O ensino e a aprendizagem das funções trigonométricas através de tarefas exploratórias e investigativas: um estudo com alunos de 12.º ano de escolaridade

Ana Cecília Morais Gonçalves

UMinho|2022

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Ana Cecília Morais Gonçalves

O ensino e a aprendizagem das funções trigonométricas através de tarefas exploratórias e investigativas: um estudo com alunos de 12.º ano de escolaridade

março de 2022

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Ana Cecília Morais Gonçalves

O ensino e a aprendizagem das funções trigonométricas através de tarefas exploratórias e investigativas: um estudo com alunos de 12.º ano de escolaridade

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho efetuado sob a orientação do
Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

março de 2022

AGRADECIMENTOS

De uma forma geral, agradeço a todos os amigos, colegas e professores, que me ajudaram direta ou indiretamente ao longo de todo o percurso até aqui.

Em particular, agradeço:

Ao professor Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu, que me orientou durante a intervenção pedagógica e durante a redação deste relatório. Sempre teve uma palavra de encorajamento e, apesar dos anos passados, nunca desistiu de mim e do meu trabalho. Ser-lhe-ei eternamente grata.

À professora Mestre Maria do Carmo Cunha, pela disponibilidade, pela partilha da sua prática pedagógica, por me deixar embarcar nas suas iniciativas na escola e por se deixar embarcar nas minhas.

Ao meu colega de estágio, Ricardo Marques pelo apoio e amizade ao logo da intervenção na preparação das aulas, nas reflexões sobre as aulas e na partilha de materiais.

Aos alunos da turma onde realizei a intervenção pedagógica, pela recetividade que demonstraram ao longo das aulas e pelo respeito enquanto sua professora que sempre me tiveram.

Aos professores e funcionários da escola onde realizei o estágio pelo acolhimento que me deram como membro da comunidade escolar.

Às minhas amigas Júlia Alves, Raquel Castro, Sónia Pinto, Marlene Severiano e Jurema, pelo apoio motivacional que me deram na realização deste trabalho, por sempre me encorajarem.

À professora Doutora Maria Cláudia Mendes Araújo, por toda a ajuda, ensinamentos e partilha de conhecimentos, pela sua amizade e pela disponibilidade a qualquer hora do dia para me ajudar nas minhas dúvidas e dificuldades.

Ao professor Doutor Hélder Sousa, por ter semeado, num cantinho da minha mente, a possibilidade de um doutoramento. Uma pequena fonte de luz em momentos de escuridão.

À professora Mestre Ana Isa Meireles, minha advogada e querida amiga, por tudo fazer para me ajudar a chegar a este momento de pleno direito.

À minha irmã Susana, por nunca ter desistido de ver a sua irmãzinha livre e dona do seu destino.

Aos meus pais que tanto lutaram e se sacrificaram todos estes anos para me verem chegar até aqui e por me apoiarem todos os dias da minha vida.

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS ATRAVÉS DE TAREFAS EXPLORATÓRIAS E INVESTIGATIVAS: UM ESTUDO COM ALUNOS DE 12.º ANO DE ESCOLARIDADE

RESUMO

Neste estudo procura-se compreender os contributos das tarefas de exploração e investigação na aprendizagem de conteúdos de Funções Trigonométricas por alunos de 12.º ano de escolaridade. A prática pedagógica foi orientada de modo a responder às seguintes questões de investigação: (1) Que atividades desenvolvem os alunos na realização de tarefas de exploração e de tarefas de investigação na aprendizagem das Funções Trigonométricas? (2) Que dificuldades revelam os alunos na realização de tarefas de exploração ou tarefas de investigação na aprendizagem das Funções Trigonométricas? (3) Quais as perceções dos alunos sobre a realização de tarefas de exploração ou de investigação na aprendizagem das Funções Trigonométricas? Na procura de dar resposta às questões de investigação foram recolhidas as produções dos alunos, os registos audiovisuais das aulas, questionários, observações e análise documental.

Com os dados obtidos foi possível concluir que as tarefas propostas tiveram um impacto positivo na compreensão destes alunos sobre os conteúdos do tema das Funções Trigonométricas. Durante a realização das tarefas, os alunos não mostraram dar muita importância à introdução das tarefas, era-lhes mais natural formular afirmações do que questões, sendo a formulação de conjeturas apontada pelos alunos como o que sentiram mais dificuldade durante a realização das tarefas. A calculadora gráfica tornou-se, para os alunos, ao longo da intervenção, um proficiente instrumento de investigação. Os alunos consideram que as tarefas de exploração e investigação propostas lhes proporcionaram importantes momentos de trabalho em grupo, que são benéficas no sentido de os obrigar a raciocinar, permitem que desenvolvam capacidades de criatividade, de exploração de conhecimentos, de persistência, de argumentação e de autonomia. No entanto, uma parte significativa dos alunos aponta que esta tipologia de tarefa não prepara, convenientemente, os alunos para o exame nacional. As maiores dificuldades dos alunos estiveram, particularmente, ligadas às carências de conhecimento de conteúdo estudado durante o 11.º ano no tema das Funções Trigonométricas, o qual, sem ele, é muito difícil gerar novas ideias. Não obstante, os alunos consideraram a realização das tarefas de exploração e investigação no tema das Funções Trigonométricas muito importante para a compreensão dos conteúdos estudados.

Palavras-chave: Alunos de 12.º ano; Aprendizagem; Funções Trigonométricas; Tarefas de exploração; Tarefas de Investigação.

TEACHING AND LEARNING TRIGONOMETRIC FUNCTIONS THROUGH EXPLORATORY AND INVESTIGATIVE TASKS: A STUDY WITH IN THE 12TH GRADE

ABSTRACT

This study seeks to understand the contribution of exploratory and investigative tasks in learning the content of the topic Trigonometric Functions, by twelfth grade students. The pedagogical practice was designed to answer the following research questions: (1) What activities do students develop when performing exploratory tasks and investigative tasks in learning Trigonometric Functions? (2) What difficulties do students show in performing exploratory tasks or investigative tasks in learning Trigonometric Functions? (3) What are the perceptions of students in performing exploratory tasks or investigative tasks in learning Trigonometric Functions? To answer the research questions, student productions, audiovisual recordings of classes, questionnaires, observations and document analysis were collected.

Based on the data obtained, it was found that the proposed tasks have a positive impact on students' understanding of the content of the topic Trigonometric Functions. When working on the tasks, the students did not seem to put much emphasis on the introduction of the tasks, it was more natural for them to formulate assertions than questions, and the conjecture was highlighted by the students as the one that brought the greatest difficulties in the tasks. The calculator became, for the students, throughout the intervention, a proficient instrument of investigation. Students believe that the proposed exploratory and investigative tasks provided them with important moments of group work, which are beneficial in the sense that they force them to think and allow them to develop skills of creativity, exploration of knowledge, perseverance, reasoning and autonomy. However, a significant proportion of students indicate that these types of tasks do not adequately prepare students for the national exam. The students' greatest difficulties were mainly related to their lack of knowledge of the content covered in the eleventh grade, and specifically with the topic Trigonometric Functions, without which it is very difficult to come up with new ideas. Nevertheless, the performance of the exploration and investigation tasks on the topic of trigonometric functions was considered by the students to be very important for the understanding of the content.

Keywords: 12th Grade Students; Learning; Trigonometrics Functions; Exploratory Tasks; Investigative Tasks..

ÍNDICE

ÍNDICE DE QUADROS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

Ao meu pai e à minha mãe, por serem os meus pilares e a quem amo de todo o coração.

Ao Delfim, para que nunca desista dos seus sonhos,

por mais difícil que tudo lhe possa parecer.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados o objetivo e as questões de investigação do estudo, é discutida a pertinência do estudo com base nas orientações contemporâneas para a Educação e, em particular, para o ensino da Matemática e, por fim, é explanada a estrutura do presente relatório.

1.1. Objetivo e questões do estudo

A escolha do tema para a minha intervenção pedagógica – O ensino e a aprendizagem das Funções Trigonométricas através de tarefas exploratórias e investigativas: um estudo com alunos de 12.º ano de escolaridade – teve quatro razões fundamentais. Sem prejuízo de relevância pela ordem apresentada, explano-as sinteticamente a seguir.

O trabalho da minha intervenção pedagógica seria realizado numa turma do fim de ciclo, do ensino secundário. O programa é extenso e culmina com a realização do exame nacional que é uma preocupação para alunos, família e professores, tendo em conta o ónus que este tem nas futuras escolhas dos alunos. Pelas observações de contexto de sala de aula, percebi que, os alunos, voluntariamente, assumiam um papel passivo nas atividades promotoras da sua aprendizagem: limitando-se a ouvir, passar para o caderno os conceitos, esperar pelas resoluções das atividades, não se questionar e a resolver muitos exercícios de forma mecânica sem um 'olhar' crítico. Todo o raciocínio tem de conduzir a uma solução aprovada pelo professor ou pelas soluções do manual escolar. Como forma de contrariar este *status* na sala de aula, procurei encontrar uma estratégia sobre o processo de ensino e de aprendizagem com uma forte componente ligada à emoção, porque somente através da emoção e do usufruto é que conseguimos aprender (Mora, 2013; Sanjaume, 2016).

As tarefas de natureza problemática, quer numa vertente exploratória, quer numa vertente investigativa, mostram-se ser, pela sua estrutura e grau de desafio, propícias a causar nos alunos um estado de desequilíbrio emotivo próprio da aprendizagem (Sanjaume, 2016; Santos 1977). Segundo Ponte et al. (2003), este tipo de tarefas constituem "uma poderosa forma de construir conhecimento" (p. 10). Partindo deste pressuposto, propus-me integrá-las nas minhas estratégias de ensino como o principal objetivo de conduzir os alunos a 'fazer Matemática', construindo, assim, aprendizagens significativas e desenvolvendo uma atitude de interesse, espírito de iniciativa, criatividade e persistência (Martins et al., 2017).

Qualquer conteúdo programático favoreceria a implementação das tarefas supramencionadas. Escolhi a Trigonometria porque é um dos primeiros temas da Matemática que relaciona a Álgebra, a Geometria e o raciocínio gráfico, constituindo um pré-requisito para ramos de Engenharia, Arquitetura, Topologia e, ainda, para a compreensão da Física de Newton (Weber, 2005), o que permite uma abrangência temática favorável para a elaboração de tarefas e desafios. Para além destes aspetos, escolhi trabalhar no capítulo das Funções Trigonométricas pelo seu caráter abstrato e, ao mesmo tempo, com forte potencial de adaptação ao contexto real, permitindo uma abordagem tanto numa perspetiva de Matemática pura, como numa perspetiva de modelação da realidade (Ponte, 2005). O tema das Funções Trigonométricas mostrou-se, assim, ser apropriado para a construção de tarefas de natureza problemática, numa perspetiva de exploração e investigação, que desafiam o aluno a lidar com situações complexas, enfrentar dificuldades, tomar decisões, correr riscos e vivenciar momentos genuínos de descoberta (Ponte, 1992; Sousa & Salgado, 2015).

Não há dúvida que, para diferentes autores, o coração de um bom ensino da Matemática é a resolução de tarefas de natureza problemática – *problem solving* – sucintamente, denominada 'resolução de problemas'. É um facto que, diferentes autores, sub-categorizam a nominação de tais tarefas ou situações-problema. O NCTM (2007) orienta-nos que "a resolução de problemas implica o envolvimento numa tarefa, cujo método de resolução não é conhecido antecipadamente" (p. 51). E, neste ponto, vai mais longe, defendendo que alunos que se limitam a memorizar procedimentos sem os compreender, geralmente, têm dúvidas sobre como e quando os usar.

Enquanto aluna, fascinava-me o facto de uma ciência como a Matemática – exclusivamente criação da mente humana –, consiga tão perfeitamente explicar o mundo físico e, acima de tudo, não precisa dele para existir. Sempre senti que nenhuma outra ciência me dava o prazer da descoberta e a sensação de autossuperação que esta me dava. Não era divagação. O ilustre matemático e professor George Polya (1887-1985) escreveu que "O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas (...) então experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta" (Polya, 1995, p. v). Mais tarde, aquando dos estudos mais avançados, e já como estudante da Licenciatura em Matemática, percebi que havia a necessidade do progresso do pensamento matemático, ao que os meus professores chamavam de 'maturidade Matemática', fosse ela no âmbito da Matemática pura ou em diferentes aplicações.

As minhas preocupações com o ensino e a aprendizagem dos alunos que lecionei, iam para além do culminar do secundário e do exame nacional. Como futuros e iminentes alunos universitários, preocupei-me em procurar abordar uma tipologia de tarefas que, por um lado, acredito ser uma mais-valia para a aprendizagem dos conteúdos, e, por outro lado, tendo em conta a experiência pessoal, se aproximam daquilo que é esperado a um aluno do ensino superior e, mais tarde, o que será esperado no mundo do trabalho.

As orientações do currículo em vigor apontavam como fins: o desenvolvimento da capacidade de formular e resolver problemas; o desenvolvimento do espírito crítico e criativo; além de desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação do contexto real (MEC, 2018a). As metas curriculares assumem claramente cinco objetivos fundamentais do currículo de Matemática A, dos quais destaco dois: provar/demonstrar e justificar (MEC, 2014, 2021), o que mostra ser uma abordagem ainda mais teórica do ensino da Matemática ao nível do ensino secundário.

Dada a conjuntura, procurei averiguar as dificuldades que se fazem sentir no estudo e na aprendizagem dos tópicos que constituem o tema das Funções Trigonométricas. Da análise de alguns estudos, destaco duas conclusões: existe uma dificuldade por parte dos alunos em "Compreender e conceitualizar os objetos matemáticos em trigonometria" (Dionizio & Brandt, 2011, p. 4419) e que essas dificuldades devem-se sobretudo ao facto de a "Trigonometria ser uma área da Matemática que os alunos acreditam ser particularmente difícil e abstrata comparativamente a outros temas da Matemática" (Gur, 2009, p. 68). Os resultados apresentados por estes autores podem ajudar a compreender a postura dos alunos da turma onde desenvolvi a minha prática pedagógica no que se refere à Trigonometria. Da análise dos resultados dos alunos, na avaliação sumativa, no ano letivo anterior, referente ao tema da Trigonometria, constatei, entre outras evidências, que os resultados tinham como mediana sete valores, o que me levou a concluir que a maioria dos alunos da turma apresentava carências nesta temática. Por se tratar de um tema que os alunos tendem a manifestar dificuldades, propus-me então averiguar o contributo das tarefas exploratórias e investigativas na aprendizagem de alunos do 12.º ano do tema 'Funções Trigonométricas'. Na concretização deste objetivo, recolhi informação na minha prática pedagógica de modo a responder às seguintes questões de investigação:

- Que atividades desenvolvem os alunos na realização de tarefas de exploração e de tarefas de investigação na aprendizagem das Funções Trigonométricas?
- Que dificuldades revelam os alunos na realização de tarefas de exploração ou tarefas de investigação na aprendizagem das Funções Trigonométricas?
- Quais as perceções dos alunos sobre a realização de tarefas de exploração ou de investigação na aprendizagem das Funções Trigonométricas?

1.2. Pertinência do Estudo

O mundo contemporâneo traz novos desafios à Educação (Martins et al., 2017). Os acelerados avanços científicos e tecnológicos que vivemos a uma escala global estão a provocar uma transformação social sem precedentes (Beard, 2018). Nunca antes foi tão importante munir os jovens de competências fortemente conectadas à adaptação à mudança e à imprevisibilidade do futuro próximo e a longo prazo. Não basta, deste modo, à Educação "apenas preparar os indivíduos para o mercado de trabalho, mas também preparar para enfrentar as incertezas do mundo e para a própria condição de ser cidadão responsável e consciente da sua condição terrena" (Regert et al., 2018, p. 29). Para assegurar uma Educação de qualidade, que proporcione uma igualdade de acesso de oportunidades e de sucesso educativo, atualmente, a Educação deve proporcionar aos alunos desta geração global a possibilidade de se construírem e sedimentarem dentro de uma cultura científica e artística de base humanista (Martins et al., 2017). São várias as Instituições Educativas que têm procurado estabelecer orientações para a 'Educação para o séc. XXI' (Voogt & Roblin, 2012). É de concordância geral a necessidade de trabalhar competências como o pensamento crítico e criativo, a capacidade de resolver problemas, a cooperação, a autonomia, a adaptabilidade e flexibilidade de pensamento e a capacidade de aprender a aprender. São, ainda, considerados temas centrais a Matemática, as Ciências, a História e as Artes (Martins et al., 2017; Voogt & Roblin, 2012).

Foquei, portanto, a minha prática pedagógica no 'pensar' e 'fazer' Matemática. Desafiando os alunos a investigarem, no sentido de os incentivar a não aceitarem à partida tudo o que lhes é dito, questionarem e serem persistentes, uma vez que "aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza Matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino)" (Braumann, 2002, p. 5). A investigação, em contexto de sala de aula, fomenta não só uma aprendizagem persistente da Matemática (Ponte, 2005), como também o desenvolvimento de muitas das competências-chave a trabalhar para o séc. XXI.

O NCTM (2007) defende que o professor deve proporcionar e dar oportunidade aos alunos de aprenderem conteúdos importantes do currículo através da exploração, dar-lhes espaço para que apresentem soluções originais na procura de resoluções de situações problema. Orienta-nos, também, que "os professores deverão esperar que os alunos procurem, formulem e critiquem explicações, de modo que as turmas se tornem comunidades de questionamento" (NCTM, 2007, p. 408).

Como futura professora de Matemática de alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário, considero importante potenciar um ensino de modo a que a aprendizagem seja universal, que seja frutífero no desenvolvimento de competências académicas, sociais e humanistas. Escolhi, por isso, estudar de que forma as tarefas de exploração ou de investigação contribuem para estes fins.

Para incentivar o interesse dos alunos, propus tarefas de exploração ou investigação dos mais diversificados temas. A título de exemplo, desde procurar uma aproximação ao número Pi até modelar as marés e o comprimento dos dias em Portugal ou discutir as transformações dos gráficos das famílias das funções seno e cosseno, procurando de que forma a variação de parâmetros nos ajuda a compreender características como domínio, contradomínio, monotonia, extremos e periodicidade. Foram usados vários recursos tecnológicos, tais como computadores e calculadoras gráficas, bem como materiais manipuláveis. Os alunos foram desafiados a interpretar a situação problema, a explorarem possibilidades de abordagem ao problema, discutirem em grupo, em alguns casos criar modelos e interpretá-los, em outros casos procederem à elaboração de conjeturas, argumentação e prova.

1.3. Organização do relatório

Este relatório está organizado em cinco capítulos. No primeiro – *Introdução* – é abordado o tema, os objetivos e as questões de investigação. É, também, neste capítulo, justificada a pertinência do estudo à luz das orientações atuais para o ensino da Matemática e é apresentada a estrutura do relatório.

No segundo capítulo é feito o enquadramento teórico que sustenta a base teórica deste estudo. Está dividido em seis subcapítulos. Inicio o enquadramento teórico com o subcapítulo – *Trigonometria: Breve visão sobre a História* – onde faço uma reflexão sobre a história da Trigonometria ao longo dos séculos, desde a sua aplicação pelos egípcios e babilónios, passando pelo estudo dos contributos dos matemáticos da Grécia Antiga, dos avanços e utilidades com os matemáticos Árabes e Hindus e dos enormes progressos da Trigonometria às mãos dos matemáticos Europeus do séc. XV ao séc. XVIII, até à atualidade. No segundo subcapítulo – *Trigonometria no Currículo Escolar* – analiso as orientações do currículo de ensino básico e secundário sobre a Trigonometria e as Funções Trigonométricas, com um principal foco nas orientações para o 11.º e 12.º anos de escolaridade, estabelecendo uma comparação entre as orientações do currículo atuais e do programa anterior, numa procura de compreender o desenvolvimento do currículo nos últimos anos sobre a Trigonometria e as Funções Trigonométricas. O terceiro subcapítulo – *Competências-chave para o séc. XXI* – dediquei ao estudo das orientações contemporâneas, internacionais e nacionais, para as competências a trabalhar durante a próxima década. Neste subcapítulo são explanadas as orientações de instituições como a OCDE, a UNESCO, a Comissão Europeia para a Educação e analisado o documento nacional referência 'O Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória'. O quarto subcapítulo – *Características das Tarefas* – é dedicado à caracterização da tipologia de tarefas por quatro autores, nomeadamente, Gojak, Swan, Schoenfeld e Ponte. Apresento as diferentes visões sobre a resolução de problemas e taxonomias adotadas para as tarefas, realçando a importância das tarefas de exploração ou de investigação no processo de ensino e aprendizagem. Neste subcapítulo é, ainda, discutida a pertinência do uso de diferentes tipologias de tarefa na aprendizagem da Matemática e a importância do desafio ao aluno a fazer Matemática. No quinto subcapítulo – *Investigar para aprender Matemática* – é discutida a relevância da investigação em contexto de sala de aula para a aprendizagem da Matemática, bem como as diferentes fases que constituem uma aula de carácter exploratório ou investigativo e as diferentes fases que constituem uma investigação matemática. O sexto subcapítulo – *Estudos empíricos sobres tarefas de estrutura aberta e Funções Trigonométricas* – é dedicado à análise de dificuldades dos alunos na realização de tarefas de exploração ou de investigação e no estudo do tópico das Funções Trigonométricas.

O terceiro capítulo é dedicado ao enquadramento contextual do estudo e está dividido em três subcapítulos. No primeiro - *Caracterização da Escola* – faço uma breve análise da escola onde foi inserido este estudo. No segundo subcapítulo – *Caracterização da Turma* – analiso a população do estudo deste trabalho. O terceiro subcapítulo – *Plano Geral de Interve*nção – apresento as metodologias de ensino e aprendizagem usadas durante a intervenção pedagógica e as estratégias de investigação e avaliação da ação pedagógica.

O quarto capítulo – *Intervenção Pedagógica* – está dividido em seis subcapítulos. No primeiro subcapítulo – *Síntese da Intervenção Pedagógica* – apresento um resumo do plano da intervenção, enumerando as tarefas utilizadas. No segundo – *Manual Escolar* – faço uma análise do manual escolar adotado pela escola. O terceiro, quarto e quinto subcapítulos são dedicados à análise de três aulas e dos processos matemáticos usados pelos alunos na realização de tarefas de exploração e de investigação. O sexto e último subcapítulo – *Perceção dos Alunos Após a Intervenção Pedagógica* – analiso as opiniões dos alunos quanto à realização das tarefas de exploração ou de investigação no processo de ensino e aprendizagem do tema das Funções Trigonométricas, bem como os contributos, na sua perspetiva, para o desenvolvimento de competências.

No quinto capítulo – *Conclusões, Limitações e Recomendações* – são apresentadas as conclusões deste estudo, como objetivo de responder às questões de investigação. É feita uma reflexão sobre as limitações do estudo e facultadas algumas recomendações que resultam da experiência desta intervenção para futuras intervenções pedagógicas neste contexto.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo discute-se, à luz da literatura existente, a fundamentação teórica deste estudo. Faz parte da exposição uma breve visão sobre a História da Trigonometria, desde a antiguidade até à atualidade; uma análise sobre as orientações do currículo, no que refere ao estudo das Funções Trigonométricas; uma observação sobre as orientações, nacionais e internacionais, das competências-chave a trabalhar para o séc. XXI; um estudo sobre diferentes tipologias de tarefas e as suas diretrizes; uma reflexão sobre a investigação no processo de ensino e aprendizagem da Matemática; e, por último, uma discussão sobre as dificuldades dos alunos na realização de tarefas de estrutura aberta e no estudo do tópico das Funções Trigonométricas.

2.1. Trigonometria: breve visão sobre a história

Falar da História da Matemática ou do Pensamento Matemático é falar da História da Humanidade. Passadas seiscentas gerações desde que os humanos deixaram de ser caçadores-recolectores, apenas há trezentas que a humanidade se tornou histórica, aquela que deixa escritos, opondo-se à humanidade arqueológica, aquela que deixa apenas artefactos (Wootton, 2017). Sensivelmente há seis mil anos que foi inventada a escrita e, consequentemente, aparecem os primeiros registos escritos de Matemática. Desde então, os progressos científicos foram notáveis.

As origens da Trigonometria são incertas. Acredita-se que os Babilónios e os Egípcios já utilizavam conhecimentos ligados à Trigonometria, pelos seus cálculos de razões entre lados de triângulos semelhantes (Costa, 2003). Os Egípcios, exímios construtores, usaram conhecimentos trigonométricos na construção das suas famosas pirâmides, o que "pode ser observado no Papiro Ahmes, conhecido como Papiro Rhind, que data de aproximadamente 1650 a.C., e contém 84 problemas, dos quais quatro fazem menção ao seqt de um ângulo" (Costa, 2003, p. 60). Já os Babilónios, assim como os Egípcios, os Gregos, os Hindus e os Árabes, na procura da compreensão do Universo, encontraram na Trigonometria uma importante ferramenta para os estudos dos seus mistérios (Oliveira, 2010).

> Das 500.000 tábuas encontradas, cerca de 400 tábuas e fragmentos relacionados à Matemática foram encontrados copiados, traduzidos e explicados. Muitas dessas tábuas auxiliavam nas medições e nos resultados dos cálculos efetuados pelos astrônomos babilónios e também já revelavam algumas semelhanças com as tábuas trigonométricas. (Oliveira, 2010, p. 6)

No entanto, foram os Gregos, como em muita Matemática criada na antiguidade, que possibilitaram a perpetuação do conhecimento da época. Foi Hipparkhos (180-125 a.C), no séc II a.C., que surgiu com a primeira tabela para a Trigonometria, uma tabela de cordas, "o qual associou a corda de um arco ao ângulo central correspondente em um círculo de raio fixo" (Oliveira, 2010, p. 17). Contudo, foi a Ptolomeu (90-168) que coube o trabalho de uma das mais influentes e importantes obras da Matemática da Antiguidade, o célebre *Almagesto*, onde criou uma tabela de cordas mais completa do que a de Hipparkhos. Mais do que a tabela das cordas, Ptolomeu desenvolveu o estudo da Trigonometria, explicando como construir a tabela (Costa, 2003). Obviamente, não existia o conceito de função, mas descrevia-se a corda de arco x, "como sendo o comprimento da corda que corresponde a um arco de x graus em um círculo cujo raio é 60" (Costa, 2003, p. 7). Na verdade, o *Almagesto* contém teoremas que correspondem à nossa atual Lei dos Senos (Adamek et al., 2005).

Séculos mais tarde, baseados nos estudos de Hipparkhos e Ptolomeu, os astrónomos da Índia revolucionaram a compreensão sobre a relação entre o que atualmente chamamos seno e o comprimento das cordas, estabelecendo uma correspondência entre "a metade da corda de um círculo e a metade do ângulo central subentendido. Diferentemente de Ptolomeu, que para realizar seus cálculos, estabelecia uma relação entre o comprimento da corda de um círculo e o ângulo central subtendido" (Oliveira, 2010, p. 45). Uma das mais antigas tabelas dos senos e o primeiro trabalho que se refere declaradamente ao seno como uma função sobre um ângulo é *Aryabhatiya*, escrito pelo hindu Aryabhata no ano 500 d. C. Estas ideias chegaram à Europa pelos Árabes, que muito contribuíram para o seu aperfeiçoamento. Por volta do séc. X d.C., baseados nos estudos dos seus antecessores, Albattani (850-929) construiu a *tabela das sombras*, "essencialmente uma tabela de cotangentes para cada grau de 1° a 90°" (Oliveira, 2010, p. 48), embora não lhe atribuísse essa denominação. Anos mais tarde, Abu'l-Wefa (940-998) construiu uma tabela dos senos, com aproximações de rigor notável. Foi também ele que "usou as seis razões trigonométricas comuns, como também estabeleceu relações entre elas" (Oliveira, 2010, p. 49).

Só no séc. XV, a Trigonometria, sob a alçada dos matemáticos europeus, desassociou-se da sua faceta geométrica nos estudos da Astronomia, passando a ser um objeto em si mesma, desenvolvendo-se em torno de uma Trigonometria mais analítica. Foi Regiomontanus (1496-1476) quem escreveu o «*Tratado sobre Triângulos*», a obra mais completa de Trigonometria até à data. A partir deste trabalho, "A trigonometria foi definida como uma ciência independente da Astronomia" (Oliveira, 2010, p. 51). Um século depois, Georg Rhaeticus (1514-1576) escreve «*Canon Doctrinae Triangulorum*», uma obra onde as razões trigonométricas são pela primeira vez expressas em função do ângulo em vez de em função do arco. O tratamento analítico veio com François Viète (1540-1603), que "foi o primeiro matemático a usar letras para representar coeficientes gerais" (Costa, 2003, p. 14), num claro contributo para o progresso da Álgebra.

Somam-se os nomes dos que contribuíram para o desenvolvimento dos estudos da Trigonometria. Newton (1642-1727) também deu o seu contributo à Trigonometria, exercendo grande influência com o seu trabalho sobre séries infinitas, inferindo as séries infinitas do $\arcsin x$ e do $\sin x$ (Oliveira, 2010). Além disso, "comunicou a Leibniz a fórmula geral para $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$ tendo, com isso, aberto a perspetiva para o $\sin(x)$ e o $\cos(x)$ surgirem como números e não como grandezas" (Costa, 2003, p. 15).

Na perspetiva da Matemática em geral, Leibniz (1646-1716) foi o primeiro a introduzir o conceito de função, definiu em termos gerais, "(...) a dependência de uma curva de quantidades geométricas como as subtangentes e subnormais. Introduziu a terminologia de 'constante', 'variável' e 'parâmetro'" (Ponte, 1990, p. 3).

Em meados do séc. XVIII, Kastner (1719-1800) definiu pela primeira vez as Funções Trigonométricas de números reais. O $\sin x$ e $\cos x$ deixaram assim de ser grandezas e tornaram-se números (Oliveira, 2010).

A Trigonometria assume a sua notação atual com Euler (1707-1783), quando tomou a medida de um raio como unidade e definiu as Funções Trigonométricas aplicadas a números reais, em vez de a ângulos.

> A função de Euler permitiu que a Análise Matemática e diversas aplicações às ciências físicas abrissem as portas para a Trigonometria, tanto que Euler escreveu um livro chamado 'Introductio in Analysin Infinitorum' considerado a obra chave da Análise Matemática, o qual deu um tratamento às Funções Trigonométricas do ponto de vista analítico. (Oliveira, 2010, p. 54)

Foi também Euler que exprimiu um número complexo através das funções seno e cosseno, chegando à célebre relação $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, aleando a Trigonometria à Teoria dos Números Complexos.

O contexto social vivido na Europa após o Renascimento, a criação da imprensa nos meados do séc. XV, a descrença do obscurantismo religioso e a necessidade da procura pelo conhecimento científico, em muito contribuíram para a procura do desenvolvimento da Matemática em geral, para a sua disseminação e perpetuação. É um facto, o nosso estilo de vida contemporânea depende tão severamente da Trigonometria e das Funções Trigonométricas que, mesmo sendo-se leigo na arte de ler e criar Matemática, qualquer pessoa sentiria a sua ausência. Desde o mais simples, como calcular medidas inacessíveis, projetar edificações ou medir altitudes, passando pelas modelações para prever fenómenos periódicos, como o movimento dos planetas, o movimento das marés ou comprimentos do dia. Ouvir música em qualquer lugar e a todos os momentos não seria uma possibilidade, já que o som é escrito através das suas propriedades periódicas. Assim como a música, qualquer transmissão de sinal depende das Funções Trigonométricas. Sem elas não existiriam telefones, ou rádio, ou radares ou até mesmo *internet*. Sem conhecimentos como as coordenadas polares, não teríamos o prezado sistema posicional global – *GPS* (Stewart, 2006). Na verdade, poderíamos fazer uma lista desmedida de onde e para quê precisamos das Funções Trigonométricas. Certo é que, sem elas, viveríamos numa realidade alternativa.

2.2. Trigonometria no currículo escolar

A Matemática é uma disciplina rica de conteúdos, num mundo em constante mudança. Sempre atual e basilar. Abrange conceitos tão distintos como os que se usam no dia a dia ou em muitas profissões de áreas tecnológicas e científicas e, ao mesmo tempo, tem gerado contribuições fundamentais no avanço tecnológico e no conhecimento humano em toda a sua história (MEC, 2014; 2018).

O porquê de ensinar Matemática pode ter múltiplas respostas. Garcia e Clotilde (2005) apresentam-nos sete razões: (1) Dá oportunidade aos jovens de competir no mercado de trabalho; (2) É um crivo social; (3) É património da humanidade; (4) Desenvolve o pensamento lógico; (5) Auxilia na resolução de problemas; (6) É útil na vida social; (7) É usada para determinar os rumos da economia e da política. Já Stewart (2006) resume a ideia do 'porquê ensinar Matemática' numa frase: "a nossa sociedade consome imensa Matemática" (p. 16). Segundo o autor, se colocássemos uma etiqueta 'contém Matemática' em tudo que ela estivesse presente, teríamos o planeta, quase por completo, etiquetado. Ensinar Matemática e, em particular, ensinar Trigonometria constitui a passagem de testemunho de uma ferramenta profícua e poderosa.

Em Portugal, a Trigonometria é parte integrante dessa passagem de testemunho. Ela torna-se parte da vida do aluno ainda no fim do 3.º Ciclo, quando no 9.º ano de escolaridade se estuda a definição das razões trigonométricas no triângulo retângulo. No fim do 3.º Ciclo do Ensino Básico, o aluno deve ser capaz de: (1) definir o seno, o cosseno e a tangente de um dado ângulo agudo de um triângulo retângulo; (2) compreender que triângulos semelhantes instituem as mesmas razões trigonométricas; (3) aplicar relações trigonométricas elementares; (5) determinar as razões trigonométricas dos ângulos 30°, 45° e 60°, através de argumentos geométricos (MEC, 2021b). No que diz respeito à resolução de problemas, ao nível da Trigonometria, os alunos devem resolver problemas na determinação de distâncias, quer com os ângulos cujas razões estão tabeladas, quer com qualquer ângulo agudo. Bem como, resolver problemas que traduzam o uso das razões trigonométricas na determinação de distâncias inacessíveis (MEC, 2021b).

O ensino da Trigonometria estende-se e aprofunda-se durante o Ensino Secundário, nos 11.º e 12.º anos. A Trigonometria, e as Funções Trigonométricas, é e tem sido, um tema de estudo para grande parte de todo o programa, especialmente durante o secundário. Perante as orientações do currículo, o estudo das Funções Trigonométricas abrange, atualmente, 12% das aulas previstas de todo o secundário, aumenta para cerca de 16% das aulas onde são abordados conteúdos de trigonometria. Se reduzirmos a nossa análise aos 11.º e 12.º anos, 18% das aulas são dedicadas às Funções Trigonométricas, aumentando para cerca 24% se adicionarmos as aulas que abordam conteúdos relacionados com a Trigonometria. À data da implementação do meu projeto, o currículo em vigor previa que cerca de 31% das aulas de 11.º fossem dedicadas ao estudo das Funções Trigonométricas e 14% no 12.º ano, totalizando cerca de 16% das aulas de secundário fossem legadas às Funções Trigonométricas, aumentando para cerca de 23% das aulas se incluirmos aquelas em que são abordados conteúdos ao nível de Trigonometria. No entanto, não nos podemos deixar enganar pelas frequências relativas. Os conteúdos abordados sobre as Funções Trigonométricas no programa atual não diminuíram, muito pelo contrário. O programa atual recomenda que no 11.º ano o estudo da trigonometria e das Funções Trigonométricas consagre o estabelecimento da definição para o seno e o cosseno de qualquer ângulo convexo, agudo ou obtuso, através da Lei dos Senos e do Teorema de Carnot. Aborda-se o estudo dos ângulos orientados e generalizados e generalizam-se as razões trigonométricas a qualquer número real, introduzindo-se o círculo trigonométrico. Depois de definir o radiano, estabelecem-se as definições das funções reais de variável real seno, cosseno e tangente, acrescendo o estudo das suas propriedades (MEC, 2014, 2021a). No 12.º ano, no seguimento do estudo, é proposto estabelecer as fórmulas do cosseno, do seno e tangente da soma e da subtração de ângulos e o caso particular da duplicação de ângulos. Grande parte do capítulo é dedicado ao cálculo das derivadas e, também por isso, ao cálculo de limites e levantamento de indeterminações. Além disso, o Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário de 2014 estabelece o cálculo das derivadas como oportunidade ideal "para se introduzir o estudo dos osciladores harmónicos, (...) verificando-se que, em particular, uma tal equação pode ser deduzida da Lei de Hooke, desde que se admita a Relação Fundamental da Dinâmica (...)" (MEC, 2014, p. 21). As orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática A de 2021 vem determinar estas últimas de estudo facultativas.

De seguida, passarei a resumir e a comparar *infra*, no Quadro 1, os conteúdos conceptuais estipulados para o 11.º e 12.º anos entre o programa de Matemática A do Ensino Secundário vigente e o programa de Matemática A anterior, com intuito de avaliar as modificações do ensino no que se refere ao estudo das funções trigonométricas nos últimos anos, em Portugal.

Quadro 1: Conteúdos programáticos de Trigonometria e Funções Trigonométricas no 11.º e 12.º anos – comparação das orientações dos currículos de 2002 a 2021

11º ano	
Programa 2002 **Geometria no plano e no espaço II**	**Programa 2014 e orientações 2021** **Trigonometria e Funções Trigonométricas**
▪ Trigonometria no triângulo retângulo - Resolução de triângulos - Razões trigonométricas dos ângulos 30°, 45° e 60° ▪ Ângulo e arco generalizado - O radiano; - Expressão geral das amplitudes dos ângulos com os mesmos lados, em graus e radianos. ▪ Funções seno, cosseno e tangente - Definição das razões trigonométricas no círculo trigonométrico; - Relação entre as razões trigonométricas de $\alpha,\ -\alpha,\ \pi \pm \alpha,$ $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ e $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$; - Definição das funções seno, cosseno e tangente; - Estudo da variação e do sinal das funções seno, cosseno e tangente - Estudo da periodicidade das funções seno, cosseno e tangente. ▪ Relações entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo - $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ - $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ - $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ ▪ Resolver equações trigonométricas ▪ Dedução das fórmulas trigonométricas $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$ e $\tan(\alpha \pm \beta)$	▪ Extensão da Trigonometria a ângulos retos e obtusos e resolução de triângulos - Lei dos Senos e Lei dos Cossenos; ▪ Ângulos orientados e ângulos generalizados; ▪ Razões trigonométricas - Círculo trigonométrico; - Generalização das definições das razões trigonométricas aos ângulos orientados e generalizados; - Medidas de amplitude em radianos. ▪ Funções Trigonométricas - As funções reais de variável real seno, cosseno e tangente: domínios, contradomínios, zeros, periodicidade, paridade e extremos locais; - "Redução ao 1.º quadrante": seno e cosseno de $x \pm \frac{\pi}{2}$ e de $x \pm \pi$; $x \in \mathbb{R}$. - Generalização da fórmula fundamental da Trigonometria; - Equações do tipo e $\sin x = k$, $\cos x = k$ e $\tan x = k$; - Inequações trigonométricas com domínio num intervalo limitado; - Funções Trigonométricas inversas; - Resolução de problemas envolvendo razões trigonométricas e a determinação de distâncias; - Resolução de problemas envolvendo Funções Trigonométricas.
12º ano	
Programa 2002 **Trigonometria e Números complexos**	**Programa 2014 e orientações 2021** **Trigonometria e Funções Trigonométricas**
▪ Funções seno, cosseno e tangente - Estudo intuitivo com base no círculo trigonométrico; - Estudo intuitivo a partir de um gráfico ou usando calculadora gráfica ou computador; - Estudo do domínio, contradomínio, período, pontos notáveis, monotonia, extremos, assintotas e simetrias; - Estudo dos efeitos da variação de parâmetros; - Resolução de equações. Estudo intuitivo de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ - Levantamento de indeterminações ▪ Cálculo das derivadas de seno, cosseno e tangente ▪ Utilização de Funções Trigonométricas na modelação de situações reais	▪ Definição de Funções Trigonométricas - Fórmulas trigonométricas da soma, da diferença e da duplicação; - Limite notável $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$; - Diferenciabilidade das funções seno, cosseno e tangente; - Resolução de problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de Funções Trigonométricas. ▪ Aplicações aos osciladores harmónicos - Osciladores harmónicos: amplitude, pulsação, período, frequência e fase (considerado facultativo); - Estudo das funções definidas analiticamente por $a\sin(bx + c) + d$, $a\cos(bx + c) + d$, $a\tan(bx + c) + d$, $(a \neq 0)$ - Os osciladores harmónicos como soluções de equações diferenciais da forma $f'' = -\omega^2 f$; relação com a segunda lei de Newton e com a lei de Hooke (considerado facultativo); - Resolução de problemas envolvendo osciladores harmónicos (considerado facultativo).

Pela análise do quadro, verifica-se que nenhum conteúdo ao nível conceptual previsto no programa de 2002 desaparece no programa vigente. Repare-se que, além do que já era estudado, foram introduzidas a Lei dos Senos e o Teorema de Carnot, o estudo dos osciladores harmónicos e a sua aplicação à segunda Lei de Newton, tornando-se estudo dos dois últimos facultativos nas novas orientações de 2021, adicionando ainda o cálculo de primitivas das Funções Trigonométricas seno e cosseno, no tema das Primitivas. No entanto, em qualquer um dos programas se percebe o ónus que o estudo das Funções Trigonométricas teve e continua a ter no currículo nacional.

2.3. Competências-chave para o séc. XXI

Até à atualidade houve aquilo a que podemos chamar de três grandes revoluções na forma como aprendemos (Beard, 2018). A primeira foi cognitiva. Há cerca de cem mil anos, alguma coisa mudou nos nossos cérebros e a linguagem emergiu. Passamos, assim, a poder partilhar ideias e passar testemunho cognitivo entre gerações. Há, mais ou menos, seis mil anos surgiu a revolução escolar. Simultaneamente, na China Antiga e na Antiga Mesopotâmia surgem as primeiras escolas, onde se ensinava as novas ciências de ler e escrever. Há cerca de quinhentos anos, emergiu a revolução Educativa de Massas, com a invenção da imprensa e a abertura religiosa. A conjuntura tecnológica, cultural e social trouxe uma explosão de literacia pelo mundo. Hoje, vivemos o potencial da eminência de uma quarta revolução na aprendizagem (Beard, 2018). Esta corrente de pensamento vai ao encontro da teoria da 'Curva da Duplicação do Conhecimento' de Buckminster Fuller (1917-1983), que considerou uma estimativa de todo o conhecimento humano acumulado no ano 1 d.C. como unidade, criando o que se pode chamar de 'uma unidade de conhecimento' (Fuller, 1982). Esta unidade de conhecimento viria a duplicar-se 1500 anos depois, durante o séc. XVI, e chegaria às quatro unidades de conhecimento 250 anos mais tarde, nos meados do séc. XVIII. As oito unidades de conhecimento alcançar-se-iam 150 anos depois. Fuller conclui que os períodos necessários para haver duplicação de conhecimento acumulado tornar-se-iam cada vez mais curtos. No início do séc. XX, a duplicação de conhecimento dava-se a uma taxa de crescimento de cem anos, passando a cada vinte e cinco anos em menos de meio século (Fuller, 1982). Atualmente, embora esta análise não possa ser feita de forma linear, uma vez que diferentes tipos de conhecimento têm taxas de crescimento diferentes, estima-se que, por exemplo, o conhecimento na área da nanotecnologia duplica a cada dezoito meses (Cannon & Geddes, 2019; Schilling, 2013). Segundo a *International Business Machines Corporation*, a duplicação de conhecimento dar-se-á, em breve, a cada doze horas (Cannon & Geddes, 2019).

Os avanços tecnológicos têm permitido, à ciência, mostrar que cada indivíduo nasceu, literalmente, para aprender (Beard, 2018). As nossas mentes são aparelhos de aprendizagem mais poderosos do que qualquer computador que alguma vez foi inventado. Para prosperarmos no nosso, irrevogável, futuro digital, precisamos aprender a ter proficiência sobre as nossas tecnologias, investindo tudo que temos no *upgrading* das nossas mentes (Beard, 2018).

O contexto atual reforça a importância de uma Educação Criativa intencional, principalmente no âmbito escolar (Azevedo et al., 2017). O ensino e aprendizagem num todo e, em particular, o ensino e aprendizagem da Matemática, torna-se, portanto, muito mais do que partilha de conhecimento de técnicas entre professor e aluno. Muitas organizações têm procurado estabelecer e promover a integração no currículo escolar medidas que orientem para o desenvolvimento das competências-chave do século XXI (Voogt & Roblin, 2012). Com base nas avaliações do PISA, a OCDE (2016) defende a necessidade do desenvolvimento da 'competência global', que define como o apropriar da compreensão de questões globais e interculturais. Estabeleceu, dessa forma, uma estrutura conceptual para as competências a trabalhar no Ensino Secundário para 2030, definindo três dimensões: conhecimento (conhecimento disciplinar, conhecimento interdisciplinar e conhecimento prático); habilidades (cognitivas e metacognitivas, sociais e emocionais, físicas e práticas); e atitudes e valores.

Voogt e Roblin (2012) reuniram trinta e dois documentos de estudos e orientações para a 'Educação para o século XXI' de oito organizações internacionais, entre as quais se destacam a UNESCO, a OCDE e a Comissão Europeia para a Educação. Neste estudo, os autores concluíram que todas as organizações apontam como competências-chave para o século XXI a literacia TIC, a colaboração, a comunicação e as habilidades sociais e/ou culturais e a cidadania. A maioria aponta também o pensamento crítico, a criatividade e a resolução de problemas. São ainda de referência a autonomia, a adaptabilidade e flexibilidade, o planeamento, aprender a aprender e apontam como temas centrais, a Matemática, a comunicação na língua materna, as Ciências, a História e as Artes (Voogt & Roblin, 2012).

O Conselho da União Europeia para a Educação, acerca das competências essenciais para a aprendizagem ao longo da vida, elaborou um quadro de referência que estabelece oito competências essenciais: (1) Competências de literacia; (2) Competências multilingues; (3) Competências Matemáticas e no domínio das ciências, da engenharia e da tecnologia; (4) Competências digitais; (5) Competências de empreendedorismo; (6) Competências de cidadania; (7) Competências pessoais, sociais e capacidade de 'aprender a aprender'; e (8) Competências de sensibilidade e expressão cultural. O mesmo ainda esclarece que "as competências como o espírito crítico, a resolução de problemas, o trabalho em equipa, a capacidade de comunicação e negociação, as capacidades analíticas, a criatividade e as competências interculturais encontram-se presentes em todo o espetro das competências essenciais" (Conselho da UE, 2018, p. C 189/7). Como membro da União Europeia desde 1986, Portugal tem seguido as orientações europeias para a Educação. O Ministério da Educação homologou no Despacho n.º 6478/2017, 26 de julho, o documento 'O Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória'. Este documento garante que,

> A referência a um perfil não visa, porém, qualquer tentativa uniformizadora, mas sim criar um quadro de referência que pressuponha a liberdade, a responsabilidade, a valorização do trabalho, a consciência de si próprio, a inserção familiar e comunitária e a participação na sociedade que nos rodeia (Martins et al., 2017, p. 5),

e estabelece, através de um esquema conceptual os Princípios, as Áreas de Competência e os Valores (Martins, et al., 2017, p. 12) (Quadro 2):

Quadro 2: Esquema conceptual do 'Perfil dos Alunos à Saída da escolaridade Obrigatória'

Princípios	**Áreas de Competência**	**Valores**
- Aprendizagem; - Inclusão; - Estabilidade; - Adaptabilidade e ousadia; - Coerência e flexibilidade; - Sustentabilidade; - Base Humanista; - Saber.	- Pensamento Crítico e Criativo; - Raciocínio e Resolução de Problemas; - Saber científico técnico e tecnológico; - Desenvolvimento pessoal e autonomia.	- Responsabilidade e integridade; - Curiosidade, reflexão e inovação; - Excelência e exigência; - Liberdade; - Cidadania e Participação.

O guia advoga que, os alunos, no desenvolvimento das competências na área do pensamento crítico e criativo, devem ser capazes de observar, identificar, analisar informação, ideias ou experiências, argumentar, desenhar algoritmos,

> Pensar de modo abrangente e em profundidade, de forma lógica (...); convocar diferentes conhecimentos, de matriz científica e humanística, utilizando diferentes metodologias e ferramentas para pensarem criticamente; prever e avaliar o impacto das suas decisões; desenvolver novas ideias e soluções, de forma imaginativa e inovadora, como resultado da interação com outros ou da reflexão pessoal (...). (Martins et al., 2017, p. 24)

O desenvolvimento das competências na área do raciocínio e resolução de problemas acarreta que os alunos sejam capazes de interpretar informação e produzir conhecimento, encontrar respostas para novas situações e através do raciocínio tomar decisões. No documento pode ler-se que os alunos devem ser capazes de "interpretar informação, planear e conduzir pesquisas; gerir projetos e tomar decisões para resolver problemas; desenvolver processos conducentes à construção de produtos e de conhecimento, usando recursos diversificados" (Martins et al., 2017, p. 23).

Sobre a autonomia e o desenvolvimento pessoal, procura-se que os alunos desenvolvam "confiança em si próprios, motivação para aprender, autorregulação, espírito de iniciativa e tomada de decisões fundamentadas, aprendendo a integrar pensamento, emoção e comportamento, para uma autonomia crescente" (Martins et al., 2017, p. 26). Espera-se que os alunos, no fim da escolaridade obrigatória, sejam também capazes de compreender procedimentos e fenómenos científicos, colocarem questões, pesquisarem por informação e aplicarem os conhecimentos adquiridos nas tomadas de decisão (Martins et al., 2017).

As orientações do 'Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória', a par das 'Aprendizagens Essenciais' de 2018, são a coluna vertebral das orientações curriculares para o ensino da Matemática no momento atual. O 'Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória' é considerado um "documento de referência para a organização de todo o sistema educativo, contribuindo para a convergência e para a articulação das decisões inerentes às várias dimensões do desenvolvimento curricular" (Horta, 2019, p. 1). Em resposta às orientações em discussão, Figueiral (2016), presidente da Associação de Professores de Matemática, esclarece que o ensino secundário é obrigatório, mas diferenciado, "com valências múltiplas e não mutuamente exclusivas" (p. 1). Sobre a Matemática, considera que não se trata de discutir conteúdos, mas sim, as finalidades e objetivos. Refere ainda que:

> O grande contributo da Matemática na formação das crianças e jovens, para além dos conteúdos fortes e de grande aplicabilidade em todas as áreas científicas e tecnológicas, sociais e humanas, económicas, ambientais, estéticas, é o desenvolvimento de capacidades como, a de formular e resolver problemas, a de comunicar e raciocinar em Matemática, a da memória, bem como o desenvolvimento do rigor, do espírito crítico e da criatividade. (Figueiral, 2016, p. 3).

Da análise dos programas, percebe-se que estabelecem como finalidade a aplicação da Matemática ao contexto real. No entanto, o programa vigente mostra-se mais centrado em torno de uma Matemática focada em si própria. A Associação de Professores de Matemática (2013), numa apreciação ao novo programa de Matemática A, salienta que este tem um "excesso de formalismo e abstração, juntamente com a grande extensão da lista de conteúdos matemáticos e tímidas referências à utilização de tecnologias" (APM, 2013, p. 3). Figueiral (2016) alerta para o perigo da faceta que o programa de 2014 dá à resolução de problemas: deixam de ser uma finalidade e passando a ser um método. Refere que a 'resolução de problemas' converte-se "em meros exercícios de aplicação da matéria dada, com número de passos previamente definidos" (Figueiral, 2016, p. 4).

Por levantar muitas questões e ter havido a "sinalização de vários problemas por parte das Escolas e dos Professores" (MEC, 2021a, p. 2), o Ministério da Educação e Ciência revoga no despacho 6605-A/2021, de 6 de julho, o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Secundário de 2014, publicando aquilo que deu por nome de 'Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas

Curriculares de Matemática A', que se rege pelo 'Programa e Metas Curriculares de Matemática do Secundário' de 2014, em vigor desde o ano letivo 2015/2016. Este documento não vem, portanto, substituir, mas, trazer orientações de leitura e análise do 'Programa e Metas Curriculares de Matemática do Secundário'. A par com as 'Aprendizagens Essenciais' e 'O Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória' constituem o quarteto de referência do currículo atual para o ensino de Matemática.

No que refere às orientações do Programa de Matemática A do Ensino Secundário sintetizo, no Quadro 3, as finalidades e objetivos do programa vigente e do programa anterior.

Quadro 3: Finalidades e objetivos do programa de Matemática A do Ensino Secundário

Programa 2002	**Programa 2014 e orientações 2021**
Finalidades	
▪ Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real; ▪ Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, o rigor, o espírito crítico e a criatividade; ▪ Promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística; ▪ Contribuir para uma atitude positiva face à Ciência; ▪ Promover a realização pessoal, a autonomia e a solidariedade; ▪ Contribuir para o desenvolvimento da existência de consciência crítica e interpretativa, (...) formando para a cidadania ativa e participativa.	▪ Estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio abstrato: Apreensão e hierarquização de conceitos matemáticos; Estudo sistemático das suas propriedades; Argumentação clara e precisa; Capacidade de elaborar análises objetivas, coerentes e comunicáveis; Capacidade de detetar falácias. ▪ A modelação e a aplicação da Matemática ao mundo real: Prescrevendo a aplicação do cálculo diferencial; Tratamento de situações em que uma função é proporcional, com constante de proporcionalidade negativa, à respetiva derivada de segunda ordem.
Objetivos Gerais	**Desempenhos**
▪ Valores e atitudes: Desenvolver a confiança em si próprio; Desenvolver hábitos de trabalho e persistência; Desenvolver o sentido de responsabilidade; Desenvolver o espírito de tolerância e de cooperação. ▪ Capacidades/Aptidões: Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção do real; Desenvolver a capacidade de comunicar; Desenvolver o raciocínio e o pensamento científico. ▪ Conhecimentos: - Ampliar o conceito de número; Ampliar o conhecimento de Geometria no Plano e no Espaço; - Iniciar o estudo da Análise Infinitesimal. Ampliar conhecimentos de Estatística e Probabilidades; Conhecer aspetos da História da Matemática.	- Identificar/Designar/referir, o aluno deve utilizar corretamente conceitos e designações; - Reconhecer, o aluno deve apresentar argumentação coerente do que foi explicado; - Saber, o aluno deve saber o resultado; - Provar/Demonstrar, o aluno deve apresentar demonstrações Matemáticas; - Justificar, o aluno deve justificar o enunciado através de propriedades conhecidas. ▪ objetivos: - Conhecimento de factos, de conceitos e de procedimentos; - Raciocínio Matemático; Resolução de problemas; Comunicação Matemática - História da Matemática

A discussão em torno do "que deve ser ensinado e como deve ser ensinado, tendo em conta as competências para o século XXI" (Despacho n.º 12530/2018), conduziu à criação de um Grupo de Trabalho de Matemática cuja missão era analisar o fenómeno do insucesso escolar na Matemática e elaborar um conjunto de recomendação para o Ensino da Matemática (Despacho n.º 12530/2018, p. 34704). Na persecução deste fim, o Grupo de Trabalho deveria, entre outras incumbências, analisar “a eficácia e a eficiência dos diferentes planos e medidas dirigidas à melhoria das aprendizagens em Matemática e à promoção do sucesso escolar” (Despacho n.º 12530/2018, p. 34704). As conclusões deste estudo apontam que quanto às finalidades, o Programa de Matemática A, desde 1990 até ao vigente, “apresentam perspetivas de relação da Matemática com a sociedade, valorizando a aprendizagem Matemática não como um fim em si mesmo, mas como instrumento para uma melhor compreensão do mundo em redor” (p. 95). E ainda referem “a valorização do contributo que a Matemática proporciona para a formação pessoal dos alunos, em particular o desenvolvimento do seu raciocínio” (Silva et al., 2019, p. 95). Já programa de 2014 “assume uma preocupação central com os alunos que fazem prosseguimento de cursos no Ensino Superior em áreas que requerem uma sólida formação Matemática” (Silva et al., 2019, p. 95). Estes autores garantem que, em Portugal, se seguiu uma linha de continuidade sincronizada com as orientações do NCTM e da OCDE para 2030, até ao programa de 2014, tendência que se procura contrariar com o documento ‘Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática A’ de 2014. Afirmam, ainda, que o Programa de 2014 não está em sintonia com as Aprendizagens Essenciais pressupostas no ‘Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória’. Sugerem assim uma revisão curricular urgente nos Programas de Matemática.

2.4. Características das tarefas

Primeiro, é preciso 'inflamar' a emoção (Mora, 2013). São vários os autores que defendem que, para aprender, temos que despertar a curiosidade e a emoção da descoberta (Mora, 2013; Polya, 1995; Sanjaume, 2016). Estudos recentes, na área da Neuro Educação, previnem que sem emoções não há aprendizagem (Mora, 2013; Sanjaume, 2016). Segundo Sanjaume (2016), "um cérebro estimulado aumenta as suas conexões neuronais, e, consequentemente, aumenta o seu rendimento e o desenvolvimento das suas capacidades cognitivas" (p. 8). O professor de Matemática tem, assim, uma enorme oportunidade. Se conceder aos seus alunos situações problema, compatíveis com os seus conhecimentos, que desafiem a sua curiosidade e os auxilie por um rumo de indagações estimulantes, poderá suscitar-lhes o gosto pelo raciocínio independente (Polya, 1995). Contudo, nem sempre ensinar resulta em aprender (Swan, 2005). O papel do professor e das tarefas propostas em sala de aula são determinantes para um ensino estimulante, desafiador, que fomente a autonomia e a aprendizagem com compreensão (NCTM, 2007). O professor deve, assim, ser capaz de propor tarefas que desafiem o intelecto dos alunos, promovendo aprendizagens significativas, fluentes e duradouras.

2.4.1. Tipologia de tarefas segundo Gojak

Gojak (s.d.) define tarefa como uma incumbência ou trabalho que propomos aos alunos realizar. A autora estabelece três tipologias de tarefas mediante o seu grau de complexidade e o propósito para as quais são pertencidas. Estipula, assim, três tipos de tarefas: (1) Exercícios; (2) Problema-Narrativa; (3) Rica ou avançada. As suas características são explanadas no Quadro 4.

Quadro 4: Tipologia de tarefas por Gojak (pp. 2-3)

Exercício
Tarefa rotineira, cujo caminho para a solução é conhecido. Os exercícios são usados para dar aos alunos a oportunidade de praticar as suas habilidades. Podem incluir cálculos numéricos ou ploblemas-narrativa que proporcionem prática na aplicação de conceitos pretendidos anteriormente.
Problema-Narrativa
Tarefa cuja situação problema é apresentada em redação, que pode ser um exercício (por ex., os alunos sabem como multiplicar para apresentar uma solução), ou pode ser usada para introduzir um novo conceito, ou para aplicar um conceito conhecido a uma nova situação (por ex., o aluno não sabe o que fazer, então explora e usa uma variedade de estratégias para alcançar uma solução para o problema).
Rica ou Avançada
Tarefa ou problema avançado pode ser apresentado em redação ou apenas números, pode ser um jogo ou um quebra-cabeças. É uma tarefa para a qual não há caminho-solução conhecido prontamente pelo aluno. Apresenta um alto nível de demanda cognitiva e exige que os alunos pensem de forma abstrata para conseguirem fazer conexões entre conceitos matemáticos. São geralmente chamados de problemas abertos ou não rotineiros.

Gojak (2012) defende que os alunos devem ser fluentes em Matemática, que é muito mais do que ser ‘rápido’ e ‘preciso’, “deve ir para além dos procedimentos e cálculos” (p. 1). No combate à ideia errada que os alunos têm quando entram na escola, de que o objetivo da Matemática é resolver depressa e bem, a autora defende que os professores devem reconhecer uma tarefa ‘rica’ e construir uma biblioteca de recursos, que incluam tarefas que ofereçam aos alunos a oportunidade de explorar e entender conceitos de Matemática. Estabelece, assim, como principais características das tarefas ‘ricas’: (1) Serem atrativas para os alunos; (2) Requeiram Matemática substantiva para chegar a uma solução; (3) Sejam acessíveis a todos os alunos da turma; (4) Tenham múltiplos caminhos para a solução; (5) Tenham múltiplas soluções; (6) Encorajem os alunos para a discussão e questionamento; (7) Preparem para a compreensão de que o processo é tão importante como a solução (Gojak, s.d.).

A tarefa deve desafiar a curiosidade e proporcionar o passo para o estágio da exploração e descoberta. Gojak defende que as tarefas podem providenciar interessantes contextos, podendo também aparecer sob a forma de puzzles ou até histórias. O importante é que o aluno se questione sobre determinada situação e procure por soluções.

Numa tarefa 'rica' o conteúdo matemático necessário para resolver o(s) problema(s) deve ser claro e apropriado para o desenvolvimento dos alunos. Deve ser acessível e alinhado com os conteúdos programáticos estabelecidos a serem trabalhados durante a aula. Para Gojak (s.d.) as tarefas 'ricas' são mais impactantes quando os alunos constroem uma compreensão mais profunda dos conceitos. Proporcionam, frequentemente, a oportunidade de os alunos conectarem conceitos matemáticos. Uma tarefa 'rica' deve ter uma variedade de possíveis abordagens, para que cada aluno possa começar a trabalhar na tarefa em diferentes níveis. Deve, assim, ser projetada para ser acessível a todos os alunos da turma e manter o seu interesse, aquilo a que alguns educadores se referem como "tarefas de piso baixo/teto alto" (Gojak, s.d., p. 5).

Pelo seu grau de abertura, as tarefas 'ricas' podem, inicialmente, causar desconforto aos alunos. No entanto, para Gojak, quanto mais os alunos tiverem esta experiência na aprendizagem e no uso de múltiplas estratégias, mais confiantes se tornarão nas suas abordagens às tarefas 'ricas'. A autora defende que os alunos precisam de oportunidades com diferentes estratégias para a resolução de problemas a fim de colaborarem em grupo, usando uma estratégia específica. Ao trabalharem com este tipo de tarefas, os alunos vão construindo um repertório de estratégias, permitindo-lhes determinar quais estratégias que fazem mais sentido em determinada situação e como ajustar o pensamento se a tentativa não está a levá-los a uma solução razoável.

Uma tarefa 'rica' permite, assim, que os alunos sejam criativos em suas abordagens, usem várias representações (físico, visual, simbólico, verbal e contextual) e desenvolvam a capacidade de mudar de estratégia quando o caminho adotado não é bem-sucedido. Seguindo as orientações de Gojak, enunciam-se no quadro *infra* as estratégias para a resolução de problemas.

Quadro 5: Estratégias de resolução de problemas por Gojak (s.d., p. 6)

Estratégias para a resolução de problemas	
Fazer uma tabela	Explanar todas as possibilidades
Procurar padrões	Resolver sub-problemas mais simples
Fazer um desenho ou um diagrama	Trabalhar a partir da conclusão
Fazer um modelo	Escrever ou expressar uma equação
Tentativa-erro	Identificar sub-objetivos
Fazer uma lista organizada	Mudar pontos de vista
Fazer ou usar um gráfico	Generalizar

A autora considera que há tarefas 'ricas' que têm uma solução aceite e precisa, apesar de se poder adotar várias estratégias para chegar à solução. Para Gojak (s. d.) "o importante aspeto de uma tarefa é o pensamento matemático que conduz à reposta" (p. 6). Por essa razão, a discussão da aula deve focar-se em duas orientações: (1) Comparar métodos-solução e debater as semelhanças e diferenças desses métodos; (2) Descrever padrões desenvolvidos durante a exploração da tarefa.

Durante a discussão, o valor da metacognição – pensar no pensamento do outro – torna-se evidente quando os alunos esperam que as suas explicações sobre os seus raciocínios sejam percebidas pelos demais. A metacognição ajuda os alunos "a criar entendimento conceitual e vincular esse entendimento a habilidades processuais" (Gojak, s.d., p. 7). Assim, tarefas 'ricas' fornecem um contexto para a apropriação de aprendizagens sólidas.

Embora o uso de tarefas 'ricas' componham, segundo Gojak, mais benefícios sobre o processo de ensino e aprendizagem em comparação com os exercícios, ressalva que "ensinar e aprender com tarefas 'ricas' exige muito mais do professor e do aluno. Tanto professores quanto alunos precisam entender que este tipo de aprendizagem exige mais esforço e pensamento mais profundo" (Gojak, s.d., p. 9).

Por serem mais exigentes, o professor deve assumir função de facilitador. O seu papel não é expor procedimentos, deve ajudar o aluno a questionar de forma objetiva. A avaliação do processo deve ser contínua, fazendo perguntas cuidadosamente elaboradas para monitorizar e verificar a compreensão dos alunos e auxiliar na conexão de conteúdos.

2.4.2. Tipologia de tarefas segundo Swan

Swan (2014) define 'tarefa' como algo que o professor propõe aos alunos fazerem e 'atividade' como o resultado que advém da sua resolução. Para o autor, a tarefa é um recurso que tem um significado muito mais abrangente que um problema impresso numa ficha de trabalho ou no manual: deve ter um objetivo próprio, incluir a forma como a aula é mediada e transformada pelo professor, como é apresentada e, consequentemente, como deve ser feito o fornecimento de indicações, pistas e outras questões (Swan, 2014). O autor acrescenta que "as tarefas também se alteram à medida que os alunos as interpretam de modos diferentes" (p. 9), pelo que, como partes integrantes de aulas, abrem-se ao desenvolvimento ao longo do tempo, podendo não se limitar a uma única aula. Swan (2005) deixa uma salvaguarda sobre as tarefas, referindo que, limitando a aula à sua existência, elas não garantem um ensino eficaz, tudo depende de como são usadas. Deste modo, define oito princípios orientadores para a organização das aulas: (1) Planear a aula assente nos conhecimentos que os alunos têm; (2) Expor e discutir erros-tipo; (3) Estimular à pergunta; (4) Proporcionar o trabalho cooperativo de pequenos grupos; (5) Enaltecer o método em vez da resposta; (6) Criar conexões entre diferentes tópicos da Matemática; (7) Usar tecnologias de forma apropriada; (8) Recorrer a tarefas 'ricas' e colaborativas (Swan, 2005). Estes princípios orientadores são um recurso facilitador na passagem de uma aprendizagem 'passiva' para uma aprendizagem 'ativa'. Quando os alunos se limitam a ter comportamentos como escutar enquanto o professor explica, copiar métodos, pouco ou nada questionar e praticar os mesmos métodos repetidamente em muitas questões, Swan (2005) considera que

> Para estes alunos, a matemática é algo acabado, em vez ser algo criativo e ser um tema estimulante para explorar. Tornou-se uma coleção de procedimentos e técnicas isoladas a ser aprendidas por rotina, em vez de uma interessante rede de ideias conectadas e poderosas para explorar, discutir, debater e gradualmente entender. (p. 3)

Postura face à aprendizagem da Matemática que deve ser contrariada e, por isso, defende que o ensino deve transitar de um modelo de 'transmissão' para um modelo de 'desafio'. Numa comparação de modelos, Swan (2005) tem por base diferentes visões sobre a Matemática, a aprendizagem e o ensino, ideia explanada, sucintamente, no Quadro 6.

Quadro 6: Comparação dos modelos de ensino de 'transmissão' e de 'desafio' por Swan (2005, p. 5)

Modelo de 'Transmissão'		Modelo de 'Desafio'
Um corpo completo de conhecimentos e procedimentos padrão que têm de ser memorizados.	Matemática é ... ⟷	Um corpo de ideias interconectadas e processos de raciocínio.
Uma atividade individual, baseada na observação, audição e imitação até que a fluência seja atingida.	Aprender é ... ⟷	Uma atividade colaborativa, onde os aprendizes são desafiados a chegar a um entendimento através de discussão.
Estruturar um currículo linear para os alunos. Explicar antes de dar os problemas. Verificar que a explicação foi entendida através da prática de exercícios. Corrigir confusões ou erros.	Ensinar é ... ⟷	Explorar o significado e as conexões através de um diálogo não linear entre professor e alunos. Apresentar problemas antes de oferecer explicações. Tornar os erros explícitos e aprender a partir deles.

A persecução da transição de modelos de ensino e consequente implementação do modelo 'desafio' apresentada por Swan (2005) recomenda, entre outros recursos, à adoção das tarefas 'ricas', que define como tarefas que: (1) São acessíveis e extensíveis; (2) Permitem a tomada de decisões; (3) Envolvem os alunos em testes, explicações, provas, reflexões e interpretações; (4) Promovem a discussão e a comunicação; (5) Encorajam à originalidade e à criação; (6) Encorajam a questões do tipo 'E se?' ou 'E se não?'; (7) São agradáveis e contêm a oportunidade da descoberta.

Para Swan (2005), as tarefas devem ser desenhadas de forma a desenvolverem o pensamento matemático e, para isso, classifica as atividades desencadeadas pelas tarefas de forma a trabalharem cinco diferentes formas de pensar. No Quadro 7, a seguir, resumem-se as tipologias de atividades desencadeadas pelas tarefas, segundo Swan (2005).

Quadro 7: Tipologia de atividades desencadeadas pelas tarefas - Swan (2005, p. 16)

CLASSIFICAR OBJETOS MATEMÁTICOS	Os alunos elaboram as classificações próprias para objetos da Matemática e aplicam as classificações criadas por outros. Aprendem a catalogar cuidadosamente e a reconhecer as propriedades dos objetos. Desenvolvem, também, linguagem e definições Matemáticas.
INTERPRETAÇÃO DE VÁRIAS REPRESENTAÇÕES	Os alunos combinam diferentes representações da mesma ideia Matemática. Estabelecem vínculos entre diferentes representações e desenvolver novas imagens mentais para conceitos.
AVALIAÇÃO DE PROPOSIÇÕES E CONDIÇÕES	Os alunos decidem se as afirmações dadas são 'sempre verdadeiras', 'às vezes verdadeiras' ou 'nunca verdadeiras'. São encorajados a desenvolver argumentos e justificações Matemáticas rigorosas e a criar exemplos ou contraexemplos para defender seu raciocínio.
CRIAR PROBLEMAS	Os alunos criam problemas ou variantes de problemas para outros alunos resolverem. Isso oferece-lhes a oportunidade de ser criativo e tomar "posse" dos problemas. Enquanto os colegas tentam resolvê-los, assumem o papel de professor. O 'fazer' e 'desfazer' processos de Matemática são vivenciados pelo exemplo.
ANALISAR RACIOCÍNIOS E SOLUÇÕES	Os alunos comparam diferentes métodos de resolução de um problema, organizar soluções e/ou diagnosticar as causas de possíveis erros nas soluções. Reconhecem a existência de caminhos alternativos para a resolução de um problema e desenvolver próprias cadeias de raciocínio.

As atividades 'classificar objetos matemáticos' promovem o enriquecimento da capacidade de observação sobre os objetos que lhe são apresentados e, consequentemente, à reflexão e interpretação sobre propriedades, regularidades, formas, semelhanças e comparação entre objetos similares. É um tipo de atividade poderosa, que "ajuda os alunos a entender o significado de diferentes termos e símbolos matemáticos" (Swan, 2005, p. 17). A 'interpretação de representações' permite que sejam partilhadas, comparadas e interpretadas em grupo e, consequentemente, permite que os alunos construam conexões entre as ideias e conceitos. Mais uma vez potencia-se a capacidade da reflexão e da interpretação. A 'avaliação de proposições e condições', onde se pede ao aluno para discutir a veracidade das afirmações, desenvolve a capacidade da comunicação Matemática, bem como a formulação de conjeturas e provas. Ao 'criar problemas', é dada ao aluno a tarefa de criar os seus próprios problemas matemáticos, que sejam, ao mesmo tempo, desafiadores e que saibam que são capazes de resolver. Isto permite fazê-los refletir sobre os seus próprios conhecimentos, dar-lhes consciência da quantidade de problemas resolvíveis que se podem criar, encorajar os alunos a considerar contextos apropriados onde a Matemática pode ser aplicada, ajudá-los a criar uma entidade de 'posse' sobre a Matemática que criaram e desperta-lhes autoconfiança quando explicam aos colegas. Na 'análise de raciocínios e soluções', os alunos comparam diferentes métodos e procedimentos na resolução de situações problema, possibilitando o alerta à não existência de um caminho único, mais uma vez evidenciando a criatividade em Matemática.

2.4.3. Tipologia de tarefas segundo Schoenfeld

Para Schoenfeld (1996), o objetivo do ensino da Matemática não é só ensinar a resolver problemas, "especialmente problemas de outras pessoas" (p. 68). A resolução de problemas é uma parte significativa do pensamento matemático e o objetivo do ensino da Matemática é ajudar os alunos a aprender a pensar matematicamente. Na sua perspetiva, pensar matematicamente envolve duas dimensões fundamentais: (1) "Ver o mundo de um ponto de vista matemático (tendo predileção por matematizar: modelar, simbolizar, abstrair e aplicar ideias Matemáticas)" (p. 68); (2) "Ter os instrumentos para tirar proveito para matematizar com sucesso" (p. 68).

Schoenfeld (1992) considera dois tipos de tarefas: exercícios de rotina e problemas. Os exercícios de rotina são, portanto, aqueles em que o contexto problemático indica o tipo de técnica a usar. Os problemas, que Schoenfeld (1992) denomina como 'verdadeiros', são inevidentes – não rotineiros – e têm quatro características elementares (Schoenfeld, 1996): (1) São acessíveis, de fácil compreensão e não requerem muito vocabulário ou álgebra complexa para progredir dentro deles; (2) Podem ser resolvidos ou aproximados por várias abordagens, permitindo a compreensão sobre a importância do processo e as conexões entre diversos temas da Matemática; (3) Servem como introdução a importantes ideias Matemáticas; (4) Sempre que possível, servem como embriões de 'explorações Matemáticas', que conduzem os alunos a fazer Matemática.

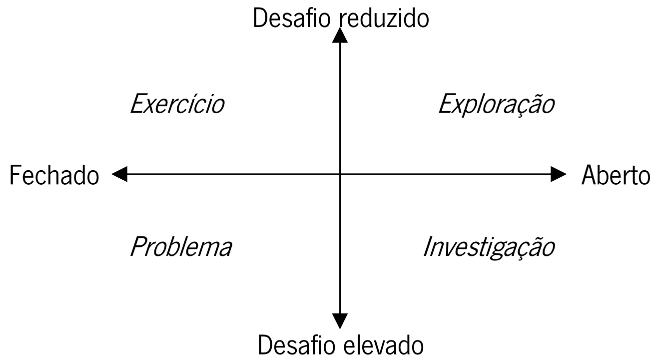
Os problemas, para Schoenfeld (1992), não têm, portanto, um algoritmo padrão para extrair ou representar a informação fornecida, são problemas-progresso, ou seja, não têm um algoritmo padrão para serem resolvidos. As instruções desta tipologia de tarefa devem favorecer estratégias como tentativa e erro, procura de padrões/semelhanças ou trabalhar a partir da conclusão.

2.4.4. Tipologia de tarefas segundo Ponte

Sobe o mote de que os alunos aprendem sob o cruzamento de dois fatores: "A atividade que realizam e a reflexão que sobre ela efetuam" (Ponte, 2005, p. 1), Ponte define a tarefa como o objetivo de uma atividade. A tarefa pode ser sugerida pelo professor ou pelos alunos, ou ser até criada numa base negocial entre professor e alunos, não tendo um momento pré-estabelecido para ser introduzida. É então, portanto, "formulando tarefas adequadas que o professor pode suscitar a atividade do aluno" (Ponte, 2005, p. 1). Ponte (2005) considera existirem duas dimensões fundamentais nas tarefas: (1) O grau de desafio matemático; e (2) O grau de estrutura. O autor entende por 'grau de desafio matemático' a relação que se estabelece com o grau de dificuldade, que varia entre os polos 'reduzido' e 'elevado'; já o 'grau de estrutura' prende-se com a abertura da tarefa, que pode variar entre os polos 'aberto' e ‘fechado’. Uma tarefa fechada é “aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas” (Ponte, 2005, pp. 7-8).

Ponte (2005) na sua análise estabelece uma relação cruzada entre estas dimensões, obtendo um referencial de quatro quadrantes, onde se atribuem os quatro tipos de tarefas definidos segundo este autor por: (1) Exercício; (2) Problema; (3) Exploração; e (4) Investigação. Um exercício é uma tarefa de grau de desafio reduzido, fechada; um problema é uma tarefa fechada, com grau de desafio elevado; uma exploração tem um grau de desafio reduzido, mas é uma tarefa aberta; e uma investigação é uma tarefa aberta, com um grau de desafio elevado.

Figura 1: Relação entre diversos tipos de tarefas (Ponte, 2005, p. 8)



Se nos focarmos nas tarefas abertas, a diferença entre as tarefas de exploração e de investigação reside no grau de dificuldade, pelo que se o aluno for capaz de trabalhar imediatamente na tarefa, sem grande planeamento, estaremos na presença de uma tarefa de exploração. Caso contrário, devemos referenciar-nos a uma tarefa de investigação. Comparando as tarefas de exploração com os exercícios, que prendem a sua diferenciação pelo grau de desafio, a mesma tarefa pode ter as duas facetas assumidas, para diferentes alunos a mesma tarefa pode ser um exercício ou uma exploração, depende dos conhecimentos prévios dos alunos.

Quando o professor planeia uma unidade curricular ou uma ou várias aulas deve considerar fatores que vão para além da seleção de um dado número de tarefas (Ponte, 2005). Nomeadamente, a ordem curricular, a tipologia de alunos com quem trabalha, as condições e recursos que dispõe, até o contexto social que envolve a comunidade educativa. No entanto, antes de qualquer outra coisa, é fundamental definir de forma mais ou menos explícita qual a estratégia de ensino que irá adotar, tendo por base a relação entre a atividade que o professor realiza e a atividade que se espera que o aluno realize.

Ponte (2005) categoriza as estratégias de ensino em dois tipos: "ensino direto" e "ensino--aprendizagem exploratório" (p. 12). Apresentam-se no quadro a seguir as principais características destas duas estratégias de ensino:

Quadro 8: Características das diferentes estratégias de ensino (Ponte, 2005, pp. 12-14)

Ensino Direto	**Ensino-aprendizagem Exploratório**
▪ O professor assume o papel daquele que fornece a informação; ▪ O professor apresenta exemplos e comenta situações; ▪ Aceita-se que o aluno aprende ouvindo e fazendo exercícios; ▪ O objetivo dos exercícios é memorizar conceitos e técnicas previamente explicadas pelo professor; ▪ As principais tarefas do aluno são prestar atenção ao que é dito pelo professor e responder a questões; ▪ Muitas vezes, a resolução de exercícios ganha o lugar central, principalmente os tipos de exercícios suscetíveis de sair em teste ou exame.	▪ O professor não procura explicar tudo; ▪ O professor deixa uma parte do trabalho de descoberta e construção do conhecimento para os alunos realizarem; ▪ Existem momentos reflexão, onde o professor sintetiza as aprendizagens adquiridas pelas atividades dos alunos; ▪ A ênfase é dada às tarefas de exploração e de investigação; ▪ Privilegia-se a discussão entre o professor e os alunos

A estratégia de ensino escolhida pode ser exclusivamente de 'ensino direto' ou de 'ensino--aprendizagem exploratório' ou numa espécie de sistema híbrido, que combina os dois. Segundo Ponte (2005) há dois fatores decisivos nessa escolha: (1) Como se pretende introduzir a informação; (2) A natureza das tarefas propostas e a atividade que desencadeiam.

Num ensino mais direto, em primeiro lugar surge a componente teórica, apresentada pelo professor. Os exemplos e explicações são proporcionados pelo professor. Só posteriormente os exercícios tomam lugar. Num ensino-aprendizagem exploratório, a teoria e a prática estão também presentes, mas noutro formato: "parte-se de atividades em que os alunos são chamados a um forte envolvimento, para se fazer num segundo momento uma discussão, balanço, clarificação relativamente ao que se aprendeu" (Ponte, 2005, p. 15). A aprendizagem do aluno surge assim da reflexão sobre a atividade que realizou.

Na estratégia de ensino-aprendizagem exploratório, o destaque é dado a atividades de exploração e pode incluir investigações, problemas e exercícios.

> A realização de tarefas abertas, de carácter exploratório e investigativo é um elemento marcante neste tipo de ensino, mas importância idêntica assumem os momentos de discussão em que os alunos apresentam o seu trabalho, relatam as suas conjeturas e conclusões, apresentam as suas justificações e questionam-se uns aos outros e que o professor aproveita para procurar que se clarifiquem os conceitos e procedimentos, se

avalie o valor dos argumentos e se estabeleçam conexões dentro e fora da Matemática. (Ponte, 2005, p. 16)

Escolhida a estratégia de ensino, a planificação envolve vários momentos de trabalho e a adoção de diversos tipos de tarefas, que se adequem aos objetivos curriculares a alcançar. Segundo Ponte (2005), cada um dos tipos de tarefas desempenha um papel importante no processo de ensino e aprendizagem, como é ilustrado sucintamente no quadro a seguir:

Quadro 9: A tipologia de tarefas e o papel que desempenham (Ponte, 2005, p. 17)

Tipologia de tarefa		**Papel que desempenha**
Fechada	Exercícios e Problemas	São importantes para incrementar o raciocínio matemático, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação entre dados e resultados.
Aberta	Explorações e Investigações	São essenciais para o desenvolvimento de capacidades como a autonomia ou a capacidade de lidar com situações complexas.
Natureza mais acessível	Explorações e Exercícios	Possibilitam que todos os alunos possam ter um elevado grau de sucesso, contribuindo assim para o progresso da autoconfiança.
Natureza mais desafiante	Investigações e Problemas	São indispensáveis para que os alunos tenham uma verdadeira experiência Matemática.

A diversificação de tarefas tem ainda outros benefícios, permitem que os alunos percebam como a Matemática é utilizada em diferentes contextos, quer pela aplicação de tarefas ajustadas ao contexto real, quer por um enquadramento puramente matemático.

Uma das principais preocupações do professor deve ser o doseamento das tarefas que propõe e procurar "encontrar situações de aprendizagem de natureza exploratória que constituam bons pontos de partida para o estudo de novos assuntos" (Ponte, 2005, p. 18). A seleção de tarefas é, para Ponte, um elemento fundamental na caracterização de qualquer currículo e é a via pela qual o aluno é chamado a construir conhecimentos.

2.5. Investigar para aprender Matemática

Há vários anos que se discute a separação que existe entre ensinar e investigar, assim como se põe em causa a separação entre investigar e aprender (Ponte, 2003b). Num ensino-aprendizagem exploratório, não se espera que os alunos descubram as ideias matemáticas sozinhos, ou que inventem conceitos (Canavarro, 2011; Vale & Pimenta, 2012), espera-se que aprendam através do trabalho realizado, assente em tarefas ricas que fazem despontar ideias matemáticas, posteriormente discutidas coletivamente (Canavarro, 2011; Pires, 2015; Ponte, 2003b). Investigar, ao nível escolar, não significa necessariamente que tenhamos que lidar com problemas complexos (Costa et al., 2002; Polya, 1995), significa que “formulamos as nossas próprias questões e procuramos responder-lhes de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso” (Costa et al., 2002, p. 1). As tarefas que se propõem aos alunos são, portanto, decisórias sobre o tipo de aprendizagem que se lhes procura proporcionar (Brocardo, 2014; Pires, 2015) e sobre a atividade do aluno e do professor (Oliveira & Borralho, 2014). São muitos os educadores matemáticos que defendem que “para compreender a verdadeira natureza da Matemática é importante analisá-la numa perspetiva dinâmica, procurando compreender a forma como ela é construída e como evolui” (Fonseca et al., 1999, p. 2). Em suma, deve-se olhar para a Matemática, fundamentalmente, como uma atividade humana (Fonseca et al., 1999; Oliveira et al., 1998; Silva & Junior, 2013).

Seguindo a máxima de que “investigar é procurar conhecer o que não se sabe” (Ponte, 2003b, p. 95), a aula de carácter exploratório ou investigativo segue três fases distintas: (1) Introdução da tarefa; (2) Desenvolvimento do trabalho; (3) Discussão final e apresentação de resultados (Fonseca et al., 1999; Oliveira et al., 1998).

Na introdução da tarefa, o professor deve procurar clarificar a tarefa e explicitar o tipo de trabalho que quer ver ser desenvolvido. É nesta fase que o professor tem a oportunidade de criar um ambiente favorável ao desenvolvimento do trabalho dos alunos e marca a sua forma de atuação (Oliveira et al., 1998). A introdução da tarefa pode ter diferentes abordagens. Pode-se optar por entregar o enunciado da tarefa em papel e fazer a sua leitura com o grupo turma ou até apresentar o enunciado por escrito sem que haja qualquer discussão inicial (Fonseca et al., 1999). A forma de introdução da tarefa poderá ditar a necessidade de maior ou menor apoio por parte do professor.

A fase de desenvolvimento do trabalho é o momento onde se procura que o aluno consiga assumir uma atitude investigativa. É nesta fase que os alunos irão reconhecer a situação, explorar e criar conjeturas, formular as próprias questões, testar, discutir e provar conjeturas (Ponte, 2003b).

Manson et al. (2010) referem haver três momentos principais numa investigação matemática, por eles denominadas por ‘Entrada’, ‘Ataque’ e ‘Revisão’. O momento ‘Entrada’ deve existir, por forma a preparar as condições favoráveis para um momento ‘Ataque’ eficiente. O trabalho desenvolvido durante a ‘Entrada’ tem muito a ver com a compreensão do que exatamente é proposto e a decisão do que se vai fazer. A abordagem à situação problema deve ser feita de duas formas, “absorver a informação dada e perceber o que realmente a questão pergunta” (Mason et al., 2010, p. 26). Durante este momento é onde normalmente se faz a preparação para a abordagem, respondendo a perguntas do tipo “o que sei?”; “o que quero?” e “o que posso introduzir?”. Para tal, podemos tentar reproduzir a pergunta, escrever por palavras próprias o que se sabe, introduzir diagramas ou esquemas, símbolos ou letras para representar variáveis, introduzindo assim uma notação à situação problema.

Após a apropriação da situação problema, parte-se para o momento 'Ataque'. É neste momento que "pode ocorrer a atividade matemática" (Mason et al., 2010, p. 35). Sucintamente, é neste momento que há o desenvolvimento de conjeturas, a realização de testes e eventuais refutações de conjeturas e/ou formulação de novas conjeturas, justificações convincentes e generalizações (Mason et al., 2010; Ponte, 2003b). Durante o 'Ataque' há diferentes abordagens que se podem tomar, diferentes planos que se podem seguir e tentar, já que é usual seguir por 'caminhos sem saída' (Mason et al., 2010). No decorrer do momento 'Ataque', o trabalho pode variar entre 'caminhos sem saída' e 'descobertas' ou aquilo que podemos chamar de 'surpresas de compreensão', os quais Manson et al. (2010) chamam de momentos '*stuck*!' e '*Aha*!'. Ponte (2003a) subdivide este momento em três submomentos distintos, separando a formulação de conjeturas da realização de testes e das provas ou justificações, salvaguardando que estes momentos podem ocorrer de forma mais ou menos desordenada.

O terceiro momento referido por Mason et al. (2010), a 'Revisão', é naquela onde se verifica o trabalho, se reflete sobre as ideias e momentos chave e onde, eventualmente, ocorrem generalizações. Na 'Revisão' deve-se confirmar a aritmética e a álgebra em busca de possíveis erros, verificar se os argumentos fazem sentido, assim como se as conjeturas são plausíveis, e se o pretendido foi alcançado ou se foi alcançado um resultado particular.

Durante a fase de desenvolvimento do trabalho na aula de caráter exploratório e investigativo, os alunos poderão ter a tendência a recorrer ao professor, muitas vezes no sentido de procurar uma validação das suas ideias ou processos (Fonseca et al., 1999). O professor deve ter, fundamentalmente, uma postura de orientador, na procura de "ajudar a ultrapassar certos bloqueios ou a tornar mais rica a sua investigação" (Oliveira et al., 1998, p. 4), potenciando a autonomia dos alunos e a aprendizagem com compreensão (NCTM, 2007).

A terceira fase de uma aula de caráter exploratório e investigativo prende-se com a discussão final e a apresentação de resultados. Nesta fase, o professor deve surgir como um moderador, procurando potenciar a comunicação entre os alunos (Fonseca et al., 1999). Por seu lado, os alunos são confrontados com diferentes conjeturas, abordagens, estratégias e possíveis conclusões. Explanando as suas ideias e o seu trabalho, são estimulados a argumentar e a criar uma base sólida de compreensão sobre o que defendem (Fonseca et al., 1999; NCTM, 2007; Vale & Pimentel, 2012). O incentivo do desejo natural de compreensão do aluno sobre aquilo que se pede que ele aprenda é o meio para um ensino da Matemática bem-sucedido (NCTM, 2007).

Há, portanto, três conceções fundamentais numa aula investigativa: (1) A tarefa de investigação; (2) A atividade investigativa; (3) A comunicação (Costa & Silva, 2019). A tarefa de investigação é a situação problema de estrutura aberta, onde a sua forma permite a existência de diferentes caminhos para diferentes possíveis soluções (Ponte, 2005). A atividade investigativa é o conjunto de procedimentos levados a cabo pelos alunos para uma aprendizagem baseada no fazer e pensar matematicamente, onde os alunos se envolvem numa forma de pensar própria de um investigador: elaborar questões, procurar conjeturas, argumentar e fundamentar conclusões (Costa & Silva, 2019). A comunicação, seja ela oral ou escrita, é a forma como os alunos se envolvem na discussão de ideias, na argumentação e prova de conjeturas, bem como, a interação entre pares ou com o professor, permitindo uma participação ativa do aluno no processo de ensino-aprendizagem (Costa & Silva, 2019).

A atividade investigativa na sala de aula de Matemática constitui um ponto de partida da atividade matemática dos alunos (Ponte & Serrazina, 2000). Uma vez que é realizada pelo aluno, esta torna-se o marco basilar da sua aprendizagem (Ponte & Serrazina, 2000). Em defesa desta tese, Ponte et al. (2003) afirmam que a atividade investigativa

> Ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjeturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação dos resultados e na discussão e argumentação como os seus colegas e o professor. (p. 23)

São vários os autores que acreditam que a melhor forma de aprender Matemática é fazendo Matemática. Pólya (1995) acredita que a Matemática é uma ciência rigorosa, mas é também uma ciência experimental e indutiva, é uma ciência em construção. Não se espera, no entanto, que os alunos se tornem matemáticos, espera-se que aprendam a ser como um (Canavarro, 2011; Vale & Pimentel, 2012). Na perspetiva de Vale e Pimentel (2012), pretende-se que os alunos participem no "processo de invenção e descoberta, no refinamento dos métodos e das formas de representação, colaborar, duvidar, criticar e ser persistente a resolver problemas" (p. 348).

O documento orientador das 'Aprendizagens Essenciais para o 12.º ano de Matemática A' (2018), assinala ser fundamental que os alunos "se envolvam em discussões e atividades estimulantes e que não se sobrevalorizem as competências procedimentais sem a compreensão dos princípios matemáticos subjacentes" (MEC, 2018, p. 3). As tarefas de natureza aberta, como as explorações ou investigações, permitem formas de trabalho desafiantes, que estimulam a criatividade, a experiência da descoberta e consequentemente uma maior compreensão dos temas em estudo (Costa & Silva, 2019; Pires, 2015; Ponte, 2003a).

2.6. Estudos empíricos sobre tarefas de estrutura aberta e Funções Trigonométricas

Trigonometria é um tema muito trabalhado durante o ensino secundário, o seu destaque deve-se às ligações que proporciona entre a Geometria, a Álgebra e as representações gráficas, e pode ainda servir como um importante precursor do Cálculo e, também, de estudos superiores relacionados com Engenharia ou Arquitetura (Maknun et al., 2019). Vários estudos sobre a utilização de tarefas de estrutura aberta em contexto de ensino e aprendizagem da Matemática, em particular da Trigonometria, consideram esta tipologia de tarefa um potenciador de desenvolvimento de múltiplas capacidades, contribuindo para um conhecimento baseado na exploração e compreensão de conceitos, proporcionando aprendizagens mais significativas (eg., Brocardo, 2001; Henriques, 2012; Price & Jaarsveld, 2017). Não obstante, estes estudos mostram, também, haver dificuldades intrínsecas por parte dos alunos na realização desta tipologia de tarefas.

Num estudo com alunos universitários da área da Análise Numérica, Henriques (2012) procura, utilizando tarefas de investigação, compreender de que modo a realização desta tipologia de tarefa pode influenciar no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Durante a investigação foi pedido aos alunos que procurassem regularidades, observassem exemplos, estabelecessem diagramas visuais ou sequências numéricas ou cálculos simples. A autora percebeu que os alunos formulavam conjeturas como afirmações e aceitavam-nas como conclusões, não mostrando necessidade de testar ou justificar. Aponta como possível razão a conceção que os alunos têm de resolver uma tarefa como processo de obtenção de resultados. Comportamento que, segundo a autora, melhorou ao longo da intervenção. No entanto, muitas vezes as suas justificações, geralmente não espontâneas, coincidiam com os testes das conjeturas. Com efeito, a autora afirma que os alunos não sentem necessidade de justificar conjeturas que lhes parecem verdadeiras após a realização de testes. Henriques (2012) refere ainda que para a realização das tarefas de investigação propostas, os alunos deveriam ter domínio da linguagem algébrica, de forma a facilitar o pensamento dedutivo e, consequentemente, o processo de generalização e justificação das conjeturas. Não obstante, pelo trabalho desenvolvido pelos alunos ao longo da intervenção, a autora conclui que as tarefas de investigação evidenciaram ter o potencial de promover o raciocínio matemático, "desenvolvendo a sua compreensão de vários processos que caracterizam a atividade matemática" (Henriques, 2012, p. 160).

A ausência de formulação de conjeturas também é notada por Brocardo (2001), no seu estudo com alunos de 8.º ano, sobre investigações na aula de Matemática. Neste estudo, a autora teve como objetivo perceber que características assume a atividade investigativa dos alunos e quais as suas potencialidades na aprendizagem da Matemática. A autora percebeu que os alunos têm uma ideia muito forte de que uma tarefa em Matemática

> Implica a procura de respostas/conclusões e que a evolução para uma postura realmente investigativa em que formulam conjeturas e desenvolvem vários ciclos de confirmação ou refutação destas, é um processo demorado e que tem de ser objeto de um trabalho explícito por parte do professor. (Brocardo, 2001, p. 540)

Percebeu também que os alunos, inicialmente, não olhavam para a tarefa como um todo e que o abandono do trabalho marcado por resposta alínea a alínea foi resistente ao longo da intervenção. Brocardo (2001) afirma que, ao longo da intervenção "foi sempre mais natural para os alunos propor afirmações do que questões" (p. 539) e que os alunos tinham tendência a assumir as conjeturas como conclusões, testando-as com recurso a poucos exemplos. A prova das conjeturas é tida pelos alunos como "uma complicação desnecessária" (p. 544) e, se a conjetura resistiu a sucessivos testes não faz sentido a necessidade de prova. Esta postura, segundo a autora, foi-se alterando ao longo da intervenção. No entanto, aponta que os alunos só faziam a prova das conjeturas quando solicitado. Não obstante, Brocardo (2001) conclui que esta tipologia de tarefas motiva os alunos, favorece o ambiente de aprendizagem, desenvolve capacidades e facilita a aprendizagem, potenciando a compreensão sobre a atividade matemática.

Branco (2013), num ensaio com alunos de 10.º ano, afirma que estes já haviam trabalhado com investigações matemáticas no 9.º ano, procurou perceber que dificuldades os alunos mostram ter quando trabalham com tarefas de exploração e de investigação. A autora refere, assim como Brocardo (2001), que os alunos exploravam questão a questão, sem olharem para a investigação como um todo, era-lhes mais natural formular afirmações em vez de questões e que, apesar da formulação de conjeturas ser natural, a sua veracidade era tida com base em poucos testes. Ao nível das justificações ou provas de conjeturas, Branco (2013) percebe que os alunos não consideram esta fase relevante. A autora referencia ainda que os alunos não atribuem muita importância à introdução da tarefa e que durante o desenvolvimento da tarefa, não registavam a maioria das conjeturas que se mostraram falsas.

Num estudo com alunos de 11.º ano sobre o uso de *open-response Tasks* (tarefas de resposta aberta) como instrumentos de revelação sobre a compreensão conceptual dos alunos na Trigonometria, Price e Jaarsveld (2017) estipularam dois objetivos principais: (1) Perceber de que forma os alunos revelam compreensão conceptual com a realização das tarefas; (2) Perceber de que forma o desenvolvimento da compreensão conceptual é revelada por meio das tarefas. As principais conclusões apontam que esta tipologia de tarefa revela a profundidade e o desenvolvimento dos alunos na conceptualização da Trigonometria e que quando os alunos são deixados sozinhos, sem orientação específica, articulam o que sabem, através de palavras, símbolos, diagramas ou uma combinação dos anteriores. O "grau de articulação correspondente à definição do conceito relaciona-se com a precisão e a profundidade dos seus conhecimentos conceptuais" (Price & Jaarsveld, 2017, p. 16).

Numa investigação envolvendo, também, alunos do ensino secundário, Maknun et al. (2019) efetuaram um estudo sobre o impacto do trabalho investigativo dos alunos sobre a relação da Trigonometria Triangular, a definição circular das razões trigonométricas e, a posterior, ligação com as Funções Trigonométricas. Segundo os autores, os alunos mostravam ter dificuldade em distinguir os diferentes contextos da Trigonometria: a Trigonometria concebida no contexto da relação das razões entre lados de um triângulo retângulo e um ângulo agudo do triângulo e a Trigonometria concebida no contexto das funções, onde se estipula uma correspondência entre dois conjuntos (o domínio e um intervalo de números reais). Neste enquadramento, os alunos eram, preferencialmente, propensos a erros ou equívocos de compreensão no contexto das Funções Trigonométricas (Maknun et al., 2019). Este estudo mostrou que os alunos tinham dificuldades em distinguir os dois contextos supramencionados. A título de exemplo, os autores referem que quando questionados sobre a solução de $\sin x = \frac{1}{2}, 0° \leq x \leq 360°$ os alunos responderam que tinha de ser $30°$. Embora $30°$ seja solução, não é a única solução, mostrando que o seu conhecimento conceptual está ligado ao contexto da Trigonometria no triângulo. Na representação gráfica da função seno, os autores referem que os alunos se referiam ao eixo dos xx como o eixo dos "graus", em vez de números reais e que, por esse motivo, para escreverem coordenadas arbitrárias de $y = \sin x$, os alunos escreviam, por exemplo, $\left(30°, \frac{1}{2}\right)$. Durante a realização das tarefas investigativas, os autores, perceberam existir uma maior propensão para o surgimento de um comportamento investigativo, com o surgimento de questões por parte dos alunos. No entanto, observaram dificuldades ao nível do trabalho de grupo, onde alunos com maiores habilidades tinham tendência a trabalharem individualmente. Chegaram a duas conclusões fundamentais: (1) A tarefa proporcionou maior compreensão sobre a definição das razões trigonométricas no círculo; (2) A tarefa proporcionou uma maior compreensão sobre a ligação entre as coordenadas dos pontos $(x, \sin x)$ e a razão trigonométrica seno na definição circular.

Numa investigação envolvendo alunos do ensino secundário, Bornstein (2020) realizou um estudo sobre o impacto da exploração do tema das transformações de Funções Trigonométricas com recurso à tecnologia e à realização de *Rich Tasks* (tarefas ricas), onde utilizou o *software TrigReps* para efetuar a recolha e o tratamento de dados. Este estudo teve como objetivo ajudar os alunos a compreender as propriedades das transformações de funções em detrimento da sua memorização, mais concretamente, ajudar os alunos a perceber as propriedades das transformações sobre os gráficos das Funções

Trigonométricas e raciocinar com base nessas propriedades. Nas conclusões da investigação, Bornstein (2020) refere que, com a ajuda do software, os alunos puderam representar um grande número de gráficos em pouco tempo, permitindo-lhes analisar múltiplas transformações ocorridas nas representações gráficas. O *software* utilizado relaciona a definição circular do seno, a representação gráfica da função seno transformada, a representação algébrica e a aplicação dessa função ao som. No entanto, o autor aponta dificuldades relacionadas com o conhecimento conceptual, nomeadamente, a compreensão sobre a relação entre o círculo trigonométrico, a definição circular do seno e o círculo de raio um. No final da tarefa, Bornstein (2020) afirma que os alunos revelaram ser capazes de prever o comportamento de uma única transformação sobre o gráfico da função, tendo a tarefa possibilitado a oportunidade de perceber conexões entre as representações algébricas, gráficas, no círculo trigonométrico e o áudio resultante das transformações sobre a função seno, apesar dos alunos tirarem conclusões com recurso a poucos testes.

Em suma, com base nos resultados de diferentes estudos empíricos, podemos perceber que os alunos manifestam dificuldades de diferentes naturezas quando realizam tarefas de estrutura aberta, em particular, quando realizam tarefas de estrutura aberta em temas relacionados com a Trigonometria. Algumas dificuldades apresentadas estão ligadas a aspetos específicos da realização desta tipologia de tarefa, outras estão ligadas a dificuldades ao nível conceptual do conteúdo em estudo. Os alunos tendem, portanto, a mostrar propensão para formular afirmações em vez de questões. Geralmente, tiram conclusões com base num número reduzido de testes e não sentem necessidade de formulação de prova ou justificação das conjeturas que tomam como verdadeiras. No que diz respeito à Trigonometria ou ao tema das Funções Trigonométricas, os alunos mostram ainda ter dificuldades ao nível conceptual, dificultando, inicialmente, a progressão e a articulação na exploração das tarefas.

CAPÍTULO 3

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL

Neste capítulo, pretendo explanar a conjuntura educativa e social vivenciada pelos alunos durante o ano letivo em que fiz a implementação do meu projeto de intervenção pedagógica. Apresento o contexto político que a escola enfrentou, a oferta educativa, a oferta tecnológica e a oferta de participação comunitária. Apresento a caracterização da turma e uma breve análise sobre as avaliações sumativas ao longo do secundário. Explano o plano da intervenção pedagógica, as metodologias de ensino e aprendizagem aplicadas e, ainda, as estratégias de avaliação da ação.

3.1. Caracterização da escola

A escola onde implementei o meu projeto de estágio é uma escola secundária situada em zona urbana, a sua origem remonta a 1884, altura em que era uma escola ligada ao ensino técnico. Atualmente, a oferta educativa é mais alargada. Esta escola oferece aos seus alunos os três cursos científico-humanísticos: Ciências e Tecnologias, Economia e Línguas e Humanidades. Consagra escolhas profissionais entre seis cursos profissionais, num leque de Artes, Desporto, Turismo, Secretariado e Eletrónica. A Robótica, o Teatro, a Arqueologia, o Ambiente, a Literatura e o Desporto Escolar são também valorizadas nesta instituição através de clubes e oficinas, nas quais os alunos podem participar a nível extracurricular. As instalações atuais foram inauguradas em 1980 e sofreram requalificação no ano letivo 2010/2011. A escola entrou em processo de um Agrupamento de Escolas no ano de implementação do meu projeto, situação que se mostrou do desagrado da população escolar e que foi vivida com intensidade pela comunidade escolar.

Nesta escola, é visível a consciência da importância e do desenvolvimento da tecnologia na sociedade atual, está equipada e mantém-se atualizada: tem um sítio na *internet*, com informação disponível para toda a comunidade, desde o projeto educativo, o regulamento interno, informação sobre e para docentes, disciplinas, notícias de atividades da escola e até a legislação pertinente no contexto escolar. Disponibiliza a plataforma *Moodle* e o livro de ponto *on-line*. Todas as salas de aulas estão equipadas com um computador e um videoprojector. Algumas salas estão, também, apetrechadas por um quadro interativo. Dispõe ainda de uma biblioteca equipada com computadores, dois laboratórios multimédia, quatro laboratórios de *hardware* e quatro de *software*, uma sala de música com estúdio para rádio e televisão, e ainda um estúdio de rádio gerido pela associação de estudantes. Atualmente, além do sítio na *internet* e todos os equipamentos físicos, dispõe também de páginas nas redes socias, *internet*

WiFi por todas as zonas da escola, numa clara procura de aproximação de comunicação com os alunos e respondendo às novas necessidades.

No início do ano letivo, contava com cerca de mil e trezentos alunos. Após o processo de agrupamento este número foi em muito ultrapassado. Já quanto aos docentes, para o ano letivo em questão, a escola tinha cento e noventa e sete, dos quais dezanove eram do grupo de Matemática.

Ao nível social, a escola contava com um gabinete de apoio educativo especializado em surdez, que auxiliava os alunos da turma com Necessidades Educativas Especiais.

A escola encontrava-se também envolvida em vários projetos com a comunidade não escolar, nomeadamente em parceria com lares de idosos, com o Instituto do Sangue e com a *Caritas Arquidiocesana de Braga*. Participava em exposições, espetáculos e concursos, como o Plano Nacional de Leitura e o projeto Crescer com as Árvores. É uma escola que, desenvolve um projeto educativo com grande envolvimento dos alunos nos projetos extracurriculares, proporcionando uma formação integral: técnica e de cidadania. De facto, pela qualidade dos resultados, pela prestação de serviço educativo e pela liderança e gestão, esta escola foi avaliada em Muito Bom nos níveis de autoavaliação, liderança e gestão, prestação de serviço educativo e Bom no nível resultados, na avaliação externa de 2018.

Toda a dinâmica da escola era propícia à criação de atividades extracurriculares e acolhidas com entusiasmo. No que alude ao Núcleo de Estágio de Matemática, nesse ano, organizámos o Canguru Matemático, as Olimpíadas da Matemática, um Torneio de Xadrez aberto a outras escolas e que contou com a participação de cento e vinte alunos. Organizámos também uma visita de estudo à exposição "Atractor", na Reitoria da Universidade do Porto. Tais experiências considero que são essenciais na formação enquanto professora.

3.2. Caracterização da turma

A turma onde implementei o meu projeto é do 12.º ano, integrando 31 alunos do curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias, onde a disciplina de Matemática A fazia parte do currículo. A turma tinha ainda mais oito alunos externos que lhes foi dada autorização para assistirem às aulas.

As idades dos alunos da turma estão compreendidas entre os 16 e os 18 anos, prevalecendo os alunos com 17 anos (84%). Relativamente ao género, 81,48% são do sexo feminino. Todos os alunos da turma pretendiam ingressar no Ensino Superior. No entanto, 72% declara não saber qual o curso que pretende seguir. Do que fui observando em contexto de sala de aula, ao longo do ano, não há casos de comportamento inadequado na turma. Em geral, estes alunos são interessados e com uma atitude motivada face aos conteúdos lecionados. Contudo, como já referi anteriormente, mostram passividade na construção do conhecimento, não se tornando agentes ativos da sua própria aprendizagem. Nas reuniões de avaliação, outros professores comentavam não haver problemas de comportamento, no entanto, referiam ser uma turma com alunos que se distraem muito.

Dos alunos da turma, sete já tiveram uma retenção durante o secundário, treze consideram que Matemática é a disciplina que sentem mais dificuldade e seis como sendo a sua disciplina preferida. Importa referir que vinte e um alunos têm acompanhamento ao estudo de Matemática fora da escola. Todos têm computador em casa, havendo apenas um que não tem acesso à *internet*.

Os alunos têm cinco disciplinas, o que lhes permite só terem aulas durante o período da manhã. O seu horário escolar era compreendido entre as 8h20m e as 13h20m.

Relativamente ao meio familiar e económico, todos os alunos vivem com ambos os pais e seis não têm irmãos. A idade média das mães é de quarenta e sete anos e dos pais quarenta e oito anos. Nove mães e nove pais têm formação superior. Sete alunos têm subsídio. Quatro têm a mãe em situação de desemprego e dois o pai. Nenhum agregado acumula situação de desemprego em ambos os pais. Os alunos residem a uma média de cinco quilómetros da escola, com mediana de cinco quilómetros e meio.

Relativamente à avaliação sumativa da disciplina de Matemática dos alunos ao longo do secundário, verifica-se algumas variações (Tabela 1).

Tabela 1: Síntese das avaliações sumativas de Matemática dos alunos da turma

	10º	**11º**	**12º**
Média ($\bar{x}$)	12,43	12,07	13,13
Desvio Padrão (σ)	3,4	3,69	3,68
Negativas	5	8	4
Positivas	23	20	19
Superior a 15 valores	4	5	6

Da análise dos dados da Tabela 1, constata-se que a média das avaliações da turma varia pouco ao longo dos três anos do ensino secundário, mantendo-se entre os doze e os treze valores.

A variação dessas avaliações em relação à média é ligeiramente superior nos 11.º e 12.º anos em relação ao 10.º ano, o que faz concluir que as avaliações dos alunos da turma são heterogéneas.

Houve um aumento de cerca de 11% do número de negativas e 3,5% do número de classificações acima de quinze valores. Estas diferenças são atenuadas do 11.º para o 12.º ano. Do que podemos constatar da análise dos dados, cinco alunos anularam a disciplina no 12.º ano, o que provocou um ligeiro decréscimo do desvio padrão, do 11.º para o 12.º. Considerando estes cinco alunos, verifica-se que o número de negativas aumentou ao longo dos três anos, bem como o número de alunos com notas superiores a quinze. O que mais uma vez leva a concluir a heterogeneidade da turma no que diz respeito à avaliação sumativa e, consequentemente, quanto à apropriação dos conteúdos.

3.3. Plano geral de intervenção

Neste subcapítulo são descritas as metodologias de ensino e de aprendizagem utilizadas durante a intervenção pedagógica, assim como as estratégias de intervenção e de avaliação da ação pedagógica.

3.3.1. Metodologias de ensino e aprendizagem

Durante a planificação das aulas mantive a preocupação de desenvolver a minha intervenção pedagógica segundo as orientações contemporâneas para o ensino de Matemática e, sempre, em mente tratar-se de um 12.º ano, fim de ciclo, com o culminar do ano escolar num exame nacional, cuja relevância está fortemente ligada às escolhas sobre o futuro destes alunos.

Deve fazer parte das preocupações do professor propor aos alunos tarefas de diferentes naturezas, que promovam o desenvolvimento de diferentes competências, que enriqueçam as aprendizagens académicas e que promovam o crescimento de seres humanos conscientes de si próprios e do que os rodeia. As orientações sobre as competências-chave para o séc. XXI apontam para a formação de indivíduos capazes de pensar de forma crítica e criativa, que tenham a capacidade de resolver problemas complexos, que sejam capazes de se adaptar a situações novas, que consigam comunicar assertivamente e que tenham a capacidade de colaborar com os demais. A literatura aponta que, no ensino e aprendizagem da Matemática, devemos proporcionar aos alunos experiências diversificadas, desafiantes, que promovam a atividade dos alunos e que elevem o pensamento dos alunos para níveis de maior compreensão e apropriação do que lhes é ensinado, porque, na verdade, "ser competente num domínio tão complexo como a matemática envolve a capacidade de usar o conhecimento com flexibilidade" (NCTM, 2007, p. 21). Só através da compreensão os alunos "são capazes de resolver os novos tipos de problemas que, inevitavelmente, irão enfrentar no futuro" (NCTM, 2007, p. 22).

Por todas estas razões, durante a intervenção pedagógica, foram propostas aos alunos tarefas de estrutura aberta, tendo por base a ideia de que o aluno é o promotor da própria aprendizagem. O NCTM (2007) orienta-nos que "os alunos devem aprender matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios" (p. 21). O aluno deve, portanto, ser o agente ativo na procura, descoberta e construção do conhecimento matemático (Jesus & Pinto, 2019; Ponte, 2003a). Quando confrontados com situações problema, em particular, situações de investigação, os alunos adquirem "modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas, que lhes serão muito úteis fora da aula de Matemática" (NCTM, 2007, p. 57).

As aulas, com recurso a tarefas de exploração ou investigação, seguem três momentos principais, que não são necessariamente imiscíveis: (1) A introdução da tarefa; (2) O desenvolvimento da tarefa; e (3) A apresentação e discussão de resultados (Fonseca, et al., 1999; Oliveira, et al., 1998). Durante o desenvolvimento da tarefa, desempenhei o papel de orientador, acompanhei os trabalhos dos alunos no sentido de os ajudar a ultrapassar bloqueios ou tornar a exploração ou investigação mais rica (Fonseca, et al., 1999). Durante a apresentação de resultados, incentivava a discussão da turma sobre estratégias, hipóteses e justificações dos diferentes alunos ou grupos, desempenhando o papel de moderador. Nesta fase, procurava desenvolver nos alunos a capacidade de comunicar e argumentar em Matemática (Oliveira et al., 1998).

Trabalho de grupo

Na realização das tarefas de exploração ou de investigação, durante a intervenção pedagógica, os alunos foram organizados em pequenos grupos, criando assim um ambiente propício à discussão e troca de ideias, à argumentação, à criação e justificação de conjeturas. Ponte et al. (1997) defendem que

> Trabalhar em pequeno grupo permite aos alunos expor as suas ideias, ouvir os seus colegas, colocar questões, discutir estratégias e soluções, argumentar e criticar argumentos. Em pequeno grupo, torna-se mais fácil arriscar os seus pontos de vista, avançar com as suas descobertas e exprimir o seu pensamento (p. 19).

Segundo o NCTM (1994), "trabalhar em grupo é uma excelente forma de levar os que estão a aprender a fazer explorações, desenvolver argumentos matemáticos, formular conjeturas, validar possíveis soluções e encontrar conexões entre diferentes ideias matemáticas" (p. 131). O trabalho de grupo surge como uma metodologia que oferece inúmeras vantagens que não estão disponíveis quando se trabalha individualmente. Para além de toda a comunicação matemática envolvida quando se trabalha entre pares, o trabalho de grupo possibilita o desenvolvimento do respeito pelo ponto de vista dos outros e o possível surgimento de novas ideias, operando no desenvolvimento de competências comportamentais, de conduta e atitudes. Enquanto professora, recorria a "pedagogias diferenciadas que perspetivem a progressão individual dos alunos, num contexto educativo e sociocultural frequentemente heterogéneo" (Pato, 2001, p. 9). Com efeito, "sermos capazes de aprender a relacionarmo-nos e a cooperar com os outros, aparece cada vez mais como uma das dimensões axiais numa sociedade multirracial e multicultural" (Bessa & Fontaine, 2002, p. 47). Na época atual, a sociedade impõe nos sujeitos, nos mais variados contextos, sejam eles laborais, escolares ou familiares, a capacidade de colaborar com os de mais (Pereira et al., 2017).

Dada a reconhecida importância no trabalho de grupo cooperativo e certa do contributo positivo na aprendizagem dos alunos, durante a intervenção pedagógica, propus aos alunos diferentes modos de interação, com momentos individuais, em díades e, fundamentalmente, em pequenos grupos de três a quatro elementos.

Apresentação de conclusões e discussões no grupo-turma

Os momentos de discussão no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática são tidos, por muitos autores, não só como importantes, como também fundamentais (Fonseca et al., 1999; Jesus & Pinto, 2019; NCTM, 2007, 1994; Ponte, 2005). O valor da interação social na sala de aula de Matemática, nomeadamente a discussão coletiva, assume o papel, segundo Guerreiro e Serrazina (2018), de "uma corrente de investigação com expressão significativa em educação matemática" (p. 70). Com efeito, Ponte e Serrazina (2000) defendem que "o professor deve conduzir a comunicação na aula de Matemática de modo que os alunos oiçam, respondam, comentem e façam perguntas uns aos outros" (p. 6). No seio do grupo, os alunos desenvolvem competências através da troca de ideias e do diálogo (Pocinho, 2018). A resolução de situações problema na aula de Matemática deve ser uma atividade interpessoal, e explicar e discutir em pequeno grupo proporciona a confiança para uma posterior discussão com o grupo-turma (Branco & Maritinho, 2015).

O momento de discussão no grupo-turma traz contributos fortes para a aprendizagem dos alunos, uma vez que propiciam o surgimento de processos de negociação sobre conceitos matemáticos. É, também nestes momentos, que se formaliza e clarifica os raciocínios e as conclusões (Rodrigues et al., 2014). É, igualmente, nesta fase que o professor procura chamar a atenção dos alunos para pontos relevantes do trabalho desenvolvido e estimula os alunos a interrogarem as afirmações dos colegas (Oliveira et al., 1998).

Por toda a envolvência gerada em torno das ideias matemáticas, que nascem no trabalho investigativo dos alunos e pela importância dos momentos de discussão coletiva no ensino e na aprendizagem de Matemática, que esta metodologia foi exercitada durante a intervenção pedagógica. Despois da tarefa ser debatida e realizada cooperativamente em pequeno grupo, eram apresentadas as conclusões por diferentes elementos de cada grupo e debatidas as ideias e conclusões a que chegaram, culminando na formalização dos conceitos matemáticos trabalhados na tarefa.

3.3.2. Estratégias de avaliação da ação

As ideias principais de uma investigação, segundo Flick (2005), assentam numa boa escolha de métodos e teorias adequadas, na reflexão do investigador sobre a investigação, na identificação e análise de diferentes perspetivas de quem participa e na variedade de métodos de recolha. Os métodos de recolha de dados, segundo Hérbert et al. (1995), podem ser categorizadas em três tipos: (1) Análise documental, ou seja, as reproduções escritas de quem participa; (2) Inquéritos, que podem ser através da escrita (questionário) ou oral (entrevista); (3) Observação. Tendo como referência as orientações destes autores e tendo como principal propósito dar resposta às perguntas de investigação que orientam este estudo, enquanto métodos de recolha de dados, ao nível de análise documental, foram analisadas todas as reproduções dos alunos na realização das tarefas de exploração ou de investigação, bem como os trabalhos de investigação realizados em grupo fora da sala de aula. Ao nível de inquéritos, foram analisadas todas as repostas a um questionário escrito, facultado aos alunos no final da intervenção pedagógica. Ao nível das observações, foram analisadas as gravações em vídeo das aulas da intervenção, bem como as gravações em áudio das discussões tidas em pequeno grupo.

Análise documental

Iniciei, antes da realização deste estudo, com a análise do programa de Matemática A do 12.º ano e também com a análise do capítulo referente ao estudo das Funções Trigonométricas do manual escolar adotado pela escola. Durante a intervenção pedagógica foram propostas aos alunos quatro tarefas de exploração e uma tarefa de investigação, em contexto sala de aula. Algumas das quais com recurso à calculadora gráfica, tendo sempre em conta as orientações do programa. A primeira tarefa de exploração teve como objetivo compreender a relação existente entre a razão seno no círculo trigonométrico e a função real de variável real $y = \sin x$. A segunda, teve como objetivo estudar intuitivamente o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$, com recurso à calculadora gráfica. Para o estudo das funções derivadas das três Funções Trigonométricas estudadas durante o Secundário, propus também uma tarefa de exploração. A quarta tarefa de exploração teve como objetivo aplicar os conceitos trabalhados durante a intervenção a um problema do contexto real. A tarefa de investigação proposta em sala de aula teve como objetivo, em primeira instância, estudar os efeitos da variação de parâmetros em funções da família $y = a + b\sin(cx + d)$, comparativamente à função $y = \sin x$ e, num segundo momento, estudar a possível existência da função inversa da função $y = \sin x$, com uma possível proposta para uma restrição bijetiva do domínio.

Foram ainda propostas oito tarefas de investigação a serem realizadas fora de sala de aula, realizadas em pequeno grupo. Cada grupo teve uma proposta diferente de tarefa. Estas tarefas tiveram o principal objetivo de colocar os alunos no papel de um investigador e proporcionar-lhes a oportunidade de perceberem a utilização das funções periódicas nos mais diversos contextos, como, por exemplo, no estudo das marés ou do comprimento dos dias em Portugal, no estudo da pressão arterial ou na aproximação ao número π, através do cálculo de áreas de figuras geométricas regulares inscritas num círculo de raio um.

Inquéritos: questionário

Os questionários ou entrevistas são instrumentos que permitem colocar as mesmas perguntas a todos os participantes do estudo, o que proporciona a aquisição informativa acerca da perspetiva destes relativamente ao objeto em estudo, com o objetivo de obter os dados pretendidos eficazmente e com o mínimo de desvio (Bogdan & Biklen, 1994).

De acordo com Tuckman (2002), os questionários permitem a recolha de informação sem que haja uma influência do investigador sobre os dados, possibilitando a aquisição de informação empírica crucial para o enriquecimento do estudo. Na intervenção pedagógica apliquei um questionário no final da intervenção (Anexo 2), como o objetivo de perceber a perspetiva dos alunos sobre os contributos das tarefas de exploração ou de investigação na aprendizagem dos conteúdos do tema das Funções Trigonométricas, quais os contributos das tarefas de exploração ou de investigação no desenvolvimento de competências, que dificuldades sentiram na realização de tarefas de investigação e que aspetos positivos e que aspetos negativos apontam na realização de tarefas de exploração ou tarefas de investigação. Os questionários foram organizados em cinco grupos de questões. O primeiro grupo inquere quanto às caraterísticas da população em estudo (idade, sexo, avaliação sumativa durante o secundário e número de retenções). O segundo grupo de questões inquere sobre os contributos das tarefas de caráter aberto na aprendizagem do tema das Funções Trigonométricas, onde os alunos deveriam manifestar o seu grau de concordância ou discordância a cada uma das afirmações, numa escala tipo Likert: DT: Discordo Totalmente; D: Discordo; I: Indiferente; C: Concordo; e CT: Concordo Totalmente. Na análise das respostas foi considerado, para efeitos de cálculo de média e desvio padrão, a correspondência numérica: DT – 1, D – 2, I – 3, C – 4 e CT – 5. O terceiro e quarto grupo de questões inquerem quanto ao contributo das tarefas de caráter aberto para o desenvolvimento de competência e quais as dificuldades sentidas na realização das tarefas de investigação, respetivamente. Nestes grupos de questões, os alunos deveriam manifestar o grau de contribuição, numa escala de Nenhum Contributo, até Muito Contributo. Na análise das respostas foi considerado, para efeitos de cálculo de média e desvio padrão, a correspondência numérica: Nenhum – 1, Pouco – 2, Algum – 3 e Muito – 4. O quinto grupo é composto por três questões de resposta aberta, onde se procura perceber, na perspetiva do aluno, que diferenças existem entre exercícios, problemas e tarefas de exploração ou investigação e que aspetos positivos e aspetos negativos apontam na realização de tarefas de exploração ou de investigação na aprendizagem dos conteúdos do tema das Funções Trigonométricas. A informação que emerge deste método de recolha de dados é apresentada segundo a nomenclatura Q(questionário)A(aluno)n(número).

Observações

Durante a intervenção pedagógica recorri à gravação de vídeo e de áudio das aulas, as quais foram pedidas autorização aos Encarregados de Educação e à Direção da Escola (Anexo 3). As gravações audiovisuais constituem, segundo o NCTM (2007), uma prática basilar no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que permitem ao professor refletir sobre as várias decisões tomadas no decurso da aula e reviver ocasiões de interação entre ou com os alunos.

As gravações em áudio foram cruciais para análise dos momentos de discussão em pequeno grupo, durante o desenvolvimento das tarefas, fornecendo a fonte de diálogos entre os alunos de um mesmo grupo e entre os alunos e a professora. As gravações em áudio permitiram-me desenvolver uma análise detalhada da evolução dos alunos dentro da tarefa e ter uma visão mais real sobre momentos dos processos de ensino e de aprendizagem. A informação que advém deste método de recolha, sobre momentos da minha prática pedagógica, é apresentada segundo a terminologia G(gravação)A(áudio)n(número)-dia/mês.

As gravações de vídeo permitiram-me analisar a dinâmica das aulas, analisar a minha postura enquanto professora, analisar a fluência da aula e de que forma promovia a comunicação matemática e a participação dos alunos. Após a intervenção pedagógica, as gravações de vídeo permitiram-me analisar os diálogos na fase de discussão das tarefas com o grupo-turma. A informação decorre deste método de recolha, sobre momentos da minha prática pedagógica, é apresentada segundo a nomenclatura G(gravação)V(vídeo)n(número)-dia/mês.

Elaborei também pós-reflexões de aulas, onde registei momentos vividos na sala de aula. Estas reflexões permitiram-me analisar a perspetiva humanista sobre os receios e entusiasmos dos alunos durante a realização das tarefas. Na análise das aulas e nas conclusões é usado o código R(reflexão)A(aula)n(número)-dia/mês, para fazer referência às pós-reflexões.

CAPÍTULO 4

INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Este capítulo inicia-se com a apresentação da síntese da intervenção pedagógica. Seguidamente é explanada uma análise do manual escolar adotado pela escola, com o objetivo de percecionar de que forma o manual poderia ser útil para a realização de tarefas de exploração ou de investigação. São, depois, analisadas três aulas da intervenção pedagógica e analisadas as reproduções dos alunos na realização das tarefas, com o objetivo de percecionar que atividades desenvolvem e que dificuldades enfrentam os alunos na realização desta tipologia de tarefa no tema das Funções Trigonométricas. Por último, são analisados os questionários, com o intuito de perceber quais a perceções dos alunos sobre os contributos das tarefas de exploração ou de investigação na aprendizagem dos conteúdos referentes ao tema das Funções Trigonométricas e bem como os contributos sobre desenvolvimento de competências.

4.1. Síntese da Intervenção Pedagógica

Na dinamização da minha prática pedagógica integrei nas minhas estratégias de ensino tarefas de exploração para introduzir os propostos teóricos, de modo a envolver os alunos na construção dos conhecimentos, bem como os desafiei a desenvolverem trabalhos de investigação, em grupo, fora do contexto de sala de aula.

Neste relatório irei explanar e analisar parte das tarefas implementadas que considero serem mais elucidativas das práticas desenvolvidas e dos resultados obtidos. Uma vez que o manual escolar constitui um dos artefactos didáticos mais utilizados no processo de ensino e de aprendizagem, achei pertinente fazer uma análise do capítulo do manual dos alunos relativo ao estudo das Funções Trigonométricas, na procura de perceber que tipo de tarefas tem e em que medida pode ser útil na minha prática pedagógica. Posteriormente, analiso a informação recolhida nas aulas dedicadas ao estudo da função seno, onde utilizei uma tarefa de exploração, e das famílias de funções seno e cosseno, onde recorri a uma tarefa de investigação e analiso uma tarefa de exploração dedicada à aplicação das funções periódicas ao contexto real. A análise de tal informação serve de ilustração de momentos da minha ação pedagógica.

Segue-se, no Quadro 10, uma síntese da Intervenção pedagógica, com a descrição do tópico onde utilizei tarefas de exploração ou de investigação, o nome da tarefa, a sua tipologia e quais os objetivos da utilização da tarefa no tópico referido.

Quadro 10: Síntese de intervenção pedagógica

Tópico	Tarefa	Tipologia de Tarefa	Objetivos
Estudo da função seno.	A função Seno	Exploração	Análise das características da função seno através de processos analíticos e gráficos.
Famílias de funções trigonométricas Seno e Cosseno.	Investigar funções trigonométricas	Investigação	Investigar a influência da variação de parâmetros em famílias de funções trigonométricas.
Estudo intuitivo de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$	Descobrir o Limite Notável	Exploração	Concluir intuitivamente o valor do limite notável $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$
Derivada das funções seno, cosseno e tangente	Lançamento de um projétil	Exploração	Determinar as funções derivadas das funções trigonométricas e aplicar o conceito em contexto de vida real.
Contexto de vida real	A respiração num mamífero	Exploração	Aplicar os conhecimentos adquiridos de funções trigonométricas em problemas de contexto real.
Aplicação do estudo da Função Seno e da Função Cosseno	O periódico na vida	Investigação	Trabalhos realizados em grupo, com o principal objetivo da implementação dos conteúdos a contextos do dia a dia; A extrapolação e criatividade de ideias; Modelar situações reais; Reconhecer a Matemática como um instrumento de interpretação do mundo físico.
	Trigonometria das marés	Investigação	
	Pressão Arterial	Investigação	
	O comprimento do dia	Investigação	
	Internet por cabo	Investigação	
	Viagem ao centro da Terra	Investigação	Trabalhos realizados em grupo, onde os alunos interpretam o papel de desenvolvedor de Matemática, percebendo que muito embora a Matemática tão bem interprete o mundo físico, mas não precisa dele para existir.
	Ângulo do cone	Investigação	
	Aproximação ao número π	Investigação	

4.2. Manual Escolar

Existem muitos materiais didáticos que apoiam as atividades da sala de aula, no entanto, nenhum parece ter o papel protagonista nos vários momentos da aula e no estudo dos alunos, como o manual escolar (Viseu & Morgado, 2011). Para Chopin (2004), o manual escolar assume quatro funções, a função curricular ou programática, a função instrumental, a função ideológica e cultural e a função documental (cit. Viseu & Morgado, 2011). Não há dúvida do papel basilar do manual escolar na sala de aula, no ambiente de estudo dos alunos e da consideração do professor nos momentos de preparação das aulas. No caso particular da Matemática, Viseu e Morgado (2011), num estudo feito junto de professores de Matemática, concluíram que

> mesmo recorrendo a outros manuais e fontes de informação, existem professores que continuam a evidenciar uma conceção de ensino que valoriza sobretudo a transmissão de informação, a explanação da teoria a partir da figura do professor e a utilização do manual como um recurso exclusivo para a resolução de exercícios. (p. 999)

As conclusões do estudo apontam para o uso do manual como um compêndio de exercícios. Não obstante, independentemente do papel atribuído ao manual na sala de aula de Matemática, "para aprender Matemática, não basta ao aluno fazer exercícios. É preciso desafiá-lo com problemas interessantes" (Ponte, 2003a, p. 107) e por isso deve vir munidos de tarefas de diferentes naturezas. Por este motivo, propus-me fazer uma análise do manual escolar adotado, onde irei observar aspetos ao nível do conteúdo (relação conteúdo/programa, rigor científico, contextualização), ao nível da estrutura (Metodologia, tarefas propostas, Avaliação) e ao nível da comunicação (relação ilustração texto, terminologia e sintaxe, Materiais) (Silva, 2004).

Análise geral do manual escolar

O manual adotado pela escola onde implementei o meu projeto é composto por dois volumes e traz consigo um caderno de atividades. O tema das Funções Trigonométricas é abordado no segundo volume. No início dos capítulos encontra-se uma contextualização histórica referente ao tema desse capítulo, com pequenos textos sobre matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento do ramo da Matemática estudada no capítulo. Cada temática inicia-se com uma tarefa de natureza exploratória ou uma tarefa que ajude o aluno a recordar conceitos lecionados em anos anteriores, cujas noções farão falta para a compreensão do novo tema. As restantes páginas exibem uma margem lateral com exercícios que, pontualmente, são usados para contextualização histórica e, no corpo de texto, encontram-se definições, exemplos e esquemas ou quadros resumos. Encontram-se, também, algumas demonstrações simples de teoremas ou proposições. Os finais de capítulo são compostos por uma considerável coleção de problemas, quer de escolha múltipla, quer de resposta aberta. A não existência de tarefas carácter investigativo no manual é o ponto frágil na ênfase do domínio dos conhecimentos, uma vez que o conhecimento não pode ser apenas reproduzir, é preciso ser capaz de criar (Ponte, 2003a).

Sobre a atualidade da informação, parece-me que o aluno não consegue perceber, através deste manual, o impacto que a Matemática tem na nossa sociedade e de como esta é matematizada. Arrisco dizer que o manual transmite a ideia de que a Matemática era muito mais presente há centenas de anos do que atualmente, sendo, agora, um produto acabado e sem contributos no dia a dia. O que não deixa de ser paradigmático, uma vez que o manual apresenta alguma aposta em problemas de contexto real. No entanto, o que predomina são exercício de aplicação imediata de conceitos.

Considero que o ponto forte deste manual é o seu enquadramento com as orientações do currículo, a linguagem e notação adequadas ao nível de ensino e a diversidade de problemas.

As Funções Trigonométricas e as tarefas no Manual Escolar

Nesta secção, como na análise geral, proponho observar o que se refere aos conteúdos e objetivos a estudar no tema das Funções Trigonométricas.

Quadro 11: Orientações e objetivos do Manual Escolar

Revisões:
- Círculo trigonométrico;
- Redução ao primeiro quadrante;
- Resolução de equações trigonométricas;

Estudo das Funções Trigonométricas (seno, cosseno e tangente) recorrendo à calculadora gráfica:
- Domínio e contradomínio;
- Período;
- Pontos notáveis;
- Monotonia e extremos;
- Continuidade;
- Paridade;
- Assíntotas.

Recorrendo à calculadora gráfica, estudar a influência de parâmetros em famílias de funções e fazer o registo das conclusões.
Estudar o período em funções periódicas.
Derivar as Funções Trigonométricas seno, cosseno e tangente.
Analisar características das Funções Trigonométricas por processos analíticos e por processos gráficos.
Investigar a influência da variação de parâmetros em famílias de Funções Trigonométricas.
Utilizar modelos trigonométricos na resolução de problemas reais.

Da análise deste quadro constata-se que há uma preocupação, no manual, em cobrir todos os conteúdos programáticos do tema. Há, também, a preocupação em fazer uma revisão dos conteúdos lecionados nos anos anteriores, referentes às Funções Trigonométricas. Uma das características que se destaca positivamente, particularmente, no manual é a existência de pequenas caixas de texto denominadas *Recorda*, que tal como o nome indica contém breves resumos de matéria, como as relações de redução ao primeiro quadrante, lecionados no 11.º ano.

Quanto à tipologia de tarefas, encontram-se, ao longo do capítulo, 39 exercícios e 6 problemas nas margens laterais. O texto do capítulo é também constituído por 14 tarefas cujo intuito é introduzir conceitos, algumas delas sob a forma de problemas ou tarefas exploratórias. O final do capítulo é contemplado por 33 problemas e um teste de autoavaliação. Sem dúvida que uma qualidade deste manual é a enorme quantidade de exercícios que dispõe. No entanto, como se pode verificar, tem uma carência absoluta de tarefas de natureza investigativa. A não existência deste tipo de tarefas no manual indicia ser um ponto fraco na ênfase do domínio dos conhecimentos e das capacidades a desenvolver.

Ideia fortemente discutida durante o enquadramento teórico deste relatório de que “as tarefas de cunho mais aberto são essenciais para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas” (Ponte, 2005, p. 17). Por outro lado, apesar da não existência de tarefas de investigação, este manual é rico em tarefas de exploração de conceitos. O que, de facto, predomina neste manual são exercícios de aplicação imediata de conceitos.

Ao nível do conteúdo, a existência de quadros resumos, com cores diferente, são importantes, mostram ao aluno que algo importante está escrito naquelas linhas. No entanto, considero em excesso, tudo aparece feito e acabado, já para não falar da falta de desenvolvimento da capacidade de seleção. Sendo o manual tão presente à formação dos alunos, protagonista entre os materiais didáticos, deveria apelar ao desenvolvimento de capacidades como as de seleção, de procura, raciocínio, cultura geral, memorização, da aceitação de desafios, entre outras. De alguma maneira influenciar na construção de uma sociedade orientada ao conhecimento e à reflexão. Como? Conduzindo, por exemplo, os alunos a enciclopédias, sítios na internet, mencionar grandes obras e não subestimar as capacidades de desafio, raciocínio e curiosidade que os alunos têm. É intrínseco ao ser humano procurar, ser curioso, pensar e ir mais longe. Sendo tão importante, o manual tem de contribuir intensamente para a Educação.

O manual é um instrumento de trabalho importante, mas a o papel do professor é fundamental para a regulação do ensino-aprendizagem dos alunos, “a escolha sensata dos problemas e a utilização e adaptação dos problemas, a partir dos materiais didáticos, revelam-se tarefas complexas no ensino da matemática” (NCTM, 2007, p. 58). É por isso que o manual não deve funcionar como um recurso limitador à atividade letiva, mas sim deve “assumir um papel de formação complementar, servindo de instrumento de autoformação científica e pedagógica” (Viseu et al., 2009, p. 3189).

4.3. Tarefa de Exploração: Estudo da Função Seno

Do estudo da ‘função seno’ faz parte o domínio, contradomínio, a periodicidade da função, intervalos de sinal e zeros, intervalos de monotonia e extremos, a não injetividade e a paridade. Com este propósito, desafiei os alunos a resolver uma tarefa de natureza exploratória, em grupos de quatro a cinco alunos. A tarefa foi proposta na segunda aula da intervenção pedagógica, após uma breve revisão dos conteúdos de trigonometria lecionados nos anos anteriores.

Introdução da tarefa

O enunciado da tarefa foi dado em papel aos alunos e lidos em voz alta os três primeiros pontos da tarefa. Foi discutido em grupo turma que os quatro últimos pontos deveriam ser pensados com base nas tabelas e na representação gráfica obtida no segundo ponto da tarefa. O preenchimento das tabelas foi então distribuído e atribuído a diferentes grupos.

Estudo da função seno

1. Completa a seguinte tabela:

x (rad)	-2π	$-\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
$\sin(x)$								

x (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\sin(x)$								

x (rad)	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin(x)$								

2. Representa num referencial o.n. do plano o conjunto dos pontos de coordenadas $(x, \sin x)$. Que curva obténs?
3. A que conjunto pertence x na função definida por $y = \sin x$? E a que conjunto pertence $\sin x$?
4. Tendo em conta que existe uma infinidade de amplitudes que correspondem a um ângulo, o que podes concluir sobre a razão seno desses ângulos?
5. Estuda a função $y = \sin x$ quanto aos zeros e ao sinal no intervalo $[0,2\pi]$. E em $\mathbb{R}$?
6. Estuda a função $y = \sin x$ quanto à monotonia e aos extremos no intervalo $]0,2\pi[$. E em$\mathbb{R}$?

Desenvolvimento da tarefa

O estudo, aquando do preenchimento das tabelas, poderia ser feito assente em conhecimentos de redução ao primeiro quadrante ou com recurso à calculadora gráfica. Apenas um grupo preencheu a tabela analiticamente, através das relações de redução ao primeiro quadrante. Os restantes recorreram à calculadora gráfica. Depois de cerca de 15 minutos, desenhei as três tabelas no quadro e pedi aos diferentes grupos para que me ditassem cada uma delas, disponibilizando-as para o grupo turma. De referir que todos os alunos registaram os próprios apontamentos e anotações.

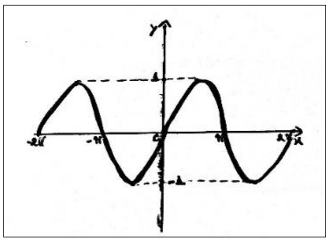
Sobre o segundo item da tarefa, do que pude perceber enquanto percorria os grupos, a maioria usou o menu estatística da calculadora para representar os pontos no referencial cartesiano e depois 'pediram' a curva que melhor se ajustava aos dados. Inicialmente, houve um grupo, cujos alunos usaram apenas uma das tabelas para aproximar a curva e concluíram que se tratava da representação gráfica de parte de uma parábola. Sobre as representações gráficas obtidas, obtiveram-se os seguintes resultados.

Tabela 2: Frequência do tipo de resposta ao item 2 da tarefa do 'Estudo da função seno'

Correto	**Parcialmente correto**	**Incorreto**	**Não respondeu**
6	2	0	0

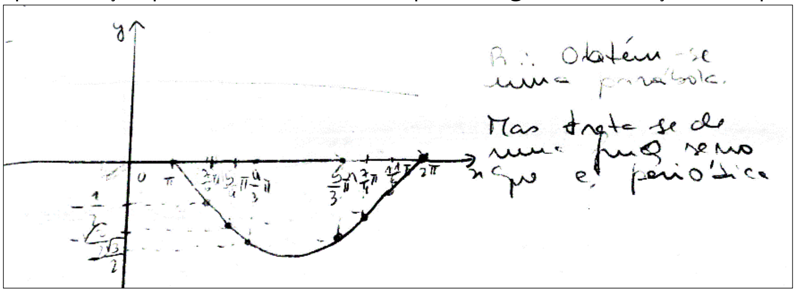
Das representações corretas, numa é mostrada a preocupação de marcar alguns pontos da tabela, as restantes mostram a preocupação de respeitar o contradomínio e a forma sinusoide do gráfico da função seno em $[0{,}2\pi]$, como exemplifica a representação do grupo G1 (Figura 2).

Figura 2: Representação correta de parte do gráfico da função seno pelo Grupo G1



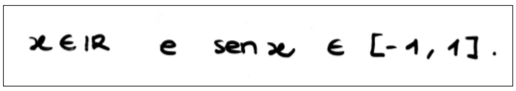
Das representações parcialmente corretas, apresentam a representação de apenas o refente a uma tabela. Considera-se parcialmente correta, uma vez que, apesar de bem representado, pode conduzir a conclusões erradas nos itens seguintes. O que de facto se verifica, uma vez que alguns alunos concluem que se trata da representação gráfica de uma parábola, como ilustra a representação efetuada pelo grupo G2 (Figura 3).

Figura 3: Representação parcialmente correta de parte do gráfico da função seno pelo Grupo G2



No item três da tarefa, todos os grupos concluíram que uma vez que não existem restrições para a variável independente, $y = \sin(x)$ toma valores entre -1 e 1, ou seja, $-1 \leq \sin x \leq 1$, aponta grupo G3 (Figura 4).

Figura 4: Representação correta do contradomínio da função seno pelo grupo G3



Também a periodicidade foi constatada por todos os grupos. No entanto, conforme ilustra a Tabela 3, apenas 25% refere corretamente que a função é periódica de período 2π.

Tabela 3: Frequência do tipo de resposta ao item 4 da tarefa do 'Estudo da função seno'

Correto	Parcialmente correto	Incorreto	Não respondeu
2	6	0	0

Acerca das conclusões parcialmente corretas, 67% destas limitam-se a afirmar que a função seno é periódica e os restantes 33% concluem que "a função seno é sempre a mesma porque é uma função periódica". A conclusão da periodicidade deveria ser apresentada, neste contexto, como a implicação inversa da proposição anterior, ou seja, a função é periódica porque tem um comportamento cíclico, ao invés de ter um comportamento cíclico, porque é periódica.

Nenhum grupo justificou a conclusão obtida de que tendo o mesmo lado origem e o mesmo lado extremidade, a razão seno, para as diferentes amplitudes é igual e, por isso, uma vez que se obtêm amplitudes diferentes para um mesmo ângulo completando um número inteiro de voltas ao círculo, a cada volta teremos o mesmo comportamento que na volta anterior. Neste caso, de período 2π.

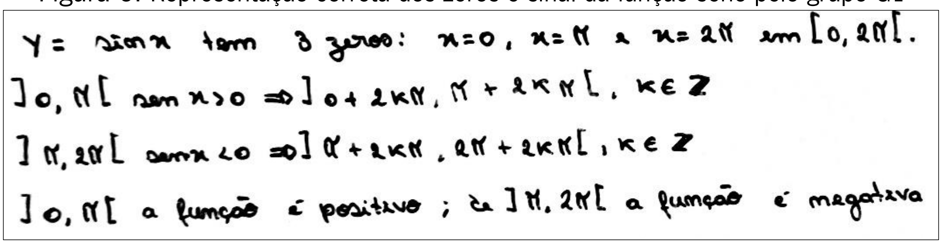
Sobre os zeros e o sinal a estudar no ponto cinco da tarefa, no intervalo $[0,2\pi]$, a função $y = \sin\, x$ tem três zeros, $x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$, é positiva em $]0,\pi[$ e negativa em $]\pi, 2\pi[$. Tendo como generalização ao domínio $\mathbb{R}$, de que $\sin x = 0$ para valores de x do tipo $k\pi, k \in \mathbb{Z}$. É positiva quando x pertence a intervalos do tipo $]2k\pi, \pi + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}$ e negativa quando x pertence a intervalos do tipo $]\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}$. Estas conclusões foram alcançadas corretamente e parcialmente corretas da seguinte forma.

Tabela 4: Frequência do tipo de resposta ao item 5 da tarefa do 'Estudo da função seno'

Correto	Parcialmente correto	Incorreto	Não respondeu
4	3	0	13

Tem-se a seguir, a título de exemplo, uma das respostas corretas, realizada pelo grupo G1:

Figura 5: Representação correta dos zeros e sinal da função seno pelo grupo G1


$y =$ sin x tem 3 zeros: $x=0$, $x=\pi$ e $x=2\pi$ em $[0,2\pi[$.

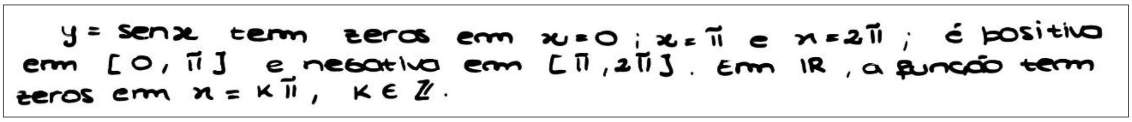
$]0,\pi[$ sen $x>0 \Rightarrow]0+2k\pi, \pi+2k\pi[, k\in Z$

$]\pi,2\pi[$ sen $x<0 \Rightarrow]\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi[, k\in Z$

$]0,\pi[$ a função é positivo ; e $]\pi,2\pi[$ a função é negativa

Das resoluções parcialmente corretas, todos concluem corretamente a existência dos três zeros e o estudo do sinal em $[0,2\pi]$. Destes, dois terços, faz a generalização dos zeros, os restantes não fizeram qualquer generalização. Na Figura 6 a representação parcialmente correta do grupo G3.

Figura 6: Representação parcialmente correta dos zeros e sinal da função seno pelo grupo G3



$y = \text{sen}\,x$ tem zeros em $x=0$; $x = \pi$ e $x = 2\pi$; é positiva em $[0, \pi]$ e negativa em $[\pi, 2\pi]$. Em $\mathbb{R}$, a função tem zeros em $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

No item seis, todos os grupos concluíram que quando $x \in [0,2\pi]$, $\sin x$ é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ ou em $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ e decrescente em $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ e que admite um máximo em $x = \frac{\pi}{2}$ e um mínimo em $x = \frac{3\pi}{2}$. Sobre a generalização para $x \in \mathbb{R}$, em que $\sin x$ é máximo para valores de x do tipo $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e mínimo para valores de x do tipo $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ e é crescente em intervalos do tipo $\left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$ e decrescente em intervalos do tipo $\left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$, apenas 14% das resoluções apresenta a generalização dos intervalos de monotonia.

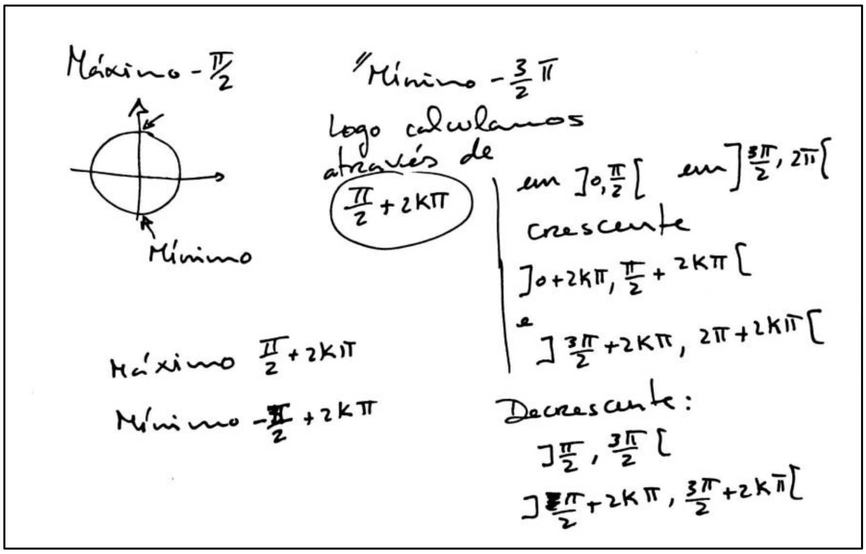
Na tabela a seguir resumem-se os resultados alcançados pelos alunos no item 6 da tarefa.

Tabela 5: Frequência do tipo de resposta ao item 6 da tarefa do 'Estudo da função seno'

Correto	**Parcialmente correto**	**Incorreto**	**Não respondeu**
1	5	0	2

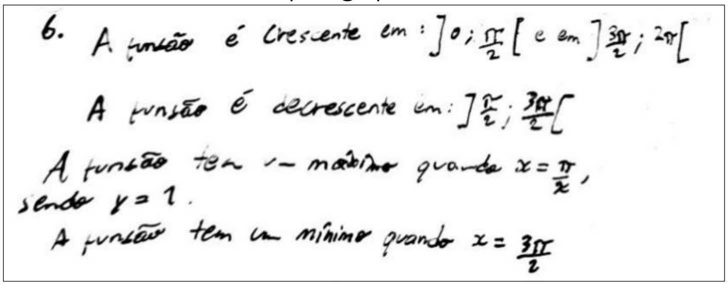
Tem-se a seguir, a título de exemplo, uma das respostas corretas, realizada pelo grupo G2.

Figura 7: Representação correta dos extremos e intervalos de monotonia da função seno pelo grupo G2



Nas respostas parcialmente corretas, um dos grupos apenas indica que a função admite o máximo $y = 1$ e o mínimo $y = -1$. Os restantes grupos estudam, somente, os intervalos de monotonia e os extremos em $[0,2\pi]$. Segue-se, a título de exemplo a representação do grupo G7.

Figura 8: Representação parcialmente correta do estudo dos extremos e intervalos de monotonia da função seno pelo grupo G7


6. A função é crescente em: $]0; \frac{\pi}{2}[$ e em $]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$

A função é decrescente em: $]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$

A função tem um máximo quando $x = \frac{\pi}{2}$, sendo $y = 1$.

A função tem um mínimo quando $x = \frac{3\pi}{2}$

Discussão final

Durante a discussão, um elemento de cada grupo apresentou as diferentes conclusões para cada item da tarefa. Uma vez que todos os grupos haviam, a dado momento, representado, na calculadora gráfica, parte do gráfico da função seno (RA2-24/04), a discussão iniciou-se no ponto 3 da tarefa.

> A1G1: Analisamos o gráfico que obtivemos em 2 e conseguimos concluir que o x pertence a $\mathbb{R}$, ou seja, que a função é contínua em $\mathbb{R}$ e a função em x, o x é o ângulo, o $sen(x)$ só varia entre -1 e 1 fechado, porque conseguimos obter estes pontos como máximos e mínimos. (GV2-24/04)

Como ninguém teve dificuldade em perceber, através da representação gráfica, o contradomínio da função seno, passou-se para a discussão do ponto 4 da tarefa.

> A1G2: Como podemos ver por aqui (referindo-se ao gráfico), esta função repete-se sempre no seu domínio, portanto podemos concluir que é uma função periódica. Porque ela, de 2π em 2π, repete-se e repete-se sempre da mesma forma. (GV2--24/04)

Apesar das respostas parcialmente corretas que se vieram a verificar nas resoluções que me foram entregues aquando do desenvolvimento da tarefa, todos os alunos mostraram assimilar a propriedade periódica da função seno (RA2-24/04).

Como se pode verificar da análise das resoluções, 62% não conseguiram generalizar ao domínio $\mathbb{R}$, o estudo do sinal de $y = \sin x$ e destes, apenas, 44% generalizaram os zeros. Pelo que, neste item, os alunos mostraram mais fragilidade na compreensão de como generalizar o que percebiam ser verdade em $[0,2\pi]$.

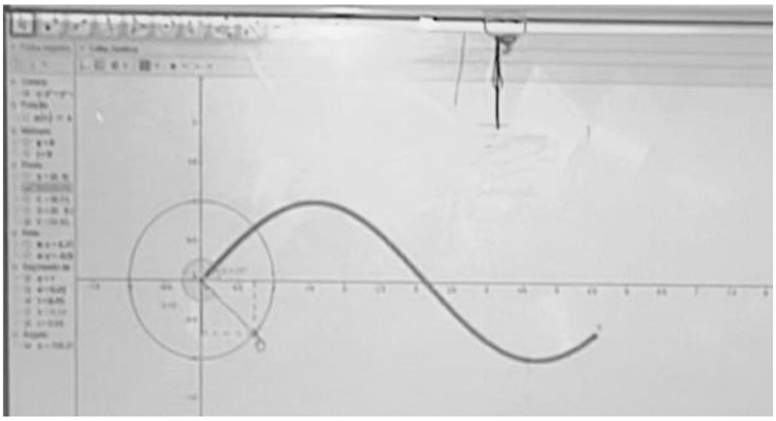
Professora:	Se recorrermos ao círculo trigonométrico, onde é que o seno é zero?
A1G1:	(*fazendo movimento no ar com o lápis, no sentido positivo da rotação*) Em 0, em π, em 2π.
Professora:	Paramos aí?
A1G1:	Não, não. Em 3π, 4π e continua.
Professora:	E se andarmos ao contrário?
A2G2:	Se andarmos ao contrário também.

Professora:	Então, vai haver zeros de quando em quando?
A2G2:	De π em π.
A1G3:	Nós adaptamos a janela para de 0 a 2π. Podemos ver que 0, π e 2π são zeros da função. De 0 a π é positiva e de π a 2π é negativa. Em $\mathbb{R}$, podemos concluir que é só passar, porque ao analisarmos aqui (*aponta para o gráfico*), para um domínio mais abrangente e podemos concluir que se repete de $k2\pi$ em $k2\pi$.
Professora:	Os zeros repetem-se de 2π em 2π?
A1G1:	Não! Repetem-se de π em π.
Professora:	Como vamos escrever os zeros da função então?
A1G1:	$0 + k\pi$.
Professora:	E o sinal? Onde é que o seno é positivo?
A1G4:	No primeiro e no segundo quadrante.
Professora:	Como vamos escrever isso?
A1G4:	De $0 + 2k\pi$ até $\pi + 2k\pi$
Professora:	E onde é negativo?
A1G4:	No terceiro e no quarto quadrante. Por isso é de $\pi + 2k\pi$ até $2\pi + 2k\pi$.

(GA2-24/04)

De forma a esclarecer as possíveis dúvidas quanto ao estudo de sinal e da monotonia, utilizei uma animação em GeoGebra, onde se estabelecia uma ponte entre a razão seno no círculo trigonométrico e a representação gráfica da função seno restrita ao domínio de $[0,2\pi]$ e, posteriormente, estendida a $\mathbb{R}$.

Figura 9: Animação da função seno no GeoGebra



Procedeu-se, após a discussão, à formalização escrita das conclusões. A aula acabou no momento em que era feito o registo no quadro dos maximizantes e dos minimizantes da função. A animação no GeoGebra mostrou-se muito útil, uma vez que os alunos transmitiram satisfação pelo que estavam a ver e a compreender, mostrando-se ser um desbloqueador da resistência inicial à mudança de tópico (RA2-24/04).

Síntese

A aula iniciou-se com uma breve revisão dos conteúdos de trigonometria lecionados no nono ano, como a definição triangular das razões trigonométricas e de décimo primeiro, como a noção de ângulo generalizado, de radiano, a definição circular das razões trigonométricas e a redução ao primeiro quadrante. Esta revisão ocupou cerca de trinta minutos do início da aula. A minha perceção das particulares dificuldades que os alunos costumam ter no tema do estudo das Funções Trigonométricas veio-se afirmar na reação dos alunos, que se mostraram mais conscientes da sua pouca preparação para defrontar os novos conteúdos (RA2-24/04). No entanto, foram conseguindo acompanhar a revisão (idem).

Após a revisão e depois de dar algum tempo para preencherem as tabelas, a demonstração das dificuldades ao calcular analiticamente as razões trigonométricas dos ângulos da tabela recorrendo às propriedades de redução ao primeiro quadrante foi tão evidente, que como referi anteriormente, todos os grupos, exceto um, recorreram à calculadora gráfica para o fazer. Do que pude analisar enquanto percorria os grupos, todos usaram o menu estatística da calculadora para representar os pontos no referencial cartesiano e depois pedir a curva que melhor se ajustava aos dados. Após obterem uma representação gráfica satisfatória, as conclusões sobre os pontos a seguir mostraram-se acessíveis. A dificuldade mostrou-se não na conclusão, mas na sua formalização e generalização. Das reações que os alunos mostraram ter à animação GeoGebra, onde estava estabelecida a ligação entre o círculo trigonométrico e os pontos $(x, \sin x)$, levou-me a constatar que esta ligação não era clara para os alunos (RA2-24/04).

4.4. Tarefa de Investigação: Investigar Funções Trigonométricas

Para efetuar o estudo da variação de parâmetros em funções do tipo $y = a\sin[b(x-c)] + d$, do tipo $y = a\cos[b(x-c)] + d$ e do tipo $y = a\tan[b(x-c)] + d$, propus uma tarefa de investigação com o apoio da calculadora gráfica. A escolha da calculadora gráfica deveu-se, fundamentalmente, ao facto de ser um recurso tecnológico capaz de desenhar gráficos e fazer cálculos numéricos com uma precisão superior à necessária para o nível do 12.º ano, além de ser acessível a todos os alunos.

1. A forma geral da função seno é dada por $y = a\sin[b(x-c)] + d$. A função seno $y = \sin x$ é a função standard tal que $a = 1,\ b = 1,\ c = 0$ e $d = 0$. Investiga o comportamento da função conforme o sinal e o valor absoluto de $a,\ b,\ c$ e d variam. Podes começar com um de cada vez e depois passar às combinações, para finalmente descrever o comportamento da função envolvendo $a,\ b,\ c$ e d juntos. Para cada caso, descreve a translação ou efeito sobre a amplitude da função (diferença entre o valor máximo e o valor mínimo) ou o contradomínio e o período.

A tarefa de investigação do estudo do efeito da variação de parâmetros nas famílias de Funções Trigonométricas foi proposta na quarta aula da intervenção pedagógica. A tarefa inicia-se com o estudo da variação de parâmetros da função seno. Para a realização da tarefa, os alunos foram divididos em sete grupos de quatro e um grupo de dois.

Introdução da tarefa

O enunciado foi distribuído pelos alunos e foram dados cerca de dois minutos para a leitura do primeiro ponto da tarefa. Como nenhum grupo mostrou ter dificuldade em perceber o que era pretendido, passou-se para o desenvolvimento da tarefa.

Desenvolvimento da tarefa

Enquanto percorria os grupos, não me pareceu haver dificuldades no manuseamento das calculadoras gráficas, tal como havia previsto. No entanto, apesar de os alunos terem mostrado que perceberam o que deviam fazer, revelaram dificuldade sobre o que deviam fazer.

Sobre o primeiro item da tarefa, analisando as conclusões parâmetro a parâmetro, podemos observar, sobre a variação do parâmetro a, os resultados alcançados pelos oito grupos na Tabela 6.

Tabela 6: Frequência do tipo de resposta sobre a variação do parâmetro a em $y = a \sin x$

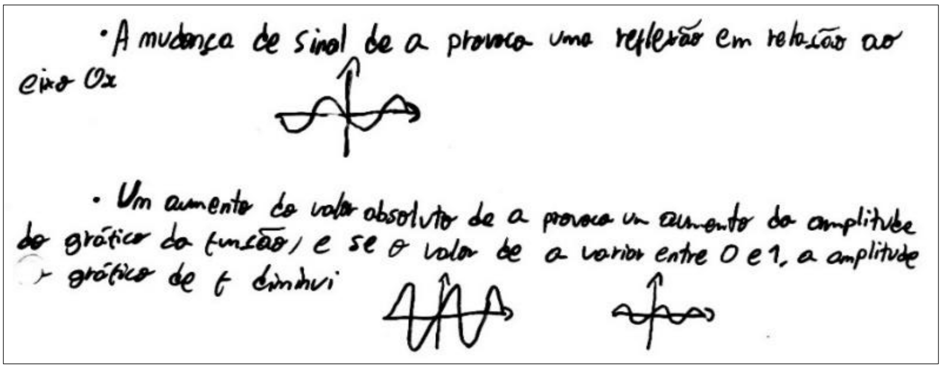
Correto	**Parcialmente correto**	**Incorreto**	**Não respondeu**
5	3	0	0

Acerca da variação do parâmetro a, o diálogo com grupo G1 (GA4-30/04):

A1G1: Então o que temos de fazer? Temos de mudar estes valores?
Professora: Sim.
A2G1: Mas quer que mudemos um de cada vez?
Professora: Sim. Mudem um de cada vez e tirem ilações sobre isso.
A1G1: Ah! Então pomos o a a ser… Mas mudamos também o sinal?
A2G1: Mas também temos que mudar o valor!
Professora: Sim, devem ver mediante a mudança de sinal e do valor absoluto.
A1G1: Podemos por a ser -1…
Professora: Será que o 1 e o -1 serão os melhores números para ver o que ocorre com a mudança desse parâmetro? Lembrem-se que o 1 é o elemento neutro da multiplicação.
A2G1: Hum, vamos por aqui (*na calculadora*) então $\sin(x)$ e pomos o a ser 2.
Professora: O que é que aconteceu?
A3G1: Fica mais… cresceu!
A2G1: Mudou a amplitude.
Professora: O período mudou?
A1G1: Não!
Professora: O que mudou então?
A2G1: O contradomínio.

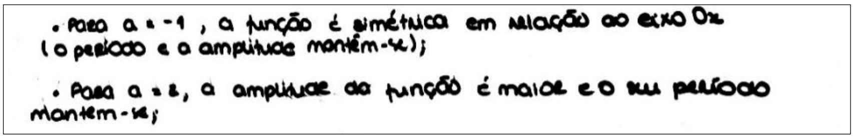
As conclusões corretas sobre o estudo da variação do parâmetro a constatam que para valores de a negativos, o gráfico sofre uma reflexão sobre o eixo dos xx, bem como para $|a| < 1$ a amplitude diminui e para valores de $|a| > 1$ a amplitude aumenta. A título de exemplo de resposta correta, segue-se na Figura 10 a representação do grupo G2.

Figura 10: Representação correta do efeito da variação do parâmetro a em $y = a \sin x$ pelo grupo G2



As três conclusões parcialmente corretas têm apenas alguns exemplos, não concluindo o efeito da variação de diferentes valores de $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Na Figura 11 tem-se como exemplo a representação do grupo G6.

Figura 11: Representação parcialmente correta do efeito da variação do parâmetro a em $y = a \sin x$ pelo grupo G6



A variação do parâmetro b provoca uma reflexão segundo o eixo dos yy se $b < 0$ e uma compressão ou uma dilatação segundo o eixo dos xx, mediante $|b| > 1$ ou $|b| < 1$, respetivamente, o que provoca uma alteração do período da função.

Em diálogo com o G2 (GA4-30/04), acerca da variação do parâmetro b:

Professora:	E se o a for $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$?
A1G2:	Hum, fica igual.
Professora:	Bem, o comportamento será análogo em alguns parâmetros. Mas será que é análogo em todos? Por exemplo, o d, se somares 2 ou $\frac{1}{2}$, o que é que acontece?
A1G2:	A função sobe.
Professora:	Ok. Subir 1, ou 2, ou $\frac{1}{3}$, a conclusão é a mesma. Sobe! Mas e se for o parâmetro b, será que o comportamento para $b = 2$ ou $b = \frac{1}{2}$ é análogo? E se for o parâmetro a?
A1G2:	Ui, isso é trabalho para um mês.
A2G2:	No parâmetro a, a amplitude diminui em vez de aumentar.
Professora:	E se for negativo?

A2G2: Negativo já vimos. Faz reflexão em relação ao eixo do x

Professora: Então, o que muda com b?

A2G2: Hum...o período.

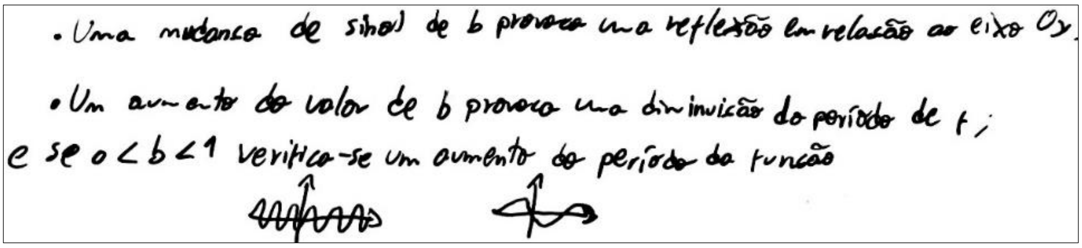
As conclusões sobre o efeito da variação do parâmetro b foram alcançadas pelos grupos como indica a Tabela 7.

Tabela 7: Frequência do tipo de resposta sobre a variação do parâmetro b em $y = \sin(bx)$

Correto	**Parcialmente correto**	**Incorreto**	**Não respondeu**
3	3	2	0

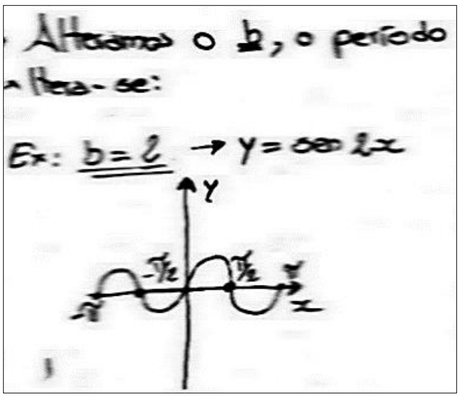
A título de exemplo, na Figura 12, a representação correta do grupo G2.

Figura 12: Representação correta do efeito da variação do parâmetro b em $y = \sin(bx)$ pelo grupo G2



Nas conclusões parcialmente corretas, existe a constatação da afetação da variação de b sobre o período da função. No entanto, apenas são apresentados um ou dois exemplos. Na Figura 13, tem-se como exemplo a representação parcialmente correta do grupo G4.

Figura 13: Representação parcialmente correta do efeito da variação do parâmetro b em $y = \sin(bx)$ pelo grupo G2



As conclusões incorretas são distintas. O grupo G7 limita-se a afirmar que "$b < 1$ encolhe; $b > 1$ estica", sem qualquer referência ao eixo de comparação ou sobre uma preocupação da afetação da mudança de sinal de b, adicionando a não conclusão sobre a alteração de período da função. O grupo

G8 dá um exemplo de período alterando sem que referencie qual o valor de b que provocou essa modificação (Figura 14).

Figura 14: Representação incorreta do efeito da variação do parâmetro b em $y = \sin(bx)$ pelo grupo G8

→ o "b" faz uma alteração em relação ao período, passando a ser de $\frac{\pi}{2}$ em $\frac{\pi}{2}$.

A variação do parâmetro c, cujo efeito sobre o gráfico da função é uma translação segundo o vetor $(c, 0)$. Diálogo com o G8 (GA4-30/04), acerca da variação do parâmetro c:

A1G8: Mas neste a translação... Não sofre translação?
A2G8: Quando alteramos o valor de c.
A3G8: Encolhe no eixo do yy. É, não é?
Professora: De certeza?
A1G8: Não. Eu acho que dá intermédio. Encolhe e estica.
Professora: Devem sempre comparar com a função $\sin x$. Ponham no Y1 $\sin(x)$ e no Y2 fazem a mudança do parâmetro c.
(*depois de seguirem a orientação*) O que aconteceu?
A2G8: Ah! Uma deslocação.
A1G8: Mas o a estica e o b encolhe.
Professora: Depende. Vocês devem tentar perceber o que é que acontece ao período e ao contradomínio quando alteram os parâmetros. Que valor é que deram a c?
A1G8: -4
Professora: Mas olhem, vocês têm aqui $x - c$.
A2G8: Ah, então o c é 4.
Professora: Experimentem um valor mais pequeno, para perceberem melhor o que está a acontecer. Experimentem 1.
A2G8: Ficou igual.
A1G8: Não ficou!
A2G8: Não ficou igual, mas ficou quase encostado.
Professora: O que aconteceu então?
A3G8: Andou uma casa para o lado direito.
Professora: Sofreu uma translação. Associada a que vetor?
A3G8: No x andou 1.
Professora: E no y?
A3G8: Zero. Não sofreu transformação nenhuma.
Professora: Quais são as coordenadas do vetor?
A3G8: $(1,0)$.
Professora: E este 1 era o quê?
A2G8: Era o c.
Professora: Será que isto funciona sempre? Vocês sabem que uma translação está sempre associada a um vetor. Cada ponto é enviado noutro segundo uma direção, um sentido e uma norma. Será que é sempre assim? Será que é sempre $(c, 0)$? E se o c for negativo?
A3G8: Não. Será $(0, c)$.
Professora: Vamos ver o que acontece.
A4G8: Se o c for negativo, ali fica $+1$.
A3G8: Lá está, anda para trás.

Professora:	Que translação é que fez?
A3G8:	Fez a $(-1, 0)$.
Professora:	Então que translação é que fez?
A3G8:	$(-c, 0)$.
Professora:	$-c$? Quanto é que era o c?
A1G8:	-1.
A3G8:	Então fez $(c, 0)$.
Professora:	Então o que faz o c?
A3G8:	Faz uma translação segundo o vetor $(c, 0)$.

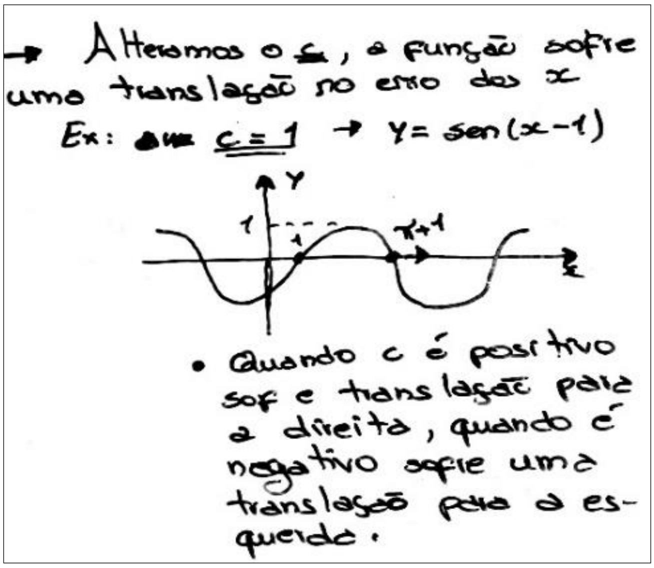
As conclusões sobre o efeito da variação do parâmetro c foram alcançadas pelos grupos conforme indica a Tabela 8.

Tabela 8: Frequência do tipo de resposta sobre a variação do parâmetro c em $y = \sin(x + c)$

Correto	Parcialmente correto	Incorreto	Não respondeu
5	2	1	0

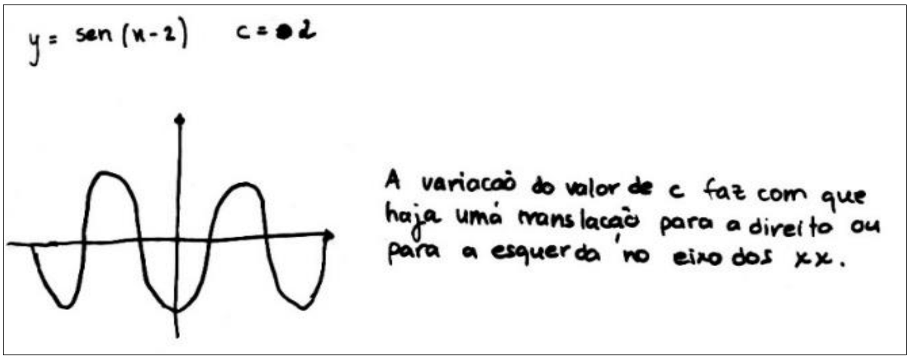
Todas as conclusões corretas fazem referência à translação para a esquerda segundo o eixo dos xx se $c < 0$ e para a direita se $c > 0$. Apenas o grupo G8 faz referência ao vetor $(c, 0)$ à qual a translação está associada. Na Figura 15, a título de exemplo, a representação correta do grupo G4.

Figura 15: Representação correta do efeito da variação do parâmetro c em $y = \sin(x + c)$ pelo grupo G4



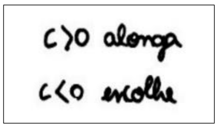
Para as conclusões parcialmente corretas, o grupo G6 conclui os efeitos da transformação sobre o gráfico para $c = -1$ e para $c = 1$, referindo o deslocamento para a esquerda e para a direita de uma unidade, respetivamente. O grupo G5, embora referencie a translação para a esquerda ou para a direita, não estabelece relação entre esse efeito e o sinal de c. Na Figura 16, o exemplo parcialmente correto das conclusões sobre a variação do parâmetro c pelo grupo G5.

Figura 16: Representação parcialmente correta do efeito da variação do parâmetro c em $y = \sin(x + c)$ pelo grupo G5



Apenas o grupo G7 concluiu de forma incorreta o efeito sobre a variação do parâmetro c, não fazendo referência à translação e concluindo algo que poderia ter mais a ver, no contexto certo, com a variação dos parâmetros a ou b. Na Figura 17 tem-se a representação incorreta do grupo G8.

Figura 17: Representação incorreta do efeito da variação do parâmetro c em $y = \sin(x + c)$ pelo grupo G7



A variação do parâmetro d provoca no gráfico uma translação associada ao vetor $(0, d)$. A conclusão sobre a translação foi alcançada pelos grupos, conforme ilustra a tabela 9.

Tabela 9: Frequência do tipo de resposta sobre a variação do parâmetro d em $y = \sin(x) + d$

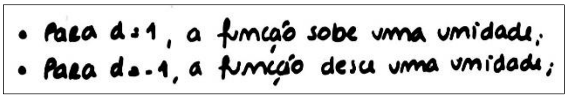
Correto	**Parcialmente correto**	**Incorreto**	**Não respondeu**
5	2	0	1

Todas as conclusões corretas fazem referência à translação. No entanto, apenas o grupo G8 associa o vetor $(0, d)$ à translação. Os restantes grupos definem a translação como uma deslocação do gráfico para cima ou para baixo, mediante d positivo ou d negativo, respetivamente. A título de exemplo, na Figura 18, a representação correta do grupo G2.

Figura 18: Representação correta do efeito da variação do parâmetro d em $y = \sin(x) + d$ pelo grupo G2

Das conclusões parcialmente corretas sobre a variação do parâmetro d, o grupo G4 refere haver uma translação no eixo dos yy e apresenta o exemplo para $d = 1$. O grupo G6 conclui que quando $d = 1$ o gráfico da função sobe uma unidade e quando $d = -1$ desce uma unidade, conforme ilustra a Figura 19.

Figura 19: Representação parcialmente correta do efeito da variação do parâmetro d em $y = \sin(x) + d$ pelo grupo G6


• Para d=1, a função sobe uma unidade;
• Para d=-1, a função desce uma unidade;

Discussão do primeiro item da tarefa

No momento da discussão do primeiro item da tarefa, os alunos mostraram-se mais confiantes do que na aula anterior para apresentar as suas conclusões (RV4-30/04), pelo que a apresentação foi feita por um dos alunos, usualmente, menos participativo.

A1G4: Nós fizemos a função seno para comparar a $\sin x$. Depois nós fomos fazendo cada letra de cada vez. Quando alteramos o a, vemos que altera a amplitude, neste caso que é 2, sofre um aumento. Mas se, por exemplo, fosse -2, nós vemos que a função ia ser ao contrário. Esta parte ia para cima e esta parte ia para baixo. Sempre assim. Se por exemplo, fosse $a = 0{,}5$, a amplitude já ia para metade. Já ia diminuir.

Professora: Toda a gente chegou às mesmas conclusões?

Alunos: Sim.

Professora: Ora bem, vamos lá resumir o que acontece.
(*na animação Geogebra*) Se fizermos variar o a, o que está a acontecer?

A1G1: A amplitude está a aumentar.

Professora: A amplitude está a aumentar se o a aumentar. E aqui? (*fazendo a variar entre 0 e 1*)

A2G2: Diminui.

Professora: E aqui? (*fazendo a variável assumir números negativos*)

A1G1: Inverte.

Professora: Então, quando o a é negativo temos uma reflexão em relação ao eixo dos xx. Se o valor absoluto for maior que 1, a amplitude...

A2G2: Aumenta.

Professora: E se for menor que 1?

A2G2: Diminui.

A1G4: O b, nós vemos que o período se altera. Por exemplo, neste caso, para $b = 2$, o período diminuiu para metade. Passou de π para $\frac{\pi}{2}$.

Professora: Então o que acontece exatamente?

A1G1: Aumenta o período quando o b é menor que 1.

Professora: Aumenta o período quando b é menor que 1 em módulo. E quando é maior que 1?

A1G1: Diminui.

A1G4: Quando alteramos o c, nós vemos que há uma translação no eixo do x. Nós fizemos o exemplo para $c = 1$ e então a função andou uma unidade para a direita. Se fosse -1 andava para a esquerda.

Professora: O que faz então o parâmetro c?

A1G1: Desloca-se.

Professora: Faz uma translação. E qual é o vetor que lhe está associado?

A2G8: $(c, 0)$.

Professora: Ok. Podemos então dizer que obtemos o gráfico de f, a partir do de $y = \sin x$, através da translação associada ao vetor $(c, 0)$.

A1G4: O d, quando alteramos o d, há uma translação no eixo dos yy. Nós vimos que com $d = 1$ a função anda mais um para cima. Isto continua com a amplitude de um, só que o máximo passa a ser 2.

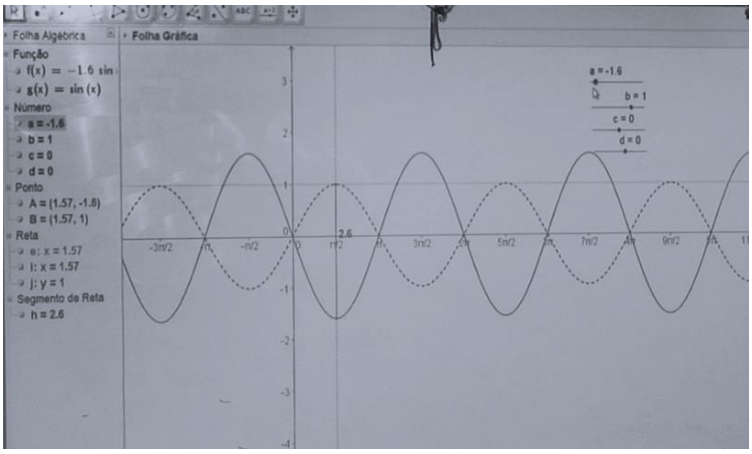
Professora: O que faz o d então?

A1G3: Sobe e desce.

A1G1: Faz uma translação associada ao vetor $(0, d)$.

Durante esta discussão servi-me de uma animação no GeoGebra, para ilustrar as transformações do gráfico, em comparação com a curva $y = \sin x$. A Figura 20 ilustra a animação usada no GeoGebra.

Figura 20: Animação GeoGebra para estudo das famílias de funções $y = a\sin(b(x-c)) + d$



Para a resolução do primeiro item da tarefa não esperava mostras de dificuldades por parte dos alunos, uma vez que estão familiarizados com o manuseamento da calculadora gráfica. No entanto, esperava que houvessem grupos que não atribuíssem valores para os parâmetros a e b com valor absoluto menor do que um, podendo, dessa forma, chegar a conclusões erradas.

Em termos de trabalho de grupo, a cooperação e o trabalho de equipa melhorou em relação à aula anterior, além de mais alunos registarem as conclusões nos seus apontamentos pessoais (RA4-30/04). A resolução do primeiro item da tarefa foi bastante equilibrada, todos os grupos tiveram o mesmo ritmo de resolução, terminando o estudo da variação de parâmetros praticamente em simultâneo. Esta razão permitiu que mais alunos estivessem em condições de apresentar as suas conclusões aquando da discussão.

Após a discussão do primeiro item, deu-se início à resolução do segundo item da tarefa de investigação, onde era proposto fazer um estudo da função $\arcsin x$, com base na reflexão da curva $y = \sin x$ segundo a bissetriz dos quadrantes ímpares.

2. Considera o gráfico da função $f(x) = \sin x$.

a. Esboça o gráfico de $f^{-1}(x)$, a quem chamamos $\sin^{-1}(x)$ ou $\arcsin(x)$, refletindo $f(x)$ em relação à reta $y = x$ a (trocar a coordenada x com a y).

i. O gráfico da relação descrita em (a.) não é uma função. Descreve porque não.

b. Existe uma restrição do domínio de $f(x)$ tal que $f^{-1}(x)$ é função e contém o ponto $(0,0)$. Restringe o domínio desta forma.

i. Descreve o significado da função $f^{-1}(x)$.

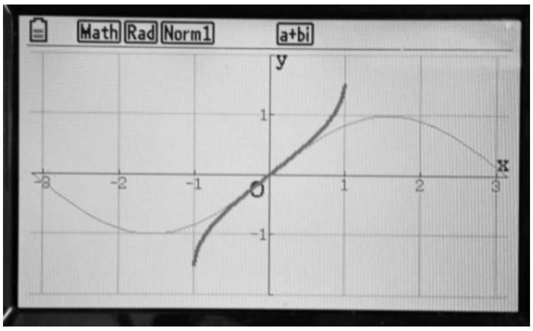
Introdução da tarefa

No seguimento da aula, os alunos tinham o enunciado, bem como, os grupos já haviam sido constituídos no início da aula, pelo que não faria sentido fazer qualquer alteração. De forma natural, deu--se continuação aos trabalhos. Nenhum grupo mostrou dificuldade inicial com a interpretação do enunciado da tarefa.

Desenvolvimento da tarefa

Para a resolução do segundo item da tarefa foram dados cerca de dez minutos. Uma vez que no enunciado há a referência a $\sin^{-1}$, ao contrário do sugerido na tarefa, fazer a reflexão da curva $y = \sin x$ segundo a reta $y = x$, os alunos usaram a calculadora gráfica para esboçar o gráfico da função $\sin^{-1}(x)$. Na Figura 21, o gráfico obtido pelo grupo G2.

Figura 21: Representação gráfica de $y = \sin^{-1}(x)$ pelo grupo G2



Em diálogo com o grupo G2 (GA4-30/04) acerca da representação gráfica que obtiveram.

A1G2: O domínio de $f(x)$ é igual ao contradomínio de $f^{-1}(x)$.
Professora: Sim.

A1G2: O problema da função inversa está no domínio, porque ela é periódica e vai voltar a repetir. Para o mesmo objeto vamos ter várias imagens. Por isso não é função. Portanto, supostamente, para que a inversa passar a ser função, tenho que restringir o seu domínio

Professora: Qual domínio?

A1G2: O domínio da inversa. Hum, se eu restringir o domínio da função normal, eu vou restringir o contradomínio, não é? Então porque vou querer restringir o domínio e não o contradomínio de $f^{-1}(x)$?

Professora: A função seno é injetiva?

A1G2: Já não me lembro, mas acho que não... Não, não é!

Professora: E então, ela é invertível?

A1G2: É.

Professora: Bem, não. Se não é injetiva não pode ser invertível.

A1G2: Mas eu estou a invertê-la. Não é?

Professora: Estás a invertê-la. Mas, como é que a invertes? O que é que tens que fazer para poder inverter uma função que não é injetiva?

A1G2: Restringir o domínio.

Professora: Pronto, é isso. Tens que restringir o domínio. Agora, aqui só tens que pensar que restrição deves fazer.

A1G2: De -1 a 1? Deve ser de -1 a 1.

Professora: De -1 a 1? O domínio? Representa aí na calculadora o gráfico da função seno.

A1G2: Ah, sim, sim, sim. Vai ser de -3 a 3.

Professora: Olha aqui, de -3 a 3 a função continua a não ser injetiva. Tens que procurar um intervalo onde a função é injetiva. Isto não é -3 (*aponta para os zeros*).

A1G2: Então, não é? Ah, pois não, pois não! É...o que for.

Professora: Bem, são os zeros da função.

A1G2: Certo, mas ela aqui não é injetiva.

Professora: Tens que pensar num intervalo que seja uma restrição do domínio e que contenha todas as correspondentes imagens que o seno pode tomar.

A1G2: Então, é daqui aqui.

Professora: Que valores são esses?

A1G2: É de um mínimo a um máximo.

Professora: Ok. Isso é do mínimo ao máximo, mas que valores é que te interessam?

A1G2: Ah, sim, o x.

Professora: Queres saber o quê? O maximizante e o minimizante.

A1G2: Certo, ok. Já percebi.

(*depois de refletir um pouco*)

A1G2: Qual é o significado da inversa do $\sin x$?

Professora: O que é que te dá a inversa de uma função?

A1G2: Pois, não sei.

Professora: Imagina a função x^2. Qual é a operação inversa do quadrado?

A1G2: Vai dar raiz quadrada.

Professora: O que é que te dá a raiz quadrada? Dá-te o número que ao quadrado dá aquele, ou seja, $\sqrt{x}$ dá-te o número que ao quadrado dá x.

A1G2: Ah, sim.

Professora: E aqui, neste caso, o que é que acontece?

A1G2: Ora bem ... (*pausa*)

Professora: Se para cada x tens o $\sin x$. Na função f, se para cada amplitude tens o seu seno. O que te dá a inversa? Para cada seno...

A1G2: Dá o x?

Professora: Dá-te a amplitude.

A1G2: Ah, pois!

Observando as resoluções dos diferentes grupos, podemos constatar, na Tabela 10, as seguintes evidências:

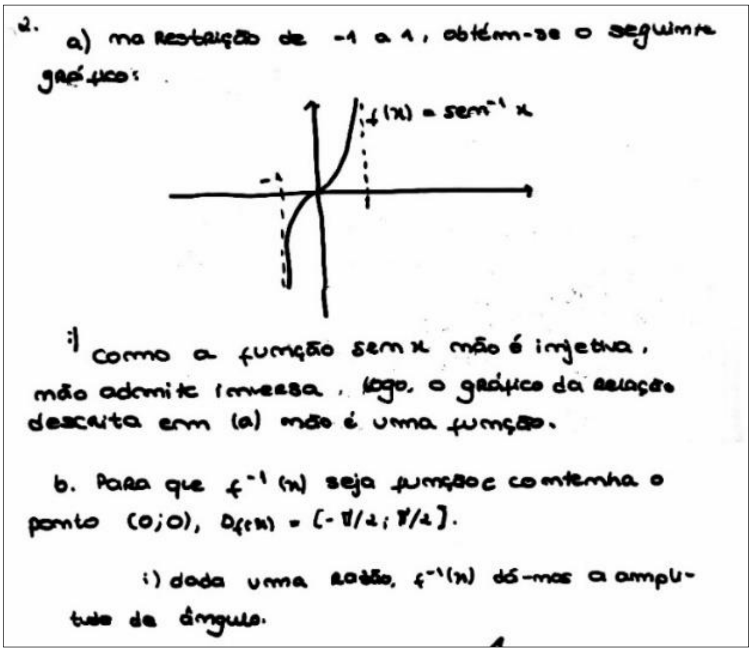
Tabela 10: Frequência do tipo de resposta ao item 2

Correto	**Parcialmente correto**	**Incorreto**	**Não respondeu**
1	1	0	6

Como se verifica na Tabela 10, apenas um grupo – o grupo G1 – conseguiu concluir corretamente o segundo item da tarefa, sendo que o grupo G7 apresenta algumas conclusões, o que torna a sua resolução parcialmente correta. Esta ausência de respostas deve-se, essencialmente, ao facto de o fim da aula se aproximar e, ao que se veio verificar, dez minutos para o estudo deste item foram insuficientes para a maioria dos grupos investigar e gerar conclusões escritas (RA4-30/04). No entanto, para que as conclusões acerca deste estudo não se induzissem na aula seguinte, decidi pedir ao grupo G1, que já havia investigado esta questão, para apresentar as suas conclusões ao grupo turma e dar início à discussão.

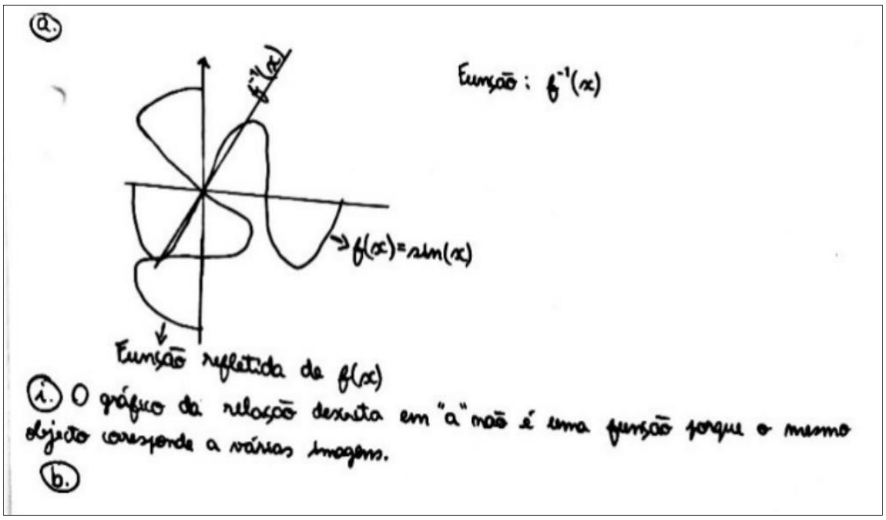
Sobre as conclusões do grupo G1, apesar de não terem feito a reflexão do gráfico de $y = \sin x$ segundo $y = x$ e terem representado o gráfico da função definida por $\sin^{-1}(x)$ dada pela calculadora, concluem corretamente que a função seno não é invertível porque não é injetiva e, portanto, a curva resultante da reflexão não é uma função. Apresentam, também, uma restrição válida do domínio e interpretam o significado desta função inversa. Na Figura 22 a representação das conclusões do grupo G1.

Figura 22: Representação correta do item 2 pelo grupo G1



A resolução do grupo G7 aproxima-se muito do pretendido. Fazem a reflexão e concluem que a curva resultante não traduz uma função. Contudo não apresentam a restrição ao domínio de f para que possa ser invertível, nem a interpretação da função inversa da função seno. Na Figura 23 a representação das conclusões do grupo G7.

Figura 23: Representação do estudo da função inversa da função seno pelo grupo G7



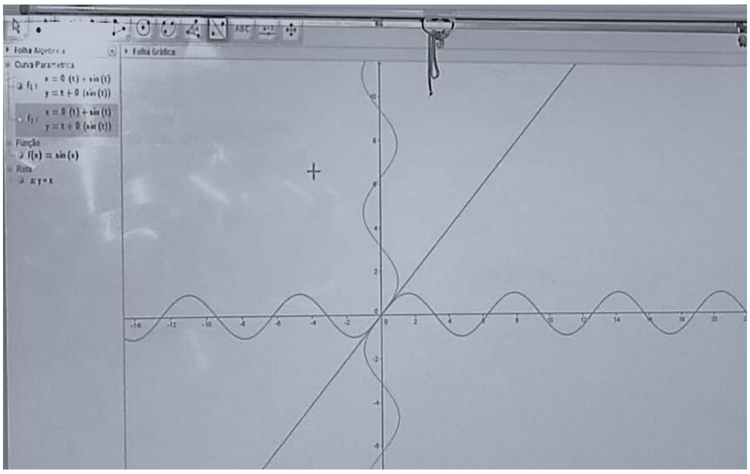
Discussão do segundo item da tarefa

Chamei ao quadro um elemento do grupo G1 (GV4-30/04) para apresentar as conclusões do grupo à turma.

A1G1:	Nós pusemos na calculadora e percebemos que tinha de estar entre -1 e 1. E, portanto, era este o gráfico que nos dava. A função $\sin^{-1}(x)$ não pode ser uma função, porque a função $\sin(x)$ não é injetiva, ou seja, a cada imagem corresponde mais que um objeto. Logo, se não é injetiva não admite inversa.
Professora:	É essa função que está aí representada que não é invertível?
A1G1:	Não. A $\sin(x)$ é que não é injetiva.
Professora:	Então não é invertível, é isso?
A1G1:	Não, não é invertível.
Professora:	O que é que vocês fizeram então para inverter?
A1G1:	Fizemos uma restrição.
Professora:	Alguém fez a reflexão?
A1G3:	Eu fiz, mas apaguei.
Professora:	Porque apagaste? Vamos fazer então.

Nesta altura, utilizei o GeoGebra para esboçar as duas curvas refletidas segundo a reta definida por $y = x$ e discutir com o grupo turma. Na Figura 24 a representação da projeção da reflexão resultante.

Figura 24: Representação da reflexão de $y = \sin x$ segundo a reta $y = x$ no GeoGebra

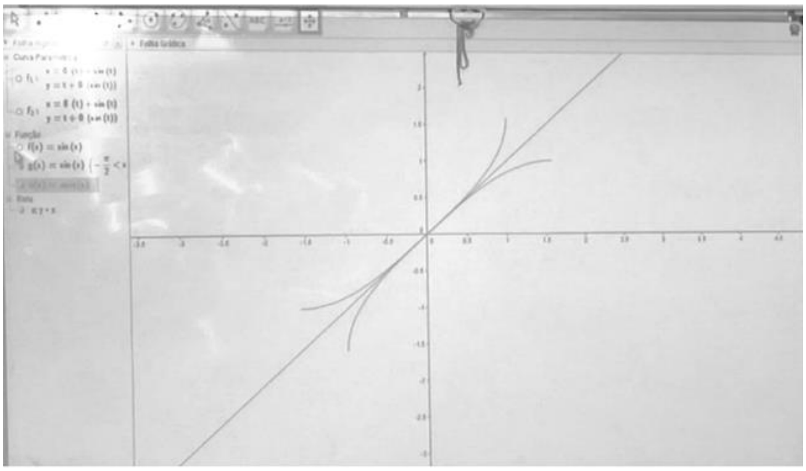


O raciocínio resultante, com o grupo turma, sobre a representação do GeoGebra (GV4-30/04):

A1G4:	Ah, que giro!
A1G5:	Como se faz isso na máquina?
A1G1:	Não se faz. Não dá para fazer.
Professora:	Então, o resultado da reflexão é uma função?
A2G1:	Não.
Professora:	Porquê?
A1G8:	Não sei, é estranha.
A2G1:	Se calhar é uma função.
A1G1:	Não é!
Professora:	Então, é função ou não é?
A1G1:	Não, não é função porque (*pausa*)
	(*Ninguém responde*)
Professora:	Olhem, por exemplo, para $x = 0$ tem muitas imagens. Isto pode ser possível?
A1G1:	Não.
Professora:	Qual é a definição de função?
	(*Ninguém diz nada*)
Professora:	É uma correspondência, onde todos os objetos têm uma e uma só imagem. O que não acontece nos pontos desta curva. O que temos de fazer então?
A1G1:	Temos de restringir o domínio.
Professora:	Vocês encontraram uma restrição?
A2G1:	Fizemos de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$.
Professora:	Porque escolheram esse intervalo?
A2G1:	Porque aí tem um máximo e um mínimo e depois repete-se sempre.
Professora:	E nesse intervalo a função é injetiva. Vamos representar.

Recorri ao GeoGebra para visualizar a representação gráfica da restrição do domínio da função seno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Figura 25: Representação gráfica em GeoGebra de $\sin x$ com domínio restrito a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e a sua inversa



Na continuação sobre a discussão e ponderação sobre a restrição bijetiva do domínio (GV4-30/04):

Professora: Os vossos colegas fizeram a restrição $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Neste domínio, a função é invertível? Há algum problema com a curva resultante da reflexão?

A2G2: Não.

Professora: Então, fizemos uma restrição ao domínio de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e o contradomínio é $[-1, 1]$. Como vai ficar na $\sin^{-1}(x)$?

A1G1: Vai ficar ao contrário.

Professora: Vai ficar $[-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Qual é então o significado de $\sin^{-1}(x)$?

A1G2: Dá as amplitudes.

Professora: Para cada valor da razão seno, dá-nos a amplitude de um ângulo que lhe é correspondente. E é aqui que vocês têm que ter cuidado! A operação $\sin^{-1}$ das vossas calculadoras só dá amplitudes de ângulos entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

O segundo item da tarefa tinha como objetivo alertar o aluno que, uma vez que a função seno não é injetiva, quando usam o comando $\sin^{-1}$ da calculadora, esta apresenta, apenas amplitudes de ângulos no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Aquando da discussão, o GeoGebra mostrou-se, mais uma vez, útil para a clarificação visual da relação entre a função seno e a função arcseno (RA4-30/04). Este segundo item da tarefa deu oportunidade de recordar um pouco dos conteúdos referentes ao tópico das funções inversas. A tarefa incluía mais três itens, o quarto item tinha como propósito estabelecer a relação entre as funções seno e a função cosseno, obtendo uma a partir de uma transformação de translação da outra. O terceiro e o quinto item pretendia fazer o estudo da variação de parâmetros de $y = a\cos(b(x-c)) + d$ e de $y = a\tan(b(x-c)) + d$. Os restantes itens ficaram para serem concluídos em casa.

4.5. Tarefa de Exploração: A respiração num mamífero

Numa experiência foi utilizado um mamífero que no processo normal da respiração, a cada 4 segundos, ocorre um ciclo respiratório (conjunto de uma inspiração e de uma expiração). Em cada inspiração e expiração normais entra e sai $0{,}5$L de ar (ar corrente). No entanto, há sempre uma reserva de ar nos pulmões cujo volume, t segundos após uma expiração, é dado, em litros, pela função v definida por:

$$v(t) = 2{,}5 - 0{,}25\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right);\ t \geq 0$$

A experiência decorre durante 10 minutos.

1.1. Em relação aos 4 segundos de cada ciclo respiratório, indica:

  1.1.1. O volume máximo e o volume mínimo de ar de reserva nos pulmões;

  1.1.2. O volume de ar de reserva nos instantes $t = 1$ e $t = 2$.

1.2. Em que fase da respiração se encontra o animal no instante em que completa 7 minutos e 29 segundos da experiência? Justifica.

1.3. Por processos analíticos, calcula $v'(5)$ e $v'(15)$. Interpreta o resultado no contexto do problema.

1.4. Considera a representação gráfica da função v durante os 10 minutos da experiência e determina as coordenadas dos pontos de inflexão do gráfico no intervalo $[4{,}8]$;

Esta tarefa teve como propósito aplicar os conceitos apreendidos nas aulas anteriores ao contexto real. Na sua resolução procura-se aplicar as propriedades periódicas das Funções Trigonométricas e o conceito de derivada nas conclusões acerca da monotonia e extremos para a interpretação de um modelo real de respiração de um mamífero. Para a realização da tarefa, os alunos foram divididos em sete grupos de quatro elementos.

Introdução da tarefa

A tarefa fazia parte da coleção de tarefas disponíveis no manual, pelo que depois de todos os alunos terem presentes o enunciado, um dos alunos leu-o em voz alta. Não havendo mostras de dúvidas, partiu-se para o desenvolvimento da tarefa.

Desenvolvimento da tarefa

O estudo dos extremos, no primeiro item da tarefa, poderia ser estudado de diversas formas. Poderia estudar-se o contradomínio da função v, ou através do estudo de sinal da primeira derivada, ou através da interpretação do contexto da situação problema. Enquanto percorria os grupos, constatei que três optaram por fazer o estudo de sinal da derivada e os restantes optaram por fazer a interpretação do contexto. Em qualquer uma das situações, a interpretação do enunciado trouxe desafios (GA8-11/05).

A1G4:	Já percebemos, $t = 0$ é a expiração e t igual a não sei quantos é a inspiração.
Professora:	A inspiração não é um instante.
A1G4:	Sim. Não. É as duas coisas, não é? Entre o expirar e o inspirar.

Professora:	E o que têm entre o expirar e o inspirar?
A2G4:	É os 4s.
Aluno A1G4:	Isto aqui é o mínimo e isto aqui é o máximo (*indica o gráfico na calculadora*).
Professora:	Ah, isto é um mínimo e isto um máximo, não é a inspiração e a expiração. A inspiração é o processo de entrada de ar, quando o volume está a aumentar.

O primeiro item da tarefa foi alcançado pelos alunos conforme traduz a Tabela 11:

Tabela 11: Frequência do tipo de resposta ao item 1.1.1.

Correto	**Parcialmente correto**	**Incorreto**	**Não respondeu**
3	4	0	0

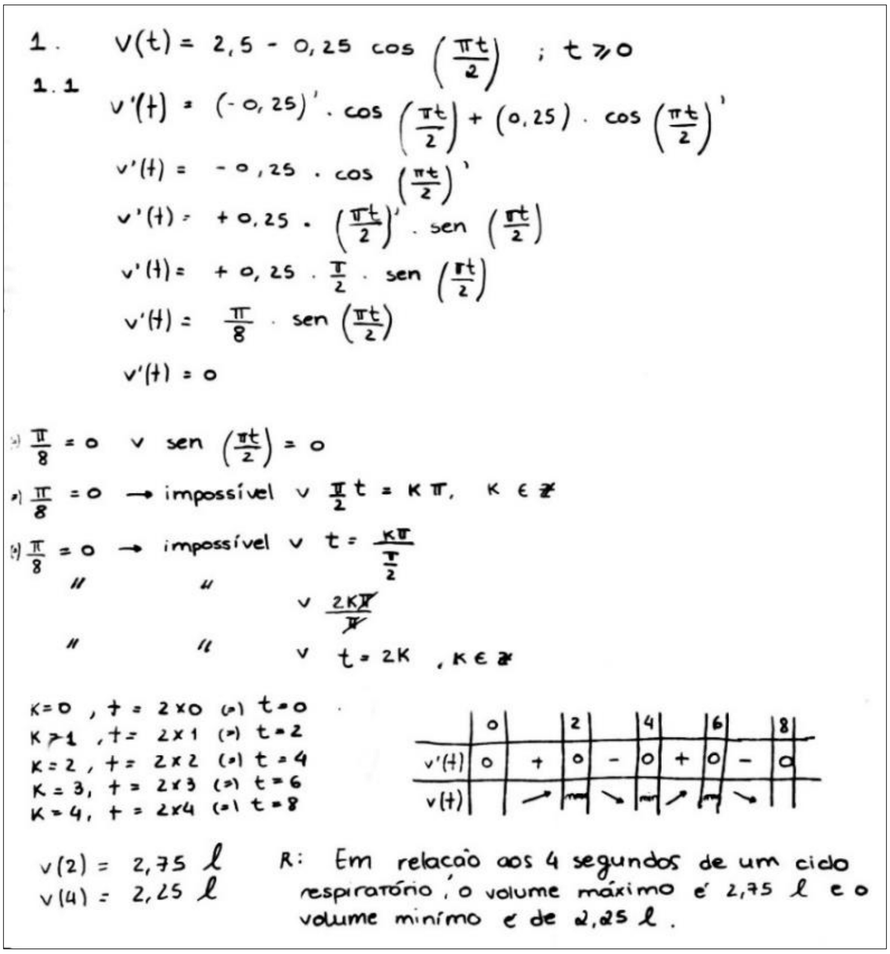
As três respostas corretas apresentam o estudo de sinal da derivada. Embora seja uma das formas de abordagem para concluir os extremos, o estudo do contradomínio seria a forma mais simples de perceber e comprovar o valor máximo e mínimo de ar nos pulmões.

No grupo G5 (GA8-11/05), a propósito do estudo de sinal da derivada:

A1G5:	Nós fizemos a derivada para a primeira, mas já percebemos que não era para fazer.
Professora:	Vocês podem recorrer à derivada. Fazem como acharem melhor.
A1G5:	Nós depois encravamos aqui na derivada para tirar os zeros.
Professora:	Porquê?
A2G5:	Porque não sabemos resolver a equação trigonométrica.
A3G5:	Porque supostamente, agora tínhamos que resolver a equação trigonométrica para ver onde está isto.
Professora:	Vocês têm que ver quando é que a derivada é zero. Isto é um produto. Quando é que o produto é zero?
A1G5:	Quando um deles é zero.
Professora:	$\frac{\pi}{8}$ nunca é zero, só vos resta saber quando o seno é zero. E agora, quando é que o seno é zero?
A3G5:	Em $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
Professora:	$\sin\frac{\pi}{2}$ é 1.
A3G5:	É no π. É em $k\pi$.
Professora:	Então este ângulo $\frac{\pi}{2}t$ tem de ser igual a $k\pi$.
A3G5:	Ah, ok. Já percebi.

A título de exemplo de resposta correta, na Figura 26, a resolução do Grupo G5.

Figura 26: Representação correta do item 1.1.1 pelo grupo G5



1. $V(t) = 2,5 - 0,25 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$; $t \geq 0$

1.1 $v'(t) = (-0,25)' \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + (0,25) \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)'$

$v'(t) = -0,25 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)'$

$v'(t) = +0,25 \cdot \left(\frac{\pi t}{2}\right)' \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

$v'(t) = +0,25 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

$v'(t) = \frac{\pi}{8} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

$v'(t) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{8} = 0 \vee \text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{8} = 0 \rightarrow$ impossível $\vee \frac{\pi}{2} t = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{8} = 0 \rightarrow$ impossível $\vee t = \frac{k\pi}{\frac{\pi}{2}}$

" " $\vee \frac{2k\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}$

" " $\vee t = 2k, \; k \in \mathbb{Z}$

$k=0, \; t = 2\times 0 \Leftrightarrow t = 0$
$k=1, \; t = 2\times 1 \Leftrightarrow t = 2$
$k=2, \; t = 2\times 2 \Leftrightarrow t = 4$
$k=3, \; t = 2\times 3 \Leftrightarrow t = 6$
$k=4, \; t = 2\times 4 \Leftrightarrow t = 8$

	0		2		4		6		8
$v'(t)$	0	+	0	−	0	+	0	−	0
$v(t)$		↗		↘		↗		↘	

$v(2) = 2,75 \; \ell$
$v(4) = 2,25 \; \ell$

R: Em relação aos 4 segundos de um ciclo respiratório, o volume máximo é 2,75 ℓ e o volume mínimo é de 2,25 ℓ.

Ainda no Grupo G5 (GA8-11/05):

A3G5: Estou com dúvida em como fazer a tabela. Aqui diz-me que t é de 0 a 4s.
Professora: O que sabes é que um ciclo dura 4s.
A3G5: Quero saber do ciclo de 4s. Sabe-se que o t é 4s.
Professora: Sabes que a cada 4s há uma inspiração e uma expiração. Começa aos 0s, depois tens aos 4, depois aos 8 e assim por diante durante 10min.
A3G5: Ah!
Professora: Em 10min há 600s. E agora sabes que estes valores, os múltiplos de 2 são zeros da derivada.
A3G5: Mas aqui só quer saber nos 4s.
Professora: Mas é um ciclo qualquer. Não tem que ser os primeiros 4. Pode ser do 2 ao 6. Também são 4s.
A3G5: Então vou pôr isto infinitamente?
Professora: Bem, não. No máximo seriam os 600s, mas só precisas perceber o que acontece em um ciclo.
A3G5: Mas se fizer $k = -1$ dá-me um tempo negativo.
Professora: Ok, é um pouco estranho falar-se de tempos negativos. Embora possas pensar no instante zero como o começo da contagem, existiu tempo antes de se começar a contar. No entanto, este modelo não é suposto traduzir o que acontece antes do

	início. Para ultrapassares este dilema, em vez de provares que em 0 há um mínimo, prova que há em 4.
A3G5:	Mas assim a minha tabela vai ter mais do que 4s.
Professora:	Isso não tem problema. O domínio tem 10min. A tabela pode ter considerados mais tempos que um ciclo, principalmente se te ajudar a perceber e provar o que acontece num ciclo. Depois podes fazer as tuas conclusões assentes no tempo de um ciclo.

Os grupos que procuraram responder a esta questão através da interpretação do problema chegaram a conclusões parcialmente corretas, porque apesar de perceberem que $v(0)$ representa o momento de fim da expiração e início da inspiração. Por isso, ao representar o volume mínimo de ar nos pulmões, todos os grupos assumem $v(2)$ como o volume máximo de ar nos pulmões, mas não apresentam qualquer justificação para essa conclusão.

Em diálogo com os Grupo G1 (GA8-11/04), acerca dos ciclos de respiração e sua relação com os extremos da função, no contexto da situação descrita:

Professora:	Porquê entre 0 e 4? Porque têm a certeza que é em 0 e em 4?
A1G1:	Nós não dissemos que era em 0 e 4. Dissemos que o domínio é entre 0 e 4.
Professora:	Bom, o domínio não é $[0,4]$, porque ele diz aqui que a experiência durou 10min.
A1G1:	Sim, mas aqui diz que é só em relação aos 4s.
Professora:	Aos 4s de um ciclo.
A1G1:	Sim.
Professora:	Um ciclo qualquer.
A1G1:	Sim, entre 0 e 4; entre 4 e 8 e assim.
Professora:	Ok. O que vocês sabem é que acontece em blocos de 4? Notem o que diz aqui: "t segundos após uma expiração". Quando é que isto começa? (*ninguém comenta*)
Professora:	(*exemplifico fazendo uma expiração*) Agora é que começa, depois de expirar. Quando expiramos até ao fim, qual é o volume que fica de ar?
A2G1:	Zero.
A3G1:	Não, porque aqui diz que fica sempre uma reserva de ar.
Professora:	Fica sempre alguma coisa, não é suposto os pulmões ficarem em vácuo. E esse valor será o quê?
A3G1:	O volume mínimo?
Professora:	O que representa então o $v(0)$?
A2G1:	O mínimo.
Professora:	E quando vamos ter o máximo?
A1G1:	4s depois.
Professora:	4s depois voltam a ter um mínimo. 4s é o tempo de um ciclo.
A3G1:	Pois, é em 2.

No grupo G6 (GA8-11/05):

A1G6:	Quando calculamos o máximo temos que acrescentar o meio litro que entra nos pulmões?
Professora:	Têm que ir à função volume tirar o volume máximo.

A2G6: Está bem, mas temos que adicionar a reserva?

Professora: O que diz aqui, “entre cada expiração e inspiração entra e sai $0{,}5L$.” O que vocês sabem é que entra $0{,}5$ e sai $0{,}5$. Depois o que diz? “há sempre uma reserva de ar nos pulmões”. Vocês sabem que nunca vai ficar a zero. “O volume de ar é dado por...” O volume de ar é dado por isto (*aponto para* $v(t)$).

A2G6: Pois, mas é que o máximo e o mínimo dão iguais.

Professora: Bem, isso não pode acontecer.

A1G6: Nós temos que somar os $0{,}5$ que entrou.

Professora: $0{,}5$ é a quantidade de ar que entra e que sai. $v(t)$ dá-vos o volume de ar nos pulmões a cada instante.

A2G6: Mas é que nós fizemos o $v(0)$ e o $v(4)$ e deu o mesmo.

Professora: Sim, dos 0s aos 4s completamos um ciclo. Em 4s inspiram e expiram. Voltamos ao mesmo sítio.

A2G6: Pois, foi isso que vos tinha dito, os 4s demoramos a inspirar e a expirar. Como fazermos o máximo agora? É aos 2s?

Professora: Porquê?

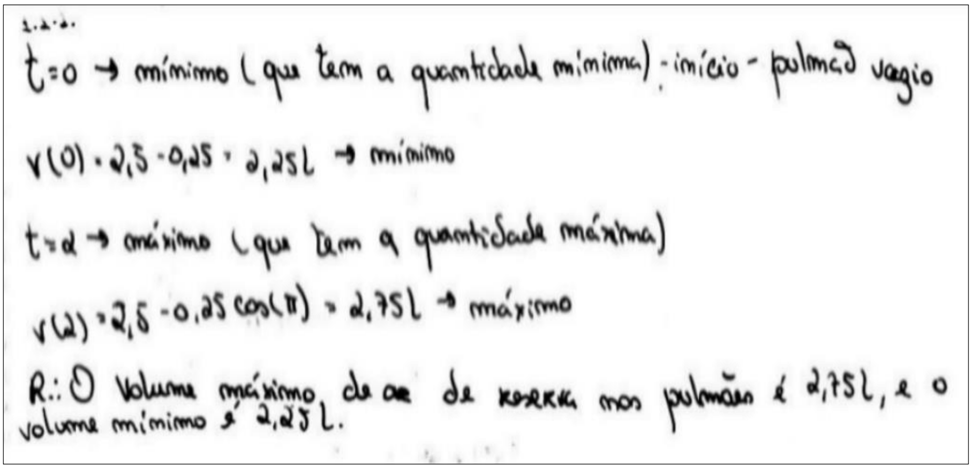
A2G6: Porque é metade.

Professora: Bem, à partida, podemos pensar que sim. Podemos dizer que é meio tempo para inspirar e meio tempo para expirar, até porque entra e sai o mesmo volume de ar. No entanto, será que não seria possível demorar mais tempo a inspirar do que expirar, ou vice-versa? Será que temos que saber o maximizante para saber o máximo? O que quero dizer é, neste contexto faz sentido que o maximizante seja valor médio entre dois minimizantes, mas será que é sempre assim?

A1G6: Eu acho que não.

Das conclusões parcialmente corretas, apresenta-se, na Figura 27, a título de exemplo, a representação do grupo G3.

Figura 27: Representação parcialmente correta do item 1.1.1 pelo grupo G3


1.1.1.

$t=0 \rightarrow$ mínimo (que tem a quantidade mínima) - início - pulmão vagio

$v(0) = 2{,}5 - 0{,}25 = 2{,}25L \rightarrow$ mínimo

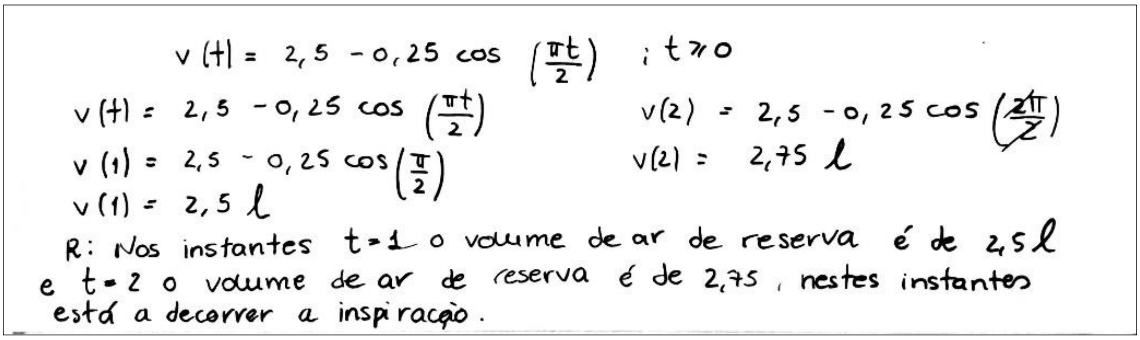
$t=2 \rightarrow$ máximo (que tem a quantidade máxima)

$v(2) = 2{,}5 - 0{,}25\cos(\pi) = 2{,}75L \rightarrow$ máximo

R.: O volume máximo de ar de reserva nos pulmões é 2,75L, e o volume mínimo é 2,25L.

O item 1.1.2. da tarefa não constituiu dúvidas em nenhum dos grupos, pelos que todos o concluíram de forma correta. Na Figura 28, como exemplo, a representação do grupo G5.

Figura 28: Representação parcialmente correta do item 1.1.2 pelo grupo G5


$v(t) = 2,5 - 0,25 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \quad ; t \geq 0$

$v(t) = 2,5 - 0,25 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ $\qquad$ $v(2) = 2,5 - 0,25 \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)$

$v(1) = 2,5 - 0,25 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad$ $v(2) = 2,75\ \ell$

$v(1) = 2,5\ \ell$

R: Nos instantes $t=1$ o volume de ar de reserva é de $2,5\ \ell$ e $t=2$ o volume de ar de reserva é de 2,75, nestes instantes está a decorrer a inspiração.

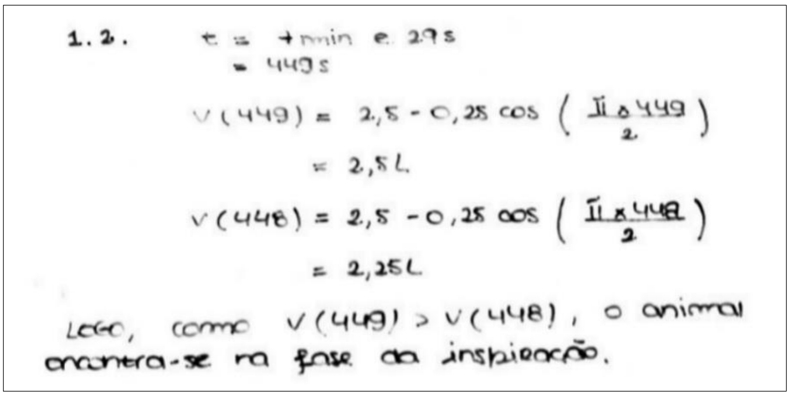
O item 1.2. da tarefa era proposto procurar saber em que fase da respiração o mamífero estava aos 7 minutos e 29 segundos. Como a função v é expressa em segundos, os alunos teriam que escrever os 7 minutos em segundos e com base no volume de ar nos pulmões perceber se o volume está enquadrado entre um mínimo e um máximo ou vice-versa e assim concluir se é uma inspiração ou uma expiração, respetivamente. As conclusões dos alunos estão de acordo com a Tabela 12.

Tabela 12: Frequência do tipo de resposta ao item 1.2.

Correto	Parcialmente correto	Incorreto	Não respondeu
2	4	0	1

Nas conclusões corretas, todos os grupos expressam os 7 minutos e 29 segundos em 449 segundos, calculam o correspondente volume de ar nos pulmões e indicam $v(448)$ como um mínimo de v ou $v(450)$ como um máximo de v e então concluem que aos 449 segundos o mamífero está a inspirar. A título de exemplo, na Figura 29, a representação do grupo G1.

Figura 29: Representação correta do item 1.2. pelo grupo G1


1.2. $t = 7\text{min e } 29\text{s}$

$= 449\text{s}$

$v(449) = 2,5 - 0,25 \cos\left(\frac{\pi \times 449}{2}\right)$

$= 2,5L$

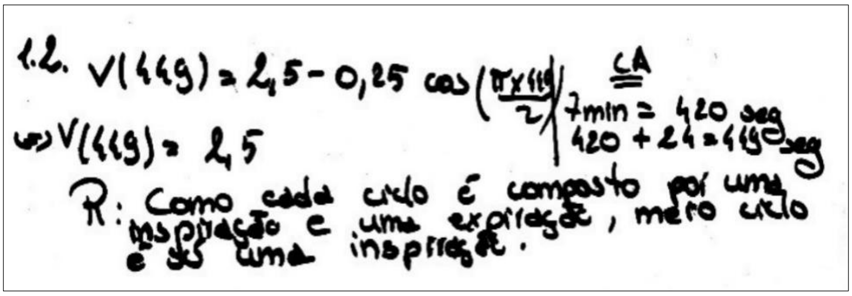
$v(448) = 2,5 - 0,25 \cos\left(\frac{\pi \times 448}{2}\right)$

$= 2,25L$

Logo, como $v(449) > v(448)$, o animal encontra-se na fase da inspiração.

Quanto às conclusões parcialmente corretas, o grupo G5 calcula o tempo em segundos e o volume correspondente corretamente, contudo, não conclui a fase de respiração do mamífero. O grupo G2 conclui a inspiração, mas não justifica. Os grupos G4 e G6 afirmam que se trata de uma inspiração por se tratar de meio ciclo respiratório. No entanto, não fazem qualquer prova de que se trata da primeira metade do ciclo, tendo por base que a experiência se inicia com a inspiração. Na Figura 30, a título de exemplo, a representação do grupo G6.

Figura 30: Representação parcialmente correta do item 1.2. pelo grupo G6



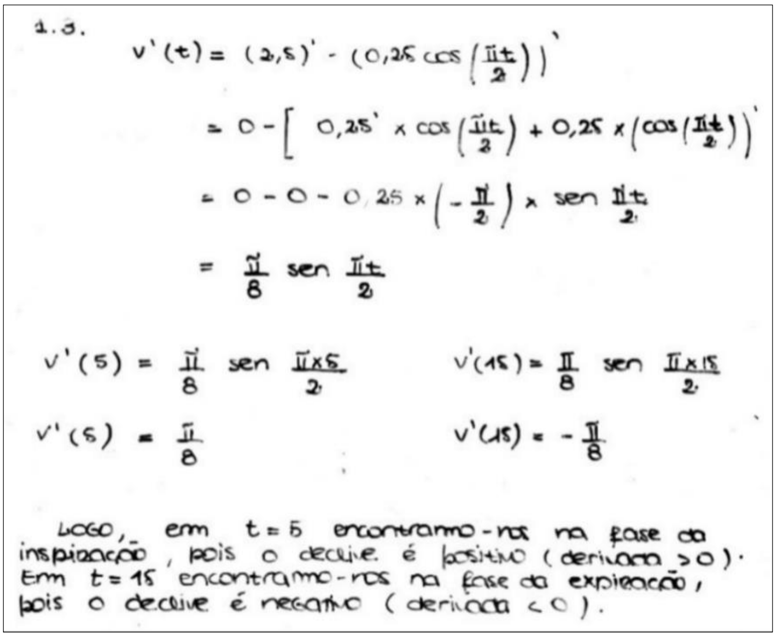
O item 1.3. da tarefa propunha estabelecer a fase da respiração do mamífero aos 5 segundos e aos 15 segundos com base na derivada, ou seja, a partir do sinal de v' nesses momentos perceber que se $v'(a)$ é positiva, a função é crescente em $x = a$ e, portanto, trata-se de uma inspiração, se for negativa em $x = a$, a função decresce nesse momento e, portanto, trar-se-ia de uma expiração. As frequências dos tipos de resposta por parte dos alunos foram as seguintes:

Tabela 13: Frequência do tipo de resposta ao item 1.3.

Correto	**Parcialmente correto**	**Incorreto**	**Não respondeu**
2	4	0	1

Ambas as representações corretas apresentam o cálculo da derivada, o valor de $v'(5)$ e de $v'(15)$, bem como fazem referência ao sinal desses valores e estabelecem a relação com os declives das retas tangentes em $x = 5$ e em $x = 15$, concluindo, respetivamente, a inspiração e a expiração. A título de exemplo, na Figura 31, a representação correta do grupo G1.

Figura 31: Representação correta do item 1.3. pelo grupo G1


1.3.

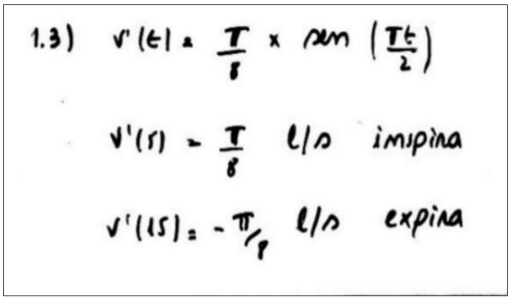
$$v'(t) = (2,5)' - \left(0,25 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)'$$
$$= 0 - \left[0,25' \times \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 0,25 \times \left(\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)'\right]$$
$$= 0 - 0 - 0,25 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) \times \text{sen}\, \frac{\pi t}{2}$$
$$= \frac{\pi}{8}\, \text{sen}\, \frac{\pi t}{2}$$

$$v'(5) = \frac{\pi}{8}\, \text{sen}\, \frac{\pi \times 5}{2} \qquad v'(15) = \frac{\pi}{8}\, \text{sen}\, \frac{\pi \times 15}{2}$$
$$v'(5) = \frac{\pi}{8} \qquad v'(15) = -\frac{\pi}{8}$$

Logo, em $t = 5$ encontramo-nos na fase da inspiração, pois o declive é positivo (derivada > 0). Em $t = 15$ encontramo-nos na fase da expiração, pois o declive é negativo (derivada < 0).

As conclusões parcialmente corretas, em todas calculam a derivada e os valores de $v'(5)$ e de $v'(15)$. O grupo G5 não conclui as fases de respiração, os grupos G2, G3 e G4 concluem as fases para cada momento, contudo, não estabelecem nenhuma relação entre o sinal da derivada e a monotonia nesses instantes. A título de exemplo, na Figura 32, a representação parcialmente correta do grupo G2.

Figura 32: Representação parcialmente correta do item 1.3. pelo grupo G2


1.3) $v'(t) = \frac{\pi}{8} \times \text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

$v'(5) = \frac{\pi}{8}$ l/s inspira

$v'(15) = -\pi/8$ l/s expira

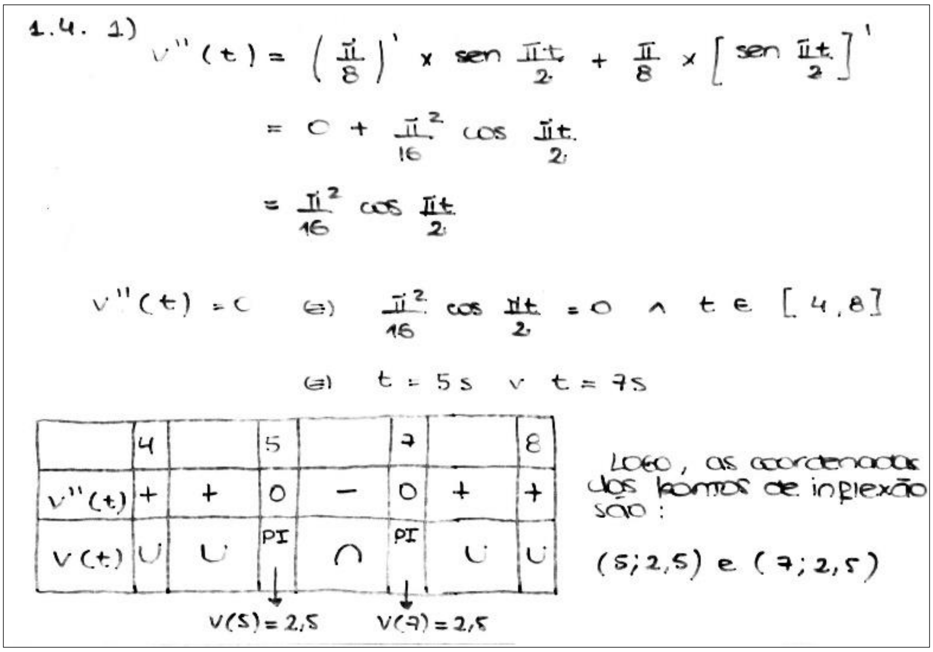
O item 1.4. conduz à necessidade do estudo do sinal e dos zeros da segunda derivada. No que diz respeito a este item, as frequências dos tipos de resposta foi conforme a Tabela 14.

Tabela 14: Frequência do tipo de resposta ao item 1.4.

Correto	**Parcialmente correto**	**Incorreto**	**Não respondeu**
1	2	0	4

O grupo G1 foi o único que apresentou uma resposta correta, determinou a segunda derivada, os zeros, apresentou a tabela do estudo de sinal e concluiu os zeros da segunda derivada como pontos de inflexão. A Figura 33 mostra a representação correta do grupo G1.

Figura 33: Representação correta do item 1.4. pelo grupo G1


1.4. 1) $v''(t) = \left(\frac{\pi}{8}\right)' \times sen \frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{8} \times \left[sen \frac{\pi t}{2} \right]'$

$= 0 + \frac{\pi^2}{16} \cos \frac{\pi t}{2}$

$= \frac{\pi^2}{16} \cos \frac{\pi t}{2}$

$v''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{16} \cos \frac{\pi t}{2} = 0 \wedge t \in [4,8]$

$\Leftrightarrow t = 5s \vee t = 7s$

	4		5		7		8
$v''(t)$	+	+	0	−	0	+	+
$v(t)$	∪	∪	PI	∩	PI	∪	∪

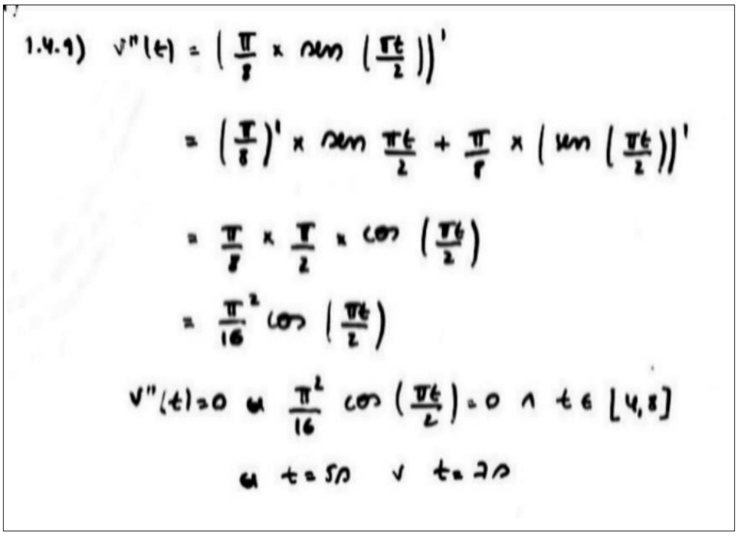
$v(5) = 2,5$ $v(7) = 2,5$

Logo, as coordenadas dos pontos de inflexão são:

$(5;2,5)$ e $(7;2,5)$

Nas representações parcialmente corretas, o grupo G6 limita-se a determinar a segunda derivada e o grupo G2 determina a segunda derivada, determina dois zeros, $t = 5 \vee t = 7$, não os referindo como maximizantes ou minimizantes nem apresentando qualquer estudo sobre o sinal da derivada. Na Figura 34 a representação do grupo G2 ao item 1.4.

Figura 34: Representação parcialmente correta do item 1.4. pelo grupo G2


1.4.1) $v''(t) = \left(\frac{\pi}{8} \times sen\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)'$

$= \left(\frac{\pi}{8}\right)' \times sen \frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{8} \times \left(sen\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)'$

$= \frac{\pi}{8} \times \frac{\pi}{2} \times \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

$= \frac{\pi^2}{16} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

$v''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{16} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 0 \wedge t \in [4,8]$

$\Leftrightarrow t = 5s \vee t = 7s$

Discussão final

Durante a discussão com o grupo turma e a apresentação de resultados, cada item da tarefa foi apresentado por um grupo diferente. O item 1.1.1., que fazia referência ao estudo dos extremos, trouxe um momento de discussão, com a clarificação da diferença entre o conceito de extremo e o conceito de maximizante e minimizante (GV8-11/05).

A1G3: Em vez de fazermos pela derivada, decidimos interpretar o problema. Ele diz-nos que cada ciclo demora 4 segundos e então, nós pensamos que, como ele começa na inspiração, $t = 0$ tem que ser o valor mínimo, que é quando só está nos pulmões a reserva inicial.

A2G3: Nós temos a nossa reserva de ar, que é mínima.

A1G1: Sim, eles modelaram a partir do momento que se inicia a inspiração. Nesse momento só tinha o ar de reserva

Professora: Então, o modelo começa no momento em que acaba de expirar. E quando acaba de inspirar temos o quê?

A2G3: Temos o volume máximo.

Professora: Ok, acaba a inspiração tem-se os pulmões cheios. Então qual é o volume máximo e o volume mínimo?

A1G3: Dá o $v(0)$ e o $v(2)$. A meio do ciclo de 4 tem o máximo. Que nos dá mais $0{,}5L$ que em $v(0)$.

Professora: Então o aumento te $0{,}5$ mostra-nos que em $t = 2$ chegou ao máximo. Quem é que fez diferente?

A1G7: Nós fizemos com a derivada! Nós fizemos com a derivada para calcular o máximo e o mínimo da função. Calculamos a derivada, depois igualamos a zero. Fomos à calculadora e calculamos os zeros entre 0 e 4, porque o ciclo demora 4 segundos. Depois fizemos a tabela e mostramos $v(0)$ como mínimo e $v(2)$ como máximo.

Professora: A tabela que vocês fizeram, será que prova que em $t = 4$ há um mínimo?

A1G3: Tínhamos que continuar a tabela, para ver que a derivada é positiva depois de $t = 4$.

Professora: Alguém estudou o sinal depois de $t = 4$?

A1G5: É positiva até ao 6.

A1G7: A função é periódica, os zeros vão ser $0, 2, 4, 6$, ... e o sinal também se vai repetir. Nós fizemos de 0 a 4 porque dizia de 0 a 4.

Professora: Um ciclo tem 4 segundos. Não diz que tem que ser de 0 a 4. Qual era o objetivo do problema?

A1G7: Era calcular o máximo e o mínimo.

Professora: Quanto é que deu?

A1G7: Depois fomos à fórmula inicial e substituímos pelo máximo e pelo mínimo.

Professora: O 2 é um máximo?

A1G7: Não!

Professora: O que é o 2?

A1G7: É um zero.

Professora: É um zero da derivada, mas o que é para v?

(*Ninguém comenta*)

Professora: É um maximizante. O $v(2)$ é que é máximo. Nesta pergunta, por se tratar de uma função cosseno, para calcular os extremos, também poderiam ter feito o contradomínio, pelo processo que vimos na outra aula.

No item 1.2., o grupo G3 diz ter recorrido à calculadora para perceber que um segundo depois de decorridos os 449s correspondentes aos 7 minutos e 29 segundos, a função v atinge o seu máximo e, por isso, nesse instante o animal está a inspirar. Aproveitei o facto de terem recorrido à calculadora para procurarmos uma forma de perceber a fase da respiração por processos analíticos (GV8-11/05).

A1G3:	Diz aqui que temos que saber em que fase está o animal aos 7 minutos e 29 segundos, se está na inspiração ou na expiração. Então, nós fizemos uma regra de três simples para saber quanto eram os 7 minutos em segundos, que eram 420 segundos e então juntamos os 29 e deu 449 segundos. Depois fazemos o v disso e deu $2{,}5L$, então concluímos que, uma vez que o volume aos 450 é $2{,}75$, então concluímos que se trata de uma inspiração, porque 1 segundo depois atinge o máximo.
Professora:	Como determinaram o $v(449)$?
A2G3:	Na calculadora.
Professora:	Quantos ciclos cabem em 449 segundos?
A2G5:	Divide-se por 4.
Professora:	Vamos fazer essa divisão então. 449 a dividir por 4.
A2G1:	Não dá.
Professora:	Ok, não é divisível por 4, vai sobrar alguma coisa. (*Faço o algoritmo da divisão no quadro com a ajuda dos alunos*)
Professora:	Então $449 = 4 \times 112 + 1$. O que isto significa?
A1G1:	Que tem 112 ciclos mais 1 segundo.
Professora:	E mais 1 segundo é uma inspiração ou uma expiração?
A1G3:	É uma inspiração, porque o máximo é só 2 segundos depois.

No item 1.3., que faz alusão ao cálculo da derivada em dois instantes diferentes, a interpretação da relação entre o sinal das derivadas nesses instantes e a fase de respiração correspondente, foi muito bem interpretada pelo aluno A1G6. Aproveitei esta questão para chamar a atenção para as diferenças de métodos do estudo da fase de respiração, recorrendo ao algoritmo da divisão do item 1.2. e o estudo do sinal da derivada no item 1.3. (GV8-11/05).

A1G6:	Basicamente pedem o significado de $v'(5)$ e de $v'(15)$. A derivada em 5 dá $\frac{\pi}{8}$ litros por segundo, enquanto em 15 dá $-\frac{\pi}{8}$ litros por segundo. Pelo contexto do problema chegamos à conclusão que quando $x = 5$ está a receber $\frac{\pi}{8}$ litros por segundo, ou seja, ele está a inspirar. Enquanto que $x = 15$, verificamos que ele perde $\frac{\pi}{8}$ litros por segundo, o que significa que ele está a expirar.
Professora:	Alguém interpretou de forma diferente? (*ninguém comenta*)
Professora:	Vamos olhar para a pergunta anterior. Na pergunta anterior, nós conseguimos saber se o animal está a inspirar recorrendo ao algoritmo da divisão. Será que é sempre preciso recorrer ao algoritmo da divisão?
A1G1:	Não.
Professora:	Nós conseguimos perceber se o animal está a inspirar com o estudo de sinal da derivada. Se a derivada der positiva, o que está a acontecer?
A2G7:	A função está a crescer.

Professora:	Neste exemplo, traduz-se, no animal a inspirar. E se a derivada for negativa?
A1G1:	Está a expirar.
Professora:	Porquê?
A2G7:	Porque a função está a decrescer.
Professora:	Reparem que dadas a propriedades periódicas da função v, conseguimos usar um método que aprendemos há muitos anos, o algoritmo da divisão e a interpretação do resto da divisão ao contexto. E conseguimos usar agora um novo método de interpretação, com recurso ao estudo de sinal da primeira derivada.

No item 1.4., o maior desafio foi perceber o significado, no contexto do problema, para os pontos de inflexão (GV8-11/05).

A3G1:	Nas alíneas anteriores já tínhamos calculado a primeira derivada da função v. Portanto, a partir da primeira fizemos a segunda derivada. Depois igualamos essa função a zero e obtivemos dois instantes. Restringimos ao intervalo $[4,8]$ e fizemos a tabela de sinal. Analisamos o comportamento da função nesse intervalo e com os zeros concluímos os pontos de inflexão da função v.
Professora:	Será que nós conseguimos perceber o que significam esses pontos?
A1G6:	Deixa de inspirar e passa a expirar.
Professora:	Vamos ver. Onde temos o Ponto de Inflexão? (*represento um esboço do gráfico de v e marco um ponto de inflexão num intervalo de inspiração*) Neste momento deixou de inspirar e passou a expirar?
A1G6:	Não.
Professora:	Então o que quererá dizer?
	(*ninguém comenta*)
Professora:	No caso deste ponto de inflexão, se nós traçarmos a reta tangente à função nesse ponto, ela irá ter o declive máximo. Os zeros da segunda derivada dão-nos informação à cerca dos extremos da primeira derivada. Este momento foi aquele onde a velocidade da entrada de ar era máxima, no intervalo da inspiração. Após este momento há uma desaceleração da entrada de ar, até que a velocidade de entrada de ar é zero, ou seja, no momento atinge o volume máximo de ar nos pulmões e a inspiração acaba.

A aula terminou no momento que discutíamos a interpretação dos pontos de inflexão no contexto da situação problema. Nesta aula, notei haver, fundamentalmente, dificuldades na resolução de equações trigonométricas, expondo as fragilidades na compreensão das relações existentes entre as razões trigonométricas dos ângulos no círculo (RA8-11/05). Todas as resoluções foram projetadas no quadro, permitindo que todos os alunos pudessem registar as conclusões nos seus apontamentos pessoais. O manual tinha, na mesma página, uma situação problema de contexto real diferente, que ficou para trabalho de casa (idem).

4.6. Perceção dos alunos após a intervenção pedagógica

No final da intervenção pedagógica, os alunos responderam a um questionário, cujo propósito era percecionar a sua visão sobre as estratégias de ensino e aprendizagem levadas a cabo durante a intervenção pedagógica. O questionário era munido de questões que relacionavam, na sua perspetiva, a relação motivacional e de compreensão dos conteúdos no tema das Funções Trigonométricas com o uso de tarefas de exploração e tarefas de investigação. De que forma esta tipologia de tarefas de estrutura aberta contribuíram para o desenvolvimento de competências e que dificuldades sentiram na concretização das tarefas de investigação.

Perceção dos alunos sobre o uso de tarefas de estrutura aberta na aula de Matemática

As tarefas de estrutura aberta, as tarefas de exploração e as tarefas de investigação, são vistas pela maioria doa alunos como situações de uma natureza problemática que exigem mais raciocínio, criatividade e onde sentem mais liberdade:

> "Nas tarefas exploratórias e de investigação, não só aplicamos conhecimento, como também desenvolvemos outras competências, como a capacidade de trabalhar com a calculadora, como a capacidade de formular e resolver problemas e de interpretação em contextos reais". (QA2)
> "As tarefas exploratórias e as tarefas de investigação são menos diretas ainda que os seus problemas exigem muito mais raciocínio, compreensão e domínio dos conceitos" (QA26).
> "As tarefas de exploração e investigação requerem um exercício mental mais complexo, sendo necessário a abordagem a conceitos e fórmulas aprendidas para a interpretação e resolução do problema". (QA18)
> "Nas tarefas de exploração e de investigação é uma maneira de resolvermos problemas, mas que necessitam de investigação, interação e criatividade". (QA3)

O desenvolvimento de competências como a autonomia, o pensamento crítico e criativo, a tomada de decisões e espírito de iniciativa, a capacidade de interpretação de diferentes contextos, a capacidade de resolver problemas, a capacidade de trabalhar em grupo e de se expressar em público, são algumas das competências-chave para o século XXI (Martins et al., 2017), que se esperam ser trabalhadas também na sala de aula de Matemática. Neste contexto, o aluno QA1 aponta dois pareceres positivos na realização desta tipologia de tarefa, que "aumentam a capacidade de falar em público e argumentar quando apresentamos a nossa teoria e proporcionam-nos momentos importantes de trabalho de grupo". O aluno QA19 considera que a realização deste tipo de tarefas "é benéfica no sentido de nos obrigar a raciocinar". O aluno QA7 vai mais longe ao afirmar que as tarefas de exploração e de investigação "permitem que usemos o nosso raciocínio e capacidade de perceber os problemas e investigar soluções. É, portanto, muito útil uma vez que permite que desenvolvamos essas características".

O escrutínio dos alunos relativamente aos contributos da realização de tarefas exploratórias e investigativas para o desenvolvimento das suas competências é explanado conforme ilustra a Tabela 15.

Tabela 15: Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativamente ao contributo para o desenvolvimento de competências na realização de tarefas de exploração e tarefas de investigação

As tarefas exploratórias e de investigação desenvolvem:	Percentagem				$\bar{x}$	s
	N	P	A	M		
A capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no contexto de vida real.	6	13	77	4	2,8	0,61
A capacidade de interpretação de textos e problemas,	3	10	77	10	2,9	0,56
A capacidade de formular e resolver problemas.	0	19	78	3	2,8	0,45
Uma atitude de autonomia.	9	13	68	10	2,8	0,75
O espírito crítico e de rigor.	3	23	58	16	2,9	0,71
A confiança na abordagem de situações novas.	6	29	55	10	2,7	0,74
A capacidade de elaborar e organizar o trabalho de forma cuidada.	3	23	58	16	2,9	0,71
A capacidade de selecionar estratégias para a abordagem da problemática.	7	13	61	19	2,9	0,76
A capacidade de formular hipóteses e prever resultados.	3	13	77	7	2,9	0,55
A capacidade de colaborar em trabalhos de grupo.	3	10	68	19	3,0	0,65
A capacidade de exprimir e fundamentar opiniões.	3	23	58	16	2,9	0,71
A capacidade de falar em público.	9	13	52	26	2,9	0,88

Nota: N – Nenhum; P – Pouco; A – Algum; M – Muito

Da observação da tabela, é notório perceber que a maioria dos alunos da turma percebe existir contributos para o desenvolvimento das suas competências quando realizam tarefas de carácter exploratório ou investigativo. Note-se que a influência do desenvolvimento das diferentes competências, na realização desta tipologia de tarefas, é avaliada pelos alunos como "Algum" ou "Muito" num espetro que varia de setenta e quatro a oitenta e sete por cento. Estando as competências avaliadas como aqueles cujas tarefas de estrutura aberta mais contribuem para o seu desenvolvimento: (1) A capacidade de interpretação de textos e problemas; e (2) A capacidade de trabalhar em grupo. A ideia de que esta tipologia de tarefa potencia o desenvolvimento das diferentes competências supramencionadas é bem defendida pelo aluno QA13 quando afirma que

> Na resolução de exercícios e problemas temos de utilizar o caminho que o professor escolhe para chegar à resolução, enquanto que nas tarefas exploratórias e de investigação temos vários caminhos e formas de resolver o exercício, podendo assim explorar mais o nosso leque de conhecimentos.

O aluno QA7 refere, ainda, que nas tarefas de exploração e de investigação, "precisamos usar um pouco de imaginação", o que, como indica o aluno QA1, se traduz em "ter mais liberdade para formularmos a nossa opinião".

Não obstante, esta tipologia de tarefa é, na opinião da maioria dos alunos, mais difícil do que os exercícios ou problemas. A Tabela 16 condensa o sentimento de dificuldade relativamente à realização das tarefas de exploração e das tarefas de investigação, em comparação à resolução de exercícios ou problemas.

Tabela 16. Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativamente à dificuldade sentida na realização de tarefas de exploração e tarefas de investigação

As tarefas de:	Percentagem DT/D	I	C/CT	$\bar{x}$	s
Exploração de conceitos são mais difíceis que exercícios ou problemas.	10	29	61	3,5	0,87
Investigação são mais difíceis que exercícios ou problemas.	10	26	64	3,5	0,66

Nota: DT/D – Discordo Totalmente ou Discordo; I – Indiferente; C/CT – Concordo ou Concordo Totalmente

As tarefas de exploração ou de investigação parecem ser um desafio suplementar para a maioria dos alunos. Neste âmbito, o aluno QA7 considera que "as tarefas exploratórias e de investigação são mais complicadas e difíceis, exigem de nós um maior esforço e maior uso de pensamento e raciocínio". Esta ideia também é reforçada pelo aluno QA9, que diz que "as tarefas exploratórias e de investigação requerem mais trabalho e são mais complicadas, visto que temos que trabalhar com bastante informação e interligá-la". Já o aluno QA27 resume toda a sua ideia numa frase "têm um grau de dificuldade maior".

As tarefas de investigação, pelo seu grau de abertura e de dificuldade, parecem trazer desafios adicionais. As diferentes fases de resolução das tarefas de investigação são tidas, pela maioria dos alunos, como algo difíceis ou muito difíceis. Estando no topo da dificuldade a procura e formulação de conjeturas, com 84% dos alunos a afirmarem que têm alguma ou muita dificuldade nesta fase. A Tabela 17 resume a percentagem de alunos relativamente à dificuldade sentida nas diferentes fases de resolução nas tarefas de investigação.

Tabela 17: Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativamente à dificuldade sentida nas diferentes fases de resolução nas tarefas de investigação

Na concretização das fases de resolução das tarefas de investigação senti dificuldades na:	Percentagem N	P	A	M	$\bar{x}$	s
Interpretação do problema.	7	29	61	3	2,6	0,66
Formulação de conjeturas.	0	16	71	13	3,0	0,54
Verificação/discussão de conjeturas.	6	45	42	7	2,5	0,71
Prova de conjeturas.	0	29	58	13	2,8	0,63
Discussão de resultados com os colegas.	35	39	20	6	2,0	0,90

Nota: N – Nenhuma; P – Pouca; A – Alguma; M – Muita

No tema das Funções Trigonométricas, a realização das tarefas de investigação parece ter trazido desafios acrescidos. Da análise da Tabela 18, constata-se que 74% dos alunos considera que, no tema das Funções Trigonométricas, a prova de conjeturas é uma atividade que exige persistência e 94% dos alunos realçam terem sentido exigência no domínio dos conceitos do tema em estudo.

Tabela 18: Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativamente aos desafios sentidos na realização de tarefas de investigação no estudo das Funções Trigonométricas

Desafios no estudo das Funções Trigonométricas	Percentagem			$\bar{x}$	s
	DT/D	I	C/CT		
A prova de conjeturas nas tarefas investigativas, no tema das Funções Trigonométricas, é uma atividade que exige persistência.	3	23	74	3,7	0,52
As tarefas de investigação exigem o domínio dos conceitos do tema em estudo.	0	6	94	3,9	0,25

Nota: DT/D – Discordo Totalmente ou Discordo; I – Indiferente; C/CT – Concordo ou Concordo Totalmente

O tema das Funções Trigonométricas é um tema da Matemática particularmente abstrato, cujo estudo é, usualmente, difícil para os alunos. Nesta turma, a perceção de ser um tema onde sentiram particular dificuldade em comparação a outros temas da Matemática também foi notado. Não obstante, não mostra ser um tema que a maioria dos alunos tenha desgostado de estudar (Tabela 19).

Tabela 19: Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativamente ao estudo do tema das Funções Trigonométricas

Tema das Funções Trigonométricas	Percentagem			$\bar{x}$	s
	DT/D	I	C/CT		
Funções trigonométricas foi um tema que gostei de estudar.	32	36	32	3,0	0,91
No estudo das Funções Trigonométricas evidenciei mais dificuldades do que noutros temas de Matemática.	32	19	49	3,2	0,97

Nota: DT/D – Discordo Totalmente ou Discordo; I – Indiferente; C/CT – Concordo ou Concordo Totalmente

Pela análise da Tabela 19, verifica-se que apenas 32% dos alunos declaram discordar de ter gostado de estudar o tema das Funções Trigonométricas e 49% afirmam ter sentido dificuldade no estudo do tema em comparação a outros temas da Matemática.

As tarefas de exploração ou as tarefas de investigação tiveram contributos positivos na compreensão dos conteúdos do tema das Funções Trigonométricas. O aluno QA9 declara que "as tarefas de exploração e de investigação na aprendizagem das Funções Trigonométricas fazem-nos perceber melhor o comportamento das funções". O aluno QA11 corrobora da mesma opinião, diz que "a concretização de tarefas de exploração e de investigação permitem-nos conhecer uma faceta ligada ao quotidiano, o que, às vezes, facilita a interpretação dos problemas e das Funções trigonométricas em si (o seu comportamento, etc.)". É também da mesma opinião o aluno QA13 que afirma esta tipologia de tarefas é "uma maneira diferente de estudar funções. É, sem dúvida, mais interessante".

Perceção dos alunos sobre o uso de tarefas de carácter exploratório na aprendizagem das Funções Trigonométricas

A aptidão que a maioria dos alunos mais realça como tendo sido desenvolvida pela realização de tarefas de exploração é a capacidade de trabalhar com a calculadora gráfica (56%) (Tabela 20).

Tabela 20: Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativamente ao uso de tarefas de exploração na aprendizagem das Funções Trigonométricas

	Percentagem			$\bar{x}$	s
As tarefas de exploração de conceitos propostas:	DT/D	I	C/CT		
Contribuíram para aumentar o meu interesse na aprendizagem das Funções Trigonométricas.	23	61	16	2,9	0,75
Ajudaram a perceber melhor os conteúdos do tema das Funções Trigonométricas.	13	42	45	3,3	0,77
Ajudaram a perceber melhor a ligação das funções periódicas com problemas da vida real.	13	39	48	3,4	0,78
Ajudaram a melhorar a minha capacidade em trabalhar com a calculadora gráfica.	9	35	56	3,5	0,80

Nota: DT/D – Discordo Totalmente ou Discordo; I – Indiferente; C/CT – Concordo ou Concordo Totalmente

Alguns alunos (45%) acreditam que as tarefas de exploração os ajudaram a perceber melhor o tema das Funções Trigonométricas, subindo para 48% os alunos que afirmam que esta tipologia de tarefa os ajudou a perceber melhor a ligação das funções periódicas com problemas da vida real. O aluno QA8 aponta que "ao realizarmos tarefas de exploração e de investigação ficamos a perceber melhor a matéria, pois é mais fácil perceber o tema das Funções Trigonométricas se associarmos esse tema, por exemplo, a situações da vida real".

O contributo das tarefas de exploração para potenciar o interesse sobre o tema das Funções Trigonométricas não é consensual, visto que 61% dos alunos não mostram ter certeza do contributo das tarefas de exploração na sua motivação para o estudo das Funções Trigonométricas, não conseguindo tomar uma posição de discordância ou de concordância.

Perceção dos alunos sobre o uso de tarefas de caracter investigativo na aprendizagem das Funções Trigonométricas

A maioria dos alunos, assim como, nas tarefas de exploração, identifica as tarefas de investigação como 'motores' de desenvolvimento da sua capacidade de trabalhar com a calculadora gráfica. Como podemos observar na Tabela 21, 65% dos alunos apontam este facto. O contributo para o aumento do interesse sobre o estudo do tema das Funções Trigonométricas não parece claro na opinião dos alunos, uma vez que 61% ficaram indecisos sobre os seus contributos para esta rubrica, não conseguindo tomar uma posição de discordância ou de concordância. O mesmo acontece com o desafio da procura de conjeturas, neste caso, com 65% dos alunos a não tomarem posição de concordância ou discordância. Não obstante, 45% dos alunos acreditam que as tarefas de investigação os ajudaram a perceber melhor os conteúdos do tema das Funções Trigonométricas e a perceber melhor a ligação das funções periódicas com problemas da vida real (Tabela 21).

Tabela 21: Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativamente ao uso de tarefas de investigação na aprendizagem das Funções Trigonométricas

	Percentagem			$\tilde{x}$	s
As tarefas de investigação propostas:	DT/D	I	C/CT		
Contribuíram para aumentar o meu interesse na aprendizagem das Funções Trigonométricas.	29	61	10	2,8	0,72
Durante a procura de conjeturas, no tema das Funções Trigonométricas, é um desafio que desperta o interesse de aprender.	16	65	19	3,0	0,59
Ajudaram a perceber melhor a ligação das funções periódicas com problemas da vida real.	10	45	45	3,4	0,65
Ajudaram a perceber melhor os conteúdos do tema das Funções Trigonométricas.	19	36	45	3,3	0,83
Ajudaram a melhorar a minha capacidade em trabalhar com a calculadora gráfica.	6	29	65	3,6	0,61
A interpretação da informação gerada pela calculadora gráfica foi um desafio no estudo do tema das Funções Trigonométricas.	10	45	45	3,4	0,78
Gostei que me colocassem no papel de investigador.	23	45	32	3,1	0,73

Nota: DT/D – Discordo Totalmente ou Discordo; I – Indiferente; C/CT – Concordo ou Concordo Totalmente

O aluno QA23 declara que as tarefas de investigação "ajudam-nos a entender melhor como podemos explorar e investigar uma função trigonométrica, de uma forma completamente diferente do que estamos habituados". Para o aluno QA14, "a concretização de tarefas de exploração e de investigação tem alguns aspetos positivos, como a aprendizagem dos conteúdos do tema de forma mais profunda". Tal concretização tem implicações na forma como as atividades dos alunos são organizadas. O aluno QA4 considera que "nas tarefas de investigação, ao resolver em grupo, permite-nos trocar ideias entre os colegas e assim perceber melhor a matéria".

De uma forma geral, a maioria dos alunos dá indicação de que ao realizarem tarefas de exploração ou de investigação desenvolveram competências de comunicação e argumentação, aumentaram a sua capacidade de trabalhar com a calculadora gráfica e perceberam melhor os conteúdos do tema das Funções Trigonométricas. No entanto, apontam, particularmente, duas desvantagens na realização desta tipologia de tarefas de inevitável reflexão.

Onze alunos da turma acreditam que as tarefas de exploração ou de investigação ocupam muito tempo das aulas, que deveria ser usado para fazer exercícios e, por consequência, as tarefas são tidas como uma perda de tempo. Neste âmbito, o aluno QA20 declara que

> Seria mais útil aos alunos o não uso de tarefas de exploração e investigação. Podem até ser úteis para visualizar melhor os conteúdos, mas não é o que precisamos. Temos exame de

matemática e nele são os exercícios e problemas que nos são desafiados, não tarefas de exploração e investigação.

O aluno QA11 afirma "não encontro/identifico aspetos negativos nesse tipo de tarefas no que diz respeito à minha aprendizagem de conteúdos do tema Funções Trigonométricas. Contudo, acho que as tarefas de investigação requerem bastante tempo, quando nesta altura não temos muito". O aluno QA8 comenta que "ao realizarmos estas tarefas perdemos muito tempo que podia ter sido aproveitado para a realização de exercícios de preparação para o teste. Contudo acho que as tarefas foram bastante importantes". Mais seis alunos corroboram dessa opinião, mostram apreensão no que se refere à preparação para a avaliação sumativa e assumem acreditar que as tarefas desta natureza se desviaram dos propósitos do exame nacional. A título de exemplo, o aluno QA29 alega que "a realização destas tarefas é uma perda de tempo, pois é muito mais eficaz para a nossa aprendizagem a resolução de exercícios e problemas que contenha conteúdos realmente importantes na nossa preparação para o exame e para os testes intermédios".

Dos dezassete alunos que acreditam que se perdeu tempo ou que não estavam a ser preparados segundo os pressupostos do exame nacional, doze acreditam que as tarefas de exploração ou investigação contribuíram favoravelmente para a compreensão dos conteúdos das Funções Trigonométricas, o que nos faz perceber existir um sentimento paradoxal dos alunos no que diz respeito à aprendizagem e à avaliação sobre a aprendizagem. Este sentimento pode-nos ajudar a entender a posição dos alunos quando questionados se gostariam de trabalhar com tarefas de investigação noutros temas do programa: 32% não gostariam e 32% gostariam, restando 36% que expressam indiferença (Tabela 22).

Tabela 22: Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativamente ao uso de tarefas de investigação noutros temas do programa

	Percentagem			$\tilde{x}$	s
	DT/D	I	C/CT		
Gostava de trabalhar com tarefas de investigação matemática noutros temas do programa.	32	36	32	3,0	0,80

Nota: DT/D – Discordo Totalmente ou Discordo; I – Indiferente; C/CT – Concordo ou Concordo Totalmente

Tais resultados indiciam dever-se à inexperiência dos alunos de trabalhar com tarefas que apresentem características similares às que foram exploradas neste estudo.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo são apresentadas as conclusões do estudo, respondendo às questões de investigação delineadas, assim como uma reflexão sobre as suas limitações e algumas recomendações para futuras intervenções. As conclusões e recomendações resultam da análise dos dados recolhidos durante a intervenção pedagógica, nomeadamente, através das reproduções escritas dos alunos, das gravações audiovisuais das aulas e dos questionários.

5.1. Conclusões

Este trabalho tinha como objetivo analisar os contributos das tarefas de exploração e de investigação na aprendizagem do tema das Funções Trigonométricas por alunos de 12.º ano de escolaridade. A concretização deste objetivo conduz a responder às questões de investigação, que orientaram a intervenção pedagógica.

5.1.1. Que atividades desenvolvem os alunos na realização de tarefas de exploração e de tarefas de investigação na aprendizagem das Funções Trigonométricas?

A implementação das tarefas de exploração ou de investigação basearam-se nas fases definidas por Fonseca et al. (1999), as quais se sub-categorizam por 'Introdução da Tarefa', 'Desenvolvimento da Tarefa' e 'Discussão da Tarefa'. A 'Introdução da Tarefa' é um momento considerado muito importante para estes autores, para quem é nesta fase que se clarifica junto dos alunos o que é pretendido e que se esclarecem eventuais dúvidas de interpretação do enunciado, procurando criar um ambiente favorável ao desenvolvimento dos trabalhos. Durante a intervenção pedagógica, os alunos não atribuíam muito interesse por esta fase, o que fez emergir a ideia de efetuar a leitura do enunciado da tarefa, por mim ou por um aluno, em voz alta, para o grupo-turma. Apesar desta leitura ser respeitada, os alunos reunidos em pequeno-grupo davam mostras de querer começar a exploração, por um lado, sem se preocuparem com o objetivo da tarefa, e, por outro lado, sem apresentarem quaisquer dúvidas na interpretação da situação problema. Geralmente, os alunos procuravam fazer a interpretação do enunciado, ao mesmo tempo que delineavam estratégias de abordagem à situação problema, em pequeno grupo e eram nesses momentos que surgiam as dúvidas e que recorriam às orientações da professora.

Uma vez que, durante a intervenção pedagógica, foram utilizadas tarefas de exploração e tarefas de investigação, dada a desigualdade no grau de dificuldade inerente a cada tipologia de tarefa (Ponte, 2005), há diferenças significativas no que toca à atividade realizada pelos alunos em cada uma, durante o desenvolvimento da tarefa. Da análise do manual adotado pela escola, constatou-se que este artefacto didático vinha munido de algumas tarefas de exploração, pelo que os alunos já estavam familiarizados com esta tipologia de tarefa. Esta situação, adicionado o facto de o grau de dificuldade ser mais baixo comparativamente às tarefas de investigação (Ponte, 2005), permitiu que, na implementação das tarefas de exploração, os alunos davam mostras de conseguir mais facilmente iniciar a tarefa.

Já as tarefas de investigação, dado o seu grau de abertura e de dificuldade, foram um grande desafio para os alunos. Uma vez que não se encontravam familiarizados com esta tipologia de tarefa, mostraram maior confusão em perceber de que forma deveriam abordar a situação problema. Esta circunstância vai ao encontro à ressalva de Ponte (2006), que afirma que "à partida [os estudantes] não sabem como trabalhar neste tipo de tarefa e precisam que o professor os ajude a fazer essa aprendizagem" (p. 14). A maior preocupação dos alunos, durante a abordagem e o desenvolvimento da tarefa, sempre foi dar uma resposta e, por isso, houve uma grande dificuldade em formular questões de investigação, pelo que, as afirmações substituíam as questões. Esta dinâmica pode dever-se à visão que os alunos têm enraizada sobre o seu papel, numa perspetiva de ensino direto, como aquele que dá respostas (Ponte, 2005). Este facto também foi verificado no estudo de Brocardo (2001) com alunos de 8.º ano e no estudo de Branco (2014) com alunos de 10.º ano, ambos, no estudo da Geometria. Não obstante, os alunos mostraram bastante interesse e envolvimento na realização da tarefa, bem como expectativa em como o trabalho a realizar os ajudaria a compreender o conteúdo programático patente na tarefa (RA2-24/04; RA4-30/04; RA8-11/05).

Na realização das tarefas, no contexto de sala de aula, os alunos tinham sempre disponível a calculadora gráfica, pelo que esta se mostrou ser uma ferramenta muito usada. A calculadora gráfica, ao longo da intervenção pedagógica, foi-se tornando cada vez mais como um instrumento de investigação. Com efeito, para os alunos, gradualmente, a calculadora tornou-se uma fonte de formulação de conjeturas, quer através de análise gráfica, quer através de modelações e ajustamento de dados a curvas. Esta evidência também foi notada no estudo de Magalhães e Martinho (2011) com alunos de 11.º ano no estudo de Funções Racionais. No início da intervenção pedagógica, marcou-se uma tendência para a formulação de conjeturas com base em poucos exemplos ou testes. Comportamento que também se viu melhorado ao longo da intervenção pedagógica. Esta propensão também foi anotada no estudo de Brocado (2001) e no estudo de Henriques (2012) com alunos universitários, no estudo do raciocínio matemático no âmbito da Análise Numérica.

As discussões em torno da formulação de conjeturas, da realização de testes e consequente prova ou confirmação de resultados e o trabalho de grupo cooperativo foi melhorando ao longo do tempo. No início da intervenção pedagógica, apesar de os alunos estarem organizados em grupo, muitos tinham o hábito de trabalhar individualmente e só depois discutiam com o grupo as conclusões a que chegaram, provocando que os alunos com mais dificuldades esperassem que os colegas lhes dissessem o que fazer. Esta postura foi melhorando ao longo da intervenção pedagógica, já que, pelo grau de abertura das tarefas, os alunos foram percebendo que todos os elementos do grupo tinham o potencial para adicionar contributos (Swan, 2005), tornando-se mais confiantes na abordagem às tarefas de estrutura aberta, o que Gojak (s.d.) prevê que aconteça no seu documento *A Key to Deep Understanding: The Importance of Rich Tasks*. O que, consequentemente, mostra um claro contributo das tarefas de exploração ou de investigação para uma democratização do ensino-aprendizagem das Funções Trigonométricas para estes alunos. Também melhorou ao longo do tempo, pela maioria dos alunos, a perceção sobre a necessidade de, pelo menos, existir uma justificação admissível de validação das conclusões. No entanto, não mostrou ser uma prioridade da sua atividade a necessidade da existência de prova. Esta tendência é também evidenciada nos estudos de Henriques (2012) e de Brocardo (2001). A este respeito, surgem duas possíveis razões: (1) Não é familiar aos alunos apresentar ou elaborar demonstrações de conjeturas; (2) Não foram preparados, ao longo do percurso escolar, para o pensamento lógico-dedutivo formal próprio das demonstrações matemáticas.

Durante a discussão do grupo-turma, enquanto professora, era chamada a provocar discussão. As afirmações do aluno que apresentava as conclusões do grupo não eram, geralmente, nem contestadas, nem questionadas, mesmo que houvessem diferentes abordagens à situação problema. Esta fase mostrou-se crucial para os alunos, uma vez que funcionou como um epílogo das ideias e conceitos explorados na tarefa, além da formalização matemática do investigado (Fonseca et al., 1999).

A realização das tarefas de exploração ou de investigação permitiram verificar que os alunos envolvidos neste estudo adquiriram uma boa compreensão sobre os conteúdos do tema das Funções Trigonométricas, assim como na compreensão da aplicação das funções periódicas ao contexto real. No entanto, dada a tendência da procura pela compreensão com a ajuda da calculadora gráfica, pela sua capacidade de provocar a concretização visual e fabricar rápidas testagens (Magalhães & Martinho, 2011), os alunos mostraram, ao longo do tempo, quer por este facto, quer pelas carências conceptuais na Trigonometria, um desenvolvimento insuficiente na capacidade algébrica e na resolução analítica de situações-tipo de exercícios ou problemas de avaliação sumativa. Esta circunstância pode ter sido resultado de três contextos cumulativos, alguma falta de estudo dos alunos fora do contexto de sala de aula, o número reduzido de aulas dedicado ao tema das Funções Trigonométricas, que provocou a não possibilidade de tempo dedicado a praticar exercícios e problemas mais rotineiros e a inexperiência da professora.

5.1.2. Que dificuldades revelam os alunos na realização de tarefas de exploração ou tarefas de investigação na aprendizagem das Funções Trigonométricas?

Tal como a literatura sugere (Ponte, 2003b; Ponte, 2005), os alunos deram mostras de sentir menos dificuldades na realização das tarefas de exploração, comparativamente às tarefas de investigação. Na realização das tarefas de exploração, os alunos conseguiam, imediatamente, começar a exploração da tarefa. Já nas tarefas de investigação, os alunos davam mostras de se sentirem perdidos, sem saberem exatamente como começar. Em qualquer uma das situações, a maior dificuldade dos alunos estava associada à falta de conhecimentos prévios de Trigonometria, o que impossibilitava a fluência ou o surgimento de ideias criativas nesta tipologia de tarefas no tema das Funções Trigonométricas. Em qualquer uma das tarefas analisadas neste estudo, assim como os diálogos aluno--professor descritos, é visível as carências ao nível conceptual. Note-se, por exemplo, na primeira tarefa, os alunos tiveram muitas dificuldades em preencher as tabelas para os valores de seno de ângulos tabelados ou ângulos cujo seno se deduz pela redução ao primeiro quadrante desses ângulos. Forçando a haver uma distribuição do preenchimento das tabelas por grupos diferentes. Toda a tarefa apelava à dedução de conceitos assentes em conhecimentos adquiridos no $11.^{\circ}$ ano, os quais, a maioria dos alunos dava mostras de não ter.

A segunda tarefa, dividida em dois momentos principais, no primeiro o estudo dos efeitos da variação de parâmetros sobre a função $y = a\sin(b(x-c)) + d, x \in \mathbb{R}$ e no segundo, a dedução da possível existência da função inversa da função $y = \sin x\,, x \in \mathbb{R}$. O primeiro item desta tarefa trouxe dificuldades, em primeira instância, na abordagem à situação problema, indo ao encontro às dificuldades usuais dos alunos em tarefas de estrutura aberta (Branco, 2014; Brocardo, 2001; Henriques, 2012) e, em segunda instância, teve dois contratempos, a incompreensão inicial da necessidade de comparação gráfica das funções definidas com a mudança de valores dos parâmetros a, b, c e d com a função $y = \sin x\,, x \in \mathbb{R}$ e a atribuição insuficiente de valores para esses parâmetros, impossibilitando a chegada a boas conclusões (Brocardo, Oliveira, & Ponte, 2003). O segundo item da tarefa revelou dificuldades ao nível da carência de conhecimentos sobre o conceito de função inversa, nomeadamente, na imposição da bijetividade e a compreensão sobre as relações existentes entre duas funções inversas. Conteúdos também trabalhados por estes alunos no $11.^{\circ}$ ano. Reforçando esta tese, note-se, na análise da terceira tarefa deste estudo, os alunos deram mostras de maior dificuldade na resolução de equações trigonométricas. Ferramenta que, durante o 12.º ano, surge como cálculo auxiliar à resolução de problemas.

A comunicação escrita, sendo um aspeto importante da atividade investigativa, também trouxe dificuldades. Usualmente, os alunos são muito minimalistas no que escrevem, isto é, parece ser mais natural registar cálculos numéricos ou algébricos e resoluções de equações, do que redigir conclusões ou justificações escritas sobre o que se estudou.

Em suma, apesar da procura de formulação de questões e de conjeturas ter sido um desafio, os alunos mostraram genuína vontade em se envolverem nas tarefas. As maiores dificuldades estiveram ligadas às carências de conhecimento de conteúdo, o qual, sem ele, é muito difícil gerar novas ideias. No entanto, as tarefas propostas tiveram um impacto muito positivo na compreensão destes alunos sobre os conteúdos do tema das Funções Trigonométricas e sobre a abordagem ao estudo das funções no geral.

5.1.3. Quais as perceções dos alunos sobre a realização de tarefas de exploração ou de investigação na aprendizagem das Funções Trigonométricas?

De forma a compreendermos a perceção dos alunos sobre a realização das tarefas de exploração ou de investigação na aprendizagem do Tema das Funções Trigonométricas é necessário ter em consideração o enquadramento temporal onde a intervenção pedagógica foi inserida. A intervenção pedagógica teve lugar na primeira metade do terceiro período, terminou quinze dias antes do teste intermédio e a cerca de um mês e meio do exame nacional. Nesta altura os alunos davam mostras de crescente preocupação e ansiedade relativamente à sua preparação para o teste intermédio e para o exame. Mais de metade dos alunos da turma considerou que se perdeu muito tempo com as tarefas propostas. Tempo, afirmam eles, que deveria ter sido usado na realização de exercícios de preparação para o teste e para o exame. Não obstante, da análise dos questionários, a maioria dos alunos acredita que as tarefas de exploração e de investigação contribuíram para a compreensão dos conteúdos do tema das Funções Trigonométricas, além dos contributos para o desenvolvimento de competências. Existia, portanto, um sentimento, por parte dos alunos, de compreensão sobre o tema das Funções Trigonométricas, mas menos preparação para a avaliação sumativa. Esta conjuntura conduz-nos, inevitavelmente, para uma consideração sobre a paradoxalidade destas ideias e o que pode influenciar a existência deste sentimento, assim como, para uma reflexão sobre a estratégia de ensino. Ponte (2005) define duas estratégias de ensino e aprendizagem da Matemática: o ensino direto, onde o professor assume o papel central, ao fornecer informação, apresentar exemplos e comentar situações; e o ensino--aprendizagem exploratório, onde o aluno assume a centralidade da aprendizagem. A ênfase está na realização de tarefas de exploração e investigação e a aprendizagem dá-se pela discussão entre professor e alunos. O autor alerta-nos, ainda, para a existência de versões extremas ou intermédias do ensino direto e do ensino-aprendizagem exploratório (Ponte, 2005). Com efeito, a estratégia de ensino que valoriza a reprodução em detrimento da compreensão é conotada por Fiorentini (1995) como de tendência tecnicista. Para o autor, este tipo de aprendizagem tem por base a redução da aprendizagem da Matemática a "um conjunto de técnicas, regras e algoritmos, sem grande preocupação em fundamentá-los ou justificá-los" (p. 17). Esta tendência pedagógica, onde a reprodução mecânica é mais importante que a compreensão dos conceitos, não se centra nem no professor, nem no aluno, mas nas técnicas e instrumentos de ensino que garantam o alcance dos objetivos na avaliação focada nos resultados, fazendo professores e alunos ocuparem o papel secundário de executores (Fiorentini, 1995). Lima (2016) declara que, nas últimas décadas, na Educação em Portugal, tem persistido uma pedagogia de feição tecnicista. Aponta algumas razões para tal facto acontecer, nomeadamente, "as políticas orientadas para a produção de resultados escolares em ambiente performativo e competitivo das escolas, (...) as avaliações em larga escala, nacionais e internacionais, com recurso intensificado a exames e outras formas de avaliação estandardizada" (Lima, 2016, p. 151). Figueiredo e Guimarães (2019), no seguimento deste debate, apontam dois fatores primordiais para a condução dos alunos, principalmente alunos de 12.º ano, para um estilo de aprendizagem orientado para a reprodução: (1) "A necessidade de obter classificações altas para o acesso desejado ao ensino superior" (p. 96); (2) "A pressão dos *rankings* escolares sobre as administrações das escolas e sobre os professores" (idem).

Vivemos, atualmente, num ambiente onde se discutem as competências-chave a trabalhar para o séc. XXI, onde a criatividade, a capacidade de resolver problemas e a importância do papel dos professores são os grandes desafios da Educação, no meio da grande incógnita de como lidar com novas tecnologias e a Inteligência Artificial (Beard, 2018). No entanto, o ensino onde "rankings e lógicas de mercado são princípios implícitos na construção dos normativos que regulam a educação" (Barros & Sebastião, 2012, p. 10) parece não ter fim à vista.

Enquadrados neste ambiente social e político, tudo indica que os alunos desta turma, dado o seu testemunho e a maior tensão que se fazia sentir com a aproximação do fim do ano letivo, a grande maioria está marcada por uma experiência de ensino e aprendizagem da Matemática baseada numa estratégia de ensino de tendência tecnicista. Não obstante a dualidade sentimental sobre as tarefas de exploração e investigação, em termos gerais, os alunos entenderam que as tarefas de exploração e investigação propostas lhes proporcionaram importantes momentos de trabalho em grupo, que são benéficas no sentido de os obrigar a raciocinar, permitem que desenvolvam capacidades de criatividade, de exploração de conhecimentos, de persistência, de argumentação e de autonomia. Acreditam, também, que estas tarefas contribuíram para perceberem melhor o estudo das Funções Trigonométricas. Esta crença, fez-se sentir, principalmente, pelos alunos com desempenho mediano na disciplina de Matemática.

5.2. Limitações e recomendações

Esta experiência permitiu desenvolver vários aspetos do conhecimento didático e profissional da prática docente. Houve, efetivamente, aspetos que poderão ter condicionado a prática pedagógica. Destaco a inexperiência da professora a toda a pressão envolta nos resultados na avaliação sumativa, preocupação, especialmente propícia, em alunos de 12.º ano que pretendem ingressar no ensino superior (Figeuiredo & Guimarães, 2019). Particularmente, alunos que mostram acreditar num sistema de ensino e aprendizagem da Matemática baseada na resolução de exercícios ou problemas tipo, cuja visão sobre a Matemática é a de uma espécie de bilhete de acesso ao curso desejado.

Um dos objetivos da estratégia de ensino e aprendizagem adotada, baseada em tarefas de exploração ou de investigação era contrariar a atitude passiva que os alunos mostravam ter sobre a sua aprendizagem. Os alunos não só se envolveram na realização das tarefas durante a intervenção pedagógica, como se mostraram expectantes com o que iriam aprender com a sua exploração. Por atrasos no estudo dos diferentes conteúdos do programa, o estudo do tema das Funções Trigonométricas foi reduzido de doze aulas para oito, o que, impossibilitou a ocorrência de aulas dedicadas à resolução de exercícios ou problemas mais próximos dos problemas-tipo de exame, que permitissem aos alunos perceber que a compreensão sobre os conteúdos é uma mais-valia na aprendizagem e que é essencial para sermos capazes de resolver novos tipos de problemas (NCTM, 2007). Na verdade, estes alunos tinham o potencial, pela forma como se envolviam nos trabalhos, em tomar esta estratégia de ensino, centrada no aluno, como um modelo de aprendizagem.

Foi, particularmente, difícil reunir tarefas de estrutura aberta para o 12.º ano de escolaridade, que fossem, ao mesmo tempo, um desafio interessante para os alunos e pertinentes dentro dos conteúdos a estudar. A quase inexistência de tarefas de estrutura aberta neste contexto, obrigou a uma pesquisa hercúlea e uma adaptação de problemas ou criação de enunciados. Conseguir adaptar ou criar situações problema que despertem interesse, que sejam abertas o suficiente e que permitam o aluno ser capaz de criar dentro delas, é um desafio extremamente trabalhoso, principalmente para uma professora com duas grandes barreiras a ultrapassar, sem experiência letiva e que, como aluna, foi também ela bem-sucedida num sistema de ensino de tendência tecnicista.

Acreditei, e acredito, que aprender Matemática ou qualquer outra Ciência baseada na reprodução de procedimentos é uma aprendizagem deficitária e desatualizada. Quando o programa de AI *Deep Blue* derrotou, em 1997, o lendário jogador de xadrez Kasparov e o *AlphaGo* derrotou, em 2016, o legendário Mestre de Go Lee Sedol, vivemos dois momentos que foram verdadeiros sinais de alerta para a real situação que atravessamos e em que ponto se encontra o desenvolvimento da Inteligência Artificial. Precisamos, por isso, revolucionar a forma como aprendemos (Beard, 2018). Sermos como que programados a desempenhar funções rotineiras tal como máquinas, sem pensamento crítico ou criativo, adicionados aos avanços da tecnologia e da Inteligência Artificial, torna-se clara a necessidade urgente de seguir as orientações das Competências-chave para o séc. XXI na Educação e o abandono de um sistema de ensino cativo nos resultados de provas estandardizadas.

Não só acredito que um sistema de ensino e aprendizagem centrado no aluno é preciso, como também é urgente em todos os anos escolares. Em particular, a aula de Matemática, deve funcionar como pequenas comunidades de pensamento e questionamento (NCTM, 2007). As tarefas de exploração ou de investigação são, portanto, excelentes ferramentas para perseguir este fim.

Para futuras investigações no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática, sugiro a título de exemplo, o estudo desta tipologia de tarefas em sistema de tutoria interdisciplinar, que poderiam decorrer por períodos, semestres ou ao longo de todo o ano letivo. Para temas da Matemática como a taxa de juros, estabelecer tarefas de investigação, em parceria com a disciplina de Cidadania, copular dinâmicas da sociedade civil e o estudo da Matemática. Ou, ainda, estudar o impacto na aprendizagem do 'problema' antes da 'ferramenta'. Basear o ensino e aprendizagem na curiosidade natural do ser humano e propor tarefas desafio, onde o aluno deverá sentir a necessidade da Matemática e queira conhecê-la. Abrir portas ao conhecimento matemático necessário para satisfazer a vontade do saber, ultrapassando barreira imposta por capítulos e subcapítulos ou anos. Em colaboração, por exemplo, com a disciplina de Física, poderia se desafiar os alunos a situações problemas do género: "Somos uma equipa da Nasa e precisamos enviar esta nave à Lua". Considerar o cálculo da trajetória, a força da gravidade, a força de propulsão, a velocidade a que a nave se deve deslocar, a pressão atmosférica, entre outras varáveis em estudo. Agregar a Biologia no estudo das características das camadas da Atmosfera. Agregar as TIC, para programar um simulador.

Em suma, seja com recurso a tarefas de exploração ou de investigação, com recurso a tarefas de modelação ou com recurso a ferramentas lúdicas, analógicas ou digitais, é fundamental mostrar que temos de apostar num ensino e aprendizagem da Matemática que potencie o pensamento crítico, criativo e lógico, e nos diferencie da Inteligência Artificial das nossas máquinas.

BIBLIOGRAFIA

Adamek, T., Penkalski, K., & Valentine, G. (2005). The history of trigonometry. *History of Mathematics,* 11.

APM (2013). *Parecer da direção da Associação de professores de Matemática sobre a proposta de Programa de Matemática A para os cursos Cientifico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas*. APM.

Azevedo, I., Morais, M., & Martins, F. (2017). Educação para a criatividade em adolescentes: Uma experiência com Future Problem Solving Program International. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 75-87.

Barros, R., & Sebastião, L. (2012). Políticas educativas no Portugal do séc. xxi - Um estudo com base na revisão dos normativos em vigor. In L. S. M. F. Patrício, *Da exclusão à excelência: Caminhos organizacionais para a qualidade da educação.* Associação da Educação Pluridimensional e da Escola Cultural.

Beard, A. (2018). *Natural born learners: Inside the Global Learning Revolution.* Weidenfeld & Nicolson.

Bessa, N., & Fontaine, A. (2002). *Cooperar para Aprender - Uma Introdução à Aprendizagem Cooperativa.* Asa.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto Editora.

Bornstein, N. (2020). Teaching Transformations of Trigonometric Functions with Technology. *Journal of Interactive Media in Education, 15*, 1-9.

Branco, M. (2013). As dificuldades dos alunos quando trabalham com tarefas de exploração e investigação. *Quadrante, 12(1)*, 107-131.

Branco, M. (2014). As tarefas de exploração e investigação na aprendizagem da Geometria. *Educação e Matemática*, 43-48.

Branco, M., & Martinho, M. H. (2015). O contributo da discussão em grupo para superar dificuldades sentidas pelos alunos na aprendizagem da Geometria. *REVEMAT, 10(2)*, 76-106.

Braumann, C. (2002). Divulgações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In *Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação dos professores* (pp. 5-24). Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de Matemática: Um projeto curricular no 8.º ano.* APM.

Brocardo, J. (2014). Tarefas Matemáticas. In *Atas EIEM 2014*, 3-4, SPIEM.

Brocardo, J., Oliveira, H., & Ponte, J. P. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula.* Autêntica.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: prática e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Cannon, H., & Geddes, B. (2019). Turning Experience into Experiential Learning: A Framework for Structuring Internships. *Developments in Business Simulation and Experiential Learning, 46*, 94-98.

Conselho da UE. (2018). Recomendações do Conselho sobre as competências Essenciais para a Aprendizagem ao Longo da Vida. *Jornal Oficial da União Europeia [PT]*, C 189/1 - C 189/13.

Costa, C., Dionísio, A., Figueiredo, N., Maia, E., Ponte, J., & Rosendo, A. (2002). Introdução. In *Actividade de Investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores* (pp. 1-4). Sociedade Portuguesa de Ciência e Educação.

Costa, D., & Silva, D. (2019). Abordagem investigativa em aulas de Matemática: uma investigação com casos de ensino na formação de professores. *Educação Matemática Pesquisa*, 160-179.

Costa, N. (2003). A História da Trigonometria. *Educação Matemática em Revista, 13*, 60-69.

Despacho n.º 6479/2017. (2017). *Diário da República*, 26 de julho, 15484.

Despacho n.º 12530/2018. (2018). *Diário da República*, 3470-3475.

Dionizio, F. Q., & Brandt, C. F. (2011). Análise das dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio em trigonometria. In *X Congresso Nacional de Educação–EDUCERE,* (pp. 4408-4421).

Faria, E., Rodrigues, I., Perdigão, R., & Ferreira, S. (2017). *Perfil do aluno - competências para o século XXI.* Conselho Nacional de Educação.

Figueiredo, M., & Guimarães, H. M. (2019). A relevância dos fatores motivacionais nos estilos de aprendizagem da Matemática no início do ensino secundário. *Quadrante, 28(1)*, 79-99.

Figueiral, L. (2016). *As Competências no Domínio da Matemática, das Ciências e da Tecnologia: conhecimentos, estratégias e competências científicas e tecnológicas.* APM.

Fiorentini, D. (1995). Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. *Zetetiké, 3(4)*, 1-37.

Flick, U. (2005). *Métodos qualitativos na investigação científica.* Monitor.

Fonseca, H., Brunheira, L., & Ponte, J. D. (1999). As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. In *Actas do ProfMat* (pp. 91-101). APM.

Fuller, B. (1982). *Critical Path.* St. Martin's Griffin.

Garcia, V., & Clotilde, V. (2005). Fundamentação teórica para as perguntas primárias: O que é matemática? Por que ensinar? Como se ensina e como se aprende? *Revista Educação, 32(2)*, 176-184.

Gojak, L. (2012). *NCTM Summing Up.* Acedido em 23 de maio, 2021, de https://www.nctm.org/News-and-Calendar/Messages-from-the-President/Archive/Linda-M_-Gojak/Fluency_-Simply-Fast-and-Accurate_-I-Think-Not!/

Gojak, L. (s.d.). *A Key to Deep Understanding: The Importance of Rich Tasks in K-12 Mathematics.* McGraw- Hill Education.

Guerreiro, H., & Serrazina, L. (2018). Normas sociais e sociomatemáticas numa aprendizagem comparticipada da noção de 10%. *Quadrante, 27(1),* 69-94.

Gur, H. (2009). Trigonometry Learning. *New Horizons in Education*, 57(1), 67-80.

Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático na exploração de tarefas de investigação: Um estudo com alunos universitários. *Quadrante, 21(2)*, 139-163.

Hérbert, M. L., Goyette, G., & Boutin, G. (1995). *Investigação Qualitativa - Fundamentos e Práticas.* Instituto Piaget.

Horta, M. J. (2019). *NOESIS Notícias da Educação #35.* Lisboa: Direção Geral de Educação.

Jesus, T., & Pinto, H. (2019). À descoberta da regra... História de uma investigação matemática em sala de aula. In D. Alves, H. G. Pinto, I. S. Dias, M. O. Abreu, & R. Gillain (Orgs.), *VIII Conferência Internacional Investigação, Práticas e Contextos em Educação 2019* , 360-366. Politécnico de Leiria.

Lima, L. (2016). Sobre a educação cultural e ético-política dos professores. *Educar em Revista, 61*, 143-156.

Magalhães, M. G., & Martinho, M. H. (2011). A calculadora gráfica como instrumento para o desenvolvimento da argumentação matemática. In *XXII SIEM (Seminário de Investigação em EducaçãoMatemática).* APM.

Maknun, C. L., Rosjanuardi, R., & Jupri, A. (2019). From ratios of right triangle to unit circle: an introduction to. *Journal of Physics: Conf. Series, 1157(2)*, 1-6.

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L., & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória.* Editorial do Ministério da Educação e Ciência.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically.* Pearson Education Limited.

ME (2002). *Programa de Matemática A* (10.°, 11.° e 12.°). Editorial do Ministério da Educação.

MEC (2021a). *Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática A*. Ministério da Educação e Ciência.

MEC (2021b). *Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática Ensino Básico*. Ministério da Educação e Ciência.

MEC (2018). *Aprendizagens Essenciais: Articulação com o Perfil dos Alunos 12.º Ano Matemática A*. Ministério da Educação e Ciência.

MEC (2014). *Programa e Metas Curriculares Matemática A Ensino Secundário.* Ministério da Educação e Ciência.

Mora, F. (2013). *Neuroeducación: Solo se puede aprender aquello que se ama.* Alianza Editorial, S. A.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática.* APM e IIE.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* APM.

OCDE (2016). *Global competency for an inclusive world.* OECD.

Oliveira, H., & Borralho, A. (2014). As tarefas e a aprendizagem dos alunos. *Investigação em Educação Matemática*, 149-156.

Oliveira, H. M., Segurado, M. I., & Ponte, J. P. D. (1999). Tarefas de investigação em matemática: Histórias da sala de aula. *Investigações matemáticas na aula e no currículo*, 189-206.

Oliveira, J. (2010). *Tópicos selecionados de trigonometria e sua história.* Universidade Federal de São Carlos.

Pato, M. (2001). *Trabalho de Grupo no Ensino Básico - Guia Prático para Professores.* Texto Editores.

Pereira, B., Cardoso, A., & Rocha, J. (2017). Avaliação de competências cooperativas e trabalho de grupo no 1.º CEB. *Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación, 6*, 106-110.

Pires, M. (2015). Investigações matemáticas: Aprender Matemática com compreensão. *Saber & Educar 20*, 42-51.

Pocinho, M. (2018). *Dinamização do Grupo-Turma: Manual Prático para Psicólogos Educacionais.* Universidade da Madeira.

Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático* (2.ª ed.). Editora Interciência Ltda.

Ponte, J. P. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Educação e matemática, 15*, 3-9.

Ponte, J. P. (2003a). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, 2, 93-169.

Ponte, J. P. (2003b). Investigar, ensinar e aprender. In *Actas do ProfMat 2003* (pp. CD-ROM, 25-39). APM.

Ponte, J. P. D. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.

Ponte, J. P. (1992). Problemas de Matemática e situações da vida real. *Revista de Educação, II*, 95-108.

Ponte, J. P. (2006). Explorar e Investigar em Matemática: Desafios para Estudantes e Professores. *Movimento, 14*, 80-96.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática para o 1.º ciclo do ensino básico.* Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula.* Autêntica.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Varandas, J., Brunheira, L., & Oliveira, H. (1999). Investigando as aulas de investigação matemática. In P. Abrantes, J. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 133-151). Projeto MPT e APM.

Price, C., & Jaarsveld, P. (2017). Using Open-response Tasks to Reveal the Conceptual Understanding of Learners—Learners Teaching the Teacher what they Know about Trigonometry. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 159-175.

Regert, R., Baade, J., & Pegoraro, L. (2018). As Pessoas, a Educação e o Futuro: reflexões num mundo de incertezas. *Rev. Interd, em Cult. e Soc. (RICS)*, 25-38.

Rodrigues, C., Menezes, L., & Ponte, J. P. (2014). Práticas de discussão matemática no ensino da Álgebra. In M. H. Martinho, R. A. Tomás, A. M. Boavida, & L. Menezes (Orgs.), *Atas XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 65-78). APM.

Sanjaume, N. (2016). Neuroeducação e Jogos de Mesa. *Proposta de Inovação Educativa para Desenvolver Competências do Aluno*. Devir.

Santos, H. (1977). *Piaget na prática pedagógica.* Colecção Pedagogia e Práxis.

Schilling, D. (2013). *Industry tap into news.* Acedido em 12 de janeiro, 2022, de
https://www.industrytap.com/knowledge-doubling-every-12-months-soon-to-be-every-12-hours/3950

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education*, *196*(2), 1-38.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. Leal, & J. Ponte (Eds.), *Investigar para Aprender Matemática* (pp. 61-71). Associação de Professores de Matemática.

Silva, C. S. (2004). O estado dos manuais escolares de Matemática em Portugal. *Educação Matemática, 80*, 46-50.

Silva, J., Canavarro, A. P., Albuquerque, C., Mestre, C., Martins, H., Almiro, J., Santos, L., Gabriel, L., Seabra, O., & Correia, P. (2019). *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática.* Acedido em 3 de fevereiro, 2022, de https://www.dge.mec.pt/noticias/
recomendacoes-para-melhoria-das-aprendizagens-dos-alunos-em-matematica

Silva, M., & Junior, A. (2013). Problemas de Contexto na Concepção da Matemática Realística. In *XI Encontro Nacional de Educação Matemática.* SBEM.

Sousa, A., & Salgado, T. (2015). Memória, Aprendizagem, emoção e inteligência. *Revista Liberato, 16(26),* 141-152.

Stewart, I. (2006). *Cartas a uma jovem matemática.* Relógio d'Água.

Swan, M. (2005). *Satndards Unitb Improving learning in mathematics: challenges and strategies.* University of Nottingham.

Swan, M. (2014). Designing Tasks and Lessons that develop conceptual understanding, strategic competence and critical awareness. In J. Brocardo, A. M. Boavida, C. Delgado, E. Santos, F. Mendes, J. Duarte, M. Baía, M. Figueiredo (Orgs.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 9-28). Instituto Politécnico de Setúbal.

Tuckman, B. W. (2002). *Manual de Investigação em Educação.* Fundação Calouste Gulbenkian.

Vale, I., & Pimentel, T. (2012). Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em matemática. In A. Canavarro, L. Santos, M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Orgs.), *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da matemática* (pp. 347-360). SPIEM.

Viseu, F., & Morgado, J. C. (2011). Manuais escolares e desprofissionalização docente: um estudo de caso com professores de Matemática. In *Libro de Atas do XI Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedaxia* (pp. 1138-1663). La Coruña.

Viseu, F., Fernandes, Â., & Gonçalves, I. (2009). O manual escolar na prática docente do professor de matemática. In B. D. Silva, L. S. Almeida, A. Barca, & M. Peralbo, (Orgs.), *Actas do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagigia* (pp. 3178-3190). Universidade do Minho.

Voogt, J., & Roblin, N. (2012). A comparative analysis of international frameworksfor 21st century competences: Implications fornational curriculum policies. *Curriculum Studies, 44*, 299-321.

Weber, K. (2005). Students' understanding of Trigonometric Functions. *Mathematics Education Research Journal, 17(3)*, 91-112.

Wootton, D. (2017). *A Invenção da Ciência.* Temas e Debates - Círculo de Leitores

ANEXOS

Anexo 1 – Ficha de caracterização dos alunos

Nome completo: ______________________________ Nº ______

Ano: __________ Turma: ________ Idade: ________

Sexo: Masculino ☐ Feminino ☐

Naturalidade (Freguesia): ____________________ Concelho: ____________________

Tem computador em casa: Sim ☐ Não ☐

Tem internet em casa: Sim ☐ Não ☐

Dados da Mãe:

Idade da Mãe: ______

Profissão:

Situação de emprego:

Naturalidade (Concelho):

Formação académica:

1º ciclo Ensino Básico		Bacharelato	
2º ciclo Ensino Básico		Licenciatura	
3º ciclo Ensino Básico		Mestrado	
Secundário		Doutoramento	

Dados da Pai:

Idade do Pai: ______

Profissão:

Situação de emprego:

Naturalidade (Concelho):

Formação académica:

1º ciclo Ensino Básico		Bacharelato	
2º ciclo Ensino Básico		Licenciatura	
3º ciclo Ensino Básico		Mestrado	
Secundário		Doutoramento	

Dados encarregado de Educação:

Idade Enc.Educ: ______

Profissão:

Situação de emprego:

Naturalidade (Concelho):

Formação académica:

1º ciclo Ensino Básico		Bacharelato	
2º ciclo Ensino Básico		Licenciatura	
3º ciclo Ensino Básico		Mestrado	
Secundário		Doutoramento	

Composição do Agregado Familiar				
Parentesco	**Idade**	**Habilitação escolar**	**Profissão**	**Situação Profissional**

	Sim	**Não**				
Repetiste algum ano?			Qual?		Quais?	
Estudas todos os dias?			Tempo aproximado?			
Frequentaste esta escola no ano anterior?			Qual?			
Tens alguém que te ajuda no estudo?			Quem?			
Tomas pequeno almoço?			Onde?			
Recebes algum apoio (subsídio) do Estado para						
Disciplinas preferidas?						
Disciplinas com mais dificuldades?						
Quantas horas costumas dormir por dia?						
Qual o período do dia em que consegues estar com mais atenção nas aulas?	1º bloco da manhã:		1º bloco da tarde:			
	2º bloco da manhã:		2º bloco da tarde:			
Onde costumas almoçar?						
A que distância (km) vives da escola?		Quanto tempo demora a viagem?				
Que transporte utilizas na deslocação para a escola?						
Que profissão desejas para o futuro?						

Anexo 2 – Questionário

Caro(a) aluno(a),

No âmbito da unidade curricular Estágio Profissional, do Mestrado em Ensino da Matemática, pretendo interpretar, através deste questionário, o contributo das tarefas de exploração e das tarefas de investigação na aprendizagem de alunos do 12° ano, nos temas das funções trigonométricas.

A informação recolhida será usada exclusivamente para fins académicos, comprometendo-me a assegurar o anonimato da mesma.

I. Dados pessoais

1. Idade: ______

2. Sexo: ☐ Masculino ☐ Feminino

3. Número de retenções durante o teu percurso escolar: ____________________

4. Que anos escolares repetiste? ____________________

6. Que classificação final obtiveste na disciplina de Matemática no 10.°ano? ____________________

7. Que classificação final obtiveste na disciplina de Matemática no 11.°ano? ____________________

8. Que classificação final obtiveste na disciplina de Matemática no 12.°ano? 1° período___/2°período___

9. Que classificação esperas vir a ter no final de 12° ano? ______

II. Tarefas exploratórias e tarefas de investigação na aprendizagem das funções trigonométricas

Nas afirmações seguintes, assinala com uma cruz **(x)** o quadrado que mais se adequa ao teu grau de concordância tendo em consideração a seguinte escala:

DT: Discordo Totalmente; **D**: Discordo; **I**: Indiferente; **C**: Concordo; **CT**: Concordo Totalmente.

Afirmações	**DT**	**D**	**I**	**C**	**CT**
Funções trigonométricas foi um tema da matemática que gostei de estudar.					
No estudo das funções trigonométricas evidenciei mais dificuldades do que noutros temas de matemática.					
As tarefas de exploração de conceitos propostas contribuíram para aumentar o meu interesse na aprendizagem das funções trigonométricas.					
As tarefas investigativas propostas contribuíram para aumentar o meu interesse na aprendizagem das funções trigonométricas.					
As tarefas de exploração de conceitos propostas ajudaram a perceber melhor a ligação das funções periódicas com problemas da vida real.					
As tarefas de investigação propostas ajudaram a perceber melhor a ligação das funções periódicas com problemas da vida real.					
As tarefas exploratórias ajudaram a melhorar a minha capacidade em trabalhar com a calculadora gráfica.					
As tarefas investigativas ajudaram a melhorar a minha capacidade em trabalhar com a calculadora gráfica.					
A interpretação da informação gerada pela calculadora gráfica foi um desafio no estudo dos temas funções trigonométricas.					
As tarefas de exploração de conteúdos ajudam a perceber melhor o tema das funções trigonométricas.					

As tarefas de investigação ajudaram a perceber melhor o tema das funções trigonométricas.					
As tarefas de exploração de conceitos são mais difíceis que exercícios ou problemas.					
As tarefas investigativas são mais difíceis que exercícios ou problemas.					
A procura de conjeturas numa tarefa de investigação, no tema das funções trigonométricas, é um desafio acrescido à sua resolução.					
A prova de conjeturas nas tarefas investigativas, no tema das funções trigonométricas, é uma atividade que exige persistência.					
As tarefas de investigação pedem muito domínio dos conceitos matemáticos onde incidem.					
A realização de tarefas em grupo aumenta a interpretação dos temas, ao desafiar-nos a discutir as nossas ideias com os colegas.					
Gosto de ter oportunidades para trabalhar em grupo.					
Gosto de tarefas de investigação que me coloquem no papel de investigador.					
Gosto da discussão dos resultados da tarefa de investigação com os colegas da turma.					
Gostava de trabalhar com tarefas de investigação matemática noutros temas do programa.					

III. Contributos das tarefas exploratórias e das tarefas de investigação para desenvolvimento de competências

Durante o trabalho efetuado na sala de aula de Matemática são desenvolvidas várias competências científicas e sociais. Numa escala de 1 a 4 carateriza o contributo das tarefas de exploração e das tarefas de investigação para o desenvolvimento das seguintes competências. Sendo **1–Nenhum contributo**, **2–Pouco contributo**, **3–Algum contributo, 4–Muito contributo**.	**1**	**2**	**3**	**4**
Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real.				
Desenvolver a capacidade de interpretação de textos e problemas				
Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas.				
Desenvolver uma atitude de autonomia.				
Desenvolver o espírito critico e de rigor.				
Desenvolver confiança na abordagem de situações novas.				
Desenvolver a capacidade de elaborar e organizar o trabalho de forma cuidada.				
Desenvolver a capacidade de selecionar estratégias para a abordagem da problemática.				
Desenvolver a capacidade de formular hipóteses e prever resultados.				
Desenvolver a capacidade de colaboração em trabalhos de grupo.				
Desenvolver a capacidade de exprimir e fundamentar opiniões.				
Desenvolver a capacidade de falar em público.				

IV. Dificuldades sentidas na concretização das fases de resolução das tarefas de investigação

Numa tarefa de investigação existem várias fases para a sua concretização. Numa escala de 1 a 4 carateriza o grau de dificuldade sentida na concretização de cada fase. Sendo **1–Nenhuma dificuldade**, **2–Pouca dificuldade**, **3–Alguma dificuldade**, **4–Muita dificuldade**.	**1**	**2**	**3**	**4**
Interpretação do problema.				
Formulação de conjeturas.				
Verificação/discussão de conjeturas				
Prova de conjeturas				
A discussão dos resultados com os colegas da turma				

V. Aspetos gerais das tarefas de exploração e de investigação

1. Quais as diferenças em termos de nível de aprendizagem que identificas, entre resolução de exercícios e problemas e de tarefas de investigação?

____

____

____

2. Que aspetos positivos identificas na concretização de tarefas de exploração e de investigação?

____

____

____

3. Que aspetos negativos identificas na concretização de tarefas de exploração e de investigação?

____

____

____

Anexo 3 – Pedido de autorização

Exma. Sra.

Diretora da Escola Secundária ...

Ricardo José Amaral Marques e Ana Cecília Morais Gonçalves, alunos de Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade do Minho, encontram-se a realizar o seu estágio pedagógico na Escola Secundária A. S. No âmbito das atividades de estágio faz parte o desenvolvimento de um Relatório sobre a nossa prática pedagógica, com características investigativas. O tema que orientará a nossa ação pedagógica intitula-se "*As tarefas de modelação matemática no ensino e na aprendizagem das funções exponencial e logarítmica: um estudo com alunos do 12º ano de escolaridade*" e "*O ensino e aprendizagem das funções trigonométricas através de tarefas exploratórias e investigativas: um estudo com alunos do 12º ano de escolaridade"*. Para poder desenvolver o nosso relatório precisamos recolher dados recorrendo a diferentes métodos. Gostaríamos de recolher dados através de gravações áudio e vídeo em algumas aulas, por serem métodos com grande eficácia de registo. Nesse sentido, pedimos autorização da vossa V. Ex.ª para esta recolha, comprometendo-nos a usar os dados só para fins académicos, assim como a não divulgar o nome da escola e dos alunos. Todos os dados serão confidenciais e só serão usados para evidenciar a experiência de ensino que pretendemos realizar, assim como problematizar as estratégias de ensino que forem delineadas. Em causa está, sobretudo, a aprendizagem dos alunos e a nossa formação a partir da nossa própria prática.

Os Encarregados de Educação da turma em causa (12.º X) já assinaram as autorizações para a recolha de registos audiovisuais durante as aulas, onde foram informados do objetivo do nosso estudo e do nosso compromisso em manter anonimato dos alunos e da escola.

Agradecemos a atenção dispensada.

Com os mais respeitosos cumprimentos.

______________________________ ______________________________

(Ricardo José Amaral Marques) e (Ana Cecília Morais Gonçalves)

Anexo 4 – Plano de aula: Função Seno

TÓPICO

Função seno.

OBJETIVO

Efetuar o estudo da função seno.

Análise das características da função seno através de processos analíticos e gráficos

FORMATO DE ENSINO

Trabalho de grupo.

Definir as normas de trabalho de grupo com os alunos: (i) O trabalho de grupo não é um trabalho individual aglomerado; (ii) No trabalho de grupo existe a compreensão do problema, a discussão de estratégias e a discussão de conjeturas entre todos os elementos; (iii) Todos os elementos do grupo escrevem a resolução da tarefa; (iv) um grupo só chama a professora quando não conseguirem ultrapassar a dúvida.

Tarefa: Estudo da função seno

Completa a seguinte tabela:

x (rad)	-2π	$-\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
$\sin x$								

x (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\sin x$								

Entregar a tarefa, uma folha de acetato e canetas.

x (rad)	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$								

Dar, mais ou menos, 20min para a resolução da tarefa.

1. Representa num referencial o.n. do plano o conjunto dos pontos de coordenadas $(x, \sin x)$. Que curva obténs?
2. A que conjunto pertence x na função definida por $y = \sin x$? E a que conjunto pertence $\sin x$?
3. Tendo em conta que existe uma infinidade de amplitudes que correspondem a um ângulo, o que podes concluir sobre a razão trigonométrica seno desses ângulos?
4. Estuda a função $y = \sin x$ quanto aos zeros e ao sinal no intervalo $[0, 2\pi]$. E em $\mathbb{R}$?

5. Estuda a função $y = \sin x$ quanto à monotonia e aos extremos no intervalo

   $]0, 2\pi[$. E em $\mathbb{R}$?

6. Quantas amplitudes são transformadas pelo seno em $\frac{1}{2}$? Será a função

   seno injetiva? Porquê?

7. Estuda a paridade da função seno.

Exploração/Discussão

1. Pedir a um grupo para apresentar a tarefa 1 e 2. Perguntar aos restantes grupos se concordam ou não?

2. Solicitar os outros grupos que questionem o que os colegas apresentaram.

Perguntar se alguém fez diferente?

Aproveitar se necessário para recordar a redução ao primeiro quadrante.

3. Pedir a grupos diferentes para apresentarem as restantes tarefas.

NOTA: Na tarefa 4, Introduzir a definição de função periódica.

<u>Definição</u>: Uma função f de domínio D_f diz-se periódica de período p $\left(p \neq 0\right)$ se e só se $\forall x \in D_f$, $f(x+p) = f(x)$.

A quando da tarefa 4, usar o GeoGebra para representar graficamente a função $y = \sin x$ e mostrar que o comportamento da função em $[0, 2\pi]$ é periódico.

4. Sistematizar o estudo da função seno.

Anexo 5 – Plano de aula: Famílias de Funções Trigonométricas

TÓPICO

Famílias de Funções Trigonométricas.

OBJETIVO

Investigar a influência da variação de parâmetros em famílias de funções trigonométricas.

Investigação gráfica, através da calculadora, sobre a influência da alteração de parâmetros na deslocação do gráfico, na amplitude da função e no seu período.

FORMATO DE ENSINO

Grupo turma

TAREFA DE INVESTIGAÇÃO

A forma geral da função seno é dada por $y = a\sin\left[b\left(x-c\right)\right]+d$. A função seno $y=\sin x$ é a função standard tal que $a = 1,\ b = 1,\ c = 0$ e $d = 0$.

1. A forma geral da função seno é dada por $y = a\sin[b(x-c)] + d$. A função seno $y = \sin x$ é a função standard tal que $a = 1,\ b = 1,$ $c = 0$ e $d = 0$.

Investiga o comportamento da função conforme o sinal e o valor absoluto de $a,\ b,\ c$ e d variam. Podes começar com um de cada vez e depois passar às combinações, para finalmente descrever o comportamento da função envolvendo $a,\ b,\ c$ e d juntos. Para cada caso, descreve a translação ou efeito sobre a amplitude (diferença entre o valor máximo e o valor mínimo) e o período.

2. Considera o gráfico da função $f(x) = \sin x$.

a. Esboça o gráfico de $f^{-1}(x)$, a quem chamamos $\sin^{-1}(x)$ ou $\arcsin(x)$, refletindo $f(x)$ em relação à reta $y = x$ a (trocar a coordenada x com a y).

  i. O gráfico da relação descrita em (a) não é uma função. Descreve porque não.

b. Existe uma restrição do domínio de $f(x)$ tal que $f^{-1}(x)$ é função e contém o ponto $(0,0)$. Restringe o domínio desta forma.

Descreve o significado da função $f^{-1}(x)$.

Primeiro parâmetro a variar é o a.
Após as conclusões recordar como se determina o contradomínio da função seno.

Segundo parâmetro a variar é o b.
Introduzir a definição de período e a proposição de como se determina o período de uma família da função seno.

Exploração

Recordar como se determina o contradomínio de uma função seno:

Seja $f(x)=a\sin\left[b\left(x-c\right)\right]+d$

Terceiro e quarto parâmetros a variar é o c e o d.

$-1\le \sin\left[b\left(x-c\right)\right]\le 1$

$\Leftrightarrow -a\le a\sin\left[b\left(x-c\right)\right]\le a$

$\Leftrightarrow -a+d\le a\sin\left[b\left(x-c\right)\right]+d\le a+d$

Então o contradomínio de $D_f' =\left[-a+d,a+d\right]$.

Diz-se que uma função f é periódica de período p $(p\neq 0)$ se $\forall x\in D_f$ $f(x+p)=f(x)$.   A menor valor positivo p chamamos período positivo mínimo.

Concluir:

Se f é uma função tal que $f(x)=a\sin\left[b\left(x-c\right)\right]+d$. A função f é periódica de período positivo mínimo $\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$.

Variando os parâmetros c e d, obtemos o gráfico de f a partir de $y=\sin x$ através da translação associada ao vetor (c,d).

Anexo 6 – Plano de aula: Aplicação das Funções Trigonométricas ao Contexto Real

TÓPICO

Problemas de contexto de vida real.

OBJETIVO

Aplicar os conhecimentos adquiridos de funções trigonométricas em problemas de contexto real.

FORMATO DE ENSINO

Trabalho de grupo

Entregar a tarefa, uma folha de acetato e canetas.

TAREFA

Numa experiência foi utilizado um mamífero que no processo normal de respiração, a cada 4 segundos, ocorre um ciclo respiratório (conjunto de uma inspiração e de uma expiração).

Em cada inspiração e expiração normais entra e sai dos pulmões 0,5 l de ar (ar corrente). No entanto, há sempre uma reserva de ar nos pulmões cujo volume, t segundos após uma expiração, é dado, em litros, pela função V definida por:

$$V(t) = 2{,}5 - 0{,}25\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right);\quad t \geqslant 0$$

A experiência decorreu durante 10 minutos.

1.1. Em relação aos 4 segundos de um ciclo respiratório, indica:

1.1.1. o volume máximo e o volume mínimo de ar de reserva nos pulmões;

1.1.2. o volume de ar de reserva nos instantes $t = 1$ e $t = 2$.

1.2. Em que fase da respiração se encontra o animal no instante em que completa 7 minutos e 29 segundos da experiência? Justifica.

1.3. Por processos analíticos, calcula $V'(5)$ e $V'(15)$. Interpreta os resultados no contexto do problema.

1.4. Considera a representação gráfica da função V durante os 10 minutos da experiência e determina:

1.4.1. as coordenadas dos pontos de inflexão do gráfico no intervalo $[4, 8]$;

1.4.2. o número total de pontos de inflexão do gráfico da função V.

Dar, mais ou menos, 30min para a resolução da tarefa 1. Depois discutir.

Dar, mais ou menos 15min para a segunda tarefa, depois discutir.

Exploração/Discussão

1. Pedir a um aluno para ler o problema em voz alta.
2. Pedir a um grupo para apresentar a atividade 1.1. Perguntar aos restantes grupos se concordam ou não?
3. Solicitar os outros grupos que questionem o que os colegas apresentaram.
4. Pedir a grupos diferentes para apresentarem as restantes atividades da tarefa
5. Repetir o processo para as atividades seguintes da tarefa 1.
6. Perguntar que conhecimentos foram aplicados para a resolução da tarefa.
7. Pedir a um aluno para ler a tarefa 2.
8. Pedir a um grupo para apresentar a atividade 2.1. Perguntar aos restantes grupos se concordam ou não?
9. Solicitar os outros grupos que questionem o que os colegas apresentaram.
10. Repetir o processo para a atividade 2.2.

Perguntar que conhecimentos foram aplicados para a resolução da tarefa.

Anexo 7 – O periódico na vida

A ideia de periodicidade está impregnada em inúmeros fenómenos da vida e do universo.

Um relógio funciona com base nesse princípio – o período é 12 ou 24 horas; a Terra roda em volta do Sol com uma certa periodicidade – ao período, chamamos, nesse caso, ano – e em torno de si mesma – com um período a que chamamos dia.

A vida de muitos seres vivos é constituída por ciclos vitais ou ciclos reprodutivos (por exemplo, a observação da periodicidade do ciclo menstrual é tão importante que qualquer alteração permite, por exemplo, diagnosticar doenças ou o despontar de uma nova vida).

Na Química, merece referência o ciclo do azoto e do carbono que desempenham um importante papel designadamente na Ecologia. Em Astronomia, classificam-se as estrelas conhecidas e descobrem-se outras analisando a periodicidade das ondas de luz por elas emitidas. No artesanato e na arte em geral (pintura, escultura, ...) a repetição periódica de certos elementos geométricos gera harmonia; na poesia, a rima e a métrica dos versos inspiram sentimentos e emoções estáticas. Comunicações via telefone, fax, satélites ou informática, bem como a própria música, assentam na periodicidade das ondas de vários tipos que são emitidas. As frequências das ondas magnéticas, eletromagnéticas, sonoras e luminosas são estudadas a partir de modelos matemáticos – as *funções periódicas*. As ecografias são possíveis graças ao aparecimento dos ultrassons e os eletrocardiogramas (ECG) e os eletroencefalogramas (EEG) são exames auxiliares de diagnóstico que assentam num estudo aprofundado das caraterísticas dos gráficos de funções, designadamente no que se refere à periodicidade.

Em conclusão, as funções periódicas constituem importantes modelos do que se passa à nossa volta. Sendo modelos matemáticos abstratos, o seu estudo fica facilitado quando se determina o período.

Quando ficam estudadas as características destas funções no intervalo correspondente ao período, é possível conhecer a forma como se comportam em todo o seu domínio.

Adaptado de: Infinito 11 A – parte 1. 2004

Escolhe um tema dos acima descritos, ou outro que não esteja aqui mencionado, e investiga de que forma as funções trigonométricas explicam esse fenómeno.

Anexo 8 – Trigonometria das marés

Os fenómenos periódicos podem ser modelados com recurso a razões trigonométricas. Por exemplo, o movimento de um pêndulo, as fases da Lua, o número de horas do sol durante um dia, a altura da água das marés, entre outros. Vamos estudar alguns aspetos de um deles: as marés.

A força gravitacional exercida entre a Terra, a Lua e o Sol, conjugada com a rotação da Terra em torno do seu eixo, são os principais fatores responsáveis pela ocorrência das marés, no qual as águas do mar atingem limites máximos e mínimos com determinada periodicidade.

Quando a maré está no seu nível mais alto chama-se maré alta, maré cheia, preia-mar ou preamar; quando está no nível mais baixo chama-se maré baixa ou baixa-mar. Em média, as marés oscilam num período de 12 horas e 24 minutos, isto é, se uma maré alta ocorre às 8h00, a seguinte ocorrerá às 20h24, aproximadamente.

A altura das marés alta e baixa (relativa ao nível médio da água do mar) também varia, em função de variados fatores. Nas luas nova e cheia, as forças gravitacionais do Sol estão na mesma direção das da Lua, produzindo marés mais altas; nas luas minguante e crescente as forças gravitacionais do Sol estão em direções diferentes das da Lua, anulando parte delas, produzindo marés mais baixas.

Em http://www.hidrografico.pt/previsao-mares.php encontras previsões sobre as marés em Portugal Continental e nas Ilhas, bem como em alguns países lusófonos africanos. O que podes dizer sobre as marés num ou mais portos à tua escolha?

Anexo 9 – Pressão Arterial

As aplicações mais usuais da trigonometria no dia a dia são na astronomia e na topografia, na determinação de medidas inacessíveis. No entanto, a trigonometria tem aplicações noutras áreas científicas, como +e o caso da Medicina, por exemplo no estudo da pressão arterial.

A pressão arterial (ou tensão arterial, como dizemos habitualmente) é um assunto sobre o qual ouvimos falar, mas enquanto somos jovens não é, geralmente, um problema. Ouvimos falar da pressão arterial dos outros, nas notícias, aos avós, aos pais e, mais tarde, quando somos menos jovens, somo nós próprios a pensar nela, começando a preocupar-nos em a controlar.

Mas, afinal, o que é a pressão arterial?

Como sabes o sangue é levado a todos os órgãos e tecidos do corpo humano por vasos sanguíneos. Para chegar a todo o corpo, o sangue é bombeado pelo coração e exerce pressão sobre as paredes dos vasos que o transporta. A essa pressão chamamos pressão arterial ou tensão arterial. Na medição da pressão arterial há dois valores a registar: a pressão arterial sistólica e a pressão arterial diastólica.

A pressão arterial que é medida no momento em que o coração se contrai denomina-se por pressão arterial sistólica (também conhecida por pressão máxima).

A pressão arterial medida no momento em que o coração descontrai, denomina-se pressão arterial diastólica (ou mínima). A pressão arterial é medida em milímetros de mercúrio (mm Hg) e pode variar ao longo da vida, dentro de determinados parâmetros, de acordo com variados fatores: estados emocionais, esforço físico e idade, entre outros.

Os valores considerados normais para a pressão arterial nos adultos são 120/80 mmHg, o que significa:

- Pressão arterial sistólica: 120 mmHg.
- Pressão arterial diastólica: 80 mmHg.

Quando a pressão arterial ultrapassa os 140/90 mmHg, considera-se que a pessoa tem pressão arterial alta (hipertensão).

Quando se regista a pressão arterial, um outro indicador que se usa para avaliar a saúde de cada um de nós é a frequência cardíaca, medida em batimentos por minuto (bpm). A frequência cardíaca tem uma relação importante com a pressão arterial. Para cada um de nós há uma relação entre a frequência cardíaca e a pressão arterial. De um ponto de vista matemático temos:

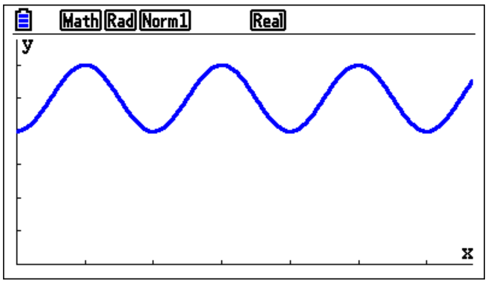
$$\text{Pressão arterial} = \text{débito cardíaco} \times \text{resistência periférica}$$

$$\text{Débito cardíaco} = \text{frequência cardíaca} \times \text{volume debitado}$$

Num indivíduo, o volume debitado e a resistência periférica são características relativamente estáveis. No entanto, a frequência cardíaca, pelo contrário, varia bastante; basta uma emoção mais forte ou um esforço um pouco maior para que o coração aumente imediatamente a frequência do seu batimento.

Para podermos perceber como a frequência cardíaca tem influência na pressão arterial, basta olhar para a fórmula e verificar que, quanto maior é a frequência cardíaca, maior é o débito cardíaco e quanto maior o débito cardíaco, maior é a pressão arterial. Assim, um aumento na frequência cardíaca produz um aumento na pressão arterial, desde que não haja alterações no volume debitado e na resistência periférica.

O gráfico seguinte, apresentado num monitor médico, representa a variação da pressão arterial, em milímetros de mercúrio, em função do tempo, em segundos. Este é o gráfico de uma função trigonométrica, cuja expressão é $P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$, em que o argumento $\frac{8\pi}{3}t$ é dado em radianos.



Janela: $[0; 2{,}5] \times [0; 135]$

O intervalo de tempo entre dois batimentos é 0,75s, que corresponde a um ciclo completo, ou seja, ao período dessa função (3/4 radiano).

Esta pessoa possui uma frequência cardíaca igual a 80bpm, pois se cada ciclo tem 0,75 segundos, então $60s \div 0{,}75\text{bpm}/s = 80\text{bpm}$. A pressão arterial desta pessoa é 120mmHg por 80mmHg.

Tendo em conta a variação da pressão arterial em função do tempo é uma função do tipo $y = a + b\cos(c\,x)$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e com recurso a um medidor de pressão arterial recolhe dados de pessoas de diferentes taxas etárias ou condições físicas ou diferentes em momentos do dia e procura semelhanças, diferenças, particularidades entre os diferentes casos.

Anexo 10 – Viagem ao centro da Terra

Lê o texto a seguir transcrito, um pequeno excerto do romance de Júlio Verne, *Viagem ao Centro da Terra.* A história (obviamente ficção) decorre em 1863 e narra a expedição subterrânea de três exploradores, um professor de mineralogia, o seu sobrinho e um caçador, em busca de um caminho até ao centro da Terra. Depois de descerem pela cratera de um vulcão extinto, o Sneffels, na Islândia, vamos encontrar os três aventureiros numa gruta…

« (…) *Depois de almoçar, tratou o doutor de por em ordem os seus apontamentos quotidianos.*

– Primeiro tenho de fazer alguns cálculos para determinar exatamente a nossa posição; quando voltar à superfície da Terra quero traçar um mapa da nossa viagem, espécie de seção vertical do Globo, que mostrará o perfil do caminho seguido.

– Há de ser curioso, tio, mas as suas observações merecerão confiança?

– Toda. Medi cuidadosamente os ângulos e os declives. Estou certo de não me ter enganado. Vejamos primeiramente onde estamos. Pega na bússola e vê que direção indica.

– Este quarta de Sudeste.

– Bem! – disse o doutor, apontando a observação e fazendo cálculos rápidos. – Temos andado oitenta e cinco léguas desde o ponto de partida.

– Portanto, vamos por baixo do Atlântico?

– Perfeitamente.

(…) Estamos a sudeste à distância de oitenta e cinco léguas da base de Sneffels e, segundo, os cálculos precedentes, avalio a profundidade em 16 léguas.

– Dezasseis léguas! – exclamei.

(…)

– Meu tio – objetei, – julgo os seu cálculos exatos, mas permita-me tirar uma consequência rigorosa.

– Tira, homem, tira.

– No ponto em que estamos, sob a latitude da Islândia, o raio da Terra mede mil quinhentas e oitenta e três léguas aproximadamente.

– Mil quinhentas e oitenta léguas e um terço.

– Suponhamos mil e seiscentas léguas, em números redondos. Dessa extensão de mil e seiscentas léguas já andamos dezasseis?

– É como dizes.

– E isto percorrendo oitenta e cinco léguas em diagonal?

– Perfeitamente.

– Em vinte dias quase?

– Em vinte dias.

– Pois dezasseis léguas são apenas a centésima parte do raio terrestre. Continuando assim, gastaremos dois mil dias, ou cerca de cinco anos e meio a descer.

O doutor não respondeu.

– Sem contar que, para adiantar dezasseis léguas na vertical temos de percorrer oitenta na horizontal, nos veremos obrigados a andar oito mil léguas para sudeste e sairemos naturalmente por algum ponto da circunferência antes de chegarmos ao centro!

– Demónios levem os teus cálculos! – replicou meu tio, já encolerizado. – Demónios levem as tuas hipóteses! Em que se fundam? Quem te afirma que este caminho não vai diretamente ao centro? Além disso, tenho um precedente a meu favor. O que pretendo fazer já outrem o conseguiu; hei de consegui-lo igualmente.

– Também assim o espero, mas tenho direito...

– Tens direito de te calares, Alex, quando te ocorrer disparatar desse modo.

Reconheci que o iracundo doutor mostrava a orelha por baixo da pele do tio benévolo, e acautelei-me.»

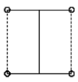
Analisa o texto com os teus colegas. Será que Alex está, efetivamente, a disparatar?

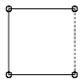
Como poderia ser feita a descida de modo a evitar a situação prevista por Alex? Descreve a tua sugestão num esquema onde deves anotar a direção e a distância das etapas que aconselhas, tendo em conta que não é possível descer na *vertical* (não se trata de alpinismo!).

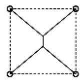
Anexo 11 – Internet por cabo

Quatro aldeias situam-se nos quatro vértices de um quadrado de lado 10km. Uma empresa de comunicações vai fazer uma instalação de cabos, para acesso à internet, ligado às quatro aldeias.

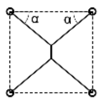
1. Tendo em atenção a quantidade de cabo que é utilizada, qual das situações esquematizadas é a mais económica?







2. Procura formas diferentes para a instalação dos cabos. Encontraste alguma mais económica que as anteriores?
3. Escreve uma expressão que dê o comprimento do cabo a ser utilizado em função do ângulo α da figura.



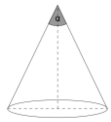
4. Qual será a solução ótima para o problema?

Anexo 12 – Ângulo do cone

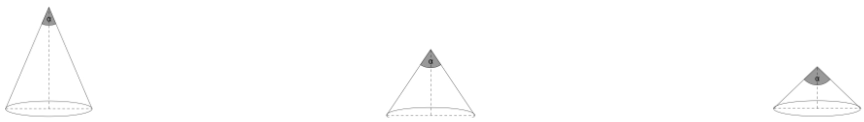
O volume de um cone é dado por:

$$\text{Volume} = \frac{1}{3}\text{Área da base } \times \text{Altura}$$

Mas esta fórmula não relaciona o volume com o ângulo do cone, isto é, o ângulo que se obtém quando se interseta o cone por um plano que contém a altura, como está representado na figura ao lado.



Imagina todos os cones que têm 10cm de raio da base. Estuda a variação do volume em função do ângulo α.



E para outros raios da base, o que se mantém? O que se altera?

Anexo 13 – O comprimento do dia

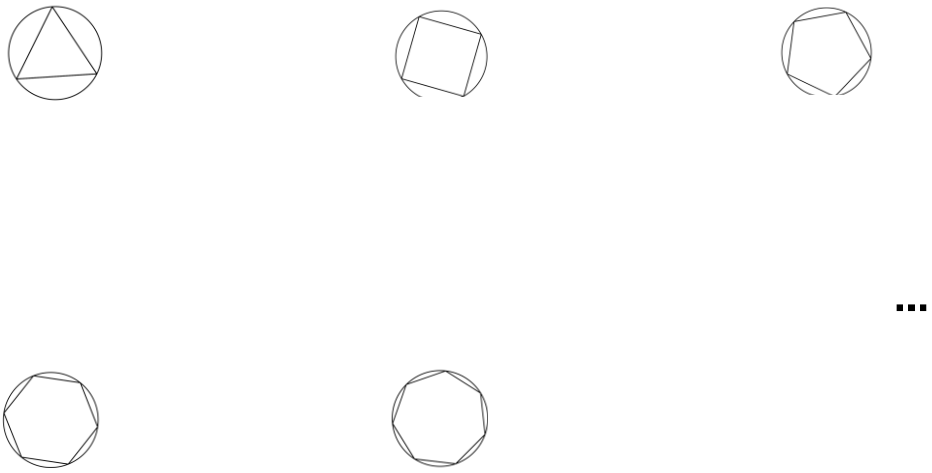
Observa a tabela publicada no almanaque Borda d'Água de 1999. Investiga relações que te traduzam, por exemplo, a variação do comprimento do dia ao longo do ano de 1999.

Datas 10 em 10 dias		Dia Claro		Escurecer		Noite fechada		Comprimento do dia	
		Lisboa h m	Porto h m	Lisboa h m	Porto h m	Lisboa h m	Porto h m	Lisboa h m	Porto h m
Jan	1	7 25	7 29	17 55	17 47	19 01	18 55	9 31	9 16
	11	7 25	7 29	18 04	17 56	19 09	19 03	9 40	9 27
	21	7 22	7 25	18 14	18 07	19 18	19 13	9 54	9 42
	31	7 16	7 18	18 25	18 19	19 28	19 24	10 13	10 02
Fev	10	7 07	7 08	18 36	18 30	19 38	19 35	10 34	10 26
	20	6 55	6 55	18 46	18 42	19 48	19 46	10 57	10 51
Mar	2	6 42	6 40	18 57	18 54	19 58	19 57	11 22	11 18
	12	6 27	6 25	19 05	19 05	20 09	20 09	11 46	11 45
	22	6 12	6 08	19 17	19 16	10 19	20 21	12 12	12 12
Abr	1	6 56	6 51	20 27	20 27	21 31	21 34	12 38	12 40
	11	6 40	6 34	20 36	20 38	21 43	21 47	13 02	13 08
	21	6 25	6 18	20 47	20 49	21 56	22 02	13 26	13 33
Mai	1	6 11	6 03	20 57	21 01	22 09	22 17	13 48	13 58
	11	5 59	5 50	21 07	21 12	22 23	22 33	14 09	14 20
	21	5 50	5 40	21 17	21 23	22 37	22 49	14 27	14 40
	31	5 43	5 32	21 26	21 33	22 49	23 03	14 41	14 55
Jun	10	5 40	5 28	21 32	21 40	22 58	23 13	14 49	15 04
	20	5 40	5 28	21 37	21 44	23 03	23 19	14 53	15 08
	30	5 43	5 31	21 37	21 45	23 03	23 18	14 50	15 06
Jul	10	5 49	5 38	21 35	21 42	22 58	23 12	14 43	14 57
	20	5 57	5 46	21 29	21 35	22 49	23 01	14 30	14 45
	30	6 06	5 56	21 20	21 25	22 36	22 46	14 14	14 26
Ago	9	6 16	6 07	21 08	21 12	22 21	22 29	13 54	14 05
	19	6 26	6 18	20 55	20 57	22 04	22 11	13 33	13 41
	29	6 35	6 29	20 40	20 41	21 46	21 51	13 09	13 16
Set	8	6 45	6 39	20 24	20 24	21 28	21 32	12 45	12 49
	18	6 54	6 50	20 08	20 07	21 11	21 13	12 21	12 22
	28	7 03	7 00	19 52	19 50	20 54	20 54	11 56	11 55
Out	8	7 12	7 10	19 36	19 33	19 38	19 37	11 31	11 28
	18	7 22	7 21	19 22	19 18	19 23	19 22	11 07	11 01
	28	7 31	7 32	19 09	19 04	20 11	20 08	10 43	10 36
Nov	7	6 42	6 43	17 59	17 53	19 01	18 58	10 21	10 12
	17	6 52	6 54	17 51	17 44	18 55	18 50	10 01	9 50
	27	7 02	7 05	17 46	17 38	18 51	18 45	9 56	9 33
Dez	7	7 11	7 15	17 45	17 37	18 50	18 44	9 34	9 20
	17	7 19	7 22	17 47	17 38	18 52	18 46	9 28	9 13
	27	7 24	7 27	17 52	17 43	18 57	18 52	9 29	9 13
Jan 2000	6	7 26	7 29	17 59	17 51	19 05	18 59	9 35	9 20

NOTA: A hora de verão vai desde a 1h do dia 29 de Março até à 1h do dia 31 de Outubro.

Anexo 14 – Aproximação ao número π

Considera os polígonos regulares inscritos numa circunferência de raio 1.



Que regularidades observas? Consegues encontrar uma sucessão que no limite se aproxime do número π?