ser interpretado como adicionar à função objetivo  $f(\mathbf{x})$  uma penalidade linear, com valor  $\lambda_j$ , sempre que a restrição for

violada. Assim, o Lagrangiano transforma o problema de otimização com restrições num problema não-restringido. Sendo que, função objetivo deste novo problema de otimização é precisamente o Lagrangiano  $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)$  e as variáveis do problema são  $\mathbf{x}$  e  $\lambda$ .

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{\lambda \geq 0} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) \quad (2.20)$$

Deste modo, a maximização do Lagrangiano traduz-se numa penalidade infinita quando as restrições são violadas (i.e.,  $g_j(\mathbf{x}) > 0$ ). Sendo que, esta transformação resulta no aumento da dimensão do problema de otimização de  $n$  para  $n + m$  variáveis.

O Problema 2.18 exhibe duas propriedades notáveis. Em primeiro, qualquer mínimo local é mínimo global. Em segundo lugar, existem condições suficientes de primeira ordem para uma solução global (i.e., condições de ótimo global). Se as condições de regularidade adequadas forem satisfeitas, essas condições também serão necessárias. Estas condições são as condições de ótimo KKT (vd. Secção 2.3.6). Assim, recordando as condições necessárias de ótimo de um problema restringido. Se  $x^*$  é um ótimo do Problema 2.18 e se  $x^*$  é um ponto regular, então pode-se encontrar um vetor de multiplicadores de Lagrange  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$  tal que:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \frac{\partial g_j(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0 \quad ; \quad \forall i \quad (2.21)$$

$$g_j(\mathbf{x}^*) \leq 0 \quad (2.22)$$

$$\lambda_j^* \geq 0 \quad (2.23)$$

$$\lambda_j^* g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad ; \quad \forall j \quad (2.24)$$

As condições KKT consistem em quatro tipos, a saber: (i) estacionaridade do Lagrangiano  $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)$  em relação a  $\mathbf{x}$ ; (ii) domínio admissível primal (i.e.,  $\mathbf{x}^*$  é um ponto admissível); (iii) domínio admissível dual, significa que os multiplicadores de Lagrange  $\lambda^*$  são não-negativos e (iv) folga complementar (i.e., os multiplicadores de Lagrange correspondentes às restrições inativas são zero). Um ponto  $x^*$  é um ponto regular do problema, se todos os vetores do gradiente  $\nabla g_j$  das restrições ativas (i.e.,  $g_j(\mathbf{x}^*) = 0$ ) forem linearmente independentes.

Conforme observado acima, a primeira condição KKT (2.21) implica a solução do sistema:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda^*) = 0 \quad (2.25)$$

Essa condição é equivalente a dizer que  $\mathbf{x}^*$  é a solução do problema de minimização:

$$\min_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda^*) \quad (2.26)$$

Considere-se agora que, para qualquer vetor de Lagrange i.e.,

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \text{ tal que } \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.27)$$

existe uma solução do problema de minimização

$$\min_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) \quad (2.28)$$

Assim, existe uma relação funcional de dependência das variáveis do problema primal  $\mathbf{x}$  em termos das novas variáveis duais  $\lambda$ .

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda) \quad (2.29)$$

Substituindo as variáveis primais em termos da Função 2.29, é possível reescrever o Lagrangiano  $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)$  apenas em termos de variáveis duais  $\lambda$

$$l(\lambda) = \mathcal{L}(\mathbf{x}(\lambda), \lambda) \quad (2.30)$$

$$= f(\mathbf{x}(\lambda)) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{x}(\lambda)) \quad (2.31)$$

Em que função  $l(\lambda)$  é denominada função dual do problema.

O problema de otimização que está relacionado com a função dual é um problema de maximização, denominado problema dual enunciado por:

$$\begin{cases} \max_{\lambda_j} & l(\lambda) \\ \text{suj. a} & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (2.32)$$

A solução do problema dual determina os multiplicadores de Lagrange ótimos  $\lambda^*$ , que satisfazem as condições de ótimo KKT (Duysinx et al., 2003; C. Fleury, 1993).

## 2.4 Homogeneização computacional das propriedades elásticas

A ideia básica de homogeneização consiste na possibilidade de calcular as propriedades constitutivas efetivas de um material periódico (i.e., escala macro ou global), apenas considerando o comportamento de uma célula unitária (i.e., escala local). De fato, os materiais heterogêneos (i.e., formados por diferentes materiais ou fases distinguíveis numa determinada escala de comprimento), exibem propriedades dependentes dos seus constituintes. Cada constituinte possui propriedades próprias e/ou orientações do material, e pode ser heterogêneo a escalas de comprimento menores. Assim, o comportamento dos materiais heterogêneos é determinado, por um lado, pelas propriedades relevantes dos materiais dos constituintes e, por outro lado, pela sua geometria, topologia (i.e., disposição das fases) e da interação entre os constituintes. Este dados determinam a precisão de qualquer modelo ou descrição teórica. O comportamento de materiais heterogêneos pode ser estudado em diferentes escalas de comprimento que variam de escalas subatômicas (i.e., dominadas por efeitos quânticos), até escalas para as quais os

modelos da mecânica dos sólidos são mais adequados (Böhm, 2018). As escalas relevantes nas quais a mecânica contínua é aplicável são a microescala (nível constituinte), a mesoescala (laminado, composto e/ou nível de painel reforçado) e a macroescala ou escala global (nível global/estrutural) (Jacob Aboudi et al., 2013). A Figura 13 ilustra os níveis de escala relevantes empregues na análise multiescala de materiais heterogêneos.

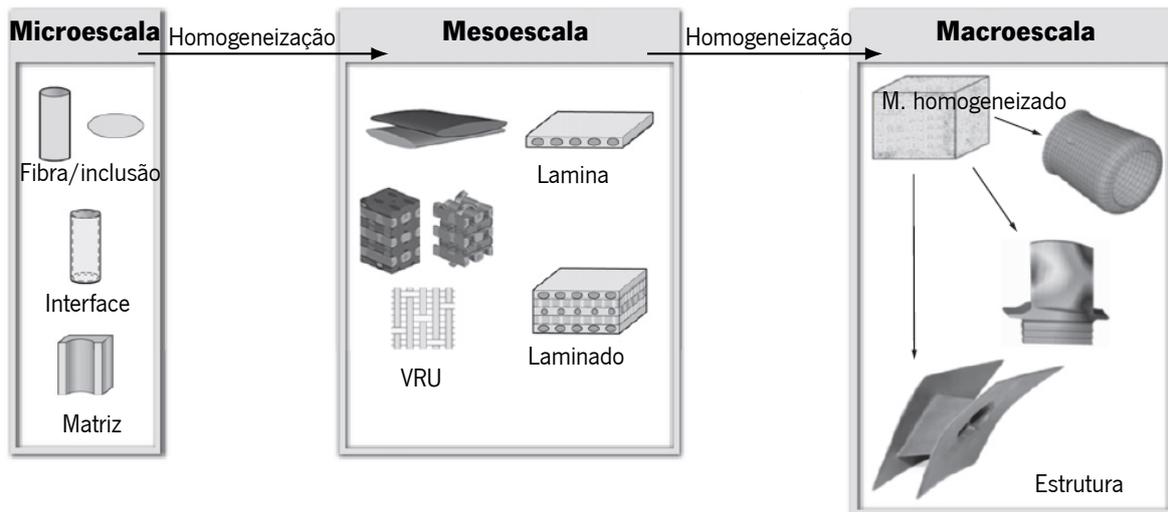


Figura 13: Níveis de escala empregues na análise multiescala.

Este trabalho foca-se no estudo de modelos contínuos para materiais heterogêneos, também usualmente referidos como micromecânica. Assim, o uso de modelos contínuos coloca um limite inferior nas escalas de comprimento que podem ser cobertas, que normalmente podem ser considerados como sendo da ordem de  $1\ \mu\text{m}$  (T. Kanit et al., 2003). Um aspeto importante assumido por estes modelos, reside na utilização de diferentes escalas de comprimento na modelação dos materiais multifásicos. Este aspeto, permite deduzir o comportamento efetivo<sup>1</sup> (e.g., rigidez, resistência mecânica, condutibilidade e expansão térmica) pelo comportamento do material dos seus constituintes, das suas interfaces e da disposição geométrica das suas fases. Estas transições entre escalas de comprimento permitem reduzir drasticamente o número de graus de liberdade que descrevem o sistema. Estas abordagens de modelação podem ser aplicadas na descrição do comportamento termomecânico, como a outras propriedades físicas, de materiais bifásicos ou multifásicos não homogêneos (Hashin, 1983; Graeme W. Milton, 2002; S. Torquato e Haslach, 2002).

Os materiais heterogêneos também denominados não-homogêneos, complexos ou microestruturados é uma definição abrangente que engloba diferentes tipos de topologias de fase. Assim, no contexto deste trabalho esta definição aplica-se as microestruturas estudadas (VRU). O critério de classificação

<sup>1</sup>O termo “comportamento efetivo” ou “propriedades efetivas” são usualmente utilizadas para descrever a resposta do material à escala macro, sendo que “comportamento aparente” ou “propriedades aparentes” refere-se às propriedades locais de amostras de dimensão finita.

primordial para materiais heterogêneos é baseado na topologia da fase de menor dimensão (i.e., microscópica). Em arranjos de inclusão de matriz (e.g., compósitos reforçados com partículas ou fibras e espumas de células fechadas) somente a matriz exhibe uma topologia interligada, sendo que todos os constituintes desempenham funções distintas. Já em materiais com arranjos de fase interpenetrante (e.g., espumas de células abertas e materiais com gradiente funcional) e em policristais (materiais granulares), pelo contrário, as fases não podem ser facilmente distinguidas topologicamente. Assim, um parâmetro importante na análise micromecânica contínua é o nível de heterogeneidade do comportamento dos constituintes, também designado por contraste de fase (Böhm, 2018). Considere-se, o contraste elástico de um material composto de duas fases definido pela Equação 2.33.

$$c_{el} = \frac{E^{(i)}}{E^{(m)}} \quad (2.33)$$

Em que  $E^{(i)}$  e  $E^{(m)}$  representam os módulos de Young das inclusões (ou reforços) e da matriz, respectivamente.

### Escalas de comprimento

No presente contexto, de uma abordagem de modelação multiescala são definidas três escalas de comprimento. A menor escala de comprimento descrita por um dado modelo micromecânico é denominada microescala, a maior a macro e as intermediárias são denominadas mesoescalas. Ainda que, a nomenclatura das escalas de comprimento “micro”, “meso” e “macro” não seja unânime na literatura especializada, é adotada ao longo deste trabalho (Figura 13). Os campos que descrevem o comportamento mecânico de um material heterogêneo (i.e., tensões  $\sigma(\mathbf{x})$ , deformações  $\varepsilon(\mathbf{x})$  e deslocamentos  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ), são divididos em contribuições correspondentes às diferentes escalas de comprimento, que são referidas como micro, macro e mesocampos, respectivamente (T. Kanit et al., 2003). Assim, as geometrias de fase nas meso e microescalas são denominadas como meso e microgeometrias. A maioria dos modelos micromecânicos é baseada no pressuposto de que as escalas de comprimento de um determinado material são distintas. Com efeito, tal implica que para cada par de escalas micro-macro, por um lado, as contribuições flutuantes para os campos na escala de comprimento menor (i.e., “variáveis rápidas”) influenciam o comportamento na escala de comprimento maior, apenas por meio de suas médias de volume. Por outro lado, os gradientes dos campos, bem como gradientes de composição na escala de comprimento maior (“variáveis lentas”) não são significativos na escala de comprimento menor, onde esses campos parecem ser localmente constantes e podem ser descritos em termos de uniformidade *applied fields* ou *far fields* (Böhm, 2018). Formalmente, esta divisão dos campos de deformação e tensão em contribuições lentas e rápidas pode ser enunciada como

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \langle \varepsilon \rangle + \varepsilon'(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad \sigma(\mathbf{x}) = \langle \sigma \rangle + \sigma'(\mathbf{x}), \quad (2.34)$$

em que  $\langle \varepsilon \rangle$  e  $\langle \sigma \rangle$  representam os campos macroscópicos médios e  $\varepsilon'(\mathbf{x})$  e  $\sigma'(\mathbf{x})$  são as flutuações microscópicas.

### 2.4.1 Homogeneização e localização

Os dois tópicos centrais da micromecânica dos sólidos podem ser afirmados como, por um lado a relação entre diferentes escalas de comprimento e por outro lado, o estudo das relações entre estrutura e as propriedades dos materiais heterogêneos. Relativamente ao primeiro ponto, a relação entre escalas, envolve duas metodologias fundamentais. Por um lado, a estimativa (ou limite) do comportamento de um material heterogêneo na macroescala com base na informação obtida da microescala, ou seja um problema de homogeneização, fornecendo as relações entre microestrutura e propriedades. As aplicações mais importantes da homogeneização referem-se à caracterização de materiais. Isto é, a simulação da resposta do material em condições de carregamento simples, como testes de tração uniaxial e modelação constitutiva, onde as respostas às solicitações, direções e sequências de carregamento são descritas. Por outro lado, as respostas locais na microescala podem ser deduzidas das condições de carregamento na macroescala. A esta técnica denominada de localização, corresponde genericamente ao processo inverso da homogeneização. Em ambos os casos, os principais argumentos de entradas são a geometria interna (distribuição) dos materiais e o comportamento dos materiais constituintes na microescala.

Considere um elemento de volume  $\Omega_s$  de um material heterogêneo suficientemente grande, sem gradientes significativos de composição nem variações consideráveis nas cargas aplicadas, as relações de homogeneização assumem a forma da média de volume de uma variável  $f(\mathbf{x})$ ,

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\Omega_s} \int_{\Omega_s} f(\mathbf{x}) \partial\Omega. \quad (2.35)$$

As relações de homogeneização para os tensores de deformações e tensões são dados, respetivamente pelas Equações 2.36 e 2.37.

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{\Omega_s} \int_{\Omega_s} \varepsilon(\mathbf{x}) \partial\Omega = \frac{1}{2\Omega_s} \int_{\Gamma_s} [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{n}_\Gamma(\mathbf{x}) + \mathbf{n}_\Gamma(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x})] \partial\Gamma \quad (2.36)$$

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{\Omega_s} \int_{\Omega_s} \sigma(\mathbf{x}) \partial\Omega = \frac{1}{\Omega_s} \int_{\Gamma_s} \mathbf{t}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{x} \partial\Gamma. \quad (2.37)$$

Em que  $\Gamma_s$  representa a superfície do elemento de volume de volume  $\Omega_s$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  o vetor de deslocamentos,  $\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \sigma(\cdot) * \mathbf{n}_\Gamma(\mathbf{x})$  é o vetor de tração da superfície e  $\mathbf{n}_\Gamma(\mathbf{x})$  é o vetor normal à superfície. As Equações 2.36 e 2.37 são conhecidas como o teorema da deformação média e tensão média. Mais, a formulação do integral de superfície para  $\varepsilon$  enunciada acima é válida para o regime elástico linear (i.e., pequenas deformações e deslocamentos contínuos), podendo ser modificado para o regime termoelástico e regime não-linear. Além disso, de acordo com esta última condição, as deformações e tensões médias de um volume de controle,  $\langle \varepsilon \rangle$  e  $\langle \sigma \rangle$ , são determinadas pelos deslocamentos e trações da superfície. Caso os deslocamentos sejam descontínuos (e.g., devido a imperfeições ou fendas na interface dos constituintes) é necessário introduzir termos de correção (Böhm, 2018; S. Nemat-Nasser e Hori, 1993).

Os campos de deformação e tensão à microescala  $\varepsilon(\mathbf{x})$  e  $\sigma(\mathbf{x})$ , de um determinado elemento de volume  $\Omega_s$  estão formalmente ligados às respostas macroscópicas correspondentes,  $\langle \varepsilon \rangle$  e  $\langle \sigma \rangle$ , por

relações de localização (ou projeção) do tipo

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle. \quad (2.38)$$

Em que  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  são denominados tensores de deformação mecânica e de concentração de tensão, respetivamente. Desde que, sejam conhecidos, a técnica de localização pode ser executada.

As Equações 2.34, 2.36 e 2.37 implicam que as médias de volume das flutuações desaparecem para volumes de integração suficientemente grandes,

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle = \frac{1}{\Omega_s} \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}) \partial \Omega = 0 \quad \text{e} \quad \langle \boldsymbol{\sigma}' \rangle = \frac{1}{\Omega_s} \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{x}) \partial \Omega = 0. \quad (2.39)$$

De modo igual, integrais de superfície sobre as flutuações microscópicas das variáveis de campo tendem a zero para elementos de volume apropriados.

Para elementos de volume adequados de materiais heterogêneos com separação suficiente entre as escalas de comprimento e para condições de contorno adequadas, a relação é válida para campos de tensão estaticamente admissíveis  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  e campos de deformação cinematicamente admissíveis  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . A Equação 2.40 representa a condição de homogeneidade à macroescala, condição de Hill-Mandel ou condição de energia equivalente (Sia Nemat-Nasser, 1999; Zaoui, 2002).

$$\frac{1}{2} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T(\mathbf{x}) \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \partial \Omega = \frac{1}{2} \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle^T \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \quad (2.40)$$

Nesta equação a densidade de energia de deformação dos micro-campos é igual à densidade de energia dos macro-campos, tornando as descrições microscópicas e macroscópicas energeticamente equivalentes (i.e., as flutuações dos micro-campos não contribuem para a energia de deformação macroscópica,  $\langle \boldsymbol{\sigma}'^T \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle = 0$ ). Portanto, a condição de Hill-Mandel estabelece a base da interpretação da metodologia de homogeneização no regime termoelástico em termos de comparação de um material homogêneo que é energeticamente equivalente a um dado material heterogêneo.

## 2.4.2 Elementos de volume

O segundo tópico basilar da micromecânica dos sólidos, estuda as relações entre a estrutura interna e as propriedades mecânicas dos materiais heterogêneos. Com efeito, este tema exige descrições adequadas da estrutura na escala de comprimento adequada (i.e., das suas microgeometrias ou microestruturas internas).

As microestruturas internas dos materiais heterogêneos podem ser ordenadas (ou até certo ponto aleatórias). Além disso, os arranjos (distribuição) das fases são altamente complexos, que na maioria dos casos se reveste de importância prática. Como resultado, as expressões exatas para  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ ,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ , etc., em geral são difíceis de calcular sendo necessário introduzir aproximações. Usualmente, estas aproximações são baseadas na teoria ergódica, isto é, o material heterogêneo é considerado estatisticamente homogêneo. Isso implica que elementos de volume suficientemente grande, selecionados em

posições aleatórias dentro da amostra, têm arranjos de fase estatisticamente equivalentes e dão origem às mesmas propriedades médias do material. Como referido anteriormente, estas propriedades do material são designadas como propriedades gerais ou efetivas do material heterogéneo. Idealmente, o volume de homogeneização deve ser escolhido para ser um elemento de volume representativo (i.e., VRU ou VCU *vd.* Secção 1.1 do Capítulo 1 para definição de VRU e VCU) adequado, ou seja, um sub-volume de  $\Omega_s$  de tamanho suficiente para conter todas as informações necessárias para descrever o comportamento do material. Os elementos de volume representativos podem ser definidos, por um lado, exigindo que sejam estatisticamente representativos da microgeometria e independentes da propriedade física a ser estudada. Por outro lado, a definição pode ser baseada no requisito de que as respostas gerais relativamente a um dado comportamento físico não dependem da posição real do elemento de volume representativo nem das condições de contorno aplicadas. Assim, o seu tamanho depende tanto da propriedade física considerada quanto da microgeometria. Um elemento de volume representativo deve ser suficientemente grande para permitir uma amostragem significativa dos microcampos e suficientemente pequeno para que a influência dos gradientes macroscópicos seja desprezível (Böhm, 2018).

Considere-se os campos de um dado constituinte  $(p)$  divididos em média de fase e flutuações por analogia com Equação 2.34 como:

$$\varepsilon^{(p)}(\mathbf{x}) = \langle \varepsilon \rangle^{(p)} + \varepsilon^{(p)'}(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad \sigma^{(p)}(\mathbf{x}) = \langle \sigma \rangle^{(p)} + \sigma^{(p)'}(\mathbf{x}) \quad (2.41)$$

Os elementos de volume devem ser escolhidos para serem o mais simples possível, para limitar o esforço de modelação, porém a sua complexidade deve ser suficiente para reter os aspetos da resposta visada pelo estudo em questão.

### 2.4.3 Comportamento geral e simetrias do material

A deformação homogeneizada e os campos de tensão de um material elástico heterogéneo (Equações 2.36 e 2.37),  $\langle \varepsilon \rangle$  e  $\langle \sigma \rangle$  podem ser ligados por tensores elásticos efetivos  $\mathbf{E}^*$  e  $\mathbf{C}^*$  como:

$$\langle \sigma \rangle = \mathbf{E}^* \langle \varepsilon \rangle \quad \text{e} \quad \langle \varepsilon \rangle = \mathbf{C}^* \langle \sigma \rangle \quad (2.42)$$

Que podem ser vistos como tensores de elasticidade (rigidez) e de flexibilidade, respetivamente, de um material homogéneo equivalente, com  $\mathbf{C}^* = \mathbf{E}^{*-1}$ .

Através das Equações 2.36, 2.37 e 2.38 estes tensores elásticos efetivos podem ser calculados a partir dos tensores elásticos locais  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  e os tensores de concentração  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  por média de volume:

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{\Omega_s} \int_{\Omega_s} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}) \partial \Omega \quad (2.43)$$

$$\mathbf{C}^* = \frac{1}{\Omega_s} \int_{\Omega_s} \mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \partial \Omega \quad (2.44)$$

Outras propriedades de materiais heterogêneos (e.g., tensores comportamento termomecânico), podem ser avaliadas de forma idêntica.

O comportamento homogeneizado de muitos materiais multifásicos pode ser concebido como sendo estatisticamente isotrópico ou quase-isotrópico (e.g., compósitos reforçados com partículas esféricas ou partículas/fibras orientadas aleatoriamente, muitos policristais, materiais porosos e celulares) ou isotrópico estatisticamente transversal (e.g., compósitos reforçados com fibras alinhadas, compósitos reforçados com reforços não alinhados mostrando um plano aleatório ou outra função de distribuição de orientação axissimétrica) (Hashin, 1983). Materiais multifásicos estatisticamente isotrópicos mostram o mesmo comportamento geral em todas as direções, sendo que, os seus tensores de elasticidade efetivos e tensores de expansão térmica assumem as formas:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{12} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{11} & E_{12} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{12} & E_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{44} = \frac{1}{2}(E_{11} - E_{12}) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

em notação de Voigt. No caso do comportamento elástico linear isotrópico dois parâmetros independente são suficientes para o descrever (e.g., o módulo de Young efetivo  $E^* = E_{11}^* - 2E_{12}^{*2}/(E_{11}^* + E_{12}^*)$ , o coeficiente de Poisson efetivo  $\nu^* = E_{12}^*/(E_{11}^* + E_{12}^*)$ , o módulo de elasticidade transversal efetivo  $G^* = E_{44}^* = E^*/2(1 + \nu^*)$ , o módulo de compressibilidade ou volume efetivo  $K^* = (E_{11}^* + 2E_{12}^*)/3 = E^*/3(1 - 2\nu^*)$  ou as constantes de Lamé efetivas) e um necessário para o comportamento de expansão térmica efetiva no regime linear (o coeficiente de expansão térmica efetivo  $\alpha^* = \alpha_{11}^*$ ). Já no caso de materiais isotrópicos estatisticamente transversais, os tensores de elasticidade e expansão térmica efetivos são definidos por:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{12} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{23} & E_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{66} = \frac{1}{2}(E_{22} - E_{23}) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_A \\ \alpha_T \\ \alpha_T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Onde o índice 1 representa a direção axial e 2-3 é o plano transversal de isotropia.

Usualmente, o comportamento termoelástico de materiais transversalmente isotrópicos é descrito por cinco constantes elásticas independentes e dois coeficientes independentes de expansão térmica (e.g., módulos de Young axial e transversal efetivos,  $E_A^* = E_{11}^* - \frac{2E_{12}^{*2}}{E_{22}^* + E_{23}^*}$  e  $E_T^* = E_{22}^* \frac{E_{11}^* E_{23}^{*2} + E_{22}^* E_{12}^{*2} - 2E_{23}^* E_{12}^{*2}}{E_{11}^* E_{22}^* - E_{12}^{*2}}$ , os módulos de elasticidade transversal efetivos axiais e transversais,  $G_A^* = E_{44}^*$  e  $G_T^* = E_{66}^*$ , os coeficientes de Poisson efetivos  $\nu_A^* = \nu_{12} = \frac{E_{12}^*}{E_{22}^* + E_{23}^*}$  e  $\nu_T^* = \frac{E_{11}^* E_{23}^* - E_{12}^{*2}}{E_{11}^* E_{22}^* - E_{12}^{*2}}$  e o módulo de compressibilidade ou volume efetivo (deformação plana)  $K_T^* = (E_{22}^* + E_{23}^*)/2 = E_A^*/2[(1 - \nu_T^*)(E_A^*/E_T^*) - 2\nu_A^{*2}]$ .

As propriedades transversais (no plano) estão relacionadas através da relação  $G_T^* = E_T^*/2(1 + \nu_T^*)$ , porém não existe ligação entre as propriedades axiais  $E_A^*$ ,  $G_A^*$  e  $\nu_A^*$  para além da relação  $K_T^*$  acima estabelecida. No caso especial de materiais formados por fases alinhadas contínuas na direção-1 as relações de Hill (1963),

$$E_A = \xi E_A^{(f)} + (1 - \xi)E^{(m)} + \frac{4(\nu_A^{(f)} - \nu^{(m)})^2}{(1/K_T^{(f)} - 1/K_T^{(m)})^2} \left( \frac{\xi}{K_T^{(f)}} + \frac{1 - \xi}{K_T^{(m)}} - \frac{1}{K_T} \right) \quad (2.47)$$

$$\nu_A = \xi \nu_A^{(f)} + (1 - \xi)\nu^{(m)} + \frac{\nu_A^{(f)} - \nu^{(m)}}{1/K_T^{(f)} - 1/K_T^{(m)}} \left( \frac{\xi}{K_T^{(f)}} + \frac{1 - \xi}{K_T^{(m)}} - \frac{1}{K_T} \right) \quad (2.48)$$

Permitem que os módulos efetivos  $E_A^*$  e  $\nu_A^*$  sejam expressos por  $K_f^*$  e pela fração de volume da fibra  $\xi = \Omega^{(f)}/\Omega$ . Da mesma forma, é possível estabelecer relações válidas para materiais compósitos reforçados unidirecionalmente com simetria tetragonal (Böhm, 2018; Graeme W. Milton, 2002). No caso do material isotrópicos transversos ambos os coeficientes, axial e transversos efetivos de expansão térmica,  $\alpha_A^* = \alpha_{11}^*$  e  $\alpha_T^* = \alpha_{22}^*$ , são necessários.

As simetrias gerais de materiais heterogêneos e seu efeito nas propriedades físicas podem ser tratadas em completa analogia com as simetrias dos cristais (Nye e Lindsay, 1957). Por conseguinte, os desvios dos tensores elásticos previstos da simetria elástica isotrópica podem ser avaliados através de uma razão de anisotropia proposta por Zener e Siegel (1949),  $Z = 2E_{66}^*/(E_{22}^* - E_{23}^*)$ , ou outros parâmetros de anisotropia (Toufik Kanit et al., 2006). A influência da simetria geral da distribuição de fases no comportamento mecânico geral de materiais heterogêneos pode ser marcada, especialmente nas respostas não-lineares às cargas mecânicas (Nye e Lindsay, 1957).

#### 2.4.4 Estratégias de modelação

Diferentes métodos micromecânicos podem ser empregues na caracterização dos materiais (i.e., simular a resposta geral do material sob condições de carregamento simples, como testes de tração uniaxial ou corte). As técnicas de homogeneização podem ser utilizadas diretamente para fornecer modelos constitutivos de material à macroescala (propriedades), baseados na abordagem micromecânica. Com efeito, é possível avaliar a tensão homogeneizada total e os tensores de deformação para qualquer condição de carregamento. O comportamento termomecânico geral de materiais homogeneizados é frequentemente mais complexo do que o dos constituintes, ou seja, os efeitos da interação dos constituintes em muitos casos não podem ser descritos de forma adequada simplesmente adaptando os parâmetros do material sem alterar as relações funcionais nas leis constitutivas das fases. A homogeneização é mais exigente do que a caracterização dos materiais. Assim, os modelos constitutivos com base micromecânica têm uma base física clara e uma capacidade inerente para ampliar as tensões e deformações de fase locais através de procedimentos de localização.

Análise das respostas locais dos constituintes para um dado estado à microescala de uma amostra ou estrutura (i.e., localização) resulta de especial interesse na identificação de mecanismos de deformação

local e da avaliação do comportamento de resistência local, que podem ter especial repercussão no comportamento macroscópico. De fato, para modelos válidos os detalhes da microgeometria tendem a ser importantes e podem de fato determinar a resposta à macroescala (e.g., resistência mecânica de materiais frágeis heterogêneos).

Para elementos ou estruturas heterogêneas de grande volume e considerando distribuições de fase realistas, análise exata das variações espaciais dos microcampos está para além das capacidades presentes. Com efeito, as previsões exatas das propriedades mecânicas exigiriam um conjunto infinito de funções de correlação para caracterização da microestrutura heterogênea (Salvatore Torquato, 2002a). Por conseguinte, devem ser introduzidas aproximações adequadas.

Com efeito, a maioria das abordagens de modelação pode ser enquadrada em dois grupos principais. O primeiro grupo inclui métodos que descrevem interações, por exemplo, entre fases ou entre reforços individuais, de forma coletiva, sendo seus principais representantes as seguintes metodologias:

- Abordagens de campo-médio (*Mean-Field Approach (MFA)*) e métodos relacionados: nestas técnicas microgeometrias são representadas por uma descrição detalhada e os microcampos no interior de cada constituinte (fase) são aproximados pelas médias de fase  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(p)}$  e  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(p)}$ . A geometria de fase entra nestes modelos, às vezes implicitamente, através de descritores estatísticos (e.g., frações de volume, simetria macroscópica, topologia de fase e razões de aspeto do reforço). Na qual as relações de localização assumem a forma

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(p)} = \bar{\mathbf{A}}^{(p)} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (2.49)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(p)} = \bar{\mathbf{B}}^{(p)} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (2.50)$$

e as relações de homogeneização podem ser enunciadas como

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(p)} = \frac{1}{\Omega^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \partial \Omega \quad \text{com} \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \sum_p V^{(p)} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(p)} \quad (2.51)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(p)} = \frac{1}{\Omega^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \partial \Omega \quad \text{com} \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \sum_p V^{(p)} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(p)}. \quad (2.52)$$

Em que  $(p)$  representa uma dada fase do material,  $\Omega^{(p)}$  é o volume ocupado por esta fase e  $V^{(p)} = \Omega^{(p)} / \sum_k \Omega^{(k)} = \Omega^{(p)} / \Omega_s$  é a fração e volume da fase. Em contraste com Equações 2.38 os tensores de concentração de fase  $\bar{\mathbf{A}}$  e  $\bar{\mathbf{B}}$  usados na abordagem de campo-médio não são funções das coordenadas espaciais. Neste caso, formulações de integral de superfície análogas às Equações 2.36 e 2.37 podem ser usadas para avaliar expressões consistentes para  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(p)}$  para materiais do tipo vazio/sólido 0/1 e  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(p)}$  para inclusões rígidas embutidas numa matriz. As MFA tendem a ser formuladas em termos de tensores de concentração de fase. Uma vantagem reside nos baixos requisitos computacionais e por outro lado exibem bom desempenho na descrição da resposta termoelástica de materiais heterogêneos. A sua aplicação na modelação

de compósitos não-lineares permanece um tópico de investigação ativo. Os métodos mais representativos desta abordagem são campo-efetivo (*Effective Field*) e as aproximações-efetivas-do-meio (*Effective Medium Approximations*).

- Métodos de limites (*Bounding Method (BM)*): para materiais heterogêneos de microestrutura arbitrária, soluções analíticas exatas das propriedades efetivas são intangíveis. Portanto, qualquer declaração rigorosa das propriedades efetivas deve ser na forma de limites rigorosos. O uso de princípios variacionais para limitar as propriedades efetivas de materiais heterogêneos remonta aos trabalhos de Hill (1952) e Hashin e Shtrikman (1962) e Hashin e Shtrikman (1963). Nestes estudos, as condições de contorno homogêneas foram especificadas na superfície das amostras macroscópicas. No entanto, para meios aleatórios estatisticamente homogêneos, os princípios variacionais devem ser modificados para que as condições de contorno sejam substituídas por condições médias. O trabalho pioneiro no uso de princípios variacionais para ligar propriedades efetivas de materiais heterogêneos aleatórios foi realizado por Prager, que considerou a permeabilidade do fluido (Stephen Prager, 1961) e a constante de aprisionamento de meios porosos aleatórios (S. Prager, 1963), bem como os coeficientes de difusão e viscosidade de suspensões aleatórias (Stephen Prager, 1963). Outros autores como Beran e seus colaboradores fizeram contribuições importantes, concentrando-se nos limites variacionais da condutividade (M. Beran, 1965; M. J. Beran e Silnutzer, 1971) e os módulos elásticos de materiais heterogêneos aleatórios (M. Beran e Molyneux, 1966).

Os princípios variacionais são usados para obter limites superiores e (em muitos casos) inferiores nos tensores elásticos, módulos elásticos, módulos secantes e outras propriedades físicas de materiais heterogêneos, cujas microgeometrias são descritas por parâmetros estatísticos. Muitos limites analíticos são obtidos com base em campos de polarização de tensão constante em fase, tornando-os intimamente relacionados com as abordagens de MFA. Os limites para além de seu valor intrínseco, são ferramentas fundamentais na avaliação de outros modelos de materiais heterogêneos. Além disso, na maioria dos casos, um dos limites fornece estimativas úteis para a propriedade física em consideração, mesmo se os limites forem fracos (*slack*). Note-se, que ambos os métodos, de BM e de MFA, não descrevem explicitamente as interações entre partículas da mesma fase ou fases distintas, contudo postulam implicitamente a existência de um VCU ou VRU (Salvatore Torquato, 2002b).

O segundo grupo de métodos baseia-se no estudo de microgeometrias discretas, através da avaliação dos microcampos são descritas as interações entre fases. Inclui os seguintes grupos de modelos.

- Abordagens de microcampo periódico (*Periodic Microfield Approach (PMA)*). Nestes métodos, também designados de homogeneização periódica ou métodos de célula unitária, o material heterogêneo é aproximado por um modelo material infinitamente estendido com um arranjo de fase periódica. Os microcampos periódicos resultantes são geralmente avaliados através da análise

de VRU (que podem descrever microgeometrias que variam de bastante simplistas a altamente complexas) por meio de métodos analíticos ou numéricos. Estas abordagens são frequentemente utilizadas para realizar a caracterização de materiais heterogêneos. Contudo, também podem ser empregues como modelos constitutivos de base micromecânica. A alta resolução dos microcampos fornecidos pelas PMA pode ser vantajoso no estudo do início do dano na microescala. No entanto, porque inerentemente originam configurações periódicas de danos e padrões de fendas, os PMA normalmente não representam uma boa escolha para investigar fenômenos como a interação da microgeometria com fendas macroscópicas. As PMA podem fornecer informações detalhadas sobre os campos de tensão e deformação locais numa determinada célula unitária, porém, tendem a ser computacionalmente dispendiosas. Pela pertinência no enquadramento deste trabalho, este tópico volta a ser abordado e desenvolvido no Capítulo 3 Secção 3.1.2.

- Abordagens de janela (*Windowing Approach (WA)*). Usualmente, mas não necessariamente, assumem forma retangular ou hexaédrica. A sua seleção é realizada aleatoriamente a partir de um determinado arranjo de fase e sujeitas a condições de contorno que garantam a equivalência de energia entre as micro e macroescalas. Consequentemente, as WA descrevem o comportamento de amostras heterogêneas individuais em vez de materiais heterogêneos e dão origem a respostas macroscópicas aparentes em vez de efetivas. Para os casos especiais de tensão macro-homogênea e condições de limite de deformação, podem ser obtidas estimativas inferiores e superiores e limites no comportamento geral do material heterogêneo, respetivamente. Além disso, condições de contorno homogêneas mistas podem ser aplicadas para gerar estimativas.
- Métodos célula incorporada ou abordagens de células embebidas (*Embedded Cell Approach (ECA)*). Nestas técnicas o material heterogêneo é aproximado por um modelo que integra uma região central (núcleo) contendo um arranjo de fase discreto que por sua vez está embutido noutro material externo. Por sua vez, as cargas de campo distante (*far-field*) são aplicadas nesta região externa. As propriedades do material da camada externa podem ser descritas por uma lei constitutiva macroscópica e podem ser definidas de duas maneiras. A primeira, de forma autoconsistente ou quase-autoconsistente (*self-consistently* ou *quasi-self-consistently*) a partir do comportamento do núcleo. Na segunda abordagem, a região externa pode assumir a forma de uma descrição grosseira e/ou discretização do arranjo de fases. As ECA podem ser usadas na caracterização de materiais e geralmente são igualmente aplicadas no estudo regiões de interesse especial em materiais heterogêneos (e.g., pontas de fissuras macroscópicas). Similarmente aos PMA, as ECA podem ser aplicadas na resolução de campos de tensão e deformação locais na região do núcleo com grande detalhe, porém tendem a apresentar um elevado custo computacional (Böhm, 2018).
- Outras abordagens de homogeneização utilizadas em microgeometrias discretas incluem o esquema de homogeneização não-periódica baseado em estatísticas (Y. Y. Li e J. Z. Cui, 2005), a regra das misturas e as equações de Halpin-Tsai. Estes dois últimos métodos semi-empíricos,

com a exceção de casos especiais (i.e., módulos de compósitos reforçados por partículas ou fibras alinhadas contínuas), não representam de modo adequado as microgeometrias reais, limitando as capacidades preditivas (Böhm, 2018).

Outro aspeto importante prende-se com a verificação dos modelos. As abordagens micromecânicas têm como objetivo gerar modelos preditivos para o comportamento de materiais heterogêneos. Assim, a verificação do modelo (i.e., controlar a configuração, implementação e validação de um modelo do comportamento do material alvo), desempenha um papel importante na micromecânica dos sólidos. A verificação do modelo em micromecânica contínua, procura controlar a consistência e a plausibilidade das suposições e resultados da modelação ao longo de um determinado estudo. Além disso, muitas vezes é possível comparar as previsões com as obtidas através de outros métodos micromecânicos distintos que pertençam a outras configurações geométricas análogas (i.e., com os mesmos modelos constitutivos e parâmetros de material). Os métodos de limitação desempenham um papel especialmente importante neste aspeto. Usualmente, as previsões do comportamento elástico linear são obtidas de modelos e comparadas aos limites pertinentes (desde que disponíveis para a configuração em estudo). Assim, modelos que não satisfazem os limites de Hashin-Shtrikman relativos à simetria macroscópica e configuração geométrica microscópica do material no regime linear, devem ser considerados não confiáveis, logo não válidos. As causas mais comuns na origem destes desvios podem estar relacionadas com imprecisões dos dados relativos ao comportamento dos constituintes, frações de volume e erros de medição (experimentais). A obtenção de valores confiáveis para parâmetros de materiais pertinentes à microescala tende ser um grande desafio, especialmente quando um modelo envolve danos. Consequentemente, é habitual estudar (caracterizar) o comportamento de um material compósito à macroescala através de dados experimentais. Contudo, os dados experimentais estão limitados aos resultados dos ensaios de tração e compressão uniaxiais. Nesta situação, mesmo que exista uma combinação perfeita de previsões com resultados experimentais, os casos que envolvam solicitações macroscópicas triaxiais (e.g., corte e tensões combinadas), não é garantido que sejam razoavelmente descritas pelo modelo (Böhm, 2018).

#### **2.4.5 Condições de fronteira**

Os VRU, em conjunto com as condições de fronteira (*Boundary Condition* (BC)) prescritas, devem gerar padrões (*tilings*) válidos da geometria indeformada assim como para todos os estados deformados, congruentes a um determinado problema micromecânico. Por consequência, lacunas e sobreposições entre elementos de volume vizinhos, assim como restrições não físicas das suas deformadas, não devem ser admitidas (i.e., condição de compatibilidade geométrica entre VRU). Com efeito, as BC dos VRU devem ser especificadas para que todos os modos de deformação adequados (i.e., para todos os casos de carga a serem estudados) possam ser executados. Portanto, a imposição das BC assume especial importância na determinação das propriedades efetivas dos materiais heterogêneos. De seguida são enunciados os principais tipos de BC.

Considerando, a condição de macrohomogeneidade definida por Hill (1967) na forma do integral de superfície, Equação 2.40, reescrito na forma

$$\int_{\Gamma} [\mathbf{t}(\mathbf{x}) - \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle * \mathbf{n}_{\Gamma}(\mathbf{x})]^T [\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle * \mathbf{x}] \partial\Gamma = 0, \quad (2.53)$$

para elementos de volume heterogêneos de tamanho finito, pode ser alcançada para quatro tipos de BC, sendo três baseadas em BC uniformes (Böhm, 2018).

Primeiro, na Equação 2.53 o termo que representa a tração pode ser eliminado ao longo de toda a fronteira especificando as condições de contorno de Neumann (*Uniform Neumann Boundary Condition* (UNBC)) adequadas para as trações  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ . Isto pode ser obtido através da aplicação de um tensor de tensão macroscopicamente homogêneo  $\boldsymbol{\sigma}^a$  em todas as faces do elemento de volume,

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^a * \mathbf{n}_{\Gamma}(\mathbf{x}) \quad \text{com} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.54)$$

originando condições de contorno estaticamente uniformes (*Statically Uniform Boundary Condition* (SUBC), ou UNBC). O segundo tipo, se o termo do lado direito na Equação 2.53 for forçado a ser zero através da imposição de um dado tensor de deformação macroscopicamente homogêneo  $\boldsymbol{\varepsilon}^a$  em todas as superfícies do limite,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}^a * (\mathbf{x}) \quad \text{com} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.55)$$

traduzindo-se em condições de contorno cinematicamente uniformes (*Kinematically Uniform Boundary Condition* (KUBC) ou *Uniform Dirichlet Boundary Condition* (UDBC)). Visto que, as Equações 2.54 e 2.55 impõem tensões homogêneas ou campos de deformação no limite do volume, esta são igualmente designadas de condições de limite macrohomogêneas.

O terceiro tipo, designa-se de condições de contorno uniformes mistas (*Mixed Uniform Boundary Condition* (MUBC)), nas quais o produto escalar sob o integral é feito desaparecer separadamente para cada face  $\Gamma_k$  da superfície do elemento de volume,

$$[\mathbf{t}(\mathbf{x}) - \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle * \mathbf{n}_{\Gamma}(\mathbf{x})]^T [\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle * \mathbf{x}] \partial\Gamma = 0 \quad \text{com} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_k. \quad (2.56)$$

Com efeito, a aplicação deste tipo de BC implica combinações de componentes de tração e deformação uniformes aplicados numa determinada face do elemento de volume, em vez de especificar um campo macroscopicamente homogêneo. Assim, MUBC que satisfazem as Equações 2.53 e 2.56 devem ser ortogonais nas suas contribuições flutuantes.

Por último, por analogia com as Equações 2.34 os campos de deslocamento e tração podem ser decompostos em contribuições lentas e rápidas,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle * \mathbf{x} + \mathbf{u}'(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad \mathbf{t}(\mathbf{x}) = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle * \mathbf{n}_{\Gamma}(\mathbf{x}) + \mathbf{t}'(\mathbf{x}). \quad (2.57)$$

Inserindo estas expressões na Equação 2.53 que expressa o critério de Hill-Mandel, leva à condição,

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t}'(\mathbf{x})^T \mathbf{u}'(\mathbf{x}) \partial\Gamma = 0. \quad (2.58)$$

Por definição, materiais heterogêneos periódicos (i.e., disposições de fase periódica) podem ser integralmente caracterizados por um único elemento de volume periódico cuja superfície consista em pares de elementos (de superfície) paralelos. Assim, para pontos correspondentes nestes pares de elementos de superfície, os tensores de tensão e deformação devem ser idênticos. Com efeito, os vetores de flutuação de deslocamento  $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$  nas duas faces opostas são idênticos, enquanto os vetores de flutuação de tração  $\mathbf{t}'(\mathbf{x})$  apresentam valores absolutos iguais mas sentidos opostos. Por consequência, os contributos destes pares de elementos das faces para a Equação 2.58 cancelam-se e a condição de Hill é satisfeita para a VRU (ou célula unitária periódica). Estes aspetos formam as bases da *Homogeneização Periódica* (HP) e das condições de fronteira periódicas *Periodic Boundary Condition* (PBC). No contexto do presente trabalho, os detalhes da implementação deste tópico serão apresentados na Secção 3.1.2.

## 2.5 Fabrico digital direto

O FDD envolve a fabricação de objetos físicos a partir de um arquivo de dados usando processos controlados por computador com pouca ou nenhuma intervenção humana. Inclui Fabrico Aditivo (FA), impressão 3D (*3D printing*) e prototipagem rápida ou mesmo corte por arranque de apara em equipamentos CNC (Paulsen, 2015). Esta definição de FDD não é consensual, de acordo com I. Gibson et al. (2015b) o FDD (*Direct Digital Manufacturing* (DDM)) é um termo que descreve o uso de tecnologias de FA para produção ou fabricação de componentes de uso final. Embora possa parecer que o FDD é uma extensão natural de prototipagem rápida, na prática este não é geralmente o caso. De facto, o FDD requer muitas considerações e requisitos adicionais para a fabricação de produtos finais, que não são importantes para a prototipagem. Neste estudo considera-se como mais adequada a definição estabelecida por Paulsen (2015) e partilhada por outros autores como Holmström et al. (2017).

O FDD é uma tecnologia que avança rapidamente e tem o potencial de mudar significativamente as indústrias tradicionais de produção e cadeia de abastecimento. Apesar de ser considerada, como uma tecnologia disruptiva, por ser mais simples, barata e de maior conveniência de uso comparativamente às tecnologias convencionais, é possível considerar a tecnologia atual capaz de satisfazer alguns mercados e aplicações, nomeadamente, na área da saúde, aeroespacial, automóvel e bens de consumo.

Uma tecnologia disruptiva parte de uma posição inferior à tecnologia dominante à época. Quando os primeiros equipamentos de FDD surgiram, há cerca de 30 anos, a qualidade dos produtos estava distante da qualidade das peças produzidas pelas tecnologias convencionais. Porém, habitualmente existem sempre franjas de mercado para as tecnologias emergentes. Logo, o FDD foi inicialmente adotado como uma tecnologia para a produção de protótipos (*Rapid Prototyping*), cuja produção era dispendiosa à época por utilizar processos convencionais de produção (Watts e Hague, 2006). Deste modo, o desenvolvimento do produto pode ser acelerado pela produção de protótipos mais baratos e de boa qualidade (Khoo et al., 2015). Mais tarde, o FDD foi gradualmente adotado na produção de produtos personalizados (Khoo et al., 2015; André, 2017). Esta tecnologia evolui rapidamente. Atualmente conta com diferentes processos de

FDD, mais baratos e rápidos, que permitem a produção de produtos de elevada qualidade de várias classes de materiais como: metais, polímeros, cerâmicos e bio-materiais (J. Y. Lee et al., 2017; Dizon et al., 2018). Com exemplos práticos em diversas áreas, tais como: (i) construção, (ii) bens de consumo (Sanatgar et al., 2017), (iii) medicina (Melchels et al., 2010; Stansbury e Idacavage, 2016; V. B. Morris et al., 2016), (iv) eletrónica (V. B. Morris et al., 2016), (v) automóvel (Dizon et al., 2018; J. Y. Lee et al., 2017), (vi) aeronáutica e (vii) aeroespacial (R. Liu et al., 2017).

Apesar de, ter sido empregue inicialmente na produção de pequenas séries, atualmente os produtos podem apresentar características superiores, nomeadamente, leveza, resistência, personalizados, sem necessidade de montagem e inclusive menor custo, relativamente aos produtos produzidos por tecnologias convencionais (Khoo et al., 2015). Com efeito, o FDD permite controlar com exatidão a deposição dos materiais, possibilitando a produção de estruturas complexas que não poderiam ser obtidas por processos convencionais (Jang et al., 2013; Khoo et al., 2015; Meza et al., 2014). Outro ponto favorável ao FDD é a flexibilidade produtiva dos equipamentos, por exemplo, o mesmo equipamento poder produzir diferentes produtos, inclusive em simultâneo. Este aspeto representa outras vantagem sobre os processos convencionais de fabrico, nos quais a linha de produção tem de ser alterada sempre que seja necessário produzir outro produto, requerendo um investimento em ferramentas, custos de mão-de-obra, para além do tempo de inatividade no processo produtivo. Outro aspeto importante é o potencial de descentralização da produção (i.e., a produção pode ser realizada localmente, perto do local de consumo) e nas quantidades necessárias. Atualmente, com os avanços tecnológicos dos processos e materiais, o FDD tem vindo a ser adotado como uma tecnologia, não só para produção de protótipos mas igualmente no fabrico de peças finais (Khoo et al., 2015; André, 2017). Em resumo, o FDD é uma realidade que alterou as cadeias produtivas e alguns modelos económicos de negócio, perspetivando-se mais mudanças nas cadeias produtivas.

O FDD envolve uma série de etapas que vão da representação virtual *Computer-Aided Design* (CAD) até ao produto físico. Apesar de, produtos diferentes poderem envolver diferentes etapas e graus do processo (e.g., produtos mais complexos poderão envolver mais etapas de engenharia e várias iterações ao longo do processo de desenvolvimento). De uma forma genérica a maioria dos processos de FDD envolvem as seguintes oito etapas (I. Gibson et al., 2015a). A Figura 14 ilustra as etapas de transformação.

**Etapa 1: Modelo virtual** As peças devem ser representadas a partir de um modelo 3D que descreva a geometria do objeto. Para tal, pode ser empregue, por exemplo, um programa de modelação de sólidos CAD ou um equipamento de engenharia inversa (e.g., laser ou digitalização ótica). O ficheiro de saída deve ser um sólido 3D ou uma representação de superfície.

**Etapa 2: Conversão para ficheiro .stl** Formato amplamente aceite pela grande maioria dos equipamentos de FDD. Este formato continua a ser padrão, apesar de, atualmente ser considerado um formato limitador da evolução da própria tecnologia e problemático (e.g., furos na malha, normais invertidas, interseção e sobreposição de triângulos, falta de conectividade nos vértices



Figura 14: Etapas genéricas entre o CAD e a peça final (adaptado de I. Gibson et al. (2015a)).

dos triângulos e superfícies redundantes). Quase todos os programas CAD podem produzir este formato de ficheiro. Este formato descreve as superfícies externas do modelo original e fornece a base para o cálculo das fatias.

**Etapa 3: Transferência para equipamento de FDD e manipulação do ficheiro .stl** Nesta etapa o arquivo *STereoLithography* ou *Standard Tessellation Language* (.stl) que descreve a geometria da peça é transferido para o equipamento de FDD. Nesta etapa poderá haver algum tipo de manipulação do ficheiro para correção do tamanho, posição e orientação de produção.

**Etapa 4: Configuração do equipamento de FDD** O equipamento de FDD deve ser configurado antes de iniciar o processo de fabrico. Estas configurações estão relacionadas com os parâmetros de produção, definição do material, fontes de energia, espessura de camada, entre outros.

**Etapa 5: Fabrico** O processo de fabrico é automatizado, na maioria dos casos não carece de supervisão do operador. Apenas deve ser mantida uma monitorização ocasional, para garantir

que nenhum erro tenha ocorrido, como eventual falta de material, energia ou erros do programa, entre outros.

**Etapa 6: Remoção das peças** Após a conclusão do processo de produção, as peças devem ser removidas do interior do equipamento. Devem ser adotadas as medidas de segurança de acordo com o manual do utilizador do equipamento, no caso de existir interação do operador com a máquina. Por exemplo, necessidade de acionar dispositivos de travamento de segurança, para que as temperaturas de operação sejam suficientemente baixas ou que não existam mecanismos móveis ativos.

**Etapa 7: Pós-processamento** Depois de removidas da máquina, as peças podem necessitar de uma limpeza ou de tratamentos adicionais (e.g., químicos, térmicos e mecânicos) antes de estarem aptas para serem colocadas em serviço. Nesta etapa, de acordo com os processos empregues poderá ser necessário proceder à remoção dos suportes de produção.

**Etapa 8: Acabamento** As peças podem estar prontas para serem usadas, porém, algumas poderão necessitar de tratamentos superficiais adicionais (e.g., pintura, textura e acabamentos superficiais). Poderá ser igualmente necessário montá-las com outros componentes mecânicos ou eletrónicos para formar o conjunto final.

Por último, a necessidade de intensificar o processo de certificação dos materiais, processos/equipamentos e peças finais. É consensual que a falta de normas de FDD é uma questão fundamental que deve ser tida em conta quando são consideradas as barreiras à ampla adoção do FDD. Para dar resposta a este problema, as organizações de certificação, ISO e ASTM, através dos comités ISO/TC 261 e ASTM F42, respetivamente, estão a trabalhar em conjunto para promover o desenvolvimento de normas em três níveis (Bae et al., 2018; Bikas et al., 2015):

- normas gerais de FDD: conceitos gerais, requisitos comuns, aplicabilidade geral
- normas de categorias de FDD: Específicas para materiais ou categorias de processo
- normas especializadas para FDD: Específicas para material, processo ou aplicação

A intenção desta estrutura é facilitar o desenvolvimento de normas modulares e reduzir o risco de duplicação de trabalho, bem como o risco de contradição entre normas. Os grupos de trabalho preliminares da ISO/TC 261 e ASTM F42 são ilustrados na Tabela 2. Todos os padrões desenvolvidos no contexto destes grupos de trabalho serão aprovados sob as iniciais ISO/ASTM.

Os processos de FDD aditivos diferem entre si pela natureza do processo que empregam. Existem várias maneiras de classificar os processos de FDD. Uma abordagem consiste em categorizar de acordo com a técnica base (e.g., processo que emprega lasers ou processo de extrusão) (Stavropoulos e Foteinopoulos, 2018). Outras abordagens classificam os processos pelo tipo de material usado, ou pela forma

como o material é fundido ou solidificado (Monzon et al., 2015; Wong e Hernandez, 2012). De acordo com o comitê ASTM F42 os processo de FDD podem ser classificados em sete áreas.

1. *Vat Polymerization* (VP)
2. *Powder Bed Fusion* (PBF)
3. *Binder Jetting* (BJ)
4. *Material Extrusion* (ME)
5. *Laminated Object Manufacturing* (LOM)
6. *Directed Energy Deposition* (DED)
7. *Material Jetting* (MJ)

### **Vat Polymerization (VP)**

Estes processos utilizam um fotopolímero líquido contido numa cuba que é processado (curado) pela entrega seletiva de energia (e.g., raios ultravioleta, UV) nas regiões da secção transversal das camadas. A maioria dos fotopolímeros reage à radiação de comprimento de onda na faixa ultravioleta (UV), porém também são usados sistemas de luz visível, raios-X, raios-gama e feixe de elétrões. Estes materiais

Tabela 2: Grupos de trabalho ISO/TC261 e ASTM F42 para certificação do fabrico direto digital.

ASTM F42 Sub-Comités	ISO/TC261 Grupos de Trabalho
<ul style="list-style-type: none"> <li>• F42.01 Métodos de Teste</li> <li>• F42.04 <i>Design</i></li> <li>• F42.05 Materiais e Processos                             <ul style="list-style-type: none"> <li>– F42.05.01 Metais</li> <li>– F42.05.02 Polímeros</li> <li>– F42.05.03 Cerâmicos</li> </ul> </li> <li>• F42.06 Ambiente, Saúde e Segurança</li> <li>• F42.07 Aplicações</li> <li>• F42.91 Terminologia</li> <li>• F42.08 Dados</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ISO/TC 261/WG 01 Terminologia</li> <li>• ISO/TC 261/WG 02 Processos, sistemas e materiais</li> <li>• ISO/TC 261/WG 03 Métodos de teste e especificações de qualidade</li> <li>• ISO/TC 261/WG 04 Dados e <i>design</i></li> <li>• ISO/TC 261/WG 06 Ambiente, saúde e segurança</li> </ul>

tornam-se sólidos após sofrerem uma reação química (fotopolimerização). Os fotopolímeros foram desenvolvidos no final da década de 1960, atualmente são amplamente utilizadas em odontologia. A variante do processo mais comum é a *Stereolithography* (SLA). Esta técnica têm por base o trabalho experimental desenvolvido por Charles Hull (3D Systems), utiliza como fonte de energia para polimerização um conjunto de laser e espelhos galvanométricos ou um laser (ou lâmpada) e máscara de projeção (e.g., *Digital Micromirror Device* (DMD)), Figura 15(a) e Figura 15(b), respetivamente.

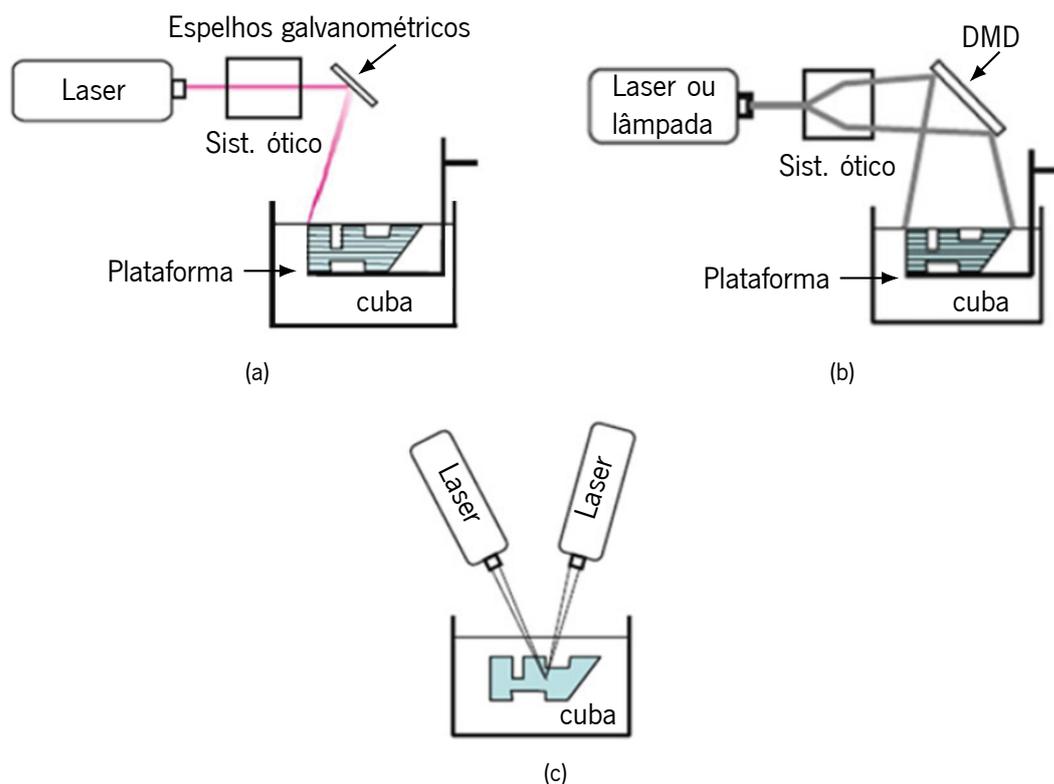


Figura 15: Variantes do processo *Vat Polymerization* (VP): (a) vetor de varrimento, (b) DMD e (c) TPP (adaptado de I. Gibson et al. (2015a)).

Os polímeros tipicamente usados na SLA incluem o acrilato, metacrilato, sistemas epóxi e suas combinações. O SLA requer o uso de estruturas de suporte que servem para fixar a peça à plataforma de construção. Posteriormente, são removidos manualmente após a produção da peça estar concluída. Outra configuração do processo *Vat Polymerization* (VP) é a TPP (Figura 15(c)). Neste último caso a fotopolimerização ocorre na interseção de dois feixes laser de varrimento, embora outras configurações possam usar um único laser e diferentes químicas de fotoiniciador. Outra diferença, da abordagem TPP reside no fato da peça ser produzida abaixo da superfície da resina, logo não necessita de nivelador (*recoater*).

### **Powder Bed Fusion (PBF)**

Os processos de *Powder Bed Fusion* (PBF) foram dos primeiros equipamentos de FDD a ser comercializados. Estes processos utilizam um recipiente cheio de pó que é processado seletivamente através de uma fonte de energia, usualmente um laser de varredura ou feixe de elétrons.

A Figura 16 ilustra o esquema básico de funcionamento. Existem diversas variações do processo original, que modificaram esta abordagem inicial de diferentes maneiras. Com efeito, estas alterações têm como propósito, aumentar a produtividade do equipamento, permitir o processamento de diferentes materiais e/ou evitar patentes.

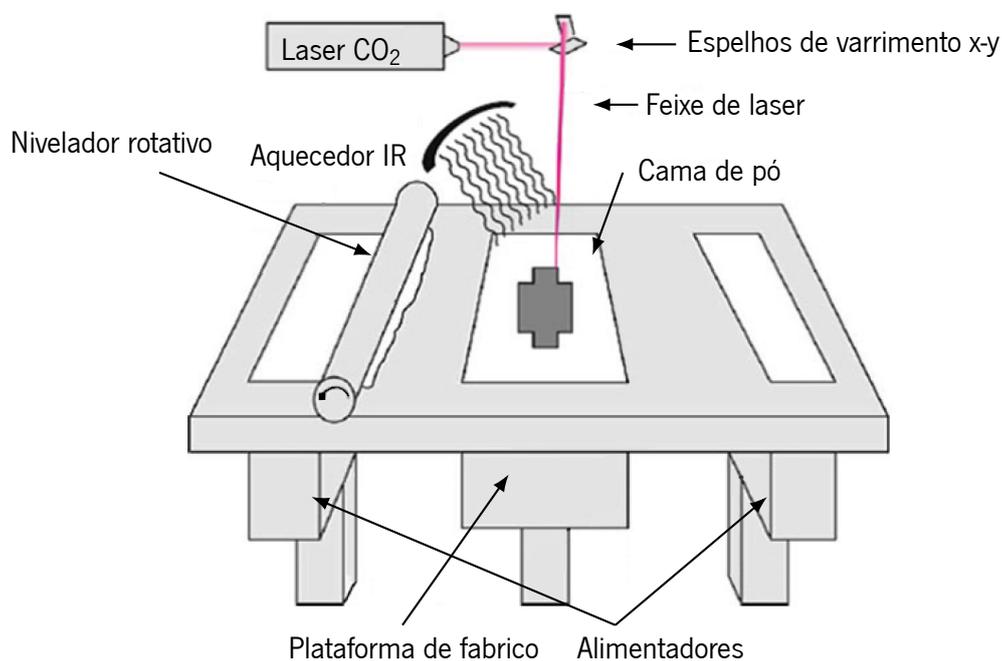


Figura 16: Processo de *Selective Laser Sintering* (SLS) (adaptado de I. Gibson et al. (2015a)).

Contudo, todos os processos de PBF partilham um conjunto básico de características. A saber, incluem uma ou mais fontes de energia térmicas para induzir a fusão ou sinterização entre as partículas de pó, um método para controlar a fusão/sinterização do pó numa região prescrita de cada camada e mecanismos para acrescentar e nivelar as camadas de pó. Ainda que, as fontes térmicas mais comuns sejam os lasers (e.g., CO<sub>2</sub>) também são empregues outras. Nomeadamente, o feixe de elétrons. Contudo, estas máquinas requerem arquiteturas significativamente distintas (I. Gibson et al., 2015a). O processo de PBF original inclui as seguintes variações: (i) *Selective Laser Sintering* (SLS); (ii) *Selective Laser Melting* (SLM); (iii) *Direct Metal Laser Sintering* (DMLS); (iv) *Electron Beam Melting* (EBM); (v) *Selective Heat Sintering* (SHS).

O processo mais utilizado é o *Selective Laser Sintering* (SLS). Neste processo um laser de alta potência é utilizado para sinterizar as partículas de pó de polímero, metal, compósitos, cerâmica ou vidro numa determinada geometria tridimensional. Assim, o laser sinteriza seletivamente as partículas de pó,

varrendo as camadas na superfície da cama de pó de acordo com as trajetórias geradas no programa de fatiamento (*slicing*). Após o varrimento da camada estar completo, a cama de pó desce e uma nova camada de pó é distribuída e nivelada. O processo é repetido até à conclusão do objeto. O pó que não é sinterizado funciona como suporte à estrutura durante o processo de fabrico. Por isso, no caso dos polímeros não existe necessidade de criar estruturas de suporte, como acontece com outros processos de FDD (e.g., *Material Extrusion (ME)*). O pó não sinterizado pode ser reutilizado, numa determinada percentagem, numa nova produção. As variações do processo como referido anteriormente, diferem em alguns pontos. A título de exemplo no caso do *Selective Laser Melting (SLM)* o pó não é sinterizado mas fundido e no caso do *Electron Beam Melting (EBM)* ou *Selective Heat Sintering (SHS)* a fonte térmica de energia não é um laser mas um feixe de eletrões ou raios infravermelhos, respetivamente.

### **Binder Jetting (BJ)**

O nome original do processo de FDD *Binder Jetting (BJ)* era *Three-Dimensional Printing (3DP)*. Contrariamente ao processo de PBF, o processo BJ utiliza um jato de aglutinante líquido diretamente num leito de pó para produzir as secções transversais das peças. O princípio de funcionamento consiste em projetar as gotículas de ligante (80 µm de diâmetro) através da cabeça de impressão sobre a cama de pó. Este líquido aglutinante cola as partículas de pó na forma determinada pelo modelo tridimensional do objeto. Por outro lado, fornece ligação à camada impressa anteriormente. Após a impressão de uma camada, a cama de pó baixa e uma nova camada de pó é espalhada e nivelada, idêntico ao método de recobrimento empregues nos processos de PBF, descrito anteriormente. Este procedimento repete-se até que a peça ou conjunto de peças, esteja concluído. Outro aspeto similar, é a possibilidade de reutilizar o pó residual em novas produções. A Figura 17 apresenta um esquema do processo BJ.

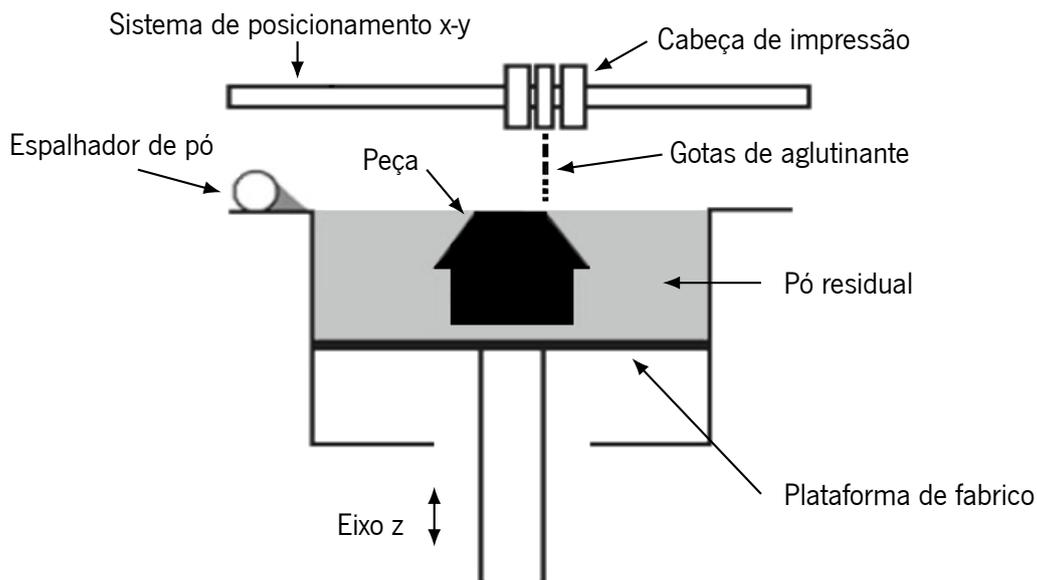


Figura 17: Processo de *Binder Jetting (BJ)* (adaptado de I. Gibson et al. (2015a)).

**Material Extrusion (ME) ou Fused Filament Fabrication (FFF)**

Todos os processos de FDD baseados na extrusão têm em comum o fato do material empregue no fabrico de um objeto camada-a-camada, ser extrudido e depositado através de um bico. O controlo deste processo é efetuado por um computador que prescreve as trajetórias predefinidas do bico de extrusão, que deposita continuamente o material na forma líquida/pastosa. Existem duas abordagens principais adotadas no processo ME. A abordagem mais comum é usar a temperatura como uma forma de controlar o estado do material. O material fundido é liquefeito dentro de um reservatório para que possa fluir pelo bico e aderir ao material adjacente (i.e., já depositado) antes de solidificar. Este método é semelhante ao processo convencionais de moldação de plásticos por injeção. Outra abordagem, passa por utilizar fluidos viscoelásticos posteriormente sujeitos a uma reação química para desencadear a sua solidificação. Nestes casos, um agente de cura, solvente residual, reação com o ar, ou simplesmente a secagem do material permite que ocorra a adesão. Portanto as peças podem curar ou simplesmente secar para se tornarem totalmente estáveis. Mais, esta abordagem para além de poder ser empregue com materiais pastosos, pode ser igualmente usada em aplicações bioquímicas (I. Gibson et al., 2015a).

O *Fused Filament Fabrication* (FFF) está entre os processos mais populares, no mercado de FDD pessoal, em grande parte devido aos custos relativamente baixos do equipamento e material. A Figura 18 ilustra o esquema de funcionamento do FFF.

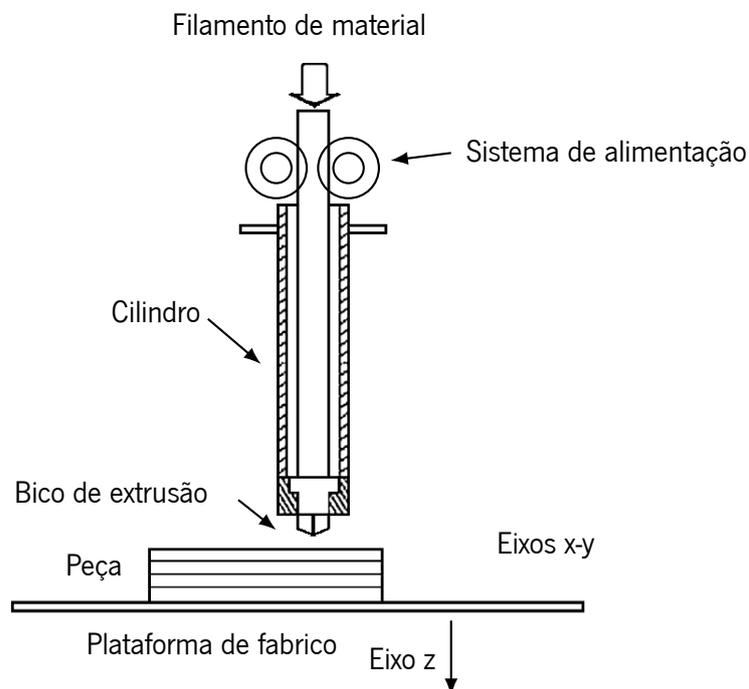


Figura 18: Processo de *Material Extrusion* (ME) (adaptado de I. Gibson et al. (2015a)).

Este processo emprega um polímero termoplástico, normalmente em forma filamentar, que é conduzido a uma extrusora montada verticalmente. Então, o material é fundido e extrudido através de um bico de diâmetro selecionado. Sendo o objeto criado camada-a-camada pela deposição (de polímero fundido),

nas direções horizontal e vertical por um mecanismo controlado numericamente. Diversos polímeros termoplástico têm sido empregues na FFF. Nomeadamente, o Acrilonitrilo Butadieno Estireno (ABS), Ácido Polilático (PLA), Policarbonato (PC), Poliestireno (PS), Poliamida (PA) e elastômeros que são processadas a temperaturas de fusão mais baixas (<270 °C). Também, alguns termoplástico de elevado desempenho, como Poli(éter-éter-cetona) (PEEK), Poliarletocercetona (PAEK) e Polietirimida (PEI), que requerem temperaturas de extrusão superiores a 350 °C (Xin Wang et al., 2017). Usualmente, os equipamentos para além do bico de material de construção, possuem outro para deposição das estruturas de suporte. O diâmetro do bico define a velocidade de deposição e controla a precisão. Os diâmetros típicos dos bicos variam entre 100 µm e 500 µm. Todavia, bicos com diâmetros superiores podem ser facilmente integrados no equipamento, desde que, o sistema esteja dimensionado dinamicamente para suportar o peso adicional da extrusora sem perder precisão de movimento. Os parâmetros de processamento que similarmente aos outros processos os parâmetros que influenciam a qualidade de impressão (estética) e as propriedades mecânicas são a espessura de camada, o padrão de preenchimento, orientação de produção e distância entre deposições (Molotnikov et al., 2019; Truby e Lewis, 2016).

### **Laminated Object Manufacturing (LOM)**

Um dos primeiros processos de FDD a ser comercializado (1991) foi o *Laminated Object Manufacturing* (LOM). Este método envolve a deposição e laminação camada-a-camada de folhas até o objeto estar concluído. A primeira variação do processo LOM envolve a laminação de folhas de papel, cortadas com laser de CO<sub>2</sub>. Cada folha representa uma camada transversal do modelo tridimensional do objeto. No LOM, o excesso da folha de papel que não pertence à peça final é cortada. Outros processos foram desenvolvidos com base na laminação de folhas, envolvendo outros materiais e estratégias de corte. Devido ao processo de fabrico, apenas os excessos dos contornos externos dos objetos são cortados. A Figura 19 ilustra o esquema do processo LOM. Com efeito, a ordem das operações de empilhar e cortar os excesso de material pode ser invertida. Assim, as folhas podem ser cortadas e depois empilhadas ou empilhadas e cortadas de seguida. Os processos de LOM podem ainda ser classificados com base no mecanismo empregue na promoção da ligação entre camadas (laminação): (i) colagem ou ligação adesiva; (ii) ligação térmica; (iii) fixação mecânica e (iv) soldadura ultrassónica. O uso da soldadura ultrassónica envolve características únicas de ligação em estado sólido e permite uma ampla gama de materiais (e.g., metais e polímeros) e aplicações. O FDD com ultrassons usa metais como alumínio, aço inoxidável e titânio, e sendo um processo de baixa temperatura requer pouca energia. Por outro lado, é possível unir materiais diferentes (I. Gibson et al., 2015a).

### **Directed Energy Deposition (DED)**

Os processos *Directed Energy Deposition* (DED) permitem a produção de objetos através da fusão e deposição simultânea de um material (pó ou fio) por meio de um único dispositivo de deposição. Apesar desta abordagem funcionar para polímeros, cerâmicos e compósitos de matriz metálica, ela é maioritariamente

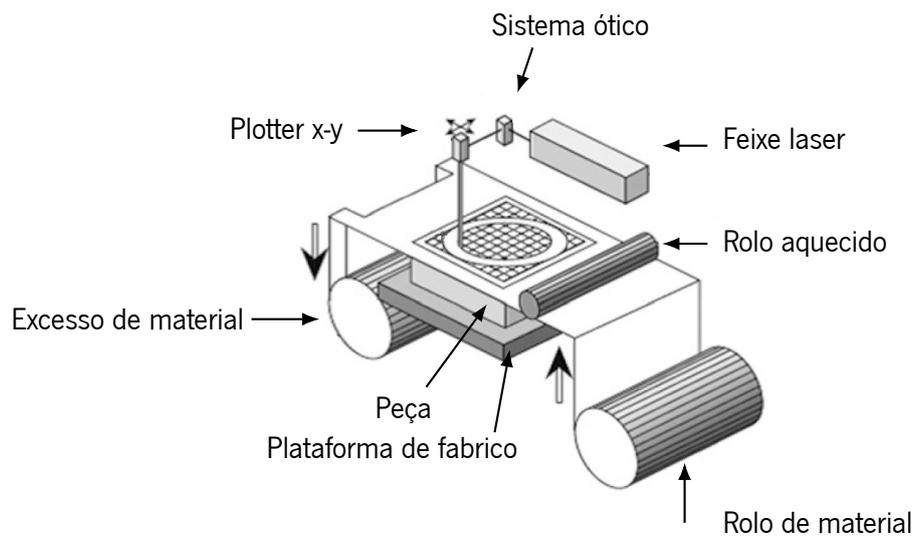


Figura 19: Processo de *Sheet Lamination* (SL) (adaptado de I. Gibson et al. (2015a)).

empregue para pós metálicos. Por isso este processo é frequentemente denominada de tecnologia de deposição e metal. O DED processa a energia direta numa área estreita e focada para aquecer e derreter o substrato, e simultaneamente fundir o material que está a ser depositado na poça de fundido. Contrariamente, ao que ocorre nas técnicas de fusão em cama de pó (PBF) (vd. tópico 2.5), os processo DED não são usados para fundir um material previamente depositado numa cama de pó, mas são usados para fundir materiais à medida que vão sendo depositados.

Os processos DED empregam uma fonte de energia focada (geralmente um laser ou feixe de elétrons) para fundir o material de alimentação e fabricar os objetos tridimensionais de maneira idêntica aos processo de extrusão de material ME. A cada passagem a cabeça de deposição cria um cordão de material solidificado e em conjunto com as linhas adjacentes formam uma camada. No caso de objetos com geometrias complexas é necessário utilizar material de suporte ou uma cabeça de deposição com vários graus de liberdade (multi-eixo). A Figura 20 ilustra o processo DED com material em pó e fonte de energia laser.

Os processo DED comerciais empregam laser ou feixe de elétrons para fundir o material de adição em pó ou fio. Estes processos podem ser comparados aos processo de revestimento a laser (*Laser Cladding*) e soldadura de plasma (*plasma Welding*). Múltiplas variações do processo conduziram a diferentes designações comerciais. Embora a abordagem geral seja a mesma, as diferenças entre estes equipamentos geralmente incluem mudanças na potência do laser, tamanho do foco do laser, tipo de laser, método de distribuição de pó, método de distribuição de gás, esquema de controlo em malha fechada e/ou tipo de controlo de movimento utilizado.

Como todos estas variações do processo envolvem deposição, fusão e solidificação de material em pó, usando uma poça de fusão móvel, as peças obtidas atingem uma alta densidade durante o processo de fabrico. Assim, as peças produzidas por DED exibem uma microestrutura semelhante à obtida pelos processos de fusão em PBF, em que a cada passagem da fonte de energia é criado um cordão de material

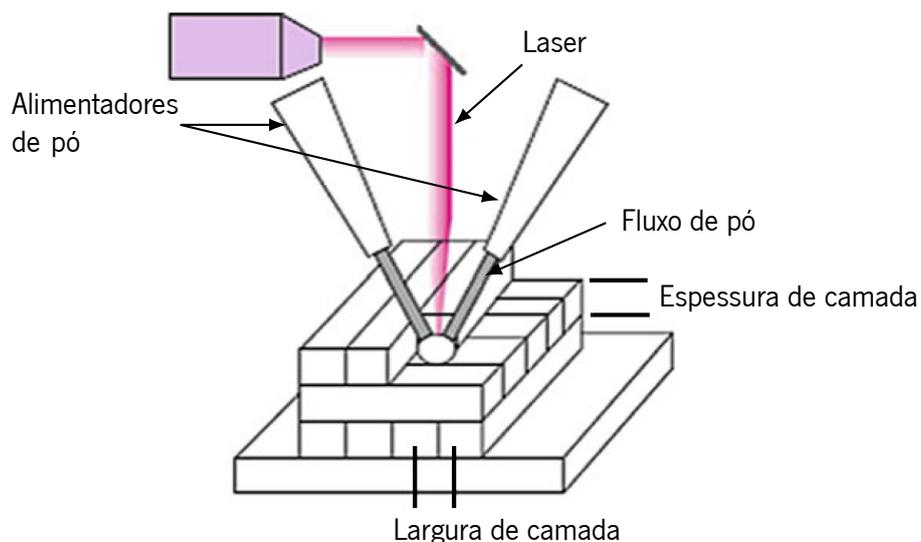


Figura 20: Processo de *Directed Energy Deposition* (DED) (adaptado de I. Gibson et al. (2015a)).

rapidamente solidificado (I. Gibson et al., 2015a).

### **Material Jetting (MJ)**

Este processo deriva do processo de impressão por jato-de-tinta (*Inkjet* (IJ)) bidimensional usado nas máquinas de escrever e mais tarde nos anos 1980 nas impressoras por jato-de-tinta. Outras aplicações incluem, a impressão de embalagens e rótulos (Derby, 2010; I. Gibson et al., 2015a). Este processo é caracterizado pela deposição controlada de gotas de material, camada-a-camada, com alta resolução, rigor dimensional e geométrico (de Gans et al., 2004). A Figura 21 apresenta o esquema da cabeça de impressão do processo *Material Jetting* (MJ).

A principal vantagem deste processo é a deposição precisa de pequenas gotículas de polímero (resina), normalmente abaixo dos 100 pL. O processo de MJ é baseado na formação de gotículas na cabeça de impressão, na sua deposição no substrato e subsequente solidificação. Contudo, este processo depende do controlo meticuloso do material do jato de líquido e das suas propriedades, como densidade, viscosidade, tensão superficial, velocidade da gotículas projetadas e do comprimento característico da gotícula (Derby, 2010). A maioria dos equipamentos atuais utiliza materiais de curáveis por radiação Ultravioleta (UV), como misturas de monómeros e oligómeros de alto peso molecular (acrilatos de uretano ou resinas de metacrilato, ceras de uretano) (I. Gibson et al., 2015a). No contexto deste trabalho, foi selecionado o processo de MJ, nomeadamente, o processo PJet para a validação experimental dos materiais de microestrutura celular estudados.

A impressão a jato de tinta bidimensional existe desde a década de 1960, usada durante longo tempo como um método de impressão de documentos. A impressão a jato de tinta é hoje em dia amplamente utilizada na indústria de impressão pessoal comercializada por empresas como HP e Canon. A impressão como um método de produção tridimensional foi primeiramente demonstrada na década de 1980, no

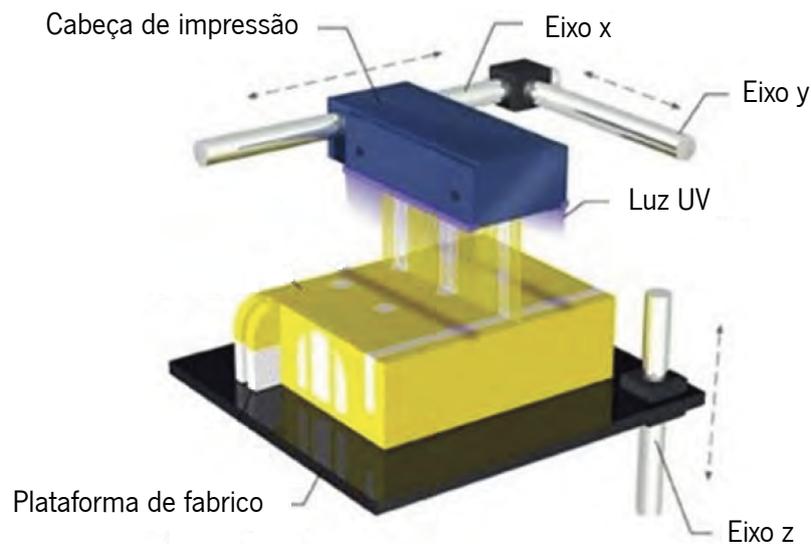


Figura 21: Processo de *Material Jetting* (MJ) (adaptado de Stratasys (2018a)).

desenvolvimento de patentes relacionadas com método *Ballistic Particle Manufacturing*, que consistia na simples deposição de partículas de material num objeto tridimensional. A primeira tecnologia comercial foi o ModelMaker, introduzida em 1994 e que imprimia cera aquecida (líquida). Mais tarde, em 1996 juntou-se a 3D Systems com o seu sistema Actua, mais tarde revisto e comercializado como ThermoJet. Todos os sistemas de primeira geração dependiam de cera como material de produção. Sendo que as aplicações se limitavam a modelos conceptuais e padrões para fundição de núcleo perdido (Wohlers, 2017).

Posteriormente, o desenvolvimento centrou-se na deposição de polímeros (resinas) fotocuráveis de acrilato. Neste processo, pequenas gotas de monômero líquido são depositadas e posteriormente polimerizadas por exposição à luz ultravioleta. À semelhança da SLA ambos os processos dependem da fotopolimerização. Atualmente as duas empresas que dominam este processo, são a Stratasys e a 3D Systems. Contudo, apesar da oferta atual se limitar exclusivamente a fotopolímeros acrílicos, diversos grupos de investigação tem testado a utilização de outros materiais poliméricos, metais e cerâmicas. Porém, no contexto do presente trabalho serão abordados somente os polímeros.

Tipicamente, nos métodos que empregam formação de gotículas, o limite máximo de viscosidade passível de ser impresso é geralmente na faixa dos  $20 \text{ mPa s}^{-1}$  até  $40 \text{ mPa s}^{-1}$  na temperatura de impressão (Derby e Reis, 2003; Derby, 2010). Assim, para os materiais sólidos à temperatura ambiente o aquecimento ajuda a liquefazer, no caso de fluídos de alta viscosidade, esta deve ser reduzida de modo a permitir a sua injeção. Os métodos mais comuns são o uso de calor e adição de solventes ou outros componentes de baixa viscosidade ao fluído. Além disso, outros fatores, como a densidade do líquido, a tensão superficial e a própria geometria do bico de impressão podem influenciar os resultados da produção. Porém, a limitação imposta pela viscosidade é o aspeto mais importante e problemático para a formação das gotículas no processo de MJ. Também as variáveis do processo, como a velocidade da

cabeça de impressão, velocidade da gota e a sua frequência injeção afetam a qualidade da deposição. Sendo que estas variáveis do processo dependem das características do material (fluido) de impressão (I. Gibson et al., 2015a).

O jato de material na fabricação de objetos tridimensionais é um processo complexo, com várias dificuldades técnicas. Assim, no caso dos polímeros, o primeiro desafio é a formulação do material. Isto pode significar fundir um polímero sólido ou misturar uma formulação de monômero ou pré-polímero com um iniciador de polimerização. O segundo desafio a superar, é a formação das gotículas. Para usar processos de deposição por jato, o material deve ser convertido de um volume contínuo de líquido numa série de pequenas gotas discretas. Esta função normalmente depende do ajuste fino da relação entre o material a ser injetado, o equipamento envolvido e dos parâmetros do processo (Furbank e J. F. Morris, 2004). Um terceiro desafio é o controlo da deposição das gotículas. Este aspeto envolve questões de trajetória de voo da gota, impacto e a molhabilidade do substrato (Attinger et al., 2000; Bechtel et al., 1981). Nos processos de impressão, existe movimento da cabeça de impressão e/ou da plataforma de fabricação, portanto o cálculo da trajetória das gotas deve considerar este aspeto. Além da localização da deposição das partículas, a sua velocidade e tamanho também contribuirão para as características da deposição e devem ser controladas pela geometria e operação do bico de deposição (I. Gibson et al., 2015a). A qualidade da gota impactada (depositada) no substrato também carece de controlo. O fracionamento da gota em gotículas de menores dimensões durante a projeção, implica a deposição de material por uma área maior ao pretendido. Do mesmo modo, se a gota espirrar no impacto, originado uma “coroa”, resultará em efeitos idênticos. Em qualquer um dos casos, a deposição não terá limites definidos e os efeitos terão um impacto negativo na qualidade de fabricação (Bussmann et al., 2000).

Simultaneamente, a transformação das gotículas de material líquido numa geometria sólida requer um controlo adequado. O MJ depende de uma mudança de fase (estado) do material depositado (e.g., no caso do processo PJet requer a cura do fotopolímero). Esta mudança de fase deve ocorrer durante a projeção ou imediatamente após a deposição. Sendo que, o tempo necessário para que ocorra esta mudança também afetará a iteração do novo material depositado com o substrato. A solidificação não uniforme das gotas poderá originar empenos ou outro defeitos. Um desafio adicional é o controlo da deposição de gotas sobre as camadas previamente depositadas (i.e., as gotas irão interagir consoante o tipo de material do substrato). Para evitar a delaminação e garantir a integridade física da peça a camada depositada deve ser ligada a camada anterior. Os equipamentos atualmente disponíveis empregam um nivelador (*recoater*) que alisa a superfície a cada passagem da cabeça de impressão (Bussmann et al., 2000).

Outros aspetos operacionais do processo MJ também se revelam desafiadores. Por exemplo, devido a reduzida dimensão dos orifícios de injeção dos bicos, o seu entupimento é frequente. Especial atenção é dada ao controlo e manutenção do desempenho dos bicos durante a operação. A maioria dos equipamentos atuais utiliza ciclos de purga e limpeza durante as produções, para garantir o funcionamento correto do maior número de bicos injetores. As operações de limpeza e manutenção entre produções

são obrigatórias para a minimizar este problema. Além disso, alguns equipamentos podem incluir sistemas de detenção e compensação dos bicos inconsistentes. No caso de bloqueio permanente restará a substituição dos bicos (I. Gibson et al., 2015a).

Por último, para obter uma melhor resolução de impressão, é benéfico produzir numerosas pequenas gotas muito próximas. Porém, este aspeto requer que uma alta densidade de bicos na cabeça de impressão o que poderá ser inexequível em muitos casos. Como alternativa, as trajetórias da cabeça de impressão podem ser programadas para fazer mais passagens na mesma área. Nos casos de elevada densidade de bicos, poderão surgir problemas devido à sobreposição dos diferenciais térmicos ou de pressão usados no acionamento dos bicos adjacentes (I. Gibson et al., 2015a). Para além destes desafios relacionados com a preparação da impressão propriamente dita, outros aspetos como a formação das gotículas assumem especial destaque no processo de MJ.

O processo MJ emprega diversos métodos para criar e projetar as gotículas resultantes da evolução do processo IJ. Estes métodos são caracterizados pela forma na qual o líquido sai do bico, fluxo contínuo *Continuous Stream* (CS) ou *Drop-on-demand* (DOD), como uma coluna contínua de líquido ou gotículas discretas. A Figura 22 ilustra as duas categorias de formação de gotículas.

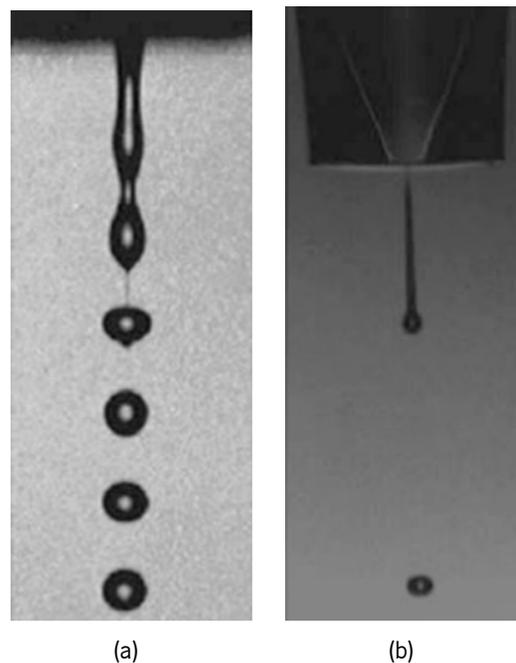


Figura 22: Principais métodos de produção de gotículas empregues no processo MJ: (a) fluxo contínuo, (b) *drop-on-demand* (adaptado de I. Gibson et al. (2015a)).

No modo CS, o reservatório do fluido é sujeito a uma pressão constante, fazendo com que uma coluna pressurizada de fluido seja injetada pelo bico. Após a saída do orifício, o fluxo de fluido quebra-se em gotas devido à instabilidade de Rayleigh. Esta rotura do fluxo pode ser mais consistente pela modulação, vibração ou perturbação do jato numa frequência fixa próxima da frequência de formação espontânea de gotículas. Neste caso, o processo de formação de gotículas é sincronizado com a vibração forçada

originando a injeção de gotículas de massa uniforme. Como as gotículas são produzidas em intervalos constantes, a sua deposição tem de ser controlada após a quebra do jato. Para tal, é aplicado um campo de carga, e deste modo passam a um estado de carga eletrostática. Estas partículas carregadas passam por um campo de deflexão, que as direciona para orientação estabelecida, um local no substrato para deposição ou um recipiente de recolha de material. Esta técnica denomina-se de sistema contínuo de deflexão binária (Tay et al., 2003). Os equipamentos comerciais atualmente disponíveis, produzem gotículas com aproximadamente 150  $\mu\text{m}$  de diâmetro a uma frequência de 80 - 100 kHz. Contudo, as frequências podem alcançar 1 MHz e tamanhos de gotículas de 6  $\mu\text{m}$  (6 fL) a 1 mm (0,5  $\mu\text{L}$ ) (Tay et al., 2003).

No método DOD em contraste, as gotas individuais são produzidas diretamente no bico. Estas são formadas apenas quando pulsos de pressão no bico fazem com que o fluido seja expelido. Estes pulsos de pressão são criados em momentos específicos por atuadores térmicos, eletrostáticos piezoelétricos, acústicos ou outros (Le, 1998). A Figura 23 ilustra o esquema DOD.

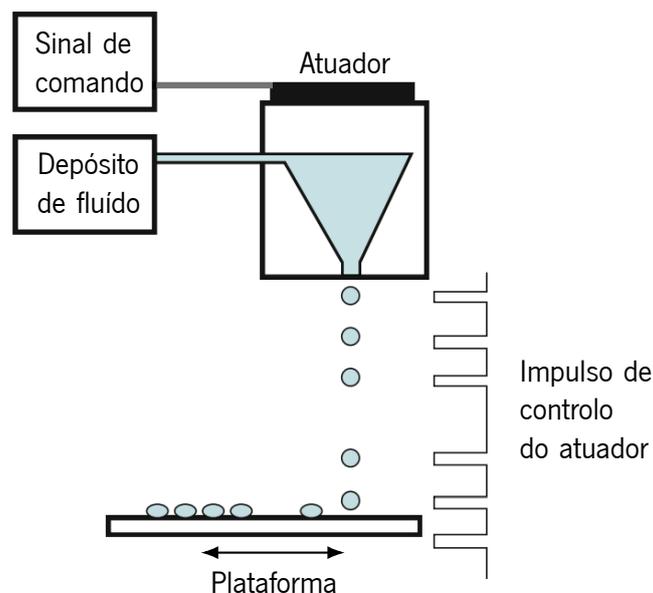


Figura 23: Sistema de impressão DOD (adaptado de I. Gibson et al. (2015a)).

De acordo com Q. Liu e Orme (2001) os métodos DOD podem depositar gotículas de 25 - 120  $\mu\text{m}$  a uma taxa de 0 - 2000 gotas por segundo. Atualmente, nos equipamentos comerciais que empregam o processo DOD, as tecnologias de atuadores térmicos e piezoelétricos dominam. No caso dos atuadores térmicos contam com uma resistência para aquecer o líquido dentro do reservatório até que uma bolha se expanda e seja forçada para fora do bico. Os atuadores piezoelétricos dependem da deformação de um elemento piezoelétrico para reduzir o volume do reservatório do líquido, o que resulta na injeção da gotícula. As formas das ondas empregues no acionamento dos atuadores piezoelétricos podem variar de ondas quadradas positivas simples a ondas negativas-positivas complexas, nas quais a amplitude, duração e outros parâmetros podem ser modulados para produção das gotículas pretendidas. O método

DOD é atualmente o mais amplamente utilizado em especial pelas seguintes razões (de Gans et al., 2004): (i) menor tamanho de gota; (ii) espessura de parede secundária; (iii) maior precisão de deposição; (iv) não depende da formação de uma bolha de vapor ou de aquecimento o que pode danificar materiais sensíveis.

A tecnologia PJet processa diversos materiais fotopoliméricos à base de acrílico em camadas cuja espessura varia entre 14 - 30  $\mu\text{m}$  consoante o modo de produção e o modelo do equipamento (Stratasys, 2018b). Emprega jatos distintos, uns para depositar material polímero termoendurecível e outros para material de suporte solúvel, para formar camadas cuja espessura varia entre 14 - 30  $\mu\text{m}$  consoante o modo de produção e o modelo do equipamento. A cabeça de impressão contém 1536 orifícios individuais. Cada camada de fotopolímero é curada por luz ultravioleta imediatamente após a sua impressão, produzindo modelos totalmente curados sem necessidade de pós-processamento. As estruturas de suporte são construídas num material do tipo gel, que é removido manualmente, banho químico ou jato de água. Alguns modelos de equipamento permitem a impressão de materiais digitais e de cor. Estes materiais são obtidos pela variação da composição relativa de duas resinas base (Stratasys, 2018b).

## 2.6 Regras de projeto para jato de material

O FDD é uma tecnologia relativamente nova se considerarmos a sua adoção efetiva em chão de fábrica. A sua massificação está em parte dependente da facilidade do acesso, de quem concebe e projeta novos produtos, ao conhecimento e informação das propriedades dos materiais e outras especificações relativas aos novos processos tecnológicos. Existe necessidade de reunir informação que possa auxiliar os engenheiros de produto a estabelecer as Regras de Projeto (RP) e produção (*Design rules*). Existem diversas organizações internacionais, como por exemplo *American Society for Testing and Materials* (ASTM) e *International Organization for Standardization* (ISO), responsáveis pelo estabelecimento e definição de normas internacionais. Contrariamente a outras tecnologias de fabrico, o desempenho das peças produzidas por FDD, dependem para além das propriedades do material base, da estrutura e dos parâmetros do processo. O fato da norma ISO/ASTM 52910:2018 (2018) que define as orientações gerais para o projeto para FDD, apresentar um conjunto de considerações úteis para os projetistas e engenheiros (ISO/ASTM 52910:2018, 2018). Contudo, o seu âmbito é demasiado generalista e no caso de ser considerado um processo/equipamento específico é desejável limitar abrangência e especificar com rigor as regras que devem ser observadas para o equipamento em concreto.

Por definição o FDD é a tecnologia que produz um objeto físico, baseado na sua representação, através da adição de material camada-a-camada (ISO/ASTM 52900:2015, 2015). Nesta tecnologia é definida simultaneamente a geometria e determinadas as propriedades do material. Uma das vantagens quando comparada com as tecnologias de fabrico convencionais (i.e., subtrativas), é a capacidade de virtualmente produzir qualquer geometria, permitindo grande liberdade de formas, materiais, geometrias e funcionalidades complexas (S. Yang e Zhao, 2015). Atualmente, apesar dos avanços recentes ainda

existem limitações no fabrico (I. Gibson et al., 2015b). Com efeito, as peças produzidas por FDD apresentam propriedades mecânicas anisotrópicas, dependentes da estrutura e parâmetros do processo e não somente com as propriedades dos materiais base de que são constituídas (I. Gibson et al., 2015b). Estas complexas interações originam materiais anisotrópicos, nos quais a anisotropicidade pode variar localmente (i.e., dentro do componente) e globalmente (i.e., entre peças aparentemente idênticas) (J. Mueller et al., 2015b). Além disso, a informação das propriedades estáticas (i.e., resultante de ensaios estáticos) dos materiais contida nas bases de dados dos fabricantes é insuficiente, tornando o processo de seleção de materiais complexo (B. H. Lee et al., 2005). Outro aspeto a considerar é que as propriedades disponibilizadas são apresentadas numa gama dentro da qual existe uma variação sem contudo, indicar os parâmetros utilizados nos ensaios (e.g., orientação e posição, altura de camada e modo de impressão).

Outro desafio está relacionado com a necessidade de adaptar as regras e metodologias do design (*Design Theory and Methodology* - DTM) (Reuleaux, 1861). Em especial na sua componente para o fabrico convencional (*Design for Manufacturing* - DFM), que não está qualificada para incluir as novas oportunidades e as consequentes novas regras e especificações dos processos de FDD para alcançar um melhor *design* (i.e., produto) (S. Yang e Zhao, 2015). Da perspetiva do *design*, a vantagem do FDD para as tecnologias convencionais de fabrico (i.e., subtrativas e montagem) é a grande liberdade de *design*, que se refletem nas categorias de complexidade: (i) forma, (ii) hierárquica, (iii) material e (iv) funcional (I. Gibson et al., 2015b). Estes quatro aspetos são interdependentes (e.g., a complexidade funcional pode ser alcançada através de estruturas hierárquicas) e a sua importância e relevo é acentuada pelos progressos contínuos, em grande parte, resultado do forte investimento em investigação que os fabricantes de equipamentos realizam (Watts e Hague, 2006).

Estes são alguns desafios que os engenheiros e projetistas (*designers*) enfrentam quando criam estruturas mecânicas otimizadas para FDD. Os engenheiros e projetistas devem ter em mente que as escolhas realizadas no processo de *design*, terão forte impacto nos requisitos de produção (M. K. Thompson et al., 2016).

Para conceber e projetar peças para MJ é necessário conhecer as propriedades efetivas dos materiais e a influência dos parâmetros de produção nas propriedades mecânicas e físicas finais, nomeadamente no rigor dimensional das peças funcionais. Esta Secção apresenta uma revisão da literatura de trabalhos de caracterização das propriedades mecânicas e da influência dos parâmetros de produção nas peças produzidas através da tecnologia PolyJet™ (Stratasys, Eden Prairie, MN, USA). A orientação da peça, posição na plataforma, espessura de camada e modo de acabamento são alguns dos parâmetros do processo que influenciam as peças finais. São igualmente enumeradas as regras de projeto, estabelecendo a relação entre as especificações de projeto, regras a considerar na conceção, modelação e produção.

Podemos definir RP para o processo PolyJet™ (Stratasys, Eden Prairie, MN, USA), como o conjunto de diretrizes, considerações e procedimentos a adotar na conceção e produção de peças, envolvendo a observância de restrições no *design* e definição de orientações para o processo de fabrico. Cada regra pode influenciar uma ou mais propriedades mecânicas ou físicas das peças ou conjuntos.

Diferentes processos de FDD possuem diferentes capacidades e restrições que derivam da natureza do processo e dos materiais utilizados. Inclusive para variantes do mesmo processo (i.e., equipamentos distintos) ou materiais diferentes, podem requerer regras diferenciadas ou ajustes nos seus valores. De forma semelhante ao projeto para produção por tecnologias convencionais, as regras de projeto para FDD, devem respeitar implicitamente as restrições do processo na modelação sólida e indicar explicitamente as anotações destinadas à produção. No caso do processo PolyJet™ (Stratasys, Eden Prairie, MN, USA) as regras de projeto vão para além das indicadas no manual do utilizador (Stratasys Ltd., 2016).

As regras de projeto são estabelecidas com base nas especificações técnicas do produto, estas definem o conjunto explícito de exigências a serem satisfeitas pela peça final (i.e., precisão, rugosidade superficial, anisotropia, tempo de produção e custo). As regras de projeto podem ser divididas em duas categorias: a primeira refere-se às regras adotadas na fase de conceção, modelação sólida e geração dos ficheiros digitais, a segunda destina-se à produção das peças. O fluxograma representado na Figura 24 ilustra as regras de projeto para o processo MJ.

Cada uma das categorias anteriores engloba diversas regras. Na fase de conceção e modelação devem ser considerados em primeiro lugar os limites físicos do equipamento (i.e., envelope de construção) em segundo a gama de materiais disponíveis (i.e., propriedades mecânicas e físicas). A não verificação da adequação destas duas especificações inviabiliza à partida a sua utilização. Em segundo lugar, devem ser tidas em consideração as regras de geometria e dimensões mínimas a aplicar na modelação sólida ou paramétrica das peças ou conjuntos. Estas regras são as mínimas dimensões de: (i) espessura de parede principal; (ii) espessura de parede secundária; (iii) gravações em relevo (i.e., negativas e positivas, profundidade e altura, respetivamente); (iv) folga para montagens; (v) mínimo detalhe; (vi) diâmetro pino; (vii) diâmetro furo; (viii) suportes e (ix) tolerância. Outro aspeto a ter em consideração, no caso de impressão de peças multimaterial, estas devem ser modeladas como montagem (*assembly*) no software de CAD nativo. Em que cada peça de material distinto possa ser selecionada, no processo de preparação da impressão, para atribuição do respetivo material. Neste processo de montagem, as peças não se devem sobrepor nem afastar (sem folga).

O critério económico associado ao custo da produção deve ser considerado na fase de conceção e projeto. Sempre que não existam critérios técnicos que imponham uma orientação e posicionamento específico da peça na plataforma de produção, deve-se optar pelo posicionamento automático realizado pelo software (i.e., baseado em critérios de redução de custo). Caso não seja comprometida a integridade estrutural, as peças devem ser ocas ou o com interior em material de suporte (mais económico) (Stratasys, 2018a).

Por último, a informação digital da modelação sólida deve ser convertida num ficheiro de formato, aceite pelo software proprietário de preparação de produção (Objet Studio™). Os formatos suportados são .stl, SLC ou *Virtual Reality Modeling Language* (.VRML). No caso do formato .stl, quando o modelo possui superfícies curvas e pequenos detalhes, é boa prática seleccionar uma tolerância dimensional linear de 0,01 mm e 5° de tolerância angular, para que a malha gerada seja formada por triângulos suficientemente pequenos que ajustem aos contornos do modelo. Para modelos com faces planas pode-se utilizar uma

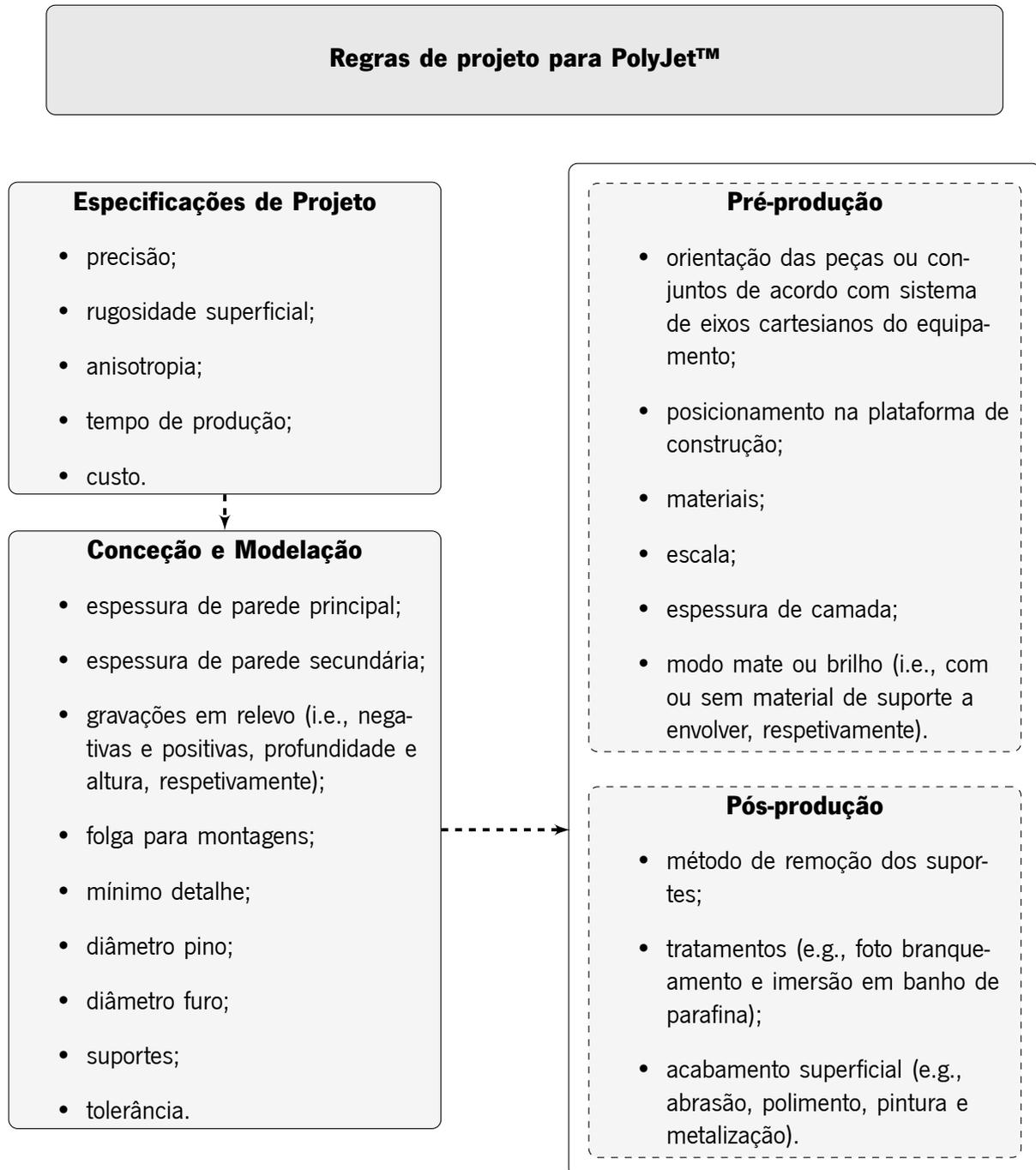


Figura 24: Fluxograma regras de projeto para o processo PolyJet™.

resolução inferior. O ficheiro de .stl pode ser gravado como formato *binary* ou *American Standard Code for Information Interchange* (ASCII), a primeira opção (*binary*) é preferível pois produz ficheiros de menores dimensões. É recomendado verificar a existência de erros nos ficheiros (e.g., normais invertidas, espessura zero, superfícies sobrepostas) antes de serem importados para o *Objet Studio™* (Stratasys Ltd., 2016). Este software suporta o posicionamento e orientação das peças na plataforma de construção de forma automática. Esta operação é baseada em dois critérios: (i) económico (i.e., menor tempo de produção) com base na movimentação da cabeça de impressão em *xx* e redução de material de suporte e (ii) qualidade de impressão com base na orientação das peças (as faces com pequenos detalhes devem ficar orientadas na vertical viradas para cima e paralelas à plataforma de construção) (Stratasys, 2018a).

Na produção das peças, devem ser consideradas as anotações destinadas às operações de pré e pós-processamento. Assim, para a primeira operação de pré-processamento deve ser especificado: (i) orientação das peças ou conjuntos de acordo com o sistema de eixos cartesianos do equipamento; (ii) posicionamento na plataforma de construção; (iii) materiais; (iv) escala; (v) espessura de camada; (vi) modo mate ou brilho (i.e., com o sem material de suporte a envolver, respetivamente). No caso do pós-processamento as regras devem especificar: (i) método de remoção dos suportes; (ii) tratamentos (e.g., foto branqueamento e imersão em banho de parafina); (iii) acabamento superficial (e.g., abrasão, polimento, pintura e metalização)

Os estudos iniciais focaram-se no estudo e caracterização das propriedades das peças produzidas (Kesy e Kotlinski, 2010). Neste estudo os autores investigaram o efeito da orientação no processo *PolyJet™* nas propriedades mecânicas à tração e dureza. Os resultados evidenciam propriedades anisotrópicas dos provetes produzidos em material *FullCure 720™*. Os autores concluíram que este efeito era provocado pela orientação de produção. Os provetes produzidos na orientação *xz* apresentaram as propriedades mecânicas mais elevadas, já os provetes produzidos na orientação *xy* apresentaram os piores resultados. As arestas dos provetes paralelas ao sentido do movimento de impressão *x* são mais densas e duras que a região central. Este efeito é devido à maior absorção de radiação UV pelas arestas. Com conclusão, a orientação das peças na plataforma de produção do equipamento *PolyJet™* é o fator com maior influência nas propriedades mecânicas.

Estudos teóricos e experimentais sobre rugosidade, que concluíram que o modo brilho *glossy surface* permite melhor acabamento superficial das peças relativamente ao modo mate *matte surface* (Udroiu e Mihail, 2009; K. Kumar e G. S. Kumar, 2015).

O rigor dimensional e otimização dos fatores de escala de acordo com as propriedades das peças é outro tópico de interesse no estudo da tecnologia *PolyJet™*. Os autores Brajlilh et al. (2006) estudaram o uso de algoritmos genéticos de otimização no processo de escala dos modelos, usado no software do equipamento *PolyJet™*. Os resultados mostram que a otimização dos fatores de escala melhorou a precisão, registando uma redução da média absoluta do desvio de 0,44 % para 0,13 % e que os valores otimizados dos fatores de compensação no eixo *xx* do equipamento reduziram de 0,41 % para 0,08 %.

No estudo realizado por Barclift e Williams (2012) é examinada a sensibilidade das propriedades mecânicas dos componentes, nomeadamente: a tensão de cedência ( $\sigma_t$  e módulo longitudinal em tração

( $E_t$ ) de acordo com a variação de parâmetros de processo: (i) orientação de produção no plano xy, (ii) orientação de produção em z, (iii) espaçamento entre provetes (CP). Neste trabalho os autores utilizaram um equipamento Objet Connex 350™, no modo digital *Digital Material Mode* e acabamento mate para imprimir os provetes em resina VeroWhite™. De acordo com este estudo, a variação da orientação no plano xy não influencia as propriedades mecânicas do material. A resolução do eixo zz é superior a dos restantes eixos (xx e yy). A orientação de produção xz e yz não tem influência estatística no desempenho do material (i.e., nas propriedades  $\sigma_t$  e  $E_t$ ). O espaçamento entre os provetes influencia as propriedades mecânicas. Mais, um espaço reduzido entre provetes aumenta a resistência das peças.

Os autores Dizon et al. (2018) apresentaram uma ampla revisão de vários processos de FDD e das diferentes propriedades mecânicas. Além disso, também as propriedades a baixa temperatura, efeito das cargas e pós-tratamentos foram investigados. Diferentes normas de ensaios mecânicos empregues na caracterização das peças produzidas por FDD, foram igualmente discutidas.

Segundo Stansbury e Idacavage (2016) as propriedades mecânicas das peças produzidas por PolyJet™ são fortemente influenciadas pela orientação de produção, altura de camada, tipo de material, acabamento superficial e pós-processamento.

Cazón et al. (2014) estudaram o efeito da orientação de produção e pós-processamento nas propriedades mecânicas e acabamento superficial das peças produzidas por PolyJet™. Neste estudo foram produzidos provetes em dezoito diferentes orientações, com acabamentos superficial mate e brilhante, e remoção do material de suporte por jato de água e banho químico (i.e., solução 2% NaOH). Foram usadas ferramentas estatísticas, Desenho de Experiências (*Design of Experiments* (DOE)), na análise das propriedades à tração e rugosidade superficial para determinação da influência da orientação e acabamento superficial nas propriedades. Os resultados demonstraram que a orientação da peça tem um efeito significativo no módulo de elasticidade e na tensão última, e que não possui significado estatístico na tensão de rutura. Quanto à influência do acabamento, os testes de tração não revelaram diferenças significantes. Relativamente à rugosidade, análise de variância indicou que a posição e os tipos de acabamento apresentam diferenças estatisticamente significantes, entre as médias das três direções de rugosidade. Apresentaram como conclusão, que o acabamento brilhante e a direção de impressão xy apresentaram melhores resultados na rugosidade, enquanto a direção crítica de carregamento da peça deve ser orientada na direção do eixo xx.

Os autores Moore e Williams (2015) investigaram o comportamento à fadiga do material elastomérico (TangoBlackPlus™) e da interface com um material rígido (VeroWhitePlus™). Os provetes foram testados de acordo com a norma ASTM D4482-11 (2021). Foi igualmente examinada microestrutura da interface do material único e multimaterial, tendo os provetes sido seccionados e observados por meios óticos. Neste estudo foi concluído que os provetes com acabamento brilhante, apresentaram melhor comportamento à fadiga. A interface multimaterial não apresentou uma redução de resistência à fadiga significativa, quando comparada com a média do monomaterial. A redução da área da secção transversal (i.e., *necking*) dos provetes testados à fadiga, pode causar uma redução na resistência à fadiga.

Segundo Pilipović et al. (2007), a velocidade de impressão e o posicionamento na plataforma de

impressão não afeta a resistência mecânica da peça. Neste estudo foram comparados três materiais rígidos. Os provetes produzidos em FullCure™ apresentaram maior resistência à tração e flexão, seguidos pelo VeroBlue™ e VeroBlack™. Todavia os valores alcançados eram inferiores aos fornecidos pelo fabricante. A rugosidade superficial do FullCure™ é inferior à dos outros dois materiais.

Noutro estudo os autores Jochen Mueller e Shea (2015a) investigaram o efeito da direção de construção tridimensional no módulo de Young e na tensão à compressão. Neste estudo as direções de fabrico foram estabelecidas através de combinações entre os três eixos principais e não ortogonal de acordo com as principais direções x-y-z. Os resultados demonstram que considerando todas as orientações de fabrico, as propriedades das peças produzidas por PolyJet™ em termos de anisotropia são semelhantes as do processo de injeção.

Os autores J. Mueller et al. (2015b) utilizaram métodos estatísticos (DOE) para determinar a influência das orientações de produção no rigor e propriedades mecânicas das peças. Neste trabalho reportaram que os parâmetros que maior impacto tinha nas propriedades mecânicas à tração eram: (i) o número de interseções entre camadas ortogonais à direção de solicitação; (ii) tempo de exposição à luz UV; (iii) posição de produção (i.e., na plataforma) e (iv) data de validade do material. Foi igualmente referido que a geometria das peças é fortemente afetada pelo entupimento dos orifícios de impressão e pela temperatura do equipamento. O tempo de armazenamento pós-produção tem efeitos relativamente pequenos comparativamente a outros fatores, e que a rugosidade não é afetada por nenhum dos parâmetros. Contudo, este trabalho têm em comum com os demais, o fato de só considerarem as três principais direções (i.e., x-y-z).

Noutro trabalho Jochen Mueller, Courty et al. (2017) investigaram a variação das propriedades mecânicas (rigidez) à microescala, em peças mono e multimaterial, através de testes de nano-indentação. Os mono-materiais rígidos e flexíveis exibiram uma altura de camada uniforme e irregular, respetivamente. A dureza e módulo elasticidade em toda a altura de camada exibiu valores uniformes. As propriedades dos multi-materiais (i.e., digitais) investigados demonstraram um comportamento dominante do material em maior percentagem, com inclusões alongadas do material secundário, demonstrando que a mistura é por inclusão de partículas e não ao nível molecular. Como consequência as propriedades globais diferem fortemente das locais. Neste trabalho foi igualmente relatado que as propriedades mecânicas apresentam uma transição suave na interface.

Lumpe et al. (2019), estudaram o comportamento micromecânico à tração da interface de peças multimaterial produzidas por PolyJet™. Neste estudo demonstraram que a resistência da interface entre multimateriais, depende dos parâmetros geométricos de impressão (i.e., orientação das interfaces em relação às direções de produção), e da ligação entre os próprios materiais. A interface entre materiais rígidos e flexíveis tem uma resistência idêntica à do material flexível. Já a interface entre materiais rígidos apresentou uma redução de até 50% em determinadas orientações de produção.

Noutro estudo Meisel et al. (2018) investigaram as propriedades viscoelásticas dos materiais digitais produzidos por PolyJet™, com recurso à Análise Mecânica Dinâmica (*Dynamic Mechanical Analysis* (DMA)). No material digital as propriedades da peça final são semelhantes à concentração do material

dominante. Porém, uma alteração quantificada nos agrupamentos de gotículas do mesmo material no padrão do voxel de cada composto, mostra que é necessário um determinado tamanho geométrico para aproximar com precisão as propriedades da macroescala. Os autores, reportaram igualmente que a composição dos materiais digitais e o padrão do voxel afetam o módulo de armazenamento e perda (*storage and loss module*). Concluíram igualmente que as propriedades dos materiais digitais exibem uma mudança estatisticamente significativa, quando a largura do provete é inferior a 2 mm.

Pugalendhi, Ranganathan e Chandrasekaran (2019) analisaram os efeitos dos modos de impressão (i.e., alta qualidade e alta velocidade) e de acabamento superficial (i.e., mate (*matte*) e brilho (*glossy*)), nas propriedades mecânicas do material VeroClear™. Caracterizaram os provetes através de ensaios mecânicos à tração, flexão e dureza superficial (Shore). Os resultados indicaram que a combinação do modo alta qualidade e brilho apresentou melhores propriedades mecânicas (resistência à tração 49,47 MPa), custo inferior (-14,72 %) e menor tempo de produção (-60,86 %), comparativamente às outras combinações. Esta mesma combinação apresentou para ensaios à flexão 25,83 MPa e 1009,67 MPa para a resistência e o módulo à flexão, respetivamente. Da mesma forma, a dureza Shore D foi de 80,16. Os autores concluíram que o modo alta velocidade e acabamento brilhante eram os melhores parâmetros para processamento do material VeroClear™.

Noutro trabalho Pugalendhi, Ranganathan e Ganesan (2020) caracterizaram os efeitos dos parâmetros de acabamento superficial (i.e., mate (*matte*) e brilho (*glossy*)) do processo PolyJet™ nas propriedades mecânicas (*tração, flexão e dureza superficial*) dos materiais VeroClear™ e VeroWhitePlus™ produzidos em modo digital. Os resultados indicaram que os provetes produzidos com modo brilho apresentavam maior rigidez e dureza. Mais que o material VeroClear™ revelou propriedades mecânicas superiores ao VeroWhitePlus™. O VeroClear™ -brilho apresentou uma tensão à tração de 53,6 MPa, 20,17 % superior ao VeroWhitePlus™ -brilho. Os provetes de VeroWhitePlus™ -mate exibiram uma deformação à rotura de 28,75 %, 33,72 % superior ao VeroClear™ -mate. A resistência à flexão (49,1 MPa) e o módulo de elasticidade à flexão (1352,5 MPa) foram superiores no VeroClear™ -brilho comparativamente ao VeroWhitePlus™ -brilho 28,87 % e 26,37 %, respetivamente. A dureza não apresentou diferenças significativas (0,46 %).

Os autores Kampker et al. (2017) estudaram as interdependências dos diferentes materiais e parâmetros do processo PolyJet™, através de Desenho de Experiências (DOE), na produção de moldes (e.g., termoformação e injeção). Após identificar os requisitos gerais dos moldes de termoformação (i.e., resistência à temperatura, qualidade superficial e dureza), examinaram os diferentes materiais e parâmetros de produção, tais como: (i) orientação da peça; (ii) altura de camada; (iii) modo de impressão (mate e brilho); (iv) distância entre peças; (v) ampliação e redução das peças. A análise multifatorial abrangeu as seguintes propriedades: (i) resistência à tração; (ii) módulo de elasticidade à tração; (iii) resistência à flexão; (iv) deformação última à flexão; (v) rugosidade e (vi) dureza superficial. Este estudo revelou que os provetes produzidos com os parâmetros: (i) altura de camada 30 µm (alta velocidade); (ii) orientação da peça 90°; (iii) pós-tratamento térmico (ABS Ivory™) e (iv) acabamento brilho. Apresentaram melhores

propriedades mecânicas à tração, dureza superficial e rugosidade, comparativamente aos provetes produzidos com altura de camada de 16  $\mu\text{m}$  e modo “alta qualidade”, orientação da peça 0° e acabamento mate.

Reichl e Inman (2017) estudaram as propriedades de Materiais Digitais (MD) produzidos por diferentes percentagens de mistura dos materiais base TangoBlackPlus™ (FLX930) e VeroWhitePlus™ (RGD835). Neste estudo foram caracterizadas as propriedades viscoelásticas pela medição do módulo complexo obtido num ensaio de DMA. O estudo das propriedades mecânicas dinâmicas e térmicas revelou que o módulo de armazenamento e perda do TangoBlackPlus™ apresentou maior variação comparado com o VeroWhitePlus™, DM8430 e DM8420. O módulo complexo não é afetado pela direção de produção.

Mais recentemente, Meng et al. (2020) apresentou um estudo semelhante, no qual caracterizou as propriedades mecânicas à tração (tensão à tração e deformação última) dos materiais, TangoBlackPlus™, VeroWhitePlus™ e materiais compósitos intermédios com diferentes percentagens de mistura. Neste estudo o incremento do teor de VeroWhitePlus™ na mistura, aumenta a resistência à tração e reduz a deformação. Adicionalmente a dureza superficial (Shore A) do material aumenta com a redução da concentração TangoBlackPlus™.

Os autores Beltrán et al. (2015) analisaram a influência de três características (i.e., tamanho, localização e orientação da peça na plataforma) na qualidade dimensional e geométrica de geometrias cilíndricas produzidas por PolyJet™. Neste estudo concluíram que os parâmetros analisados são maioritariamente afetados pelo tamanho e orientação da peça, já a posição na plataforma exerceu menor influência. A qualidade dimensional apresentou forte dependência do parâmetro orientação da peça, a seleção adequada deste parâmetro permite obter erros dimensionais absolutos reduzidos (<5  $\mu\text{m}$ ) nas superfícies internas e externas. A cilíndricidade dependeu maioritariamente do tamanho da peça (diâmetro), sendo o efeito da orientação menos considerável. Além disso, o efeito da orientação da peça no erro geométrico foi menos relevante que no erro dimensional. Como recomendação os autores sugeriram que o eixo de revolução do cilindro deveria ser paralelo ao eixo dos xx. Por último o cilindro produzido, com a orientação ótima obtida no estudo, revelou que o erro de forma de qualquer secção circular transversal dos cilindros apresentou a mesma forma, independentemente do tamanho ou localização. Este efeito foi observado para as superfícies internas e externas.

A influência dos parâmetros de processo e da geometria da peça no rigor dimensional e geométrico das peças produzidas por FDD é aspeto que tem motivado diversos estudos. Alguns investigadores propuseram o uso de peças com detalhes específicos destinadas a comparar quantitativamente (*benchmarking*) as capacidades dos processos de FDD. Os autores Cooke e Soons (2010), Moylan et al. (2014) e Yap et al. (2017) propuseram peças-teste, que pretendiam incorporar a maioria das formas geométricas e dimensões necessárias, para testar a capacidade de diferentes processos e equipamentos de FDD. Alguns estudos comparativos usaram geometrias e detalhes destinados a medir a precisão dimensional e geométrica das peças produzidas por FDD (Childs e Juster, 1994; Fahad e Hopkinson, 2012; Kim e Oh, 2008; Ippolito et al., 1995) e o desempenho dos equipamentos e do processo relativamente à velocidade de produção e eficiência (Kim e Oh, 2008). Outros trabalhos estabelecem a correlação entre geometria

e dimensões nominais (i.e., projeto) com o correspondente toleranciamento dimensional e geométrico das peças reais (Braian et al., 2018; Dantan et al., 2017; Kitsakis et al., 2016; Masood e Rattanawong, 2002; Singh, 2011). Este tema muitas das vezes não é abordado como principal objetivo do estudo, mas como uma necessidade específica de quantificar o rigor e precisão numa aplicação em concreto. Um exemplo é a área da microfluídica (i.e., produção de *microchips*) para a qual foram desenvolvidas peças-teste específicas para avaliar a resolução, precisão e repetibilidade dos equipamentos MJ (Bonyar et al., 2014; J. M. Lee et al., 2016; Macdonald et al., 2017; OConnor et al., 2014; Walczak e Adamski, 2015).

Outro tópico menos estudado, que pode afetar os materiais em serviço e conduzir à sua degradação, é a resistência química dos materiais produzidos por PolyJet™. Os autores Safka et al. (2016) apresentaram um estudo no qual testaram as propriedades mecânicas de vários materiais expostos a diferentes químicos (Tabela 3). Os resultados permitiram concluir que uma propriedade básica dos polímeros, a

Tabela 3: Materiais testados e respetivos ataques químicos. DM material digital (adaptado de Safka et al. (2016)).

Material	Ataque Químico
ABS Digital	Etanol
DM8530	H <sub>2</sub> O
DM9895	HCL
DurusWhite	Clorofórmio
TangoBlack	NaOH
VeroBlack	Solvente U6002
VeroWhite	Benzina

absorção de água foi verificada de forma variável nos materiais testados. Devido a este facto os produtos químicos entraram na estrutura dos materiais, enfraquecendo as forças macromoleculares, originando a redução da resistência à tração e aumento da ductilidade. Outro aspeto observado nos sólidos foi a corrosão química, que conduziu à degradação irreversível do material. Como resultados este estudo confirmou que os compostos químicos que provocaram maior aumento de peso (acetona, solvente U6002 e etanol) das amostras, também foram os que causaram a degradação mais elevada nas amostras testadas. De todos os materiais testados, o TangoBlack™ exibiu uma resistência química zero à acetona. Os materiais digitais (DM8530 e DM9895) apresentaram uma sensibilidade à acetona condicente com a sua composição (i.e., VeroWhite™ + TangoBlack™). O Digital ABS™ apresentou uma resistência química superior, apresentando os melhores resultados de todos os materiais testados, mesmo após as 24 horas de carga química.

Em conclusão, apesar da tecnologia de FDD ser considerada promissora as aplicações industriais ainda são limitadas. Existem diversos desafios que os processos de FDD tem de fazer face para poder alcançar a maturidade e conseqüente confiança necessária ao nível industrial.

Esta Secção apresentou uma revisão da literatura disponível à presente data, de trabalhos realizados

na avaliação da influência dos parâmetros do processo, materiais e geometria dos modelos nas propriedades mecânicas e físicas das peças produzidas por PolyJet™. No Apêndice B é apresentada uma tabela de resumo dos trabalhos mais relevantes acerca da relação entre os parâmetros de processo e as propriedades mecânicas das peças.

As conclusões principais deste estudo são:

1. As limitações e constrangimentos da tecnologia PolyJet™ são tipicamente impostos pelo de processo (i.e., leis físicas, químicas e equipamento) e/ou pelos materiais (i.e., propriedades distintas);
2. Os trabalhos apresentados evidenciam que existe uma relação entre as propriedades das peças (i.e., anisotropia, acabamento superficial, rigor dimensional, resistência à fadiga) e os parâmetros de produção como a orientação, posição de produção, altura de camada e modo de acabamento;
3. Outro aspecto a considerar para além dos parâmetros do processo, são as características geométricas da peça, que podem impor limitações no tamanho mínimo ou comprometer a conformidade com as especificações (e.g., rigor dimensional e geométrico);
4. A generalização de parâmetros retirados de uma experiência em concreto e a sua utilização nouro contexto tem de ser devidamente ponderada, já que a validade dos resultados é limitada a uma combinação específica de geometria, material e parâmetros de processo.

## **2.7 Propriedades mecânicas de polímeros produzidos por Material Jetting**

A utilização de peças produzidas por FDD em aplicações na vida real, requer que a sua resistência em todos os aspetos deva ser semelhante às peças produzidas por processos convencionais (e.g., moldação por injeção), ou àquelas que irá substituir (Dizon et al., 2018). As propriedades mecânicas de componentes produzidos por FDD podem ser afetadas pelo método de produção (e.g., natureza e parâmetros de processamento) e pelas propriedades do material não processado. A natureza do processo de FDD com a produção das peças camada-a-camada, traz alguns problemas que limitam a sua aplicação. Estas questões devem ser abordadas para que as peças produzidas por FDD sejam amplamente adotadas não só para prototipagem, mas para produção de peças finais confiáveis e de alta qualidade (Monzon et al., 2015). Entre outros, a anisotropia das propriedades mecânicas é um dos maiores problemas das peças fabricadas por FDD. Este efeito é mais ou menos evidente consoante o processo. No caso do MJ (PJet) a anisotropia é baixa ( $\approx 2\%$ ) (Kazmer, 2017b). Com efeito, estes valores são baixos porque o volume local é mais densamente preenchido pelas resinas impressas e também porque este processo utiliza energia de cura (polimerização) baixa, promovendo a cura uniforme de todo o volume (Kazmer, 2017b). Uma forma de minimizar o efeito das propriedades mecânicas anisotrópicas é considerar as orientações de fabrico em projeto e na preparação da produção. Sempre que possível em fase de projeto das peças,

devem ser consideradas as cargas/tensões dominantes numa peça com as orientações de fabrico que promovem propriedades mecânicas superiores. Logo, uma peça com bom *design* deve ter boa qualidade com anisotropia mínima (J. Y. Lee et al., 2017).

A Tabela 4 apresenta os materiais poliméricos usados no processo de FDD por MJ. Com base nestes dados, os projetistas podem selecionar o melhor material de acordo com aplicação. Contudo, para aplicações que requerem um maior rigor na observância dos requisitos, deverão ser realizados ensaios complementares de validação das propriedades mecânicas e aplicar as melhores práticas de projeto. Isto é particularmente válido, no caso de materiais de microestrutura celular. As propriedades mecânicas

Tabela 4: Materiais de FDD, processo jato de material Polyjet (adaptado de Kazmer (2017b)).

Fabricante/ Processo	Material	Densidade (g/cm <sup>2</sup> )	Tensão Cedência (MPa)	Módulo Young (GPa)	Deformação Rutura (%)	HDT <sup>a</sup>
Stratasys/Polyjet	FLX973	1,14	2	0,1	50	45
Stratasys/Polyjet	RGD430	1,16	25	1	40	40
Stratasys/Polyjet	RGD810	1,18	50	2,2	10	45
Stratasys/Polyjet	RGD5160	1,17	55	2,6	25	58
Stratasys/Polyjet	RGD525	1,18	70	3,2	10	63

<sup>a</sup> HDT, *Heat Deflection Temperature* ( °C @ 0,45 MPa).

produzidas por FDD variam com os seguintes fatores: (i) material, marca, densidade molecular, qualidade, etc.; (ii) processo empregue; (iii) orientação de produção; (iv) altura de camada; (v) pós-processamento entre outros. De acordo com Dizon et al. (2018), é difícil e complexo prever o comportamento de uma peça sujeita a uma determinada solicitação mecânica. Sendo necessário clarificar certos aspetos pertinentes relativos aos ensaios para determinação das propriedades mecânicas das peças produzidas pelo processo MJ, nomeadamente:

1. Como agregar os diferentes resultados das propriedades mecânicas obtidos com os fatores envolvidos?
2. Deve haver uma norma para cada aplicação?
3. Devem ser consideradas as normas ASTM e ISO (com as devidas precauções) para os materiais e peças produzidas por FDD? Porém, existem muitos casos em que as normas existentes não podem ser aplicadas às peças produzidas por FDD.
4. Deverá haver normas para materiais com geometrias complexas (i.e., materiais com microestrutura celular)? A capacidade do FDD produzir estruturas com geometria complexa é uma das principais razões do aumento da sua aplicabilidade em vários setores de atividade. Com efeito, é fundamental investigar as propriedades mecânicas dos materiais com geometrias complexas.

5. Como classificar a credibilidade dos trabalhos científicos acerca do mesmo tópico mas com resultados distintos? As diferenças nos valores das propriedades reportadas diferem igualmente dos valores disponibilizados pelos fabricantes dos equipamentos e/ou fornecedores dos materiais base.
6. Aferir a qualidade das peças produzidas por FDD, inclusive o rigor dimensional e geométrico. Apesar de já existir a norma ASTM F2971-13 (2021) que cobre os relatórios de dados dos provetes produzidos por FDD e existirem ou estarem em desenvolvimento outras normas relativas à FDD de metais (e.g., (ASTM F3122-14, 2014) e ASTM WK49229), é necessário desenvolver normas semelhantes para polímeros produzidos por FDD.
7. Quais devem ser os valores de referência para as propriedades mecânicas das peças produzidas por FDD? Devem ser considerados os dados das peças produzidas por processos convencionais (e.g., moldação por injeção) como de referência?

Portanto, perante quantidade de incertezas existe a necessidade de caracterizar as propriedades mecânicas, quer dos materiais base quer das topologias otimizadas e aprofundar os limites do equipamento utilizado no contexto deste trabalho, na produção de pequenos detalhes. Neste sentido, no presente trabalho foram realizados ensaios mecânicos com os materiais base (tração e compressão) e nas topologias otimizadas (tração, compressão e corte). Estes tópicos são retomados na Secção 4.6 e Secção 4.7.1 para os caracterização dos materiais base e VRU, respetivamente.

## 2.8 Propriedades mecânicas de materiais celulares

As propriedades dos materiais celulares são definidas por duas categorias de parâmetros. Um conjunto é empregue na definição da estrutura geométrica das células. Neste conjunto, são incluídos o tamanho e forma, que também estão diretamente relacionados com a densidade relativa  $\bar{\rho}$  da estrutura. De facto, a densidade relativa, definida como o quociente entre a densidade do material celular  $\rho$  e a densidade do material sólido (base)  $\rho_0$  (Equação 2.59), é o parâmetro mais importante dos materiais celulares, com o qual qualquer propriedade pode ser relacionada (Lorna J. Gibson e Michael F. Ashby, 1997).

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (2.59)$$

O segundo conjunto de parâmetros descrevem as propriedades do material (ou materiais) sólido que constitui a estrutura. Isto inclui o módulo de Young ( $E$ ), módulo de elasticidade transversal ( $G$ ), coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), tensão de cedência ( $\sigma_{ced}$ ), entre outros. Com efeito, densidade relativa define essencialmente a quantidade de material sólido presente no volume total ocupado pelo material celular. O complemento à densidade relativa é a porosidade, sendo calculada por  $p = 1 - \bar{\rho}$  (L. J. Gibson e M. F. Ashby, 1982; Lorna J. Gibson e Michael F. Ashby, 1997). Ainda que, a densidade relativa seja um conceito importante por si só não é suficiente para caracterizar a morfologia de um material celular. Por

exemplo, VRU com comportamento predominante de flexão ou alongamento terão propriedades mecânicas e mecanismos de falha distintos, inclusive com a mesma densidade relativa (Benedetti et al., 2021). Em suma, o comportamento dos materiais celulares é fortemente influenciado pela sua topologia interna, estas podem ser classificadas de acordo com as suas características.

Um possível critério de classificação, divide as microestruturas tridimensionais em três tipos de fundamentais. As estruturas formadas por elementos tipo barra ou viga (*lattice*), baseados em superfícies mínimas triplamente periódicas (*Triply Periodic Minimal Surface (TPMS)*) e microestruturas otimizadas topologicamente (*density based*). A Figura 25 ilustra os três tipos de microestruturas.

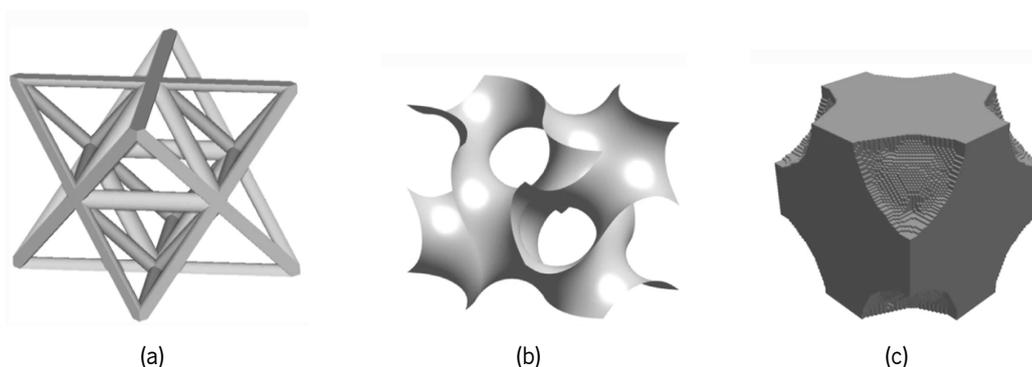


Figura 25: Tipos de células unitárias tridimensionais: (a) estrutura tipo treliça (barra) ou pórtico (viga), (b) superfície mínima triplamente periódica (TPMS) e (c) microestrutura otimizada topologicamente (adaptado de Wu et al. (2021)).

O primeiro tipo, formado por elementos discretos do tipo viga ou barra, são baseados especificamente em prismas triangular, rômbo, hexagonal, dodecaedro rômbo e o tetraedraedro. Adicionalmente, se distorcidos, o tetraedro, o icosaedro e o dodecaedro pentagonal também podem ser empregues como ponto de partida destas microestruturas elementares (M. F. Ashby, 2005). Nestas microestruturas, os nós localizados nos vértices ou arestas ou faces externas (e às vezes também no interior do volume unitário) são conectados por membros retos do tipo barra ou viga. A Figura 25(a) ilustra esta categoria de microestrutura elementar. Baseiam-se sobretudo no volume cúbico elementar (ou célula), no qual o número de nós e elementos é projetado para entregar a densidade e as propriedades mecânicas desejadas. Este tipo de microestruturas pode ser classificado de acordo com o seu comportamento mecânico predominante em estruturas dominadas por flexão ou alongamento. Esta classificação é estabelecida matematicamente pelo critério de Maxwell (Deshpande et al., 2001). Estruturas com comportamento dominante por alongamento são estruturalmente mais eficientes do que estruturas dominadas por flexão dado que os elementos são carregadas quase exclusivamente em tração ou compressão.

O segundo tipo de microestruturas elementares é baseado em TPMS. Esta classe possui propriedades topológicas que as tornam especialmente adequadas para o FDD, em grande parte devido às suas geometrias de superfície curvas contínuas (Bobbert et al., 2017; Maconachie et al., 2019). A Figura 25(b) apresenta um exemplo ilustrativo desta classe. As TPMS são superfícies criadas matematicamente cujas

superfícies não se intercetam nem envolvem. Além disso, podem ser expandida num padrão tridimensional. Existem diferentes formas de TPMS, cuja modelação é obtida a partir de formulação matemática (Al-Ketan et al., 2017). A ausência de nós e pontos de descontinuidade na curvatura desta microestruturas permite reduzir a concentração de tensões (Afshar et al., 2016)

Por último, o terceiro tipo são as microestruturas otimizadas topologicamente. Estas geometrias resultam da aplicação de ferramentas numéricas de OT, as quais permitem maximizar a eficiência da distribuição de material no domínio admissível sujeito a determinadas solicitações e condições de contorno. Esta classe de VRU apresenta maior complexidade no cálculo das propriedades efetivas. No enquadramento do presente trabalho foi considerado esta categoria de microestruturas.

Outra forma de classificação, distingue entre microestruturas de célula-aberta e microestruturas célula-fechadas (permeabilidade). Usualmente, as microestruturas de célula-aberta são aquelas em que o espaço vazio está interligado por um conjunto de elementos esbeltos (barra ou viga), mas também podem ser formadas por superfícies (elementos casca), como giroides (Tamburrino et al., 2018). A Figura 26(a) apresenta uma ilustração de uma célula-aberta tridimensional. Por outro lado, as microestruturas de células-fechadas são aquelas em que o conjunto de elementos consiste em superfícies interligadas que separam os vazios por paredes ou membranas. A Figura 26(b) ilustra um exemplo de uma célula-fechada.

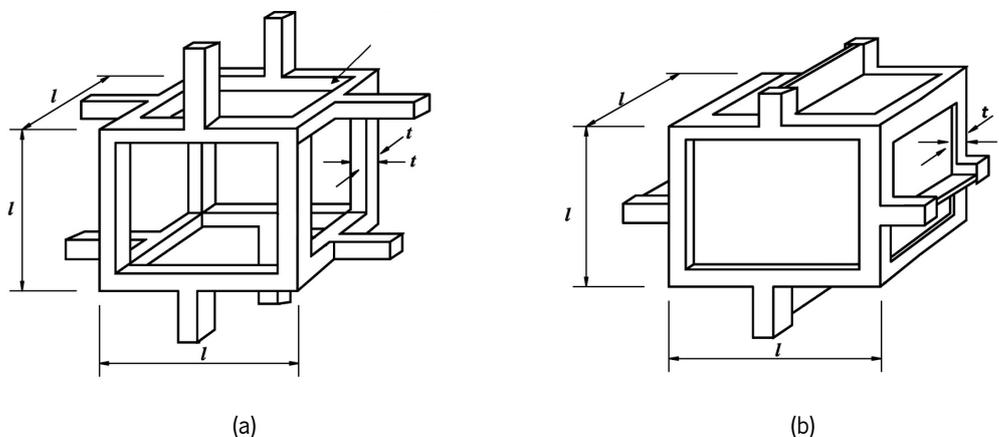


Figura 26: Modelos de células unitárias tridimensionais de Gibson-Ashby: (a) célula-aberta e (b) célula-fechada (adaptado de Lorna J. Gibson e Michael F. Ashby (1997)).

O estudo do comportamento dos materiais celulares é um tópico de grande interesse atual. Diversos trabalhos desenvolveram estudos numéricos e experimentais para determinar as propriedades mecânicas e mecanismos de deformação destes materiais. A Figura 27 ilustra as curvas de tensão-deformação do comportamento mecânico dos materiais celulares à compressão. As curvas podem ser divididas em três partes: (i) regime elástico linear até que as elementos cedam devido à flexão ou alongamento, (ii) patamar durante o qual as células começam a entrar em colapso progressivamente devido à encurvadura e

(iii) esmagamento frágil ou dúctil dependendo do tipo de material base e morfologia, corresponde ao colapso das células uma contra a outra. As curvas tensão-deformação das estruturas com comportamento predominante de alongamento são geralmente caracterizadas por maior rigidez inicial e resistência à tração (antes da primeira cedência) do que estruturas com comportamento predominante de flexão com a mesma densidade relativa (Benedetti et al., 2021). Além disso, após a cedência é visível o amaciamento (relaxamento da tensão), devido ao rompimento súbito por encurvadura ou esmagamento frágil de uma camada de células, sendo o patamar subsequente constituído por picos e vales que indicam a rutura progressiva das camadas. Assim, as estruturas dominadas por alongamento são, portanto, mais eficientes estruturalmente, mas estão sujeitas a falhas repentinas e não são eficazes na dissipação de energia de deformação. Por outro lado, as estruturas dominadas por flexão são mais flexíveis, têm uma transição mais progressiva para o patamar de tensões devido à flexão dos elementos e possuem um patamar relativamente plano (M. F. Ashby, 2005; Benedetti et al., 2021).

Os autores Lorna J. Gibson e Michael F. Ashby (1997) estabeleceram pela primeira vez modelos de previsão das constantes elásticas efetivas e tensão de cedência, para microestruturas de célula-fechada bidimensionais e tridimensionais. Nestes modelos, eram assumido que os elementos e as paredes dos elementos tinham comportamento de viga Euler-Bernoulli. As constantes elásticas foram calculadas a partir das tensões e deformações produzidas pela aplicação de cargas uniformes na célula unitária. Além disso, foi observado que é possível correlacionar o módulo de Young  $E$ , módulo de elasticidade transversal e a tensão de cedência  $\sigma_{ced}$  da microestrutura com a sua densidade relativa  $\bar{\rho}$  na forma de leis de potencia, a saber:

$$\frac{E}{E_0} = C_1 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n = C_1 \bar{\rho}^n \quad (2.60)$$

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_{y0}} = C_2 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^m = C_2 \bar{\rho}^m \quad (2.61)$$

Em que  $\sigma_{y0}$  e  $E_0$  são a tensão de cedência e o módulo de elasticidade do material base e  $C_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $m$  e  $n$  são constantes que dependem do tipo de célula unitária e podem ser determinadas teoricamente ou ajustando aos dados experimentais (Yan et al., 2014). Particularmente,  $n$  ( $m$ ) são igual a 1; (1) numa microestrutura com comportamento predeterminante de alongamento e de 2; ( $\frac{3}{2}$ ) numa microestrutura comportamento ideal predominante à flexão. Os materiais microestruturados apresentam uma tendência crescente de desvio do módulo de Young e tensão de cedência entre os dados experimentais e os modelos de previsão do comportamento com o aumento da densidade relativa. Esta confirmação experimental pode estar relacionada com os defeitos geométricos da microestrutura real ocorridos na sua fabricação e que podem provocar desalinhamentos em relação aos eixos das cargas, ou mesmo concentração de tensões, entre outros (Ghouse et al., 2018).

De facto, vários estudos comparativos mostram que as equações de forma fechada baseadas na teoria das vigas possui limitações, causadas pelas simplificações assumidas na modelação da geometria dos elementos e pela dificuldade da teoria clássica do elemento viga em considerar com precisão o estado de tensão-deformação nas concentrações de tensões (e.g., nos nós) (Benedetti et al., 2021). Uma

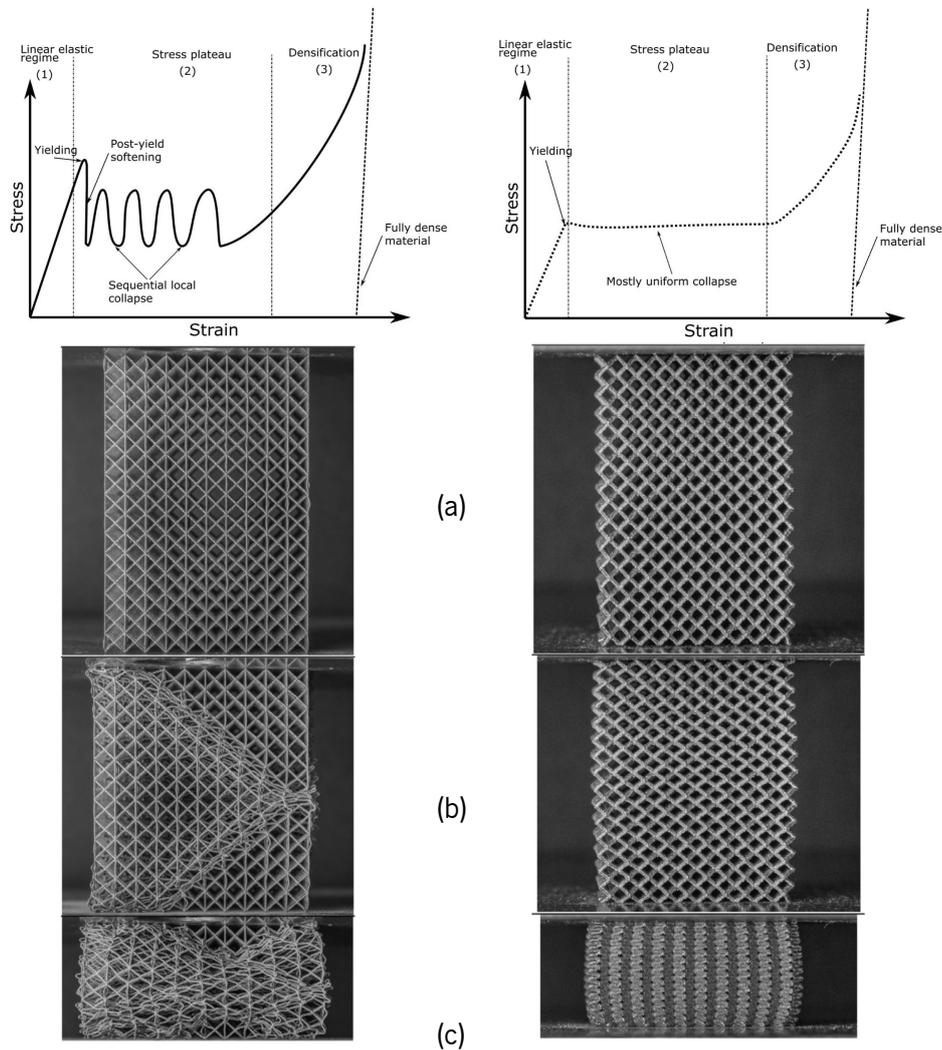


Figura 27: Curvas de tensão-tensão à compressão típicas para materiais celulares dominados por flexão (esquerda) e alongamento (direita) com a mesma densidade relativa. (a) regime elástico linear; (b) Pata-mar de tensão pós-cedência; (c) densificação (adaptado de Benedetti et al. (2021) e Leary (2018)).

forma de superar estas limitações, é através de abordagens de modelação numérica, como os métodos de homogeneização (Dong et al., 2017). No enquadramento do presente trabalho foi implementada a homogeneização computacional para determinar as propriedades efetivas dos VRU (vd. Secção 2.4 do presente Capítulo e Secção 3.1.2 do Capítulo 3). Na Secção seguinte é introduzido de forma sumária um estudo de avaliação do rigor dimensional e geométrico de pequenos detalhes produzidos por MJ - PJet.

## 2.9 Mínimo detalhe de impressão

A tecnologia FDD vem aumentando a sua aceitação não só para a produção de protótipos e modelos de validação, mas também para peças finais. Essa tecnologia permite produzir peças quase sem restrições

de geometria, mesmo em microescala. No entanto, a medição de Micro-detelhe (mD) de peças complexas permanece um campo aberto de investigação. Para poder desenvolver todo o potencial que esta tecnologia oferece, é necessário quantificar as limitações de precisão, repetibilidade e reprodutibilidade do processo. Novas metodologias de projeto baseadas na otimização, concebem peças microestruturadas com uma distribuição de material complexa. Com efeito, muitas destas metodologias são baseadas em formulações matemáticas, cujos modelos numéricos pressupõem a discretização do modelo por meio de VRU com dimensões e geometrias explícitas. A precisão desses modelos em prever o comportamento dos materiais e peças é influenciada pela fidelidade da reprodução física do objeto. Apesar do processo MJ possibilitar a produção de peças complexas, é fundamental estabelecer experimentalmente os limites dimensionais e geométricos mínimos para a produção de peças com mD (Silva, Pereira et al., 2021).

A adoção afetiva de processos de FDD requer, em primeiro lugar, juntamente com a caracterização das propriedades das peças produzidas, o conhecimento da capacidade de processamento (i.e., os limites). Podemos considerar a resolução máxima do processo um limite inferior para a produção de mD. Do ponto de vista prático, a resolução indicada pelos fabricantes dos equipamentos e FDD refere-se à quantidade mínima de material que o processo permite na fabricação, sem, no entanto, indicar a sua geometria, que depende da natureza do processo (e.g., não é um cubo ou cuboide perfeito) (Vaezi et al., 2013b; Lifton et al., 2014). Por outro lado, a quantidade mínima de material a ser depositada tem um tamanho finito, portanto, quanto menores os detalhes a serem produzidos, maiores os desvios (i.e., maiores ou menores) são (W. Liu et al., 1998). Outro aspeto a considerar são os erros de pré-processamento que ocorrem ao converter um modelo sólido em ficheiros de produção camada-a-camada (fatiamento), que inevitavelmente são o resultado de aproximações (por exemplo, formato .stl). A soma desses erros locais (ou seja, erros por camada) traduzem-se em erros globais (W. Liu et al., 1998). Assim, considerando que essas características influenciam a produção de peças com mD, assume-se ser relevante quantificar experimentalmente os desvios geométricos e dimensionais que ocorrem na sua produção (Silva, Pereira et al., 2021).

No contexto deste trabalho foi desenvolvido um estudo com o intuito de suportar a tomada de decisão na seleção da escala mais adequada para a produção de peças discretizadas por malhas hexaédricas (cubos). Este estudo avaliou a precisão dimensional e geométrica de equipamentos MJ - PJet na produção de mD (cubos) comparando as dimensões reais com as nominais de projeto tendo resultado num artigo científico com o título “Assessment of the Dimensional and Geometric Precision of Micro-Details Produced by Material Jetting” (vd. lista de publicações no Apêndice D).

## 2.10 Ligações cinemáticas

Os materiais com microestrutura celular periódica permitem grande flexibilidade na gama de propriedades possíveis. Os materiais naturais serviram de inspiração/base para a conceção de novos materiais artificiais com propriedades de gradiente funcional. Nesta classe de materiais as propriedades físicas

variam gradualmente numa ou em várias direções (Cadman et al., 2012). Atualmente, existe uma tendência na utilização de métodos de OT, na concepção destes materiais (Cadman et al., 2012; Radman et al., 2012b; Radman et al., 2012a). Porém, a falta de continuidade entre VRU adjacentes é uma limitação às potenciais combinações possíveis alcançar. Este problema pode ser resolvido usando ligações cinemáticas, que por definição são elementos sólidos colocados na mesma localização da fronteira correspondente entre dois VRU adjacentes. Para que uma peça possa ser produzida é obrigatório garantir a ligação das regiões sólidas entre as microestruturas adjacentes (ligações cinemáticas), assegurando que as regiões sólidas da fronteira entre VRU contíguos são minimamente coincidentes.

No âmbito do presente trabalho foi realizado um estudo de geração de ligações cinemáticas entre VRU adjacentes, através da imposição de restrições de densidade local (i.e., nucleação) nas soluções iniciais de VRU topologicamente otimizadas. Neste estudo são apresentados diversos exemplos de ligações cinemáticas para dois tipos de VRU otimizadas a solicitações hidroestáticas e de corte, com diferentes restrições de volume. Neste estudo foram igualmente realizados ensaios experimentais de compressão em materiais graduados obtidos a partir do VRU otimizadas e os resultados do módulo de Young experimental comparados com os obtidos numericamente. Este estudo resultou num artigo científico com o título “Design of Kinematic Connectors for Microstructured Materials Produced by Additive Manufacturing” (vd. lista de publicações no Apêndice D).

## Processos e Métodos

*Apresentam-se os processos e métodos das ferramentas de OT de materiais de microestrutura periódica pertinentes no enquadramento do presente trabalho. Define-se a parametrização, formulação e os métodos de resolução do problema de OT estrutural. Abordam-se as instabilidades numéricas típicas em OT e as metodologias aplicadas no seu controlo. Descreve-se os conceitos fundamentais da homogeneização computacional direta e os pormenores da sua implementação. Descreve-se igualmente as metodologias empregues nos ensaios de desempenho, na computação de bibliotecas de microestruturas e no seu pós-processamento. Apresentam-se as normas de caracterização experimental. Por último, apresenta-se os materiais utilizados, descreve-se os diferentes métodos e ensaios de caracterização experimental.*

### **3.1 Componente computacional**

Os métodos para alcançar soluções ótimas para um problema em engenharia são diversos. As abordagens unicamente analíticas são diretamente dependentes de métodos de análise matemática. Este facto implica demasiada complexidade ou mesmo tornar intratáveis muitos problemas de engenharia. Efetivamente, as abordagens convencionais de OT, centram-se em conhecimentos empíricos ou em estudos parametrizados (e.g., simulação numérica). Por outro lado, nos materiais heterogêneos com microestrutura interna complexa as propriedades mecânicas podem ser difíceis de calcular com os métodos de previsão analíticos.

Os avanços na área da mecânica computacional, têm alavancado o desenvolvimento e a disponibilidade de ferramentas de OT e de homogeneização mais integrais e eficientes. Com o aumento da dimensão e complexidade dos problemas, as ferramentas computacionais contribuem na redução significativa do tempo de processamento. Além disso, oferecem mais garantias de obtenção de soluções ótimas e de propriedades efetivas mais aproximadas das experimentais, no caso da OT e da Homogeneização Computacional Direta (HCD), respetivamente.

Nas secções seguintes, enuncia-se o problema de máxima rigidez (mínima flexibilidade). Descreve-se sumariamente o método SIMP e a sua parametrização, com base no contexto deste trabalho. Apresentam-se os principais algoritmos de OT de estruturas com variáveis contínuas e da abordagem de HCD. Descreve-se a implementação das ferramentas computacionais OT e HCD.

### 3.1.1 Implementação das ferramentas computacionais

Alguns dos objetivos do presente trabalho têm por base o desenvolvimento de ferramentas computacionais de OT e de HP. Neste sentido, foi necessário desenvolver diferentes módulos de cálculo para dar resposta aos objetivos definidos. Além disso, como ambas as ferramentas computacionais (i.e., OT e HP) utilizam o MEF a opção recaiu na utilização de um programa comercial de *Computer Aided Engineering* (CAE)/MEF para executar as tarefas específicas do MEF (e.g., criação do VRU, definição das condições de fronteira, solicitações e malha). Assim, no contexto deste trabalho foi escolhido o programa comercial AbaqusCAE6.14-1 e a linguagem de programação orientada a objetos Python (Van Rossum e Drake, 2020) para aplicação do MEF e desenvolvimento dos módulos de cálculo, respetivamente. Na escolha desta associação pesou o facto por um lado da possibilidade de utilização de uma única linguagem de programação (já que o Abaqus interpreta comandos em linguagem Python) e das vantagens da utilização de *scripts*<sup>1</sup>.

O uso da interface gráfica do utilizador *Graphical User Interface* (GUI) do AbaqusCAE6.14-1 para criar um modelo e visualizar os resultados, emite comandos internos após cada operação. Sendo que, estas instruções expressas em Python refletem a geometria e as opções selecionadas através das caixas de diálogo. Estes comandos, são enviados ao *kernel* do Abaqus, que interpreta e usa as opções e configurações para criar uma representação interna do modelo (Puri, 2011). O Abaqus possui uma interface de *script Abaqus Scripting Interface* (ASI) que permite comunicar diretamente com o *kernel* contornando o uso da GUI. A utilização de *scripts* têm as seguintes vantagens:

- automatização de tarefas repetitivas (e.g., para gerar bibliotecas de materiais, criação de listas de ordens remotas para execução de tarefas de análise);
- realização de estudos paramétricos (e.g., *script* que modifica incrementalmente a geometria de uma peça, analisa e exibe os dados do modelo resultante);
- criação e modificação dos modelos;
- acesso aos dados resultantes das análises (e.g., gravar ou realizar de operações de pós-processamento dos resultados da análise).

---

<sup>1</sup>Podem ser definidos como pequenos programas que automatizam a interação manual com o computador. A partir de uma interface e utilização, o *script* extrai informações e gera ficheiros de entrada para um programa de simulação, executa o programa, guarda ficheiros de dados, prepara a entrada para um programa de visualização, cria gráficos e animações e executa análise de dados (Puri, 2011).

Portanto, a ASI é um extensão da linguagem Python, que em geral emprega a sintaxe e os operadores requeridos pelo Python. Uma vantagem adicional da utilização de *scripts* reside no facto do utilizador poder guardar toda a simulação na forma de um pequeno ficheiro de texto legível com apenas alguns kB de tamanho. A partir deste ficheiro é possível redefinir a geometria da peça, aplicar materiais, cargas, condições de fronteira, executar a simulação e extrair os resultados.

### 3.1.1.1 Formulação do problema

A OT de estruturas contínuas pode ser definida como um problema de distribuição ótima de material num domínio admissível. Sendo que, as únicas grandezas conhecidas do problema, são as cargas aplicadas, as condições fronteira (*i.e.*, apoios), o volume da estrutura, e eventualmente outras restrições adicionais, como a localização e o tamanho dos furos ou regiões sólidas. Em contraste, neste problema são desconhecidos o tamanho físico, forma e a conectividade da estrutura. Considerando um corpo representado pelo domínio  $\Omega^{mat}$  contido num domínio admissível maior  $\Omega$  em  $R^2$  ou  $R^3$ , e que o domínio admissível  $\Omega$  é escolhido de modo a permitir aplicação de cargas e definição das condições fronteira, o problema de otimização pode ser definido com encontrar o tensor de rigidez  $E_{ijkl}$  ótimo, que é uma variável sobre o domínio admissível  $\Omega$ .

Alguns dos algoritmos mais usados em OT, são baseados na minimização da flexibilidade (*i.e.*, maximizar a rigidez). Usualmente referido como a minimização da energia de deformação  $S$  ou flexibilidade (*compliance*). Como  $rigidez \propto \frac{1}{flexibilidade}$ , minimizar a flexibilidade maximiza a rigidez. Define-se o problema de minimização da flexibilidade na forma típica de programação matemática em que a Equação 3.1 representa o trabalho virtual interno de um corpo elástico em equilíbrio  $u$  para um deslocamento virtual aleatório  $v$ , escrita na forma de formulação variacional fraca.

$$a(u, v) = \int_{\Omega} E_{ijkl}(x) \epsilon_{ij}(u) \epsilon_{kl}(v) d\Omega \quad (3.1)$$

Com a linearização dos deslocamentos dado por  $\epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$  e as cargas escritas na forma linear como  $l(u) = \int_{\Omega} f u d\Omega + \int_{\Gamma_T} t u ds$ , com o problema de minimização da flexibilidade na forma dado pela Expressão 3.2.

$$\begin{cases} \min_{u \in U, E} l(u) \\ \text{suj. a } a_E(u, v) = l(v), \forall v \in U \\ E \in E_{ad} \end{cases} \quad (3.2)$$

Em que a equação de equilíbrio é expressa na forma de variacional fraca, em que  $U$  são o campos de deslocamento cinematicamente admissíveis,  $f$  representa as forças internas do corpo e  $t$  as forças de tração da fronteira aplicadas na região  $\Gamma_T \subset \Gamma \equiv \partial\Omega$  da fronteira. De notar que o índice  $E$  indica que a forma bilinear  $a_E$  é dependente das variáveis de projeto.

No Problema 3.2,  $E_{ad}$  indica o conjunto de tensores de rigidez admissíveis para o problema de minimização da flexibilidade. Considerando o caso de OT,  $E_{ad}$  poderia, por exemplo, representar todos os

tensores de rigidez de materiais com as mesmas propriedades de um determinado material isotrópico do domínio (desconhecido)  $\Omega^{mat}$  e propriedades nulas no restante domínio, sendo as fronteiras do domínio expressas por  $\int_{\Omega^{mat}} \mathbf{1} d\Omega \leq V$ . Uma vez que,  $E_{ad}$  pode ser definida de diferentes formas são, necessários algoritmos de otimização distintos. Na secção seguinte são apresentadas diversas definições possíveis de  $E_{ad}$ .

Uma abordagem típica, na resolução do problema de otimização enunciado na Expressão 3.2 por meios computacionais consiste em discretizar o domínio admissível em elementos finitos. De notar que, existem dois campos de interesse na Expressão 3.2, o deslocamento  $\mathbf{u}$  e a rigidez  $E$ . Desde que, seja usada a mesma malha de elementos finitos nos dois campos, e  $E$  seja discretizado como constante em cada elemento, a Expressão 3.2 pode ser reescrita na forma discreta como:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{u}, E_e} & \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{K}(E_e) \mathbf{u} = \mathbf{f} \\ & E_e \in E_{ad} \end{cases} \quad (3.3)$$

Em que  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{f}$  são os vetores de deslocamento e forças, respetivamente. A matriz  $K$  depende da rigidez  $E_e$  do elemento  $e$ , com  $e = 1, \dots, N$ , a matriz  $K$  pode ser reescrita na forma

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^N \mathbf{K}_e(E_e) \quad (3.4)$$

em que  $\mathbf{K}_e$  representa a matriz de rigidez do elemento em coordenadas globais.

### 3.1.1.2 Parametização do problema

Num problema de OT estrutural, o objetivo primordial é a determinação do posicionamento ótimo de um dado material isotrópico num determinado domínio admissível, isto é, determinar quais os pontos no espaço que devem ser preenchidos por material e quais devem permanecer vazios (i.e. sem material). Ou seja, a representação geométrica de uma estrutura assemelha-se à representação de uma imagem a preto e branco. Logo, considerando na forma discreta, corresponde a um mapa de bits (*bitmap* ou *raster*) preto-branco da geometria, com os pixels ou voxels dados pela discretização de elementos finitos.

Restringindo o domínio espacial ao domínio admissível  $\Omega$  de referência, o problema traduz-se em determinar os pontos de material do subconjunto ótimo de  $\Omega^{mat}$ . Assim, para o problema de otimização definido anteriormente, esta abordagem implica que o conjunto  $E_{ad}$  de tensores de rigidez admissíveis consiste naqueles tensores para os quais:

$$E_{ijkl} = \mathbf{1}_{\Omega^{mat}} E_{ijkl}^0, \quad \mathbf{1}_{\Omega^{mat}} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega^{mat}, \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega^{mat} \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{1}_{\Omega^{mat}} d\Omega = \text{Vol}(\Omega^{mat}) \leq V$$

Na Expressão 3.5 só são considerados materiais isotrópicos, já que para materiais anisotrópicos as direções do material também deverão ser consideradas como variáveis de projeto. Em que a última desigualdade expressa um limite  $V$  de quantidade de material disponível, de modo que o problema de flexibilidade mínima seja para um determinado volume limitado (fixo). Em que  $E_{ijkl}^0$  representa o tensor de rigidez do material isotrópico considerado, sendo usualmente escrito como  $E_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$  para indicar a importância da função-espaço no problema. Observe-se ainda que, a definição de  $E_{ad}$  significa que o problema distribuído está formulado com variáveis discretas (i.e., um problema 0/1). O procedimento mais comum usado na resolução deste problema, é substituir as variáveis inteiras por variáveis contínuas (transformar num problema contínuo) e, em seguida, introduzir alguma forma de penalidade que direcione a solução para valores discretos 0/1. Deste modo, o problema de OT para o domínio fixo é então formulado como um problema de dimensionamento modificando a matriz de rigidez para que dependa continuamente de uma função que é interpretada como uma densidade do material (Martin P. Bendsøe, 1989; Rozvany et al., 1995). Assim, a variável do problema é esta função. O requisito do problema é obter uma solução que consista quase inteiramente em regiões de material ou vazias. Logo, os valores intermédios desta função de densidade artificial, devem ser penalizados de maneira análoga a outras aproximações de problemas de otimização contínuos (problemas 0-1). Uma metodologia muito popular e extremamente eficiente é a chamada SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), enunciada pela Expressão 3.6.

$$\begin{aligned} E_{ijkl}(x) &= \rho(x)^p E_{ijkl}^0, \quad p > 1, \\ \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega &\leq V; \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (3.6)$$

Em que a densidade intermédia  $\rho(x)$  é função do problema e  $E_{ijkl}^0$  representa as propriedades de um determinado material isotrópico. É referida  $\rho$  como uma densidade do material, pelo facto de que o volume da estrutura é avaliado como  $\int_{\Omega} \rho(x) d\Omega$ .

A densidade interpola entre as propriedades do material 0 e  $E_{ijkl}^0$ , dada pela Expressão 3.7.

$$E_{ijkl}(\rho = 0) = 0, \quad E_{ijkl}(\rho = 1) = E_{ijkl}^0 \quad (3.7)$$

Portanto, se a solução final do problema apresentar densidade um ou zero em todos os pontos (i.e., solução preto e branco), significa que o seu desempenho foi avaliado com um modelo físico correto. No método SIMP a opção de utilizar  $p > 1$  obriga a que as densidades intermédias sejam desfavoráveis (penaliza) no sentido que a rigidez obtida é pequena relativamente ao custo (volume) do material. Ou seja, ao especificar um valor de  $p$  maior que um torna-se “antieconómico” ter densidades intermédias na solução final. Assim, a penalização é alcançada sem recurso a qualquer esquema de penalização explícito. No caso de problemas onde a restrição de volume está ativa, a prática mostra que a otimização de facto resulta em soluções binárias, se o parâmetro  $p \geq 3$ . Além disso, no caso de problemas de flexibilidade mínima na forma discreta (Problema 3.3) é facto provado que para  $p$  suficientemente grande existe uma solução ótima global na forma 0/1, desde que a restrição de volume seja compatível com

o problema (Martin P. Bendsøe e Ole Sigmund, 2004; Rietz, 2001). O problema binário (0/1) original é definido num domínio de referência fixo. Esta condição em conjunto com o esquema de interpolação SIMP, significa que o problema de OT ótima assume a forma de um problema de dimensionamento típico num domínio fixo.

É comum questionar, se o modelo SIMP pode ser interpretado em termos físicos. Isto é, se é possível seleccionar um material que corresponda ao modelo da interpolação. A comparação do esquema de interpolação SIMP com modelos micromecânicos é benéfica para a compreensão da natureza das densidades intermédias (medidas computacionais). Caso um esquema numérico conduza a soluções binárias (preto e branco), pode-se, em essência, optar por ignorar a relevância física das etapas intermédias que podem incluir outros valores (i.e., cinza). Contudo, frequentemente é levantada a questão da relevância física dos valores intermédios da densidade, principalmente porque a maioria dos algoritmos computacionais produzem soluções não isentas de densidades intermédias (cinza). Além disso, a interpretação física de todas as soluções admissíveis desempenha um papel na análise dos resultados de uma solução que não convergiu totalmente para uma solução 0/1. Assim, o modelo SIMP pode ser considerado um modelo de material se o expoente  $p$  satisfizer a Inequação 3.8.

$$\begin{aligned}
 p &\geq \max \left\{ \frac{2}{1 - \nu^0}, \frac{4}{1 + \nu^0} \right\} && \text{(em 2D),} \\
 p &\geq \max \left\{ 15 \frac{1 - \nu^0}{7 - 5\nu^0}, \frac{3}{2} \frac{1 - \nu^0}{1 - 2\nu^0} \right\} && \text{(em 3D)}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Onde  $\nu^0$  é o coeficiente de Poisson do material base com o tensor de rigidez  $E_{ijkl}^0$ . Considerando três dimensões (sólido), o menor ( $p$ ) admissível é 2, mas para  $\nu^0 = 1/3$  deve-se considerar  $p$  maior que 3 (M. P. Bendsøe e O. Sigmund, 1999). A Figura 28 representa a função SIMP para diferentes valores de penalidade. A utilização do esquema de interpolação SIMP permite converter o problema original de OT (i.e., de dados inteiros) num problema de dimensionamento, que para fins práticos normalmente se traduz em soluções 0/1. Apesar do sucesso do método SIMP, em grande parte devido à sua eficiência e compacidade, duas desvantagens principais afetam esta abordagem falta de existência de soluções e dependência de malha (O. Sigmund e Petersson, 1998). Estes aspetos relacionados com instabilidades numéricas e problemas de convergência serão abordados na Secção 3.1.1.5.

### 3.1.1.3 Formulações alternativas do problema

O Problema geral definido em 3.2 pode ser formulado de diversas formas equivalentes. Essas formulações utilizam a estrutura base do problema de flexibilidade mínima e contribuem definitivamente para a análise e desenvolvimento dos procedimentos computacionais dedicados para a resolução deste tipo de problema. Assim, a condição de equilíbrio do problema de OT pode ser formulado em termos do principio de energia potencial mínima. Isto é, o campo de deslocamentos  $u$  é um minimizador do funcional  $F(v) = \frac{1}{2} a_{\bar{E}}(v, v) - l(v)$  em  $U$  (a energia potencial total do sistema). O valor de  $f(u)$  da energia potencial em equilíbrio é igual a  $-\frac{1}{2} l(u) < 0$ . Logo, o Problema geral 3.2 pode ser reformulado pela

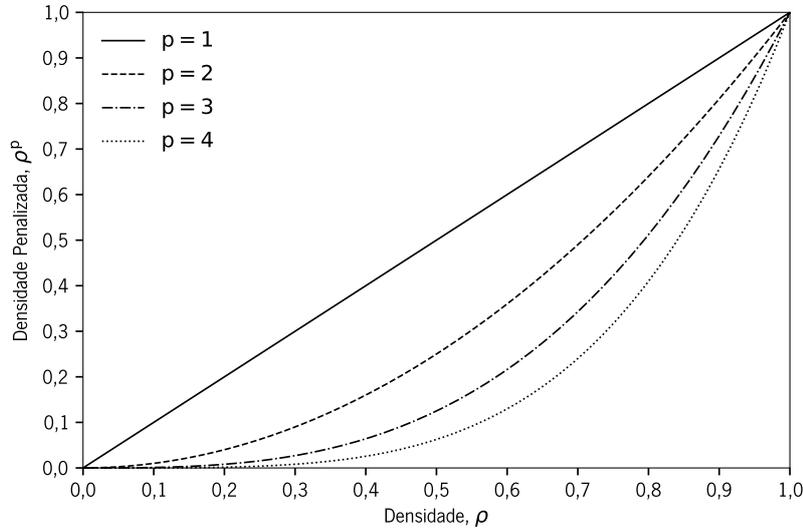


Figura 28: Função de penalização SIMP para diferentes penalidades ( $p$ ).

Expressão 3.9.

$$\max_{E \in E_{ad}} \min_{u \in U} \left\{ \frac{1}{2} a_E(u, u) - l(u) \right\} \quad (3.9)$$

O Problema 3.9 também pode ser formulado em termos de tensões. Desta forma, o problema de equilíbrio interno é expresso em termos do princípio (dual) da mínima energia complementar, dado pela Expressão 3.10.

$$\max_{E \in E_{ad}} \min_{\sigma \in S} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} d\Omega \right\} \quad (3.10)$$

Em que  $C_{ijkl} = (E^{-1})_{ijkl}$  é o tensor de flexibilidade, sendo a minimização em relação às tensões  $\sigma$  é assumida sobre o conjunto  $S$  dos campos de tensão estaticamente admissíveis, i.e.,

$$S = \{ \sigma \mid \operatorname{div} \sigma + f = 0 \text{ em } \Omega, \sigma \cdot n = t \text{ em } \Gamma_T \}. \quad (3.11)$$

A partir do enunciado da Expressão 3.9, é possível concluir que se o campo de deslocamentos de uma solução ótima for conhecido, então a distribuição ótima da rigidez é tal que a energia de deformação é maximizada. De forma idêntica, na Expressão alternativa 3.10 caso a distribuição de tensões numa estrutura ótima seja conhecida, a energia complementar é minimizada. A importância destes aspetos, para o entendimento do problema, quer do ponto de vista teórico como computacional (Martin P. Bendsøe e Ole Sigmund, 2004).

Em relação aos esquemas numéricos e à aplicação da OT em estruturas contínuas, o trabalho de Bendsøe e Kikuchi (1988) introduziu o método de homogeneização. Posteriormente, viria a ser usado amplamente por G. Allaire e Francfort (1993). Uma perspetiva histórica mais detalhada acerca do método de homogeneização pode ser consultada em Grégoire Allaire (2002). O conceito basilar do método de

homogeneização é otimizar a distribuição do material num domínio discretizado  $\Omega$  e descrever a geometria de cada célula unitária através de um pequeno número de parâmetros (i.e., tamanho, orientação e posição). O controlo do número e tamanho de orifícios numa célula unitária, permite atribuir a densidade a um material sólido. O método de homogeneização fornece a base teórica para determinar as propriedades mecânicas efetivas nestas células unitárias, quando o material heterogéneo é substituído por uma descrição média local (i.e., material homogeneizado). Este método pertence ao grupo dos métodos de densidade, já que a densidade do material é empregue como uma das variáveis de otimização. Para alcançar uma solução do tipo 0/1 é necessário aplicar uma penalização, para evitar as densidades intermédias na solução ótima. Este facto está na origem da variante simplificada o método SIMP (Martin P. Bendsøe, 1989), que é bastante popular em OT. Contrariamente ao método de homogeneização, o SIMP não considera a informação da geometria e apenas preserva a densidade do material como a única variável no processo de otimização. Para forçar uma solução 0/1 este método penaliza das densidades intermédias (Martin P. Bendsøe e Ole Sigmund, 2004).

Outras abordagens discretas transformam as técnicas baseadas na densidade em problemas de atribuição de valores discretos (0/1) na discretização do domínio admissível  $\Omega$ . Exemplos deste métodos são o *Bi-directional Evolutionary Structural Optimisation* (BESO) (Querin et al., 1998) e o seu predecessor *Evolutionary Structural Optimisation* (ESO) (Y. M. Xie e Steven, 1993), que empregam algoritmos evolutivos na atualização das variáveis discretas do problema. Nestes métodos, ao contrário dos métodos baseados em gradientes, habitualmente é necessário avaliar inúmeras vezes a função objetivo (i.e., resolver a equação de equilíbrio do MEF), o que pode penalizar o tempo de processamento computacional. Para detalhes e comparação entre as duas abordagens consultar Ole Sigmund e Maute (2013).

O método de *Level-Set Methods* (LSM) é um método de OT baseado em fronteiras. O LSM em vez de empregar a densidade do material como variável do problema de otimização, deriva as densidades do material implicitamente através de uma função de elevada ordem  $\psi$ . Esta função define os limites que constituem a fronteira entre a densidade 1 para  $\psi(x) < 0$  e 0 para  $\psi > 0$ , de modo que o isovalor zero da função LSM traduza o limite da estrutura (J. Chen et al., 2007). Usualmente, é utilizada uma combinação de funções básicas para representar a distribuição das sensibilidades de um material. Assim, o limite (fronteira) do material é descrito por um determinado valor limite de sensibilidade. Estes limites são transformados iterativamente pelo ajuste do limite de sensibilidade e resolvendo até alcançar a solução ótima. A nova geometria é transposta para o modelo mecânico (e.g., por meio de uma nova malha ou sobrepondo o limite na malha existente). Como os LSM permitem a interseção dos limites, as regiões de densidade zero de uma estrutura (furos) podem ser eliminados, mas não criados. Desta forma, a OT é dependente das soluções iniciais (i.e., estimativa inicial) sobretudo em problemas bidimensionais. Contrariamente aos métodos de densidade, o LSM permite uma maior definição das fronteiras e não ocorrem problemas de (*checkerboards*<sup>2</sup>). Porém, apresentam desvantagens, em especial por exigirem

---

<sup>2</sup>O termo *checkerboard* refere-se à formação de regiões de alternância de elementos sólidos e vazios ordenados semelhante a um tabuleiro de xadrez que ocorre no decorrer do processo de otimização topológica e está relacionado com a discretização do problema contínuo original.

uma otimização numérica mais desafiadora, que requer a utilização de técnicas de regularização (Dijk et al., 2013).

### 3.1.1.4 Métodos de resolução

A utilização do método de interpolação SIMP, possibilita a conversão do problema de OT num problema de dimensionamento num domínio fixo. Contudo, comparado com outros problemas de dimensionamento, este método difere no número de variáveis de problema, que tipicamente é muito grande, mais, o número de análise das variáveis é da mesma ordem de magnitude (M. P. Bendsøe e O. Sigmund, 1999). Por conseguinte, é usualmente necessário adotar configurações de otimização que possibilitam trocar o número de restrições pelo número de variáveis de problema, com vista à melhoria da eficiência do procedimento de otimização. Como exemplo disso, o problema de mínima flexibilidade. Pois, apesar de habitualmente possuir um elevado número de variáveis, tem apenas uma restrição (volume), além das restrições de domínio admissível simples que traduzem os limites superior e inferior para a variável de densidade (Haftka e Gürdal, 1992). Nesta secção, introduz-se uma classe de métodos usualmente empregue na resolução dos problemas apresentados ao longo deste trabalho, métodos de Critério de Ótimo (OC) (*optimality criteria* - OC) (Martin P. Bendsøe e Ole Sigmund, 2004; Hassani e Hinton, 1998b). São igualmente derivadas as condições necessárias de ótimo para a variável densidade  $\rho$  do problema de mínima flexibilidade que utiliza o esquema heurístico de interpolação SIMP.

Os métodos de OC, para aplicações estruturais aparecem nos anos 1960 (W. Prager, 1968), tendo-se difundido para outras aplicações sendo atualmente bastante populares (O. Sigmund, 2001). Na base destes métodos, estão usualmente critérios de ótimo rigorosos, derivados das condições necessárias de KKT (vd. Secção 2.3.6). De acordo com os métodos de OC utilizados na otimização estrutural, o problema contínuo genérico, com uma carga única definido em 3.2 pode ser utilizado para deduzir esquemas de atualização computacionais eficientes na resolução dos problemas abordados. Para tal, os métodos iterativos devem atualizar as variáveis do problema em cada ponto (i.e., em cada elemento da malha de elementos finitos), com base nas condições necessárias de ótimo. Assim, considere a primeira forma do problema de minimização da flexibilidade (3.2) reescrito para o caso do esquema SIMP num problema contínuo é dado pela Expressão 3.12.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{u \in U, \rho} l(u) \\ \text{su}j. \text{ a } a_E(u, v) = l(v), \forall v \in U \\ E_{ijkl}(x) = \rho(x)^p E_{ijkl}^0 \\ \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq V; \quad 0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Foi introduzido um limite inferior  $\rho_{min}$  na densidade para evitar possíveis singularidades e problemas de condicionamento. Em aplicações práticas, é definido  $\rho_{min} = 10^{-3}$ . Com os multiplicadores de Lagrange  $\Lambda, \lambda^-(x), \lambda^+(x)$  para as restrições da Expressão 3.12, as condições necessárias de ótimo

para a variável do problema  $\rho$  são um subconjunto das condições de estacionaridade do Lagrangiano, dado pela Equação 3.13.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & l(u) - \left\{ a_E(u, \bar{u}) - l(\bar{u}) \right\} + \Lambda \left( \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega - V \right) + \\ & \int_{\Omega} \lambda^+(x) (\rho(x) - 1) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda^-(x) (\rho_{\min} - \rho(x)) d\Omega \end{aligned} \quad (3.13)$$

Onde  $\bar{u}$  é o multiplicador de Lagrange para a restrição de equilíbrio, além disso  $\bar{u}$  pertence ao conjunto  $U$  de campos de deslocamento cinematicamente admissíveis. Assumindo que,  $\rho \geq \rho_{\min} > 0$  (de modo que os campos de deslocamento são únicos), as condições de ótimo em relação às variações dos campos de deslocamento  $u$  resultam que  $\bar{u} = u$  enquanto a condição para  $p$  é dada por:

$$\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial \rho} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(u) = \Lambda + \lambda^+ - \lambda^- \quad (3.14)$$

com as condições de viabilidade dual e complementaridade ou folgas complementares:

$$\lambda^- \geq 0, \lambda^+ \geq 0, \lambda^-(\rho_{\min} - \rho(x)) = 0, \lambda^+(\rho(x) - 1) = 0. \quad (3.15)$$

Para densidades intermédias ( $\rho_{\min} < \rho < 1$ ) as condições expressas na Expressão 3.14 podem ser escritas na forma:

$$p\rho(x)^{p-1} E_{ijkl}^0 \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(u) = \Lambda. \quad (3.16)$$

Em que, o primeiro membro (densidade de energia mutual) semelhante à densidade de energia elástica de deformação é constante e igual a  $\Lambda$ , para todas as densidades intermédias. As áreas (ou volumes em 3D) com elevada energia apresentam baixa rigidez. Assim, a atualização das densidades pode ser realizada pelo esquema iterativo de atualização de ponto fixo (Haftka e Gürdal, 1992):

$$\rho_{K+1} = \begin{cases} \max \{ (1 - \zeta) \rho_K, \rho_{\min} \} & \text{se } \rho_K B_K^\eta \leq \max \{ (1 - \zeta) \rho_K, \rho_{\min} \}, \\ \min \{ (1 + \zeta) \rho_K, 1 \} & \text{se } \min \{ (1 + \zeta) \rho_K, 1 \} \leq \rho_K B_K^\eta, \\ \rho_K B_K^\eta & \text{restante} \end{cases} \quad (3.17)$$

em que  $\rho_K$  representa o valor da variável densidade na iteração  $K$ , e  $B_K$  é dado pela Expressão 3.18.

$$B_K = \Lambda_K^{-1} p \rho(x)^{p-1} E_{ijkl}^0 \varepsilon_{ij}(u_K) \varepsilon_{kl}(u_K) \quad (3.18)$$

Em que  $u_K$  é o campo de deslocamento na iteração  $K$ , determinado com base na equação de equilíbrio e dependente de  $\rho_K$ . O esquema de atualização 3.17 adiciona material a áreas com uma energia de deformação específica superior a  $\Lambda$  (i.e., quando  $B_K > 1$ ) ou remove-o se a energia estiver abaixo deste valor. Conquanto, esta ação só se verifica caso as restrições não sejam violadas no decorrer da atualização. A variável  $\eta$  é um parâmetro de ajuste e  $\zeta$  é um limite móvel. Assim, ambos os parâmetros controlam as variações na atualização das variáveis em cada etapa de iteração e o seu ajuste determina a eficiência do método. A atualização  $\rho_{K+1}$  depende do valor presente do multiplicador de Lagrange  $\Lambda$

e, logo,  $\Delta$  deve ser ajustado num ciclo iterativo interno para satisfazer a restrição de volume ativa. Além disso, o volume é estritamente decrescente nos intervalos de interesse, onde os limites das densidades não estão ativos em todos os pontos (i.e., elementos finitos numa discretização MEF). Logo, o valor de  $\Delta$  pode ser exclusivamente determinado através do método de bissecção ou método de Newton. Os valores de  $\eta$  e de  $\zeta$  são selecionados por experimentação, com vista à obtenção de uma convergência estável e rápida. Tipicamente os valores de  $\eta$  e  $\zeta$  são 0,5 e 0,2, respetivamente.

Observe-se que a definição de sensibilidade é especialmente relevante para a parametrização do problema. O conceito de análise de sensibilidade em OT é definido como o estudo do gradiente da função objetivo relativamente às variáveis do problema. Assim, estes gradientes expressam a sensibilidade da resposta de função objetivo às mudanças do valor das variáveis. Com efeito, a precisão e robustez dos algoritmos empregues podem ter uma grande correlação com o cálculo dos gradientes (Amstutz et al., 2010). Além disso, o algoritmo de OT implementado neste estudo requer o cálculo do gradiente da função objetivo relativamente às variáveis do problema.

Na circunstância da utilização do método SIMP-OC e com o objetivo de complementar a introdução do método OC apresenta-se resumidamente análise de sensibilidade. Considere-se, o Problema 3.3 de flexibilidade mínima na forma de problema de MEF, reescrito pela Expressão 3.19.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{u}, \rho_e} \quad \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ \text{suj. a} \quad \left( \sum_{e=1}^N \rho_e^p \mathbf{K}_e \right) \mathbf{u} = \mathbf{f} \\ \sum_{e=1}^N v_e \rho_e \leq V, \quad 0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1, \quad e = 1, \dots, N \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Resolvendo através de programação matemática, primeiramente o problema pode ser reescrito como um problema de variáveis apenas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\rho_e} \quad c(\rho_e) \\ \text{suj. a} \quad \sum_{e=1}^N v_e \rho_e \leq V, \quad 0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1, \quad e = 1, \dots, N \end{array} \right. \quad (3.20)$$

onde a equação de equilíbrio é considerada como parte uma função:

$$c(\rho_e) = \mathbf{f}^T \mathbf{u}, \text{ em que } \mathbf{u} \text{ resolve } \sum_{e=1}^N \rho_e^p \mathbf{K}_e \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (3.21)$$

Os gradientes necessários à resolução do algoritmo de otimização enunciado em 3.20, são facilmente derivados para os objetivos e restrições, envolvendo unicamente  $\rho$ . Caso as funções também dependam dos deslocamentos, as derivadas podem ser calculadas através da regra da cadeia. Assim, essas expressões conterão derivadas do deslocamento, que por sua vez podem ser obtidas através da derivada da equação de equilíbrio  $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ . É comum os problemas de OT estarem sujeitos a um número limitado

de restrições, por isso, o método mais eficaz no cálculo das derivadas é o método numérico do adjunto médio (*adjoining state method*), em que as derivadas do deslocamento não são calculadas explicitamente. Reescrevendo a função  $c(\rho)$  do Problema 3.20 pela adição da função zero:

$$c(\rho) = \mathbf{f}^T \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}^T (\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f}). \quad (3.22)$$

Em que  $\bar{\mathbf{u}}$  é um qualquer vetor real arbitrário mas fixo. Reformulando a expressão temos:

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = (\mathbf{f}^T - \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{K}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e} - \bar{\mathbf{u}}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u}, \quad (3.23)$$

que pode ser transformado na seguinte expressão,

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = -\bar{\mathbf{u}}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u}, \quad (3.24)$$

quando  $\bar{\mathbf{u}}$  satisfaz a equação do adjunto médio:

$$\mathbf{f}^T - \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} = 0 \quad (3.25)$$

Pela Equação 3.25 escrita na forma de equilíbrio, pode-se deduzir que para o problema de mínima flexibilidade obtém-se  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ . Ademais, a forma da matriz de rigidez significa que a derivada da função objetivo  $c_\rho$  (flexibilidade) para o Problema 3.20 passa a definir-se como:

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = -p \rho_e^{p-1} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_e \mathbf{u} \quad (3.26)$$

Assim, as derivadas do problema de flexibilidade mínima são facilmente calculadas. Além disso, a derivada expressa informação ao nível local (elemento). Por último, todos os elementos possuem sensibilidade negativa, assim, adição de material (i.e., aumento da densidade) diminui a flexibilidade e aumenta a rigidez da estrutura (Martin P. Bendsøe e Ole Sigmund, 2004).

### 3.1.1.5 Instabilidades numéricas

Apesar da maturidade e do sucesso dos métodos de OT, ainda existem questões importantes que influenciam significativamente os resultados computacionais obtidas nos problemas de OT. Estas questões relacionam-se com as instabilidades numéricas e os problemas de convergência para a solução ótima. De acordo com (O. Sigmund e Petersson, 1998) estes problemas podem-se classificar em três categorias: (i) *checkerboards*, (ii) dependência de malha e (iii) mínimos locais.

O problema de *checkerboard* corresponde à formação de regiões alternadas de elementos sólidos e vazios (i.e., material e vazio) nas soluções de OT. A origem dos padrões geradores deste efeito está relacionada com as características dos métodos de aproximação dos MEF, mais especificamente, com erros na modelação numérica da rigidez dos elementos que sobrestima a rigidez dos *checkerboards* nos problemas de flexibilidade mínima (Diaz e O. Sigmund, 1995). Este problema não é exclusivo do método SIMP, ou seja, é independente do método de otimização utilizado, sendo que na sua origem está a

discretização do domínio admissível. Estes fenômenos muitas vezes levam a soluções (i.e., topologias) sem sentido, difíceis ou impossíveis de fabricar (K.-T. Zuo et al., 2006). A Figura 29(a) ilustra o problema de *checkerboard*. Considerando a natureza numérica deste problema, algumas abordagens foram propostas para evitar ou remover estas instabilidades. Uma dessas abordagens preconiza a utilização de filtros de suavização da solução obtida, em tudo semelhantes aos utilizados na área de processamento de imagem. Contudo, este método ignora o problema físico subjacente sendo por isso desaconselhado. Outra forma de evitar esta contrariedade é usar elementos finitos de ordem superior. A utilização de elementos quadráticos permite diminuir ou eliminar *checkerboards*. Contudo, apesar de representarem de forma mais adequada os campos associados ao problema do MEF, não garantem a ausência de padrões de *checkerboard*, dependendo do método utilizado e da adequada seleção de parâmetros (e.g., penalidade) (O. Sigmund e Petersson, 1998). Uma desvantagem de usar elementos finitos de ordem superior é o aumento substancial no tempo computacional.

Outro método alternativo consiste na utilização de filtros (Martin P. Bendsøe e Ole Sigmund, 2004; Ole Sigmund, 1994; Ole Sigmund, 2007). Baseados em técnicas de filtragem de processamento de imagem, Ole Sigmund (1994) sugeriram um filtro de prevenção *checkerboards* implicando em modificação das sensibilidades ou as próprias variáveis do problema de cada elemento finito usadas em cada iteração do algoritmo resolvendo o problema discretizado. Assim, neste filtro a sensibilidade de cada elemento finito depende de uma média ponderada entre o próprio elemento e uma determinada vizinhança. Dessa forma, esta técnica demonstra ser eficiente na remoção de *checkerboards*. A relação desta técnica com a área do processamento de imagem resulta da semelhança entre a discretização geométrica de uma estrutura por uma malha regular de elementos finitos e a representação de uma imagem através de um mapa de bits (*bitmap* ou *raster*). Estes métodos para além de prevenir a formação de *checkerboards* são igualmente utilizados para alcançar refinamento de malha e independência de malha. Além disso, a maioria dos métodos empregues para controlar a dependência da malha também são eficientes na redução dos padrões de *checkerboards* (O. Sigmund e Petersson, 1998). A Figura 29(b) ilustra o problema de dependência de malha, consequência da não existência de solução única para o problema inicial. Idealmente, o refinamento da malha devia traduzir-se numa melhor modelação da estrutura ótima de elementos finitos, numa melhor descrição das suas fronteiras, e não numa estrutura ótima mais detalhada e qualitativamente diferente. Com efeito, é notório a falta de soluções gerais do problema inicial de OT do tipo 0/1. Com efeito, neste tipo de problema a introdução de mais elementos vazios (sem material - 0), geralmente diminuirá o valor da função objetivo (i.e., aumentará a medida de eficiência), ou seja, traduz-se no afastamento do conjunto de soluções admissíveis.

Os problemas de dependência de malha podem ser classificados em duas categorias: (i) o problema de (necessariamente) obter uma estrutura cada vez mais fina (i.e., detalhada) com refinamento de malha, devido ao problema de não existência de soluções e (ii) problemas com múltiplas soluções (i.e., soluções não exclusivas). A Figura 29(c) ilustra um exemplo deste último caso o problema de uma estrutura em tensão uniaxial. Neste caso, a solução composta por uma única barra de espessura elevada satisfaz o objetivo da mesma forma que várias barras finas com a mesma área. Para o primeiro caso, o refinamento

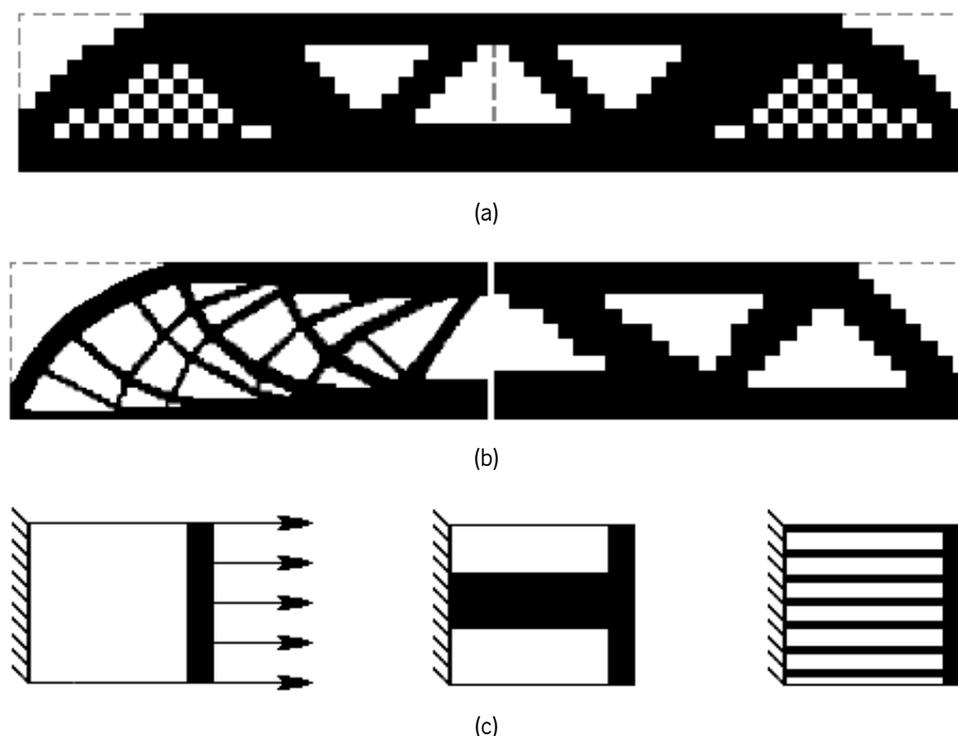


Figura 29: Instabilidades numéricas em otimização topológica: (a) *checkerboards*, (b) dependência de malha e soluções não-únicas (adaptado de O. Sigmund e Petersson (1998)).

diminuirá o valor da função objetivo, traduzindo-se numa melhor resposta. Para o segundo caso, um refinamento é sempre possível porém não necessário. Apesar de não se poder estabelecer esquemas que evitem o problema de existência de soluções não exclusivas, a introdução de restrições ao problema previnem ou reduzem a dependência do refinamento de malha (O. Sigmund e Petersson, 1998). Uma das metodologias alternativas refere-se à relaxação do problema inicial (e.g., uso de parâmetros de penalidade no método SIMP). Esta abordagem traduz-se na presença de regiões de densidades intermédias, muitas vezes indesejáveis, uma alternativa é aplicação de restrições locais ou globais, à variação da variável densidade.

Em resumo, os métodos mais empregues em OT são: (i) métodos de restrição, como o controlo de perímetro, ou controlo de gradientes locais ou globais, (ii) filtros de independência de malha (i.e., sensibilidades ou densidades) e (iii) outros métodos alternativos (e.g., *Level-set*) (Ole Sigmund e Maute, 2013).

Outro problema frequente em OT é a convergência da solução para mínimos locais, particularmente em problemas não restritos ou com restrições insuficientes. Os esquemas discutidos anteriormente tendem a transformar os problemas originais em problemas mais convexos, originando soluções mais detalhadas e independentes da resolução. No entanto, pequenas variações nos parâmetros iniciais podem resultar em mudanças drásticas nas soluções aparentemente ótimas. Estes problemas de falta de robustez dos algoritmos utilizados são em grande parte causados pela planeza da função objetivo e pelos

procedimentos de otimização numérica adotados na resolução. São comuns as provas de convergência de algoritmos iterativos na resolução de problemas convexos, em contraste com os problemas não convexos, cujas demonstrações geralmente garantem apenas que o algoritmo converge para um ponto estacionário próximo (que pode não ser a solução ótima global). Uma forma de evitar a convergência para mínimos locais (i.e., pontos estacionários não ótimos) consiste na aplicação dos denominados métodos de continuação (G. Allaire e Francfort, 1993; Groenwold e Etman, 2009a; O. Sigmund e Petersson, 1998). No caso do método SIMP a ideia é iniciar o processo de otimização sem penalização das densidades intermediárias ( $p = 1$ ) e depois aumentar gradualmente o parâmetro de penalização do SIMP até que uma solução sólido-vazio seja obtida. Portanto, ao atrasar a penalização, evita-se a convergência prematura para uma solução sub-ótima. Assim, estes métodos na sua formulação tem em consideração informações do comportamento global da função objetivo, sendo portanto mais propensos a garantir a convergência para uma solução ótima global. A ideia dos métodos de continuação consiste em converter gradualmente por etapas o problema de otimização inicial convexo num problema penalizado não convexo, impedindo a convergência extemporânea para pontos estacionários (i.e., mínimos locais). Em cada etapa, um algoritmo de otimização baseado no gradiente é usado até a convergência global. Este método é regularmente utilizado com outros parâmetros (e.g., raios de filtragem no filtro de densidades) (G. Allaire e Francfort, 1993; O. Sigmund e S. Torquato, 1996; O. Sigmund e Petersson, 1998; Ole Sigmund, 2007). Na secção seguinte são apresentadas as técnicas de filtragem implementadas neste trabalho para minimizar algumas destas instabilidades numéricas.

### **Filtros de sensibilidade e densidade**

A utilização de metodologias de restrição da variável densidade na OT visa reduzir fenómenos de instabilidade numérica como dependência de malha e padrões de *checkerboard*. Outro aspeto, não menos relevante é a adequação das geometrias obtidas por OT aos constrangimentos (limites) das tecnologias de produção atuais. Este último ponto, reveste-se de especial importância para a efetiva integração da OT nas ferramentas de conceção e projeto e ao objetivo final de materializar as estruturas obtidas por OT. Estes métodos de filtragem destinados à regularização de problemas de OT podem ser divididos em métodos baseados em densidade e sensibilidade. A utilização destes métodos tende a produzir distribuições de material com fronteiras bem definidas, cujas dimensões mínimas são controladas pelo raio do filtro. Além disso, esta representação binária 0/1 permite uma melhor interpretação das soluções (geometrias). Portanto, idealmente o filtro deveria preencher a seguinte lista de requisitos: (i) alcançar soluções independentes de malha e sem padrões de *checkerboard*; (ii) alcançar soluções binárias (0/1); (iii) capacidade de fabricação (raio mínimo da ferramenta, dimensão mínima do furo, etc.); (iv) não precisar de restrições extras; (v) com número de parâmetros de ajuste moderado e robusto; (vi) convergência estável e rápida; (vii) aplicabilidade geral; (viii) implementação simples e (ix) baixo custo computacional (Ole Sigmund, 2007).

As técnicas de filtragem propostas para a regularização de problemas de OT podem ser classificadas

em métodos baseados em densidade e sensibilidade. No primeiro caso, os filtros operam diretamente sobre as variáveis do problema. Assim, a densidade de cada elemento é redefinida como uma média ponderada das densidades numa dada vizinhança independente da malha do elemento, antes da resolução do problema de elementos finitos, posteriormente, as sensibilidades são modificadas de maneira consistente. No segundo caso, os filtros operam sobre os gradientes ou sensibilidades da função objetivo às variáveis. Neste caso o problema de elementos finitos é resolvido, posteriormente as sensibilidades são calculadas e modificadas através de métodos heurísticos como médias ponderadas das sensibilidades em vizinhanças independentes da malha (Martin P. Bendsøe e Ole Sigmund, 2004; Ole Sigmund, 2007). A vizinhança do elemento  $e$ , aqui denominada  $N_e$ , é geralmente especificada pelo conjunto de elementos cujos centros estão dentro de um determinado raio de filtro  $R_f$  do centro do elemento  $e$ , ou seja,

$$N_e = \{i \mid \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_e\| \leq R_f\}. \quad (3.27)$$

Onde  $x_i$  representa a localização do centro do elemento  $i$ . A utilização de métodos de filtragem poderá originar problemas no tratamento dos limites da malha de elementos finitos. Tal facto poderá acarretar deturpação das soluções alcançadas. Idealmente, os filtros deveriam ser expandidos e incluir os elementos exteriores as fronteiras da malha como elementos vazios. De maneira idêntica, considerando os casos de simetria e de periodicidade, aplicação dos filtros deveria ser expandida para elementos exteriores à malha, refletindo os valores do interior da malha. Além disso as regiões dos apoios e de aplicação de solicitações deveriam ser consideradas sólidas (Ole Sigmund, 2007).

Os filtros de densidade funcionam modificando a densidade do elemento, conseqüentemente a rigidez passa a ser uma função das densidades numa dada vizinhança de um elemento. A densidade do elemento modificado pode ser escrita de acordo com a Equação 3.28.

$$\tilde{\rho}_e = \tilde{\rho}_e(\rho_{i \in N_e}) \quad (3.28)$$

Em que a densidade do elemento modificado  $\rho_e$  é uma função das variáveis do problema de uma dada vizinhança  $\rho_{i \in N_e}$ . Assim, a rigidez modificada no elemento  $e$  pode ser escrita pela Expressão 3.29.

$$E_e = E_e(\boldsymbol{\rho}) = E_e(\tilde{\rho}_e) = E_{min} + \tilde{\rho}_e^p (E_0 - E_{min}) \quad (3.29)$$

Em que  $\tilde{\rho}_e$  é a densidade filtrada. Um importante atributo da função do filtro é a preservação do volume. Na prática, a preservação exata do volume raramente é alcançada devido à influência das fronteiras. Contudo, este problema pode ser controlado pela troca da variável associada à restrição de volume (i.e., trocar a variável original  $\rho$  pela variável modificada  $\tilde{\rho}$ ), caso não existam regiões fixas (sólidas ou vazias) no domínio admissível. Neste caso, a função de densidades modificadas, requer que a restrição de volume também deve ser imposta no campo de densidade modificado (físico). Assim, a restrição de fração de volume para uma abordagem de filtro de densidade deve ser definida pela Inequação 3.30 (Ole Sigmund, 2007).

$$g = V(\tilde{\boldsymbol{\rho}})/V^* - 1 = \sum_e v_e \tilde{\rho}_e / V^* - 1 \leq 0 \quad (3.30)$$

A filtragem de densidades foi introduzida por Tyler E. Bruns e Daniel A. Tortorelli (2001) e demonstrada como uma abordagem viável por Bourdin (2001). A Equação 3.31 define a densidade filtrada.

$$\tilde{\rho}_e = \frac{\sum_{i \in N_e} w(\mathbf{x}_i) v_i \rho_i}{\sum_{i \in N_e} w(\mathbf{x}_i) v_i} \quad (3.31)$$

Onde o peso de ponderação  $w(\mathbf{x}_i)$  (i.e., operador de convolução) é dado pela Função de decaimento linear 3.32 (Bourdin, 2001; Tyler E. Bruns e Daniel A. Tortorelli, 2001) em forma de cone (i.e., superfície cônica).

$$w(\mathbf{x}_i) = R_f - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_e\| \quad (3.32)$$

Em que  $v_e$  representa o volume do elemento  $i$ . A fim de obter uma função de ponderação mais suave, o operador de convolução enunciado em 3.32 pode ser substituído pela função de distribuição gaussiana 3.33 (forma de sino) (T. E. Bruns e D. A. Tortorelli, 2003; M. Y. Wang, Xiaoming Wang e Guo, 2003).

$$w(\mathbf{x}_i) = e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_e\|}{\sigma_d} \right)^2} \quad (3.33)$$

Em que  $\sigma_d$  representa a variância da distribuição. De acordo com T. E. Bruns e D. A. Tortorelli (2003) é definida por  $\sigma_d = R_f/3$  e em M. Y. Wang e S. Wang (2005) por  $\sigma_d = R_f/2$ , sendo que nos dois caso o filtro é truncado no raio  $R_f$ . Por último, pode-se usar uma função de ponderação constante  $w_i = 1$  no filtro 3.31 (Ole Sigmund, 2007). O efeito da ponderação é maior para a ponderação constante, menor para a ponderação de decaimento linear e ainda menor para a ponderação gaussiana. Considerando o tempo de computação, é mais eficiente utilizar a função de ponderação constante (Equação 3.31 com  $w_i = 1$ ), já que um raio de filtro menor resultará no mesmo efeito de filtragem. A filtragem de sensibilidades é bastante popular quer em meios acadêmicos como em programas comerciais (Ole Sigmund, 2007). A ideia base é substituir as sensibilidades reais pelas sensibilidades filtradas nas atualizações das variáveis do problema. Em que, a sensibilidade de um elemento é calculada com base na média ponderada das sensibilidades dos elementos numa dada vizinhança. A Figura 30 ilustra o raio de filtro.

Embora esta abordagem seja robusta e de fácil implementação pode representar alguns potenciais problemas de convergência ou paragem prematura da otimização. Com efeito, em certos esquemas de otimização, as sensibilidades filtradas podem deixar de representar perfeitamente os gradientes (Ole Sigmund, 1997).

O filtro de sensibilidade original para independência de malha proposto por Ole Sigmund, 2007 é definido como,

$$\frac{\tilde{\partial f}}{\partial \rho_e} = \frac{\sum_{i \in N_e} w(\mathbf{x}_i) \rho_i \frac{\partial f}{\partial \rho_i}}{\rho_e \sum_{i \in N_e} w(\mathbf{x}_i)}. \quad (3.34)$$

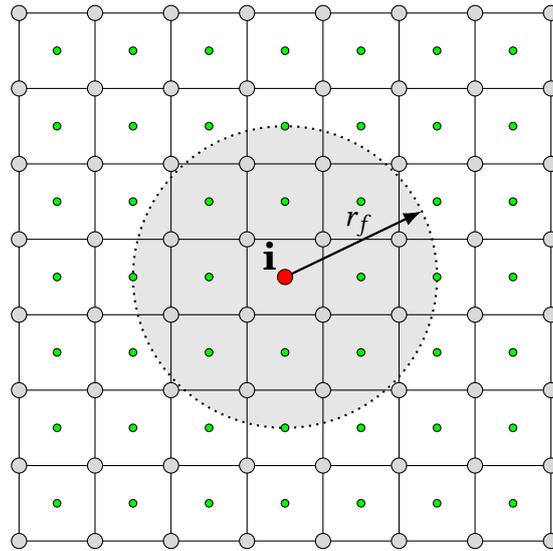


Figura 30: Raio de filtro.

Onde o operador de convolução  $w(\mathbf{x}_i)$  é a função de decaimento linear 3.32. Quando o limite inferior na variável do problema é 0 como no caso do método SIMP, a variável  $\rho_e$  no denominador da Equação 3.34 deve ser substituída por  $\max(\rho_e, \varepsilon)$  onde  $\varepsilon$  é um número pequeno (e.g.,  $10^{-3}$ ), evitando a divisão por zero (M. P. Bendsøe e O. Sigmund, 1999). No caso de malhas não regulares, formada por elementos com diferentes volumes  $v_e$  (ou áreas), deve ser efetuada a seguinte transformação,

$$\frac{\widetilde{\partial f}}{\partial \rho_e} = \frac{\sum_{i \in N_e} w(\mathbf{x}_i) \rho_i \frac{\partial f}{\partial \rho_i} / v_i}{\rho_e / v_e \sum_{i \in N_e} w(\mathbf{x}_i)} \quad (3.35)$$

Intuitivamente, teria feito mais sentido multiplicar pelos volumes dos elementos (elementos grandes, peso grande e elementos pequenos, peso pequeno), no entanto, a motivação para dividir pelos volumes é parcialmente baseada em simulações numéricas e parcialmente baseada em considerações de energia. Ao dividir pelo volume do elemento, o termo dentro da soma no numerador pode ser interpretado como uma densidade de energia de deformação média (energia por unidade de volume). Nestes casos, a abordagem de continuação resume-se geralmente a iniciar o processo de otimização sem penalização ( $p = 1$ ), resolver o problema e aumentar gradualmente o parâmetro de penalidade durante o processo iterativo.

### 3.1.1.6 Detalhes da implementação otimização topológica

Nesta secção são apresentados detalhes acerca da implementação da ferramenta computacional de OT para criação da biblioteca de VRU, com diferentes propriedades mecânicas. Neste trabalho, a variação na topologia dos VRU e das propriedades mecânicas é obtida por três modos. Primeiramente, pela variação da fração volúmica da fase de material rígida. Segundo, pela variação da localização das nucleações

iniciais (voxels de densidade 1) no domínio admissível. Terceiro, pela aplicação de forças em determinados nós do domínio admissível (i.e., solução inicial). Posteriormente, a OT é executada nos diferentes domínios admissíveis iniciais (i.e., modelos restringidos).

Como referido anteriormente, o algoritmo de OT implementado neste trabalho pretende resolver problemas de maximização da rigidez de VRU. Assim, num problema de maximiza rigidez, o objetivo é encontrar um distribuição do material que minimize a deformação da estrutura num dado domínio admissível, sujeita a condições de fronteira e carregamento. O método de OT empregue neste trabalho é o SIMP. Considere-se o problema enunciado na Secção 3.1.1.4. A implementação do método SIMP neste trabalho segue o fluxograma ilustrado na Figura 31. O método SIMP requer a definição de diferentes parâmetros. Nomeadamente,  $V^*$ , fração volúmica do VRU;  $p$ , parâmetro de penalidade (define quanto as penalidades intermédias são penalizadas assume valores no intervalo 2 - 4 usualmente  $p = 3$ , vd Secção 3.1.1.4);  $R_f$ , raio de filtro traduz distância máxima que um elemento vizinho pode estar de um dado elemento para ser considerado no filtro de sensibilidade;  $q$ , fator de penalização do filtro de densidades (filtro de escalas de cinza, *gray-scale*), tipicamente  $q = 2$  mas pode ser aumentado para  $q = 3$  (K. Liu e Tovar, 2014).

O ficheiro de entrada do *script* implementado é um ficheiro binário específico do Abaqus™ com extensão *Model Database* (.cae). Neste ficheiro, os dados encontram-se estruturados hierarquicamente em objetos, como peças, materiais, condições de contorno e cargas. Com efeito, este ficheiro explicita o domínio admissível, secções, materiais, condições de fronteira periódicas, passos da análise estática e cargas, que no contexto do presente estudo assumem a forma de deslocamento ou forças. Além disso, contém a discretização do domínio admissível, ou seja a malha de elementos finitos. Assim, foram definidos dois tamanhos de malha hexaédrica, com 8000 e 64000 elementos. Quanto ao elemento finito, foi escolhido o C3D8R presente do programa Abaqus™. Este elemento sólido hexaédrico de primeira ordem contém oito nós com integração reduzida.

### Densidades iniciais

O algoritmo inicia com a atribuição das densidades elementares ( $\rho_e$ ) aos elementos finitos da malha, que são configurados com dois valores. Assim, à grande maioria dos elementos do domínio admissível é atribuído o valor igual ao parâmetro da fração volúmica ( $\rho_e = V^*$ ) (O. Sigmund, 2001), os restantes elementos são definidos com densidade 1 ( $\rho_e = 1$ ). A Figura 32 ilustra as diferentes densidades elementares iniciais. Como resultado, estes últimos elementos transformam-se em nucleações, que garantem por um lado as ligações cinemáticas entre VRU adjacentes e por outro lado permitem desestabilizar (i.e., instabilidade numérica) o problema e facilitar a atualização das variáveis. A necessidade de criar instabilidades numéricas está associada aos problemas com campos uniformes causados pela imposição de estados de deformação num material com uma só fase. Com efeito, nestes casos são criados campos locais e sensibilidades constantes em toda a malha de elementos finitos e conseqüentemente a atualização das variáveis é realizada em bloco (Oliveira, 2013).

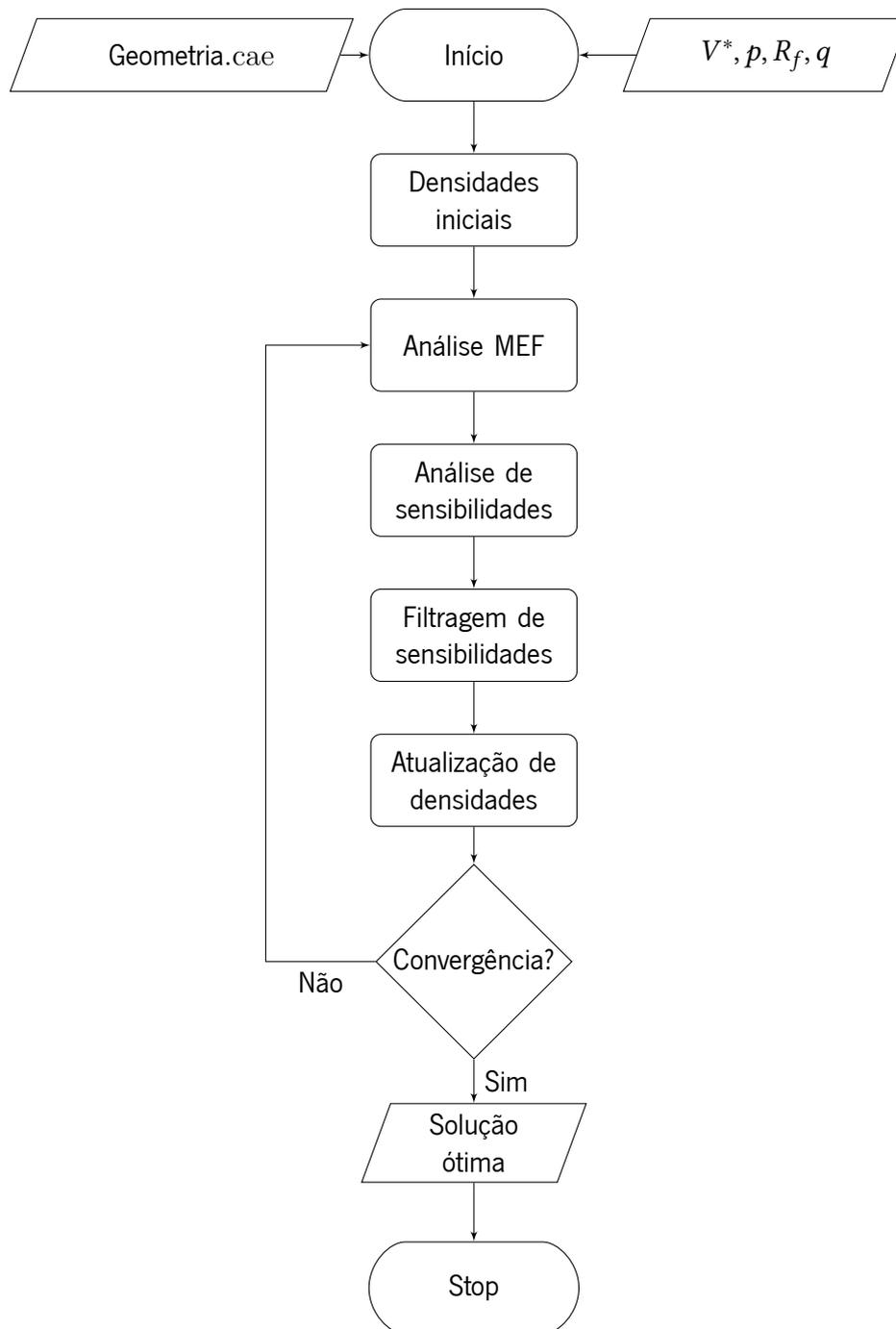


Figura 31: Fluxograma método SIMP

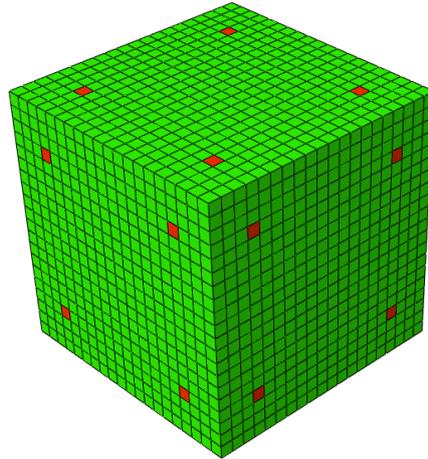


Figura 32: Domínio admissível inicial com nucleações, os elementos a vermelho nas faces do VRU possuem  $\rho_e = 1$  as restantes  $\rho_e = V^*$ .

Estas densidades iniciais são convertidas em propriedades físicas do material de acordo com o método SIMP através da Equação 3.29 (K. Liu e Tovar, 2014; O. Sigmund, 2001) em que  $E_0$  representa o módulo de Young do material rígido (sólido) e  $E_{min}$  traduz o módulo de Young do vazio, e que neste trabalho assumem o valor de 1000 Pa e 0,001 Pa, respetivamente. Assim, esta equação permite calcular o módulo de Young associado à densidade virtual, que combinado com o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) permite representar um material isotrópico base no Abaqus. Os valores do coeficiente de Poisson oscilam no intervalo  $[-1; 0,5]$ , porém a maioria dos materiais possui coeficientes de Poisson entre 0 e 0,5. No algoritmo implementado, o coeficiente de Poisson do material sólido adota o valor de 0,3.

### Análise pelo método dos elementos finitos

Com o início da análise de MEF, o algoritmo de OT começa o ciclo de otimização. Este ciclo permanecerá ativo até a convergência ser atingida (i.e., satisfeitos os critérios de convergência). Mais, esta etapa considera as definições do domínio admissível, as propriedades do material, as cargas aplicadas e as condições de fronteira definidas no ficheiro de entrada *Geometria.cae*. No final da análise MEF são extraídas duas variáveis:  $U_e$ , energia de deformação elementar e  $C$ , flexibilidade do VRU.

A energia de deformação elementar é posteriormente utilizada para cálculo das sensibilidades elementares e a flexibilidade é a função-objetivo. No caso de cargas múltiplas, a função-objetivo resulta da soma das funções objetivo dos diferentes casos dado pela Equação 3.36 (O. Sigmund, 2001; Z. H. Zuo e Yi Min Xie, 2015).

$$C(x) = \sum_i C_i(x) \quad (3.36)$$

Com  $C_i$  a função objetivo do caso  $i$ . Analogamente as sensibilidades elementares também são somadas em cada uma das etapas da análise.

### Análise de sensibilidade

Nesta etapa, as energias de deformação elementares são convertidas em sensibilidades elementares de acordo com o método SIMP. Estas sensibilidades elementares são necessárias para atualização das densidades em cada iteração, sendo calculadas pela Equação 3.37.

$$\alpha_e = -p \frac{U_e}{\rho_e} \quad (3.37)$$

Em que  $\alpha_e$  representa as sensibilidades elementares,  $p$  é o expoente de penalidade SIMP,  $U_e$  a energia de deformação elementar,  $\rho_e$  a densidade elementar.

### Filtragem de sensibilidades

Como discutido anteriormente (vd Secção 3.1.1.5) a utilização de métodos de OT aconselha o aplicação de filtro de sensibilidade como forma de prevenir que o algoritmo entre em dificuldades numéricas (e.g., dependência de malha, padrões de tabuleiro de xadrez e mínimos locais) (O. Sigmund, 2001). Neste trabalho foi adotada técnica de filtragem proposta por Z. H. Zuo e Yi Min Xie (2015). Este método de filtragem define a sensibilidade de cada um dos elementos como a média ponderada da sensibilidade dos elementos vizinhos numa dada vizinhança  $r$ , enunciado pela Expressão 3.38.

$$\hat{\alpha}_e = \frac{\sum_j w(r_{ej})\alpha_j}{\sum_j w(r_{ej})} = \sum_j \eta_j \alpha_j \quad (3.38)$$

$$w(r_{ej}) = \max(0, r_{\min} - r_{ej})$$

Em que  $\hat{\alpha}_e$  representa a sensibilidades elementares filtradas,  $w$  a função de ponderação para calcular a média das sensibilidades,  $r_{ej}$  a distância entre os elementos  $e$  e  $j$  e  $\eta_j$  o peso do elemento  $j$  relativamente à sua distância. O cálculo do valor de  $n_j$  apresenta um elevado custo computacional. Visto que, para cada elemento, todos os vizinhos dentro de um dado raio de filtro exigem ser identificados.

### Atualização das densidades

Na etapa de otimização, foi implementado o método de Critério de Ótimo (OC) para a atualização das variáveis de projeto (densidade). Esta abordagem pela sua simplicidade é frequentemente empregue nos algoritmos de otimização topológica estrutural (Martin P. Bendsøe, 1995; O. Sigmund, 2001). O esquema de atualização heurístico implementado tem por base abordagem proposta por (Haftka e Gürdal, 1992; Martin P. Bendsøe, 1995; O. Sigmund, 2001) expresso na Expressões 3.17 e 3.18. Além disso, com a finalidade de forçar a obtenção de topologias finais do tipo sólido-vazio, foi implementada a metodologia de filtragem em escala de cinza (Groenwold e Etman, 2009b; Z. H. Zuo e Yi Min Xie, 2015). Assim, a

Expressão 3.17 foi reescrita pela Expressão 3.39.

$$\rho_{K+1} = \begin{cases} \max \{ (1 - \zeta) \rho_K, \rho_{min} \} & \text{se } \rho_K B_K^\eta \leq \max \{ (1 - \zeta) \rho_K, \rho_{min} \}, \\ \min \{ (1 + \zeta) \rho_K, 1 \} & \text{se } \min \{ (1 + \zeta) \rho_K, 1 \} \leq \rho_K B_K^\eta, \\ (\rho_K B_K^\eta)^q & \text{restando} \end{cases} \quad (3.39)$$

No presente caso de OT com o método SIMP, o parâmetro  $q$  assume valores crescentes com o número de iterações. Assim,  $q = 1$  nas primeiras 15 iterações, após as quais é multiplicado por 1,01 a cada iteração, até atingir o valor máximo de 2 (Z. H. Zuo e Yi Min Xie, 2015). Para determinar o valor do multiplicador de Lagrange da Equação 3.18 foi utilizado o método da bissecção (O. Sigmund, 2001; Z. H. Zuo e Yi Min Xie, 2015).

### Convergência e topologia ótima

Após atualização das variáveis, é verificado se o algoritmo atingiu a convergência. Para tal, foi definido como critério de convergência a comparação do valor (i.e., diferença absoluta) da função objetivo das 3 últimas em 10 iterações menor que 0,001 (Z. H. Zuo e Yi Min Xie, 2015). Quando a convergência é obtida, a topologia final é gravada num ficheiro extensão .cae e os resultados da análise MEF num ficheiro .odb. São igualmente gravados dois ficheiros MAAT0.inp e MAAT1.inp com os conjuntos de números dos elementos da malha vazios e sólidos, respetivamente. Posteriormente, estes dois ficheiros de extensão .inp serão utilizados para calcular as propriedades efetivas através do método de HCD e para gerar os ficheiros de produção em formato .stl.

#### 3.1.1.7 Pós-processamento das topologias ótimas

As tecnologias de FDD permitem materializar geometrias complexas com poucas limitações produtivas. A natureza e número de parâmetros de entrada poderá variar consoante os processos de fabrico empregues. Porém, é imprescindível fornecer informação sobre a geometria do componente no formato adequado ao equipamento em questão. Atualmente, os equipamentos de FDD permitem ler os ficheiros de produção num ou em vários formatos, e.g., *Additive Manufacturing File Format (.amf)*, *Manufacturing Format (.3mf)*, *Wavefront .obj file (.obj)* e .stl. O equipamento PJet utilizado neste trabalho permite a leitura de diferentes formatos como .obj e .stl. Assim, no presente trabalho foi definido utilizar o formato .stl nos ficheiros de produção, sendo necessário transformar a informação resultante da OT, ficheiros com identificação dos elementos da malha sólidos e vazios, num ficheiro com extensão .stl.

A linguagem de programação Python (Van Rossum e Drake, 2020) conjugada com as bibliotecas disponíveis, permite estender os domínios de aplicabilidade. No contexto do presente trabalho, foram desenvolvidos dois *scripts* em Python para criação e manipulação de ficheiros em formato .stl. O primeiro algoritmo, para conversão da geometria num ficheiro .stl, tem como parâmetros de entrada a informação da malha, (i.e., coordenadas dos nós, conectividade dos nós e os números dos elementos sólidos). Já o *scripts*, para manipulação/cominação de ficheiros .stl, recebe como dados dos ficheiros .stl a manipular.

Para além da linguagem Python, foram adicionadas as seguintes bibliotecas para adicionar funcionalidades: pandas (Reback et al., 2022), para leitura e manipulação dos dados de entrada; math (Hunter, 2021) e numpy (Harris et al., 2020), para realizar computações científicas; numpy-stl e mesh para manipular e gravar os ficheiros no formato .stl. A Tabela 5 apresenta o algoritmo da implementação do *script* de criação de ficheiros com extensão .stl.

Tabela 5: Algoritmo 1, conversão da geometria em ficheiro formato .stl.

---



---

<b>Entrada:</b>	malha.csv; elemconnect.csv; MAAT1.inp
<b>Saída:</b>	geometria.stl
<b>1 início</b>	
<b>2</b>	ler coordenadas dos nós
<b>3</b>	ler conectividade dos nós
<b>4</b>	ler elementos sólidos
<b>5</b>	gerar vértices da malha
<b>6</b>	definir conectividade dos elementos sólidos
<b>7</b>	gerar faces
<b>8</b>	definir 8 vértices do cubo
<b>9</b>	definir 12 triângulos das faces do cubo
<b>10</b>	criar a malha
<b>11</b>	guardar ficheiro geometria.stl
<b>12 fim</b>	

---

O segundo *script* desenvolvido neste trabalho, como referido anteriormente, permite manipular ficheiros extensão de .stl (e.g., rodar, escalar e concatenar as malhas de VRU nas três direções ortogonais). A Tabela 6 mostra de modo esquemático o algoritmo de manipulação de ficheiros .stl. Os ficheiros .stl

Tabela 6: Algoritmo 2, manipulação/cominação de ficheiro formato .stl

---



---

<b>Entrada:</b>	geometria-1.stl;...; geometria-n.stl; número de VRU e direções
<b>Saída:</b>	geometria-concatenada.stl
<b>1 início</b>	
<b>2</b>	ler malha dos ficheiros geometria.stl
<b>3</b>	rodar as malhas (x, y, z)
<b>4</b>	calcular as dimensões máximas das malhas (x, y, z)
<b>5</b>	copiar malhas nas direções definidas
<b>6</b>	concatenar malhas
<b>7</b>	guardar ficheiro geometria-concatenada.stl
<b>8 fim</b>	

---

obtidos pelos Algoritmos 1 e 2 podem ser usados diretamente nos equipamentos de FDD para produção das respetivas geometrias.

Foi igualmente desenvolvido um *script* em linguagem Python para refinar a malha das topologias finais, isto é, após terem sido sujeitas à operação de otimização topologia permite dividir os elementos

originais noutros elementos em número par. Apesar de, este algoritmo ter sido desenvolvido para malhas de elementos hexaédricos, utilizadas no contexto do presente trabalho, com ligeiras modificações pode ser implementado em malhas com outro tipo de elemento finito (e.g., tetraedros). Este *script* que recebe como parâmetros de entrada um ficheiro formato .csv com a lista dos elementos sólidos da topologia inicial `elenum.csv` e o número de elementos final por aresta do hexaedro. Este *script* devolve dois ficheiros `MAAT0.inp` e `MAAT1.inp` com a lista de elementos vazios e sólidos da nova malha, respetivamente. Estes ficheiros podem ser utilizados diretamente como ficheiro de entrada para a operação de homogeneização. A Tabela 7 apresenta o esquema do algoritmo de refinamento de malhas hexaédricas.

Tabela 7: Algoritmo 3, refinamento de malha

---

<b>Entrada:</b> <code>elenum.csv</code> ; número de novos elementos finitos por aresta	
<b>Saída:</b> <code>MAAT0.inp</code> ; <code>MAAT1.inp</code>	
<b>1</b>	<b>início</b>
<b>2</b>	ler lista de elementos do ficheiro <code>elenum.csv</code>
<b>3</b>	criar lista de elementos malha inicial
<b>4</b>	calcular os elementos nova malha
<b>5</b>	criar lista de listas com os elementos da nova malha por elemento inicial
<b>6</b>	guardar ficheiros <code>MAAT0.inp</code> e <code>MAAT1.inp</code>
<b>7</b>	<b>fim</b>

---

### 3.1.2 Homogeneização computacional direta

A previsão das propriedades efetivas dos materiais heterogêneos à macroescala é desafiante. De facto, diversas teorias e métodos têm sido propostas para prever o comportamento destes materiais complexos (Böhm, 2018). A teoria da homogeneização, que viabiliza o cálculo das propriedades de um material heterogêneo, é especialmente interessante. Nos materiais celulares as características da microestrutura controlam as respostas à macroescala. O principal objetivo da homogeneização é derivar as propriedades mecânicas efetivas (e.g., módulo de elasticidade, tensão de cedência, resistência mecânica) da microestrutura (Michel et al., 1999). Este conceito pode ser aplicado a materiais celulares periódicos, compostos por arranjos de material sólido e vazios (1/0). Neste materiais, em virtude da sua estrutura interna, composta por várias células unitárias localizados periodicamente, a posição e o deslocamento podem ser expressos por um VRU (Hassani e Hinton, 1998a). A HCD é uma abordagem numérica utilizada na previsão das propriedades elásticas efetivas dos materiais heterogêneos. Nomeadamente, dos materiais com microestrutura periódica a partir da análise de um VRU (Cadman et al., 2012).

Nesta secção são apresentados os princípios básicos da homogeneização computacional. Primeiro, são apresentados os conceitos elementares dos modelos periódicos. Em segundo, são descritos aspetos basilares acerca das condições de fronteira periódicas e da sua implementação. Em seguida, é descrita

os principais aspetos do cálculo das propriedades efetivas e dos detalhes da sua implementação no programa de elementos finitos.

### **3.1.2.1 Modelos de microcampos periódicos**

As abordagens de microcampo periódico (PMA) destinam-se a aproximar o comportamento macroscópico e microscópico de materiais heterogêneos através do estudo de modelo de materiais que possuem microestruturas periódicas. Como resultado, os elementos de volume assumem a forma de células unitárias periódicas ou VRU.

As PMA analisam o comportamento de arranjos de fases periódicas infinitas (uni, bi ou tridimensionais) sob a ação de cargas mecânicas de campo distante. A abordagem usualmente empregue no estudo dos campos de tensão e deformação em arranjos periódicos é baseada na descrição da microgeometria por um VRU, para o qual os estudos podem ser limitados sem perda de informação ou generalidade, pelo menos para análise estática. A literatura disponível relacionada com HP de materiais heterogêneos é vasta. Com efeito, diversas teorias matemáticas bem consolidadas estão disponíveis acerca de transições de escala em estruturas e materiais periódicos (Böhm, 2018). Uma grande variedade de células unitárias tem sido estudadas, variando de geometrias que descrevem matrizes periódicas simples (treliças) a arranjos de fase complexos. Para algumas configurações de fase periódica simples e para materiais com comportamento linear, existem soluções analíticas baseadas em expansões de série que fazem uso explícito da periodicidade (A. S. Drago et al., 2008).

A maioria dos estudos disponíveis na literatura que empregam as PMA recorrerem a métodos numéricos como métodos de diferenças finitas, volumes finitos (M.-J. Pindera et al., 2009), modelos de molas (Ostoja-Starzewski, 2002), o método de elementos de fronteira (Y. J. Liu et al., 2005), assim como o MEF e os métodos derivados (método dos elementos finitos estendidos, métodos sem malha e de partículas) (Missoum-Benziane et al., 2007; Sukumar et al., 2001). Outros métodos incluem técnicas que usam transformadas rápidas de Fourier *Fast Fourier Transforms* (FFT) (Moulinec e P. Suquet, 1998) e as transformadas discretas de Fourier (Müller, 1996). Também foram propostos outros procedimentos numéricos especializados em lidar com materiais com arranjo de fases periódicas. Nomeadamente, o método das células (*Method of Cell* (MC)) (Jacob Aboudi, 1989; J. Aboudi, 1991) e a sua variante posterior, o método das células generalizado (*Generalized Method of Cell* (GMC)) (Jacob Aboudi, 1996), que basicamente discretiza células unitárias em elementos retangulares ou hexaédricos sendo os deslocamentos aproximados por polinómios de ordem inferior. Sendo impostas condições de continuidade (tração e deslocamento) impostas nas faces dos elementos e os campos de deformação (regime elástico e não-elástico) aproximados por soluções analíticas ou semi-analíticas.

Conforme referido anteriormente (vd. Secção 2.4.4) a HP não pode ser empregue na modelação de danos e fendas de materiais heterogêneos. Com efeito, todas as características geométricas relevantes, inclusive os padrões das fissuras, são por definição periódicas. Portanto, as PMA não podem ser empregues para descrever o comportamento que envolve a localização macroscópica do dano ou fissuras em

modelos periódicos. Salvo, o uso na modelação de danos uniformemente dispersos em subdomínios de modelos maiores (Böhm, 2018).

No desenvolvimento de PMA, os campos de deformação e tensão são usualmente decompostos em contribuições macroscópicas constantes de deformação e tensão (variáveis lentas),  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$  e  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  além de flutuações microscópicas que variam periodicamente (variáveis rápidas),  $\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{z})$  e  $\boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{z})$ . Ademais, é conveniente introduzir uma coordenada para a microescala,  $\mathbf{z}$  cujas dimensões são adequadas à resolução das características locais da VRU. A Figura 33 representa os micro campos periódicos. Na qual são

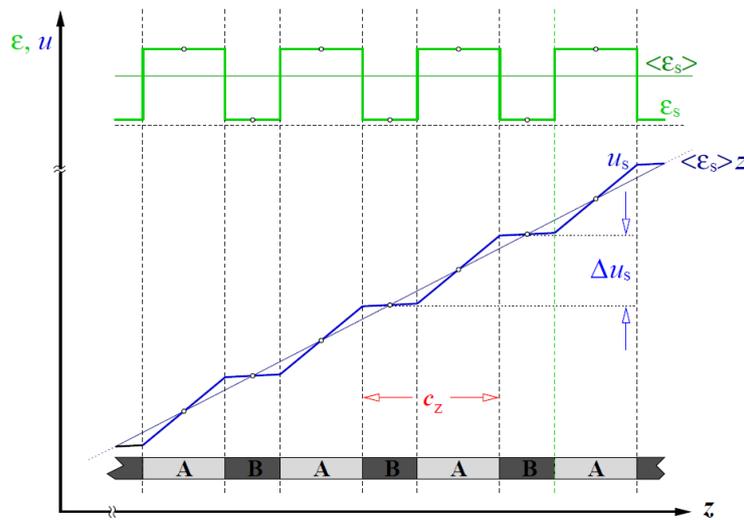


Figura 33: Variação das deformações  $\varepsilon_s(z)$  e dos deslocamentos  $u_s(z)$  ao longo de um material bifásico unidimensional genérico formado pelas fases A e B com unidade de periodicidade  $c_z$ . Os círculos indicam os pontos de simetria de  $\varepsilon_s(z)$  e  $u_s(z)$  (adaptado de Böhm (2018)).

evidenciadas as variações das deformações  $\varepsilon_s(z) = \langle \varepsilon_s \rangle + \varepsilon'_s(z)$  e dos deslocamentos correspondentes  $u_s(z) = \langle \varepsilon_s \rangle z + u'_s(z)$  ao longo de um eixo  $z$  que representa material bifásico periódico formado pelas fases A e B, com  $c_z$  como unidade de periodicidade (i.e., comprimento do VRU). Sendo que, a deformação média do volume  $\langle \varepsilon_s \rangle$  está associada ao incremento de deslocamento pelo VRU através das relações expressas pelas Equações 3.40.

$$\langle \varepsilon_s \rangle = \Delta u_s / c_z \quad \text{e} \quad u_s(z + p_z) = u_s(z) + \langle \varepsilon_s \rangle c_z \quad (3.40)$$

O fato da periodicidade das deformações e a natureza cumulativa dos deslocamentos são expressos na Figura 33.

### 3.1.2.2 Condições de fronteira periódicas

As BC mais apropriadas e usualmente selecionadas para aplicação em elementos de volume são as KUBC, SUBC e as PBC. No entanto, as SUBC leva a estimativas mais baixas e as KUBC a estimativas superiores para a rigidez macroscópica. Sendo que, as previsões baseadas em PBC situam-se entre as

anteriores (S. Nemat-Nasser e Hori, 1993; Pierre Suquet, 1987). Assim, as PBC ou (condições de contorno periódicas) afiguram-se como a melhor escolha para VRU. Por outro lado, possuem características generalistas para aplicação em células unitárias (VRU) na HP, que permite lidar com qualquer estado de deformação (fisicamente válido) da célula unitária e por conseguinte do material heterogêneo modelado. As condições de contorno de periódicas fazem uso de simetrias de uma dada geometria. Para descrever um arranjo de fase periódico  $N$ -dimensional, é necessário uma célula unitária apropriada e um conjunto de  $N$  vetores de periodicidade linearmente independentes  $\mathbf{p}_n$ . Estes vetores de periodicidade não são únicos nem necessitam de ser ortogonais. Assim, o volume mínimo das células unitárias apropriadas é bem definido, para qualquer geometria periódica. Porém, podem assumir um número infinito de formas. A Figura 34 ilustra células unitárias com diferentes geometrias mas equivalentes para o caso bidimensional. A superfície de qualquer célula unitária para aplicação de condições de fronteira periódicas deve possuir pelo menos  $N$  pares de faces (ou pares de secções de faces)  $\Gamma_k$ . Ademais, os elementos da superfície de um determinado par  $k^-$  e  $k^+$  devem ser idênticos, mas separados em relação um ao outro por um vetor de translação  $\mathbf{c}_k$ . Por sua vez, cada vetor de translação deve resultar de uma combinação linear dos vetores de periodicidade (i.e.,  $\mathbf{c}_k = \sum_l m_l^k \mathbf{p}_l$  onde  $m_l^k$  são números inteiros). Na Figura 34 pares correspondentes de faces (ou, no caso de algumas células, partes de faces)  $\Gamma_k$  são marcados com cor e estilo de linha idênticos. Obviamente, as faces das células unitárias podem ser curvas, compare, por exemplo, Garnich e Karami (2004).

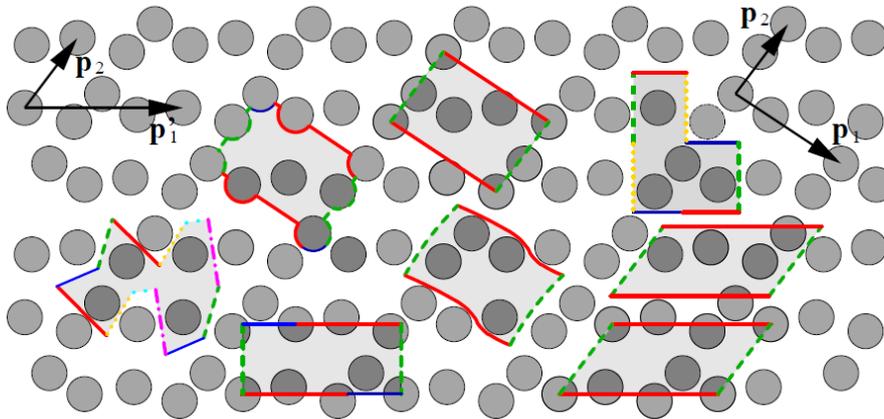


Figura 34: Diferentes mas equivalentes células unitárias caso bidimensional. O par de vetores  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  representam periodicidade não-ortogonal, em oposição ao par  $\mathbf{P}_2$  e  $\mathbf{P}_1 * 1 \mathbf{P}_2 *$  que indicam periodicidade. Os pares de faces  $\Gamma_k$  são representados pelo mesmo tipo de linha e pela mesma cor (adaptado de Böhm (2018)).

Para materiais heterogêneos com vetores de periodicidade não ortogonais, a seleção da forma da célula unitária reveste-se de especial importância e envolve compensações (contrapartidas). Por um lado, as células unitárias com formato simples facilitam a aplicação das PBC. Por outro lado, as interseções de baixo ângulo entre os limites de fase e as faces das células, assim como os limites de fase que se aproximam das faces das células que dificultam a criação da malha de elementos finitos. Este último

problema pode ser minimizado ou evitado através de uma escolha criteriosa da célula unitária (i.e., forma e dimensão). No presente trabalho, são considerados somente vetores de periodicidade ortogonais VRU hexaédricos. Assim, o esquema de nomenclatura das faces, arestas e vértices é facilitado.

As condições de contorno periódicas forçam uma deformação no elemento de volume que o deslocamento de um dos nós pertencentes a uma aresta deve estar relacionado ao deslocamento do nó correspondente na aresta oposta. De modo análogo, este princípio é aplicado aos nós das faces e dos vértices. Aplicação de PBC num VRU pode ser alcançada através de imposição de um conjunto de restrições cinemáticas (Barbero, 2007; Z. Xia et al., 2003). Assim, a implementação de PBC obriga a que todas as restrições cinemáticas sejam aplicadas a nós opostos nas faces, arestas e vértices do VRU. Além disso, não só os graus de liberdade desses nós são variáveis nessas restrições, mas também as deformações de campo-distante (*far-field*) aplicadas. Portanto, dependendo da posição dos nós das faces, arestas e vértices, é aplicado um conjunto de diferentes restrições aos seus graus de liberdade (Melro et al., 2012). Neste trabalho, estas restrições foram efetivadas numa análise através do MEF usando equações (restrições) lineares multiponto (AbaqusV6.14-1, 2014). De seguida, apresenta-se o esquema e nomenclatura empregue para designar as regiões relevantes do VRU para aplicação das PBC consideradas no presente trabalho.

A Figura 35(a) ilustra a localização e numeração utilizada para as faces do VRU para aplicação das PBC. Cada nó localizado numa face terá os seus graus de liberdade ligados com os de um nó posicionado na face oposta. As Equações 3.41 utilizam a numeração estabelecida de acordo com a Figura 35(a) (Barbero, 2007).

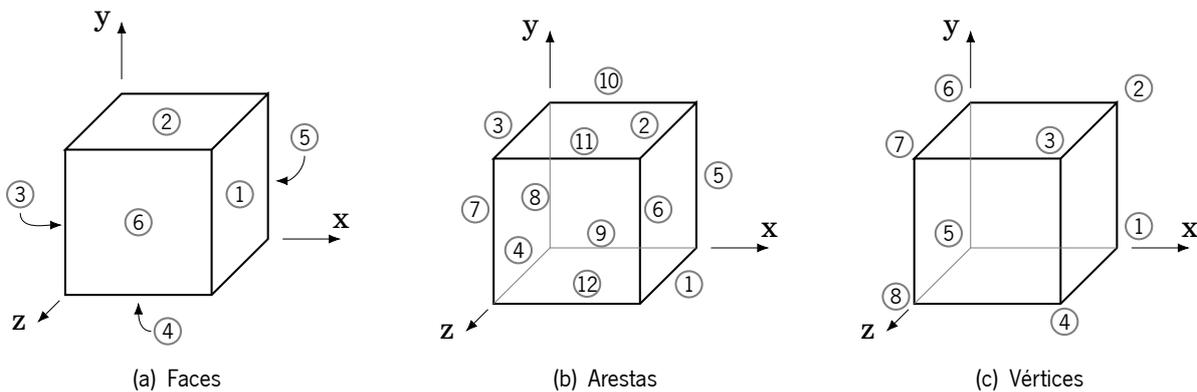


Figura 35: Volume unitário periódico, VRU.

$$\begin{aligned}
 u_i^1 - u_i^3 - c\varepsilon_{i1}^0 &= 0 \\
 u_i^2 - u_i^4 - a\varepsilon_{i2}^0 &= 0 \\
 u_i^6 - u_i^5 - a\varepsilon_{i3}^0 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.41}$$

Em que  $u_i^n$  representa o grau de liberdade  $i$  do nó na face  $n$ . As variáveis  $a$ ,  $b$  e  $c$  representam a dimensão do VRU nas direções  $y$ ,  $z$  e  $x$ , respetivamente. Os componentes do campo distante de deformação aplicado são expressos por  $\varepsilon_{ij}^0$ . A localização e numeração das arestas do VRU utilizada na aplicação das PBC é explicitada na Figura 35(b). Com efeito, cada nó ao longo de uma aresta do VRU com o nó na aresta paralela oposta, perfazendo um total de seis combinações possíveis. No caso da análise numérica, as duas faces que formam um par correspondente  $\Gamma_k$  devem ser discretizadas de forma compatível (i.e., os nós correspondentes devem ser posicionados com valores idênticos de coordenadas da face, sendo separados por um deslocamento dado pelo vetor  $\mathbf{c}_k$ ). As Equações 3.41 mostram que os deslocamentos dos nós mestres (*master*), da aresta 1 e aresta 3, inclui a informação sobre o tensor de deformação macroscópica  $\varepsilon_{ij}^0$ . Mais, os deslocamentos dos nós mestres e das faces 3 e 4 controlam os deslocamentos das faces escravas 1 e 2 (Figura 36). Apesar de, duas faces convergirem para um vértice comum, é impossível aplicar mais de uma restrição cinemática no mesmo grau de liberdade. Este fato, prova a necessidade de desenvolver diferentes conjuntos de equações para faces, arestas e vértices.

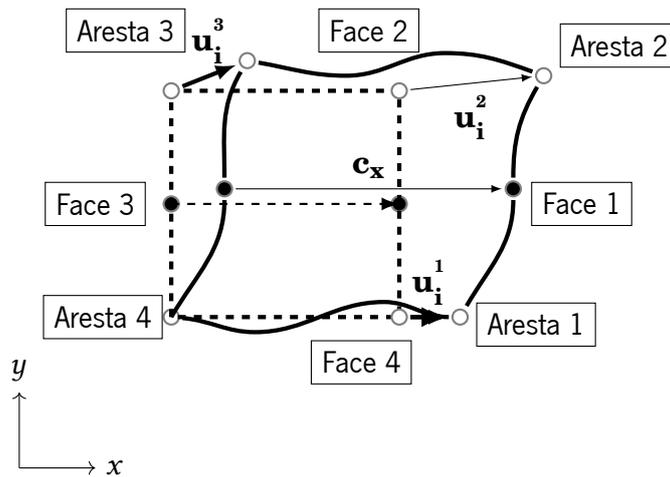


Figura 36: Condições de fronteira periódicas aplicadas numa célula unitária bidimensional, configuração inicial e deformada.

As Equações 3.42 enunciam as restrições aplicadas às arestas e utilizam a numeração expressa na figura 35(b) (Barbero, 2007).

$$\begin{aligned}
 u_i^2 - u_i^4 - c\varepsilon_{i1}^0 - a\varepsilon_{i2}^0 &= 0 \\
 u_i^1 - u_i^3 - c\varepsilon_{i1}^0 + a\varepsilon_{i2}^0 &= 0 \\
 u_i^6 - u_i^8 - c\varepsilon_{i1}^0 - b\varepsilon_{i3}^0 &= 0 \\
 u_i^5 - u_i^7 - c\varepsilon_{i1}^0 + b\varepsilon_{i3}^0 &= 0 \\
 u_i^{11} - u_i^9 - a\varepsilon_{i2}^0 - b\varepsilon_{i3}^0 &= 0 \\
 u_i^{10} - u_i^{12} - a\varepsilon_{i2}^0 + b\varepsilon_{i3}^0 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

De forma idêntica às arestas, também os vértices não permitem a aplicação de mais do que uma restrição cinemática para cada grau de liberdade de um nó. Apesar da convergência de três arestas num

vértice. Assim, cada vértice do VRU combinará com o vértice diagonalmente oposto através das Equações 3.43 (Barbero, 2007). Por último, a Figura 35(c) mostra a localização e numeração dos vértices para aplicação das PBC.

$$\begin{aligned}
 u_i^3 - u_i^5 - c\varepsilon_{i1}^0 - a\varepsilon_{i2}^0 - b\varepsilon_{i3}^0 &= 0 \\
 u_i^2 - u_i^8 - c\varepsilon_{i1}^0 - a\varepsilon_{i2}^0 + b\varepsilon_{i3}^0 &= 0 \\
 u_i^7 - u_i^1 + c\varepsilon_{i1}^0 - a\varepsilon_{i2}^0 - b\varepsilon_{i3}^0 &= 0 \\
 u_i^4 - u_i^6 - c\varepsilon_{i1}^0 + a\varepsilon_{i2}^0 - b\varepsilon_{i3}^0 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.43}$$

### 3.1.2.3 Cálculo das propriedades elásticas

Após aplicação das condições de contorno devem ser aplicadas cargas apropriadas na forma de tensões macroscópicas uniformes, deformações ou temperaturas homogêneas (i.e., ligar os campos microscópicos e macroscópicos). No que diz respeito à utilização de métodos de cálculo das propriedades efetivas, o método utilizado neste trabalho foi a homogeneização computacional direta<sup>3</sup> (Tucker e Liang, 1999; Drugan e Willis, 1996; Gusev, 1997). Este método consiste na aplicação de campos distantes (*far-field*) de tensões ou deformações numa célula unitária através de forças nodais concentradas ou deslocamentos prescritos, respetivamente, nos conjuntos de nós *master* das faces, arestas e vértices. Sendo o cálculo das propriedades efetivas do material na direção principal das tensões em relação a perturbação aplicada no modelo. Este método tem a vantagem de permitir a avaliação das propriedades mecânicas efetivas de forma direta, com base nas forças de reação dos nós *master*.

O cálculo das propriedades elásticas efetivas exige uma combinação de diferentes PBC e condições de contorno de deslocamento, que requer várias análises através do MEF. Contudo, os coeficientes de Poisson podem ser calculados com base nos módulos de Young das duas direções transversais correspondentes. Como referido anteriormente, as PBC são impostas através de equações lineares para ligar os graus de liberdade dos nós dos diversos conjuntos (i.e., faces, arestas e vértices). Estas equações de restrição contemplam os graus de liberdade e pontos de referência externos ao VRU. A utilização de pontos de referência é condição para impor deslocamentos, acomodar o movimento do corpo e posteriormente extrair as forças de reação, necessárias para estimar as propriedades elásticas. Além disso, as equações de restrição são classificadas em dois grupos, as destinadas ao cálculo do módulo de Young (e coeficientes de Poisson) e módulo de elasticidade transversal. Com efeito, a implementação computacional implica criar dois conjuntos de equações (com base nas propriedades a calcular) e os diferentes módulos de elasticidade são calculados alterando os deslocamentos aplicados em pontos de referência específicos por meio de condições de contorno. Os deslocamentos aplicados na superfície do VRU originam uma resistência interna, originando forças de reação nodais nas superfícies da fronteira deslocadas. Devido a limitações intrínsecas ao programa utilizado, ABAQUS™, é necessário extrair as forças de reação do ponto de referência utilizado na aplicação do deslocamento numa superfície específica com base no

<sup>3</sup>Também designado por Método de graus de liberdade macroscópicos (*Method of Macroscopic Degrees of Freedom* (MMDF)) (Michel et al., 1999) ou *Main Stream Averaging Homogenization* (MSAH) (AlKassem, 2009).

módulo de elasticidade requerido. O valor da força de reação num ponto de referência externo é igual à soma das forças de reação dos nós da superfície numa dada direção em estudo, submetidos a um determinado deslocamento. Por conseguinte, a divisão deste valor pela área da superfície solicitada fornece o valor da tensão correspondente à deformação imposta ( $\varepsilon$ ) (i.e., deslocamento prescrito dividido pelo comprimento do VRU na direção solicitada). O módulo de Young ( $E^h$ ) é calculado dividindo o valor da tensão pela deformação. A Equação 3.44 e Figura 37(a) apresenta um exemplo do cálculo do módulo de Young ( $E_{11}^h$ ).

$$E_{xx}^h = \frac{\langle \sigma_{xx} \rangle_{\Omega_s}}{\langle \varepsilon_{xx} \rangle_{\Omega_s}} \quad (3.44)$$

Já no caso do coeficiente de Poisson, é calculado a deformação transversal e dividindo-a pela deformação axial aplicada. A Equação 3.45 e Figura 37(a) ilustra cálculo do coeficiente de Poisson ( $\nu_{xy}^h$ ).

$$\nu_{xy}^h = -\frac{\langle \varepsilon_{xx} \rangle_{\Omega_s}}{\langle \varepsilon_{yy} \rangle_{\Omega_s}} \quad (3.45)$$

No caso do módulo de elasticidade transversal, são estimados dividindo a tensão de corte pela deformação de corte de ambas as direções correspondentes. Considere-se, por exemplo o cálculo da tensão de corte  $G_{12}$  dado pela Equação 3.46 e Figura 37(b).

$$G_{xy}^h = \frac{\langle \sigma_{xy} \rangle_{\Omega_s}}{\langle 2\varepsilon_{xy} \rangle_{\Omega_s}} \quad (3.46)$$

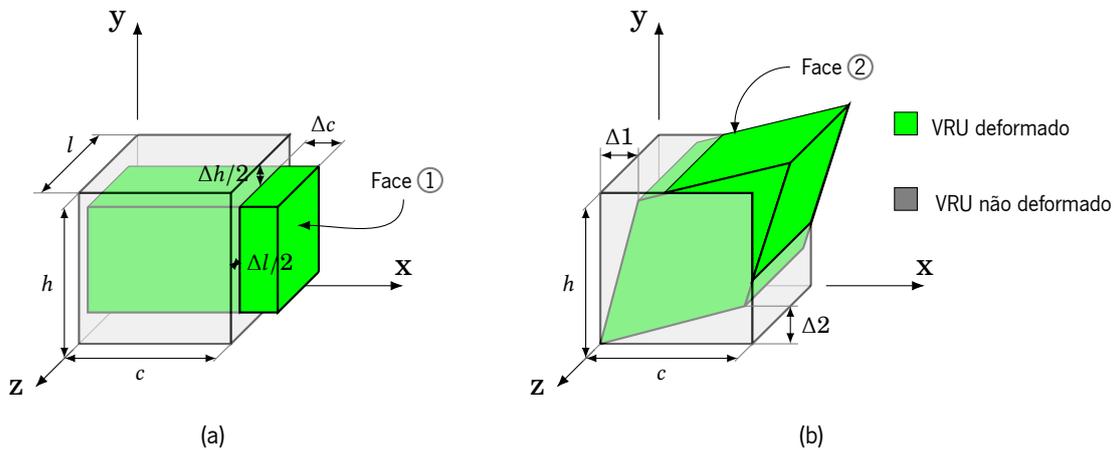


Figura 37: Célula unitária periódica, VRU sujeita a deslocamentos para calcular o módulo de Young, coeficiente de Poisson e módulo transversal.

No contexto do presente trabalho, as PBC foram impostas num VRU através de condições cinemáticas (equações). E para determinação do tensor elástico homogeneizado foram aplicados seis casos de deformação (linearmente independentes) de campo distante às VRU através da prescrição de vetores de deslocamento uniformes nos nós mestre (vd. Equações 3.41, 3.42 e 3.43). O fato da célula unitária empregues ser hexaédrica permite que os campos médios de deformação (de engenharia) possam ser

avaliados dividindo as forças de reação nos nós mestre pelas áreas de superfície apropriadas (face) e dividindo os deslocamentos dos nós mestre pelos comprimentos apropriados da célula (aresta), respectivamente. Assim, para determinação do tensor elástico homogeneizado foram aplicados seis casos de deformação (linearmente independentes) de campo distante às VRU através da prescrição de vetores de deslocamento uniformes nos nós mestres. A Figura 38 ilustra os seis deslocamentos característicos impostos.

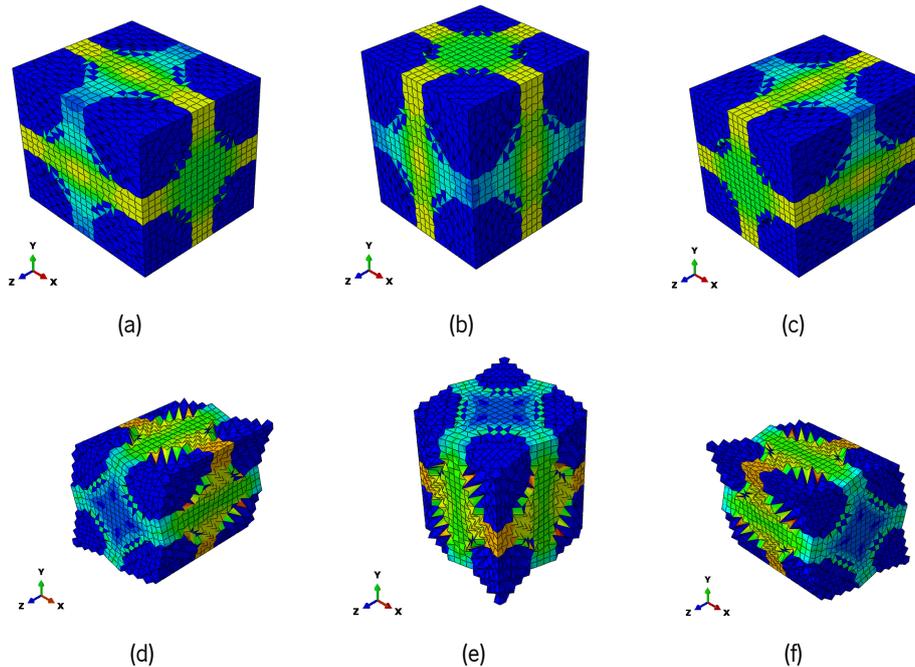


Figura 38: Tensões resultantes da aplicação dos seis deslocamentos uniformes característicos para cálculo do tensor de elasticidade homogeneizado: (a)  $\varepsilon_{xx}^0 = 1; \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{zz}^0, \varepsilon_{xy}^0, \varepsilon_{xz}^0, \varepsilon_{yz}^0 = 0$ . (b)  $\varepsilon_{yy}^0 = 1; \varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{zz}^0, \varepsilon_{xy}^0, \varepsilon_{xz}^0, \varepsilon_{yz}^0 = 0$ . (c)  $\varepsilon_{zz}^0 = 1; \varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{xy}^0, \varepsilon_{xz}^0, \varepsilon_{yz}^0 = 0$ . (d)  $\varepsilon_{xy}^0 = 1; \varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{zz}^0, \varepsilon_{xz}^0, \varepsilon_{yz}^0 = 0$ . (e)  $\varepsilon_{xz}^0 = 1; \varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{zz}^0, \varepsilon_{xy}^0, \varepsilon_{yz}^0 = 0$ . (f)  $\varepsilon_{yz}^0 = 1; \varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{zz}^0, \varepsilon_{xy}^0, \varepsilon_{xz}^0 = 0$ .

### 3.1.2.4 Programa de elementos finitos

Alguns dos objetivos do presente trabalho têm por base o desenvolvimento de ferramentas computacionais de OT e de HP. Neste sentido, foi necessário desenvolver diferentes módulos de cálculo para dar resposta aos objetivos definidos. Além disso, como ambas as ferramentas computacionais (i.e., OT e HCD) utilizam o MEF a opção recaiu na utilização de um programa comercial de CAE/MEF para executar as tarefas específicas do MEF (e.g., criação do VRU, definição das condições de fronteira, solicitações e malha). Assim, no contexto deste trabalho a escolha recaiu no programa Abaqus/Standard™ (versão 6.14-1) e na linguagem de programação orientada a objetos Python (Van Rossum e Drake, 2020) para aplicação do MEF e desenvolvimento dos módulos de cálculo, respectivamente. Na escolha desta associação pesou o

fato por um lado da possibilidade de utilização de uma única linguagem de programação (já que o Abaqus interpreta comandos em linguagem Python) e das vantagens da utilização de *scripts*<sup>4</sup>.

O uso da interface gráfica do utilizador GUI do Abaqus™ permite criar um modelo e visualizar os resultados, após cada operação são gerados comandos internos. Sendo que, estas instruções expressas em Python refletem a geometria e as opções selecionadas através das caixas de dialogo. Estes comandos, são enviados ao *kernel* do Abaqus™, que interpreta e usa as opções e configurações para criar uma representação interna do modelo (Puri, 2011). O Abaqus 6.14-1™ possui uma interface de *script* ASI que permite comunicar diretamente com o *kernel* contornando o uso da GUI. Portanto, a ASI é um extensão da linguagem Python, que em geral emprega a sintaxe e os operadores requeridos pelo Python. A utilização de *scripts* têm as seguintes vantagens:

- automatização de tarefas repetitivas (e.g., para gerar bibliotecas de materiais, criação de listas de ordens remotas para execução de tarefas de análise);
- realização de estudos paramétricos (e.g., *script* que modifica incrementalmente a geometria de uma peça, analisa e exibi os dados do modelo resultante);
- criação e modificação dos modelos;
- acesso aos dados resultantes das análises (e.g., para gravar ou realização de operações de pós-processamento dos resultados da análise).

O Abaqus™ possui uma biblioteca de elementos finitos composta por diversos tipos de elementos. Nomeadamente, elementos unidimensional (e.g., viga ) elementos bidimensionais (e.g., elementos casca triângulos e quadriláteros) e elementos sólidos (e.g., tetraedro, prismas triangulares e hexaedros). No presente trabalho, para a discretização dos VRU foram empregues os elementos finitos sólidos C3D8, C3D8R e C3D20.

O elemento C3D8 é um elemento isoparamétrico solido linear hexaédrico (*brick*) composto por oito nós. Este elemento possui integração completa (2x2x2). O elemento C3D8R é igualmente um elemento isoparamétrico sólido tridimensional diferindo do anterior, por apresentar integração numérica reduzida (num só ponto). Neste elemento a integração é baseada na formulação da deformação uniforme. Em que, as deformações não são obtidas no ponto de Gauss de primeira ordem mas calculadas analiticamente como a média da deformação em todo o volume do elemento. Este elemento possui três graus de liberdade de translação em cada nó. Mais, a utilização deste elemento, por possuir um único ponto de integração localizado no centro do elemento, em alguns casos permite reduzir o tempo de processamento. Por último, o elemento finito C3D20 é um elemento quadrático que possui vinte nós e integração

---

<sup>4</sup>Podem ser definidos como pequenos programas que automatizam a interação manual com o computador. A partir de uma interface e utilização, o *script* extrai informações e gera ficheiros de entrada para um programa de simulação, executa o programa, guarda ficheiros de dados, prepara a entrada para um programa de visualização, cria gráficos e animações e executa análise de dados (Puri, 2011).

numérica completa (3x3x3). Informação detalhada acerca da formulação dos elementos finitos presentes no programa Abaqus™ pode ser consultada em AbaqusV6.14-1 (2014). A Figura 39 ilustra os nós e pontos de integração dos três tipo de elementos utilizados.

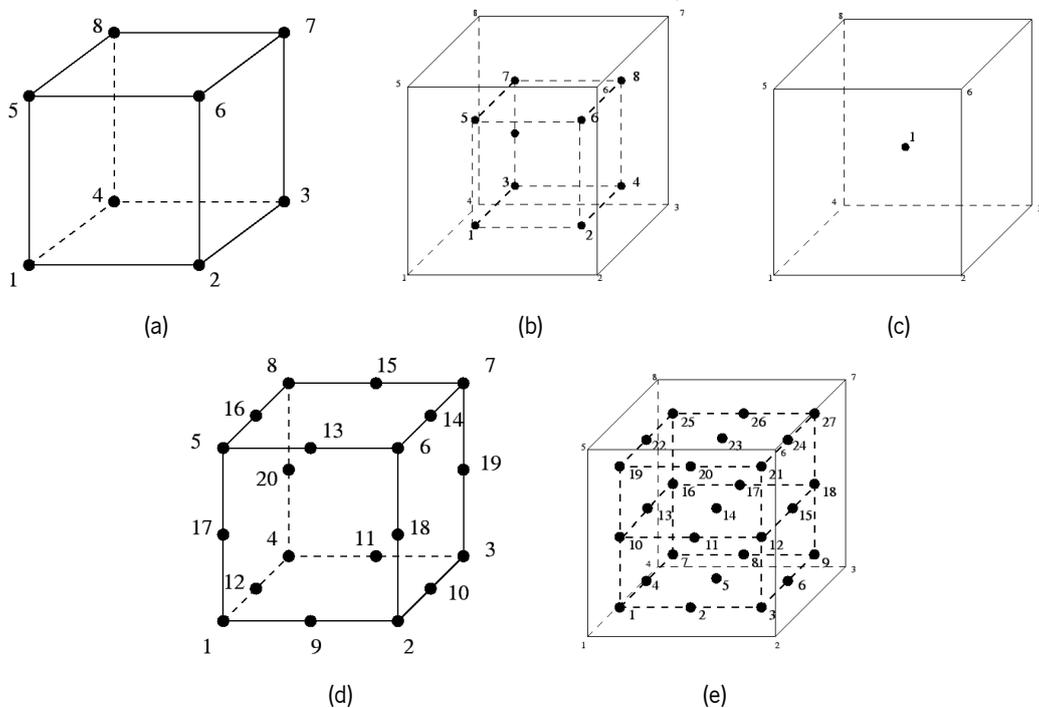


Figura 39: Elementos finitos sólidos utilizados: (a) e (b) elemento C3D8 nós e pontos de integração, respetivos; (a) e (c) elemento C3D8R nós e pontos de integração, respetivos; (d) e (e) elemento C3D20 nós e pontos de integração, respetivos.

### 3.1.3 Ensaios de desempenho

Esta sessão inicia-se com a descrição dos métodos e processos utilizados na análise de desempenho dos programas de OT e de homogeneização computacional direta implementados em problemas tridimensionais. Solucionam-se problemas com imposição de fronteiras periódicas e deslocamentos e/ou forças externas em VRU. Analisa-se a influência das soluções iniciais e dos diferentes parâmetros do algoritmo SIMP na diversificação das soluções ótimas para construção de biblioteca de VRU. Para tal, define-se diferentes combinações de frações volúmicas, parâmetros de configuração do SIMP e múltiplas soluções iniciais (i.e., domínios admissíveis com alguns elementos de densidade inicial igual a um) às quais são impostas condições de fronteira periódicas e sujeitas a deslocamentos ou forças uniaxiais e/ou corte. Além disso, estuda-se o desempenho (i.e., tempo de processamento) com diferentes elementos finitos e tamanhos de malha.

Por último, procede-se à geração de vários VRU por OT com diferentes propriedades mecânicas e ao

cálculo das suas propriedades efetivas (i.e., homogeneizadas). Assim, com os resultados obtidos na validação e análise de desempenho do algoritmo SIMP realizado anteriormente, demonstra-se a viabilidade na geração de VRU com uma gama de propriedades suficientemente ampla, a partir da conjugação de diversos parâmetros como soluções iniciais, frações volúmicas e parâmetros do algoritmo de OT.

### 3.1.3.1 Influência das soluções iniciais e parâmetros SIMP

Neste estudo de validação e análise de desempenho, foram testadas duas distribuições/nucleações de densidades iniciais distintas. Na primeira configuração com os oito elementos centrais de densidade superior (Figura 40(a)). Na segunda foram selecionadas quatro posições em cada uma das seis faces do Volume Representativo (VR), com quatro elementos cada (Figura 40(b)). Foi igualmente testado a OT de VRU por imposição de forças anti-periódicas uniaxiais e de corte, em nós das superfícies externas da solução inicial (Figura 40(c) e 40(d), respetivamente). Por último, empregaram-se combinações de nucleações e forças. A Figura 40 ilustra as diferentes condições fronteira e solicitações impostas testadas.

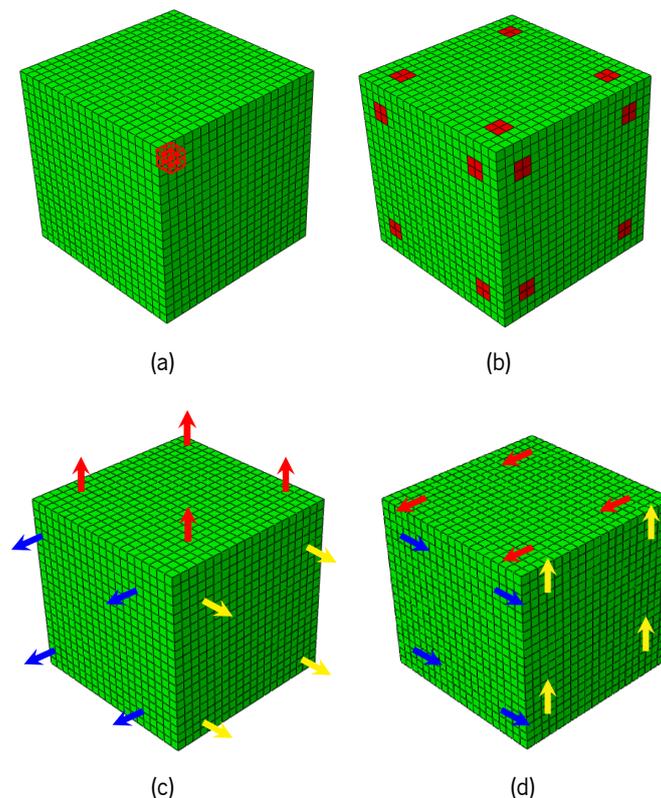


Figura 40: Condições de fronteira impostas testadas: (a) e (b) caso uniaxial e corte por deslocamentos; (c) e (d) caso uniaxial e corte por forças aplicadas.

A escolha de 3 solicitações uniaxiais e corte (i.e.,  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  e  $E_{33}$  e  $G_{12}$ ,  $G_{13}$  e  $G_{23}$ , respetivamente)

Tabela 8: Parâmetros utilizados no estudo dos diferentes problemas.

Parâmetros	Par1	Par2	Par3	Par4	Par5	Par6
Raio de filtro, $r$	1	2	2	2	3	2
Penalidade, $p$	4	4	3	3	3	5
Filtro de escala de cinza, $q$	3	3	1	3	2	3
Material 1 (rígido)	$E = 1850 \text{ MPa}$ , $\nu = 0,49$					
Material 2 (suporte)	$E = 0,3 \text{ MPa}$ , $\nu = 0,49$					

implementadas no estudo dos parâmetros mais adequados para obtenção das topologias de VRU otimizadas relaciona-se com o fato de estes serem os casos que maiores dificuldades causam ao processo de otimização do algoritmo SIMP. Nomeadamente, no caso de imposição de condições de fronteira periódicas e de deslocamentos externos. Estas dificuldades estão relacionadas com um estado triaxial de tensão em toda a estrutura o que origina atualização das densidades em bloco (i.e. toda a estrutura) levando à paragem do processo de otimização prematuramente sem obtenção de uma solução sólido-vazio (i.e., 0/1). A sensibilidade nos pontos de aplicação de carregamento mecânico é mais ou menos resultado de este ser dominante (Oliveira, 2013). Assim, as nucleações (i.e., elementos de densidade inicial 1) geram instabilidades numéricas, as quais surgem com a variação das sensibilidades, originando a interrupção da monotonia do problema.

Considera-se que o material possui comportamento elástico linear. Para prevenir singularidades no problema de MEF, na resolução das equações de equilíbrio do domínio admissível, foi estabelecido uma densidade mínima e máxima ( $0 < \rho_{min} \leq \rho$ ) através da parametrização das duas fases presentes (i.e., rígida e flexível). As propriedades mecânicas das duas fases (i.e., materiais) são definidas na Tabela 8. O domínio admissível inicial é formado por um VRU hexaédrico (cubo) discretizado numa malha  $20 \times 20 \times 20$  (8000) elementos hexaédricos (elemento finito linear hexaédrico do tipo *brick* C3D8R, com oito nós e integração reduzida, presente no *software* Abaqus 6.14-1™ (vd. Secção 3.1.2.4). A Figura 40 ilustra a malha de elementos finitos empregue neste estudo. Os VRU foram obtidos por OT sujeitos a vetores uniformes de deslocamento (hidrostático e corte) ou forças com imposição de PBC e restrições de volume de 10, 30 e 60 %, através do algoritmo SIMP com OC e a função objetivo para a mínima flexibilidade. A Figura 41 ilustra as condições de fronteira e vetores de força impostas no caso do problema 4. A OT foi executada através de um *script* Python e executado no ASI. (vd. 3.1.1.6). A Tabela 8 apresenta os seis conjuntos de parâmetros utilizados.

### 3.1.3.2 Ensaios de desempenho do algoritmo de OT e HCD

Nesta secção apresenta-se avaliação do desempenho do algoritmo de OT e de HCD na otimização topológica e na determinação das propriedades efetivas de um VRU, com duas malhas distintas e com três tipos de elementos finitos. O problema analisado consiste na otimização de uma solução inicial hexaédrica (cubo). Neste estudo foi utilizada uma estação de trabalho equipada com um processador

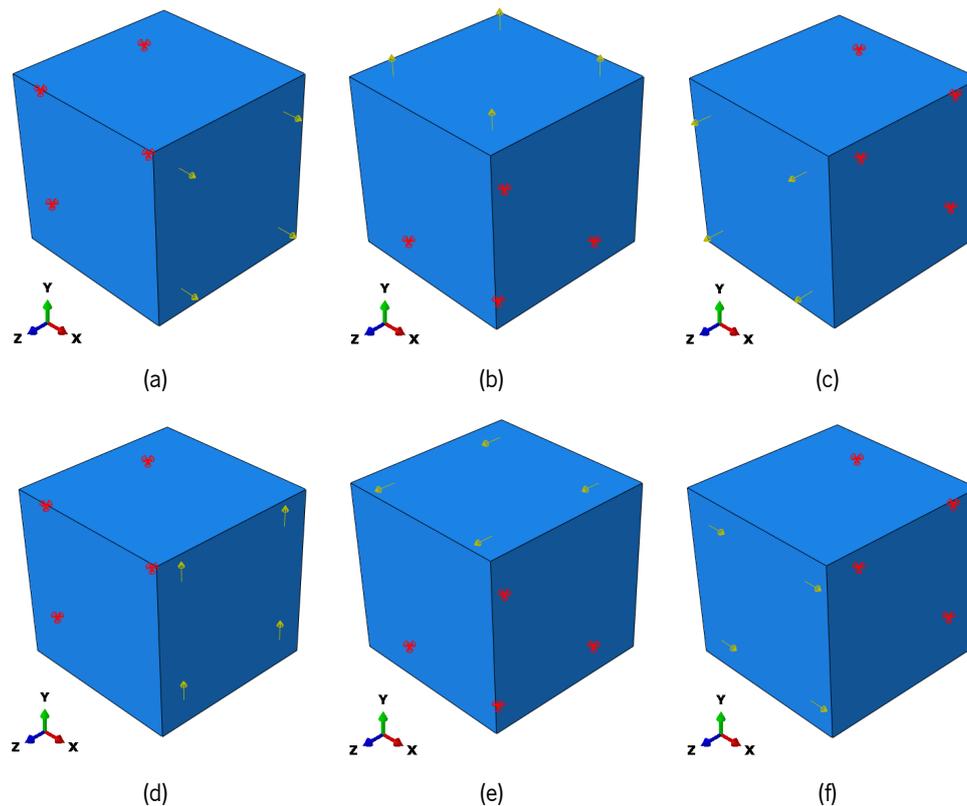


Figura 41: Condições de fronteira impostas no estudo do problema 4: (a), (b) e (c) condições fronteira caso uniaxial 1E, 2E e 3E, respectivamente; (d), (e) e (f) condições fronteira caso corte 1G, 2G e 3G, respectivamente.

Intel® Core™ i7-6820HQ CPU @ 2,71 GHz e 64 GB de memória RAM, com um sistema operativo de 64 bit Windows 10 Pro. Foi utilizado o programa de elementos finitos Abaqus 6.14-1™ (vd. Secção 3.1.2.4) em conjunto com os *scripts* de OT e HCD em linguagem Python implementados neste trabalho. Neste estudo a solução inicial foi discretizada com dois tamanhos de malha. Uma malha M1  $20 \times 20 \times 20$  (8000) e outra M2 com  $40 \times 40 \times 40$  (64000) elementos hexaédricos. Foram igualmente empregues três tipos de elementos finitos presentes na biblioteca do programa Abaqus 6.14-1™. A saber, C3D8, C3D8R e C3D20 (vd. Secção 3.1.2.4). A Figura 42 ilustra as malhas empregues neste estudo.

Como referência, foi empregue a solução inicial B (vd. Figura 40(b)) à qual foram aplicadas três solicitações de corte ( $G_{12}$ ,  $G_{13}$  e  $G_{23}$ ) através de a vetores uniformes de deslocamento com imposição de PBC. A solução inicial de referência foi sujeitas a OT através do algoritmo SIMP com OC implementado neste trabalho, com a função objetivo para maximizar a rigidez considerando os seguintes parâmetros: raio de filtro, 2; penalidade, 4; filtro de escala de cinza, 3 e raio de filtro, 4, para a malha M1. No caso da malha M2 foram considerados os seguintes parâmetros: penalidade, 4 e filtro de escala de cinza, 3. Posteriormente, o tempo total de cálculo de cada caso foi dividido pelo número de iterações. Após alcançadas as topologias ótimas foram calculadas as propriedades mecânicas efetivas (i.e., homogeneizadas). Por não existir uma solução analítica para calcular as propriedades mecânicas em questão (i.e., módulo

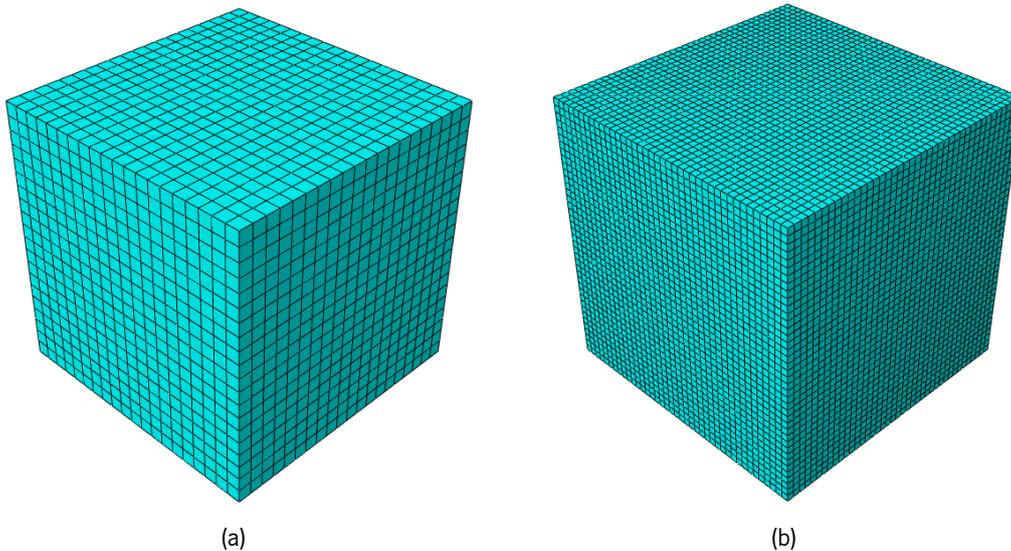


Figura 42: Malhas de elementos finitos utilizadas na avaliação de desempenho: (a) M1 20x20x20 (8000) elementos hexaedros, (b) M2 40x40x40 (64000) elementos hexaedros.

de Young, módulo de elasticidade transversal e coeficiente de Poisson) não foi realizado o estudo de convergência de malha. Optando-se por seleccionar dois tamanhos de malha considerados convenientes para o estudo em questão.

### 3.1.3.3 Topologias ótimas

Um dos objetivos deste trabalho é demonstrar a construção de famílias de VRU com propriedades variáveis, a partir da combinação de uma solução inicial e de um conjunto de parâmetros. De facto, a combinação pormenorizada de soluções iniciais e parâmetros de configuração do algoritmo de OT poderá contribuir para o desenvolvimento de bibliotecas de microestruturas. Mais, respeitando os constrangimentos práticos da tecnologia de FDD (e.g., ligações cinemáticas, menor detalhe, etc.). Apesar deste trabalho ter sido realizado com critérios e constrangimentos de produção relativos ao processo PJet, esta abordagem pode ser facilmente adotada a outros processos de FDD. Nesta secção descreve-se a abordagem de conceção de famílias de VRU, baseada na combinação de uma solução inicial, diferentes frações volúmicas de material sólido e de parâmetros de configuração do algoritmo de OT.

Como considerações gerais, neste estudo foram seleccionadas soluções iniciais tendo em consideração condições de simetria ortogonal cúbica. Assim, foram consideradas primeiramente três soluções iniciais com restrições de densidade (e.g., nucleações). Nas quais, foi atribuída densidade 1 (sólido) em determinados elementos da fronteira do domínio admissível. A cada uma, foram aplicadas solicitações triaxiais de tração ( $E_{11}$ ,  $E_{22}$  e  $E_{33}$ ) e solicitações de corte ( $G_{12}$ ,  $G_{13}$  e  $G_{23}$ ). Com efeito, foram sujeitos a vetores uniformes de deslocamento (hidrostático e corte) com imposição de PBC. As Figuras 43(a), 43(b) e 43(c) ilustram as três soluções iniciais com restrição de densidade assinaladas a vermelho.

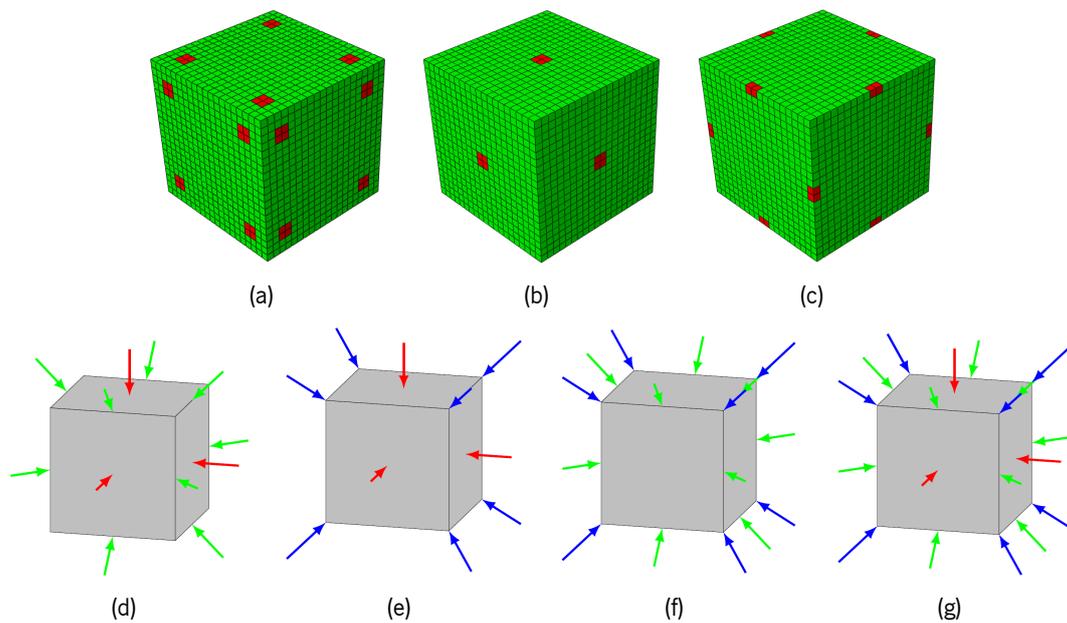


Figura 43: Soluções iniciais e condições de fronteira impostas no estudo do problema 4: (a), (b) e (c) condições iniciais sujeitas a vetores uniformes de deslocamento (hidrostático e corte) com imposição de PBC; (d), (e), (f) e (g) domínio admissível sujeito a quatro tipos de combinação de forças nodais.

Para o segundo tipo de solução inicial, o domínio admissível foi sujeito a quatro tipos de combinação de forças nodais. As Figuras 43(d), 43(e), 43(f) e 43(g) apresentam os modos de carregamento impostos. Apesar das condições de carregamento serem simétricas, para evitar o movimento do corpo rígido o domínio admissível foi sujeito a seis restrições (i.e., três translações ao longo de x, y, z e três rotações em torno de x, y e z). A Figura 44 ilustra as condições fronteira impostas.

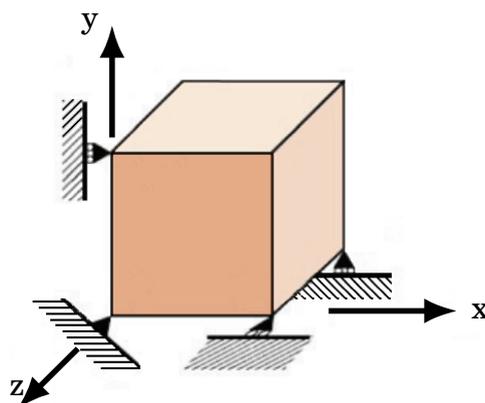


Figura 44: Condições fronteira aplicadas para prevenir o movimento de corpos rígidos.

Para os dez casos (famílias) estudados, foram consideradas cinco frações volúmicas para cada família (15, 30, 45, 60 e 75 %). O domínio admissível das soluções iniciais, formado por um VRU hexaédrico (cubo) foi discretizado numa malha  $20 \times 20 \times 20$  (8000) elementos hexaédricos (elemento finito linear

hexaédrico do tipo *brick* C3D8R, com oito nós e integração reduzida, presente no *software* Abaqus 6.14-1™ (vd. Secção 3.1.2.4). Foi adotada uma discretização por uma malha cúbica de 8000 elementos finitos para minimizar os tempos de processamento. No entanto, uma discretização mais fina permitirá obter novas topologias e consequentemente alargar a gama de propriedades disponíveis.

Posteriormente foram sujeitas a OT através do algoritmo SIMP com OC implementado neste trabalho, com a função objetivo para maximizar a rigidez considerando os seguintes parâmetros: raio de filtro, 2; penalidade, 4 e filtro de escala de cinza 3. Após alcançadas as topologias ótimas foram calculadas as propriedades mecânicas efetivas (i.e., homogeneizadas), sendo posteriormente normalizadas relativamente às propriedades do material base, dado por

$$\bar{E} = \frac{E^H}{E_0} \quad \text{e} \quad \bar{G} = \frac{G^H}{G_0}. \quad (3.47)$$

Em que  $E^H$  e  $G^H$  são o módulo de Young e de elasticidade transversal homogeneizados (calculados através de HCD) e  $E_0$  e  $G_0$  o módulo de Young e de elasticidade transversal do material base (VeroClear™), respetivamente. Foram consideradas as propriedades do VeroClear(RGD810)™, o módulo de Young médio ( $E = 2061$  MPa) obtido nos ensaios de caracterização experimental e um coeficiente de Poisson  $\nu = 0,49$  de acordo com o reportado no estudo dos autores Slesarenko e Rudykh (2018). No caso do módulo de elasticidade transversal  $G$ , foi assumido o valor  $G = 692$  MPa tendo sido determinado, admitido o material isotrópico, através da Equação 3.48. A análise MEF realizada na OT e na HCD foi executada através do programa Abaqus 6.14-1™.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.48)$$

### 3.1.3.4 Pós-processamento das topologias ótimas

Para os ensaios de validação do pós-processamento das topologias ótimas, testaram-se os dois algoritmos apresentados na Secção 3.1.1.7. Primeiramente, para testar o algoritmo 1 utilizou-se duas topologias de VRU, discretizadas com dois tamanhos de malha, a saber, 8000 e 64000 elementos hexaédricos. De seguida, testou-se o algoritmo 2 para concatenar seis topologias distintas, discretizadas com malha de 8000 elementos hexaédricos. A Figura 45 apresenta a visualização com pormenor de um ficheiro .stl que representa um VRU com fração volúmica ( $V_f$ ) de 30 %.

Os ficheiros obtidos nos ensaios foram posteriormente processados no *software* Magics20.01™, tendo sido testados quanto a erros.

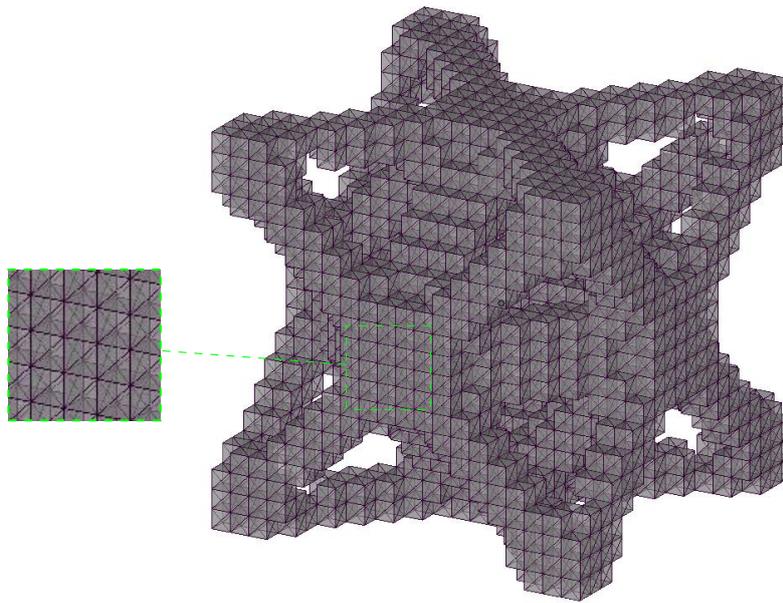


Figura 45: Visualização de ficheiro .stl de um VRU, com pormenor das superfícies de triângulos.

## 3.2 Componente experimental

Neste secção apresentam-se os materiais e métodos experimentais desenvolvidos no contexto do presente trabalho. Descreve-se o ensaio de tração e compressão normalizados empregues na caracterização dos materiais base. Também se expõem os ensaios de caracterização mecânica (tração, compressão e corte) empregues nos VRU e as adaptações necessárias realizadas para a sua concretização.

Os ensaios experimentais realizados nesta tese visam por um lado, caracterizar os materiais base, por outro lado obter dados e conhecimento acerca do comportamento experimental dos materiais de microestrutura interna (i.e., VRU) produzidos por PJet. Estes ensaios, além do objetivo de fornecer uma compreensão fenomenológica do comportamento mecânico, os resultados experimentais podem ser usados como dados de entrada para modelos de simulação e uma base experimental para validar as previsões obtidas por modelos de previsão das propriedades (e.g., homogeneização).

### 3.2.1 Caracterização mecânica

Com a adoção do FDD de polímeros como uma tecnologia não só para prototipagem mas também para fabrico de peças finais as propriedades mecânicas dos componentes em serviço assumem especial relevo. Por outro lado, as peças produzidas por FDD possuem propriedades mecânicas anisotrópicas dependentes da natureza e parâmetros dos processo. Por consequência, é necessário caracterizar os materiais base produzidos através de ensaios mecânicos normalizados. As normas ASTM e ISO são habitualmente empregues para determinar as propriedades mecânicas sob diferentes tipos de carregamento, como tração, flexão, compressão, fadiga, impacto e outros. Contudo, estas normas foram estabelecidas para testar materiais sólidos contínuos e não os materiais produzidos por FDD. Como uma das vantagens

do FDD é a produção de peças com geometrias complexas (e.g., materiais celulares) e não existindo à data padrões para testar, é necessário desenvolver diretrizes específicas para caracterizar esta classe de materiais. No contexto do presente trabalho só serão apresentados e discutidos aspectos relacionados com a caracterização mecânica de materiais poliméricos.

Para aplicações práticas, as peças produzidas por FDD devem suportar tensões mecânicas e agressões ambientais quando em serviço. É fundamental conhecer a resistência necessária para cada aplicação sob várias condições de carregamento e que pelo menos as propriedades físicas das peças produzidas por FDD devem ser idênticas às produzidas por processo convencionais (e.g., moldação por injeção) (Dizon et al., 2018; Forster, 2015; I. Gibson et al., 2015a). Os polímeros possuem menor resistência mecânica do que os metais, mas têm densidade mais baixa e deformações maiores na falha. Todavia, nalguns casos (i.e., polímeros de engenharia com elevado desempenho) as peças poliméricas poderão exibir maior resistência específica do que alguns metais. Portanto, considerando este e outros aspectos como menor custo e facilidade de fabricação de peças complexas, os polímeros apresentam vantagens em muitas aplicações (Kazmer, 2017b). As peças poliméricas produzidas por FDD partilham as vantagens enunciadas. No entanto, apesar dos esforços desenvolvidos, até à data, ainda não existem métodos de ensaios normalizados específicos para a caracterização mecânicas de componentes poliméricos produzidos por FDD. Os processos de FDD, os materiais e as normas de ensaios mecânicos devem satisfazer os requisitos dos consumidores e das indústrias (Forster, 2015; Monzon et al., 2015).

### 3.2.2 Normalização

A ASTM desenvolveu a norma ASTM D638-14 (2014) para ensaios à tração de polímeros. A ASTM D412-16 (2021) é específica para os ensaios de tração de borracha vulcanizada e elastômeros termoplásticos. Outras normas ASTM aplicadas aos polímeros são a ASTM D882-18 (2018) que cobre teste de tração de folhas finas de polímero e a ASTM D3039-17 (2017) para determinação das propriedades à tração de materiais compósitos de matriz polimérica, em especial reforçados por fibras de alto módulo. As normas ISO para ensaios de polímeros incluem a ISO 527-1:2012 (2012) para a caracterização de tração de plásticos, os provetes são em forma de haltere e as propriedades obtidas incluem resistência à tração, tensão de cedência, deformação elástica (*elongation at yield*), deformação plástica (*elongation at break*) e módulo de elasticidade. Além disso, a norma ISO 37:2017 (2017) cobre um método para determinar as propriedades à tração de termoplásticos, bem como de borrachas vulcanizadas. A ASTM D790-17 (2017) cobre a determinação das propriedades à flexão, incluindo a resistência à flexão e o módulo de flexão de materiais poliméricos. Esta norma possui dois procedimentos, o Procedimento A para materiais frágeis (i.e., rutura com pequenas deflexões) e o Procedimento B para materiais cuja rutura ocorre em grandes deflexões. Outra norma, a ISO 178:2019 (2019) cobre a metodologia para determinar as propriedades à flexão de polímeros rígidos e semi-rígidos, como a resistência à flexão e módulo de flexão. A ASTM D695-15 (2015) cobre o teste de compressão de polímeros rígidos, possibilita calcular a resistência à compressão, módulo de elasticidade, tensão de cedência e deformação plástica. A ISO 604:2002 (2022)

é padrão de ensaios correspondente da ISO. Outras normas permitem avaliar o comportamento dos polímeros nomeadamente, ao impacto, micro-indentação, fadiga, tolerâncias e ajustes, entre outros.

### **3.2.3 Ensaios mecânicos do material base**

As relações que caracterizam as propriedades físicas dos materiais são denominadas de equações constitutivas. Como resposta à infinita variedade de materiais e de solicitações a que podem estar sujeitos, o estudo e desenvolvimento de equações constitutivas é um dos campos mais ativos e desafiadores na área da mecânica. Ainda que, a teoria da mecânica dos sólidos contínuos tenha estabelecido alguns princípios para o desenvolvimento sistemático de equações constitutivas, muitas foram desenvolvidas através de relações empíricas baseadas em resultados experimentais (Sadd, 2009). No contexto do presente trabalho, o interesse é limitado a duas classes de materiais, sólidos e celulares periódicos (VRU), com cargas resultantes de efeitos mecânicos.

O comportamento mecânico dos sólidos é usualmente definido através de relações constitutivas de tensão-deformação. Com efeito, frequentemente essas relações expressam a tensão em função da deformação (e.g. taxa ou histórico), temperatura e propriedades do material. Neste trabalho, o modelo de material selecionado é o denominado sólido elástico linear sujeito a pequenas deformações. Embora essas suposições simplifiquem o modelo, as previsões de elasticidade linear mostraram boa concordância com os dados experimentais e forneceram métodos úteis para conduzir análises de tensão (Sadd, 2009).

Os testes experimentais são geralmente empregues para caracterizar o comportamento mecânico dos materiais existentes. Um desses métodos é o ensaio de tensão uniaxial (i.e., tração ou compressão), no qual um provete cilíndrico ou plano especificamente preparado é solicitado axialmente numa máquina de teste. A deformação é determinada pela mudança no comprimento entre as marcas de referência prescritas podendo ser medida por um extensómetro. Os dados da carga são medidos com uma célula de carga e são divididos pela área da secção transversal do provete para calcular a tensão. Os dados tensão-deformação são representados através de procedimentos normalizados. Cada material apresenta uma resposta diferenciada, sendo que a resposta linear inicial termina num ponto denominado de limite proporcional. Nesta região inicial, é caracterizada pelo fato de se o carregamento for removido, o provete recupera as suas dimensões iniciais esta característica é denominada de comportamento elástico. Contudo, a partir de um determinado ponto da curva tensão-deformação, o descarregar da carga não se traduz numa recuperação elástica, passando a registar-se uma deformação plástica permanente. Este ponto de transição entre o regime elástico e plástico é denominado de limite elástico. Outro ponto de interesse na curva tensão-deformação é o ponto de escoamento e define o valor a partir do qual se inicia a grande deformação plástica. Portanto, uma grande variedade de materiais reais exhibe comportamento elástico linear sob pequenas deformações. Isso leva a um modelo constitutivo linear para o caso de carregamento axial unidimensional dado pela relação  $\sigma = E\varepsilon$ , onde  $E$  é o declive da curva tensão-deformação uniaxial.

### 3.2.3.1 Ensaio de tração dos materiais base

O ensaio de tração uniaxial é possivelmente o mais utilizado na caracterização de materiais, sobretudo devido à sua simplicidade, facilidade de preparação e reprodutibilidade até à zona de estrição. Este ensaio é normalizado através de diferentes normas como, ISO 527-1:2012 (2012) e ASTM D638-14 (2014), sendo maioritariamente empregue para determinar as curvas tensão-deformação num estado de tensão uniaxial em diferentes direções. A principal vantagem deste teste é a deformação homogénea do provete até alcançar a zonas de estrição. Este facto, permite avaliar o comportamento do material com recurso a equações analíticas. De seguida são apresentados os métodos e materiais utilizados no ensaio de tração das resinas base.

Os provetes de tração foram modelados, com recurso ao programa de CAD SolidWorks2020 (Dassault Systemes), de acordo com o tipo 1A da norma ISO 527-1:2012 (2012). Na Tabela A.1 e Figura A.1 do Apêndice A são apresentadas as dimensões normalizadas e o desenho do provete de tração, respetivamente. Os ficheiros da modelação sólida dos provetes foram convertidos no formato .stl, com uma tolerância de conversão de 0,001 mm. Neste estudo os provetes foram produzidos em resina termoendurecível VeroClear RGD810™, fornecida pela empresa Stratasys™ (Stratasys, Eden Prairie, MN, USA). Na Tabela 9 são apresentadas as propriedades mecânicas do VeroClear™, fornecidas pelo fabricante. As resinas foram acondicionadas em ambiente controlado, anteriormente a serem colocadas no equipa-

Tabela 9: Especificações do material VeroClear™ (Stratasys, 2018b).

Resistência à tração, [MPa]	50 - 65
Extensão à rotura, [%]	10 - 25
Módulo de Young (tração), [MPa]	2000 - 3000
Resistência à flexão, [MPa]	75 - 110
Módulo à flexão, [MPa]	2200 - 3200

mento, de acordo com as normas do fornecedor. As dimensões dos provetes foram determinadas com um paquímetro Mitutoyo digital CD-15D, com escala 1 - 150,00(0,01) mm. Os provetes foram produzidos através do equipamento Polyjet, Objet500 Connex3™ (Stratasys, Eden Prairie, MN, USA). Os provetes foram fabricados com uma resolução de camada de 16 µm de acordo com as orientações da Figura 46.

Os ensaios mecânicos de tração foram realizados numa máquina universal Instron modelo 5969 (Instron Worldwide, Norwood, MA, USA) equipada com uma célula de carga de 50 kN e controlada pelo software de controlo e registo Bluehill 3™ (Instron Worldwide, Norwood, MA, USA). No ensaio de tração foram utilizados dois extensómetros para aquisição da deformação longitudinal e transversal, vídeo extensómetro (Instron modelo AVE2) e extensómetro de *clip* (Instron modelo W-E404), respetivamente. A Figura 47(a) e Figura 47(b) apresentam um ensaio de tração e pormenor da aplicação dos extensómetros, respetivamente.

Os ensaios mecânicos de tração foram obtidos de acordo com o tipo 1A da norma ISO 527-1:2019,

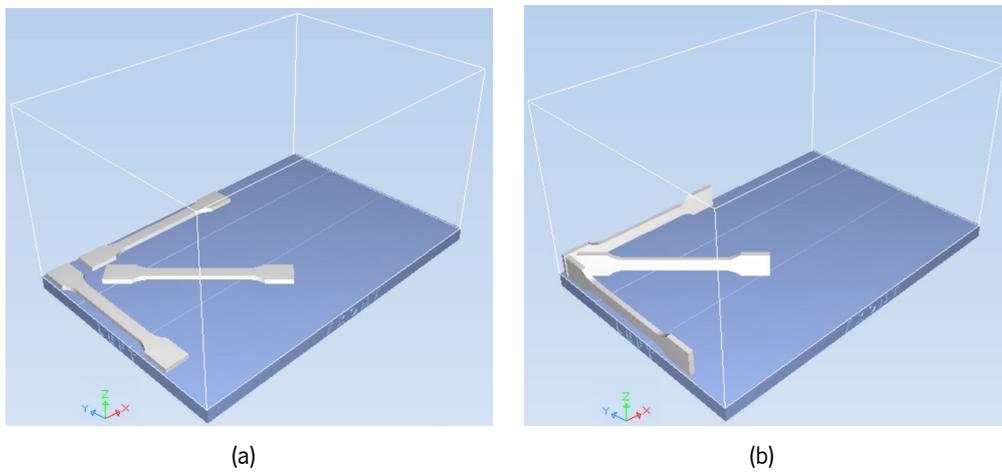


Figura 46: Orientação dos provetes de tração na plataforma de fabrico do equipamento Polyjet: (a) provetes tração xy, (b) provetes tração xz.

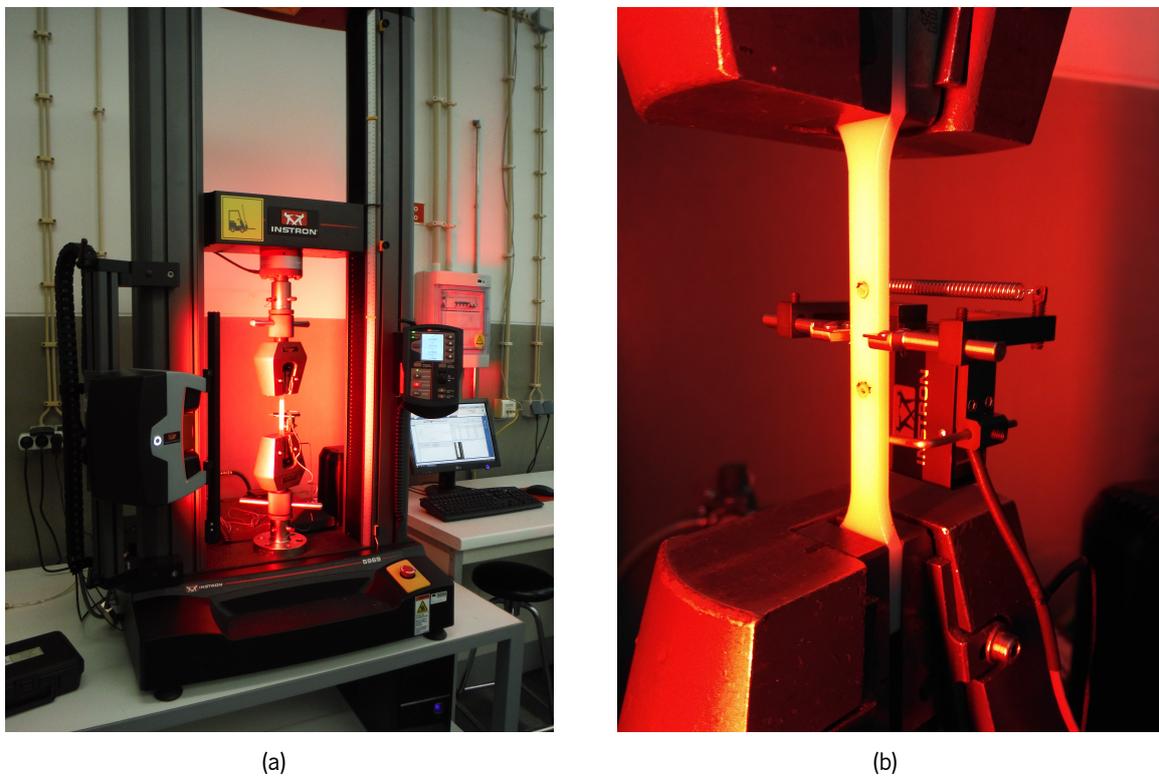


Figura 47: Ensaios mecânicos de tração: (a) realização de ensaio de tração; (b) pormenor da utilização do extensómetro longitudinal e transversal.

com uma velocidade de 1,0 mm/min. Foram testados quatro provetes para cada uma das seis orientações selecionadas ( $xy\ 0^\circ$ ,  $xy\ 45^\circ$ ,  $xy\ 90^\circ$ ,  $xz\ 0^\circ$ ,  $xz\ 45^\circ$ ,  $xz\ 90^\circ$ ), num total de trinta. O primeiro objetivo dos ensaios mecânicos de tração foi a obtenção dos dados força-deslocamento e deformação longitudinal-deformação transversal para cada provete. A partir destes dados primários foram determinadas cinco propriedades mecânicas: (i) módulo de Young à tração ( $E_t$ ); (ii) força máxima  $F_m$ ; (iii) tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,2% ( $\sigma_{0,2\%}$ ); (iv) tensão máxima ( $\sigma_m$ ).

Os dados primários força-deslocamento e deformação longitudinal-deformação transversal obtidos do software de registo, foram normalizados para dados tensão-deformação. Neste estudo foi utilizada a tensão real dos provetes, considerando a área real da secção transversal do provete em cada instante do ensaio (i.e., calculada com os dados da deformação transversal fornecidos pelo extensómetro). A tensão à tração  $\sigma$  foi calculada através da Equação 3.49.

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (3.49)$$

E que  $F$  é a força e  $A$  a área da secção transversal do provete a cada instante. O módulo de Young de cada provete foi calculado considerando o declive da curva tensão-deformação ( $\sigma - \epsilon$ ) no intervalo entre a deformação 0,0005 e 0,0025 mm/mm. De seguida são apresentados os resultados do controlo dimensional, ensaios de tração e compressão e discutida a influência das orientações de produção nas propriedades mecânicas dos provetes.

### 3.2.3.2 Ensaio de compressão materiais base

Os ensaios de compressão uniaxial também têm sido amplamente utilizados na caracterização dos materiais. Porém, algumas desvantagens estão associadas a este ensaio. Os principais problemas resultam do elevado risco de instabilidade plástica (encurvadura) devido à carga de compressão aplicada no provete com razões de aspeto elevadas, cones de atrito e barrilamento (Choung e Cho, 2008). Nesta secção são descritos o ensaio de compressão uniaxial empregue na caracterização da resina VeroClear™.

Os provetes de compressão foram modelados, com recurso ao software de CAD SolidWorks2020 (Dassault Systemes), de acordo com a norma ASTM D695-15. Os ficheiros da modelação sólida dos provetes foram convertidos no formato .stl, com uma tolerância de conversão de 0,001 mm. Neste estudo foram produzidos provetes em resina termoendurecível VeroClear RGD810™, fornecida pela empresa Stratasys™ (Stratasys, Eden Prairie, MN, USA). Na Tabela 9 são apresentadas as propriedades mecânicas do VeroClear™, fornecidas pelo fabricante. As resinas foram acondicionadas em ambiente controlado, anteriormente a serem colocadas no equipamento, de acordo com as normas do fornecedor. Os provetes foram produzidos através do equipamento Polyjet, Objet30 Prime™ (Stratasys, Eden Prairie, MN, USA). Os provetes foram fabricados com uma resolução de camada de 16  $\mu\text{m}$  de acordo com as orientações da Figura 48.

Os provetes de compressão foram produzidos com as dimensões padrão recomendadas pela norma ASTM D695-15. A saber, para determinação da resistência mecânica foi utilizado um provete em de

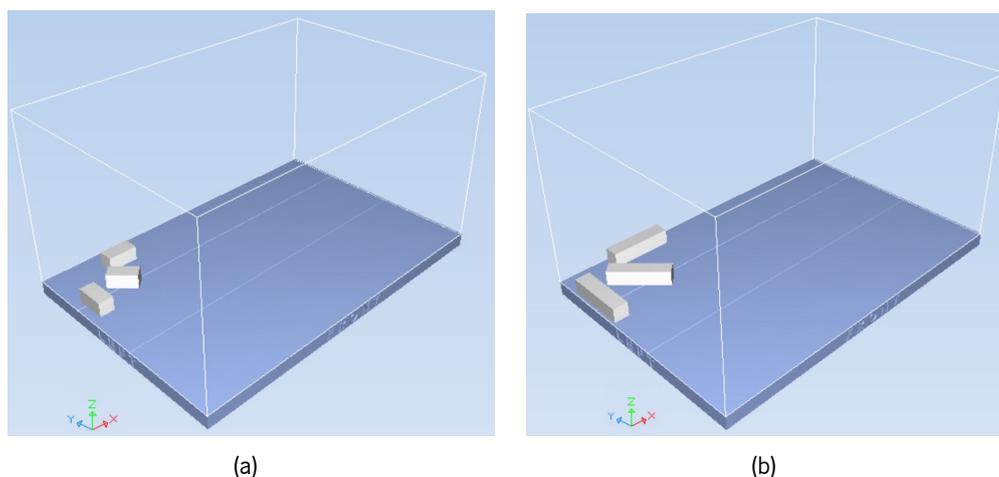


Figura 48: Orientação dos provetes de compressão na plataforma de fabrico do equipamento Polyjet: (a) provetes compressão tipo 1 (curtos), (b) provetes compressão tipo 2 (longos).

prisma reto  $12,7 \times 12,7 \times 25,4$  mm, para determinação do módulo de elasticidade  $12,7 \times 12,7 \times 50,8$  mm. Os ensaios mecânicos de compressão executaram-se numa máquina universal Instron modelo 5969 (Instron Worldwide, Norwood, MA, USA) equipada com uma célula de carga de 100 kN e controlada pelo software de controlo e registo Bluehill 3™ (Instron Worldwide, Norwood, MA, USA). Para reduzir o efeito do atrito nos resultados dos ensaios, as superfícies dos provetes em contacto com os pratos da máquina foram sujeitas a acabamento superficial com lixa (P1000), tendo sido igualmente aplicado um lubrificante à base de grafite.

Os ensaios mecânicos de compressão foram realizados de acordo com a norma ASTM D695-15, com uma velocidade de 1,3 mm/min. Foram testados cinco provetes por cada tamanho de provete (dois) e para cada uma das três orientações selecionadas ( $xy$   $0^\circ$ ,  $xy$   $45^\circ$ ,  $xy$   $90^\circ$ ), num total de trinta. O primeiro objetivo dos ensaios mecânicos de compressão foi a obtenção dos dados força-deslocamento para cada provete. A partir destes dados primários foram determinadas cinco propriedades mecânicas de acordo com o tipo de provete. Assim, provete longo, módulo de Young à compressão ( $E_c$ ) e tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,2% ( $\sigma_{0,2\%}$ ); provete curto, força máxima  $F_m$ , tensão máxima ( $\sigma_m$ ) e deformação máxima ( $\epsilon_{F_m}$ ). Os dados primários força-deslocamento obtidos do software de registo, foram normalizados para dados tensão-deformação. O módulo de Young de cada provete foi calculado considerando o declive da curva tensão-deformação ( $\sigma - \epsilon$ ) dos provetes longos no intervalo entre a deformação 0,0005 e 0,0025 mm/mm.

### 3.2.4 Ensaios mecânicos – volumes repetitivos unitários

Uma das vantagens do FDD é a produção de estruturas precisamente otimizadas para uma aplicação estrutural específica, que em simultâneo minimiza a massa do material usada para produzir a peça ou estrutura. Contudo, esta nova tecnologia vem colocar em causa décadas de ensaios de caracterização da

resistência dos materiais. Uma vez que, as curvas de tensão-deformação do material à tração, que são basilares de todas as classes de resistência de materiais, foram criadas baseadas em provetes sólidos homogêneos produzidos através de processos de produção convencionais. É a partir das curvas de teste experimentais que muitos dos parâmetros básicos que caracterizam a resistência dos materiais são derivados (e.g., determinação da resistência mecânica do material, medições de tenacidade e ductilidade). Os processos de FDD são capazes de criar materiais/peças que, embora constituídos de materiais isotrópicos de engenharia tradicionais, podem não ser realmente isotrópicos. Este aspeto, assume especial importância no caso dos materiais celulares produzidos por FDD.

O conhecimento das propriedades mecânicas dos VRU é fundamental para aferição com as calculadas numericamente. No caso do comportamento estático, o módulo de Young ( $E$ ), módulo de elasticidade transversal ( $G$ ) e coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), entre outras. Existe uma grande variedade de ensaios para caracterizar os materiais sólidos que são definidos nas normas ASTM, ISO e Norma Europeia (NE), entre outras. Estas especificam os procedimentos adotar nos ensaios, dimensões das amostras, métodos de preparação, tratamento dos resultados, etc. A maioria dos testes e ensaios normalizados foram desenvolvidos para caracterizar materiais sólidos contínuos. No caso dos materiais poliméricos com microestrutura interna periódica, não existem normas dedicadas à sua caracterização experimental. Exceção feita, no caso de espumas poliméricas rígidas, para as quais existem normas, nomeadamente, ISO 844:2021 (2021) e ASTM D1621-16 (2016) para determinação das propriedades à compressão e ISO 1922:2018 (2018) para calcular as propriedades ao corte. Assim, os aspetos relativos aos ensaios mecânicos (e.g., forma, dimensão dos provetes, parâmetros do ensaios, etc.) são estabelecidos por cada grupo de investigação.

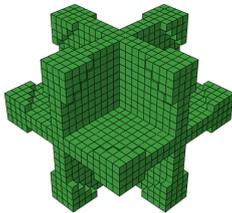
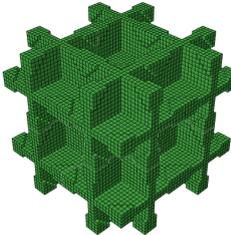
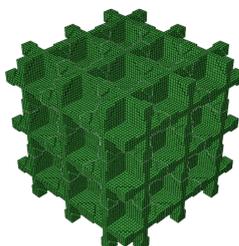
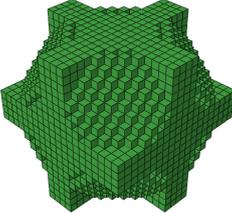
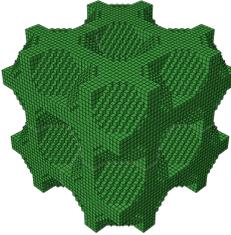
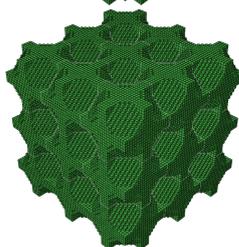
Com efeito, os ensaios mecânicos de compressão uniaxial são o método mais comum de avaliação dos MMM. Os ensaios de flexão e de tração uniaxial são menos utilizados, principalmente pela fragilidade típica dos MMM atuais em solicitações à tração, por outro lado devido a dificuldades operatórias. No caso da aplicação de ensaios de corte em materiais poliméricos com microestrutura interna periódica (VRU), da literatura consultada, não existem relatos da sua utilização.

#### **3.2.4.1 Ensaio de tração das topologias ótimas**

Para testar/validar a capacidade de produzir por FDD as topologias ótimas e para identificar os seus diferentes comportamentos mecânicos, foram produzidos VRU num equipamento PJet. Posteriormente, foram realizados ensaios mecânicos de tração uniaxial e as propriedades mecânicas calculadas. A inexistência de normas para a realização de ensaios mecânicos de tração em materiais poliméricos com microestrutura celular levou a que neste estudo tenham sido considerados alguns aspetos na sua preparação. Nomeadamente, as amarras de fixação dos VRU ao equipamento de ensaios mecânicos. Os restantes aspetos do ensaio de tração (e.g., preparação, velocidades, etc.) foram consideradas as orientações expressas numa norma de ensaios mecânicos de tração em polímeros. Nesta secção são apresentados os resultados dos ensaios mecânicos de tração uniaxial das topologias ótimas.

Neste estudo foi avaliado um VRU otimizado topologicamente a solicitação hidrostática e sujeito a duas restrições de fração volúmica ( $V_f$ ) 30 e 60 %. As combinações anteriores foram produzidas em conjuntos de  $1 \times 1 \times 1$  (1),  $2 \times 2 \times 2$  (8) e  $3 \times 3 \times 3$  (27) VRU, com comprimento de lado de 5, 10 e 15 mm, respetivamente. Cada VRU está discretizado numa malha cúbica de  $20 \times 20 \times 20$  (8000) elementos, considerando as dimensões unitárias do VRU de  $5 \times 5 \times 5$  mm cada voxel possui  $250 \times 250 \times 250$   $\mu\text{m}$ . Foram fabricados cinco provetes de cada uma das seis diferentes configurações, num total de trinta provetes. A Tabela 10 ilustra as seis configurações de VRU testadas.

Tabela 10: Configurações dos VRU otimizados a solicitação hidrostática.

$V_f$ [%]	$1 \times 1 \times 1$	$2 \times 2 \times 2$	$3 \times 3 \times 3$
30			
60			

Nota:  $V_f$  fração volúmica.

Foram modeladas amarras de provetes em forma de osso-de-cão com secção transversal de  $5 \times 5$  mm,  $10 \times 10$  mm e  $15 \times 15$  mm, para acoplar as diferentes configurações de VRU. Os ficheiros digitais de produção das amarras e dos VRU foram obtidos através do algoritmo 1 e algoritmo 2 (vd. Secção 3.1.1.7), tendo sido gravados no formato .stl, com uma tolerância de conversão de 0,001 mm. A Figura 49 ilustra os modelos dos provetes empregues nos ensaios de tração. Os provetes foram produzidos em resina VeroClear™ (RGD810), TangoBlackPlus™ (FLX980) e com material de suporte SUP706B num equipamento Objet500 Connex3™ (Stratasys, Eden Prairie, MN, USA), com uma resolução de camada de 30  $\mu\text{m}$ . Os materiais foram fornecidos pela empresa Stratasys™ (Eden Prairie, MN, USA). A produção foi realizada de acordo com as seguintes condições: (i) orientação de produção xy  $0^\circ$  (vd Secção 46); (ii) opção “modo brilho” (*i.e.*, glossy, sem material de suporte a envolver a peça); (iii) as resinas foram armazenadas num ambiente controlado anteriormente a serem colocadas no equipamento, de acordo com as recomendações indicadas pelo fornecedor; (iv) o material de suporte da base foi removido mecanicamente após a produção.

Os ensaios mecânicos foram realizados numa máquina universal Instron modelo 5969 (Instron Worldwide, Norwood, MA, USA) equipada com uma célula de carga de 1 kN e 50 kN, controlada pelo

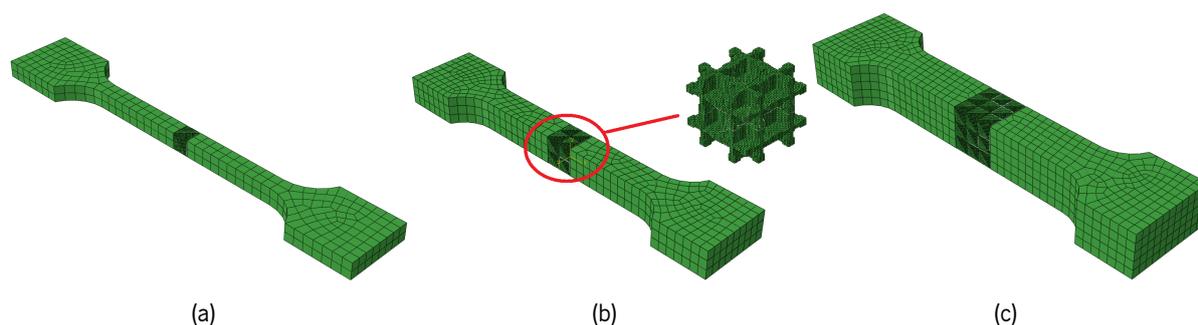


Figura 49: Modelos de provete osso-de-cão adaptados para a realização do ensaio de tração: (a) 1 VRU, (b) 8 (2x2x2) VRU e (c) 27 (3x3x3) VRU.

software de controlo e registo Bluehill 3™ (Instron Worldwide, Norwood, MA, USA). Foi utilizado um vídeo extensómetro Instron modelo AVE2 para aquisição da deformação longitudinal. Os ensaios mecânicos foram realizados de acordo a norma ISO 527-1:2012 (2012), com uma velocidade de 1,0 mm/min. Foram testados cinco provetes para cada uma das seis configurações. O módulo de Young de cada provete foi calculado considerando o declive da curva tensão-deformação ( $\sigma - \epsilon$ ) no intervalo entre a deformação 0,0005 e 0,0025 mm/mm. Os dados primários de força-deslocamento obtidos da gravação do software foram normalizados para dados de tensão-deformação.

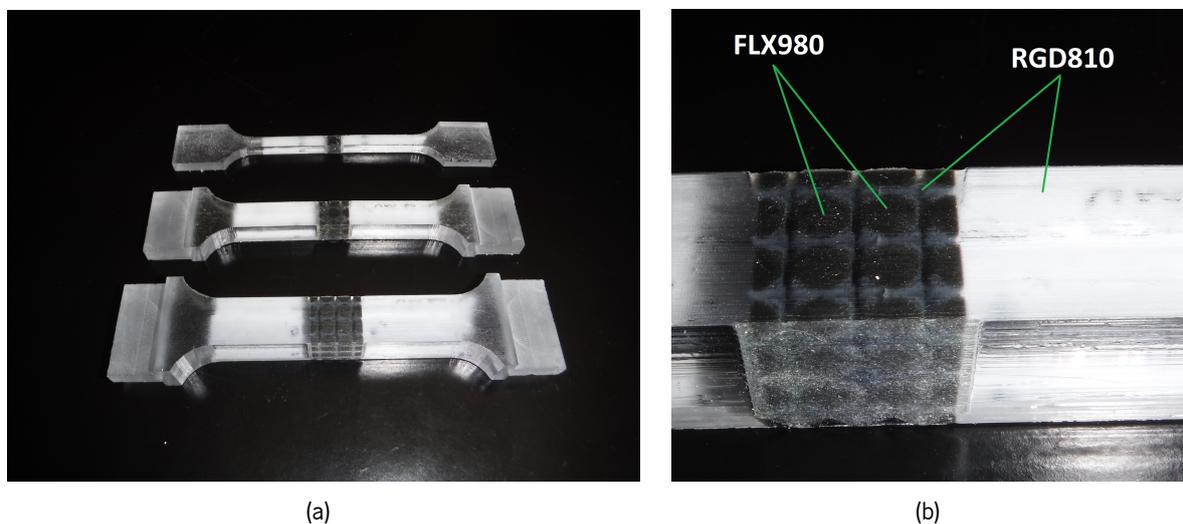


Figura 50: Provetes de ensaio de tração após produção: (a) três configurações dos provetes empregues, (b) pormenor do provete 3x3x3 com indicação dos dois materiais.

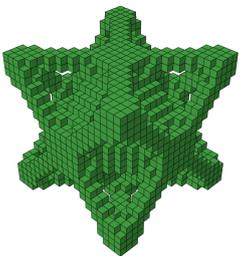
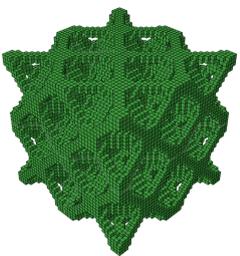
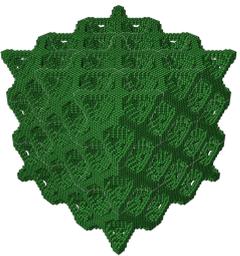
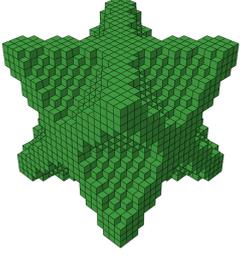
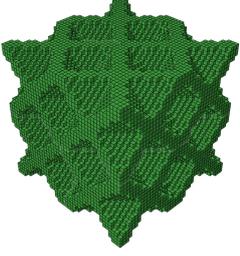
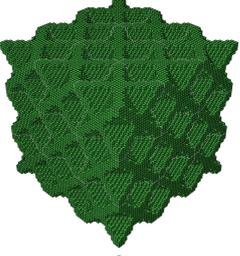
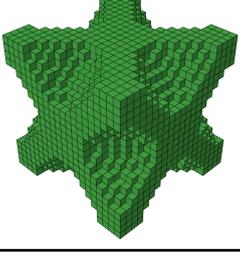
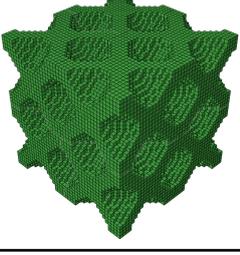
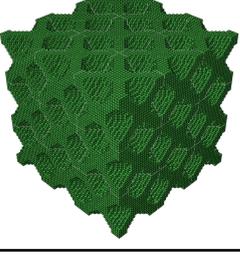
### 3.2.4.2 Ensaio de compressão das topologias ótimas

No caso de materiais poliméricos com microestrutura celular não existem normas estabelecidas para determinação experimental das propriedades mecânicas à compressão. Com o propósito de caracterizar

topologias ótimas e comparar os resultados experimentais com os calculados através de HCD efetuaram-se ensaios de compressão. Além disso, estes ensaios foram realizados de modo a estudar o efeito de escala na variação das propriedades mecânicas. Nesta secção são apresentados os resultados dos ensaios mecânicos de compressão realizados neste trabalho.

Foram selecionadas três topologias cúbicas ótimas, com frações volúmicas de 30, 45 e 60 %, obtidas através de OT e sujeitas a solicitações de corte. Estas topologias podem ser classificadas como tendo um comportamento mecânico dominante de alongamento (M. F. Ashby, 2005). Os VRU com 10 mm de comprimento de aresta, foram montados em três configurações, 1×1×1, 2×2×2 (8) e 3×3×3 (27) VRU. As dimensões da aresta de cada VRU são de 10 mm. A razão de aspeto entre o comprimento e a aresta é de 12:10, 22:20 e 32:30 para as configurações 1×1×1, 2×2×2 e 3×3×3, respetivamente. Cada VRU foi discretizado numa malha formada por 20×20×20 (8000) elementos hexaédricos. Considerando as dimensões unitárias do VRU e o número de elementos da malha, cada voxel possui as dimensões 500×500×500 μm. As dimensões das arestas dos provetes são superiores em 20, 40 e 60 vezes as dimensões da aresta do voxel. A Tabela 11 ilustra as modelações sólidas das topologias e os diferentes arranjos testados.

Tabela 11: Configurações dos VRU otimizados a solicitação de corte.

$V_f$ [%]	1×1×1	2×2×2	3×3×3
30			
45			
60			

Nota:  $V_f$  fração volúmica.

As diferentes configurações de provete foram montadas entre duas bases do mesmo material com

1 mm de espessura. Os ficheiros digitais da montagem dos VRU e das bases foram obtidos através do Algoritmo 2 (vd. Secção 3.1.1.7), tendo sido gravados no formato .stl, com uma tolerância de conversão de 0,001 mm. Foram produzidos três provetes de cada configuração e fração volúmica em simultâneo com as bases, num total de vinte sete, em resina VeroClear™ (RGD810), tendo sido utilizado o material de suporte SUP706B, ambos fornecidos pela empresa Stratasys (Eden Prairie, MN, USA).

Os provetes foram produzidos num equipamento Objet30 Prime™ (Stratasys, Eden Prairie, MN, USA), com uma resolução de espessura de camada de 16  $\mu\text{m}$ . Na produção foram observadas as seguintes condições: (i) orientação de produção xy  $0^\circ$  (vd. Figura 48); (ii) opção “modo mate”, com material de suporte a envolver a peça); (iii) as resinas foram armazenadas num ambiente controlado anteriormente a serem colocadas no equipamento, de acordo com as recomendações indicadas pelo fornecedor; (iv) o material de suporte foi removido após a produção através de banho químico (2 % de NaOH e  $\text{Na}_2\text{SiO}_3$ ) e pela utilização de jato de água. A Figura 51 ilustra as três configurações dos provetes com fração volúmica de 30 %, empregues nos ensaios de compressão.



Figura 51: Provetes cúbicos com fração volúmica 30 % com três arranjos distintos de VRU: (esq.) provete com configuração de  $3 \times 3 \times 3$  (27) VRU, (cen.) provete com configuração de  $2 \times 2 \times 2$  (8) VRU e (dir.) provete com configuração de  $1 \times 1 \times 1$  (1) VRU.

A fim de obter as propriedades mecânicas dos VRU à compressão, foram realizados ensaios de mecânicos numa máquina universal Instron modelo 5969 (Instron Worldwide, Norwood, MA, USA) equipada com uma célula de carga de 100 kN. Os ensaios foram executados de acordo com a norma ASTM D1621-16 (2016), tendo sido aplicada uma velocidade de 1,3 mm/min. Os dados primários de força-deslocamento obtidos foram normalizados para dados de tensão-deformação. O módulo de Young de cada provete foi calculado considerando o declive da curva tensão-deformação ( $\sigma - \epsilon$ ) no intervalo da deformação 0,0005 e 0,0025 mm/mm.

### 3.2.4.3 Ensaio de corte das topologias ótimas

O estudo do comportamento ao corte dos materiais com microestrutura celular poderá contribuir para um melhor conhecimento do desempenho elástico, plástico e mecanismos de falha destes materiais. De acordo com a pesquisa bibliográfica efetuada à data, não existem relatos de estudos experimentais de ensaios de corte realizados em materiais poliméricos com microestrutura celular. De facto, a grande maioria dos trabalhos apresentados empregam ensaios mecânicos estáticos de compressão uniaxial e em menor número ensaios de tração uniaxiais para a caracterização mecânica dos VRU.

Nas últimas décadas, foram desenvolvidos e usados uma grande variedade de métodos de ensaios de corte, em especial para aplicação em materiais compósitos (Walrath e Adams, 1983). Uma das razões para a grande proliferação de métodos é a dificuldade de obter um estado de tensão de corte razoavelmente puro e uniforme no provete, o que é crítico para a medição das propriedades reais ao corte. Outro problema resulta que alguns métodos de teste determinam adequadamente a resistência ao corte, contudo não o módulo de elasticidade transversal, sendo que o inverso também é verdadeiro em relação aos outros métodos (Walrath e Adams, 1983). Assim, e apesar de um material ortotrópico possuir três propriedades independentes do módulo de elasticidade transversal, a maioria dos métodos de ensaio de corte só permitem a determinação de apenas uma ou duas propriedades. Com exceção dos métodos Iosipescu Shear ASTM D5379-19 (2019) e V-Notched Rail Shear ASTM D7078M-20 (2020) (Walrath e Adams, 1983). Outros métodos são por exemplo o teste de sobreposição simples ou duplo, *single* e *double shear lap test*, de corte em viga curta (ASTM D3165-14, 2014) e o teste de corte por compressão (Schneider et al., 2001). Na seleção do método importam fatores como: (i) simplicidade do provete; (ii) acessórios do ensaio; (iii) facilidade de preparação dos provetes; (iv) realização do teste propriamente dito e (v) custo do método. Estes fatores de natureza não-técnica tornam-se influências dominantes na seleção do método de teste.

Como referido anteriormente, uma área de aplicabilidade dos ensaios de corte são os materiais compósitos. Inquestionavelmente, os compósitos laminados de alta resistência ao corte revestem-se de interesse para muitas aplicações estruturais (e.g., vigas mistas). Por exemplo, a região central das vigas mistas suportam o carregamento transversal sob a forma de tensões de corte. Nestes materiais a delaminação (i.e., falha entre os diferentes planos das camadas de reforço) é o mecanismo de falha mais comum. De facto, a ligação das diferentes camadas de compósito laminado representa um ponto crítico na produção e qualidade destes materiais que influencia as suas propriedades mecânicas e limita a sua aplicabilidade prática. Outra área de aplicabilidade com características semelhantes no mecanismo de falha, são as juntas coladas.

Cada método possui limitações específicas de acordo com as características do teste, forma do provete e dos acessórios empregues. No caso do ensaio de corte por sobreposição simples para aferir a resistência de ligação interlaminar convencional, possui limitações relacionadas com o estado de tensões misto complexo, que inclui momentos flectores exteriores ao plano de solicitação de corte (Duncan, 2010; Zinnecker et al., 2020). A Figura 52 ilustra este estado de tensão (distribuição de tensões) no teste de

teste de corte por sobreposição simples com destaque para o momento fletor que ocorre no estado deformado.

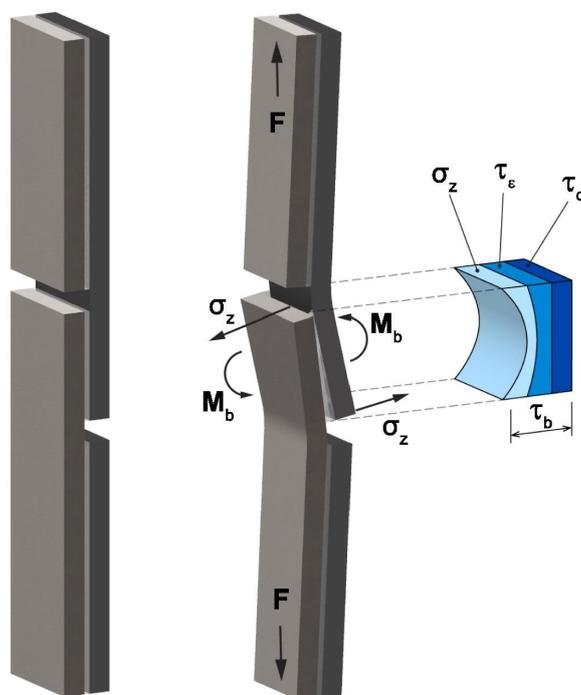


Figura 52: Teste de corte por sobreposição simples provete no estado inicial e carregado (adaptado de Zinnecker et al. (2020)).

O estudo aprofundado de materiais constituídos por (VRU) requer dados experimentais confiáveis acerca das propriedades ao corte destes materiais. Por outro lado a capacidade de testar mecanicamente os VRU a solicitações de corte é especialmente importante devido aos desafios associados à previsão da sua resistência ao corte e aos mecanismos de rotura associados. Relativamente aos métodos padrão estabelecidos para esta classe de materiais, a Norma ISO 1922:2018 (2018) estabelece o procedimento para determinar as propriedades mecânicas (resistência, módulo e deformação ao corte) ao corte de materiais celulares rígidos, mais concretamente de espumas poliméricas.

No caso dos materiais celulares rígidos formados por (VRU), a pesquisa bibliográfica realizada não encontrou evidências de terem sido apresentados trabalhos científicos nesta área. No contexto do presente trabalho foi desenvolvido/adaptado um ensaio de corte por tração por sobreposição simples, para caracterizar as propriedades ao corte dos VRU produzidos por FDD em resina termoendurecível. Os resultados foram comparados com os obtidos por HCD em termos de módulo de elasticidade transversal. Procedeu-se igualmente à análise dos modos de falha/rotura.

A realização do teste de corte em VRU implica impor um carregamento ao corte puro. Para tal, é necessário utilizar acessórios de interface entre o provete e a máquina de ensaios, que garantam este tipo de carregamento. Assim, foi modelado no programa de CAD SolidWorks2020 (Dassault Systemes) um acessório para numa das extremidades ser fixo nas amarras da máquina de ensaios e na outra ser colada o provete a ser solicitado ao corte. As alterações mais significativas relativamente ao acessório do

teste de corte por sobreposição simples (*single lap shear*) foi o aumento da espessura e a criação de um batente para o provete. Com efeito, aumento de espessura é variável sendo que a zona da amarração do acessório à máquina exibe uma espessura superior para garantir uma maior superfície de contacto e uma maior estabilidade. O acessório possui igualmente um batente com dupla finalidade, primeiro facilitar e garantir o posicionamento alinhado do provete para a operação de colagem. Segundo, transmitir o esforço de corte no plano indicado. Os acessórios foram produzidos em alumínio (5052) por maquinação (corte por arranque de apara). Na Secção C.3 do Apêndice C são apresentados os desenhos 2D do acessório de fixação. Quanto ao provete propriamente dito, a escolha da geometria recaiu num arranjo de  $1 \times 2 \times 2$  (4) VRU entre duas bases do mesmo material com 1 mm de espessura. Estas bases têm por finalidade criar uma superfície para a colagem do provete ao acessório de fixação e por outro lado facilitar o seu posicionamento correto no acessório de fixação. As dimensões totais do provete são  $20 \times 12 \times 20$  mm. O provete é fixado aos acessórios por junta adesiva (colagem). Nesta junta colada foi empregue uma resina epóxi bi-componente, tendo a sua mistura e cura sido realizada de acordo com as recomendações do fabricante. A Figura 53 ilustra a montagem do provete nos acessórios de ensaio.

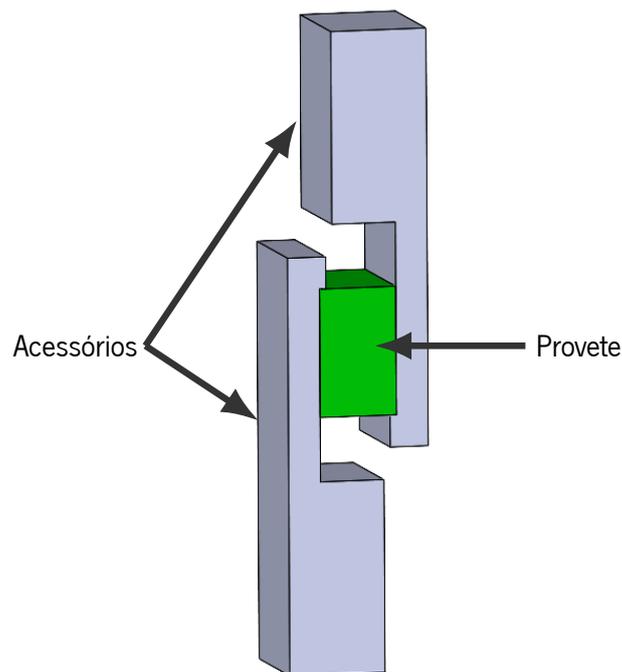


Figura 53: Montagem proposta para o ensaio de corte por sobreposição simples.

Neste estudo foram avaliadas topologias cúbicas ótimas obtidas por OT sujeitas a uma solicitação de corte, com três frações volúmicas ( $V_f$ ) a saber, 30, 45 e 60 %. Os provetes testados eram compostos por quatro VRU. As frações volúmicas anteriores foram produzidas em conjuntos de  $1 \times 2 \times 2$  (4), com comprimento de lado de 20 e 12 mm. Cada VRU foi discretizado numa malha cúbica de  $20 \times 20 \times 20$  (8000) elementos, considerando as dimensões unitárias do VRU de  $10 \times 10 \times 10$  mm cada voxel possui  $500 \times 500 \times 500$   $\mu\text{m}$ .

Os provetes foram montados entre duas bases do mesmo material com 1 mm de espessura. Os ficheiros digitais da montagem dos VRU e das bases foram obtidos através do Algoritmo 2 (vd. Secção 3.1.1.7), tendo sido gravados no formato .stl, com uma tolerância de conversão de 0,001 mm. Foram produzidos três provetes de cada configuração em simultâneo com as bases, num total de nove, em resina VeroClear™ (RGD810), tendo sido utilizado o material de suporte SUP706B fornecidos pela empresa Stratasys (Eden Prairie, MN, USA). As resinas foram armazenadas em ambiente controlado anteriormente a serem colocadas no equipamento, de acordo com as recomendações do fornecedor. A Figura 54 apresenta o provete de 30 % de fração volúmica.

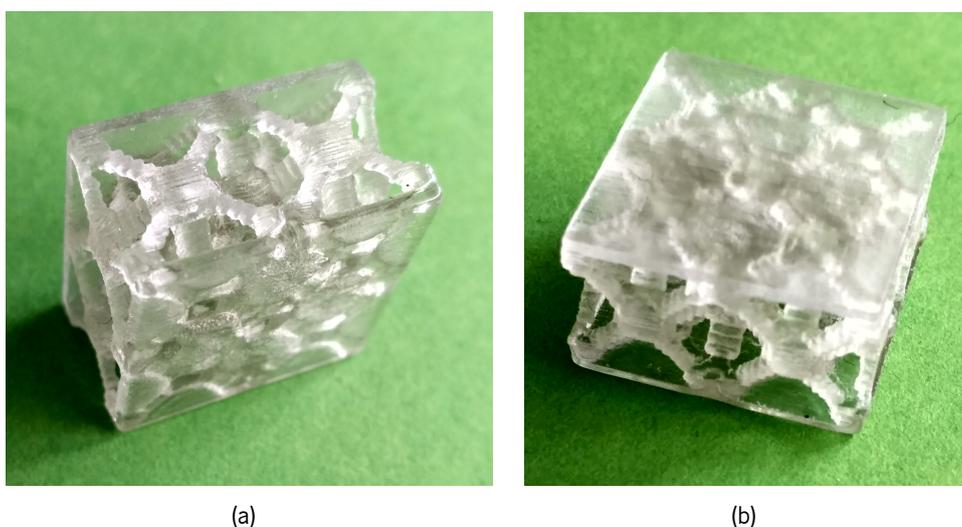


Figura 54: Provete com 30 % fração volúmica para ensaio de corte após produção.

Foram fabricados três provetes de cada uma das três configurações, num total de nove, em resina VeroClear™ (RGD810), tendo sido utilizado o material de suporte SUP706B fornecidos pela empresa Stratasys (Eden Prairie, MN, USA). As resinas foram armazenadas em ambiente controlado anteriormente a serem colocadas no equipamento, de acordo com as recomendações do fornecedor. Os provetes foram produzidos num equipamento Objet30 Prime™ (Stratasys, Eden Prairie, MN, USA), com uma resolução de espessura de camada de 16  $\mu\text{m}$ . Na produção foram observadas as seguintes condições: (i) orientação de produção xy  $0^\circ$  (vd. Figura 48); (ii) opção “modo mate”, com material de suporte a envolver a peça); (iii) as resinas foram armazenadas num ambiente controlado anteriormente a serem colocadas no equipamento, de acordo com as recomendações indicadas pelo fornecedor; (iv) o material de suporte foi removido após a produção através de banho químico (2 % de NaOH e  $\text{Na}_2\text{SiO}_3$ ) e pela utilização de jato de água.

Os provetes foram colados aos acessórios com um adesivo (cola epóxi). O procedimento de experimental consistiu em preparar a cola epóxi (pesagem e mistura dos dois componentes) e na aplicação nas zonas de colagem dos acessórios com os provetes (zona de sobreposição de aproximadamente 2 cm). Imediatamente, foram colocados num gabari e aplicada uma força de consolidação até à cura do adesivo.

Na colocação da montagem dos provetes na máquina para se proceder ao ensaio, foi utilizado um nível, para minimizar o desalinhamento axial e a possível ocorrência de momento fletor durante o ensaio.

Os ensaios experimentais realizados neste trabalho visam lograr um maior conhecimento acerca do comportamento dos materiais e da estrutura interna dos materiais celulares. Para além do objetivo de fornecer uma compreensão dos fenómenos associados, os resultados experimentais podem ser usados para fornecer dados de entrada em modelos de simulação. Além disso, constituir uma base experimental para validar as previsões obtidas pelos modelos. Neste trabalho foram realizados ensaios mecânicos de tração uniaxial, compressão uniaxial e corte para determinação das propriedades mecânicas dos VRU. No Capítulo 4 são apresentados os resultados e realizada a sua discussão e expressas as conclusões preliminares destes estudos.

## Resultados e Discussão

*Apresentam-se e discutem-se os resultados dos estudos numéricos de teste e validação. Explora-se a influência dos parâmetros de configuração do programa de otimização topológica na conceção de topologias ótimas para bibliotecas de microestruturas. Apresentam-se igualmente famílias de VRU geradas a partir de diferentes estratégias e soluções iniciais. Testa-se o cálculo das propriedades elásticas efetivas através da homogeneização computacional direta. Por último apresentam-se e discutem-se os resultados experimentais dos ensaios de caracterização das propriedades mecânicas dos materiais base e dos VRU.*

### 4.1 Introdução

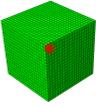
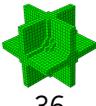
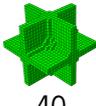
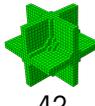
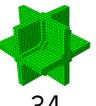
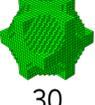
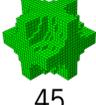
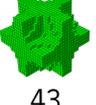
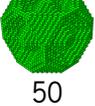
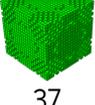
Nesta sessão apresentam-se e discute-se dos resultados do estudo de análise de desempenho dos programas de OT e de homogeneização computacional direta implementados em problemas tridimensionais. Neste estudo foi considerado o desempenho (i.e., tempo de processamento) com diferentes elementos finitos e tamanhos de malha. Posteriormente, demonstra-se a viabilidade da abordagem proposta para a geração de VRU com uma gama de propriedades suficientemente ampla, a partir da conjugação de diversos parâmetros como soluções iniciais, frações volúmicas e parâmetros do algoritmo de OT.

Posteriormente são apresentados os resultados dos ensaios mecânicos normalizados de tração e compressão da resina VeroClear™, processado pelo processo MJ. Nestes ensaios, é estudada a relação entre as propriedades mecânicas e as diferentes orientações de fabrico. Estes resultados experimentais, são uma base experimental utilizada para validar as previsões dos modelos. São igualmente apresentados os resultados do controlo dimensional realizado aos provetes de ambos os ensaios e expostos os resultados dos ensaios de tração, compressão e corte experimentais realizados com as topologias ótimas obtidas por OT.

## 4.2 Influência das soluções iniciais e parâmetros SIMP

Os resultados obtidos para cada um dos tipos de soluções iniciais estudadas são apresentados nas Tabelas 12, 13, 14, 15 e 16. Da análise das tabelas dos resultados, constata-se que à exceção do problema 1, os parâmetros Par1 e Par2 permitiram alcançar a convergência das soluções ótimas. Segundo, verifica-se que não é possível estabelecer uma tendência entre a fração volúmica e o número de iterações necessárias até ser alcançada a convergência. Terceiro, as topologias resultantes do problema 4 apresentam maior concentração de elementos sólidos na vizinhança dos nós de aplicação das forças, ao contrário dos problemas 1, 2 e 3 que recorrem à estratégia de nucleações por imposição de densidade iniciais 1. Nestes, e para as combinações de parâmetros estudados, os elementos iniciais de densidade 1 mantêm-se sólidos não alterando o seu estado na solução ótima.

Tabela 12: Topologias resultantes do problema 1.

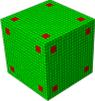
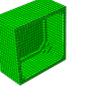
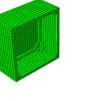
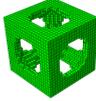
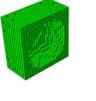
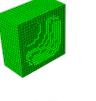
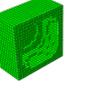
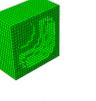
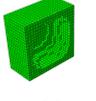
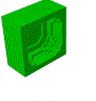
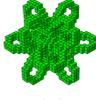
SI	Caso	$V_f$ [%]	Par1	Par2	Par3	Par4	Par5	Par6
 A	A1E	10	 36	 53	 53	 56	N.C. 9	 48
	A2E	30	 27	 36	 40	 42	N.C. 11	 34
	A3E	60	 30	 45	N.C. 12	N.C. 12	N.C. 12	 43
	A1G	10	 30	 65	N.C. 16	N.C. 15	N.C. 11	 57
	A2G	30	 50	N.C. 13	N.C. 12	N.C. 12	N.C. 14	 54
	A3G	60	 37	N.C. 12	N.C. 12	N.C. 12	N.C. 12	N.C. 12

Nota: SI, solução inicial;  $V_f$ , fração volúmica; A1E, A2E e A3E solicitação triaxial (E11, E22 e E33); A1G, A2G e A3G solicitação corte (G12, G13 e G23); o número abaixo de cada topologia indica o número de iterações; N.C., não convergiu para uma solução discreta 0/1.

É inquestionável a dependência das soluções ótimas das soluções iniciais e dos parâmetros de configuração do algoritmo. No caso típico de OT de estruturas, o objetivo é obter soluções ótimas com maior rigidez possível e materializáveis (soluções do tipo vazio-sólido, 0/1). Nestes casos, a avaliação

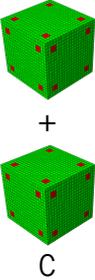
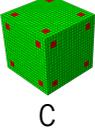
e seleção dos parâmetros da OT pode ser realizada com base no valor da função objetivo, na ausência de densidade intermédias e de padrões de tabuleiro de xadrez na solução ótima. Contudo, no presente estudo é explorada a dependência das soluções ótimas das soluções iniciais e dos parâmetros de configuração do algoritmo de OT na conceção de topologias variadas com propriedades mecânicas distintas para enriquecimento de bibliotecas de VRU (i.e., espaço de *design*).

Tabela 13: Topologias resultantes do problema 2.

SI	Caso	$V_f$ [%]	Par1	Par2	Par3	Par4	Par5	Par6
 B	B1E	10	 27	 47	 42	 51	 45	 43
	B2E	30	 40	 44	 37	 39	 49	 40
	B3E	60	 30	 35	 39	 41	 43	 39
	B1G	10	 29	 40	 50	 69	 64	 41
	B2G	30	 38	 44	N.C.	N.C.	 57	 42
	B3G	60	 31	 50	N.C.	N.C.	N.C.	 46

Nota: SI, solução inicial;  $v_f$ , fração volúmica; B1E, B2E e B3E solicitação triaxial (E11, E22 e E33); B1G, B2G e B3G solicitação corte (G12, G13 e G23); o número abaixo de cada topologia indica o número de iterações; N.C., não convergiu para uma solução discreta 0/1.

Tabela 14: Topologias resultantes do problema 3.

SI	Caso	$V_f$ [%]	Par1	Par2	Par3	Par4	Par5	Par6
 +  C	C1E	10	 32	 44	 45	 53	 42	 36
	C2E	30	 30	 44	 37	 39	 53	 41
	C3E	60	 30	 35	 39	 40	 43	 41
	C1G	10	 26	 40	N.C.	N.C.	N.C.	N.C.
	C2G	30	 30	 43	 57	 60	N.C.	N.C.
	C3G	60	 30	 51	N.C.	N.C.	N.C.	N.C.

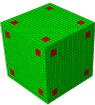
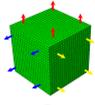
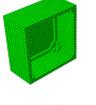
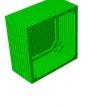
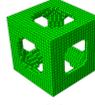
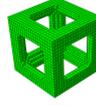
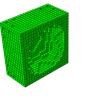
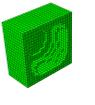
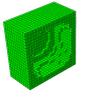
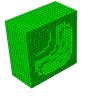
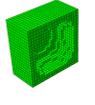
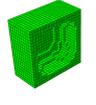
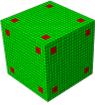
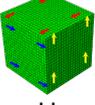
Nota: SI, solução inicial;  $V_f$ , fração volúmica; C1E, C2E e C3E solicitação triaxial (E11, E22 e E33); C1G, C2G e C3G solicitação corte (G12, G13 e G23); o número abaixo de cada topologia indica o número de iterações; N.C., não convergiu para uma solução discreta 0/1.

Tabela 15: Topologias resultantes do problema 4.

SI	Caso	$V_f$ [%]	Par1	Par2	Par3	Par4	Par5	Par6	
 D	D1E	10	 29	 45	 61	 61	 38	N.C. 95	
	D2E	30	 20	 43	 49	 33	 37	 38	
	D3E	60	 17	 26	 27	 21	 26	 23	
	 E	E1G	10	 23	 46	 132	 126	 53	N.C. 80
		E2G	30	 21	 43	 47	 50	 46	 43
		E3G	60	 20	 37	 42	 41	 36	 29

Nota: SI, solução inicial;  $V_f$ , fração volúmica; D1E, D2E e D3E solicitação triaxial (E11, E22 e E33); D1G, D2G e D3G solicitação corte (G12, G13 e G23); o número abaixo de cada topologia indica o número de iterações; N.C., não convergiu para uma solução discreta 0/1.

Tabela 16: Topologias resultantes do problema 5.

TI	Caso	$V_f$ [%]	Par1	Par2	Par3	Par4	Par5	Par6
 +  G	G1E	10	 23	 59	 49	 48	N.C.	 48
	G2E	30	 41	 46	 37	 39	 48	 45
	G3E	60	 25	 35	 39	 41	 43	 39
 +  H	H1G	10	 67	 46	 42	N.C.	 50	N.C.
	H2G	30	 33	 47	 52	 42	N.C.	 41
	H3G	60	 29	 47	N.C.	 48	N.C.	 42

Nota: SI, solução inicial;  $V_f$ , fração volúmica; G1E, G2E e G3E solicitação triaxial (E11, E22 e E33); G1G, G2G e G3G solicitação corte (G12, G13 e G23); o número abaixo de cada topologia indica o número de iterações; N.C., não convergiu para uma solução discreta 0/1.

### 4.3 Ensaio de desempenho

Nos gráficos da Figura 55(a) e 55(b) são apresentados o tempo de processamento por iteração das operações de OT e os tempos totais de cálculo das operações de HCD, respetivamente, para dois tamanhos de malha e três tipos de elemento finito distintos. A escolha de apresentar o tempo de cálculo por iteração foi tomada em virtude do número de iterações para alcançar a convergência variar consoante o tipo de elemento finito e malha empregue. Assim, no caso da malha M1 foram necessárias 46, 43 e 45 iterações até a convergência para o elemento C3D8, C3D8R e C3D20, respetivamente. No caso da malha M2 registaram-se 59, 51 e 53 iterações para o elemento C3D8, C3D8R e C3D20, respetivamente. Da análise dos resultados apresentados na Figura 55(a) referentes à OT, destaca-se o aumento do tempo de cálculo com o incremento do tamanho da malha. Entre a malha M1 e a malha M2 verifica-se um aumento do tempo de processamento relativo de 615, 495 e 1690 % para o elemento C3D8, C3D8R e C3D20, respetivamente. Este facto, é explicado por um lado pelo aumento em oito vezes do número de elementos finitos de 8000 para 64000, por outro lado o maior número de nós dos elemento C3D20 traduz-se num acréscimo significativo no tempo de cálculo. Considerando individualmente cada tamanho de malha e os três tipos de elemento associados, observa-se que na malha M1 o elemento C3D8 é o que permite menor tempo de cálculo seguido do C3D8R e por último o C3D20, com 0,58 e 0,68 e 1,04 min., respetivamente. No caso da malha M2, a diferença do tempo de cálculo entre os elementos é mais acentuada. Assim, o C3D8R foi o elemento que registou menor tempo de cálculo com 4,05 min, tendo os elementos C3D8 e o C3D20 alcançado 4,12 e 18,6 min, respetivamente. Saliente-se, que a diferença percentual do tempo de cálculo relativo por iteração entre o elemento C3D8R e o C3D20 é de 359 %. Este facto é relevante considerando que o processo de OT necessitou em média de 50 iterações até alcançar a convergência.

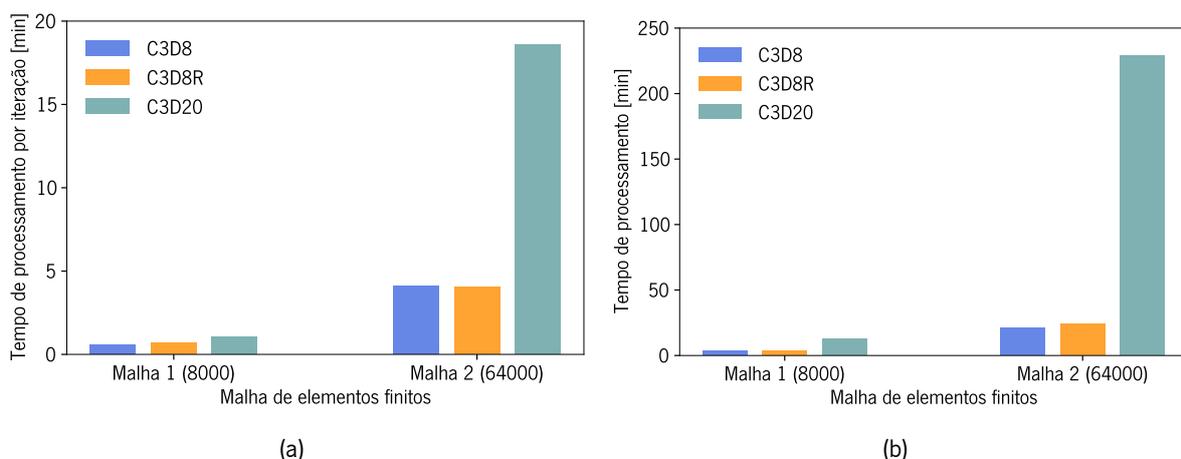


Figura 55: Tempo de cálculo em função do tamanho da malha e do tipo de elemento finito: (a) tempo de processamento por iteração da operação de OT, (b) tempo de processamento da operação de HCD.

No caso da operação de HCD os resultados do tempo de cálculo são idênticos aos observados na

OT. Verifica-se que o aumento do tamanho da malha impacta negativamente o tempo de cálculo e que a utilização do elemento C3D20 requer maior tempo de processamento para os dois tamanhos de malha estudados. Assim, no caso da malha M1 os elementos C3D8, C3D8R e o C3D20 apresentaram um tempo de cálculo de 3,38, 3,39 e 12,89 min, respetivamente. Para a malha M2 a diferença entre tempos foi mais significativa, tendo sido registados tempos de cálculo de 21,14, 23,92 e 229,1 min para o elemento C3D8, C3D8R e o C3D20, respetivamente. Com efeito, a diferença relativa percentual entre o desempenho do elemento C3D8 e o C3D20 foi de 945 %.

Para além do tempo de cálculo, o desempenho também deve ser analisado com base nas soluções obtidas. Por análise qualitativa (visual), as soluções obtidas apresentam diferenças na sua topologia. Além disso, não exibem características (e.g., *checkerboards* ou elementos sólidos sem ligação entre si) que as impeçam de serem produzidas com sucesso através do processo PJet. No entanto, apesar de terem sido empregues os mesmos parâmetros na OT o facto de ter sido utilizadas malhas e elementos finitos distintos, origina soluções diferentes. Esta dependência de malha do algoritmo SIMP na soluções finais é comumente aceite (Martin P. Bendsøe e Ole Sigmund, 2004). Por isso, na análise de desempenho do algoritmo de HCD foram consideradas duas topologias, uma por cada resolução de malha. A saber, as soluções ótimas obtidas com o elemento C3D8R na malha M1 e malha M2. A Tabela 17 apresenta as soluções ótimas e três secções de corte para cada malha inicial e elemento finito.

As propriedades homogeneizadas calculadas pelo algoritmo de HCD variam com a discretização (tamanho da malha) e tipo de elemento finito utilizado. Com efeito, a malha M2 apresentou módulo de Young ( $E_{11}$ ), módulo de elasticidade transversal ( $G_{12}$ ) e coeficiente de Poisson superiores aos obtidos com a malha M1, nos três tipos de elemento estudados. Individualmente, o elemento C3D8 evidencia valores mais elevados para todas as propriedades em estudo, considerando as duas malhas. Com efeito, na malha M1 os valores do módulo de Young ( $E_{11}$ ) reportados foram de 150,23, 124,47 e 143,64 MPa para os elementos C3D8, C3D8R e C3D20, respetivamente. Nesta malha, a percentagem de variação do módulo Young ( $E_{11}$ ) relativamente ao mais baixo representa 20,7 %. No caso da malha M2, o módulo de Young foi de 210,05, 188,13 e 197,83 MPa referentes aos elementos C3D8, C3D8R e C3D20, respetivamente. Da mesma forma, embora com menor expressão a percentagem de variação do  $E_{11}$  foi de 11,65 %. A Tabela 18 resume as propriedades obtidas no estudo comparativo de desempenho do algoritmo de HCD. Contudo, por não ter sido empregue a mesma topologia na análise anterior não é possível concluir a influência, quer do tamanho de malha quer do tipo de elemento nas propriedades em estudo (i.e., módulo de Young e de elasticidade transversal). Assim, para estudar quantificar o peso do tipo de elemento e tamanho de malha na rigidez efetiva (homogeneizada) realizou-se outro estudo, no qual foi considerado a mesma topologia para os dois tamanhos de malha e tipo de elemento. Assim, após a seleção de uma topologia com malha M1 (20x20x20 elementos), foi aplicado um *script* Python (Algoritmo 3 *vd.* Secção 7) para refinar a malha em 40x40x40 elementos. A Figura 56 ilustra as duas malhas antes e após aplicação da operação de refinamento de malha.

Após o refinamento de malha, foi executada a HCD nos seis casos (2 malhas x 3 tipos de elemento finito) e comparados os valores do módulo de Young ( $E_{11}$ ) e de elasticidade longitudinal ( $G_{12}$ ). Como se

Tabela 17: Topologias ótimas obtidas nos ensaios de desempenho: M1, malha 20x20x20 (8000) elementos; M2, malha 40x40x40 (64000) elementos.

El. finito	Corte [%]				
	0	25	50	75	
M1	C3D8				
	C3D8R				
	C3D20				
M2	C3D8				
	C3D8R				
	C3D20				

Tabela 18: Propriedades homogeneizadas para duas malhas com diferentes elementos finitos, unidades em MPa: M1, malha 20x20x20 (8000) elementos; M2, malha 40x40x40 (64000) elementos.

	C3D8	C3D8R	C3D20
M1 $E_{11}$	150,23	124,47	143 64
M1 $G_{12}$	99,33	88,28	93,79
M1 $\nu_{12}$	0,35	0,36	0,35
M2 $E_{11}$	210,05	188,13	197 83
M2 $G_{12}$	132,51	121,78	125 81
M2 $\nu_{12}$	0,37	0,37	0,37

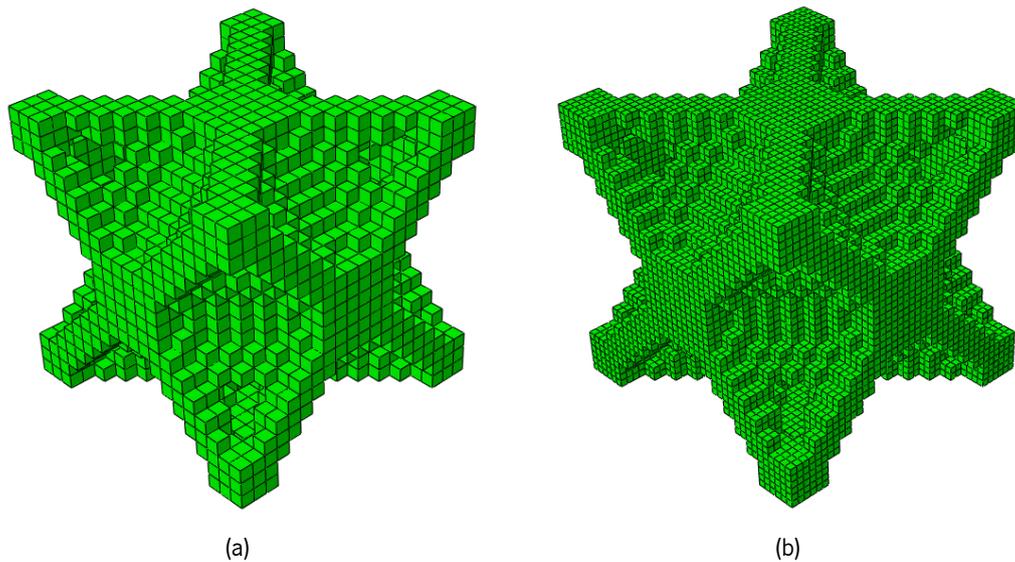
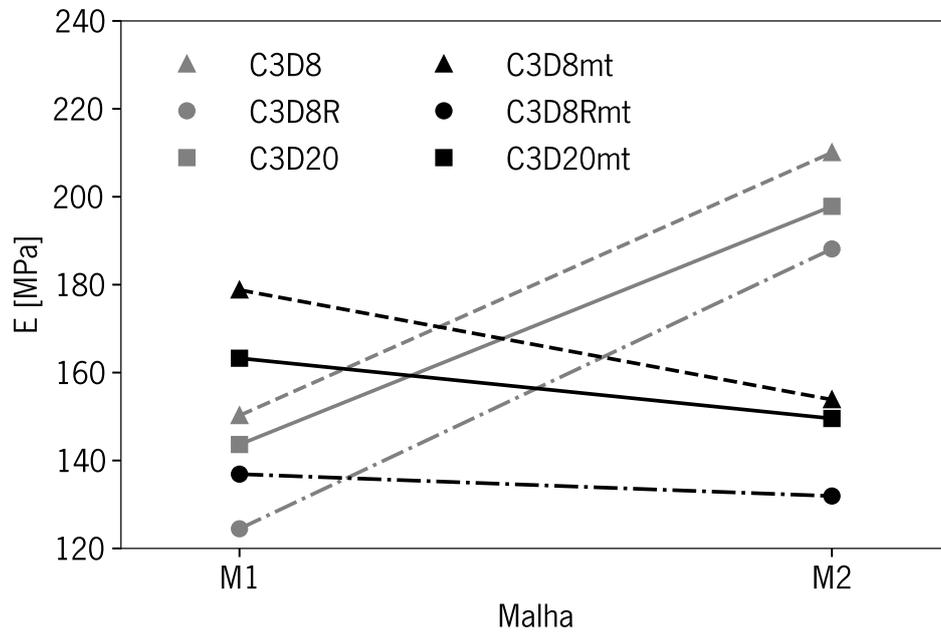


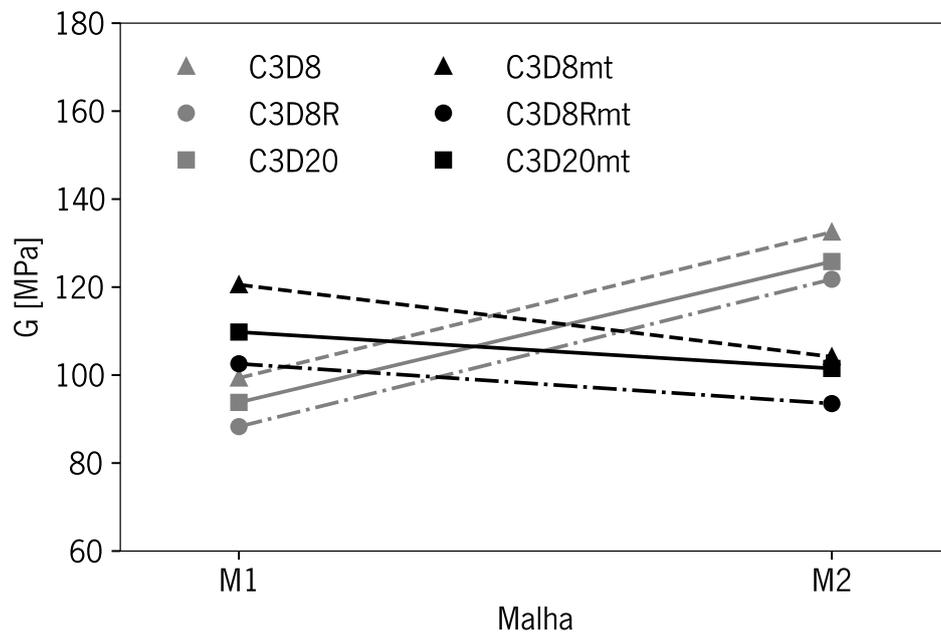
Figura 56: Malhas de elementos finitos empregues no estudo da rigidez em função do tamanho da malha e do tipo de elemento finito: (a) malha M1 20x20x20 (8000) elementos, (b) malha M2 40x40x40 (64 000) elementos.

pode observar nos resultados apresentados na Figura 57(a) e 57(b), o refinamento da malha traduziu-se, na redução dos valores de módulo de Young ( $E_{11}$ ) e de elasticidade transversal ( $G_{12}$ ), respetivamente. Além disso, este efeito verificou-se para os três tipos de elemento finito estudado. Contudo, no caso do módulo de Young ( $E_{11}$ ), esta redução foi mais significativa para o elemento C3D8 com uma redução relativa à malha M1 de  $-13,97\%$ . Já no caso dos elementos C3D20 e C3D8R a diminuição registada foi de  $-8,4$  e  $-3,63\%$ , respetivamente. Saliente-se o facto do elemento C3D8R apresentar uma baixa variação entre a malha M1 e M2 e para os valores do módulo de Young ( $E_{11}$ ) da malha M2 dos elementos C3D8 e C3D20 serem muito idênticos  $153,83$  e  $149,56$  MPa, respetivamente. Analogamente, o refinamento de malha traduziu-se numa diminuição do módulo de elasticidade transversal ( $G_{12}$ ) para todos os elementos finitos em estudo. A variação relativa à malha M1 foi de  $-13,59$ ,  $-8,82$  e  $-7,53\%$ , para os elementos C3D8, C3D8R e C3D20, respetivamente.

Dos resultados obtidos da homogeneização para a mesma topologia e comparando com os alcançados para a homogeneização das topologias ótimas, verifica-se que o tamanho de malha e o tipo de elemento exibem uma tendência oposta ao verificado no estudo comparativo das propriedades homogeneizadas das topologias obtidas por OT. Na malha M1 as propriedades homogeneizadas das topologias sujeitas a OT são inferiores as observadas para o estudo das mesmas topologias, já no caso da malha M2 verifica-se o inverso. Logo, pode-se concluir que o incremento do módulo de Young ( $E_{11}$ ) e de elasticidade transversal ( $G_{12}$ ) no referido estudo deve-se à dependência de malha e ao efeito dos mínimos locais nas soluções ótimas.



(a)



(b)

Figura 57: Rigidez por tipo de elemento finito em função do tamanho da malha, o sufixo “mt” representa o caso com a mesma topologia: (a) comparação do módulo de Young ( $E_{11}$ ) obtido após OT e utilizando a mesma topologia; (b) comparação do módulo de elasticidade transversal ( $G_{12}$ ) obtido após OT e utilizando a mesma topologia; M1, malha 20x20x20 (8000) elementos; M2, malha 40x40x40 (64000) elementos.

## 4.4 Topologias ótimas

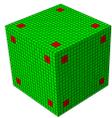
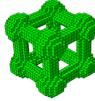
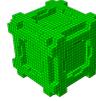
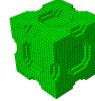
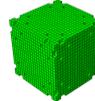
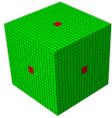
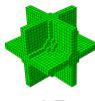
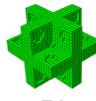
Os resultados das famílias de topologias ótimas e das principais propriedades mecânicas são apresentados nas Tabelas 19, 21 e 20. As famílias designadas N1E, N2E, N3E e N1G, N2G, N3G foram sujeitas a vetores uniformes de deslocamento hidrostático e corte, respetivamente. No caso das famílias FFA, FFV, FVA e FFVA foram sujeitas a cargas combinadas. Todas as topologias ótimas obtidas são simétricas nas três principais direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Este aspeto pode ser favorável para a aplicação em materiais tridimensionais. O facto de todas as topologias obtidas apresentarem elementos sólidos nas regiões de fronteira exteriores sujeitas carregamentos ou restrições de densidade inicial favorece por um lado as ligações cinemáticas entre VRU adjacentes por outro garantem rigidez e estabilidade estrutural. Contudo esta concentração de elementos sólidos na periferia dos VRU poderá restringir a gama de propriedades mecânicas passíveis de serem alcançadas.

As famílias de topologias desenvolvidas cobrem uma vasta gama de propriedades, com uma razão entre o módulo de Young normalizado mais elevado e menor de 35. Já no caso do módulo de elasticidade transversal normalizado essa razão foi de 67 e com um amplitude de coeficientes de Poisson de 0,11 a 0,45. A gama de valores do coeficiente de Poisson é limitada, sobretudo para valores mínimos, mesmo para frações volúmicas baixas. Já no caso dos valores máximos obtidos são próximos dos limites máximos teóricos. As propriedades mecânicas efetivas normalizadas apresentadas, não se alterariam qualitativamente no caso de ser considerado outro material (i.e., com um módulo de elasticidade diferente). Já que os módulos de elasticidade efetivos (i.e., homogeneizados) dependem linearmente do módulo do material base  $E_0$  e o coeficiente de Poisson é independente de  $E_0$ . Como esperado, os módulos de elasticidade e o coeficiente de Poisson das topologias ótimas, aumenta com o incremento da fração volúmica. A Figura 58 e 59 ilustram a evolução do módulo de elasticidade normalizado em relação à fração volúmica dos casos FFA, FFV e FVA, FFVA, respetivamente.

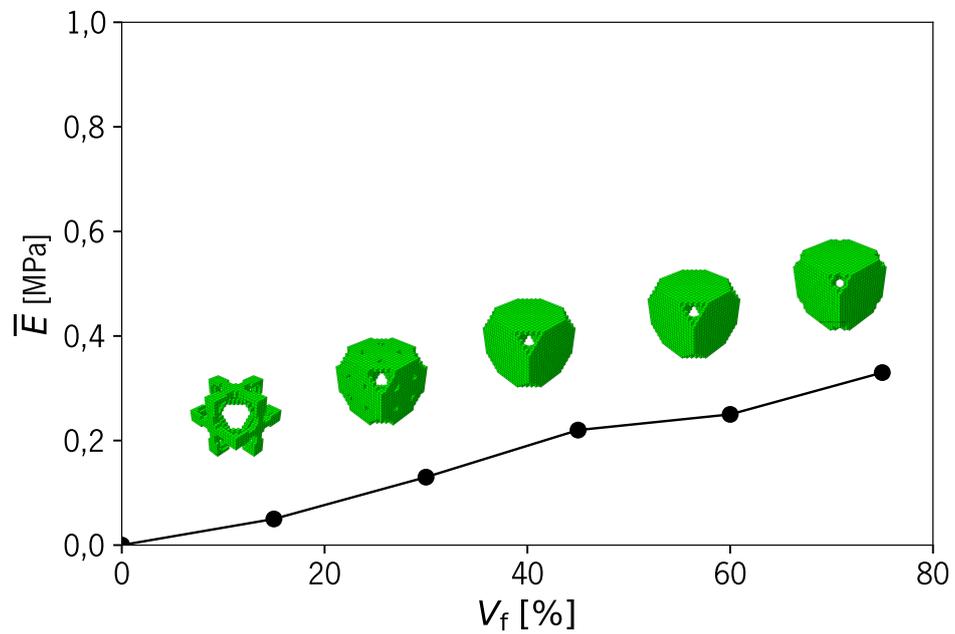
Pela análise da Tabela 21 e das Figuras 58 e 59 é notório que os casos FFA, FVA e FFVA exibem comportamento mecânico semelhante e todos apresentam módulo de Young superior para a mesma fração volúmica que o caso FFV.

O facto das topologias N1E e N3E com 75 % (otimizadas carregamento hidrostático) apresentarem módulos de Young inferiores aos casos N1G e N3G (75 %), respetivamente, otimizadas ao corte poderá dever-se à existência de padrões de *checkerboards* no interior das topologias N1G e N3G que induzem a uma falsa rigidez e que resulta na sobrestimativa das propriedades mecânicas. A Figura 60 ilustra este fenómeno através de uma vista de corte da topologia N1G com fração volúmica de 75 %. Outra instabilidade numérica são os mínimos locais. Este problema numérico é patente na falta de convergência para uma solução sólido-vazio (0/1) que caso N2G com fração volúmica de 60 e 75 %. Nestes casos os ciclos de OT terminaram com 11 e 12 iterações, respetivamente. Estes problemas numéricos são comuns sobretudo no algoritmo SIMP (Martin P. Bendsøe e Ole Sigmund, 2004; Diaz e O. Sigmund, 1995; O. Sigmund e Petersson, 1998).

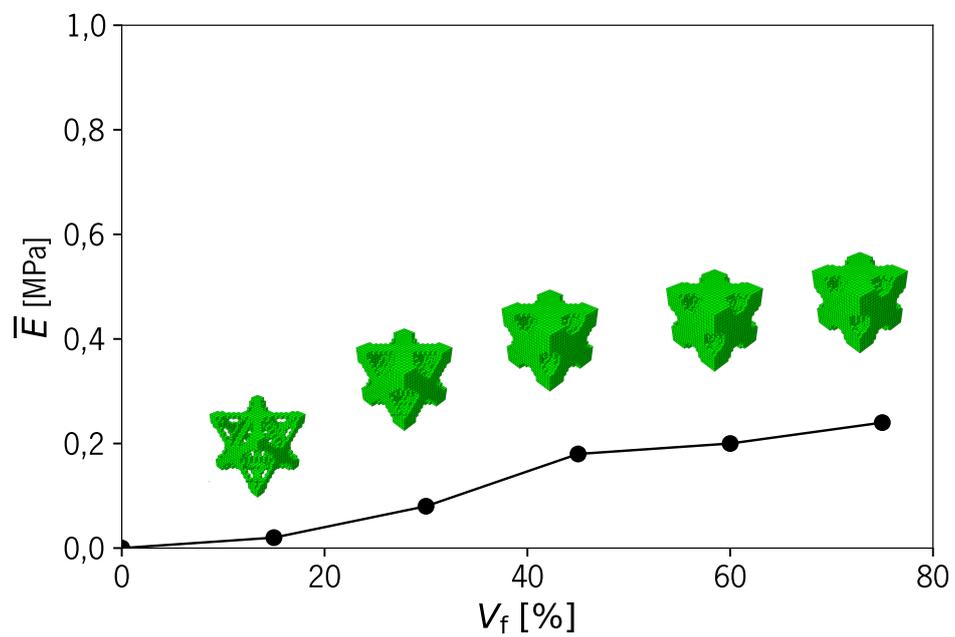
Tabela 19: Topologias ótimas obtidas a partir de soluções iniciais com restrições de densidade e imposição de deslocamentos caso N1E, N1G, N2E e N2G.

SI	Caso	$V_f$ [%]					
		15	30	45	60	75	
	N1E						
		it	45	47	47	46	45
		$\bar{E}_{11}$	0,06	0,15	0,29	0,50	0,66
		$\bar{G}_{12}$	0,01	0,04	0,13	0,34	0,53
		$\bar{\nu}$	0,11	0,17	0,24	0,35	0,40
	N1G						
		it	68	43	49	51	31
		$\bar{E}_{11}$	0,02	0,06	0,19	0,33	0,69
		$\bar{G}_{12}$	0,04	0,13	0,34	0,48	0,67
		$\bar{\nu}$	0,35	0,36	0,39	0,40	0,45
	N2E						
		it	45	35	51	46	51
		$\bar{E}_{11}$	0,07	0,24	0,35	0,50	0,65
		$\bar{G}_{12}$	0,01	0,13	0,21	0,35	0,54
		$\bar{\nu}$	0,12	0,28	0,30	0,35	0,40
	N2G				N.C.	N.C.	
		it	52	56	53	0	0
		$\bar{E}_{11}$	0,02	0,06	0,20	0	0
		$\bar{G}_{12}$	0,05	0,14	0,34	0	0
		$\bar{\nu}$	0,35	0,38	0,39	0	0

Nota: SI, solução inicial;  $V_f$ , fração volúmica; N1E e N2E solicitação triaxial (E11, E22 e E33); N1G e N2G solicitação corte (G12, G13 e G23); it, número de iterações até à convergência;  $\bar{E}_{11}$ , módulo de Young normalizado;  $\bar{G}_{12}$ , módulo de elasticidade transversal normalizado;  $\bar{\nu}$ , coeficiente de Poisson normalizado; N.C., não convergiu para uma solução discreta 0/1.

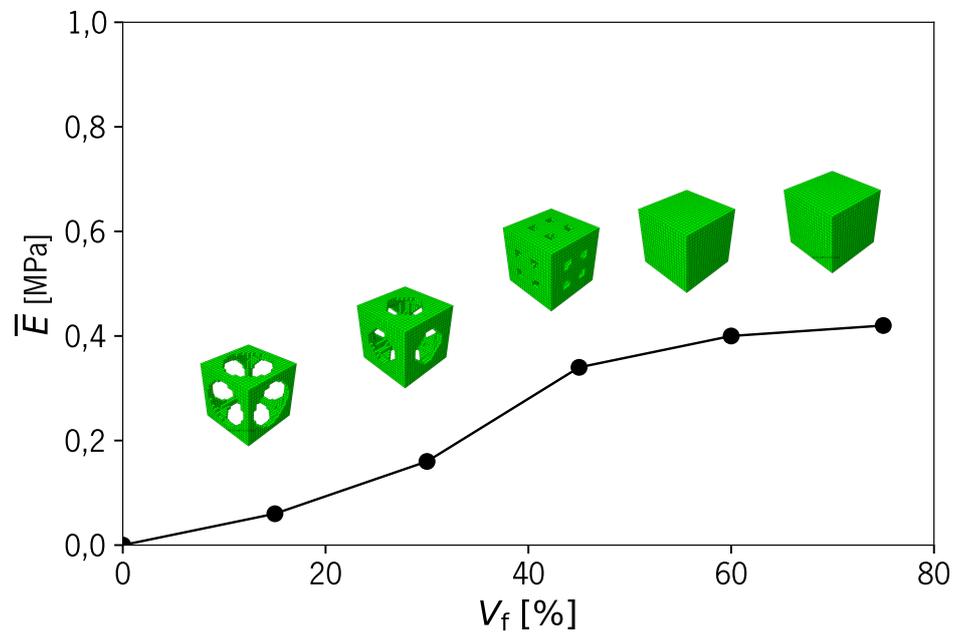


(a)

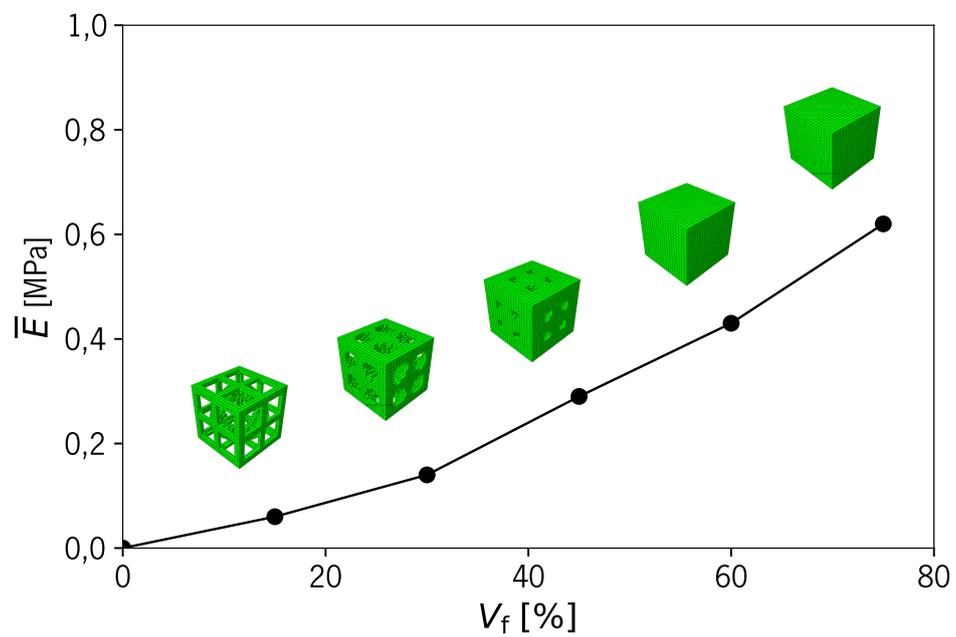


(b)

Figura 58: Diagramas módulo de Young normalizado–fração volúmica das famílias de topologias ótimas. O módulo de Young apresentado é normalizado em relação ao módulo de Young do material base Vero-Clear™. Cada diagrama apresenta as cinco frações volúmicas consideradas (15, 30, 45, 60 e 75 %): (a) caso FFA, (b) caso FFV.



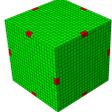
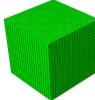
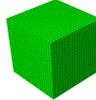
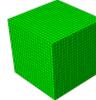
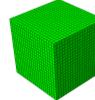
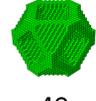
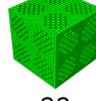
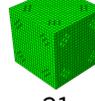
(a)



(b)

Figura 59: Diagramas módulo de Young normalizado–fração volumétrica das famílias de topologias ótimas. O módulo de Young apresentado é normalizado em relação ao módulo de Young do material base Vero-Clear™. Cada diagrama apresenta as cinco frações volumétricas consideradas (15, 30, 45, 60 e 75 %): (a) caso FVA e (b) caso FFVA.

Tabela 20: Topologias ótimas obtidas a partir de soluções iniciais com restrições de densidade e imposição de deslocamentos caso N3E e N3G.

SI	Caso	$V_f$ [%]					
		15	30	45	60	75	
	N3E						
		it	33	33	50	45	43
		$\overline{E}_{11}$	0,07	0,24	0,35	0,50	0,64
		$\overline{G}_{12}$	0,01	0,13	0,21	0,35	0,52
		$\overline{\nu}$	0,12	0,28	0,30	0,35	0,39
	N3G						
		it	41	45	49	33	31
		$\overline{E}_{11}$	0,03	0,06	0,20	0,47	0,70
		$\overline{G}_{12}$	0,05	0,14	0,35	0,52	0,68
		$\overline{\nu}$	0,35	0,38	0,39	0,43	0,42

Nota: SI, solução inicial;  $V_f$ , fração volúmica; N3E solicitação triaxial (E11, E22 e E33); N3G solicitação corte (G12, G13 e G23); it, número de iterações até à convergência;  $\overline{E}_{11}$ , módulo de Young normalizado;  $\overline{G}_{12}$ , módulo de elasticidade transversal normalizado;  $\overline{\nu}$ , coeficiente de Poisson normalizado; N.C., não convergiu para uma solução discreta 0/1.

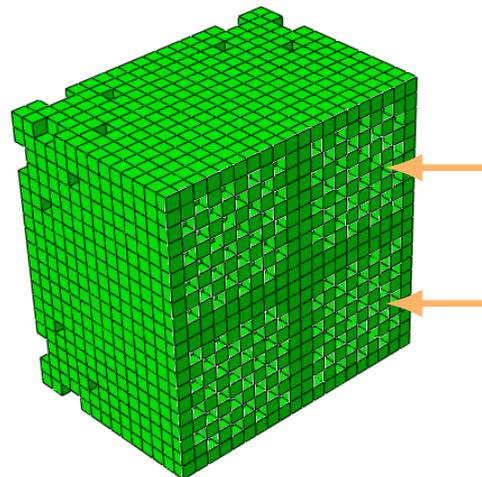
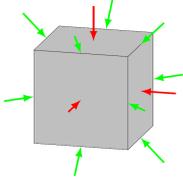
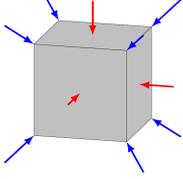
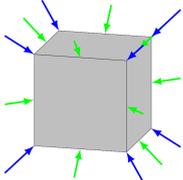
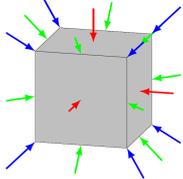


Figura 60: Padrões de tabuleiro de xadrez originados em topologias otimizadas ao corte. A figura apresenta uma vista cortada da topologia N1G com fração volúmica de 75 %.

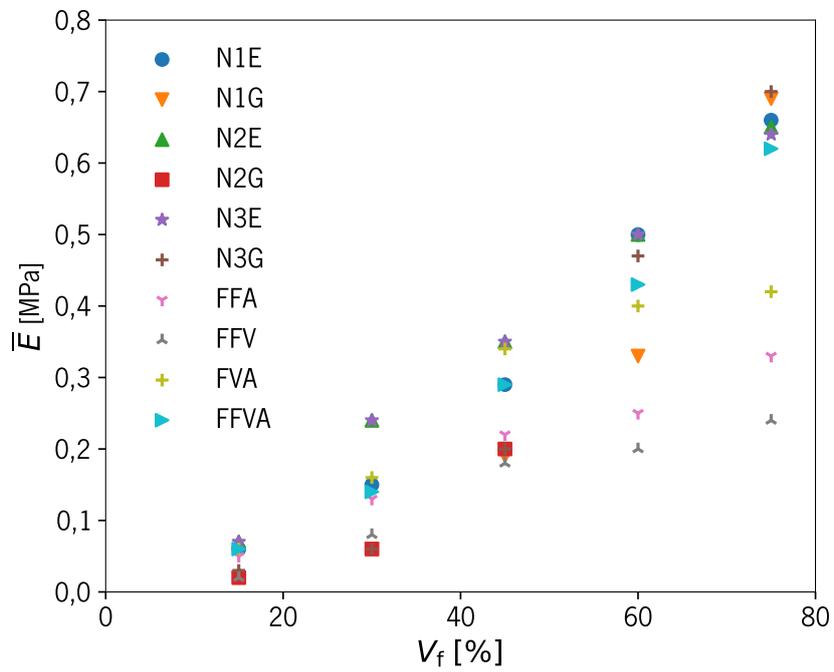
Tabela 21: Topologias ótimas obtidas por aplicação de cargas concentradas.

MC	Caso	$V_f$ [%]					
		15	30	45	60	75	
	FFA						
		it	43	39	36	51	37
		$\bar{E}_{11}$	0,05	0,13	0,22	0,25	0,33
		$\bar{G}_{12}$	0,01	0,07	0,15	0,19	0,26
		$\bar{\nu}$	0,12	0,21	0,27	0,36	0,29
	FFV						
		it	44	33	36	41	45
		$\bar{E}_{11}$	0,02	0,08	0,18	0,20	0,24
		$\bar{G}_{12}$	0,04	0,11	0,20	0,21	0,24
		$\bar{\nu}$	0,34	0,32	0,31	0,31	0,31
	FVA						
		it	33	33	75	17	18
		$\bar{E}_{11}$	0,06	0,16	0,34	0,40	0,42
		$\bar{G}_{12}$	0,02	0,08	0,21	0,30	0,34
		$\bar{\nu}$	0,14	0,19	0,30	0,34	0,35
	FFVA						
		it	56	37	30	25	30
		$\bar{E}_{11}$	0,06	0,14	0,29	0,43	0,62
		$\bar{G}_{12}$	0,01	0,05	0,16	0,30	0,56
		$\bar{\nu}$	0,11	0,18	0,26	0,33	0,39

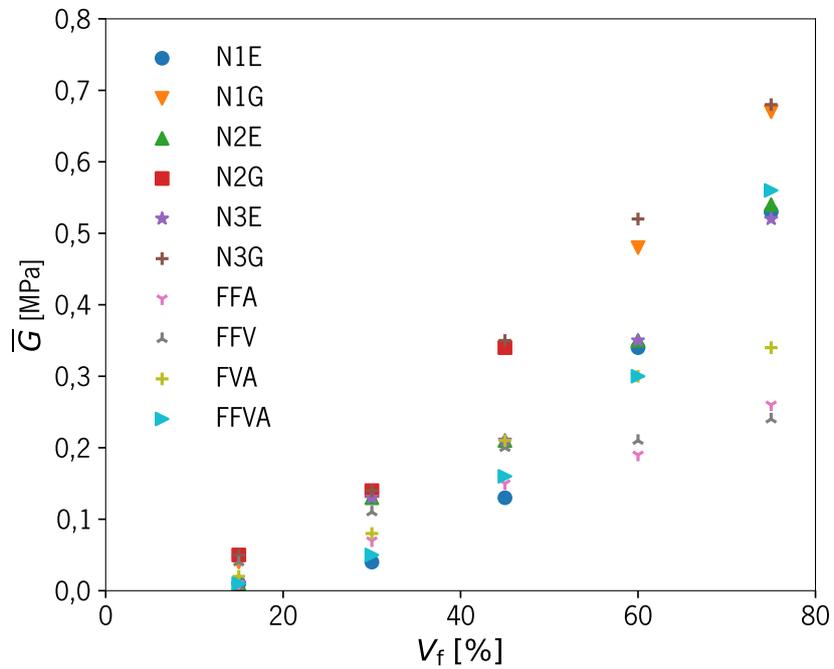
Nota: MC, Modos de carga;  $V_f$ , fração volúmica; it, número de iterações;  $\bar{E}_{11}$ , módulo de Young normalizado;  $\bar{G}_{12}$ , módulo de elasticidade transversal normalizado;  $\bar{\nu}$ , coeficiente de Poisson normalizado; N.C., não convergiu para uma solução discreta 0/1.

A Figura 61(a) e 61(b) apresentam o módulo de Young e o módulo de elasticidade transversal normalizados, respectivamente, das diferentes famílias de topologias com cinco frações volúmicas. É possível observar que para frações volúmicas mais baixas (entre 15 e 45 %) as topologias N2E e N3E apresentam um módulo de Young superior, às restantes topologias. Para frações volúmicas mais elevadas, para além das topologias anteriores a N1E apresenta desempenho idêntico. As topologias N1G e N3G, não são consideradas por exibirem rigidez sobrestimada, conforme discutido anteriormente. No caso do módulo de elasticidade transversal as topologias otimizadas ao corte N1EG, N2G e N3G apresentam valores superiores as restantes topologias considerando todas as frações volúmicas. Estes resultados são consistente com o objetivo da OT realizada, i.e., maximizar a rigidez.

As propriedades mecânicas das topologias ótimas podem ser relacionadas entre si. Estas relações podem ser úteis na interpolação da biblioteca de microestruturas, na busca de topologias que melhor satisfaçam as propriedades requeridas. Assim, para além da relação entre os módulos de elasticidade e a fração volúmica é conveniente representar o módulo de Young e de elasticidade transversal em relação ao coeficiente de Poisson. A Figura 62(a) e 62(b) é expresso o módulo de Young–Coeficiente de Poisson e módulo de elasticidade transversal–coeficiente de Poisson, respectivamente. Considerando o número de topologias representas (48) o espaço das propriedades das famílias de VRU, apresenta uma boa distribuição. Como referido anteriormente, este espaço de propriedades pode ser facilmente densificado e expandido pela exploração das combinações de parâmetros de configuração do algoritmo de OT, frações volúmicas e soluções iniciais i.e., cargas e restrições de densidade.



(a)



(b)

Figura 61: Região do espaço de propriedades das famílias de VRU. (a) módulo de Young–fração volúmica ( $\bar{E}$ ,  $V_f$ ) e (b) módulo de elasticidade transversal–fração volúmica ( $\bar{G}$ ,  $V_f$ ).

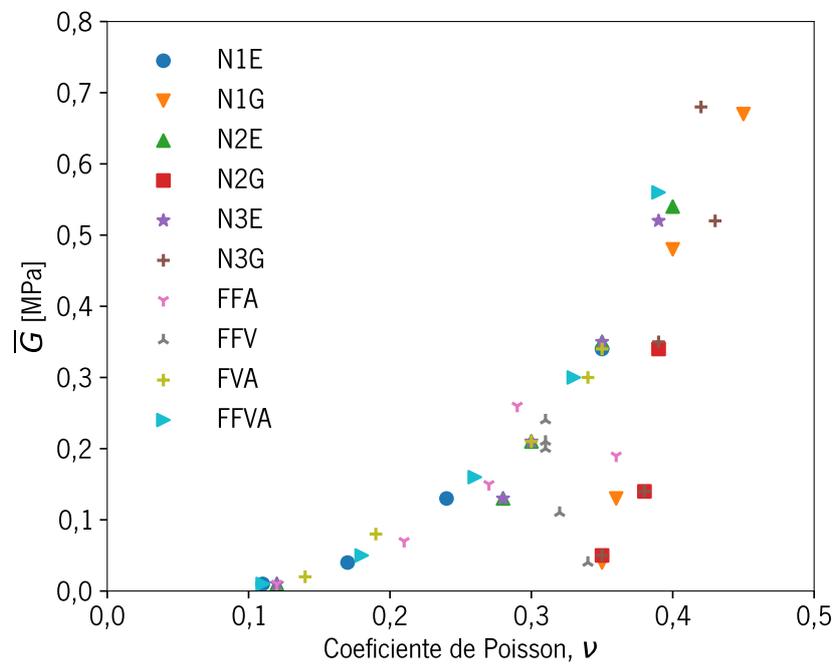
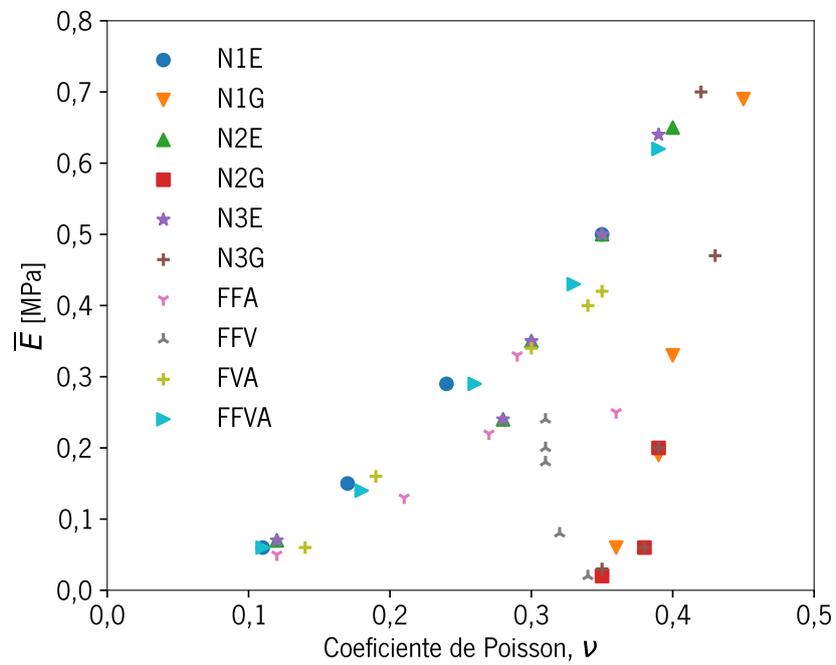


Figura 62: Região do espaço de propriedades das famílias de VRU. (a) módulo de Young–coeficiente de Poisson ( $\bar{E}, \nu$ ) e (b) módulo de elasticidade transversal–coeficiente de Poisson ( $\bar{G}, \nu$ ).

## 4.5 Pós-processamento das topologias ótimas

Os resultados obtidos mostraram que todos os ficheiros .stl não apresentavam nenhum tipo de problema usualmente associado ao formato em questão. Nomeadamente, buracos na malha (e.g., falta de triângulos), faces internas, interseção e sobreposição de superfícies e normais invertidas. A Figura 63 apresenta dois exemplos de ficheiros pós-processados com o algoritmo 1 e 2.

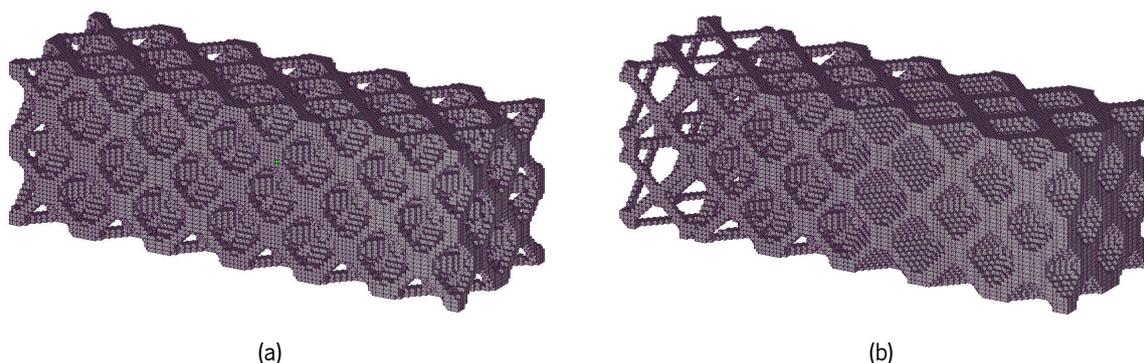


Figura 63: Exemplo de topologias ótimas concatenadas pós-processamento. Visualização de dois ficheiros de VRU em formato .stl após a conversão e concatenação das geometrias: (a) concatenação de 24 VRU iguais, (b) concatenação de 24 VRU com gradiente.

## 4.6 Caracterização do material base

As propriedades mecânicas das peças produzidas pelo processo MJ, são dependentes das orientações de fabrico. Com efeito, os resultados da influência da orientação de fabrico, diferem claramente com o processo utilizado (Dizon et al., 2018). Diversos estudos acerca do processo MJ apresentam peças com tendências anisotrópicas contraditórias. Todavia, alguns mostram uma tendência para as arestas das peças apresentarem maior rigidez e resistência mecânica. Por outro lado, mesmo considerando os mesmos parâmetros de orientação no processo de fabrico, diferentes materiais não mantêm tendências similares, o que enfatiza ainda mais a inconsistência das propriedades mecânicas destes materiais produzidos por FDD (Dizon et al., 2018).

### 4.6.1 Ensaio de tração materiais base

Os resultados obtidos do controlo dimensional para os provetes de tração (tipo 1A) estão dentro dos limites dos desvios permitidos pelas norma ISO 527-1:2019 (vd. Tabela A.1 do Apêndice A). A dimensão média da largura dos provetes de tração  $b_1$  apesar de apresentar um desvio padrão  $S$  baixo, 0,03 para a orientação  $xy$ ,  $45^\circ$ , exibe um desvio relativamente à cota nominal de  $10\ \mu\text{m}$  (erro relativo) de 2,5%. A média e desvio padrão das medições dos provetes de tração são apresentadas na Tabela 22. No

Apêndice A Tabela A.2 são apresentados todos os dados primários das medições efetuadas aos provetes de tração.

Tabela 22: Média e desvio padrão das dimensões dos provetes para determinação das propriedades mecânicas à tração do material VeroClear™, dimensões em mm.

Orientação xy, 0°			Orientação xy, 45°			Orientação xy, 90°					
$l_3$	$b_1$	$h$	$L_0$	$b_1$	$h$	$l_3$	$b_1$	$h$			
$\bar{x}$	150,14	10,16	4,01	$\bar{x}$	150,12	10,25	4,05	$\bar{x}$	150,14	10,05	4,00
$S$	0,05	0,07	0,01	$S$	0,03	0,03	0,09	$S$	0,03	0,03	0,01
Orientação xz, 0°			Orientação xz, 45°			Orientação xz, 90°					
$l_3$	$b_1$	$h$	$L_0$	$b_1$	$h$	$l_3$	$b_1$	$h$			
$\bar{x}$	150,17	10,12	4,08	$\bar{x}$	150,18	10,07	4,04	$\bar{x}$	150,27	10,07	3,99
$S$	0,06	0,07	0,07	$S$	0,01	0,01	0,04	$S$	0,04	0,00	0,02

Nota:  $l_3$ , comprimento inicial;  $b_1$ , largura;  $h$ , altura.

Os ensaios de tração foram executados até 16 % de deformação  $\epsilon$ , sendo que nenhum dos provetes atingiu a rotura. Nas Tabelas 23, 24 e Figura 64 são apresentadas os resumo das propriedades mecânicas à tração e os mapas de anisotropicidade, respetivamente. Este material apresenta características de um polímero semi-rígido (comportamento plástico) com uma região elástica, contudo sem exibir uma transição para o regime plástico bem definida (Figura A.2 do Apêndice A).

A média do módulo de elasticidade à tração  $E_t$  mais elevada com 2245,14 MPa registou-se na orientação xz 90°. O segundo valor médio mais elevado verificou-se na orientação xy, 0° tendo registado 2103,22 MPa. O valor médio do módulo de elasticidade mais baixo registou-se na orientação xy, 90° com 1904,49 MPa. A maior diferença entre o valor médio máximo e mínimo foi de 340,65 MPa, para as orientações xz, 90° e xy, 90°. Ou seja, a variação percentual do módulo de elasticidade médio à tração relativamente ao valor mais baixo é de 17,89 %. Os valores do módulo de elasticidade médio apresentam um desvio padrão ( $S$ ) que varia entre 56,02 e 166,72 MPa para as orientações xz, 90° e xy 0°, respetivamente. Além disso, considerando o valor do módulo de elasticidade médio das seis orientações 2061,08 MPa e comparando com os valores de referência do fabricante (Stratasys, 2018b), verifica-se que embora próximo do limite inferior, está dentro da gama de valores do material VeroClear™ (i.e., 2000 - 3000 MPa). Semelhante resultado, é reportado noutros estudos que usaram o mesmo processo mas materiais diferentes, nomeadamente O VeroBlue, VeroWhite, FullCure e VeroBlack RGD835 e FLX980 (Barclift e Williams, 2012; Bass et al., 2016; Pilipović et al., 2007).

A força máxima ( $F_m$ ) média das seis orientações apresentam valores que variam entre 1780,85 e 1478,85 N para as orientações xz, 0° e xy, 90°, respetivamente. Esta amplitude de valores é significativa e representa um desvio relativo ao valor mínimo de 20,42 %. Os desvios padrão oscilam entre 43,49 e 5,85 N para as orientações xz, 0° e xy, 45°, respetivamente.

Tabela 23: Resumo das propriedades mecânicas VeroClear™ à tração, orientação xy.

Ori. xy, 0°	$E_t$ [MPa]	$F_m$ [N]	$\sigma_{0,2\%}$ [MPa]	$\sigma_m$ [MPa]
$\bar{x}$	2103,22	1521,62	24,22	37,38
S	166,72	38,93	3,75	0,92
Ori. xy, 45°				
$\bar{x}$	1973,51	1483,78	25,11	35,76
S	111,88	5,85	1,92	0,77
Ori. xy, 90°				
$\bar{x}$	1904,49	1478,85	27,28	36,79
S	62,44	10,25	0,59	0,43

Nota: Ori.-orientação de produção.

Tabela 24: Resumo das propriedades mecânicas VeroClear™ à tração, orientação xz.

Ori. xz, 0°	$E_t$ [MPa]	$F_m$ [N]	$\sigma_{0,2\%}$ [MPa]	$\sigma_m$ [MPa]
$\bar{x}$	2038,54	1780,85	33,61	42,25
S	105,38	43,49	2,68	0,92
Ori. xz, 45°				
$\bar{x}$	2101,57	1747,44	33,67	42,35
S	135,70	15,92	2,31	1,05
Ori. xz, 90°				
$\bar{x}$	2245,14	1748,51	29,54	42,95
S	56,02	14,74	2,32	0,71

Nota: Ori.-orientação de produção.

Em virtude do comportamento que a curva da tensão-deformação exhibe, sem zona de transição distinta entre o regime elástico e o plástico, foi calculada a tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,2% ( $\sigma_{0,2\%}$ ). Pela análise da tensão limite de proporcionalidade ( $\sigma_{0,2\%}$ ) média foram obtidos os valores de 24,22, 25,11 e 27,28 MPa, para a orientação xy e de 33,61, 33,67 e 29,64 MPa da orientação xz. Mais, os valores do desvio padrão podem ser considerados baixos. Similarmente ao registado para o módulo de elasticidade, a orientação xz apresenta valores superiores em todas as variações (xz 0°, xz 45° e xz 90°).

Os valores médios da  $\sigma_m$  (i.e., resistência à tração) para as direções xy 0°, xy 45° e xy 90° são 37,38, 35,76 e 36,79 MPa, respetivamente. Na orientação xz foram registados os valores de 42,25, 42,35 e 42,95 MPa para as orientações xz 0°, xz 45° e xz 90°, respetivamente. Sendo os valores do desvio padrão baixos e idênticos.

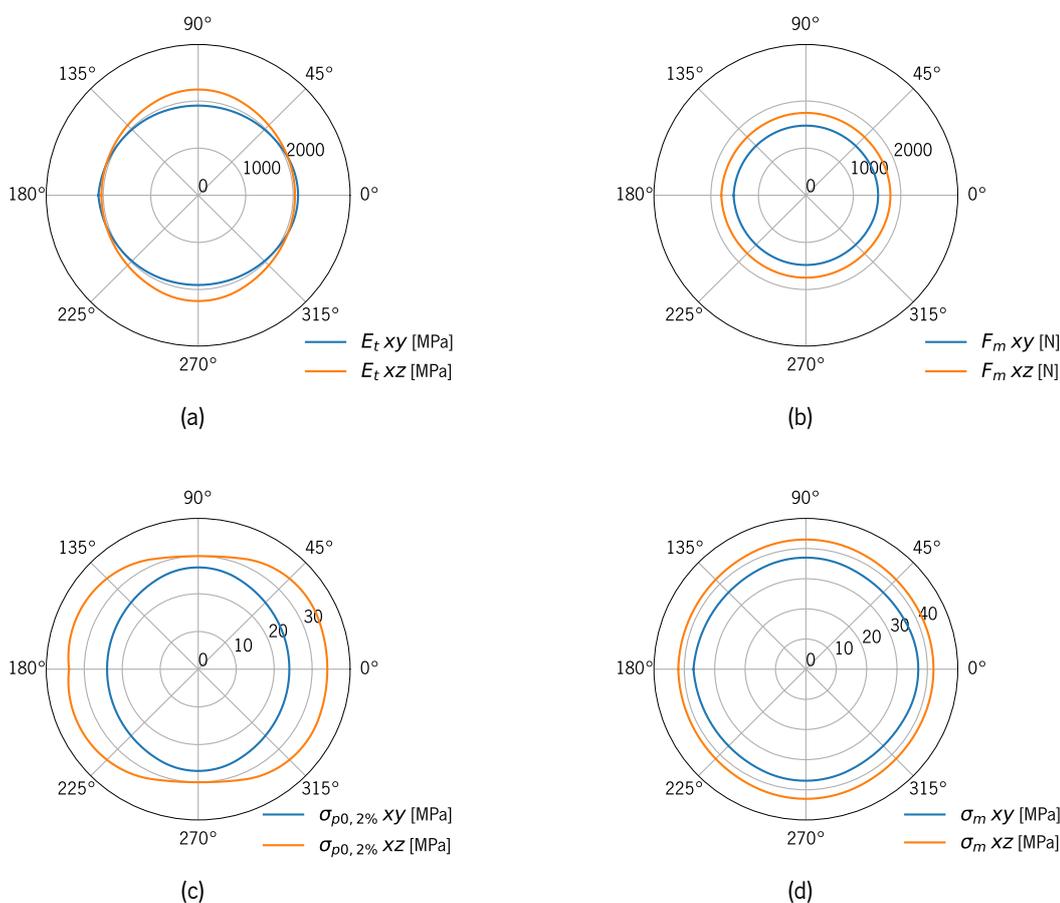


Figura 64: Propriedades mecânicas nas orientações de produção xy e xz: (a) mapa de anisotropicidade plana do módulo de Young orientação xy e xz, (b) mapa de anisotropicidade plana da força máxima orientação xy e xz, (c) mapa de anisotropicidade plana da tensão limite de convencional de proporcionalidade a 0,2% orientação xy e xz, (d) mapa de anisotropicidade plana da tensão máxima orientação xy e xz.

Da mesma forma, com os valores obtidos para o módulo de elasticidade médio à tração  $E_t$ , a tensão máxima à tração média  $\sigma_m$  também exibe valores inferiores aos fornecidos pelo fabricante, que oscilam entre 50 e 65 MPa Stratasys (2018b). Apesar de estudos reportarem valores de tensão máxima de 50 MPa (Pugalendhi, Ranganathan e Chandrasekaran, 2019) e 54 MPa (Pugalendhi, Ranganathan e Chandrasekaran, 2019), dentro da mesma gama do fabricante. Outros estudos reportaram resultados semelhantes aos alcançados no presente estudo, isto é, tensão máxima inferior à especificada pelo fabricante (Adamczak et al., 2015; Safka et al., 2016).

Com efeito, os provetes analisados no ensaio de tração na orientação xz apresentaram as propriedades mecânicas mais elevadas (com exceção da orientação xy  $0^\circ$ ), já os provetes produzidos na orientação xy apresentaram os piores resultados. Este comportamento sugere que a orientação de fabrico influencia as propriedades mecânicas à tração (i.e., módulo de elasticidade, tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,2%, força máxima e tensão máxima). Estes resultados são idênticos aos reportados

noutro estudo embora para outro material (Kesy e Kotlinski, 2010). Esta circunstância deve-se as arestas dos provetes paralelas ao sentido do movimento de impressão (i.e., xx) são mais densas, duras e rígidas que a região central. Este efeito é devido à maior absorção de radiação UV pelas arestas. Com exceção do módulo de elasticidade, todas as restantes propriedades analisadas apresentam valores inferiores aos valores de referência disponibilizados pelo fornecedor da resina VeroClear™. Os Diagramas tensão-deformação à tração obtidos a partir dos dados primários força–deslocamento são apresentados na Figura A.2 do Apêndice A.

Em conclusão, a orientação das peças na plataforma de produção do equipamento PolyJet™ (Stratasys, Eden Prairie, MN, USA) é um fator que influencia nas propriedades mecânicas das peças. Além disso, os resultados reportados para as mesmas propriedades em análise apresentam evidente divergência nos resultados. Ainda que, o fabricante da resina especifique uma gama de valores bastante alargada para cada uma das propriedades mecânicas analisadas. Os resultados experimentais do módulo de elasticidade obtidos neste estudo serão utilizados para determinação das propriedades homogeneizadas dos VRU, através do algoritmo de HCD.

#### 4.6.2 Ensaio de compressão

Nesta secção são apresentados os resultados do controlo dimensional e dos ensaios de compressão normalizados empregues na caracterização do material VeroClear™, processado pelo processo MJ. É igualmente discutida a influência das orientações de produção nas propriedades mecânicas dos provetes. Os dados primários força e deslocamento utilizados foram obtidos pela leitura da célula de carga e do travessão da máquina universal de ensaios, respetivamente. A Tabela 25 apresenta a média e o desvio padrão das medidas das três dimensões (comprimento, largura e altura) dos provetes de compressão. Na Tabela A.5 do Apêndice A são apresentados todos os dados primários das medições efetuadas.

Os valores da dimensão  $h$  apresentam a média mais próxima dos valores nominais, em todas as orientações, bem como um desvio padrão baixo. Este fato, aparenta estar relacionado com o efeito da ausência de contacto do material de suporte com as superfícies exteriores da peça. Uma vez que, a dimensão  $h$  foi medida entre as duas fases opostas com acabamento brilhante sem contacto com material de suporte. Na Figura 65 é visível o aumento da espessura da superfície em contacto com material de suporte em contraste com superfície brilhante (i.e., sem material de suporte). Todas as restantes dimensões analisadas apresentam valores superiores aos nominais.

A Tabela 26 apresenta as propriedades mecânicas médias do VeroClear™ à compressão. Os resultados indicam que o VeroClear™ apresenta um comportamento dúctil. Da análise das propriedades mecânicas à compressão a média do módulo de elasticidade mais elevada verificou-se na orientação xy, 45° com o valor de 2409,43 MPa, tendo sido registados os valores de 2384,64 e 2397,13 MPa para as orientações xy, 0° e xy, 90°, respetivamente. A maior diferença entre o valor médio máximo e mínimo foi de 24,79 MPa, para as orientações xy, 0° e 45°. Esta amplitude representa uma variação percentual do módulo de elasticidade médio à tração relativamente ao valor mais baixo de 4,32%. Este valor é

Tabela 25: Dimensões dos provetes para determinação das propriedades mecânicas à compressão do material VeroClear™, dimensões em mm.

Provetes curtos											
Ori. xy, 0°				Ori. xy, 45°				Ori. xy, 90°			
$L$	$b_1$	$h$		$L$	$b_1$	$h$		$L$	$b_1$	$h$	
$\bar{x}$	25,86	12,81	12,71	$\bar{x}$	25,68	12,97	12,71	$\bar{x}$	25,47	13,06	12,71
$S$	0,05	0,03	0,01	$S$	0,04	0,03	0,001	$S$	0,08	0,03	0,00
Provetes longos											
Ori. xy, 0°				Ori. xy, 45°				Ori. xy, 90°			
$L$	$b_1$	$h$		$L$	$b_1$	$h$		$L$	$b_1$	$h$	
$\bar{x}$	51,21	12,81	12,71	$\bar{x}$	51,08	12,98	12,71	$\bar{x}$	50,94	13,10	12,71
$S$	0,02	0,05	0,00	$S$	0,06	0,03	0,00	$S$	0,03	0,01	0,01

Nota:  $l_3$  comprimento inicial,  $b_1$  largura,  $h$  altura.

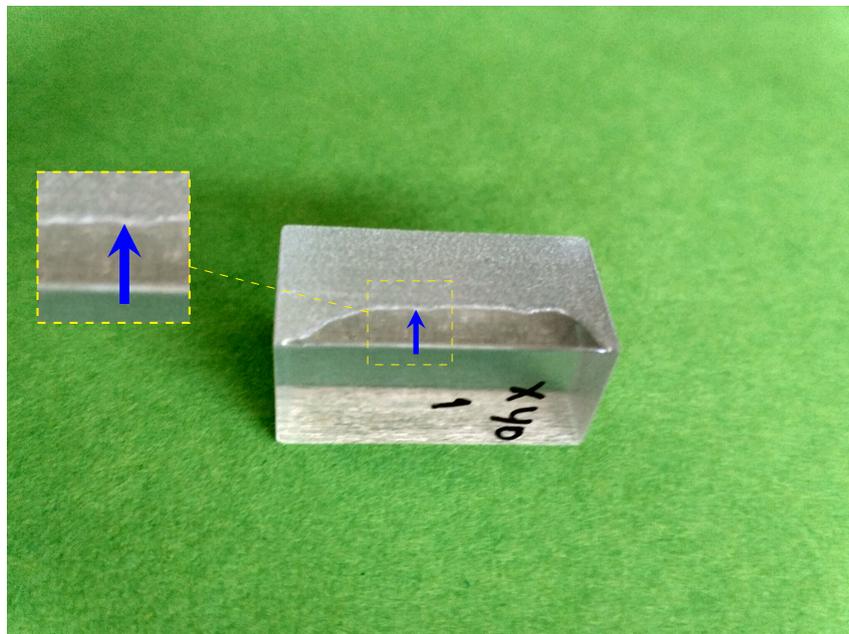


Figura 65: Efeito do material de suporte no aumento de espessura na superfície da peça. Na imagem é visível a sobre-espessura na zona de produzida com suporte.

substancialmente inferior à amplitude verificada para o ensaio de tração que foi de 17,89%. Os valores do módulo de elasticidade médio apresentam um desvio padrão ( $S$ ) que varia entre 16,9 e 22,71 MPa para as orientações  $xy$ ,  $45^\circ$  e  $xy$   $0^\circ$ , respetivamente. O fabricante do material VeroClear™ não fornece valores de referência para às propriedades mecânicas obtidas no ensaio de compressão. Os resultados obtidos do módulo de elasticidade médio à compressão são significativamente superiores aos reportados, 1220 e 1068,9 MPa, no trabalho apresentado por Su et al. (2020). Similarmente, noutra estudo (L. Wang et al., 2017) foram registados valor médios do módulo de elasticidade à compressão uniaxial de 2200 - 2290 MPa, estes valores apesar de mais aproximados dos obtidos no presente trabalho ainda são inferiores.

Tabela 26: Propriedades mecânicas médias do VeroClear™ à compressão.

ori. $xy$ , $0^\circ$	$E_c$ [MPa]	$\sigma_{0,2\%}$ [MPa]	$F_m$ [kN]	$\sigma_m$ [MPa]	$\varepsilon_{F_m}$ [%]
$\bar{x}$	2384,64	84,68	15,17	88,28	5,04
$S$	22,71	0,73	0,10	0,30	0,05
Ori. $xy$ , $45^\circ$					
$\bar{x}$	2409,43	85,17	15,28	87,58	5,00
$S$	16,99	0,60	0,08	0,67	0,02
Ori. $xy$ , $90^\circ$					
$\bar{x}$	2397,13	86,01	15,34	87,55	4,97
$S$	21,82	0,79	0,08	0,48	0,04

Nota: Ori.-orientação de produção,  $\varepsilon_F$  deformação total na força máxima.

À semelhança do observado no ensaio de tração, o VeroClear™ apresenta um comportamento típico de um material dúctil, sem zona de transição distinta entre o regime elástico e o plástico (Anexo A Figura A.3). deste modo foi calculada a tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,2% ( $\sigma_{0,2\%}$ ). A tensão limite convencional de proporcionalidade ( $\sigma_{0,2\%}$ ) média apresentou os valores de 84,68, 85,17 e 86,01 MPa, para a orientação  $xy$ ,  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$ , respetivamente. O desvio percentual relativo ao menor valor é de 1,57%. Este valor assim como o desvio padrão não são significativos.

A força máxima ( $F_m$ ) média das três orientações apresentam valores que variam entre 15,17 e 15,34 N para as orientações  $xy$ ,  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , respetivamente. Esta amplitude de valores não é significativa e representa uma percentagem de desvio relativa ao valor mínimo de 1,1%. Analogamente, os desvios padrão são baixos.

Similarmente às restantes propriedades em estudo, a média da tensão máxima à tração  $\sigma_m$  apresenta uma reduzida variação entre os valores registados, assim como desvios padrão. As orientações  $xy$   $0^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$  exibiram valores de 88,28, 87,58 e 87,55 MPa, respetivamente. Outro estudo (L. Wang et al., 2017) reportou uma tensão máxima média de 71 MPa, inferior à alcançada no presente trabalho.

Os ensaios de compressão exibem um modo de falha em que o material desliza entre si ao longo de uma área a meio do provete. Isto poderá indicar que a falha ocorre entre as camadas depositadas (i.e., interface). Na Figura 66 ilustra o efeito da delaminação responsável pelo modo de falha. Ambos os provetes exibiram o mesmo modo de falha. Nos provetes mais curtos o efeito de barrilamento foi mais notório. Os dados primários e respetivos diagramas tensão-deformação dos ensaios de compressão, são apresentados na Secção A.2 do Apêndice A.

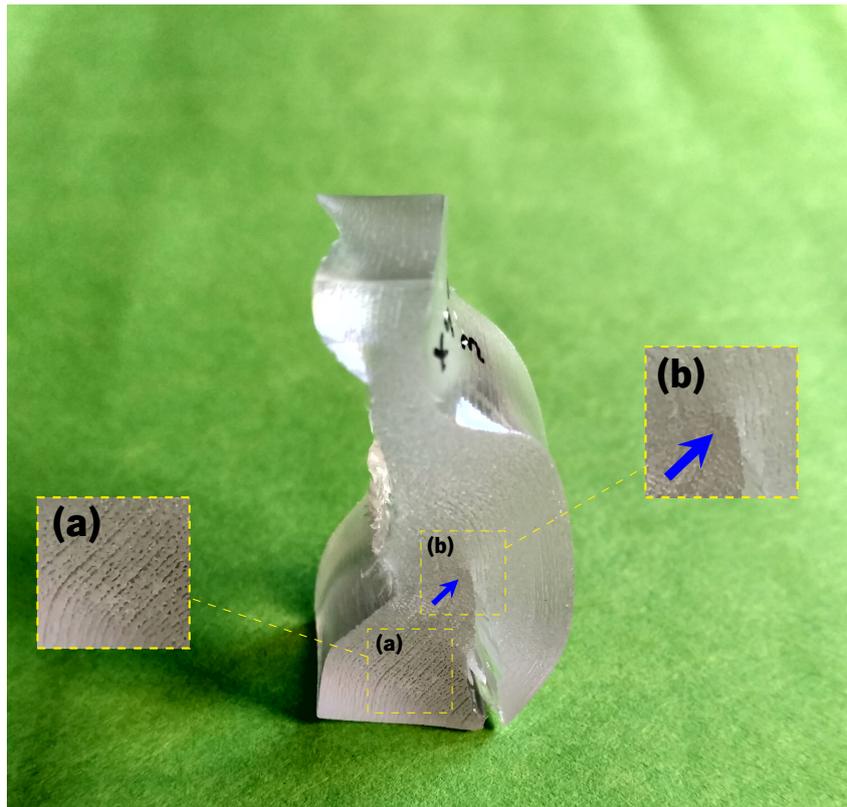


Figura 66: Provette longo após realização do ensaio de compressão, no qual apresenta delaminação responsável pelo modo de falha. Na imagem são visíveis (a) as camadas e sua orientação de deposição, (b) falha na região de interface entre camadas.

As propriedades mecânicas do VeroClear™ analisadas à compressão, apresentam menor amplitude de valores, quando comparadas com as obtidas nos ensaios de tração. Este facto, sugere que as orientações de produção estudadas não tem forte influência nas propriedades mecânicas à compressão. Foi igualmente possível verificar que as propriedades analisadas registaram valores superiores quando comparadas com as reportadas noutros estudos.

Quanto ao modo de falha, pode ser classificado como delaminação entre as camadas depositadas. Este comportamento pode estar relacionado com o modo de funcionamento do processo e efeito da orientação de fabrico nas propriedades mecânicas dos provetes. De acordo com o modo de operação intrínseco ao processo PJet, em que cada camada de resina líquida depositada é curada imediatamente, antes que a camada posterior seja depositada, resultando numa estrutura laminada.

## 4.7 Resultados das topologias ótimas

A maioria dos testes e ensaios normalizados foram desenvolvidos para caracterizar materiais sólidos contínuos. No caso de materiais celulares poliméricos não existem normas nem métodos específicos para a determinação experimental das propriedades mecânicas.

Nesta secção são apresentados os resultados dos ensaios mecânicos de caracterização das topologias ótimas realizados neste trabalho. Primeiramente, são apresentados os ensaios de tração uniaxial realizados em dois VRU ótimos obtidos anteriormente por OT. Neste estudo foram consideradas duas frações volúmicas e três diferentes arranjos de escala. De seguida, são expostos os ensaios de compressão uniaxial efetuados. Por último, são revelados os resultados do ensaio de corte desenvolvido no contexto do presente trabalho.

### 4.7.1 Ensaio de tração das topologias ótimas

Nesta secção são apresentados os resultados dos ensaios de tração, e discutida a influência da configuração dos provetes (i.e., número de VRU) nos desvios verificados. Os dados primários força e deslocamento utilizados foram obtidos pela leitura da célula de carga e do travessão da máquina universal de ensaios, respetivamente. Na Tabela 27 são apresentados os resultados do módulo de Young homogeneizado e obtido experimentalmente à tração. Na Figura C.1 do Apêndice C são apresentados os diagramas tensão-extensão obtidos a partir dos dados primários do ensaio mecânico à tração, das diferentes três configurações de VRU com frações volúmicas de 30 e 60 %.

Da análise dos resultados a média do módulo de Young à tração com fração volúmica de 60 % e configuração  $3 \times 3 \times 3$  foi a mais elevada com 633,3 MPa, tendo as configurações  $1 \times 1 \times 1$  e  $2 \times 2 \times 2$ , 345,9 e 470,7 MPa, respetivamente. Da mesma forma, no VRU com  $V_f$  30 % podemos observar que a configuração de maior escala a  $3 \times 3 \times 3$  é a que exhibe o maior valor de média de módulo com 361,3 MPa e sendo os valores das configurações  $1 \times 1 \times 1$  e  $2 \times 2 \times 2$ , 236,6 e 304,8 MPa, respetivamente. Os módulos homogeneizados dos VRU com frações volúmicas de 30 e 60 % foram de 419,9 e 810,2 MPa, respetivamente. Os valores da média do módulo de Young experimental, de todas as frações volúmicas, são inferiores aos obtidos na HCD.

Quanto ao desvio entre a média do módulo de Young experimental e homogeneizado, o VRU com fração volúmica de 60 % e configuração  $1 \times 1 \times 1$  apresenta o maior desvio  $-57,3 \%$ . Já para as configurações  $2 \times 2 \times 2$  e  $3 \times 3 \times 3$  com mesma fração volúmica o erro relativo foi de  $-41,9 \%$  e  $-21,8 \%$ , respetivamente. Relativamente ao VRU com fração volúmica de 30 % os desvios registados são inferiores comparativamente com o VRU de 60 %. Com efeito, os desvios no VRU com 30 % foram de  $-43,7 \%$ ,  $-27,4 \%$  e  $-13,9 \%$  para as configurações de  $1 \times 1 \times 1$ ,  $2 \times 2 \times 2$  e  $3 \times 3 \times 3$ , respetivamente. Constata-se que o desvio entre os valores do módulo experimental médio e homogeneizado decresce com o aumento da escala da configuração dos VRU (i.e., número de VRU no provete). Este comportamento está de acordo com a suposição de periodicidade, continuidade e da dimensão característica do VRU ser bastante inferior à do macro

Tabela 27: Estudo comparativo dos módulos de elasticidade à tração experimentais e obtidos por homogeneização numérica.

Ref.	Topologia	$V_f$ [%]	Nº VRU	$E_0$ [MPa]	$E^H$ [MPa]	$E^{exp}$ [MPa]	$E_{rr}$ [%]
U301		30	1×1×1	2061	419,9	236,6(15,59)	-43,7
U302			2×2×2			304,8(9,09)	-27,4
U303			3×3×3			361,3(7,05)	-13,9
U601		60	1×1×1	2061	810,2	345,9(13,73)	-57,3
U602			2×2×2			470,7(11,69)	-41,9
U603			3×3×3			633,3(15,75)	-21,8

Nota:  $E_0$  módulo de Young experimental à tração resina VeroClear RGD810;  $E^H$  módulo de Young homogeneizado VRU;  $E^{exp}$  módulo de Young médio à tração experimental VRU;  $E_{rr}$  erro relativo em percentagem ( $\frac{E^{exp}-E^H}{E^H} \times 100$ ); em parênteses é apresentado o desvio padrão.

componente. Por isso, uma possível explicação para este comportamento é a influencia das condições de fronteira. Outro aspeto que pode ser constatado é que os desvios entre os valores do módulo experimental médio e homogeneizado diminui com o aumento da fração volúmica dos VRU. A Figura 67(a) e 67(b) apresentam os diagramas dos desvios dos módulos de Young à tração experimentais relativamente aos homogeneizados.

Em síntese, destaca-se que o módulo de Young obtido experimentalmente apresenta valores inferiores aos estimados por HCD. Estes desvios diminuem com o aumento da escala (i.e., maior número de VRU associados). Este comportamento está de acordo com aceitação de periodicidade estabelecida na HCD. Das duas frações volúmicas estudadas os VRU com 30% apresentaram menor desvio do módulo de Young médio em todas as três configurações (1×1×1, 2×2×2 e 3×3×3). Uma possível explicação poderá resultar da existência localizada de padrão de *checkerboard* em algumas regiões dos VRU com fração volúmica de 60%. Estes padrões, originam uma falsa rigidez provocando uma sobrestimativa do módulo de elasticidade na operação de homogeneização. A Figura 68 ilustra o corte do referido VRU.

#### 4.7.2 Ensaio de compressão das topologias ótimas

Na Tabela 28 resumem-se os resultados dos ensaios de compressão das VRU. Os dados primários força e deslocamento utilizados foram obtidos pela leitura da célula de carga e do travessão da máquina universal de ensaios, respetivamente. Nesta tabela são comparados os valores do módulo de elasticidade experimental médio à compressão com os valores efetivos obtidos por homogeneização. Os diagramas tensão-deformação obtidos a partir dos dados primários força–deslocamento no ensaio mecânico à compressão, das diferentes três configurações de VRU com frações volúmicas de 30, 45 e 60%, são apresentados na Figura C.2 e C.3 do Apêndice C. Os resultados da média do módulo de elasticidade à compressão com fração volúmica de 30% a configuração 2×2×2 foi a que apresentou o valor mais elevado com 98,7 MPa, sendo que as configurações 1×1×1 e 3×3×3, exibiram 62,4 e 81,3 MPa, respetivamente. Analogamente,

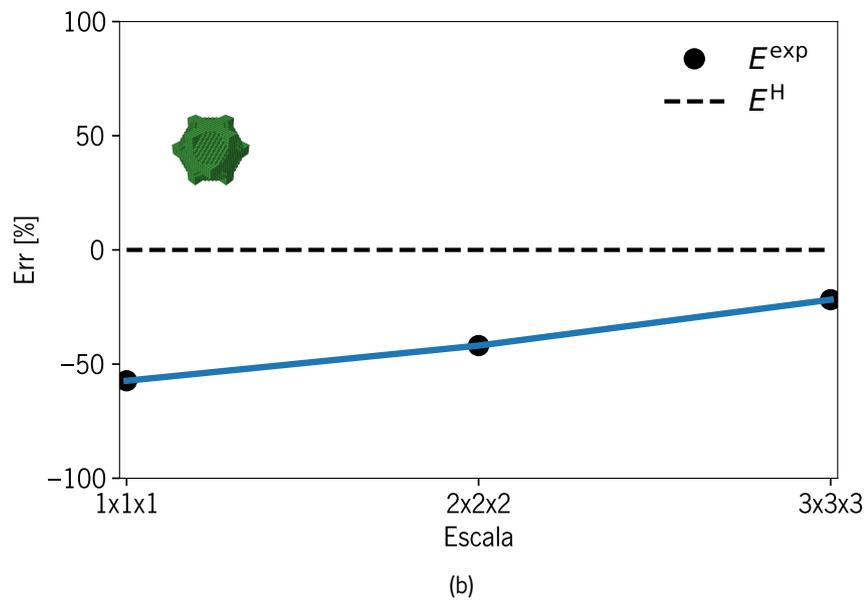
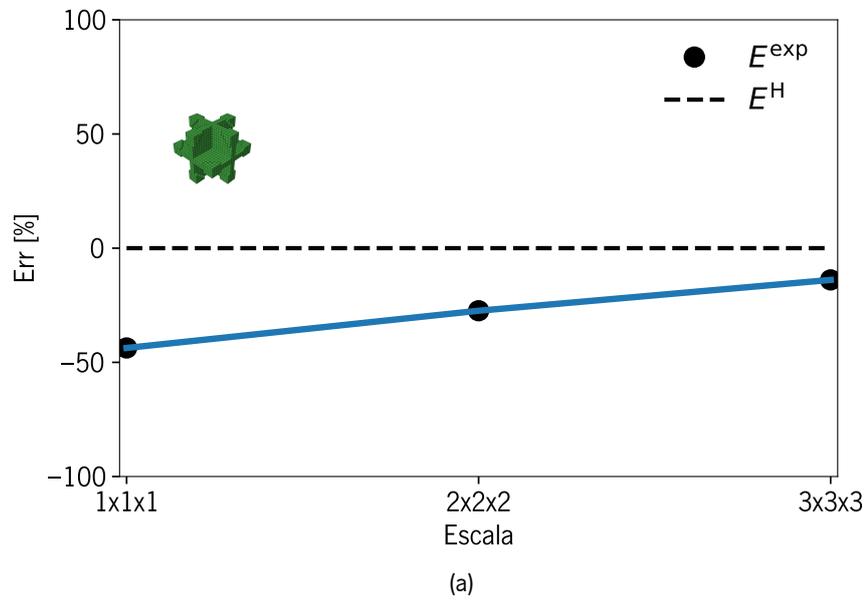


Figura 67: Desvio do módulo de Young experimental relativamente ao homogêneo obtido no ensaio de tração de três configurações de VRU ( $1 \times 1 \times 1$ ,  $2 \times 2 \times 2$  e  $3 \times 3 \times 3$ ) com duas frações volúmicas: (a) percentagem de erro relativo para VRU com 30% de fração volúmica e (b) percentagem de erro relativo para VRU com 60% de fração volúmica;  $E^{exp}$  módulo de Young experimental;  $E^H$  módulo de Young homogêneo.

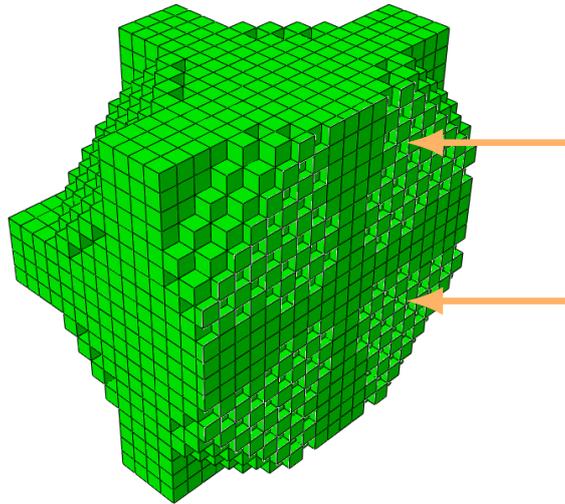


Figura 68: Padrões de tabuleiro de xadrez (*checkerboard*). A figura apresenta uma vista com corte de uma topologia com fração volúmica de 60 %.

para os VRU com  $V_f$  45 % a configuração  $3 \times 3 \times 3$  foi mais uma vez a que apresentou o maior valor de módulo de elasticidade médio, com 320,5 MPa e sendo os valores das configurações  $1 \times 1 \times 1$  e  $2 \times 2 \times 2$ , 188,1 e 290,3 MPa, respetivamente. No caso do VRU com fração volúmica de 60 % a configuração  $3 \times 3 \times 3$  apresentou o valor do módulo de elasticidade médio à compressão mais elevado, com 649,8 MPa. No caso das configurações  $1 \times 1 \times 1$  e  $2 \times 2 \times 2$  registaram-se 244,1 e 505 MPa, respetivamente. Os módulos homogeneizados dos VRU com frações volúmicas de 30, 45 e 60 % foram de 124,5, 393 e 673,3 MPa, respetivamente. Os valores do módulo de elasticidade médio experimental à compressão, de todas as configurações e frações volúmicas, são inferiores aos obtidos na HCD. Nas Figuras C.2(a), C.2(c), C.2(d) e C.3(a) é visível um efeito ondulado nas curvas. Estes resultados são causadas pelos pequenos valores do deslocamento, mostrando os incrementos que a máquina aplica.

Relativamente à diferença entre a média do módulo de elasticidade experimental e homogeneizado, o VRU com fração volúmica de 60 % e configuração  $1 \times 1 \times 1$  apresenta o maior desvio  $-63,7\%$ . Já para as configurações  $2 \times 2 \times 2$  e  $3 \times 3 \times 3$  com mesma fração volúmica o erro relativo foi de  $-24,9\%$  e  $-3,5\%$ , respetivamente. No caso dos VRU com fração volúmica de 30 % os desvios registados foram de  $-49,9\%$ ,  $-34,7\%$  e  $-20,7\%$  para as configurações de  $1 \times 1 \times 1$ ,  $2 \times 2 \times 2$  e  $3 \times 3 \times 3$ , respetivamente. Por último, a fração volúmica de 45 %, registou o menor desvio para na configuração  $3 \times 3 \times 3$ , com  $-18,4\%$ , com as configurações  $1 \times 1 \times 1$  e  $2 \times 2 \times 2$  alcançarem  $-52,1\%$  e  $-26,1\%$ , respetivamente. Similarmente ao observado pelos autores Iyibilgin et al. (2013) a fração volúmica influencia o módulo de elasticidade experimental, VRU com a mesma topologia e menor fração volúmica apresentam maiores desvios entre o módulo experimental e o obtido por HCD.

Constata-se que, similarmente ao observado para os ensaios de tração, pese embora tenham sido utilizadas outras topologias, o desvio entre os valores do módulo experimental médio e homogeneizado decresce em todas as frações volúmicas com o aumento de escala da configuração dos VRU (i.e., número

Tabela 28: Resultados do estudo comparativo dos módulos de elasticidade à compressão experimentais e obtidos por homogeneização numérica.

Ref.	Topologia	$V_f$ [%]	Nº VRU	$E_0$ [MPa]	$E^H$ [MPa]	$E^{exp}$ [MPa]	$E_{rr}$ [%]
C301		30	1×1×1	2061	124,5	62,4(33,87)	-49,9
C302			2×2×2			81,3(14,89)	-34,7
C303			3×3×3			98,7(4,04)	-20,7
C451		45	1×1×1	2061	393,0	188,1(98,98)	-52,1
C452			2×2×2			290,3(8,42)	-26,1
C453			3×3×3			320,5(20,69)	-18,4
C601		60	1×1×1	2061	673,3	244,1(40,43)	-63,7
C602			2×2×2			505,0(17,70)	-24,9
C603			3×3×3			649,8(12,98)	-3,5

Nota:  $E_0$  módulo de Young experimental à tração da resina VeroClear RGD810;  $E^H$  módulo de Young homogeneizado;  $E^{exp}$  módulo de elasticidade experimental médio à compressão;  $E_{rr}$  erro relativo em percentagem ( $\frac{E^{exp}-E^H}{E^H} \times 100$ ); em parênteses é apresentado o desvio padrão.

de VRU no provete). A Figura 69 e 70 apresentam os diagramas dos desvios dos módulos de Young à compressão experimentais relativamente aos homogeneizados.

Em resumo, destaca-se que o módulo de Young médio obtido experimentalmente à compressão apresenta valores inferiores aos estimados por HCD. Estes desvios diminuem com o aumento da escala (i.e., maior número de VRU associados). Este comportamento está de acordo com a admissão de periodicidade estabelecida na HCD, que considera a macroestrutura infinitamente maior que a microestrutura. Das três frações volúmicas estudadas o VRU com 60 % apresentou menor desvio do módulo de Young médio em todas as três configurações (1×1×1, 2×2×2 e 3×3×3).

### 4.7.3 Ensaio de corte das topologias ótimas

A capacidade de testar mecanicamente materiais celulares rígidos com microestrutura periódica VRU ao corte é especialmente importante devido aos desafios associados à previsão de sua resistência a solicitações de corte. Estudos acerca do comportamento à solicitação de corte nos materiais celulares rígidos com microestrutura periódica VRU, à data são inexistentes na literatura consultada. Este facto, deve-se às dificuldades práticas em realizar os ensaios mecânicos de corte (i.e., em garantir aplicação de um esforço puro de corte no VRU). No presente trabalho, foi adaptado um acessório de fixação do provete às amarras da máquina de ensaios que permite a realização do ensaio de corte por tração de sobreposição simples num provete com VRU. A geometria, dimensões do acessório assim como a implementação do referido teste são descritos na Secção 3.2.4.3.

Nesta secção são apresentados os resultados dos ensaios de corte experimentais desenvolvidos no contexto do presente trabalho. Posteriormente, o módulo de elasticidade transversal experimental é comparado com o obtido por HCD. Procedeu-se igualmente à análise dos modos de falha/rotura.

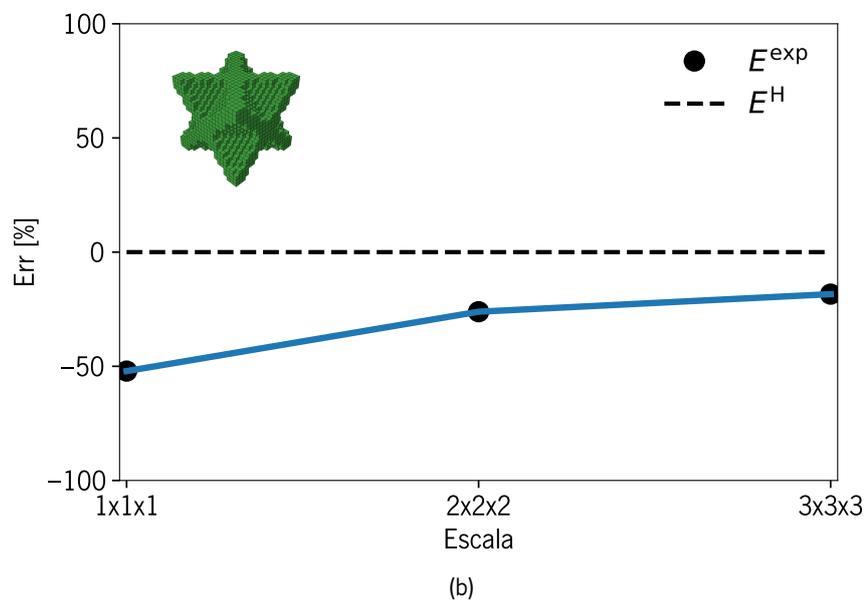
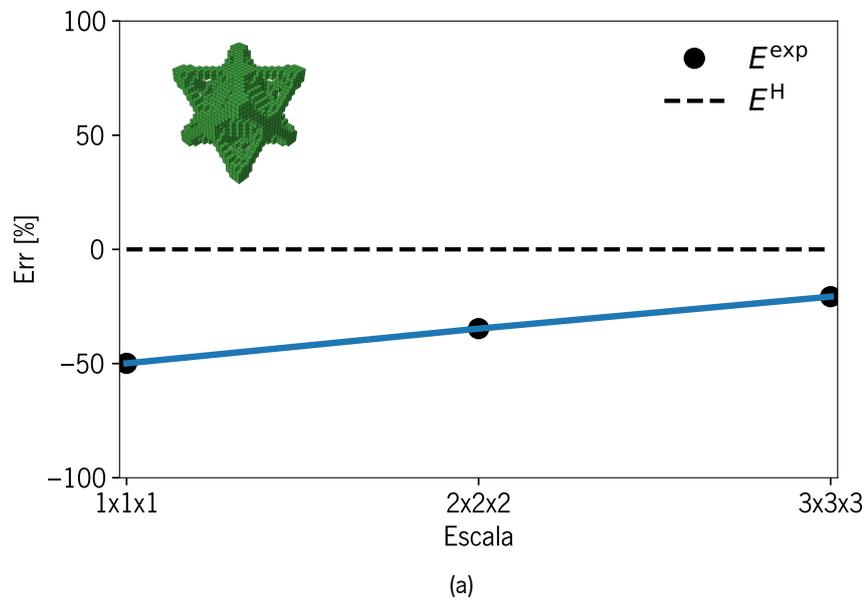


Figura 69: Diagramas dos desvio do módulo de Young experimental relativamente ao homogêneo obtido no ensaio de compressão de três configurações de VRU (1×1×1, 2×2×2 e 3×3×3) com duas frações volúmicas: (a) percentagem de erro relativo para VRU com 30 % de fração volúmica, (b) percentagem de erro relativo para VRU com 45 % de fração volúmica.

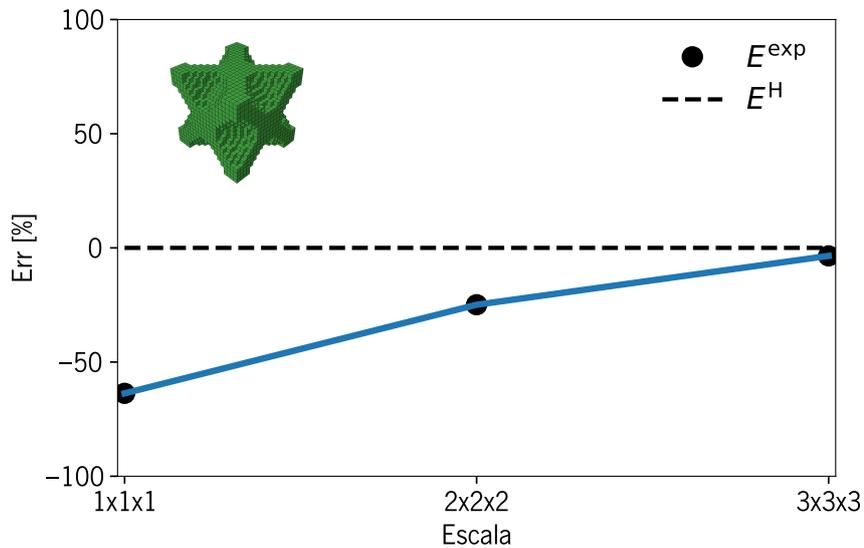


Figura 70: Diagrama dos desvios do módulo de Young à compressão experimental relativamente ao homogeneizado (cont.) obtido no ensaio de compressão de três configurações de VRU (1×1×1, 2×2×2 e 3×3×3). O diagrama representa a percentagem de erro relativo para VRU com 60 % de fração volúmica;  $E^{exp}$  módulo de Young experimental;  $E^H$  módulo de Young homogeneizado.

Os dados primários força e deslocamento utilizados foram obtidos pela leitura da célula de carga e do travessão da máquina universal de ensaios, respetivamente. A Figura 71 ilustra a montagem dos provetes na máquina universal de ensaios.

Da análise dos resultados a média do módulo de elasticidade transversal experimental com fração volúmica de 60 % foi a mais elevada com 73,4 MPa, tendo as frações volúmicas 30 e 45 % registado 31,2 e 64,4 MPa, respetivamente. Os valores da média do módulo de elasticidade transversal experimental, de todas as frações volúmicas, são inferiores aos obtidos na HCD.

Quanto ao desvio entre a média do módulo de elasticidade transversal experimental e homogeneizado, a topologia com fração volúmica de 60 % apresenta o maior desvio -78,0 %. Já para as configurações as frações volúmicas 30 e 45 % o erro relativo foi de -64,7 e -72,6 %, respetivamente. Constata-se que o desvio entre os valores do módulo de elasticidade transversal experimental médio e o homogeneizado aumenta com o aumento da fração volúmica. Este comportamento é contrário ao verificado nos ensaios de tração e de compressão, em que o erro relativo diminuía com o aumento da fração volúmica. O desvio padrão do módulo de elasticidade transversal é baixo para todas as frações volúmicas testadas. A Tabela 29 apresenta os dados relativos ao estudo comparativo do módulo de elasticidade transversal experimental e homogeneizado.

Neste estudo, em resultado da separação de escalas entre a escala da microestrutura testada (pro-vete) e a escala considerada na homogeneização infinitamente maior, os resultados não podem ser usados para a validação quantitativa do modelo de HCD. Contudo, dada a inexistência de dados experimentais, os resultados dos ensaios realizados, podem ser empregues para uma avaliação qualitativa

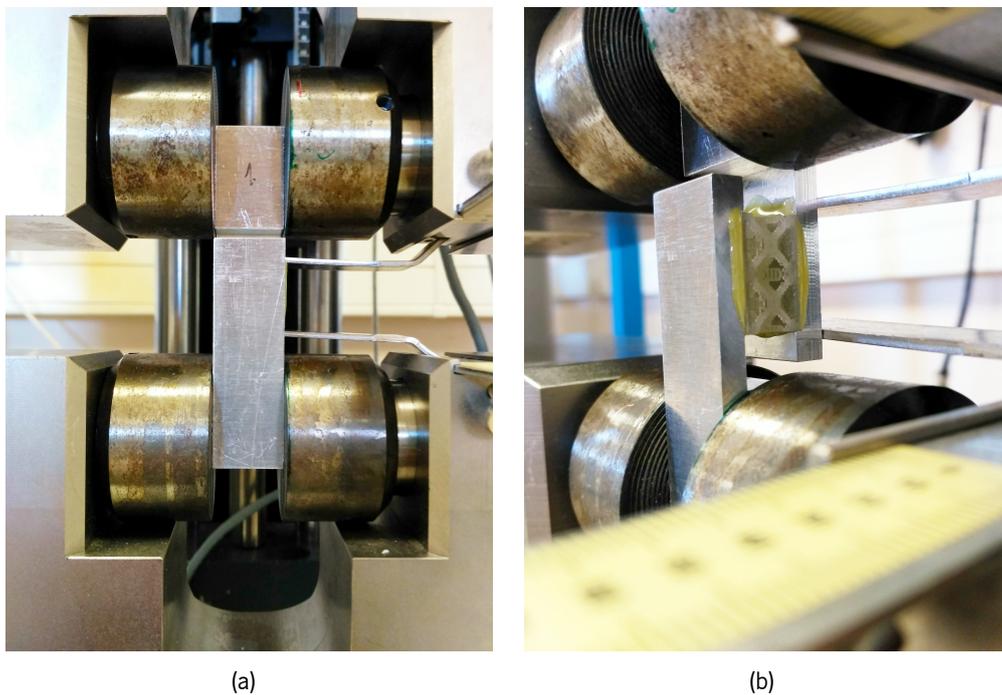


Figura 71: Ensaio de corte dos provetes com fração volúmica 30 %: (a) vista de frente da montagem na máquina de ensaios, (b) vista de lado.

Tabela 29: Resultados do estudo comparativo dos módulos de elasticidade transversal experimentais (ensaio de corte) e obtidos por homogeneização numérica.

Ref.	Topologia	$V_f$ [%]	Nº VRU	$G^H$ [MPa]	$G^{exp}$ [MPa]	$G_{rr}$ [%]
D30		30	1×2×2	88,3	31,2(0,91)	-64,7
D45		45	1×2×2	235,1	64,4(6,32)	-72,6
D60		60	1×2×2	334,1	73,4(6,87)	-78,0

Nota:  $G^H$ , módulo de elasticidade transversal homogeneizado;  $G^{exp}$ , módulo de elasticidade transversal experimental;  $G_{rr}$ , erro relativo em percentagem ( $\frac{G^{exp}-G^H}{G^H} \times 100$ ); em parênteses é apresentado o desvio padrão.

dos resultados obtidos por HCD. Na Figura C.5 do Apêndice C são apresentados os diagramas força–deslocamento ( $F - d$ ) obtidos nos ensaios de corte.

Quanto aos modos de falha dos provetes, a análise visual dos provetes após o ensaio permitiu identificar que a rotura ocorreu na região interior do VRU e não na zona de colagem ao acessório de alumínio. Esta rotura é do tipo coesiva. Nos provetes com 45 e 60 % de fração volúmica, a rotura inicia-se numa direção de aproximadamente  $45^\circ$  (obliqua) com a direção do eixo de carregamento. Posteriormente, sofre um desvio e progride na direção paralela ao mesmo eixo. No caso dos provetes 30 % de fração volúmica a direção da fenda é paralela ao eixo de carregamento e a rotura ocorre nos nós de ligação dos elementos sólidos onde a concentração de tensões é maior, devido a efeitos de flexão (S. Cui et al., 2018). A Figura 72 apresenta os provetes após o ensaio de corte.

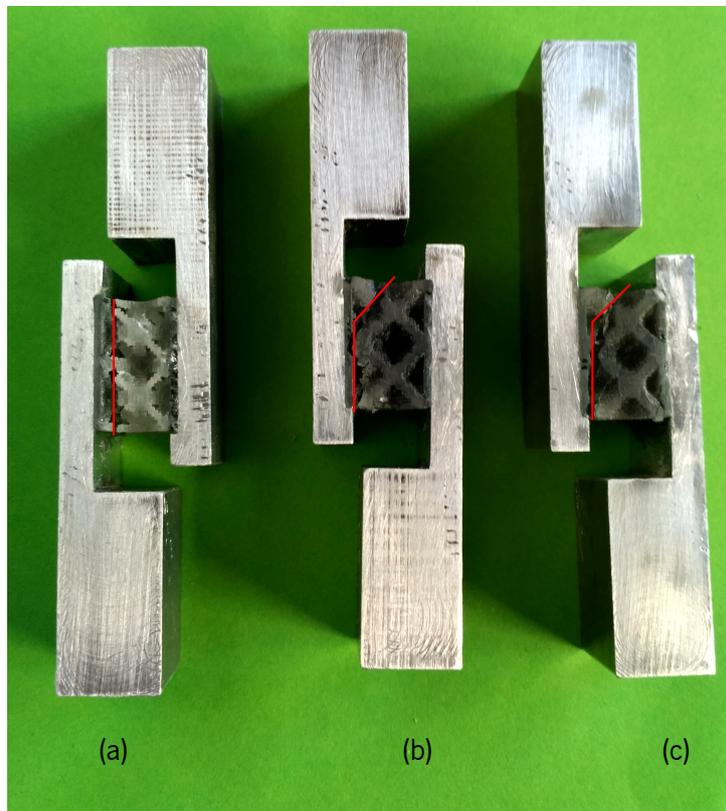


Figura 72: Provetes após o ensaio de corte. Nas imagens é visível que a rotura se inicia na direção obliqua ao eixo de carregamento e posteriormente inflete para uma direção paralela. A zona de ligação (colagem) dos provetes aos acessórios de alumínio não sofre dano, o modo de falha pode ser classificado como rotura coesiva: (a) provete com fração volúmica de 30 %, (b) provete com fração volúmica de 45 %, provete com fração volúmica de 60 %.



## Conclusões e Trabalhos Futuros

*Neste capítulo apresentam-se as principais conclusões obtidas ao longo do presente trabalho. Enuncia-se igualmente os potenciais trabalhos futuros a desenvolver.*

O trabalho apresentado ao longo deste documento focou-se na produção de metamateriais mecânicos e em explorar as relações entre as ferramentas computacionais de OT e de HCD de conceção, a tecnologia de FDD para a sua fabricação e a validação experimental destes materiais.

As ferramentas computacionais desenvolvidas no âmbito deste trabalho foram combinadas com o MEF para produzir os modelos computacionais que permitem resolver uma gama ampla de problemas. Por outro lado, os resultados experimentais de caracterização dos materiais base e das topologias ótimas realizados permitiram a comparação com os resultados obtidas por HCD. Após apresentação e discussão das teorias relativas às metodologias empregues foram implementados dois programas: um programa de OT com o método SIMP e critério de ótimo e outro algoritmo de HCD. Ambos os programas foram escritos em linguagem Python e recorreram ao programa Abaqus para resolução do problema de elementos finitos. Ambas as ferramentas computacionais foram testadas na resolução de problemas tridimensionais de OT e de cálculo das propriedades efetivas de VRU. Os dois programas apresentam um funcionamento intuitivo e um desempenho satisfatório e que podem ser facilmente adaptados à resolução de outro tipo de problemas.

A validação e análise de desempenho do programa de OT foi efetuada através de um estudo da influência das soluções iniciais e dos parâmetros do algoritmo SIMP nas soluções finais. Neste estudo foram consideradas diferentes distribuições de densidades iniciais e parâmetros de configuração. Verificou-se que as soluções ótimas são dependentes das soluções iniciais e dos parâmetros utilizados.

Foi igualmente realizado uma avaliação do desempenho do algoritmo de OT e de HCD na obtenção de topologias ótimas e na determinação das propriedades efetivas de um VRU, com duas malhas distintas e três diferentes tipos de elementos finitos. Verificou-se que nas propriedades homogeneizadas para a mesma topologia, o tamanho de malha e o tipo de elemento influenciam os resultados das propriedades mecânicas em estudo. Assim, é possível concluir que para as topologias e os elementos finitos considerados, as malhas mais refinadas apresentam valores homogeneizados do módulo de Young ( $E_{11}$ ) e de

elasticidade transversal ( $G_{12}$ ) inferiores.

Procedeu-se à demonstração de uma metodologia para construção de famílias de VRU baseada na combinação de diferentes soluções iniciais e carregamentos (deslocamentos e forças). Esta estratégia mostrou-se válida na obtenção de topologias ótimas com diferentes propriedades mecânicas e com soluções materializáveis do tipo vazio-sólido (0/1). Quanto aos algoritmos de pós-processamento das topologias ótimas desenvolvidos e implementados em linguagem Python, mostraram-se eficazes na geração e manipulação de ficheiros em formato .stl para posterior utilização no equipamento de fabrico.

Realizaram-se ensaios mecânicos normalizados de tração e compressão para caracterizar o material base (VeroClear™), e testar a influência das direções de fabrico nas dimensões dos provetes e nas propriedades mecânicas. Procedeu-se igualmente ao controlo dimensional dos provetes produzidos. Como principais conclusões do controlo dimensional os provetes de tração estão dentro dos limites dos desvios permitidos pela norma ISO 527-1:2019. Quanto aos ensaios de compressão as propriedades mecânicas da resina VeroClear™ analisadas, apresentam menor amplitude de valores, quando comparadas com as obtidas nos ensaios de tração. Este facto, sugere que as orientações de produção estudadas não têm forte influência nas propriedades mecânicas à compressão. Foi igualmente possível verificar que as propriedades analisadas registaram valores superiores quando comparadas com as reportadas noutros estudos. Quanto ao modo de falha, pode ser classificado como delaminação entre as camadas depositadas. Este comportamento pode estar relacionado com o modo de funcionamento do processo e efeito da orientação de fabrico nas propriedades mecânicas dos provetes.

Depois de verificar o funcionamento e desempenho dos algoritmos de OT e de HCD na resolução de problemas tridimensionais, realizaram-se ensaios mecânicos experimentais para caracterizar VRU otimizados anteriormente. Procedeu-se à realização do ensaio de tração de dois VRU otimizados a carregamento hidrostático com restrição de volume de 30 e 60 % e três configurações de  $1 \times 1 \times 1$ ,  $2 \times 2 \times 2$  e  $3 \times 3 \times 3$ . Como principais conclusões, destaca-se que o módulo de Young obtido experimentalmente apresenta valores inferiores aos estimados por HCD. Estes desvios diminuem com o aumento da escala (i.e., maior número de VRU associados) de acordo com aceitação de periodicidade estabelecida na HCD. Das duas frações volúmicas estudadas os VRU com 30 % apresentaram menor desvio do módulo de Young médio em todas as três configurações ( $1 \times 1 \times 1$ ,  $2 \times 2 \times 2$  e  $3 \times 3 \times 3$ ).

Relativamente às topologias ótimas as conclusões mais relevantes são que o módulo de Young médio obtido experimentalmente à compressão apresenta valores inferiores aos estimados por HCD. Constatase que, similarmente ao observado para os ensaios de tração, pese embora tenham sido utilizadas outras topologias, o desvio entre os valores do módulo experimental médio e homogeneizado decresce em todas as frações volúmicas com o aumento de escala da configuração dos VRU (i.e., número de VRU no provete). Este comportamento está de acordo com a admissão de periodicidade estabelecida na HCD, que considera a macroestrutura infinitamente maior que a microestrutura.

No que concerne aos ensaios experimentais de corte realizados em VRU otimizados a solicitações de corte, as principais conclusões são que o desvio entre os valores do módulo de elasticidade transversal

---

experimental médio e o homogeneizado aumenta com o aumento da fração volúmica. Este comportamento é contrário ao verificado nos ensaios de tração e compressão, em que o erro relativo diminuía com o aumento da fração volúmica. O desvio padrão do módulo de elasticidade transversal é baixo para todas as frações volúmicas testadas. Da análise ao modo de falha pode-se concluir que o tipo de rotura verificado é do tipo coesiva. No caso dos provetes com 45 e 60 % de fração volúmica, a rotura inicia-se numa direção de aproximadamente  $45^\circ$  com a direção do eixo de carregamento. No caso dos provetes 30 % de fração volúmica a direção da fenda é paralela ao eixo de carregamento e a rotura ocorre nos nós de ligação dos elementos sólidos onde a concentração de tensões é maior, devido a efeitos de flexão.

Assim como resposta as três principais questões de investigação:

- Qual a melhor metodologia a adotar para a produção de MMM por FDD?

Conclui-se com este trabalho que a metodologia utilizada, que conjuga o método numérico de otimização topologia SIMP com restrições de densidade ou solicitações de cargas pontuais é válida para a conceção de VRU com propriedades diversas, e que podem ser empregues na compilação de uma biblioteca de microestruturas unitárias para futura utilização na síntese de metamateriais mecânicos. Em relação à fabricação dos VRU, o processo PJet demonstrou capacidade para a produção das topologias nas dimensões estudadas. Contudo, à semelhança dos demais processos produtivos existem limites intrínsecos impostos pela sua natureza. Também a HCD implementada revelou ser uma ferramenta útil na estimativa das propriedades mecânicas efetivas dos VRU estudados.

- Que propriedades mecânicas efetivas terão os MMM produzidos por FDD?
- As propriedades experimentais dos MMM estarão de acordo com os modelos teóricos?

Quanto à validação experimental, foram determinadas duas propriedades mecânicas, módulo de Young e de elasticidade transversal através da realização de ensaios de tração compressão e corte. De salientar o método do ensaio de corte introduzida neste trabalho, que permitiu estimar as propriedades dos VRU a solicitações de corte. Relativamente a comparação das propriedades experimentais com as estimadas pela HCD, verificou-se que as obtidas experimentalmente, apresentam valores inferiores.

Como conclusão geral final e de acordo com o principal objetivo deste trabalho, produzir metamateriais mecânicos através de FDD, estabelecendo relações entre a conceção por intermédio de ferramentas computacionais, a tecnologia de fabrico e a validação experimental, os objetivos propostos foram alcançados.

A relevância deste assunto e do seu estado da arte indica que existe uma grande possibilidade de progressão no conhecimento de novos materiais, com novas propriedades e aplicações. Assim, existem várias linhas de investigação que se pensam serem de interesse e com potencial para gerar novo conhecimento científico na área dos metamateriais mecânicos. Como trabalhos futuros assinala-se como relevantes os seguintes: (i) melhorar a eficiência do programa de OT e implementar Método das Assintotas Móveis; (ii) estender aplicabilidade do programa à resolução de problemas distintos aos estudados

neste trabalho, em que a topologia é variável em função das propriedades alvo; (iii) estudar experimentalmente outros VRU com propriedades distintas e aprofundar o estudo do efeito de escala nas propriedades mecânicas; (iv) investigar o comportamento à fadiga dos VRU; (v) estudar e desenvolver a metodologia do ensaio de corte dos materiais celulares periódicos.

## Bibliografia

- AbaqusV6.14-1 (2014). "Abaqus/standard user's manual and Abaqus CAE manual". Providence, RI, USA: Dassault Systemes Simulia Corp.
- Aboudi, J. (1991). *Mechanics of Composite Materials: A Unified Micromechanical Approach*. Elsevier Science.
- Aboudi, Jacob (1989). "Micromechanical Analysis of Composites by the Method of Cells". *Applied Mechanics Reviews* 42.7, pp. 193–221. doi: 10.1115/1.3152428.
- Aboudi, Jacob (1996). "Micromechanical Analysis of Composites by the Method of Cells - Update". *Applied Mechanics Reviews* 49.10S, S83–S91. doi: 10.1115/1.3101981.
- Aboudi, Jacob, Steven M. Arnold e Brett A. Bednarczyk (2013). "Fundamentals of the Mechanics of Multiphase Materials". *Micromechanics of Composite Materials*. Elsevier, pp. 87–145. doi: 10.1016/b978-0-12-397035-0.00003-3.
- Adamczak, Stanisław, Jerzy Bochnia e Bożena Kaczmarska (2015). "An Analysis Of Tensile Test Results to Assess the Innovation Risk for an Additive Manufacturing Technology". *Metrology and Measurement Systems* 22.1, pp. 127–138. doi: 10.1515/mms-2015-0015.
- Afshar, M., A. Pourkamali Anaraki, H. Montazerian e J. Kadkhodapour (2016). "Additive manufacturing and mechanical characterization of graded porosity scaffolds designed based on triply periodic minimal surface architectures". *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials* 62, pp. 481–494. doi: 10.1016/j.jmbbm.2016.05.027.
- AlKassem, G. (2009). "Micromechanical material models for polymer composites through advanced numerical simulation techniques". Tese de doutoramento. Aachen University.
- Allaire, G. e G. A. Francfort (1993). "A Numerical Algorithm for Topology and Shape Optimization". *Topology Design of Structures*. Springer Netherlands, pp. 239–248. doi: 10.1007/978-94-011-1804-0\_16.
- Allaire, Grégoire (2002). "Homogenization". *Applied Mathematical Sciences*. Springer New York, pp. 1–89. doi: 10.1007/978-1-4684-9286-6\_1.

- Amstutz, S., S. M. Giusti, A. A. Novotny e E. A. de Souza Neto (2010). "Topological derivative for multi-scale linear elasticity models applied to the synthesis of microstructures". *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 84.6, pp. 733–756. doi: 10.1002/nme.2922.
- André, Jean-Claude (2017). *From additive manufacturing to 3D/4D printing. 1, From concepts to achievements*. Systems and industrial engineering - robotics series. ISTE ; Hoboken. isbn: 9781119428510. doi: 10.1002/9781119428510.
- Arora, Jasbir S. (2007). *Optimization of Structural and Mechanical Systems*. WORLD SCIENTIFIC. doi: 10.1142/6214.
- Arora, Jasbir Singh (2017). *Introduction to Optimum Design*. 4<sup>a</sup>. Elsevier. doi: 10.1016/c2013-0-15344-5.
- Ashby, M. F. (1989). "Materials Selection in Conceptual Design". *Materials Science and Technology* 5.6, pp. 517–525. doi: 10.1179/mst.1989.5.6.517.
- Ashby, M. F. (2005). "The properties of foams and lattices". *Philos Trans R Soc A: Math Phys Eng Sci* 364.1838, pp. 15–30. doi: 10.1098/rsta.2005.1678.
- Ashby, M. F. e D. Cebon (1993). "Materials Selection in Mechanical Design". *J. Phys. IV France* 03.C7, pp. 71–79. doi: 10.1051/jp4:1993701.
- ASTM D1621-16 (2016). *Standard Test Method for Compressive Properties of Rigid Cellular Plastics*. Standard. doi: 10.1520/d5592-94r18.
- ASTM D3039-17 (2017). *Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials*. Standard. doi: 10.1520/D3039\_D3039M-17.
- ASTM D3165-14 (2014). *Standard Test Method for Strength Properties of Adhesives in Shear by Tension Loading of Single-Lap-Joint Laminated Assemblies*. Standard. doi: 10.1520/D3165-07R14.
- ASTM D412-16 (2021). *Standard Test Methods for Vulcanized Rubber and Thermoplastic Elastomers—Tension*. Standard. doi: 10.1520/D0412-16R21.
- ASTM D4482-11 (2021). *Standard Test Method for Rubber Property—Extension Cycling Fatigue*. Standard. doi: 10.1520/D4482-11R21.
- ASTM D5379-19 (2019). *Standard Test Method for Shear Properties of Composite Materials by the V-Notched Beam Method*. Standard. doi: 10.1520/D5379\_D5379M-19E01.
- ASTM D638-14 (2014). *Standard Test Method for Tensile Properties of Plastics*. Standard. doi: 10.1520/D0638-14.
- ASTM D695-15 (2015). *Standard Test Method for Compressive Properties of Rigid Plastics*. Standard. doi: 10.1520/D0695-15.
- ASTM D7078M-20 (2020). *Standard Test Method for Shear Properties of Composite Materials by V-Notched Rail Shear Method*. Standard. doi: 10.1520/D7078\_D7078M-20E01.
- ASTM D790-17 (2017). *Standard Test Methods for Flexural Properties of Unreinforced and Reinforced Plastics and Electrical Insulating Materials*. Standard ASTM D790-17. West Conshohocken, PA. doi: 10.1520/D0790-17.

- ASTM D882-18 (2018). *Standard Test Method for Tensile Properties of Thin Plastic Sheeting*. Standard. doi: 10.1520/D0882-18.
- ASTM F2971-13 (2021). *Standard Practice for Reporting Data for Test Specimens Prepared by Additive Manufacturing*. Standard. doi: 10.1520/F2971-13R21.
- ASTM F3122-14 (2014). *Standard Guide for Evaluating Mechanical Properties of Metal Materials Made via Additive Manufacturing Processes*. Standard. doi: 10.1520/F3122-14.
- Attinger, D., Z. Zhao e D. Poulikakos (2000). "An Experimental Study of Molten Microdroplet Surface Deposition and Solidification: Transient Behavior and Wetting Angle Dynamics". *Journal of Heat Transfer* 122.3, pp. 544–556. doi: 10.1115/1.1287587.
- Bae, Chang-Jun, Alisha B. Diggs e Arathi Ramachandran (2018). "Quantification and certification of additive manufacturing materials and processes". *Additive Manufacturing*. Elsevier, pp. 181–213. doi: 10.1016/b978-0-12-812155-9.00006-2.
- Barbero, Ever J. (2007). *Finite element analysis of composite materials*. CRC press.
- Barclift, Michael W. e Christopher B. Williams (2012). "Examining Variability in the Mechanical Properties of Parts Manufactured via Polyjet Direct 3D Printing". *International Solid Freeform Fabrication Symposium*. University of Texas at Austin Austin, Texas, pp. 6–8.
- Barthelat, Francois e Reza Rabiei (2011). "Toughness Amplification in Natural Composites". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 59.4, pp. 829–840. issn: 0022-5096. doi: 10.1016/j.jmps.2011.01.001.
- Bass, Lindsey, Nicholas Alexander Meisel e Christopher B. Williams (2016). "Exploring Variability of Orientation and Aging Effects in Material Properties of Multi-material Jetting Parts". *Rapid Prototyping Journal* 22.5, pp. 826–834. doi: 10.1108/rpj-11-2015-0169.
- Bechtel, S. E., D. B. Bogy e F. E. Talke (1981). "Impact of a Liquid Drop Against a Flat Surface". *IBM Journal of Research and Development* 25.6, pp. 963–971. doi: 10.1147/rd.256.0963.
- Beghini, Lauren L., Alessandro Beghini, Neil Katz, William F. Baker e Glaucio H. Paulino (2014). "Connecting architecture and engineering through structural topology optimization". *Engineering Structures* 59, pp. 716–726. doi: 10.1016/j.engstruct.2013.10.032.
- Belegundu, Ashok D. e Jasbir S. Arora (1985). "A study of mathematical programming methods for structural optimization. Part I: Theory". *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 21.9, pp. 1583–1599. doi: 10.1002/nme.1620210904.
- Beltrán, N., F. Carriles, B. J. Álvarez, D. Blanco e J. C. Rico (2015). "Characterization of Factors Influencing Dimensional and Geometric Errors in PolyJet Manufacturing of Cylindrical Features". *Procedia Engineering* 132, pp. 62–69. doi: 10.1016/j.proeng.2015.12.480.
- Bendsøe, M. P. e O. Sigmund (1999). "Material interpolation schemes in topology optimization". *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)* 69.9-10, pp. 635–654. doi: 10.1007/s004190050248.
- Bendsøe, Martin P. (1989). "Optimal shape design as a material distribution problem". *Structural optimization* 1, pp. 193–202.

- Bendsøe, Martin P. (1995). *Optimization of Structural Topology, Shape, and Material*. Springer Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-662-03115-5.
- Bendsøe, Martin P. e Ole Sigmund (2004). *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*. Springer Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-662-05086-6.
- Bendsøe, Martin Philip e Noboru Kikuchi (1988). "Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 71.2, pp. 197–224. issn: 0045-7825. doi: 10.1016/0045-7825(88)90086-2.
- Benedetti, M., A. d. Plessis, R. O. Ritchie, M. Dallago, S. M. J. Razavi e F. Berto (2021). "Architected cellular materials: A review on their mechanical properties towards fatigue-tolerant design and fabrication". *Materials Science and Engineering: R: Reports* 144, p. 100606. issn: 0927-796X. doi: 10.1016/j.mser.2021.100606.
- Beran, M. (1965). "Use of the vibrational approach to determine bounds for the effective permittivity in random media". *Il Nuovo Cimento* 38.2, pp. 771–782. doi: 10.1007/bf02748596.
- Beran, M. e J. Molyneux (1966). "Use of classical variational principles to determine bounds for the effective bulk modulus in heterogeneous media". *Quarterly of Applied Mathematics* 24.2, pp. 107–118. doi: 10.1090/qam/99925.
- Beran, Mark J. e Norman R. Silnutzer (1971). "Effective Electrical, Thermal and Magnetic Properties of Fiber Reinforced Materials". *Journal of Composite Materials* 5.2, pp. 246–249. doi: 10.1177/002199837100500209.
- Berger, J. B., H. N. G. Wadley e R. M. McMeeking (2017). "Mechanical metamaterials at the theoretical limit of isotropic elastic stiffness". *Nature* 543.7646, pp. 533–537. doi: 10.1038/nature21075.
- Bertoldi, Katia (2017). "Harnessing Instabilities to Design Tunable Architected Cellular Materials". *Annual Review of Materials Research* 47.1, pp. 51–61. doi: 10.1146/annurev-matsci-070616-123908.
- Bertoldi, Katia, Pedro M. Reis, Stephen Willshaw e Tom Mullin (2009). "Negative Poisson's Ratio Behavior Induced by an Elastic Instability". *Advanced Materials* 22.3, pp. 361–366. doi: 10.1002/adma.200901956.
- Bickel, Bernd, Moritz Bächer, Miguel A. Otaduy, Hyunho Richard Lee, Hanspeter Pfister, Markus Gross e Wojciech Matusik (2010). "Design and fabrication of materials with desired deformation behavior". *ACM Transactions on Graphics*. Vol. 29. 4. ACM, p. 63.
- Bikas, H., P. Stavropoulos e G. Chryssolouris (2015). "Additive manufacturing methods and modelling approaches: a critical review". *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 83.1-4, pp. 389–405. doi: 10.1007/s00170-015-7576-2.
- Bobbert, F. S. L., K. Lietaert, A. A. Eftekhari, B. Pouran, S. M. Ahmadi, H. Weinans e A. A. Zadpoor (2017). "Additively manufactured metallic porous biomaterials based on minimal surfaces: A unique combination of topological, mechanical, and mass transport properties". *Acta Biomaterialia* 53, pp. 572–584. doi: 10.1016/j.actbio.2017.02.024.
- Böhm, H. J. (2018). *A short introduction to basic aspects of continuum micromechanics*. ILSB Report / ILSB-Arbeitsbericht 206, Institute of Lightweight Design and Structural Biomechanics (ILSB), Vienna

- University of Technology, Viena, Áustria, 2018. url: <https://www.ilsb.tuwien.ac.at/links/downloads/ilsbrep206.pdf> (acedido em 06/11/2018).
- Bonyar, Attila, Hunor Santha, Mate Varga, Balazs Ring, Andras Vitez e Gabor Harsanyi (2014). "Characterization of rapid PDMS casting technique utilizing molding forms fabricated by 3D rapid prototyping technology (RPT)". *International Journal of Material Forming* 7.2, pp. 189–196. doi: 10.1007/s12289-012-1119-2.
- Bose, Jagadis Chunder (1898). "On the rotation of plane of polarisation of electric waves by a twisted structure". *Proceedings of the Royal Society of London* 63.389-400, pp. 146–152.
- Bourdin, Blaise (2001). "Filters in topology optimization". *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50.9, pp. 2143–2158. doi: 10.1002/nme.116.
- Braian, Michael, David Jönsson, Mir Kevci e Ann Wennerberg (2018). "Geometrical accuracy of metallic objects produced with additive or subtractive manufacturing: A comparative in vitro study". *Dental Materials* 34.7, pp. 978–993. doi: 10.1016/j.dental.2018.03.009.
- Brajlih, Tomaz, Igor Drstvensek, Miha Kovacic e Joze Balic (2006). "Optimizing scale factors of the Poly-Jet rapid prototyping procedure by genetic programming". *Journal of achievements in materials and manufacturing engineering* 16.1-2, pp. 101–106. issn: 1734-8412. url: <http://jamme.acmsse.h2.pl/index.php?id=69>.
- Bruns, T. E. e D. A. Tortorelli (2003). "An element removal and reintroduction strategy for the topology optimization of structures and compliant mechanisms". *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 57.10, pp. 1413–1430. doi: 10.1002/nme.783.
- Bruns, Tyler E. e Daniel A. Tortorelli (2001). "Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190.26-27, pp. 3443–3459. doi: 10.1016/s0045-7825(00)00278-4.
- Brunt, Bruce van (2004). *The Calculus of Variations*. Springer New York. doi: 10.1007/b97436.
- Bückmann, T., M. Kadic, R. Schittny e M. Wegener (2015). "Mechanical metamaterials with anisotropic and negative effective mass-density tensor made from one constituent material". *physica status solidi (b)* 252.7, pp. 1671–1674. issn: 1521-3951. doi: 10.1002/pssb.201451698.
- Bückmann, Tiemo, Robert Schittny, Michael Thiel, Muamer Kadic, Graeme W. Milton e Martin Wegener (2014). "On three-dimensional dilational elastic metamaterials". *New Journal of Physics* 16.3, pp. 033–032. doi: 10.1088/1367-2630/16/3/033032.
- Bückmann, Tiemo, Nicolas Stenger, Muamer Kadic, Johannes Kaschke, Andreas Frölich, Tobias Kennerknecht, Christoph Eberl, Michael Thiel e Martin Wegener (2012). "Tailored 3D Mechanical Metamaterials Made by Dip-in Direct-Laser-Writing Optical Lithography". *Advanced Materials* 24.20, pp. 2710–2714. doi: 10.1002/adma.201200584.
- Bussmann, M., S. Chandra e J. Mostaghimi (2000). "Modeling the splash of a droplet impacting a solid surface". *Physics of Fluids* 12.12, pp. 3121–3132. doi: 10.1063/1.1321258.

- Cadman, Joseph E., Shiwei Zhou, Yuhang Chen e Qing Li (2012). "On design of multi-functional microstructural materials". *Journal of Materials Science* 48.1, pp. 51–66. doi: 10.1007/s10853-012-6643-4.
- Casadei, Filippo, Benjamin S. Beck, Kenneth A. Cunefare e Massimo Ruzzene (2012). "Vibration control of plates through hybrid configurations of periodic piezoelectric shunts". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 23.10, pp. 1169–1177. doi: 10.1177/1045389X12443014.
- Casadei, Filippo, Lorenzo Dozio, Massimo Ruzzene e Kenneth A. Cunefare (2010). "Periodic shunted arrays for the control of noise radiation in an enclosure". *Journal of Sound and Vibration* 329.18, pp. 3632–3646. issn: 0022-460X. doi: 10.1016/j.jsv.2010.04.003.
- Cazón, Aitor, Paz Morer e Luis Matey (2014). "PolyJet technology for product prototyping: Tensile strength and surface roughness properties". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture* 228.12, pp. 1664–1675. doi: 10.1177/0954405413518515.
- Chen, Danfang, Steffen Heyer, Suphunnika Ibbotson, Konstantinos Salonitis, Jón Garðar Steingrímsson e Sebastian Thiede (2015). "Direct digital manufacturing: definition, evolution, and sustainability implications". *Journal of Cleaner Production* 107, pp. 615–625. issn: 0959-6526. doi: 10.1016/j.jclepro.2015.05.009.
- Chen, Desai, David I. W. Levin, Piotr Didyk, Pitchaya Sitthi-Amorn e Wojciech Matusik (2013). "Spec2Fab". *ACM Transactions on Graphics* 32.4, pp. 1–10. doi: 10.1145/2461912.2461994.
- Chen, Jiaqin, Vadim Shapiro, Krishnan Suresh e Igor Tsukanov (2007). "Shape optimization with topological changes and parametric control". *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 71.3, pp. 313–346. doi: 10.1002/nme.1943.
- Cheng, Geng-Dong, Yuan-Wu Cai e Liang Xu (2013). "Novel implementation of homogenization method to predict effective properties of periodic materials". *Acta Mechanica Sinica* 29.4, pp. 550–556. doi: 10.1007/s10409-013-0043-0.
- Childs, T. H. C. e N. P. Juster (1994). "Linear and Geometric Accuracies from Layer Manufacturing". *CIRP Annals* 43.1, pp. 163–166. doi: 10.1016/s0007-8506(07)62187-8.
- Choung, J. M. e S. R. Cho (2008). "Study on true stress correction from tensile tests". *Journal of Mechanical Science and Technology* 22.6, pp. 1039–1051. doi: 10.1007/s12206-008-0302-3.
- Christensen, Johan, Muamer Kadic, Oliver Kraft e Martin Wegener (2015). "Vibrant times for mechanical metamaterials". *MRS Communications* 5.3, pp. 453–462. doi: 10.1557/mrc.2015.51.
- Christensen, Peter W. e Anders Klarbring (2008). *An Introduction to Structural Optimization*. Ed. por G. M. L. Gladwell. Springer Netherlands. doi: 10.1007/978-1-4020-8666-3.
- Clausen, Anders, Fengwen Wang, Jakob S. Jensen, Ole Sigmund e Jennifer A. Lewis (2015). "Topology Optimized Architectures with Programmable Poisson's Ratio over Large Deformations". *Advanced Materials* 27.37, pp. 5523–5527. issn: 1521-4095. doi: 10.1002/adma.201502485.
- Cooke, April e Johannes Soons (2010). "Variability in the Geometric Accuracy of Additively Manufactured Test Parts". en. *The 21st Annual Solid Freeform Fabrication Symposium: An Additive Manufacturing*

- Conference, Austin, TX. url: [https://tsapps.nist.gov/publication/get\\_pdf.cfm?pub\\_id=906639](https://tsapps.nist.gov/publication/get_pdf.cfm?pub_id=906639).
- Coulais, Corentin, Johannes T. B. Overvelde, Luuk A. Lubbers, Katia Bertoldi e Martin van Hecke (2015). "Discontinuous Buckling of Wide Beams and Metabeams". *Physics Rev. Lett.* 115 (4), p. 044301. doi: 10.1103/PhysRevLett.115.044301.
- Coulais, Corentin, Eial Teomy, Koen de Reus, Yair Shokef e Martin van Hecke (2016). "Combinatorial design of textured mechanical metamaterials". *Nature* 535, p. 529. doi: 10.1038/nature18960.
- Cui, Shaohua, Baoming Gong, Qian Ding, Yongtao Sun, Fuguang Ren, Xiuguo Liu, Qun Yan, Hai Yang, Xin Wang e Bowen Song (2018). "Mechanical Metamaterials Foams with Tunable Negative Poisson's Ratio for Enhanced Energy Absorption and Damage Resistance". *Materials* 11.10, p. 1869. doi: 10.3390/ma11101869.
- Dantan, Jean-Yves, Zhicheng Huang, Edoh Goka, Lazhar Homri, Alain Etienne, Nicolas Bonnet e Mickael Rivette (2017). "Geometrical variations management for additive manufactured product". *CIRP Annals* 66.1, pp. 161–164. doi: 10.1016/j.cirp.2017.04.034.
- de Gans, B.-J., P. C. Duineveld e U. S. Schubert (2004). "Inkjet Printing of Polymers: State of the Art and Future Developments". *Advanced Materials* 16.3, pp. 203–213. doi: 10.1002/adma.200300385.
- Derby, Brian (2010). "Inkjet Printing of Functional and Structural Materials: Fluid Property Requirements, Feature Stability, and Resolution". *Annual Review of Materials Research* 40.1, pp. 395–414. doi: 10.1146/annurev-matsci-070909-104502.
- Derby, Brian e Nuno Reis (2003). "Inkjet Printing of Highly Loaded Particulate Suspensions". *MRS Bulletin* 28.11, pp. 815–818. doi: 10.1557/mrs2003.230.
- Deshpande, V. S., M. F. Ashby e N. A. Fleck (2001). "Foam topology: bending versus stretching dominated architectures". *Acta Materialia* 49.6, pp. 1035–1040. issn: 1359-6454. doi: 10.1016/S1359-6454(00)00379-7.
- Diaz, A. e O. Sigmund (1995). "Checkerboard patterns in layout optimization". *Structural Optimization* 10.1, pp. 40–45. doi: 10.1007/bf01743693.
- Dieter, G. E. (2000). *Engineering Design: A Materials and Processing Approach*. Third. McGraw-Hill series in materials science and engineering. McGraw-Hill. isbn: 9780073661360.
- Dijk, N. P. van, K. Maute, M. Langelaar e F. van Keulen (2013). "Level-set methods for structural topology optimization: a review". *Structural and Multidisciplinary Optimization* 48.3, pp. 437–472. doi: 10.1007/s00158-013-0912-y.
- Dizon, John Ryan C., Alejandro H. Espera, Qiyi Chen e Rigoberto C. Advincula (2018). "Mechanical characterization of 3D-printed polymers". *Additive Manufacturing* 20, pp. 44–67. doi: 10.1016/j.addma.2017.12.002.
- Dong, Guoying, Yunlong Tang e Yaoyao Fiona Zhao (2017). "A Survey of Modeling of Lattice Structures Fabricated by Additive Manufacturing". *Journal of Mechanical Design* 139.10. doi: 10.1115/1.4037305.

- Drago, A. e M. Pindera (2007). "Micro-macromechanical analysis of heterogeneous materials: Macroscopically homogeneous vs periodic microstructures". *Composites Science and Technology* 67.6, pp. 1243–1263. doi: 10.1016/j.compscitech.2006.02.031.
- Drago, Anthony S., Marek-Jerzy Pindera, Glaucio H. Paulino, Marek-Jerzy Pindera, Robert H. Dodds, Fernando A. Rochinha, Eshan Dave e Linfeng Chen (2008). "A Locally-Exact Homogenization Approach for Periodic Heterogeneous Materials". *AIP Conference Proceedings*. AIP. doi: 10.1063/1.2896777.
- Drugan, W. J. e J. R. Willis (1996). "A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44.4, pp. 497–524. doi: 10.1016/0022-5096(96)00007-5.
- Duncan, Bruce (2010). "Developments in Testing Adhesive Joints". *Advances in Structural Adhesive Bonding*. Elsevier, pp. 389–436. doi: 10.1533/9781845698058.3.389.
- Duysinx, Pierre, Michaël Bruyneel e Claude Fleury (2003). *Solution of topology optimization problems with sequential convex programming*. url: <http://hdl.handle.net/2268/100151>.
- Eschenauer, Hans A. e Niels Olhoff (2001). "Topology optimization of continuum structures: A review". *Applied Mechanics Reviews* 54.4, pp. 331–390. doi: 10.1115/1.1388075.
- Fahad, Muhammad e Neil Hopkinson (2012). "A new benchmarking part for evaluating the accuracy and repeatability of Additive Manufacturing AM processes".
- Fleck, N. A., V. S. Deshpande e M. F. Ashby (2010). "Micro-architected materials: past, present and future". *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 466.2121, pp. 2495–2516. issn: 1364-5021. doi: 10.1098/rspa.2010.0215.
- Fleury, C. (1979). "Structural weight optimization by dual methods of convex programming". *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14.12, pp. 1761–1783. doi: 10.1002/nme.1620141203.
- Fleury, C. (1993). "Mathematical Programming Methods For Constrained Optimization: Dual Methods". *Structural Optimization: Status And Promise*. American Institute of Aeronautics e Astronautics, pp. 123–150. doi: 10.2514/5.9781600866234.0123.0150.
- Florijn, Bastiaan, Corentin Coulais e Martin van Hecke (2016). "Programmable mechanical metamaterials: the role of geometry". *Soft Matter* 12 (42), pp. 8736–8743. doi: 10.1039/C6SM01271J.
- Forster, Aaron M. (2015). "Materials testing standards for additive manufacturing of polymer materials: state of the art and standards applicability". *Additive Manufacturing Materials*. Ed. por Lillian White. Cap. 4.
- Fratzl, P., H. S. Gupta, E. P. Paschalis e P. Roschger (2004). "Structure and mechanical quality of the collagen–mineral nano-composite in bone". *Journal of Materials Chemistry* 14.14, pp. 2115–2123. doi: 10.1039/b402005g.
- Fratzl, Peter e Richard Weinkamer (2007). "Nature's hierarchical materials". *Progress in Materials Science* 52.8, pp. 1263–1334. doi: 10.1016/j.pmatsci.2007.06.001.
- Frenzel, Tobias, Muamer Kadic e Martin Wegener (2017). "Three-dimensional mechanical metamaterials with a twist". *Science* 358.6366, pp. 1072–1074. issn: 0036-8075. doi: 10.1126/science.aao4640.

- Furbank, Roy J. e Jeffrey F. Morris (2004). "An experimental study of particle effects on drop formation". *Physics of Fluids* 16.5, pp. 1777–1790. doi: 10.1063/1.1691034.
- Garnich, Mark R. e Ghodrati Karami (2004). "Finite Element Micromechanics for Stiffness and Strength of Wavy Fiber Composites". *Journal of Composite Materials* 38.4, pp. 273–292. doi: 10.1177/0021998304039270.
- Ghouse, Shaaz, Sarat Babu, Kenneth Nai, Paul A. Hooper e Jonathan R. T. Jeffers (2018). "The influence of laser parameters, scanning strategies and material on the fatigue strength of a stochastic porous structure". *Additive Manufacturing* 22, pp. 290–301. issn: 2214-8604. doi: 10.1016/j.addma.2018.05.024.
- Gibson, Ian, David Rosen e Brent Stucker (2015a). *Additive Manufacturing Technologies*. Springer New York. doi: 10.1007/978-1-4939-2113-3.
- Gibson, Ian, David Rosen e Brent Stucker (2015b). "Direct Digital Manufacturing". *Additive Manufacturing Technologies*. Springer New York, pp. 375–397. doi: 10.1007/978-1-4939-2113-3.
- Gibson, L. J. e M. F. Ashby (1982). "The Mechanics of Three-Dimensional Cellular Materials". *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 382.1782, pp. 43–59. doi: 10.1098/rspa.1982.0088.
- Gibson, Lorna J. e Michael F. Ashby (1997). *Cellular Solids: Structure and Properties*. Second ed. Cambridge Solid State Science Series. Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139878326.
- Granta, Design (19 de ago. de 2018). *Granta Education Hub*. Ed. por Granta. url: <http://teachingresources.grantadesign.com/index>.
- Greaves, G. N., A. L. Greer, R. S. Lakes e T. Rouxel (2011). "Poisson ratio and modern materials". *Nature Materials* 10, p. 823. doi: 10.1038/nmat3134.
- Grima, Joseph N., Daphne Attard e Ruben Gatt (2008). "Truss-type systems exhibiting negative compressibility". *physica status solidi (b)* 245.11, pp. 2405–2414. issn: 1521-3951. doi: 10.1002/pssb.200880267.
- Groenwold, Albert A. e L. F. P. Etman (2009a). "A quadratic approximation for structural topology optimization". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 505–524. doi: 10.1002/nme.2774.
- Groenwold, Albert A. e L. F. P. Etman (2009b). "A simple heuristic for gray-scale suppression in optimality criterion-based topology optimization". *Structural and Multidisciplinary Optimization* 39.2, pp. 217–225. doi: 10.1007/s00158-008-0337-1.
- Gusev, Andrei A. (1997). "Representative volume element size for elastic composites: A numerical study". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 45.9, pp. 1449–1459. doi: 10.1016/s0022-5096(97)00016-1.
- Haftka, Raphael T. e Zafer Gürdal (1992). *Elements of Structural Optimization*. Springer Netherlands. doi: 10.1007/978-94-011-2550-5.
- Harris, Charles R., K. Jarrod Millman, Stéfan J. van der Walt, Ralf Gommers, Pauli Virtanen, David Cournapeau, Eric Wieser, Julian Taylor, Sebastian Berg, Nathaniel J. Smith, Robert Kern, Matti Picus, Stephan

- Hoyer, Marten H. van Kerkwijk, Matthew Brett, Allan Haldane, Jaime Fernández del Río, Mark Wiebe, Pearu Peterson, Pierre Gérard-Marchant, Kevin Sheppard, Tyler Reddy, Warren Weckesser, Hameer Abbasi, Christoph Gohlke e Travis E. Oliphant (2020). “Array programming with NumPy”. *Nature* 585.7825, pp. 357–362. doi: 10.1038/s41586-020-2649-2.
- Hashin, Z. (1983). “Analysis of Composite Materials—A Survey”. *Journal of Applied Mechanics* 50.3, pp. 481–505. doi: 10.1115/1.3167081.
- Hashin, Z. e S. Shtrikman (1962). “On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 10.4, pp. 335–342. doi: 10.1016/0022-5096(62)90004-2.
- Hashin, Z. e S. Shtrikman (1963). “A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11.2, pp. 127–140. doi: 10.1016/0022-5096(63)90060-7.
- Hassani, B. e E. Hinton (1998a). “A review of homogenization and topology optimization I—homogenization theory for media with periodic structure”. *Computers & Structures* 69.6, pp. 707–717. issn: 0045-7949. doi: 10.1016/S0045-7949(98)00131-X.
- Hassani, B. e E. Hinton (1998b). “A review of homogenization and topology optimization III—topology optimization using optimality criteria”. *Computers & Structures* 69.6, pp. 739–756. doi: 10.1016/s0045-7949(98)00133-3.
- Hill, R. (1952). “The Elastic Behaviour of a Crystalline Aggregate”. *Proceedings of the Physical Society. Section A* 65.5, pp. 349–354. doi: 10.1088/0370-1298/65/5/307.
- Hill, R. (1963). “Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11.5, pp. 357–372. doi: 10.1016/0022-5096(63)90036-x.
- Hill, R. (1967). “The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 15.2, pp. 79–95. doi: 10.1016/0022-5096(67)90018-x.
- Hiller, Jonathan e Hod Lipson (2009). “Design and analysis of digital materials for physical 3D voxel printing”. *Rapid Prototyping Journal* 15.2, pp. 137–149. doi: 10.1108/13552540910943441.
- Hollister, Scott J. (2005). “Porous scaffold design for tissue engineering”. *Nature Materials* 4.7, pp. 518–524. doi: 10.1038/nmat1421.
- Holmström, Jan, Giacomo Liotta e Atanu Chaudhuri (2017). “Sustainability outcomes through direct digital manufacturing-based operational practices: A design theory approach”. *Journal of Cleaner Production* 167, pp. 951–961. issn: 0959-6526. doi: 10.1016/j.jclepro.2017.03.092.
- Huang, Samuel H., Peng Liu, Abhiram Mokasdar e Liang Hou (2013). “Additive manufacturing and its societal impact: a literature review”. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 67.5, pp. 1191–1203. issn: 1433-3015. doi: 10.1007/s00170-012-4558-5.
- Hunter, John D. (2021). “Matplotlib: A 2D Graphics Environment”. *Computing in Science & Engineering* 9.3, pp. 90–95. doi: 10.1109/mcse.2007.55.

- Imbalzano, Gabriele, Phuong Tran, Tuan D. Ngo e Peter V. S. Lee (2015). "Three-dimensional modelling of auxetic sandwich panels for localised impact resistance". *Journal of Sandwich Structures & Materials* 19.3, pp. 291–316. doi: 10.1177/1099636215618539.
- Ion, Alexandra, Johannes Frohnhofen, Ludwig Wall, Robert Kovacs, Mirela Alistar, Jack Lindsay, Pedro Lopes, Hsiang-Ting Chen e Patrick Baudisch (2016). "Metamaterial Mechanisms". *Proceedings of the 29th Annual Symposium on User Interface Software and Technology*. UIST '16. Tokyo, Japan: ACM, pp. 529–539. isbn: 978-1-4503-4189-9. doi: 10.1145/2984511.2984540.
- Ion, Alexandra, Ludwig Wall, Robert Kovacs e Patrick Baudisch (2017). "Digital Mechanical Metamaterials". *Proceedings of the 2017 CHI Conference on Human Factors in Computing Systems*. CHI '17. Denver, Colorado, USA: ACM, pp. 977–988. isbn: 978-1-4503-4655-9. doi: 10.1145/3025453.3025624.
- Ippolito, R., L. Iuliano e A. Gatto (1995). "Benchmarking of Rapid Prototyping Techniques in Terms of Dimensional Accuracy and Surface Finish". *CIRP Annals* 44.1, pp. 157–160. doi: 10.1016/s0007-8506(07)62296-3.
- ISO 178:2019 (2019). *Plastics – Determination of flexural properties*. Standard. Geneva, Switzerland.
- ISO 1922:2018 (2018). *Standard Rigid cellular plastics – Determination of shear properties*. Standard. Geneva, Switzerland.
- ISO 37:2017 (2017). *Rubber, vulcanized or thermoplastic – Determination of tensile stress-strain properties*. Standard. Geneva, Switzerland.
- ISO 527-1:2012 (2012). *Plastics – Determination of tensile properties – Part 1: General principles*. Standard. Geneva, Switzerland.
- ISO 604:2002 (2022). *Plastics – Determination of compressive properties*. Standard. Geneva, Switzerland.
- ISO 844:2021 (2021). *Rigid cellular plastics – Determination of compression properties*. Standard. Geneva, Switzerland.
- ISO/ASTM 52900:2015 (2015). *Standard Terminology for Additive Manufacturing – General Principles – Terminology*. Standard. West Conshohocken, PA.
- ISO/ASTM 52910:2018 (2018). *Additive manufacturing – Design – Requirements, guidelines and recommendations*. Standard.
- Iyibilgin, Osman, Cemil Yigit e Ming-Chuan Leu (2013). "Experimental Investigation of Different Cellular Lattice Structures Manufactured by Fused Deposition Modeling". *Proceedings of the 24th Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium*. Austin, TX, pp. 895–907.
- Jang, Dongchan, Lucas R. Meza, Frank Greer e Julia R. Greer (2013). "Fabrication and deformation of three-dimensional hollow ceramic nanostructures". *Nature Materials* 12, p. 893. doi: 10.1038/nmat3738.
- Kadic, M., T. Bückmann, R. Schittny, P. Gumbsch e M. Wegener (2014). "Pentamode Metamaterials with Independently Tailored Bulk Modulus and Mass Density". *Physical Review Applied* 2.5, p. 054007. doi: 10.1103/PhysRevApplied.2.054007.

- Kadic, Muamer, Tiedo Bückmann, Robert Schittny e Martin Wegener (2013b). "Metamaterials beyond electromagnetism". *Reports on Progress in Physics* 76.12, p. 126501. doi: 10.1088/0034-4885/76/12/126501.
- Kadic, Muamer, Tiedo Bückmann, Robert Schittny e Martin Wegener (2013a). "On anisotropic versions of three-dimensional pentamode metamaterials". *New Journal of Physics* 15.2, p. 023029. doi: 10.1088/1367-2630/15/2/023029.
- Kadic, Muamer, Tiedo Bückmann, Nicolas Stenger, Michael Thiel e Martin Wegener (2012). "On the practicability of pentamode mechanical metamaterials". *Applied Physics Letters* 100.19, p. 191901. doi: 10.1063/1.4709436.
- Kampker, A., K. Kreisköther e C. Reinders (2017). "Material and Parameter Analysis of the PolyJet Process for Mold Making Using Design of Experiments". *International Journal of Materials and Metallurgical Engineering* 11.3, pp. 242–249. issn: 1307-6892. doi: 10.5281/ZENODO.1129522.
- Kanit, T., S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury e D. Jeulin (2003). "Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach". *International Journal of Solids and Structures* 40.13-14, pp. 3647–3679. doi: 10.1016/s0020-7683(03)00143-4.
- Kanit, Toufik, Franck N'Guyen, Samuel Forest, Dominique Jeulin, Matt Reed e Scott Singleton (2006). "Apparent and effective physical properties of heterogeneous materials: Representativity of samples of two materials from food industry". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195.33-36, pp. 3960–3982. doi: 10.1016/j.cma.2005.07.022.
- Kaur, Manpreet, Tae Gwang Yun, Seung Min Han, Edwin L. Thomas e Woo Soo Kim (2017). "3D printed stretching-dominated micro-trusses". *Materials & Design* 134, pp. 272–280. doi: 10.1016/j.matdes.2017.08.061.
- Kazmer, David (2017b). "Three-Dimensional Printing of Plastics". *Applied Plastics Engineering Handbook*. Ed. por M. Kutz. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier, pp. 617–634. doi: 10.1016/b978-0-323-39040-8.00029-8.
- Kesy, A. e J. Kotlinski (2010). "Mechanical properties of parts produced by using polymer jetting technology". *Archives of Civil and Mechanical Engineering* 10.3, pp. 37–50. issn: 1644-9665. doi: 10.1016/S1644-9665(12)60135-6.
- Al-Ketan, Oraib, Rashid K. Abu Al-Rub e Reza Rowshan (2017). "Mechanical Properties of a New Type of Architected Interpenetrating Phase Composite Materials". *Advanced Materials Technologies* 2.2, p. 1600235. doi: 10.1002/admt.201600235.
- Khoo, Zhong Xun, Joanne Ee Mei Teoh, Yong Liu, Chee Kai Chua, Shoufeng Yang, Jia An, Kah Fai Leong e Wai Yee Yeong (2015). "3D printing of smart materials: A review on recent progresses in 4D printing". *Virtual and Physical Prototyping* 10.3, pp. 103–122. doi: 10.1080/17452759.2015.1097054.
- Kim, G. D. e Y. T. Oh (2008). "A benchmark study on rapid prototyping processes and machines: Quantitative comparisons of mechanical properties, accuracy, roughness, speed, and material cost". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture* 222.2, pp. 201–215. doi: 10.1243/09544054jem724.

- Kirkhope, Daniel J. Rayneau e Marcelo A. Dias (2016). "Recipes for selecting failure modes in 2d lattices". *Extreme Mechanics Letters* 9, pp. 11–20. doi: 10.1016/j.eml.2016.04.004.
- Kitsakis, Konstantinos, John Kechagias, Nikolaos Vaxevanidis e Dimitrios Giagkopoulos (2016). "Tolerance assessment of polyjet direct 3D printing process employing the it grade approach". *Academic Journal of Manufacturing Engineering* 14.4.
- Kochmann, Dennis M. e Katia Bertoldi (2017). "Exploiting Microstructural Instabilities in Solids and Structures: From Metamaterials to Structural Transitions". *Applied Mechanics Reviews* 69.5, pp. 050801–24. doi: 10.1115/1.4037966.
- Kumar, Krishnan e Gurunathan Saravana Kumar (2015). "An experimental and theoretical investigation of surface roughness of poly-jet printed parts". *Virtual and Physical Prototyping* 10.1, pp. 23–34. doi: 10.1080/17452759.2014.999218.
- Lakes, Rod e K. W. Wojciechowski (2008). "Negative compressibility, negative Poisson's ratio, and stability". *Physica Status Solidi (b)* 245.3, pp. 545–551. issn: 1521-3951. doi: 10.1002/pssb.200777708.
- Lapine, M. e S. Tretyakov (2007). "Contemporary notes on metamaterials". *IET Microwaves, Antennas Propagation* 1.1, pp. 3–11. issn: 1751-8725. doi: 10.1049/iet-map:20050307.
- Layman, Christopher N., Christina J. Naify, Theodore P. Martin, David C. Calvo e Gregory J. Orris (2013). "Highly Anisotropic Elements for Acoustic Pentamode Applications". *Physical Review Letters* 111 (2), p. 024302. doi: 10.1103/PhysRevLett.111.024302.
- Le, Hue P. (1998). "Progress and trends in ink-jet printing technology". *Journal of imaging science and technology* 42.1, pp. 49–62.
- Leary, M. (2018). "Design of titanium implants for additive manufacturing". *Titanium in Medical and Dental Applications*. Ed. por Francis H. Froes e Ma Qian. Woodhead Publishing Series in Biomaterials. Woodhead Publishing, pp. 203–224. isbn: 978-0-12-812456-7. doi: 10.1016/B978-0-12-812456-7.00009-3.
- Lee, B. H., J. Abdullah e Z. A. Khan (2005). "Optimization of rapid prototyping parameters for production of flexible ABS object". *Journal of Materials Processing Technology* 169.1, pp. 54–61. doi: 10.1016/j.jmatprotec.2005.02.259.
- Lee, Jia Min, Meng Zhang e Wai Yee Yeong (2016). "Characterization and evaluation of 3D printed microfluidic chip for cell processing". *Microfluidics and Nanofluidics* 20.1. doi: 10.1007/s10404-015-1688-8.
- Lee, Jian Yuan, Jia An e Chee Kai Chua (2017). "Fundamentals and applications of 3D printing for novel materials". *Applied Materials Today* 7, pp. 120–133. issn: 2352-9407. doi: 10.1016/j.apmt.2017.02.004.
- Li, Nianbei, Jie Ren, Lei Wang, Gang Zhang, Peter Hänggi e Baowen Li (2012). "Colloquium: Phononics: Manipulating heat flow with electronic analogs and beyond". *Reviews Modern Physics*. 84 (3), pp. 1045–1066. doi: 10.1103/RevModPhys.84.1045.

- Li, Y. Y. e J. Z. Cui (2005). "The multi-scale computational method for the mechanics parameters of the materials with random distribution of multi-scale grains". *Composites Science and Technology* 65.9, pp. 1447–1458. doi: 10.1016/j.compscitech.2004.12.016.
- Lifton, Victor A., Gregory Lifton e Steve Simon (2014). "Options for additive rapid prototyping methods 3D printing in MEMS technology". *Rapid Prototyping Journal* 20.5, pp. 403–412. doi: 10.1108/rpj-04-2013-0038.
- Lin, C. Y., Chun-Ching Hsiao, Po-Quan Chen e Scott J. Hollister (2004b). "Interbody Fusion Cage Design Using Integrated Global Layout and Local Microstructure Topology Optimization". *Spine* 29.16, pp. 1747–1754. doi: 10.1097/01.brs.0000134573.14150.1a.
- Lin, C. Y., Noboru Kikuchi e Scott J. Hollister (2004a). "A novel method for biomaterial scaffold internal architecture design to match bone elastic properties with desired porosity". *Journal of Biomechanics* 37.5, pp. 623–636. doi: 10.1016/j.jbiomech.2003.09.029.
- Lindman, Karl F. (1920). "Über eine durch ein isotropes System von spiralförmigen Resonatoren erzeugte Rotationspolarisation der elektromagnetischen Wellen". *Annalen der Physik* 368.23, pp. 621–644. doi: 10.1002/andp.19203682303.
- Lipton, Robert (1994). "Optimal bounds on effective elastic tensors for orthotropic composites". *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences* 444.1921, pp. 399–410. doi: 10.1098/rspa.1994.0028.
- Liu, Jikai, Andrew T. Gaynor, Shikui Chen, Zhan Kang, Krishnan Suresh, Akihiro Takezawa, Lei Li, Junji Kato, Jinyuan Tang, Charlie C. L. Wang, Lin Cheng, Xuan Liang e Albert. C. To (2018). "Current and future trends in topology optimization for additive manufacturing". *Structural and Multidisciplinary Optimization* 57.6, pp. 2457–2483. doi: 10.1007/s00158-018-1994-3.
- Liu, Kai e Andrés Tovar (2014). "An efficient 3D topology optimization code written in Matlab". *Structural and Multidisciplinary Optimization* 50.6, pp. 1175–1196. issn: 1615-1488. doi: 10.1007/s00158-014-1107-x.
- Liu, Qingbin e Melissa Orme (2001). "High precision solder droplet printing technology and the state-of-the-art". *Journal of Materials Processing Technology* 115.3, pp. 271–283. doi: 10.1016/s0924-0136(01)00740-3.
- Liu, R., Z. Wang, T. Sparks, F. Liou e J. Newkirk (2017). "Aerospace applications of laser additive manufacturing". *Laser Additive Manufacturing*. Ed. por Milan Brandt. Woodhead Publishing Series in Electronic and Optical Materials. Woodhead Publishing, pp. 351–371. isbn: 978-0-08-100433-3. doi: 10.1016/B978-0-08-100433-3.00013-0.
- Liu, W., L. Li e A. K. Kochhar (1998). "A method for assessing geometrical errors in layered manufacturing. Part 1: Error interaction and transfer mechanisms". *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 14.9, pp. 637–643. doi: 10.1007/bf01192283.
- Liu, Y. J., N. Nishimura, Y. Otani, T. Takahashi, X. L. Chen e H. Munakata (2005). "A Fast Boundary Element Method for the Analysis of Fiber-Reinforced Composites Based on a Rigid-Inclusion Model". *Journal of Applied Mechanics* 72.1, pp. 115–128. doi: 10.1115/1.1825436.

- Liu, Yongmin e Xiang Zhang (2011). "Metamaterials: a new frontier of science and technology". *Chemical Society Reviews* 40 (5), pp. 2494–2507. doi: 10.1039/C0CS00184H.
- Luenberger, David G. (2008). *Linear and Nonlinear Programming*. Springer US. doi: 10.1007/978-0-387-74503-9.
- Lumpe, Thomas S., Jochen Mueller e Kristina Shea (2019). "Tensile properties of multi-material interfaces in 3D printed parts". *Materials & Design* 162, pp. 1–9. doi: 10.1016/j.matdes.2018.11.024.
- Macdonald, Niall P., Joan M. Cabot, Petr Smejkal, Rosanne M. Guijt, Brett Paull e Michael C. Breadmore (2017). "Comparing Microfluidic Performance of Three-Dimensional (3D) Printing Platforms". *Analytical Chemistry* 89.7, pp. 3858–3866. doi: 10.1021/acs.analchem.7b00136.
- Maconachie, Tobias, Martin Leary, Bill Lozanovski, Xuezhe Zhang, Ma Qian, Omar Faruque e Milan Brandt (2019). "SLM lattice structures: Properties, performance, applications and challenges". *Materials & Design* 183, p. 108137. doi: 10.1016/j.matdes.2019.108137.
- Malinowska, Agnieszka B., Tatiana Odziejewicz e Delfim F. M. Torres (2015). *Advanced Methods in the Fractional Calculus of Variations*. Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-319-14756-7.
- Maskery, I., N. T. Aboulkhair, A. O. Aremu, C. J. Tuck e I. A. Ashcroft (2017). "Compressive failure modes and energy absorption in additively manufactured double gyroid lattices". *Additive Manufacturing* 16, pp. 24–29. doi: 10.1016/j.addma.2017.04.003.
- Masood, S. H. e W. Rattanawong (2002). "A Generic Part Orientation System Based on Volumetric Error in Rapid Prototyping". *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 19.3, pp. 209–216. doi: 10.1007/s001700200015.
- Maxwell, J. Clerk (1870). "On Reciprocal Figures, Frames, and Diagrams of Forces". *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 26.1, pp. 1–40. doi: 10.1017/s0080456800026351.
- Maxwell, James Clerk e Joseph John Thompson (1904). *A treatise on electricity and magnetism*. 1ª ed. Vol. 2. Oxford: Clarendon.
- Meisel, Nicholas Alexander, David A. Dillard e Christopher B. Williams (2018). "Impact of material concentration and distribution on composite parts manufactured via multi-material jetting". *Rapid Prototyping Journal* 24.5, pp. 872–879. doi: 10.1108/rpj-01-2017-0005.
- Méjica, Graciela Fernández e Andrés Díaz Lantada (2013). "Comparative study of potential pentamodal metamaterials inspired by Bravais lattices". *Smart Materials and Structures* 22.11, p. 115013. doi: 10.1088/0964-1726/22/11/115013.
- Melchels, Ferry P. W., Jan Feijen e Dirk W. Grijpma (2010). "A review on stereolithography and its applications in biomedical engineering". *Biomaterials* 31.24, pp. 6121–6130. issn: 0142-9612. doi: 10.1016/j.biomaterials.2010.04.050.
- Melro, A. R., P. P. Camanho e S. T. Pinho (2012). "Influence of geometrical parameters on the elastic response of unidirectional composite materials". *Composite Structures* 94.11, pp. 3223–3231. doi: 10.1016/j.compstruct.2012.05.004.

- Meng, Lingbin, Xuehui Yang, Eduardo Salcedo, Dong-Cheon Baek, Jong E. Ryu, Zhe Lu e Jing Zhang (2020). "A Combined Modeling and Experimental Study of Tensile Properties of Additively Manufactured Polymeric Composite Materials". *Journal of Materials Engineering and Performance*. doi: 10.1007/s11665-020-04746-5.
- Meza, Lucas R., Satyajit Das e Julia R. Greer (2014). "Strong, lightweight, and recoverable three-dimensional ceramic nanolattices". *Science* 345.6202, pp. 1322–1326. issn: 0036-8075. doi: 10.1126/science.1255908.
- Michel, J. C., H. Moulinec e P. Suquet (1999). "Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 172.1-4, pp. 109–143. doi: 10.1016/s0045-7825(98)00227-8.
- Michell, A. G. M. (1904). "The limits of economy of material in frame-structures". *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 8.47, pp. 589–597. doi: 10.1080/14786440409463229.
- Milton, Graeme W. (2002). *The Theory of Composites*. Cambridge University Press. doi: 10.1017/cbo9780511613357.
- Milton, Graeme W. e Andrej V. Cherkaev (1995). "Which Elasticity Tensors are Realizable?" *Journal of Engineering Materials and Technology* 117.4, pp. 483–493. issn: 0094-4289. doi: 10.1115/1.2804743.
- Milton, Graeme Walter (2013). "Complete characterization of the macroscopic deformations of periodic unimode metamaterials of rigid bars and pivots". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 61.7, pp. 1543–1560. issn: 0022-5096. doi: 10.1016/j.jmps.2012.08.011.
- Milton, Graeme Walter (2015). "New examples of three-dimensional dilational materials". *physica status solidi (b)* 252.7, pp. 1426–1430. issn: 1521-3951. doi: 10.1002/pssb.201552297.
- Missoum-Benziane, D., D. Ryckelynck e F. Chinesta (2007). "A new fully coupled two-scales modelling for mechanical problems involving microstructure: The 95/5 technique". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196.21-24, pp. 2325–2337. doi: 10.1016/j.cma.2006.10.013.
- Mlejnek, H. P. (1992). "Some aspects of the genesis of structures". *Structural Optimization* 5.1-2, pp. 64–69. doi: 10.1007/bf01744697.
- Molotnikov, Andrey, George P. Simon e Yuri Estrin (2019). "Architected Polymeric Materials Produced by Additive Manufacturing". *Architected Materials in Nature and Engineering*. Springer International Publishing, pp. 257–285. doi: 10.1007/978-3-030-11942-3\_9.
- Monzon, M. D., Z. Ortega, A. Martinez e F. Ortega (2015). "Standardization in additive manufacturing: activities carried out by international organizations and projects". *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 76.5-8, pp. 1111–1121. doi: 10.1007/s00170-014-6334-1.
- Moore, Jacob P. e Christopher B. Williams (2015). "Fatigue properties of parts printed by PolyJet material jetting". *Rapid Prototyping Journal* 21.6, pp. 675–685. doi: 10.1108/rpj-03-2014-0031.
- Morris, Viola B., Siddharth Nimbalkar, Mousa Younesi, Phillip McClellan e Ozan Akkus (2016). "Mechanical Properties, Cytocompatibility and Manufacturability of Chitosan:PEGDA Hybrid-Gel Scaffolds by

- Stereolithography". *Annals of Biomedical Engineering* 45.1, pp. 286–296. doi: 10.1007/s10439-016-1643-1.
- Moulinec, H. e P. Suquet (1998). "A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 157.1, pp. 69–94. issn: 0045-7825. doi: 10.1016/S0045-7825(97)00218-1.
- Moylan, Shawn, John Slotwinski, April Cooke, Kevin Jurens e M. Alkan Donmez (2014). "An Additive Manufacturing Test Artifact". *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology* 119, pp. 429–459. issn: 2165-7254. doi: 10.6028/jres.119.017.
- Mueller, J., K. Shea e C. Daraio (2015b). "Mechanical properties of parts fabricated with inkjet 3D printing through efficient experimental design". *Materials & Design* 86, pp. 902–912. issn: 0264-1275. doi: 10.1016/j.matdes.2015.07.129.
- Mueller, Jochen, Diana Courty, Manuel Spielhofer, Ralph Spolenak e Kristina Shea (2017). "Mechanical properties of interfaces in inkjet 3D printed single and multi-material parts". *3D Printing and Additive Manufacturing* 4.4, pp. 193–199. doi: 10.1089/3dp.2017.0038.
- Mueller, Jochen e Kristina Shea (2015a). "The effect of build orientation on the mechanical properties in inkjet 3D-printing". *International Solid Freeform Fabrication (SFF) Symposium. Austin, TX: University of Texas at Austin*, pp. 983–992.
- Müller, W. H. (1996). "Mathematical vs. Experimental Stress Analysis of Inhomogeneities in Solids". *Le Journal de Physique IV* 06.C1, pp. 139–148. doi: 10.1051/jp4:1996114.
- Nemat-Nasser, S. e M. Hori (1993). *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*. Ed. por Elsevier.
- Nemat-Nasser, Sia (1999). "Averaging theorems in finite deformation plasticity". *Mechanics of Materials* 31.8, pp. 493–523. doi: 10.1016/s0167-6636(98)00073-8.
- Nguyen, Vinh Phu, Martijn Stroeve e Lambertus Johannes Sluys (2011). "Multiscale continuous and discontinuous modeling of heterogeneous materials: A review on recent developments". *Journal of Multiscale Modelling* 03.04, pp. 229–270. doi: 10.1142/s1756973711000509.
- Nicolaou, Zachary G. e Adilson E. Motter (2012). "Mechanical metamaterials with negative compressibility transitions". *Nature Materials* 11, p. 608. doi: 10.1038/nmat3331.
- Nye, J. F. e R. B. Lindsay (1957). "Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices". *Physics Today* 10.12, pp. 26–26. doi: 10.1063/1.3060200.
- OConnor, J., J. Punch, N. Jeffers e J. Stafford (2014). "A dimensional comparison between embedded 3D-printed and silicon microchannels". *Journal of Physics: Conference Series* 525, p. 012009. doi: 10.1088/1742-6596/525/1/012009.
- Oliveira, João A. (2013). "Metodologias de Otimização Topológica em Cálculo Estrutural". Tese de doutoramento. Universidade de Aveiro.
- Ostoj-Starzewski, Martin (2002). "Lattice models in micromechanics". *Applied Mechanics Reviews* 55.1, pp. 35–60. doi: 10.1115/1.1432990.

- Panetta, Julian, Qingnan Zhou, Luigi Malomo, Nico Pietroni, Paolo Cignoni e Denis Zorin (2015). "Elastic textures for additive fabrication". *ACM Transactions on Graphics* 34.4, 135:1–135:12. doi: 10.1145/2766937.
- Paulose, Jayson, Anne S. Meeussen e Vincenzo Vitelli (2015). "Selective buckling via states of self-stress in topological metamaterials". *Proceedings of the National Academy of Sciences* 112.25, pp. 7639–7644. doi: 10.1073/pnas.1502939112.
- Paulsen, Celia (2015). "Proceedings of the Cybersecurity for Direct Digital Manufacturing (DDM) Symposium". en. NIST Interagency/Internal Report (NISTIR), National Institute of Standards e Technology, Gaithersburg, MD. doi: 10.6028/NIST.IR.8041.
- Pilipović, Ana, Pero Raos e Mladen Šercer (2007). "Experimental analysis of properties of materials for rapid prototyping". *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 40.1-2, pp. 105–115. doi: 10.1007/s00170-007-1310-7.
- Pindera, Marek-Jerzy, Hamed Khatam, Anthony S. Drago e Yogesh Bansal (2009). "Micromechanics of spatially uniform heterogeneous media: A critical review and emerging approaches". *Composites Part B: Engineering* 40.5, pp. 349–378. doi: 10.1016/j.compositesb.2009.03.007.
- Plocher, János e Ajit Panesar (2019). "Review on design and structural optimisation in additive manufacturing: Towards next-generation lightweight structures". *Materials & Design* 183, p. 108164. doi: 10.1016/j.matdes.2019.108164.
- Pokroy, Boaz, Vladislav Demensky e Emil Zolotoyabko (2009). "Nacre in Mollusk Shells as a Multilayered Structure with Strain Gradient". *Advanced Functional Materials* 19.7, pp. 1054–1059. doi: 10.1002/adfm.200801201.
- Prager, S. (1963). "Interphase transfer in stationary two-phase media". *Chemical Engineering Science* 18.4, pp. 227–231. doi: 10.1016/0009-2509(63)87003-7.
- Prager, Stephen (1961). "Viscous Flow through Porous Media". *Physics of Fluids* 4.12, p. 1477. doi: 10.1063/1.1706246.
- Prager, Stephen (1963). "Diffusion and viscous flow in concentrated suspensions". *Physica* 29.2, pp. 129–139. doi: 10.1016/s0031-8914(63)80199-8.
- Prager, William (1968). "Optimality Criteria in Structural Design". *Proceedings of the National Academy of Sciences* 61.3, pp. 794–796. doi: 10.1073/pnas.61.3.794.
- Pugalendhi, Arivazhagan, Rajesh Ranganathan e Manivannan Chandrasekaran (2019). "Effect of process parameters on mechanical properties of VeroBlue material and their optimal selection in PolyJet technology". *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. doi: 10.1007/s00170-019-04782-z.
- Pugalendhi, Arivazhagan, Rajesh Ranganathan e Sivakumar Ganesan (2020). "Impact of process parameters on mechanical behaviour in multi-material jetting". *Materials Today: Proceedings*. doi: 10.1016/j.matpr.2019.12.106.
- Puri, Gautam M. (2011). *Python scripts for Abaqus: learn by example*. Ed. por S. C. Charleston. isbn: 978-0-615-52050-6.

- Quarteroni, Alfio, Riccardo Sacco e Fausto Saleri (2007). *Numerical Mathematics*. Springer New York. doi: 10.1007/b98885.
- Querin, O. M., G. P. Steven e Y. M. Xie (1998). "Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm". *Engineering Computations* 15.8, pp. 1031–1048. doi: 10.1108/02644409810244129.
- Radman, A., X. Huang e Y. M. Xie (2012a). "Topological optimization for the design of microstructures of isotropic cellular materials". *Engineering Optimization* 45.11, pp. 1331–1348. doi: 10.1080/0305215X.2012.737781.
- Radman, A., X. Huang e Y. M. Xie (2012b). "Topology optimization of functionally graded cellular materials". *Journal of Materials Science* 48.4, pp. 1503–1510. doi: 10.1007/s10853-012-6905-1.
- Rao, Singiresu S. (2009). *Engineering Optimization*. John Wiley & Sons, Inc. doi: 10.1002/9780470549124.
- Reback, Jeff, Jbrockmendel, Wes McKinney, Joris Van Den Bossche, Tom Augspurger, Matthew Roeschke, Simon Hawkins, Phillip Cloud, Gfyoung, Sinhrks, Patrick Hoefler, Adam Klein, Terji Petersen, Jeff Tratner, Chang She, William Ayd, Shahar Naveh, JHM Darbyshire, Marc Garcia, Richard Shadrach, Jeremy Schendel, Andy Hayden, Daniel Saxton, Marco Edward Gorelli, Fangchen Li, Matthew Zeitlin, Vytautas Jancauskas, Ali McMaster, Torsten Wörtwein e Pietro Battiston (2022). *pandas-dev/pandas: Pandas 1.4.2*. doi: 10.5281/ZENODO.6408044.
- Reichl, K. K. e D. J. Inman (2017). "Dynamic Mechanical and Thermal Analyses of Objet Connex 3D Printed Materials". *Experimental Techniques* 42.1, pp. 19–25. doi: 10.1007/s40799-017-0223-0.
- Restrepo, David, Nilesh D. Mankame e Pablo D. Zavattieri (2016b). "Programmable materials based on periodic cellular solids. Part II: Numerical analysis". *International Journal of Solids and Structures* 100-101, pp. 505–522. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2016.09.022.
- Reuleaux, F. (1861). "Konstrukteur". *Vieweg und Sohn, Braunschweig*.
- Rietz, A. (2001). "Sufficiency of a finite exponent in SIMP (power law) methods". *Structural and Multidisciplinary Optimization* 21.2, pp. 159–163. doi: 10.1007/s001580050180.
- Ritchie, Robert O. (2011). "The conflicts between strength and toughness". *Nature Materials* 10, p. 817. doi: 10.1038/nmat3115.
- Rozvany, G. I. N. (2008). "A critical review of established methods of structural topology optimization". *Structural and Multidisciplinary Optimization* 37.3, pp. 217–237. doi: 10.1007/s00158-007-0217-0.
- Rozvany, G. I. N., M. P. Bendsøe e U. Kirsch (1995). "Layout Optimization of Structures". *Applied Mechanics Reviews* 48.2, pp. 41–119. issn: 0003-6900. doi: 10.1115/1.3005097.
- Sadd, Martin H. (2009). *Elasticity: theory, applications, and numerics*. Academic Press. isbn: 9780080922416. doi: 10.1016/C2012-0-06981-5.
- Safka, Jiri, Michal Ackermann e David Martis (2016). "Chemical Resistance of Materials used in Additive Manufacturing". *MM Science Journal* 2016.06, pp. 1573–1578. doi: 10.17973/mmsj.2016\_12\_2016185.

- Sanatgar, Razieh Hashemi, Christine Campagne e Vincent Nierstrasz (2017). "Investigation of the adhesion properties of direct 3D printing of polymers and nanocomposites on textiles: Effect of FDM printing process parameters". *Applied Surface Science* 403, pp. 551–563. issn: 0169-4332. doi: 10.1016/j.apsusc.2017.01.112.
- Saunders, M., P. Lewis e A. Thornhill (2009). *Research Methods for Business Students*. Always learning, Prentice Hall. isbn: 9780273716860.
- Schmit, L. A. e B. Farshi (1974). "Some Approximation Concepts for Structural Synthesis". *AIAA Journal* 12.5, pp. 692–699. doi: 10.2514/3.49321.
- Schmit, Lucien A. e Claude Fleury (1980). "Structural Synthesis by Combining Approximation Concepts and Dual Methods". *AIAA Journal* 18.10, pp. 1252–1260. doi: 10.2514/3.50877.
- Schneider, K., B. Lauke e W. Beckert (2001). "Compression Shear Test (CST) – A Convenient Apparatus for the Estimation of Apparent Shear Strength of Composite Materials". *Applied Composite Materials* 8.1, pp. 43–62. doi: 10.1023/a:1008919114960.
- Schumacher, Christian, Bernd Bickel, Jan Rys, Steve Marschner, Chiara Daraio e Markus Gross (2015). "Microstructures to Control Elasticity in 3D Printing". *ACM Trans. Graph.* 34.4, pp. 1–13. issn: 0730-0301. doi: 10.1145/2766926.
- Schwerdtfeger, J., F. Wein, G. Leugering, R. F. Singer, C. Körner, M. Stingl e F. Schury (2011). "Design of Auxetic Structures via Mathematical Optimization". *Advanced Materials* 23.22, pp. 2650–2654. doi: 10.1002/adma.201004090. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/adma.201004090>.
- Sigmund, O. (2001). "A 99 line topology optimization code written in Matlab". *Structural and Multidisciplinary Optimization* 21.2, pp. 120–127. doi: 10.1007/s001580050176.
- Sigmund, O. e J. Petersson (1998). "Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima". *Structural optimization* 16, pp. 68–75. doi: 10.1007/BF01214002.
- Sigmund, O. e S. Torquato (1996). "Composites with extremal thermal expansion coefficients". *Applied Physics Letters* 69.21, pp. 3203–3205. doi: 10.1063/1.117961.
- Sigmund, Ole (1994). "Materials with prescribed constitutive parameters: An inverse homogenization problem". *International Journal of Solids and Structures* 31.17, pp. 2313–2329. doi: 10.1016/0020-7683(94)90154-6.
- Sigmund, Ole (1997). "On the Design of Compliant Mechanisms Using Topology Optimization". *Mechanics of Structures and Machines* 25.4, pp. 493–524. doi: 10.1080/08905459708945415.
- Sigmund, Ole (2000). "Topology optimization: a tool for the tailoring of structures and materials". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 358.1765. Ed. por J. M. T. Thompson, pp. 211–227. doi: 10.1098/rsta.2000.0528.
- Sigmund, Ole (2007). "Morphology-based black and white filters for topology optimization". *Structural and Multidisciplinary Optimization* 33.4-5, pp. 401–424. doi: 10.1007/s00158-006-0087-x.

- Sigmund, Ole, Niels Aage e Erik Andreassen (2016). "On the (non-)optimality of Michell structures". *Structural and Multidisciplinary Optimization* 54.2, pp. 361–373. doi: 10.1007/s00158-016-1420-7.
- Sigmund, Ole e Kurt Maute (2013). "Topology optimization approaches". *Structural and Multidisciplinary Optimization* 48.6, pp. 1031–1055. doi: 10.1007/s00158-013-0978-6.
- Silva, Miguel R., João A. Dias-de-Oliveira, António M. Pereira, Nuno M. Alves, Álvaro M. Sampaio e António J. Pontes (2021). "Design of Kinematic Connectors for Microstructured Materials Produced by Additive Manufacturing". *Polymers* 13.9, p. 1500. doi: 10.3390/polym13091500.
- Silva, Miguel R., António M. Pereira, Álvaro M. Sampaio e António J. Pontes (2021). "Assessment of the Dimensional and Geometric Precision of Micro-Details Produced by Material Jetting". *Materials* 14.8, p. 1989. doi: 10.3390/ma14081989.
- Silverberg, Jesse L., Arthur A. Evans, Lauren McLeod, Ryan C. Hayward, Thomas Hull, Christian D. Santangelo e Itai Cohen (2014). "Using origami design principles to fold reprogrammable mechanical metamaterials". *Science* 345.6197, pp. 647–650. issn: 0036-8075. doi: 10.1126/science.1252876.
- Singh, Rupinder (2011). "Process capability study of polyjet printing for plastic components". *Journal of Mechanical Science and Technology* 25.4, pp. 1011–1015. doi: 10.1007/s12206-011-0203-8.
- Slesarenko, Viacheslav e Stephan Rudykh (2018). "Towards mechanical characterization of soft digital materials for multimaterial 3D-printing". *International Journal of Engineering Science* 123, pp. 62–72. doi: 10.1016/j.ijengsci.2017.11.011.
- Stansbury, Jeffrey W. e Mike J. Idacavage (2016). "3D printing with polymers: Challenges among expanding options and opportunities". *Dental Materials* 32.1, pp. 54–64. issn: 0109-5641. doi: 10.1016/j.dental.2015.09.018.
- Stavropoulos, Panagiotis e Panagis Foteinopoulos (2018). "Modelling of additive manufacturing processes: a review and classification". *Manufacturing Review* 5, p. 2. doi: 10.1051/mfreview/2017014.
- Stratasys (2018a). *Stratasys Ltd., Objet500 User Guide*. url: <http://www.stratasys.com/polyjet-systems> (acedido em 16/03/2020).
- Stratasys (2018b). *Stratasys Ltd., Polyjet Materials Data Sheet*. url: <http://www.stratasys.com/polyjet-systems> (acedido em 19/09/2018).
- Stratasys Ltd. (2016). *Guide to Basic Post-Printing Processes for Polyjet 3D Models*. url: <https://www.stratasys.com/en/polyjet-systems> (acedido em 19/09/2018).
- Su, Frances Y., Fereshteh A. Sabet, Katherine Tang, Sean Garner, Siyuan Pang, Michael T. Tolley, Iwona Jasiuk e Joanna McKittrick (2020). "Scale and size effects on the mechanical properties of bioinspired 3D printed two-phase composites". *Journal of Materials Research and Technology* 9.6, pp. 14944–14960. doi: 10.1016/j.jmrt.2020.10.052.
- Sukumar, N., D. L. Chopp, N. Moes e T. Belytschko (2001). "Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190.46-47, pp. 6183–6200. doi: 10.1016/s0045-7825(01)00215-8.

- Suquet, Pierre (1987). "Elements of Homogenization Theory for Inelastic Solid Mechanics". *Homogenization Techniques for Composite Media*.
- Tamburrino, Francesco, Serena Graziosi e Monica Bordegoni (2018). "The Design Process of Additively Manufactured Mesoscale Lattice Structures: A Review". *Journal of Computing and Information Science in Engineering* 18.4. doi: 10.1115/1.4040131.
- Tay, B. Y., J. R. G. Evans e M. J. Edirisinghe (2003). "Solid freeform fabrication of ceramics". *International Materials Reviews* 48.6, pp. 341–370. doi: 10.1179/095066003225010263.
- Thompson, Mary Kathryn, Giovanni Moroni, Tom Vaneker, Georges Fadel, R. Ian Campbell, Ian Gibson, Alain Bernard, Joachim Schulz, Patricia Graf, Bhriku Ahuja e Filomeno Martina (2016). "Design for Additive Manufacturing: Trends, opportunities, considerations, and constraints". *CIRP Annals* 65.2, pp. 737–760. doi: 10.1016/j.cirp.2016.05.004.
- Timoshenko, Stephen P. (1983). *History of Strength of Materials*. Dover Publications New York.
- Ting, T. C. T. e Tungyang Chen (fev. de 2005). "Poisson's ratio for anisotropic elastic materials can have no bounds". *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 58.1, pp. 73–82. doi: 10.1093/qjmamj/hbh021.
- Tong, X. C. (2017). *Functional Metamaterials and Metadevices*. Springer Series in Materials Science. Springer International Publishing. isbn: 9783319660448. doi: 10.1007/978-3-319-66044-8.
- Tong, Xingcun Colin (2017). "Mechanical Metamaterials and Metadevices". *Functional Metamaterials and Metadevices*. Springer International Publishing, pp. 219–242. doi: 10.1007/978-3-319-66044-8\_11.
- Torquato, S. e H. W. Haslach (2002). "Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties". *Applied Mechanics Reviews* 55.4, B62–B63. doi: 10.1115/1.1483342.
- Torquato, Salvatore (2002a). "Microstructural Descriptors". *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer New York, pp. 23–58. doi: 10.1007/978-1-4757-6355-3\_2.
- Torquato, Salvatore (2002b). "Variational Principles". *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer New York, pp. 357–389. doi: 10.1007/978-1-4757-6355-3\_14.
- Truby, Ryan L. e Jennifer A. Lewis (2016). "Printing soft matter in three dimensions". *Nature* 540.7633, pp. 371–378. doi: 10.1038/nature21003.
- Tucker, Charles L. e Erwin Liang (1999). "Stiffness predictions for unidirectional short-fiber composites: Review and evaluation". *Composites Science and Technology* 59.5, pp. 655–671. doi: 10.1016/s0266-3538(98)00120-1.
- Udroiu, R. e L. A. Mihail (2009). "Experimental determination of surface roughness of parts obtained by rapid prototyping". *Proceedings of the 8th WSEAS International Conference on Circuits, Systems, Electronics, Control & Signal Processing*, pp. 283–286.
- Vaezi, Mohammad, Hermann Seitz e Shoufeng Yang (2013b). "A review on 3D micro-additive manufacturing technologies". *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 67.5, pp. 1721–1754. issn: 1433-3015. doi: 10.1007/s00170-012-4605-2.

- Van Rossum, Guido e Fred L. Drake (2020). *Python 3 Reference Manual*. Scotts Valley, CA: CreateSpace. isbn: 1441412697.
- Vehmas, Joni (2015). "Transmission-Line Metamaterials, Bianisotropy, and Transmission-Line Bianisotropy". en. G5 Artikkeliväitöskirja. Aalto University, p. 104. isbn: 978-952-60-6528-1.
- Vidimče, Kiril, Alexandre Kaspar, Ye Wang e Wojciech Matusik (2016). "Foundry". *Proceedings of the 29th Annual Symposium on User Interface Software and Technology - UIST '16*. ACM Press. doi: 10.1145/2984511.2984516.
- Vidimče, Kiril, Szu Po Wang, Jonathan Ragan-Kelley e Wojciech Matusik (2013). "OpenFab". *ACM Transactions on Graphics* 32.4, p. 1. doi: 10.1145/2461912.2461993.
- Vogiatzis, Panagiotis, Shikui Chen, Xiao Wang, Tiantian Li e Lifeng Wang (2017). "Topology optimization of multi-material negative Poisson's ratio metamaterials using a reconciled level set method". *Computer-Aided Design* 83, pp. 15–32. issn: 0010-4485. doi: 10.1016/j.cad.2016.09.009.
- Walczak, Rafal e Krzysztof Adamski (2015). "Inkjet 3D printing of microfluidic structures on the selection of the printer towards printing your own microfluidic chips". *Journal of Micromechanics and Microengineering* 25.8, p. 085013. doi: 10.1088/0960-1317/25/8/085013.
- Walrath, D. E. e D. F. Adams (1983). "The Iosipescu Shear Test as Applied to Composite Materials". *Experimental Mechanics* 23.1, pp. 105–110. doi: 10.1007/bf02328688.
- Wang, Li, Yang Ju, Heping Xie, Guowei Ma, Lingtao Mao e Kexin He (2017). "The mechanical and photoelastic properties of 3D printable stress-visualized materials". *Scientific Reports* 7.1. doi: 10.1038/s41598-017-11433-4.
- Wang, Michael Yu e Shengyin Wang (2005). "Bilateral filtering for structural topology optimization". *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 63.13, pp. 1911–1938. doi: 10.1002/nme.1347.
- Wang, Michael Yu e Xiaoming Wang (2005). "A level-set based variational method for design and optimization of heterogeneous objects". *Computer-Aided Design* 37.3, pp. 321–337. issn: 0010-4485. doi: 10.1016/j.cad.2004.03.007.
- Wang, Michael Yu, Xiaoming Wang e Dongming Guo (2003). "A level set method for structural topology optimization". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192.1-2, pp. 227–246. doi: 10.1016/s0045-7825(02)00559-5.
- Wang, Pai, Jongmin Shim e Katia Bertoldi (2013). "Effects of geometric and material nonlinearities on tunable band gaps and low-frequency directionality of phononic crystals". *Physics Reviews B* 88 (1), p. 014304. doi: 10.1103/PhysRevB.88.014304.
- Wang, Xin, Man Jiang, Zuowan Zhou, Jihua Gou e David Hui (2017). "3D printing of polymer matrix composites: A review and prospective". *Composites Part B: Engineering* 110, pp. 442–458. doi: 10.1016/j.compositesb.2016.11.034.
- Wang, Y. C. e R. S. Lakes (2004). "Extreme stiffness systems due to negative stiffness elements". *American Journal of Physics* 72.1, pp. 40–50. doi: 10.1119/1.1619140.

- Watts, Darren M. e Richard J. M. Hague (2006). "Exploiting the design freedom of RM". *Proceedings of the 17th Solid Freeform Fabrication Symposium (SFF 2006), Austin, Texas 14-16 August*, pp. 656–667.
- Weiner, S. e H. D. Wagner (1998). "The Material Bone: Structure-Mechanical Function Relations". *Annual Review of Materials Science* 28.1, pp. 271–298. doi: 10.1146/annurev.matsci.28.1.271.
- Wohlers, Terry T. (2017). *3d printing and additive manufacturing state of the industry*. Wohlers Associates, Fort Collins.
- Wong, Kaufui V. e Aldo Hernandez (2012). "A Review of Additive Manufacturing". *ISRN Mechanical Engineering* 2012, pp. 1–10. doi: 10.5402/2012/208760.
- Wu, Jun, Ole Sigmund e Jeroen P. Groen (2021). "Topology optimization of multi-scale structures: a review". *Structural and Multidisciplinary Optimization*. doi: 10.1007/s00158-021-02881-8.
- Xia, Liang e Piotr Breitkopf (2015). "Multiscale structural topology optimization with an approximate constitutive model for local material microstructure". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 286, pp. 147–167. issn: 0045-7825. doi: 10.1016/j.cma.2014.12.018.
- Xia, Zihui, Yunfa Zhang e Fernand Ellyin (2003). "A unified periodical boundary conditions for representative volume elements of composites and applications". *International Journal of Solids and Structures* 40.8, pp. 1907–1921. doi: 10.1016/s0020-7683(03)00024-6.
- Xie, Y. M. e G. P. Steven (1993). "A simple evolutionary procedure for structural optimization". *Computers & Structures* 49.5, pp. 885–896. doi: 10.1016/0045-7949(93)90035-c.
- Xu, Hongyi, Yijing Li, Yong Chen e Jernej Barbič (2015). "Interactive Material Design using Model Reduction". *ACM Transactions on Graphics* 34.2.
- Yan, Chunze, Liang Hao, Ahmed Hussein, Philippe Young e David Raymond (2014). "Advanced lightweight 316L stainless steel cellular lattice structures fabricated via selective laser melting". *Materials & Design* 55, pp. 533–541. issn: 0261-3069. doi: 10.1016/j.matdes.2013.10.027.
- Yang, Hui, Wan Ru Leow, Ting Wang, Juan Wang, Jiancan Yu, Ke He, Dianpeng Qi, Changjin Wan e Xiaodong Chen (2017). "3D Printed Photoresponsive Devices Based on Shape Memory Composites". *Advanced Materials* 29.33, p. 1701627. issn: 1521-4095. doi: 10.1002/adma.201701627.
- Yang, Sheng e Yaoyao Fiona Zhao (2015). "Additive manufacturing-enabled design theory and methodology: a critical review". *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 80.1, pp. 327–342. issn: 1433-3015. doi: 10.1007/s00170-015-6994-5.
- Yap, Yee Ling, Chengcheng Wang, Swee Leong Sing, Vishwesh Dikshit, Wai Yee Yeong e Jun Wei (2017). "Material jetting additive manufacturing: An experimental study using designed metrological benchmarks". *Precision Engineering* 50, pp. 275–285. issn: 0141-6359. doi: 10.1016/j.precisioneng.2017.05.015.
- Zadpoor, Amir A. (2016). "Mechanical meta-materials". *Materials Horizons* 3 (5), pp. 371–381. doi: 10.1039/C6MH00065G.
- Zaoui, André (2002). "Continuum Micromechanics: Survey". *Journal of Engineering Mechanics* 128.8, pp. 808–816. doi: 10.1061/(asce)0733-9399(2002)128:8(808).

- Zener, Clarence M. e Sidney Siegel (1949). "Elasticity and Anelasticity of Metals." *The Journal of Physical and Colloid Chemistry* 53.9, pp. 1468–1468. doi: 10.1021/j150474a017.
- Zhang, Weihong, Gaoming Dai, Fengwen Wang, Shiping Sun e Hicham Bassir (2007). "Using strain energy-based prediction of effective elastic properties in topology optimization of material microstructures". *Acta Mechanica Sinica* 23.1, pp. 77–89. issn: 1614-3116. doi: 10.1007/s10409-006-0045-2.
- Zhang, Ying, Elisabetta A. Matsumoto, Anna Peter, Pei-Chun Lin, Randall D. Kamien e Shu Yang (2008). "One-Step Nanoscale Assembly of Complex Structures via Harnessing of an Elastic Instability". *Nano Letters* 8.4, pp. 1192–1196. issn: 1530-6984. doi: 10.1021/nl0801531.
- Zheludev, Nikolay I. e Yuri S. Kivshar (2012). "From metamaterials to metadevices". *Nature Materials* 11, p. 917. doi: 10.1038/nmat3431.
- Zheng, Xiaoyu, Howon Lee, Todd H. Weisgraber, Maxim Shusteff, Joshua DeOtte, Eric B. Duoss, Joshua D. Kuntz, Monika M. Biener, Qi Ge, Julie A. Jackson, Sergei O. Kucheyev, Nicholas X. Fang e Christopher M. Spadaccini (2014). "Ultralight, ultrastiff mechanical metamaterials". *Science* 344.6190, pp. 1373–1377. issn: 0036-8075. doi: 10.1126/science.1252291.
- Zhou, M. e G. I. N. Rozvany (1991). "The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 89.1-3, pp. 309–336. doi: 10.1016/0045-7825(91)90046-9.
- Zhu, Bo, Mélina Skouras, Desai Chen e Wojciech Matusik (2017). "Two-Scale Topology Optimization with Microstructures". *ACM Transactions on Graphics* 36.4, p. 1. issn: 0730-0301. doi: 10.1145/3072959.3095815.
- Zinnecker, V., C. M. Stokes-Griffin, A. Khudiakova, M. Wolfahrt e P. Compston (2020). "A comparative Study for Shear Testing of Thermoplastic-Based Composites and Metal-Composite Hybrids". *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 137, p. 105953. doi: 10.1016/j.compositesa.2020.105953.
- Zuo, Kong-Tian, Li-Ping Chen, Yun-Qing Zhang e Jingzhou Yang (2006). "Study of key algorithms in topology optimization". *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 32.7-8, pp. 787–796. doi: 10.1007/s00170-005-0387-0.
- Zuo, Zhi Hao e Yi Min Xie (2015). "A simple and compact Python code for complex 3D topology optimization". *Advances in Engineering Software* 85, pp. 1–11. doi: 10.1016/j.advengsoft.2015.02.006.



# Resultados Experimentais da Caracterização Mecânica

## A.1 Resultados do ensaio tração material base

Neste apêndice são incluídos os resultados completos dos ensaios mecânicos de tração e compressão dos material base Veroclear™ discutidos no Capítulo 4 Secção 4.6. Na Figura A.1 e Tabela A.1 são apresentados o desenho 2D e as dimensões dos provetes de tração tipo 1A, estabelecidas na norma ISO 527-1:2019.

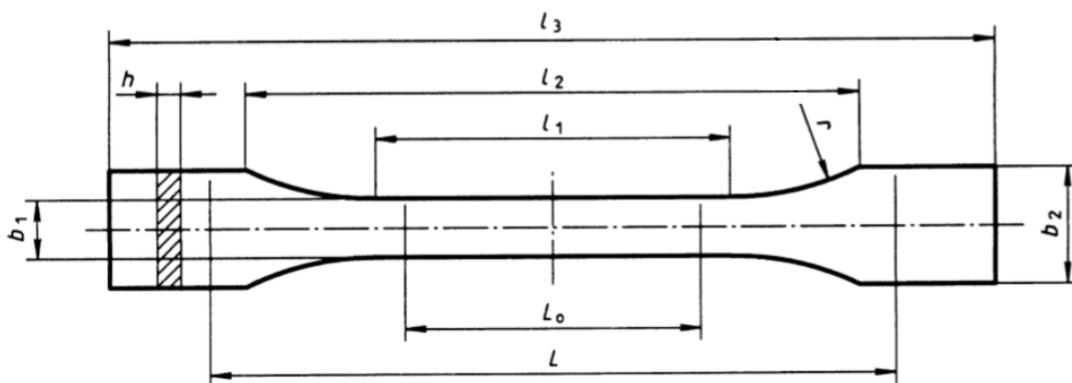


Figura A.1: Provette de tração tipo 1A (ISO 527-1:2012, 2012).

A Tabela A.2 e Tabela A.5 exibem os resultados das medições dos provetes do ensaio de tração e compressão, respetivamente.

A Figura A.2 apresenta os diagramas Tensão-deformação dos ensaios de tração do VeroClear™ nas seis orientações estudadas. Já a Tabela A.3 e Tabela A.4 expõem os valores das propriedades calculadas para cada um dos cinco provetes testados, nas orientações  $xy$  e  $xz$ , respetivamente. Além disso, apresentam a média e o desvio padrão.

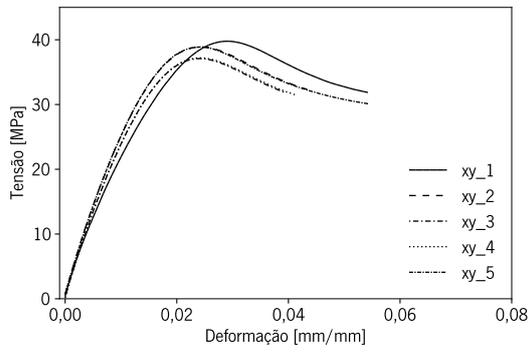
Tabela A.1: Dimensões do Provete para ensaio à tração (ISO 527-1:2019).

Designação	Dimensões [mm]
$l_3$	$\geq 150$
$l_1$	$80 \pm 2$
$r$	20 - 25
$l_2$	104 - 113
$b_2$	$20,0 \pm 0,2$
$b_1$	$10,0 \pm 0,2$
$h$	$4,0 \pm 0,2$
$L_0$	$50,0 \pm 0,5$
$L$	$115 \pm 1$

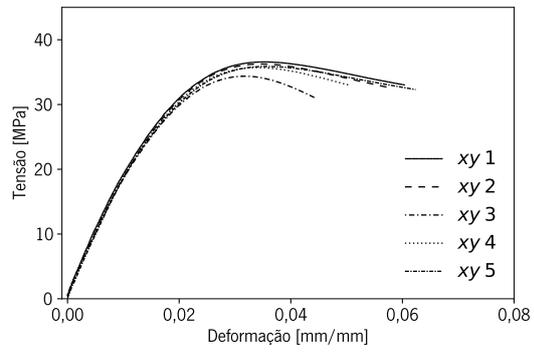
Tabela A.2: Dimensões dos provetes para determinação das propriedades mecânicas à tração do material VeroClear™, dimensões em mm.

P	$l_3$	$b_1$	$h$	P	$L_3$	$b_1$	$h$	P	$l_3$	$b_1$	$h$
Ori. xy, 0°				Ori. xy, 45°				Ori. xy, 90°			
1	150,22	10,18	4,01	1	150,16	10,20	4,00	1	150,09	10,02	3,98
2	150,10	10,10	4,00	2	150,12	10,26	4,00	2	150,22	10,03	3,99
3	150,14	10,08	4,00	3	150,10	10,27	4,20	3	150,09	10,06	4,01
4	150,10	10,19	4,01	4	150,14	10,28	4,02	4	150,15	10,08	4,00
5	150,13	10,26	4,02	5	150,10	10,26	4,02	5	150,14	10,08	4,01
$\bar{x}$	150,14	10,16	4,01	$\bar{x}$	150,12	10,25	4,05	$\bar{x}$	150,14	10,05	4,00
$S$	0,05	0,07	0,01	$S$	0,03	0,03	0,09	$S$	0,03	0,03	0,01
Ori. xz, 0°				Ori. xz, 45°				Ori. xz, 90°			
1	150,17	10,13	4,01	1	150,19	10,07	4,08	1	150,27	10,07	4,01
2	150,24	10,05	4,12	2	150,19	10,07	4,09	2	150,21	10,07	4,01
3	150,18	10,20	4,08	3	150,16	10,08	4,01	3	150,28	10,07	3,99
4	150,18	10,15	4,03	4	150,18	10,05	4,03	4	150,31	10,08	3,99
5	150,08	10,05	4,18	5	150,19	10,06	4,01	5	150,30	10,07	3,97
$\bar{x}$	150,17	10,12	4,08	$\bar{x}$	150,18	10,07	4,04	$\bar{x}$	150,27	10,07	3,99
$S$	0,06	0,07	0,07	$S$	0,01	0,01	0,04	$S$	0,04	0,00	0,02

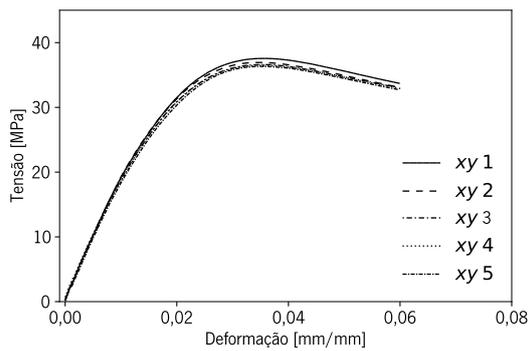
Nota: P número de provete;  $l_3$ , comprimento inicial;  $b_1$ , largura;  $h$ , altura.



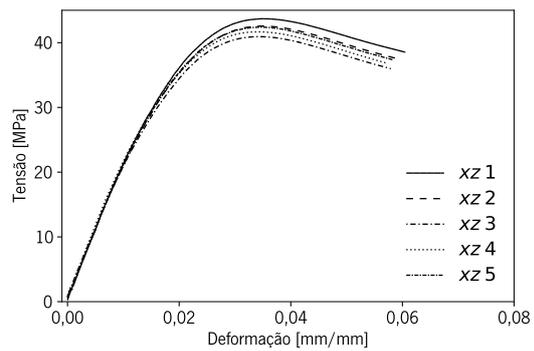
(a) Orientação xy, 0°



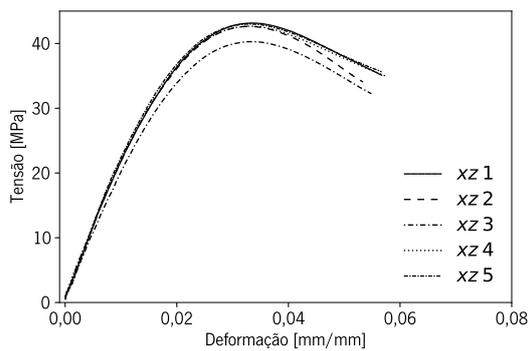
(b) Orientação xy, 45°



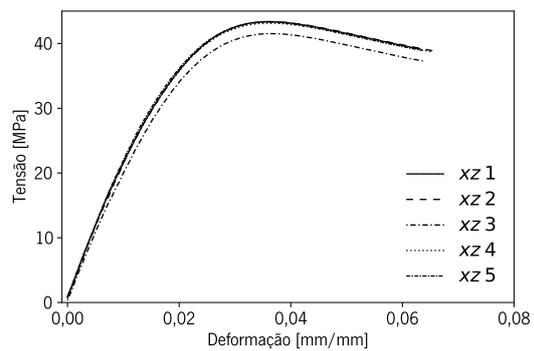
(c) Orientação xy, 90°



(d) Orientação xz, 0°



(e) Orientação xz, 45°



(f) Orientação xz, 90°

Figura A.2: Diagramas Tensão-Deformação à tração resina VeroClear, orientação xy e xz.

Tabela A.7: Propriedades mecânicas VeroClear™ à compressão, provetes longos.

Ori. xy, 0°	$E_t$	$F_m$	$\sigma_{p0,2\%}$	$\sigma_m$	$\varepsilon_{F_m}$
P	[MPa]	[kN]	[MPa]	[MPa]	[%]
1	2405,63	14,35	85,09	88,41	4,46
2	2366,50	14,20	84,15	87,35	4,49
3	2414,76	14,41	85,65	88,85	4,48
4	2381,58	14,46	84,92	88,47	4,57
5	2354,75	14,25	83,57	87,18	4,58
$\bar{x}$	2384,64	14,33	84,68	88,05	4,52
S	22,71	0,1	0,73	0,66	0,05
Ori. xy, 45°					
1	2414,17	14,67	85,17	88,99	4,54
2	2425,49	14,73	86,15	89,42	4,49
3	2421,43	14,63	85,18	88,95	4,48
4	2377,50	14,55	84,25	88,06	4,53
5	2408,58	14,66	85,09	88,72	4,50
$\bar{x}$	2409,43	14,65	85,17	88,83	4,51
S	16,99	0,06	0,60	0,45	0,02
Ori. xy, 90°					
1	2437,09	15,17	87,31	90,97	4,57
2	2373,83	14,89	86,19	89,50	4,56
3	2382,50	14,82	85,65	89,01	4,54
4	2392,65	14,88	86,01	89,37	4,64
5	2399,60	14,73	84,88	88,67	4,55
$\bar{x}$	2397,13	14,90	86,01	89,50	4,57
S	21,82	0,15	0,79	0,79	0,04

Nota: Ori. orientação de produção, P número de provete,  $\varepsilon_F$  deformação total na força máxima.



# Classificação da literatura das Regras de Projeto PolyJet

Neste Apêndice é apresentada a tabela resumo com a classificação da bibliografia dos trabalhos relacionados com a relação entre parâmetros do processo e as propriedades das peças produzidas por PolyJet™ discutidos na Secção 2.6 do Capítulo 2.

Tabela B.1: Classificação de literatura da caracterização dos materiais produzidos por tecnologia PolyJet™.

<b>Referência</b>	<b>Equipamento</b>	<b>Materiais</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Resultados</b>
(Barclift e Williams, 2012)	Objet500 Connex3™	VW	Estudo da sensibilidade das propriedades mecânicas dos componentes (i.e. tensão de cedência ( $\sigma_t$ ) e módulo longitudinal ( $E_t$ ) em tração) de acordo com a variação de parâmetros de processo: (i) orientação de produção no plano x-y, (ii) orientação de produção em z, (iii) espaçamento entre corpos de prova (CP).	A variação da orientação no plano x-y não influencia as propriedades mecânicas do material. A resolução do eixo zz em superior a dos restantes eixos (x e y). A orientação de produção xz e yz não tem influência estatística no desempenho do material ( $\sigma_t$ e $E_t$ ). O espaçamento entre CP influencia as propriedades mecânicas, um espaço reduzido entre CP aumenta a resistência das peças.

Continua na página seguinte

**Tabela B.1 – continuação da página anterior**

<b>Referência</b>	<b>Equipamento</b>	<b>Materiais</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Resultados</b>
(Beltrán et al., 2015)	Objet 30™	VW, FC705	Análise da influência de três características ( <i>i.e.</i> , tamanho, localização e orientação da peça na plataforma) na qualidade dimensional e geométrica de geometrias cilíndricas produzidas por PolyJet™.	Os parâmetros analisados são maioritariamente afetados pelo tamanho e orientação da peça, já a posição na plataforma exerceu menor influência. A qualidade dimensional apresentou forte dependência do parâmetro orientação da peça, a seleção adequada deste para metro permite obter erros dimensionais absolutos reduzidos $<(15\ \mu\text{m})$ nas superfícies internas e externas. A cilindridade dependeu maioritariamente do tamanho da peça (diâmetro), sendo o efeito da orientação menos considerável. O efeito da orientação da peça no erro geométrico foi menos relevante que no erro dimensional. O eixo de revolução dos cilindros deveria ser paralelo ao eixo dos xx. Os cilindros produzidos, com a orientação ótima obtida no estudo, revelou que o erro de forma de qualquer secção circular transversal dos cilindros apresentou a mesma forma, independentemente do tamanho ou localização. Este efeito foi observado para as superfícies internas e externas.

Continua na página seguinte

**Tabela B.1 – continuação da página anterior**

<b>Referência</b>	<b>Equipamento</b>	<b>Materiais</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Resultados</b>
(Cazón et al., 2014)	Objet Eden 330™	FC720	Estudo do efeito da orientação de produção e pós-processamento nas propriedades mecânicas e acabamento superficial das peças produzidas por PolyJet™. Neste estudo foram produzidos provetes em 18 diferentes orientações, com acabamentos superficiais mate e brilhante, e remoção do material de suporte por jato de água e banho químico (i.e., solução 2 % NaOH).	A orientação da peça tem um efeito significativo no módulo de elasticidade e na tensão última, e que não possui significado estatístico na tensão de ruptura. Quanto à influência do acabamento, os testes de tração não revelaram diferenças significantes. Relativamente à rugosidade, análise de variância indicou que a posição e o tipo de acabamento apresentaram diferenças estatisticamente significantes, entre as médias das três direções de rugosidade. Apresentaram como conclusão, que o acabamento brilhante e a direção de impressão xy apresentaram melhores resultados na rugosidade, enquanto a direção crítica de carregamento da peça deve ser orientada na direção do eixo-x.
				Continua na página seguinte

**Tabela B.1 – continuação da página anterior**

<b>Referência</b>	<b>Equipamento</b>	<b>Materiais</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Resultados</b>
(Kampker et al., 2017)	Objet500 Connex2™	ABSI, Rigur, VG, RGD720	Estudo das interdependências dos diferentes materiais e parâmetros do processo PolyJet™, através de <i>design of experiments</i> (DOE), na produção de moldes (e.g., termoformação e injeção).	Os provetes produzidos com os parâmetros: (i) altura de camada 30 $\mu\text{m}$ (alta velocidade); (ii) orientação da peça 90°; (iii) pós-tratamento térmico (ABSI) e (iv) acabamento brilho, apresentaram melhores propriedades mecânicas à tração, dureza superficial e rugosidade, comparativamente aos provetes produzidos com altura de camada de 16 $\mu\text{m}$ e modo “alta qualidade”, orientação da peça 0° e acabamento mate.

Continua na página seguinte

**Tabela B.1 – continuação da página anterior**

<b>Referência</b>	<b>Equipamento</b>	<b>Materiais</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Resultados</b>
(Kesy e Kottlinski, 2010)	Objet Eden 260™	FC720	Estudo experimental do efeito da orientação no processo PolyJet™ nas propriedades mecânicas à tração e dureza.	Os resultados evidenciam propriedades anisotrópicas dos provetes produzidos em material Full-Cure™ 720. Os autores concluíram que este efeito era provocado pela orientação de produção. Os provetes produzidos na orientação x-z-y apresentaram as propriedades mecânicas mais elevadas, contrariamente os provetes produzidos na orientação x-y-z apresentaram os piores resultados. As arestas dos provetes paralelas ao sentido do movimento de impressão x são mais densas e duras que a região central. Este efeito é devido à maior absorção de radiação UV pelas arestas. A orientação das peças na plataforma de produção do equipamento PolyJet™ é o fator com maior influência nas propriedades mecânicas.
				Continua na página seguinte

**Tabela B.1 – continuação da página anterior**

<b>Referência</b>	<b>Equipamento</b>	<b>Materiais</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Resultados</b>
(Lumpe et al., 2019)	Objet500 Connex3™	VWP, TBP, DM	estudaram o comportamento micro-mecânico à tração da interface de peças multimaterial produzidas por Poly-Jet™	A resistência da interface entre multimateriais, depende dos parâmetros geométricos de impressão (i.e., orientação das interfaces em relação às direções de produção), e da ligação entre os próprios materiais. A interface entre materiais rígidos e flexíveis tem uma resistência idêntica à do material flexível. Já a interface entre materiais rígidos apresentou uma redução de até 50 % em determinadas orientações de produção.
				Continua na página seguinte

**Tabela B.1 – continuação da página anterior**

<b>Referência</b>	<b>Equipamento</b>	<b>Materiais</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Resultados</b>
(Meisel et al., 2018)	Objet350 Connex™	VWP, TBP, DM	propriedades viscoelásticas dos materiais digitais produzidos por PolyJet™, com recurso à Análise Mecânica Dinâmica (DMA).	No material digital as propriedades da peça final são semelhantes à concentração do material dominante. Contudo uma alteração quantificada nos agrupamentos de gotículas do mesmo material no padrão do voxel de cada composto, mostra que é necessário um determinado tamanho geométrico para aproximar com precisão as propriedades da macro-escala. Os autores reportaram igualmente, que a composição dos materiais digitais e o padrão do voxel afetam o módulo de armazenamento e perda ( <i>storage and loss module</i> ). As propriedades dos materiais digitais exibem uma mudança estatisticamente significativa, quando a largura do provete é inferior a 2 mm.
(Meng et al., 2020)	Objet500 Connex3™	TBP, DM40, DM50, DM60, DM70, DM85, DM95, VWP	Caracterização das propriedades mecânicas à tração (tensão à tração e deformação última) dos materiais, TBP, VWP e materiais compósitos intermédios com diferentes percentagens de mistura.	O incremento do teor de VWP na mistura, aumenta a resistência à tração e reduz a deformação. Adicionalmente a dureza superficial (Shore A) do material aumenta com a redução da concentração TBP.

Continua na página seguinte
-----------------------------

**Tabela B.1 – continuação da página anterior**

<b>Referência</b>	<b>Equipamento</b>	<b>Materiais</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Resultados</b>
(Moore e Williams, 2015)	Objet350 Connex™	TBP VWP	Estudo do comportamento à fadiga do material elastomérico (TBP) e da interface com um material rígido (VWP) de acordo com a norma ASTM D4482-11. Exame da microestrutura da interface do material único e multimaterial por meios óticos.	Os provetes com acabamento brilhante, apresentaram melhor comportamento à fadiga. A interface multimaterial não apresentou uma redução de resistência à fadiga significativa, quando comparada com a média do monomaterial. A redução da área da seção transversal (i.e., <i>necking</i> ) dos provetes testados à fadiga, pode causar uma redução na resistência à fadiga.
(Jochen Mueller e Shea, 2015a)	Objet500 Connex3™	VWP	Estudo da influência das direções espaciais de construção não ortogonais (x-x-z) no módulo de Young e tensão de ruptura. Ensaios de compressão e tração. As direções de fabrico foram estabelecidas através de combinações entre os três eixos principais e não ortogonal de acordo com as principais direções x-y-z.	Considerando todas as orientações de fabrico, as propriedades das peças produzidas por PolyJet™ em termos de anisotropia são semelhantes as do processo de injeção.

Continua na página seguinte

**Tabela B.1 – continuação da página anterior**

<b>Referência</b>	<b>Equipamento</b>	<b>Materiais</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Resultados</b>
(J. Mueller et al., 2015b)	Objet500 Connex3™	VWP835, SUP705	Análise de todo o processo PolyJet™, através de ferramenta estatística DOE, quantificando os parâmetros que influenciam o rigor dimensional e as propriedades mecânicas das peças.	Os parâmetros que maior impacto tinha nas propriedades mecânicas à tração eram: (i) o número de interseções entre camadas ortogonais à direção de solicitação; (ii) tempo de exposição à luz UV; (iii) posição de produção ( <i>i.e.</i> , na plataforma) e (iv) data de validade do material. A geometria das peças é fortemente afetada pelo entupimento dos orifícios de impressão e pela temperatura do equipamento. O tempo de armazenamento pós-produção não tem efeitos significativos e que a rugosidade não é afetada por nenhum dos parâmetros.
				Continua na página seguinte

**Tabela B.1 – continuação da página anterior**

Referência	Equipamento	Materiais	Objetivo	Resultados
(Jochen Mu- eller, Courty et al., 2017)	Objet500 Connex3™	VWP, TBP	Estudo das propriedades mecânicas (dureza e rigidez) das interfaces de camadas à microescala (escala local) de material simples, composto e multimaterial. Dois materiais base distintos (i.e., rígido e flexível). Técnica de nanoindentação	Gradientes de rigidez obtidos por mistura aleatória de inclusões de um material noutro de base (e.g., matriz rígida com inclusões de material flexível). Considerar detalhes geométricos mínimos de 500 µm. Materiais com gradientes (i.e., pela mistura de materiais com propriedades distintas) só é efetivo para peças ou geometrias com dimensões superiores a 5 mm. As zonas de interface entre diferentes materiais não exibem fragilidades. <b>Limitações:</b> propriedades mecânicas à microescala (i.e., valores superiores aos obtidos para a macroescala, não considera as imperfeições)
(Pilipović et al., 2007)	Objet Eden 310Plus™	FC720, VB, VB	Estudo experimental propriedades mecânicas (Tensão de cedência e módulo de elasticidade longitudinal à flexão e tração) e rugosidade	A velocidade de impressão e o posicionamento na plataforma de impressão não afeta a resistência da peça. Os provetes produzidos em FullCure™ apresentaram maior resistência à tração e flexão, seguidos pelo VeroBlue™ e VeroBlack™. Todavia os valores alcançados eram inferiores aos fornecidos pelo fabricante. A rugosidade superficial do FullCure™ é inferior à dos outros dois materiais.

Continua na página seguinte

Tabela B.1 – continuação da página anterior

Referência	Equipamento	Materiais	Objetivo	Resultados
(Pugalendhi, Ranganathan e Chandrasekaran, 2019)	Objet260 Connex™	VC	Estudo sobre efeitos dos modos de impressão (i.e., alta qualidade e alta velocidade) e de acabamento superficial (i.e., mate ( <i>matte</i> ) e brilho ( <i>glossy</i> )), nas propriedades mecânicas do VeroClear™. Caracterizaram os provetes através de ensaios mecânicos à tração, flexão e dureza superficial (Shore).	A combinação do modo alta qualidade e brilho apresentou melhores propriedades mecânicas (resistência à tração 49,47 MPa), custo inferior (-14,72 %) e menor tempo de produção (-60,86 %), comparativamente às outras combinações. Esta mesma combinação apresentou para ensaios à flexão 25,83 MPa e 1009,67 MPa para a resistência e o módulo à flexão, respectivamente. A dureza Shore D foi de 80,16. O modo alta velocidade e acabamento brilhante eram os melhores parâmetros para processamento do material VeroClear™.
				Continua na página seguinte

**Tabela B.1 – continuação da página anterior**

<b>Referência</b>	<b>Equipamento</b>	<b>Materiais</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Resultados</b>
(Pugalendhi, Ranganathan e Ganesan, 2020)	Objet260 Connex™	VC, VWP	Caracterização dos efeitos dos parâmetros de acabamento superficial (mate-M e brilho-B) do processo PolyJet™ nas propriedades mecânicas ( <i>tração, flexão e dureza superficial</i> ) dos materiais (VC) e (VWP) produzidos em modo digital.	Os provetes produzidos com modo brilho apresentavam maior rigidez e dureza. O material VC revelou propriedades mecânicas superiores ao VWP. O VC-B apresentou uma tensão à tração de 53,6 MPa, 20,17 % superior ao VWP-B. Os provetes de VWP-M exibiram uma deformação à rotura de 28,75, 33,72 % superior ao VC-M. A resistência à flexão (49,1 MPa) e o módulo de elasticidade à flexão (1352,5 MPa) foram superiores no VC-B comparativamente ao VWP-B 28,87 e 26,37 %2, respetivamente. A dureza não apresentou diferenças significativas (0,46 %). Por último concluíram que o material VC com acabamento brilho é mais eficiente que as outras combinações
(Reichl e Inman, 2017)	Objet500 Connex3™	VWP, TBP, DM	Estudo das propriedades de materiais digitais produzidos por diferentes percentagens de mistura dos materiais base TBP (FLX930) e VWP (RGD835). Neste estudo foram caracterizadas as propriedades viscoelásticas pela medição do módulo complexo obtido num ensaio de DMA.	As propriedades mecânicas dinâmicas e térmicas revelaram que <i>storage modulus</i> e o <i>loss factor</i> do TBP apresentou maior variação comparado com o VWP, DM 8430 e DM 8420. O módulo complexo não é afetado pela direção de impressão.

Continua na página seguinte

**Tabela B.1 – continuação da página anterior**

<b>Referência</b>	<b>Equipamento</b>	<b>Materiais</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Resultados</b>
(Safka et al., 2016)	Objet500 Connex3™	D-ABS, VB, VW, VC, DW, TB, DM8530, DM 9895, SUP705	Estudo das propriedades mecânicas de vários materiais expostos a diferentes químicos.	A absorção de água foi verificada de forma variável nos materiais testados. Devido a este facto os produtos químicos entraram na estrutura dos materiais, enfraquecendo as forças macromoleculares, originando a redução da resistência à tração e ao aumento da ductilidade. Outro aspeto observado nos sólidos foi a corrosão química, levando à degradação irreversível do material. Como resultados este estudo confirmou que os compostos químicos que provocaram maior aumento de peso (acetona, solvente U6002 e etanol) das amostras, também foram os que causaram a degradação mais elevada nas amostras testadas. De todos os materiais testados, o TB exibiu uma resistência química zero à acetona. Os materiais digitais (DM 8530, DM 9895) apresentaram uma sensibilidade à acetona condicente com a sua composição (i.e., VW + TB). O Digital ABS™ apresentou uma resistência química superior, apresentando os melhores resultados de todos os materiais testados, mesmo após as 24 horas de carga química.
				Continua na página seguinte

**Tabela B.1 – continuação da página anterior**

<b>Referência</b>	<b>Equipamento</b>	<b>Materiais</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Resultados</b>
(Udroiu e Mihail, 2009)	Objet Eden 350™	FC720	Determinação da rugosidade horizontal variando dois parâmetros de acabamento ( <i>mate</i> e <i>glossy</i> )	Superfície: <i>mate</i> Ra= 3,8 µm, Rz= 5,6 µm; <i>glossy</i> Ra=0,84 µm, Rz=5,6 µm <b>Limitações:</b> não foram testadas outras posições na plataforma de construção (plano xy)

<sup>1</sup>**Nota:** FC720, FullCure720™; VB, VeroBlack™; VB, VeroBlue™; VWP, VeroWhitePlus™; TBP, TangoBlackPlus™; D-ABS, Digital ABS™; DW, DurusWhite™.

<sup>2</sup>DM, *Digital Material* O número após abreviatura de material “DM” representa a sua dureza Shore A, fornecida pelo fabricante.



# Resultados Experimentais da Caracterização Mecânica de VRU

## **C.1 Resultados do ensaio de tração dos VRU**

Neste Apêndice são apresentados os diagramas tensão–deformação resultantes dos ensaios de caracterização mecânica (tração, compressão e corte) das topologias ótimas apresentados e discutidos nas Secções 4.7.1, 4.7.2 e 4.7.3.

Na Figura C.1 são apresentados os diagramas tensão–deformação ( $\sigma - \epsilon$ ) obtidos nos ensaios de tração.

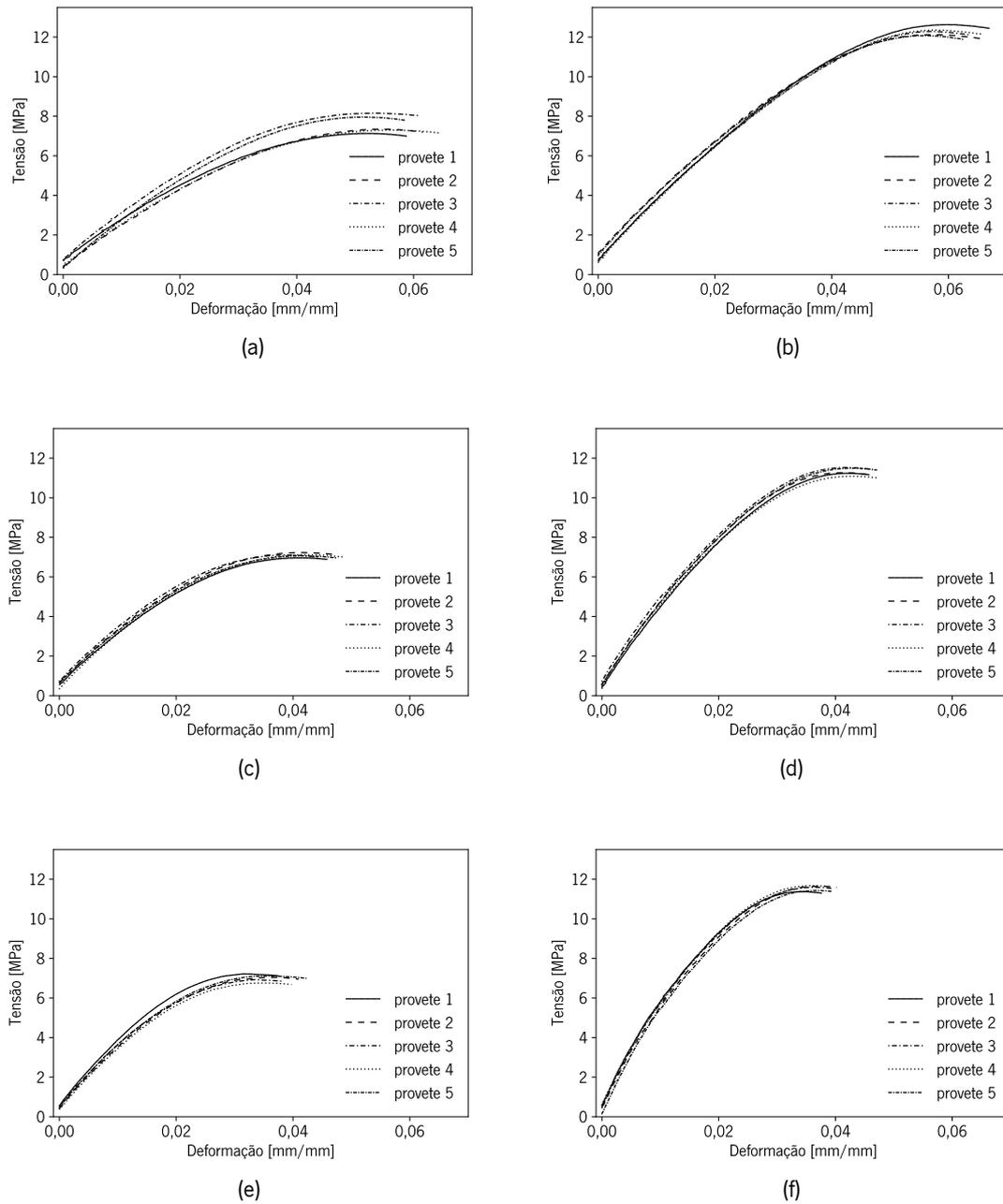


Figura C.1: Diagramas tensão–deformação ensaios de tração de topologias ótimas: (a) VRU 1×1×1 com 30 % de fração volúmica, (b) VRU 1×1×1 com 60 % de fração volúmica, (c) VRU 2×2×2 com 30 % de fração volúmica, (d) VRU 2×2×2 com 60 % de fração volúmica, (e) VRU 3×3×3 com 30 % de fração volúmica e (f) VRU 3×3×3 com 60 % de fração volúmica.

## C.2 Resultados do ensaio de compressão dos VRU

Na Figura C.2 e C.3 são apresentados os diagramas tensão–deformação referentes ao ensaio de compressão dos Volume Repetitivo Unitário (VRU).

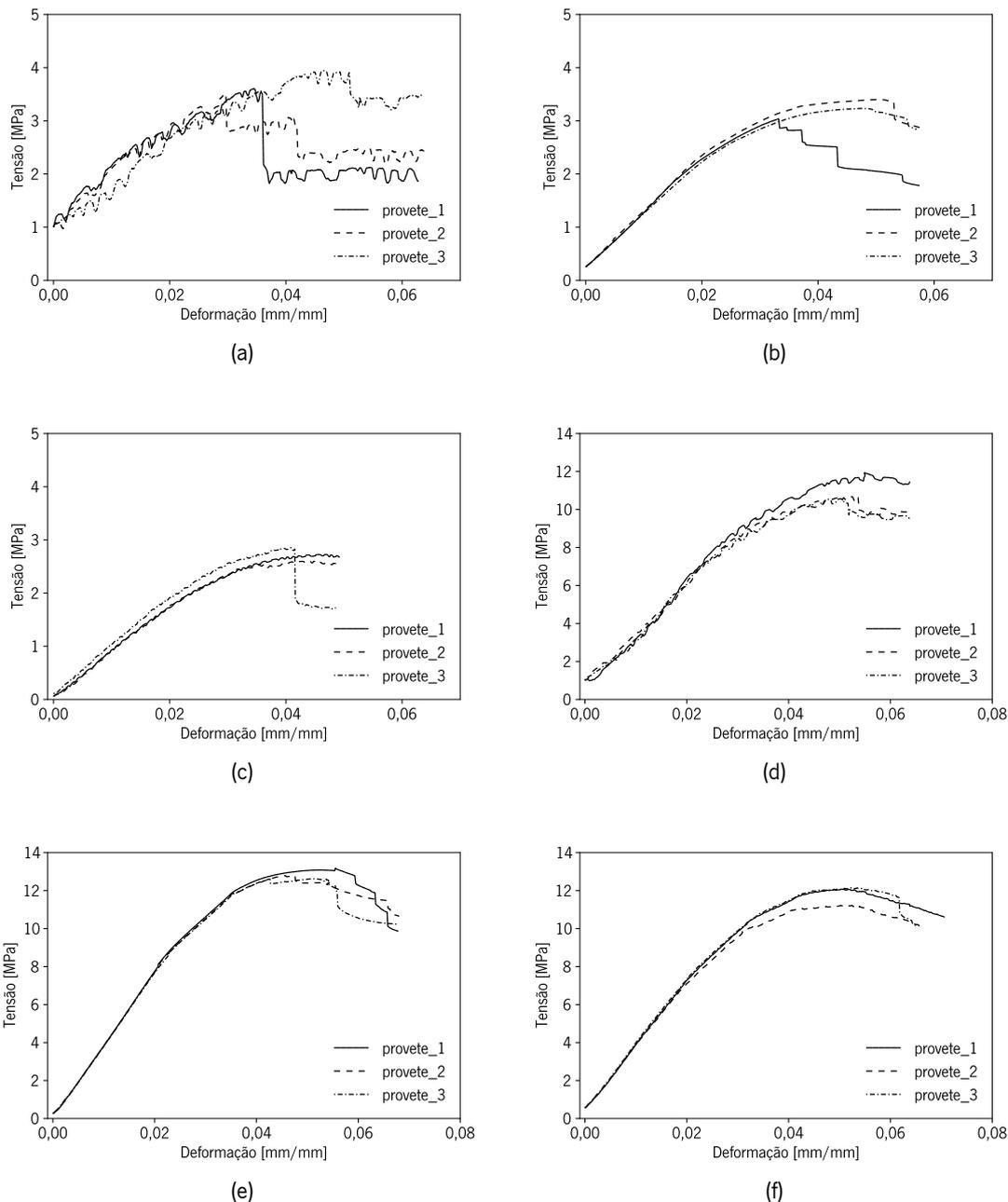


Figura C.2: Diagramas tensão-deformação à compressão de topologias ótimas: (a) VRU 1×1×1 com 30 % de fração volúmica, (b) VRU 2×2×2 com 30 % de fração volúmica, (c) VRU 3×3×3 com 30 % de fração volúmica, (d) VRU 1×1×1 com 45 % de fração volúmica, (e) VRU 2×2×2 com 45 % de fração volúmica, (f) VRU 3×3×3 com 45 % de fração volúmica.

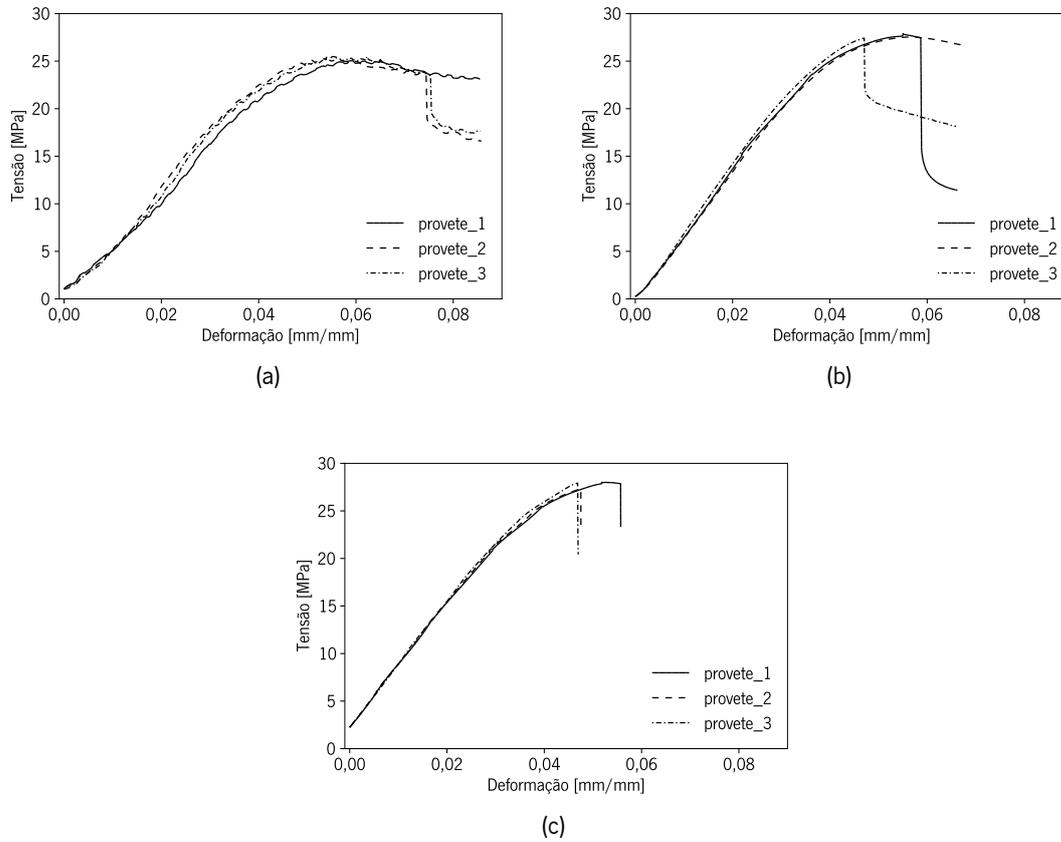


Figura C.3: Diagramas tensão-deformação à compressão de topologias ótimas: (a) VRU  $1 \times 1 \times 1$  com 60 % de fração volúmica, (b) VRU  $2 \times 2 \times 2$  com 60 % de fração volúmica, (c) VRU  $3 \times 3 \times 3$  com 60 % de fração volúmica.

### C.3 Acessório de fixação ensaio de corte

Na Figura C.4 é apresentado o desenho 2D do acessório desenvolvido para a realização do ensaio de corte dos VRU.

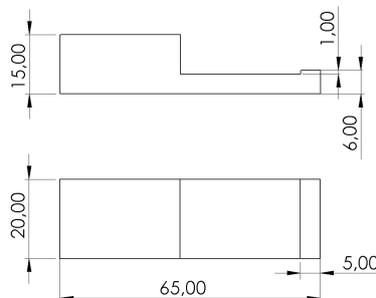


Figura C.4: Vistas do desenho 2D do acessório empregue na realização do ensaio de corte, dimensões em milímetros.

## C.4 Resultados do ensaio de corte dos VRU

Na Figura C.5 são apresentados os diagramas força-deslocamento do ensaio de corte.

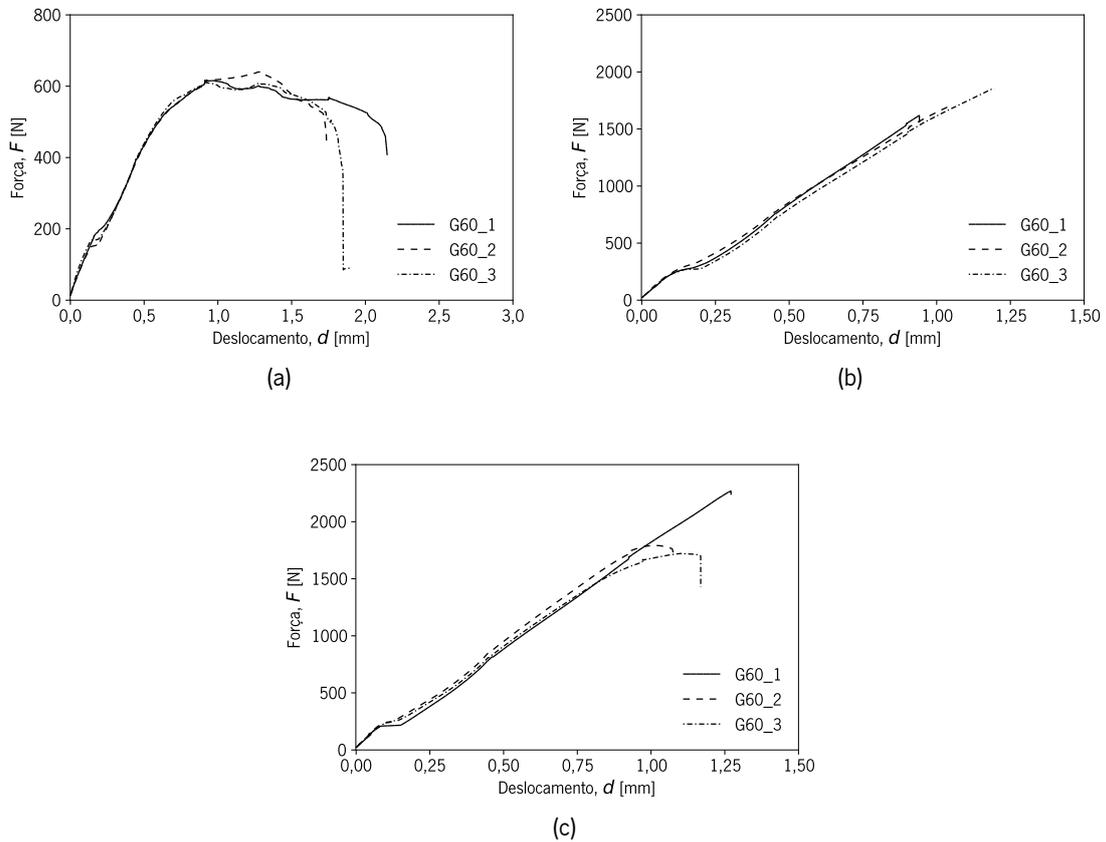


Figura C.5: Diagramas força-deslocamento obtidos no ensaio de corte: (a) provetes fração volúmica 30 %, (b) provetes fração volúmica 45 % e (c) provetes fração volúmica 60 %.



## Lista de Publicações

Neste Apêndice é apresentada a lista de publicações que resultaram do desenvolvimento do presente trabalho.

### **D.1 Publicação 1**

Miguel R. Silva, António M. Pereira et al. (2021). “Assessment of the Dimensional and Geometric Precision of Micro-Details Produced by Material Jetting”. *Materials* 14.8, p. 1989. doi: 10.3390/ma14081989

### **D.2 Publicação 2**

Miguel R. Silva, João A. Dias-de-Oliveira et al. (2021). “Design of Kinematic Connectors for Microstructured Materials Produced by Additive Manufacturing”. *Polymers* 13.9, p. 1500. doi: 10.3390/polym13091500