Assis Azevedo
assis@math.uminho.pt

Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Curso - Matemática

Álgebra Linear I

1 Matrizes

Vamos começar por definir matrizes e estudar algumas das suas propriedades elementares. Mais tarde as matrizes serão usadas no estudo dos sistemas de equações lineares e na representação de aplicações lineares.

1.1 Definições e exemplos

Em tudo[1] o que segue $\mathbb{K}$ representa o corpo $\mathbb{R}$ ou o corpo $\mathbb{C}$. Os elementos de $\mathbb{K}$ dizem-se *escalares*.

Definição 1.1. *Sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Uma disposição da forma*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{com } a_{ij} \in \mathbb{K} \text{ para todo } i = 1, \ldots, m \text{ e } j = 1, \ldots, n$$

diz-se uma **matriz** *de ordem $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ (com m linhas e n colunas).*

O conjunto formado pelas matrizes de ordem $m \times n$ será denotado por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se $m = n$, escreveremos $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ no lugar $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Vejamos alguns exemplos

$$\underset{\text{ordem } 2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{ordem } 3\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{ordem } 1\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{ordem } 2\times 3}{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{ordem } 4\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Por vezes, na literatura a apresentação das matrizes é feita usando parêntesis rectos em vez de curvos. Usaremos letras maiúsculas, em geral do início do alfabeto, para representar matrizes. Mais tarde usaremos letras do final do alfabeto se as matrizes forem incógnitas.

Em notação abreviada escreveremos $(a_{ij})_{m\times n}$ ou simplesmente (a_{ij}) se não houver dúvidas quanto ao número de linhas e de colunas da matriz. Aos escalares a_{ij} chamamos *entradas* da matriz. Se tivermos uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ denotaremos por $[A]_{ij}$ o elemento de A que está na linha i e coluna j.

Vejamos agora algumas matrizes cuja característica é a relação entre o número de linhas e de colunas.

Definição 1.2. *Sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Uma matriz pertencente a $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ diz-se:*

a) **quadrada** *se $n = m$;*

b) **matriz linha** *se $m = 1$;*

c) **matriz coluna** *se $n = 1$.*

[1] Muito do que é aqui feito é válido em situações mais gerais

Com esta definição as linhas (respectivamente, as colunas) de uma matriz podem ser vistas como uma matriz linha (respectivamente, matriz coluna). Se uma matriz for quadrada poderemos dizer que tem ordem n em vez de dizer que tem ordem $n \times n$.

De seguida vamos classificar algumas matrizes de acordo com as suas entradas não nulas.

Definição 1.3. *Sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ diz-se:*

a) **nula** *se todas as suas entradas forem nulas;*

b) **matriz diagonal** *se for quadrada e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$;*

c) **matriz escalar** *se for diagonal e todos os elementos da diagonal forem iguais;*

d) **matriz triangular superior** *se for quadrada e $a_{ij} = 0$ se $i > j$;*

e) **matriz triangular inferior** *se for quadrada e $a_{ij} = 0$ se $i < j$.*

Note-se que uma matriz diagonal é uma matriz que é simultaneamente triangular superior e inferior.

Como exemplos temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 21 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal 3×3. *Matriz triangular superior* 3×3. *Matriz triangular inferior* 4×4 *Matriz escalar* 3×3.

Por opção, exigimos nas definições de matriz diagonal, triangular superior e triangular inferior que a matriz seja quadrada. Essa exigência nem sempre é colocada.

Denotaremos por $O_{m\times n}$, a matriz nula de ordem $m \times n$. Escreveremos também O_n em vez de $O_{n\times n}$. Não havendo dúvidas quanto à ordem da matriz escreveremos simplesmente O em vez de $O_{m\times n}$.

Definição 1.4. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Chamamos matriz identidade e denotamos por I_n à matriz diagonal $n \times n$ cujos elementos da diagonal são todos iguais a 1.*

Note-se que $I_n = (a_{ij})_{n\times n}$ em que $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$. Escreveremos I em vez de I_n se não houver dúvidas quando à ordem da matriz.

1.2 Operações sobre matrizes

Vamos agora definir o que se entende por soma e produto de matrizes em certas condições bem como a multiplicação de um escalar por uma matriz.

Definição 1.5. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se $\alpha \in \mathbb{K}$ define-se o produto de α por A e denota-se por αA como sendo a matriz $(\alpha\, a_{ij})_{m\times n}$*

Por exemplo, $3\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -2 & 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3i & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 0 \\ -6 & 0 & -3i \end{pmatrix}$, $(-1)\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -i & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Note-se que as matrizes escalares são as matrizes da forma $\alpha\, I_n$.

Dada uma matriz A, denotamos $(-1)A$ por $-A$.

De seguida vamos definir o que se entende por soma de matrizes da mesma ordem.

Definição 1.6. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Define-se a soma de A por B, e denota-se por $A + B$ como sendo a matriz $(a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$.*

Por exemplo, $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \\ -2 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3i \\ 1 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4i \\ 1 & 5 \\ -8 & 2-i \end{pmatrix}$.

Chama-se a atenção para o facto de que a soma de matrizes só estar definida se as matrizes forem da mesma ordem.

Uma vez que a soma e a multiplicação acima referidas são feitas entrada a entrada as seguintes igualdades são óbvias.

Proposição 1.7. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Então:*

a) $0\,A = O_{m\times n}$;

b) $1\,A = A$;

c) $(\alpha\beta)\,A = \alpha(\beta A)$;

d) $A + B = B + A$;

e) $A + (-A) = O_{m\times n}$;

f) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

g) $O_{m\times n} + A = A$;

h) $(\alpha + \beta)\,A = \alpha A + \beta A$;

i) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$. □

Atendendo à alínea f) desta proposição tem sentido considerar somas de matrizes da mesma ordem $A_1+A_2+\cdots+A_k$ sem referir a ordem pela qual as operações são efectuadas.

Por analogia com o que acontece em $\mathbb{K}$ define-se $A - B$ como sendo $A + (-B)$. As propriedades desta operação são as "óbvias". Por exemplo $A - (B + C) = (A - B) - C$.

Relativamente ao produto de matrizes, a situação é um pouco mais complicada. A ideia principal é a generalizar o produto interno de vectores em $\mathbb{R}^n$.

Suponhamos que temos duas matrizes A_1 e B_1, a primeira de ordem $1 \times n$ e a segunda de ordem $n \times 1$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots a_n \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Então o produto $A \cdot B$ é definido como sendo a matriz 1×1 cuja única entrada é o produto interno dos vectores $(a_1, a_2 \dots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Dito de outro modo

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right).$$

Para a definição do produto de duas matrizes a ideia é fazer este processo para todas as linhas da primeira matriz e todas as colunas da segunda. É então claro que isso implica que o número de colunas da primeira matriz tem de ser igual ao número de linhas da segunda.

Definição 1.8. *Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij})_{m\times p} \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ e $B = (b_{ij})_{p\times n} \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$. Define-se o produto $A \cdot B$ como sendo a matriz $(c_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ em que*

$$c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \cdot (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}) \quad (= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}).$$

O que isto significa é o seguinte. Se

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots B_n \end{pmatrix}$$

em que $A_1, \dots, A_m$ são as linhas da matriz A e $B_1, \dots, B_n$ são as colunas da matriz B então o elemento que fica na linha i, coluna j de $A \cdot B$ é o "produto interno" entre A_i e B_j. Por exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times(-1) + 3\times 3 & 1\times 2 + 2\times 1 + 3\times 4 \\ 0\times 1 + (-1)\times(-1) + 2\times 3 & 0\times 2 + (-1)\times 1 + 2\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Nota 1.9. *Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{k\times p}(\mathbb{K})$ então o produto de A por B e o produto de B por A estão definidos se e só se $k = n$ e $p = m$. Se esta condição for verdadeira então $A \cdot B \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ e $B \cdot A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Deste modo, se $m \neq n$ então $A \cdot B$ e $B \cdot A$ são diferentes.*

No caso em que $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ então $A \cdot B, B \cdot A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ e a questão de eles serem ou não iguais já se coloca. De facto $A \cdot B$ e $B \cdot A$ são "quase sempre" diferentes. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pode até mostrar-se (ver Exercício 1.22) que as únicas matrizes quadradas que comutam com todos as matrizes da mesma ordem são as matrizes escalares. Ou seja, se $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ e A não é uma matriz escalar, então existe $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ tal que $AB \neq BA$.

É claro que há muitos casos em que o produto de matrizes quadradas é comutativo. Por exemplo, se as duas matrizes forem diagonais temos

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Um outro exemplo é

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Daqui em diante escreveremos AB em vez de $A \cdot B$.

Proposição 1.10. *Se $k, m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, B, C são matrizes sobre $\mathbb{K}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ então, sempre que os produtos e somas referidos estão definidos, temos*

a) $O_{k\times m}A = O_{k\times n}$;

b) $AO_{n\times k} = O_{m\times k}$;

c) $I_m A = A$;

d) $AI_n = A$;

e) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

f) $A(B + C) = AB + AC$;

g) $(B + C)A = BA + CA$;

h) $(AB)C = A(BC)$.

Demonstração. Vamos apenas mostrar a última alínea, que é a menos imediata.

Ao longo da demonstração vamos usar propriedades que sabemos serem válidas em $\mathbb{K}$: comutatividade, associatividade do produto e da soma, distributividade, etc..

Suponhamos que $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$, $C = (c_{ij})_{p\times q}$, $AB = (r_{ij})_{m\times p}$, $BC = (s_{ij})_{n\times q}$, $(AB)C = (x_{ij})_{m\times q}$ e $A(BC) = (y_{ij})_{m\times q}$. Então

$$\begin{aligned}
x_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} r_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}\right)c_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n}(a_{il}b_{lk}c_{kj}) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}(a_{il}b_{lk}c_{kj}) \\
&= \sum_{l=1}^{n} a_{il}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{lk}c_{kj}\right) = \sum_{l=1}^{n} a_{il}s_{lj} = y_{ij}
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Atendendo à última alínea desta proposição podemos considerar produtos de matrizes (sempre que tiverem sentido) $A_1A_2\cdots A_k$ sem referir a ordem pela qual as operações são efectuadas. Em particular, se A for quadrada e $k \in \mathbb{N}$, tem sentido falar em A^k. Note-se ainda que, se A e B comutarem então $(AB)^k = A^kB^k$.

1.3 Transposição e conjugação

Vejamos algumas definições, sendo que no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ apenas a primeira tem interesse.

Definição 1.11. *Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se:*

a) **matriz transposta** *de A, e denota-se por A^T, à matriz de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que $[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$;*

b) **matriz conjugada** *de A, e denota-se por $\overline{A}$, à matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $\left[\,\overline{A}\,\right]_{ij} = \overline{[A]_{ij}}$;*

c) **matriz transconjugada** *de A, e denota-se por A^*, à matriz $\overline{A^T}$.*

Note-se que a matriz A^T é obtida a partir de A por troca entre as linhas e as colunas de A. Deste modo as linhas de A^T são as colunas de A. É também claro que $\overline{A} = A$ (e, portanto, $A^* = A^T$) se e só se as entradas de A forem reais. Note-se ainda que $\overline{A^T} = \overline{A}^{\,T}$.

Vejamos dois exemplos: Se $A = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ 2i & 2-2i \\ -2 & -i \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ então

$$A^T = \begin{pmatrix} 1+i & 2i & -2 \\ i & 2-2i & -i \end{pmatrix},\ \overline{A} = \begin{pmatrix} 1-i & -i \\ -2i & 2+2i \\ -2 & i \end{pmatrix},\ \ A^* = \begin{pmatrix} 1-i & -2i & -2 \\ -i & 2+2i & i \end{pmatrix},\ \ B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vejamos algumas propriedades simples destes operadores.

Proposição 1.12. *Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então:*

a) $\left(A^T\right)^T = A,\quad \overline{\overline{A}} = A,\quad (A^*)^* = A;$

b) $(A+B)^T = A^T + B^T,\quad \overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B},\quad (A+B)^* = A^* + B^*,\quad$ *se $p = m$ e $q = n$;*

c) $(\alpha\,A)^T = \alpha\,A^T,\quad \overline{\alpha\,A} = \overline{\alpha}\,\overline{A},\quad (\alpha\,A)^* = \overline{\alpha}\,A^*;$

d) $(A\,B)^T = B^TA^T,\quad \overline{A\,B} = \overline{A}\,\overline{B},\quad (A\,B)^* = B^*A^*,\quad$ *se $p = n$.*

Demonstração. Vamos apenas ver a última alínea, uma vez que as outras são consequência imediata das definições!

Vejamos então que $(A\,B)^T = B^T A^T$ se $p = n$. Comecemos por notar que $(A\,B)^T, B^T A^T \in \mathcal{M}_{q\times m}(\mathbb{K})$. Para $1 \le i \le q$ e $1 \le j \le m$ temos

$$\begin{aligned}
\left[(A\,B)^T\right]_{ij} &= \left[(A\,B)\right]_{ji}, \quad \text{por definição de matriz transposta,}\\
&= \sum_{k=1}^{n} [A]_{jk}[B]_{ki}, \quad \text{por definição de produto de matrizes,}\\
&= \sum_{k=1}^{n} [A^T]_{kj}[B^T]_{ik}, \quad \text{por definição de matriz transposta,}\\
&= \sum_{k=1}^{n} [B^T]_{ik}[A^T]_{kj}, \quad \text{pela comutatividade do produto em } \mathbb{K},\\
&= \left[B^T\,A^T\right]_{ij} \quad \text{por definição de produto de matrizes.}
\end{aligned}$$

Recordando agora que o conjugado do produto (respectivamente, da soma) de números complexos é o produto (respectivamente, a soma) dos conjugados desses números temos

$$\begin{aligned}
\left[\,\overline{A\,B}\,\right]_{ij} &= \overline{[A\,B]_{ij}}, \quad \text{por definição de matriz conjugada,}\\
&= \overline{\sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[B]_{kj}}, \quad \text{por definição de produto de matrizes,}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \overline{[A]_{ik}}\ \overline{[B]_{kj}}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\,\overline{A}\,\right]_{ik}\ \left[\,\overline{B}\,\right]_{kj}, \quad \text{por definição de matriz conjugada,}\\
&= \left[\overline{A}\ \overline{B}\right]_{ij} \quad \text{por definição de produto de matrizes.}
\end{aligned}$$

Daqui concluímos que $(A\,B)^* = \overline{(AB)^T} = \overline{B^T\ A^T} = \overline{B^T}\ \overline{A^T} = B^* A^*$. □

As definições acima referidas levam-nos a considerar outras classes de matrizes que serão usadas mais tarde.

Definição 1.13. *Uma matriz quadrada A diz-se:*

a) **simétrica** *se $A = A^T$;*

b) **anti-simétrica** *se $A = -A^T$;*

c) **hermítica** *se $A = A^*$;*

d) **anti-hermítica** *se $A = -A^*$.*

Intuitivamente uma matriz A é simétrica se a sua diagonal funciona como um "espelho" relativamente às entradas da matriz. É também claro da definição que os elementos da diagonal de uma matriz anti-simétrica são todos nulos. Note-se que estas quatro classes são fechadas para a soma de matrizes (isto é, se duas matrizes pertencem a uma dessas classes então a soma também pertence). Em relação ao produto a situação é um pouco diferente. Por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ então A e B são simétricas mas $A\,B$ não é simétrica. De qualquer maneira, se A e B comutarem e forem simétricas então é claro que $A\,B$ e $B\,A$ são simétricas. Isto acontece porque, nas condições referidas temos, usando a Proposição 1.12, $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$. Em particular se A é uma matriz simétrica então A^k é simétrica qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$.

1.4 Inversão

Definição 1.14. *Uma matriz quadrada de ordem n A diz-se* **invertível** *ou* **regular** *ou* **não singular** *se existir uma matriz B tal que $A\,B = B\,A = I_n$. Uma matriz quadrada que não é invertível diz-se* **singular**.

Como exemplo, consideremos uma matriz A pertencente a uma classe de matrizes quadradas muito simples: as matrizes diagonais. Suponhamos que os elementos da diagonal de A são $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Se $a_i = 0$ para algum i então A não é invertível pois, qualquer que seja $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB \neq I_n$ pois a linha i da matriz AB é nula. Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são todos diferentes de 0 então A é invertível, uma vez que

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} = I_n.$$

Antes de dar mais exemplos vamos ver algumas propriedades, começando pela unicidade da inversa (quando existe).

Proposição 1.15. *Se A é uma matriz invertível de ordem n então existe uma e uma só matriz B tal que $A\,B = B\,A = I_n$.*

Demonstração. Suponhamos que B e C são tais que $A\,B = B\,A = I_n$ e $A\,C = C\,A = I_n$. Então $C = I_n\,C = (B\,A)\,C = B\,(A\,C) = B\,I_n = B$. ☐

Atendendo à proposição anterior tem sentido definir **a** matriz inversa de uma matriz invertível A. Essa matriz será denotada por A^{-1}.

Proposição 1.16. *Se A e B são matrizes invertíveis da mesma ordem e $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ então:*

a) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

b) $(A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$;

c) $(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

d) $(A^T)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$;

e) $(\lambda\,A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

Demonstração. Recorde-se que para mostrar que C é o inverso de D basta mostrar que $CD = DC = I_n$. Em tudo o que segue vamos apenas verificar uma das igualdades, pois a que falta tem demonstração similar.

Para a demonstração de c) basta mostrar que $\left(B^{-1}A^{-1}\right) \cdot (A\,B) = I_n$, o que é imediato atendendo às propriedades do produto e da definição de inversa de uma matriz.

Para d) basta notar, usando a Proposição 1.12, que $A^T \cdot \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = I_n^T = I_n$. A última alínea é verdadeira porque $(\lambda A)(\frac{1}{\lambda}A^{-1}) = \lambda\frac{1}{\lambda}A\,A^{-1} = I_n$. ☐

Como consequência temos que a produto (qualquer) de matrizes invertíveis é ainda invertível e o seu inverso é o produto dos inversos dessas matrizes por ordem contrária. Atendendo à segunda alínea da proposição anterior definimos, para uma matriz invertível A, $A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n$, se $n \in \mathbb{N}$ e $A^0 = I_n$. Deste modo

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} \quad A^{n+m} = A^n \cdot A^m.$$

Proposição 1.17 (Lei do corte à esquerda)**.** *Sejam $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. tais que $AB = AC$. Se A for invertível então $B = C$.*

Demonstração. Basta multiplicar à esquerda a igualdade $AB = AC$ por A^{-1}. ☐

É claro que a lei do corte à direita também é válida, com as alterações óbvias.

O mais importante é notar que não é verdade que uma igualdade do tipo $AB = CA$, mesmo que com A invertível, implique $B = C$. Por exemplo, se considerarmos duas matrizes $A, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que não comutem e definirmos $B = DA$ e $C = AD$, então $B \neq C$ e $AB = CA$ $(= ADA)$.

Nota 1.18. *Pode-se mostrar, e será feito mais tarde, que se A e B são matrizes quadradas de ordem n tais que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ então elas são inversas uma da outra. Tendo isto em mente, se quisermos verificar se uma dada matriz de ordem n é invertível poderemos ter de resolver um sistema de n^2 equações e n^2 incógnitas. Na prática acabam por ser n sistemas em que cada um deles tem n equações e n incógnitas.*

Vejamos alguns exemplos. Para ver se a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ é invertível vamos procurar $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ou seja} \qquad \begin{cases} 2x + 5z &= 1 \\ x + 3z &= 0 \\ 2y + 5t &= 0 \\ y + 3t &= 1 \end{cases} \qquad \text{ou ainda} \qquad \begin{cases} \begin{cases} 2x + 5z &= 1 \\ x + 3z &= 0 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} 2y + 5t &= 0 \\ y + 3t &= 1. \end{cases} \end{cases}$$

Fazendo os cálculos obtemos a matriz $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

O seguinte resultado será generalizado mais tarde.

Proposição 1.19. *Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ então A é invertível se e só se $ad - bc \neq 0$, e nesse caso*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Demonstração. É claro que, se $ad - bc \neq 0$ então $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ é o inverso de A (basta usar a definição).

Inversamente, suponhamos que existe uma matriz $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ou seja} \qquad \begin{cases} ax + bz &= 1 \\ cx + dz &= 0 \\ ay + bt &= 0 \\ cy + dt &= 1 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira (respectivamente, terceira) igualdade por d, a segunda (respectivamente, quarta) por b e subtraindo obtemos $(ad - bc)x = d$ e $(ad - bc)y = -b$. Se $ad - bc = 0$ então $b = d = 0$, o que contradiz o sistema

$$\begin{cases} ax &= 1 \\ cx &= 0 \\ ay &= 0 \\ cy &= 1. \end{cases}$$

Se $ad - bc \neq 0$ então $x = \frac{d}{ad-bc}$ e $y = \frac{-b}{ab-bc}$. E daqui obtemos os valores de $z = \frac{-c}{ad-bc}$ e $t = \frac{a}{ab-bc}$. □

Definição 1.20. *Uma matriz invertível diz-se* **ortogonal** *se a sua inversa coincidir com a transposta.*

Vejamos alguns exemplos simples:

- $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, se $a^2 + b^2 = 1$;
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & -a \end{pmatrix}$, se $a^2 + b^2 = 1$;

- $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$, se $a^2+b^2+c^2+d^2=1$.

Proposição 1.21. *A inversa de uma matriz ortogonal é ortogonal e o produto de matrizes ortogonais da mesma ordem é ortogonal.*

Demonstração. Sejam A e B matrizes ortogonais da mesma ordem. Então, usando a alínea d) da Proposição 1.16 temos $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^{-1}$ e, usando a alínea d) da Proposição 1.12, $(AB)^T = B^T A^T = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$, mostrando assim que A^{-1} e AB são ortogonais. □

1.5 Exercícios

Apenas com o intuito de praticar, o leitor pode calcular somas e multiplicações de matrizes, transpostas e conjugadas de matrizes, bem como calcular inversas de matrizes de ordem 2 ou 3, tudo isto com exemplos à sua escolha. De qualquer maneira vou apresentar alguns exemplos.

1.1 Calcule:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

b) $3\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$;

c) $2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1.2 Encontre $x, y, z, w \in \mathbb{K}$ tais que $3\begin{pmatrix} x & y \\ z & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$.

1.3 Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$. Calcule, caso estejam definidas, AB, A^2, A^3, B^2, BA.

1.4 Calcule:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

h) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.5 Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calcule:

a) $A+B$, $3A-4B$;

b) AC, AD, BC, BD;

c) A^T, D^TA^T, DD^T.

1.6 Encontre as matrizes quadrada A de ordem n cujas entradas são todas iguais e tais que $A^2 = A$.

1.7 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Mostre que:

a) se A tem uma linha de zeros então AB tem uma linha de zeros;

b) se A tem uma coluna de zeros então BA tem uma coluna de zeros;

c) nas condições de a) ou b), A não é invertível;

d) se B tem duas colunas iguais então AB também tem duas colunas iguais;

e) se A tem duas linhas iguais então AB também tem duas linhas iguais.

1.8 Calcule A^n, para $n \in \mathbb{N}$, em que:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.9 É verdade que, se A, B são matrizes quadradas e $AB = O$ então $BA = O$?

1.10 Dê exemplos de matrizes quadradas A, B não nulas tais que $AB = BA = O$.

1.11 Dê um exemplo de $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tais que $A^2 = -I$ e $B^4 = -I$.

1.12 Calcule os produtos:

a) $\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 \\ 112 & 113 & 114 & 115 \\ 212 & 213 & 214 & 215 \\ 312 & 313 & 314 & 315 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 252 & 253 & 254 & 255 \\ 352 & 353 & 354 & 355 \end{pmatrix}$;

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 512 & 513 & 514 \\ 112 & 113 & 114 \\ 212 & 213 & 214 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 24 & -12 & -4 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1.13 Encontre todas as matrizes que comutam com $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.14 Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Encontre todas as matrizes quadradas B, C tais que $AB = O$ e $CA = O$.

1.15 Seja $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$. Mostre que $A^n = \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & -\operatorname{sen}(n\alpha) \\ \operatorname{sen}(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{pmatrix}$, se $n \in \mathbb{Z}$.

1.16 (Desenvolvimento do binómio de Newton) Sejam A e B matrizes quadradas tais que $AB = BA$. Mostre que:

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

b) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$;

c) $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$;

d) se $n \in \mathbb{N}$ então $(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$.

1.17 Quais as matrizes X tais que:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

e) $X - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.18 Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ satisfaz a igualdade $A^2 + 2A - 11I = O$. Conclua, sem usar a Proposição 1.19, que $A^{-1} = \frac{1}{11} A + \frac{2}{11} I$.

1.19 (Uma nova demonstração da Proposição 1.19) Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Mostre que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)\,I = O$. Conclua que:

a) se $ad - bc = 0$ então A não é invertível;

b) se $ad - bc \neq 0$ então A é invertível e $A^{-1} = -\frac{1}{ad-bc} A + \frac{a+d}{ad-bc} I$.

1.20 Sejam A uma matriz quadrada e $a, b, c \in \mathbb{K}$ tais que $A^3 = aA^2 + bA + cI$. Escreva A^4 e A^5 na forma $\alpha A^2 + \beta A + \gamma I$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$.

1.21 Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Mostre que, se B e C comutam com A então $\alpha\, B + \beta\, C$ comuta com A.

1.22 Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz que comuta com todas as matrizes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que têm apenas uma entrada não nula e que é igual a 1.

a) Mostre (usando o exercício anterior) que A comuta com todas as matrizes em $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Conclua que A é uma matriz escalar (comece com o caso em que $n = 2$).

1.23 Mostre que, se $AB = AC$ e A é invertível então $B = C$.

1.24 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrizes simétricas e $\alpha \in \mathbb{K}$. Mostre que:

a) $A + B$ e $\alpha\, A$ são simétricas;

b) AB é simétrica se e só se $AB = BA$.

1.25 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrizes hermíticas e $\alpha \in \mathbb{K}$. Mostre que:

a) $A + B$ é hermítica;

b) $\alpha\, A$ é hermítica se e só se $A = O$ ou $\alpha \in \mathbb{R}$;

c) AB é hermítica se e só se $AB = BA$.

1.26 Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Mostre que:

a) se $AA^* = O$ então $A = O$;

b) se A é hermítica e $A^2 = O$ então $A = O$.

1.27 Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Mostre que:

a) $A + A^T$, $A^T A$ e AA^T são matrizes simétricas e $A - A^T$ é anti-simétrica;

b) $A + A^*$, $A^* A$ e AA^* são matrizes hermíticas e $A - A^*$ é anti-hermítica;

c) A escreve-se de maneira única como uma soma de uma matriz simétrica por uma matriz anti-simétrica;

d) A escreve-se de maneira única como a soma de uma matriz hermítica por uma matriz anti-hermítica.

1.28 Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcule $B = A^T (AA^T)^{-1}$ e mostre que $AB = I_2$.

1.29 Mostre que $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, com $a^2 + b^2 = 1$ são as únicas matrizes ortogonais de ordem 2.

1.30 Calcule a matriz inversa de:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.31 Consoante os valores dos parâmetros reais apresentados, verifique quais das seguintes matrizes são invertíveis. Para as que forem invertíveis calcule a inversa.

a) $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \lambda_1 \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

1.32 Seja A uma matriz triangular superior de ordem n. Mostre que:

a) A é invertível se e só se os elementos da diagonal forem não nulas.

b) se A é invertível então A^{-1} também é triangular superior e os elementos da sua diagonal são os inversos dos elementos da diagonal de A.

(Talvez seja bom começar com os casos em que $n \leq 3$.)

1.33 Seja J_n uma matriz quadrada de ordem n cujas entradas são todas iguais a 1. Mostre que a inversa de $I_n - J_n$ é $I_n - \frac{1}{n-1}J_n$, se $n \geq 2$.

1.34 Seja A uma matriz quadrada tal que existe $a \neq -1$ tal que $A^2 = aA$. Mostre que existe $b \in \mathbb{K}$ tal que $(I + A)^{-1} = I - bA$.

1.35 Seja A uma matriz quadrada de ordem n e $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = O$.

a) Mostre que A não é invertível;

b) $(I - A)$ é invertível e a sua inversa é $I + A + A^2 + \cdots A^{k-1}$.

1.36 Sejam A, B matrizes quadradas de ordem n com A invertível. Mostre que:

a) $(A + B)A^{-1}(A - B) = (A - B)A^{-1}(A + B)$;

b) $(ABA^{-1})^n = AB^nA^{-1}$, se $n \in \mathbb{Z}$.

2 Sistemas de equações lineares

Nesta secção vamos fazer uma primeira aproximação ao estudo de sistemas de equações lineares.

2.1 Definição e exemplos

Uma equação linear em duas variáveis (ordenadas) x e y é uma equação do tipo $a\,x + b\,y = c$, com $a, b, c \in \mathbb{K}$. Uma solução da equação é um par $(s,t) \in \mathbb{K}^2$ tal que substituindo na equação x por s e y por t obtemos uma igualdade. Por exemplo $x = 2$, $y = -2$ representa uma solução da equação $4x+3y = 2$. É claro que se nesta equação escolhermos um qualquer valor de y e $x = \frac{2-3y}{4}$ então obtemos uma solução da equação e todas as soluções podem ser obtidas desta forma.

Mais geralmente, uma equação linear em n variáveis $x_1, \dots, x_n$ é uma equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = b_1$$

em que $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ são os coeficientes das incógnitas e $b_1 \in \mathbb{K}$ é o termo independente da equação. É claro que só interessa estudar os casos em que nem todos os coeficientes são nulos.

Como no exemplo acima, se $a_i \neq 0$, então

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = b_1 \iff x_i = b_1 - \sum_{j \neq i} \tfrac{a_j}{a_i}\, x_j$$

Dizemos que a equação tem $n-1$ graus de liberdade pois podemos escolher qualquer escalar para x_j, se $j \neq i$ e depois x_i dado pela expressão acima.

Definição 2.1. *Um sistema de m equações e n incógnitas é um sistema do tipo*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$.

O sistema diz-se **homogéneo** *se $b_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$*

Uma solução do sistema é uma solução comum às m equações lineares que compõem o sistema.

Em notação matricial o sistema acima é equivalente à equação

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Deste modo todo o sistema de equações lineares pode ser visto na forma $AX = \mathbf{b}$ em que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é a matriz dos coeficientes ou matriz simples do sistema, $\mathbf{b} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$ é a matriz dos termos independentes e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ é a matriz (coluna) das incógnitas. Dito de outro modo, para conhecer o sistema basta-nos conhecer a matriz dos coeficientes e a matriz dos termos independentes. Por razões que ficarão claras mais adiante é relevante considerar a chamada **matriz ampliada do sistema** que é obtida acrescentando à matriz dos coeficientes uma última coluna com os elementos da matriz dos termos independentes. Mais concretamente a matriz ampliada dos sistema é a matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

A linha vertical entre as última colunas serve apenas para destacar o papel da matriz dos termos independentes. Escreveremos também $(A|\mathbf{b})$.

Exemplos 2.2. Antes de estudarmos estes sistemas vejamos alguns casos simples.

1. Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível então (multiplicando à esquerda a igualdade por A^{-1}, que é uma operação reversível)
$$AX = \mathbf{b} \iff X = A^{-1}\mathbf{b}$$
e, portanto, o sistema tem solução única.

   Por exemplo,
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+5y &=& 1 \\ x+3y &=& 2 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ (tantas equações como incógnitas) triangular superior cujos elementos da diagonal são não nulos. Vimos no Exercício 1.32 que esta matriz é invertível, mas vamos esquecer isto por um momento. O sistema em causa é
$$\left\{\begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{nn}x_n & = b_n \end{array}\right.$$
É assim claro que $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$. Substituindo na penúltima equação tiramos o valor (único) para x_{n-1} e assim sucessivamente até encontrarmos x_1. Note-se que em cada passo, a única divisão que temos de fazer tem como divisor um dos elementos da diagonal da matriz.

3. Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$, com $m > n$ (mais equações que incógnitas) é tal que $a_{ij} = 0$ se $i > j$ e $a_{ii} \neq 0$, se $1 \leq i \leq n$ o sistema em causa é
$$\left\{\begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{nn}x_n & = b_n \\ 0 & = b_{n+1} \\ & \vdots \\ 0 & = b_m \end{array}\right.$$
É assim claro que se $b_i \neq 0$ para algum $i > n$ então o sistema é impossível. Caso contrário caímos no caso anterior e a solução é única.

4. Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$, com $m < n$ (menos equações que incógnitas) é tal que $a_{ij} = 0$ se $i > j$ e $a_{ii} \neq 0$, se $1 \leq i \leq m$ o sistema em causa é
$$\left\{\begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{mm}x_m + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right.$$
Olhamos agora para a última equação. Uma vez que $a_{mm} \neq 0$ esta equação tem $n-m$ graus de liberdade (menos um do que o número de variáveis que aparecem na equação). Deste modo podemos arbitrar x_j para todo $j > m$ e obtemos $x_m = b_m - \sum_{j>m} \frac{a_{mj}}{a_{mn}} x_j$. De seguida substituímos sucessivamente nas outras equações (de baixo para cima) e tiramos o valor de $x_{m-1}, \ldots, x_2, x_1$. Deste modo o sistema tem $n-m$ graus de liberdade.

O resultado do primeiro exemplo acima tem um reverso.

Proposição 2.3. *Uma matriz quadrada A de ordem n é invertível se e só se qualquer sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes seja A tem uma e uma única solução.*

Demonstração. Se A é invertível já vimos que qualquer sistema $AX = B$ admite como solução única $X = A^{-1}B$.

Suponhamos agora que A satisfaz a condição referida. Dada uma qualquer matriz B, seja B_j a j-ésima coluna da matriz B. Encontrar $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AX = B$ é equivalente a encontrar, para $j = 1, 2, \ldots, n$, $X_j \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tal que $AX_j = B_j$.

Escolhendo $B = I$, concluímos que existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AC = I$. Por outro, como I e CA são soluções de $AX = A$, pois $A(CA) = (AC)A = IA = A$, a unicidade de solução garante-nos que $CA = I_n$. □

A ideia agora é a de encontrar métodos para que um sistema linear seja, num certo sentido a definir, equivalente a um sistema "parecido" com um dos 3 últimos tipos referidos acima. Mas antes vamos dar algumas definições e fazer alguns comentários.

Definição 2.4. *Um sistema da forma $AX = \mathbf{b}$, com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ e $\mathbf{b} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$, diz-se* **possível** *se tiver solução e* **impossível***, caso contrário. Se o sistema for possível, ele diz-se* **determinado** *se tiver apenas uma solução e* **indeterminado** *se tiver mais soluções.*

Note-se que um sistema homogéneo é sempre possível pois admite a solução nula.

Vejamos agora que um sistema possível e indeterminado tem sempre uma infinidade de soluções.

Proposição 2.5. *Consideremos um sistema na forma $AX = \mathbf{b}$ com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ e $\mathbf{b} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$.*

a) Se $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ são soluções do sistema homogéneo $AX = O_{m,1}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ então $X_1 + X_2, \alpha X_1$ também são soluções desse sistema.

b) Se $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ são soluções do sistema $AX = \mathbf{b}$ então $X_1 - X_2$ é solução do sistema homogéneo $AX = O_{m,1}$.

c) Se $X_0 \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ é solução do sistema $AX = \mathbf{b}$ então o conjunto de soluções desse sistema é formado por todos os elementos da forma $X_0 + Y$ em que Y é uma solução da equação homogénea $AY = O_{m,1}$.

Em particular, se o sistema tem mais do que uma solução então tem uma infinidade de soluções.

Demonstração. Para a primeira alínea basta notar, usando a Proposição 1.10, que $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2$ e $A(\alpha X_1) = \alpha AX_1$.

A segunda alínea é consequência da igualdade $A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = O_{m,1}$.

Para a última alínea, note-se que, se Y é uma solução da equação homogénea então $A(X_0 + Y) = AX_0 + AY = \mathbf{b} + O_{m,1} = \mathbf{b}$. Inversamente, se X_1 é uma outra solução do sistema $AX = \mathbf{b}$ então $X_1 = X_0 + (X_1 - X_0)$ e, por b), $X_1 - X_0$ é solução do sistema homogéneo.

Finalmente, se tivermos duas soluções diferentes X_1 e X_2 do sistemas então $X_1 + \alpha(X_2 - X_1)$ é solução so sistema qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{K}$, mpostrando assim que o sistema tem uma infinidade de soluções. □

2.2 Matriz em escada

De seguida vamos definir o que se entende por matriz em escada e mostrar que toda a matriz pode ser transformada numa matriz em escada, usando as chamadas operações elementares.

Definição 2.6. *Um elemento de uma matriz diz-se um* **pivô** *se for o primeiro (a contar da esquerda) elemento não nulo da sua linha.*

Os pivôs da matriz seguintes são os elementos inseridos num quadrado

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ \boxed{2} & 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & -6 \\ \boxed{2} & 0 & -1 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Definição 2.7. *Diz-se que uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é uma* **matriz em escada** *se satisfaz as seguintes condições:*

- *se uma linha só tiver zeros então todas as linhas abaixo dela também só têm zeros;*

- *se o pivô de uma linha i for a_{ik} então $a_{js} = 0$, para $j > i$ e $s \leq k$.*

O que a segunda condição quer dizer é que à esquerda e abaixo de um pivô só podem estar zeros.

As seguintes são matrizes em escada.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 5 & -1 \\ 0 & \boxed{3} & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \boxed{3} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{3} & 0 \end{pmatrix}$$

enquanto que estas não são matrizes em escada

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 7 \\ 0 & \boxed{-4} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 5 & -1 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}.$$

Vamos agora definir o que se entende por operações elementares sobre uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Definição 2.8. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamam-se* **operações elementares** *(por linhas) sobre A às seguintes operações.*

- *Troca das linhas i e j de A. Em notação simplificada escrevemos $L_i \leftrightarrow L_j$.*
- *Multiplicação da linha i de A por um escalar c não nulo. Escrevemos $L_i \to cL_i$.*
- *Substituição da linha i de A pela soma dessa linha com d ($d \in \mathbb{K}$) vezes a linha j, com $j \neq i$, e escreveremos $L_i \to L_i + dL_j$.*

Note-se que estas operações são reversíveis no sentido em que se se aplicar uma operação elementar a uma matriz então podemos aplicar de seguida uma operação elementar que nos faz voltar à matriz original.

É claro que juntando as duas últimas operações podemos substituir L_i por $cL_i + dL_j$, se $c, d \in \mathbb{K}$ com $c \neq 0$, e escreveremos $L_i \to cL_i + dL_j$.

Definição 2.9. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Chamamos* **matriz elementar** *(por linhas) de ordem m a uma matriz de ordem m que seja obtida da matriz identidade I_m por aplicação de uma operação elementar.*

Note-se que as matrizes elementares são invertíveis. Mais concretamente, se E é a matriz elementar obtida da matriz identidade por aplicação da operação:

- $L_i \leftrightarrow L_j$, então ela é igual à sua inversa;
- $L_i \to cL_i$ (com $c \neq 0$), então a sua inversa é obtida da identidade por aplicação da operação $L_i \to \frac{1}{c}L_i$;
- $L_i \to L_i + dL_j$ (com $d \in \mathbb{K}$), então a sua inversa é obtida da identidade por aplicação da operação $L_i \to L_i - dL_j$.

Nota 2.10. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. A matriz obtida de A por aplicação de uma operação elementar é da forma EA, em que E é uma matriz elementar. Mais geralmente, uma matriz que é obtida a partir de A por aplicação de operações elementares é da forma PA, em que P é um produto de matrizes elementares e portanto é invertível.*

Nas condições acima se $m = n$ e PA for invertível então A é invertível. Isto acontece por que $A = P^{-1}(PA)$.

Conclusão: *A aplicação de operações elementares sobre uma matriz quadrada não altera o facto de ela ser ou não invertível.*

Vejamos como transformar uma matriz numa matriz em escada, usando as operações elementares. Acompanharemos os passos com um exemplo.

Passo um

Começando da esquerda para a direita escolhemos a primeira coluna j com uma entrada $a_{ij} \neq 0$. Se não houver tal coluna então a matriz é a matriz nula. Caso contrário, com a troca de linhas $L_i \leftrightarrow L_1$ podemos considerar que essa entrada é a_{1j}. Note-se que a_{1j} é um pivô da matriz.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[L1 \leftrightarrow L_2]{} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 2 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & -11 \end{pmatrix}$$

Até o final não se mexe mais nas colunas que estão à esquerda do pivô (as entradas dessas colunas são todas nulas).

Passo dois

Vamos anular todos os elementos da matriz que estão abaixo (na mesma coluna) do pivô. Para esse efeito, se $a_{ij} \neq 0$ for um tal elemento (com $i > 1$) fazemos uma operação elementar do tipo $L_i \to \alpha L_i + \beta L_1$, com $\alpha \neq 0$ (podemos, por exemplo, considerar $\alpha = a_{1j}$ e $\beta = -a_{ij}$ ou então, $\alpha = 1$ e $\beta = -\frac{a_{ij}}{a_{1j}}$).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \to -2L_3 + L_1 \\ L_4 \to L_4 + L_1}]{} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Passo três

Consideramos a matriz que é obtida da matriz original suprimindo a linha e a coluna do pivô e das colunas de ordem menor do que a ordem do pivô. E aplicamos os passos um e dois a esta nova matriz. E o processo continua ....

No exemplo, vou marcar a vermelho as entradas que não vão ser mais mexidas.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Continuando o processo temos

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - 2L_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 + 2L_3]{} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 2 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

em que ficaram assinalados os pivôs da matriz.

O seguinte resultado é consequência da Nota 2.10 e dos passos referidos acima.

Corolário 2.11. *Se $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $m \geq n$ então existe uma matriz $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ invertível tal que PA é uma matriz em escada.*

Em particular, se $m = n$, A é invertível se e só se a matriz em escada referida acima tiver n pivôs.

A respeito deste último corolário, note-se que uma matriz quadrada em escada tem n pivôs se e só se for triangular superior com todos os elementos da diagonal não nulos, ou então, se e só se a sua última linha não for formada apenas de zeros.

Estamos agora em condições de mostrar um resultado que em parte já foi referido na Nota 1.18.

Teorema 2.12. *Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ então as seguintes condições são equivalentes:*

a) *A é invertível;*

b) *existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AB = I_n$;*

c) *existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $BA = I_n$;*

d) *existe uma e uma só solução do sistema $AX = 0$.*

Demonstração. É claro que a primeira alínea implica as duas seguintes alíneas, por definição de matriz invertível.
c) $\Rightarrow$ *d)* Da igualdade $AX = 0$ obtemos, multiplicando à esquerda por B, $X = 0$.

Usando o corolário anterior seja $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertível tal que PA é uma matriz em escada E.

b) $\Rightarrow$ *c)* Multiplicando a igualdade $PA = E$ à direita por B obtemos $P = EB$. Deste modo, E não tem nenhuma linha de zeros, pois caso contrário, P teria uma linha de zeros e nesse caso não seria invertível. Usando o Exercício 1.32 concluímos que E é invertível. Deste modo $A = P^{-1}E$ e $B = E^{-1}P$ e, portanto $BA = E^{-1}PP^{-1}E = I_n$.

d) $\Rightarrow$ *a)* O sistema $AX = 0$ é equivalente ao sistema $PAX = 0$ ou seja $EX = 0$, uma vez que P é invertível. Mas este último sistema tem solução única se e só se os elementos da diagonal de E forem todos não nulos (como vimos atrás). Deste modo *d)* implica E invertível (novamente pelo Exercício 1.32). Sendo assim da igualdade $PA = E$ obtemos $A = P^{-1}E$. Concluímos assim que A é invertível pois é o produto de matrizes invertíveis. $\square$

Podemos ainda "generalizar a equivalência entre as alíneas *a)*, *b)* e *c)* deste teorema.

Corolário 2.13. *Se o produto de matrizes quadradas da mesma ordem é invertível então essas matrizes são invertíveis.*

Demonstração. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tais que $A_1A_2\cdots A_k$ é invertível e seja F o seu inverso. Deste modo $A_1A_2\cdots A_kF = I_n$.
Pela equivalência entre as alíneas a) e b) do teorema anterior $A_1 \cdot A_i$ é invertível para todo $i = 1, \ldots, k$. Em particular A_1 é invertível.

Por outro lado, se $i \in \{2, \ldots, k\}$, $A_1 \cdots A_{i-1}$ e $A_1 \cdots A_i$ são invertíveis e portanto A_i é invertível uma vez que $A_i = \underbrace{(A_1 \cdots A_{i-1})^{-1} (A_1 \cdots A_{i-1})}_{=I_n} A_i = \underbrace{(A_1 \cdots A_{i-1})^{-1}}_{\text{invertível}} \underbrace{(A_1 \cdots A_{i-1}A_i)}_{\text{invertível}}$. $\square$

2.3 Método de eliminação de Gauss

Comecemos por notar que:

- se tivermos um sistema e trocarmos a ordem de duas equações então obtemos um sistema equivalente (pois o processo é reversível);
- se multiplicarmos uma equação por um escalar não nulo, então obtemos um sistema equivalente (pois o processo é reversível);
- se substituirmos uma equação pela soma dessa equação com um múltiplo de outra, então obtemos um sistema equivalente (pois o processo é reversível).

Estas operações vistas na matriz ampliada do sistema significam:

- trocar as linhas i e j da matriz ampliada ($L_i \leftrightarrow L_j$);
- multiplicar a linha i da matriz ampliada por um escalar c não nulo ($L_i \to cL_i$);
- substituir a linha i da matriz ampliada pela soma dessa linha por c vezes a linha j ($j \neq i$) ($L_i \to L_i + cLj$).

Deste modo, todo o sistema de equações lineares é equivalente a um sistema de equações lineares em que a matriz ampliada está em escada. E estes últimos sistemas são fáceis de resolver.

Vejamos dois exemplos.

Exemplo 2.14. *Consideremos o sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+z+t & = & 0 \\ 2x+4y+3z+3t & = & 4 \\ 3x+5y+4z+2t & = & 2 \end{array}\right.$$

Podemos aplicar as seguintes operações elementares sobre a matriz ampliada do sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_2 - 3L_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -6 \end{array}\right)$$

Deste modo o sistema inicial é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+3y+z+t & = & 0 \\ -2y+z+t & = & 4 \\ -z-3t & = & -6 \end{array}\right.$$

que, como vimos atrás, tem um grau de liberdade. Podemos assim, arbitrar o valor de t (única variável que não tem nenhum pivô como coeficiente), tirar o valor de z (em função de t) na última equação, substituir z na segunda equação, tirar o valor de y (em função de t), substituir z e y na primeira equação e tirar o valor de x (em função de t). Obtemos assim,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -9+5t \\ y & = & 1-t \\ z & = & 6-3t \\ t & = & t \end{array}\right.$$

Exemplo 2.15. *Consideremos o sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcr} y+5z & = & -1 \\ 2x+2y+3z+2t & = & 7 \\ x+y+2y & = & 3 \\ -2x+z+2t & = & -11 \end{array}\right. \quad \text{ou equivalentemente} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Utilizando os cálculos que foram feitos na subsecção anterior para a matriz ampliada do sistema, o sistema é equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x+2y+3z+2t & = & 7 \\ y+5z & = & -1 \\ 3z-2t & = & 1 \end{array}\right.$$

E este sistema tem um grau de liberdade. Podemos arbitrar t (única variável que não tem nenhum pivô como coeficiente), tirar o valor de z na última equação, depois tirar o valor de y na segunda e finalmente tirar o valor de x na primeira, tudo em função de t. Obtemos sucessivamente

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x+2y+3z+2t & = & 7 \\ y+5z & = & -1 \\ z & = & \frac{1+2t}{3} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcr} 2x+2y+3z+2t & = & 7 \\ y & = & -\frac{8+10t}{3} \\ z & = & \frac{1+2t}{3} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{17+4t}{3} \\ y & = & -\frac{8+10t}{3} \\ z & = & \frac{1+2t}{3} \\ t & = & t \end{array}\right.$$

É claro que poderíamos ter seguido outros caminhos. Por exemplo, a primeira troca de linhas poderia ser outra. Poderíamos também ter mudado a ordem das variáveis, o que levava a trocar colunas nas matrizes, etc..

Poderíamos ser levados à solução

$$\left\{\begin{array}{rcl} t & = & \frac{3x-17}{2} \\ y & = & \frac{23-5x}{2} \\ z & = & \frac{x-5}{2} \\ x & = & x \end{array}\right.$$

Formalização do método

Para resolvermos um sistema de equações lineares do tipo $AX = \mathbf{b}$, com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ e $\mathbf{b} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$ podemos fazer os seguintes passos:

- consideramos a matriz ampliada do sistema $(A|\mathbf{b})$;
- colocamos esta matriz em escada, obtendo uma matriz do tipo $(A'|\mathbf{b}')$;

1. se na última coluna de $(A'|\mathbf{b}')$ existir um pivô a, então o sistema é impossível pois a equação correspondente será $0 = a$ (isto corresponde a dizer que o número de pivôs de A' é menor do que o número de pivôs de $(A'|\mathbf{b}')$);
2. se na última coluna de $(A'|\mathbf{b}')$ não existir um pivô (ou seja, se o número de pivôs de A' for igual ao número de pivôs de $(A'|\mathbf{b}')$) e o sistema tiver k pivôs, então o sistema é possível e tem $n - k$ graus de liberdade;
3. neste último caso, arbitramos os valores das variáveis que não correspondem a nenhum pivô e tiramos de seguida, começando da última para a primeira equação, os valores das variáveis que correspondem aos pivôs.

Podemos concluir que:

- o sistema é possível se e só se o número de pivôs de A' for igual ao número de pivôs de $(A'|\mathbf{b}')$;
- se $n > m$ então o sistema é impossível ou então é indeterminado, pois o número de pivôs é no máximo m;
- se $n = m$, A é invertível se e só se A' for triangular superior e com n pivôs (que estão na diagonal).

2.4 Cálculo da matriz inversa

Seja $A = (a_{ij})_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz quadrada e suponhamos que aplicando operações elementares sobre A conseguíamos chegar à matriz identidade. Deste modo, atendendo à Nota 2.10, existe uma matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $PA = I_n$ e, assim obtinhamos a inversa de A.

Na prática isto corresponde a começar por considerar a matriz $(A|I_n)$ e, de seguida aplicar a esta matriz as operações elementares definidas por P. Obtemos a matriz $(PA|PI_n)$, ou seja $(PA|P)$, que é igual a $(I_n|P)$.

Exemplos 2.16. *Vejamos dois exemplos de aplicação do método. O segundo não é relevante atendendo à Proposição 1.19. De qualquer maneira pode funcionar como uma outra demonstração dessa proposição.*

a) *Seja* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *e tentemos calcular a sua inversa. Começamos com*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L1 \leftrightarrow L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to -2L_3 + L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L1 \to L_1 - 2L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_1 \to 3L_1 + 7L_3 \\ L_2 \to 3L_2 - 5L_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & -6 & 10 & -14 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \to \frac{1}{6}L_1 \\ L_2 \to \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \to \frac{1}{3}L_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

concluíndo assim que A *é invertível e a sua inversa é igual a* $\begin{pmatrix} -1 & \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \\ 1 & -\frac{5}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

b) Seja $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ *com* $a,b,c,d\in\mathbb{K}$. *Vamos aplicar o método se* $a\neq 0$ *(o outro caso é ainda mais simples)*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[L2\to aL_2-cL_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a\end{array}\right).$$

Se $ad-bc=0$ *podemos já concluir que a matriz não é invertível. Se* $ad-bc\neq 0$*, continuamos o processo*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a\end{array}\right) \xrightarrow[L_1\to(ad-bc)L_1-bL_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} a(ad-bc) & 0 & ad & -ab \\ 0 & ad-bc & -c & a\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1\to\frac{1}{a(ad-bc)}L_1 \\ L_2\to\frac{1}{ad-bc}L_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{array}\right)$$

É claro que podemos tentar utilizar este método para qualquer matriz A quadrada de ordem n. Começamos por encontrar a matriz em escada E obtida a partir de A por aplicação de operações elementares sobre as linhas de A. Recorde-se que A é invertível se e só se E é invertível, ou seja, se e só se E tiver n pivôs (tantos quantas as linhas da matriz). Se E tiver n pivôs então é triangular superior e os elementos da sua diagonal são diferentes de zero (são os pivôs de E). Deste modo E é invertível.

Se E tiver n pivôs vamos anular, usando operações elementares sobre linhas, os elementos não nulos que estão acima dos pivôs. E fazemos este processo começando na última coluna, para garantir que cada um dos passos executados não estraga passos anteriores (verifique!). Para anular o elemento a_{ij} com $j>i$ podemos fazer $L_i\to a_{jj}L_i-a_{ij}L_j$. Finalmente tornamos iguais a 1 todos os pivôs, com novas operações elementares.

2.5 Exercícios

2.1 Reduza à forma em escada (por linhas) as matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 1&-2&3&-1\\2&-1&2&2\\3&1&2&3\end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 1&2&-1&2\\2&4&1&-2\\3&6&2&-6\end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1&2&0&0\\3&4&0&0\\0&0&2&3\\0&0&4&5\end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 6&3&-4\\-4&1&-6\\1&2&-5\end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 0&1&3&-2\\2&1&-4&3\\2&3&2&-1\end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} 2&3&2&5\\3&-1&2&0\\4&-5&6&-5\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1&2\\2&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 0&1&3&-2\\0&4&-1&3\\0&0&2&1\\0&5&-3&4\end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 1&3&-1&2\\0&11&-5&3\\2&-5&3&1\\4&1&1&5\end{pmatrix}$.

2.2 Resolva os seguintes sistemas.

a) $\begin{cases} 2x+3y = 1\\ 5x+7y = 3\end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+4y = 10\\ 3x+6y = 15\end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x-2y = 5\\ -6x+3y = 1\end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+2y = 3\\ x-2y = 5\\ 3x+2y = 7\end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x-3y+6z+2v-5w = 3\\ y-4z+v = 1\\ v-3w = 2\end{cases}$

f) $\begin{cases} x-3y+4z-2w = 5\\ 2y+5z+w = 2\\ y-3z = 4\end{cases}$

g) $\begin{cases} x+2y-3z = -1\\ 3x-y+2z = 7\\ 5x+3y-4z = 2\end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x+y-2z = 10\\ 3x+2y+2z = 1\\ 5x+4y+3z = 4\end{cases}$

i) $\begin{cases} x+2y-3z = 6\\ 2x-y+4z = 2\\ 4x+3y-2z = 14\end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x+y-3z = 5\\ 3x-2y+2z = 5\\ 5x-3y-z = 16\end{cases}$

k) $\begin{cases} 2x+3y+2z = 5\\ x-2y+3z = 2\\ 4x-y+4z = 1\end{cases}$

l) $\begin{cases} x+2y+3z = 3\\ 2x+3y+8z = 4\\ 3x+2y+17z = 1\end{cases}$

m) $\begin{cases} x+2y-3z+2w=2\\ 2x+5y-8z+6w=5\\ 3x+4y-5z+2w=4\end{cases}$

n) $\begin{cases} x+2y+2z &= 2 \\ 3x-2y-z &= 5 \\ 2x-5y-3z &= 4 \\ x+4y+6z &= 0 \end{cases}$ o) $\begin{cases} x+2y-z+3w &= 3 \\ 2x+4y+4z+3w &= 9 \\ 3x+6y-z+8w &= 10 \end{cases}$ p) $\begin{cases} x+5y-4z+13w+2u=3 \\ 3x-y+2z+5w+u=2 \\ 2x+2y+3z-4w=1 \\ 2x+y-z+4w-u=3 \\ x+3y+z+u=1 \end{cases}$

2.3 Quais dos seguintes sistemas (homogéneos) tem solução não nula?

a) $\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ x-8y+8z=0 \\ 3x-2y+4z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y-5z+4w=0 \\ 2x-3y+2z+3w=0 \\ 4x-7y+z-6w=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x+4y-7z+4v-5w=0 \\ 9x+3y+2z-7v+w=0 \\ 5x+2y-3z+v+3w=0 \\ 6x-5y+4z-3v-2w=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ 3x-2y+2z=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-2y+2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \\ 3x+4y-6z=0 \\ 3x-11y+12z=0 \end{cases}$

2.4 Determine os valores de $k \in \mathbb{R}$ tais que o sistema (nas incógnitas x, y, z) tenha: solução única; nenhuma solução; mais do que uma solução.

a) $\begin{cases} kx+y+z &= 1 \\ x+ky+z &= 1 \\ x+y+kz &= 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y+kz &= 1 \\ 2x+ky+8z &= 3 \\ kx+y+8z &= 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+kz &= 2 \\ 3x+4y+2z &= k \\ 2x+3y-z &= 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-3z &= -3 \\ 2x+ky-z &= 2 \\ x+2y+kz &= 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+ky+2kz &= 1 \\ y+kz &= 0 \\ 2x+(2k-1)y+3kz &= 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} kx+y+kz &= 0 \\ kx+(k-1)y+kz &= 0 \\ x+y+(k-2)z &= 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+ky+2kz &= 2 \\ 2x+2k^2y+8k^2z &= 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x+y+z+kt &= 1 \\ kx+(k-1)y+(k+1)z+t &= 1 \\ x+y+z+t &= 1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} -x+(1-k)y+(2-k)z+kt &= 3 \\ kx-y+(2-k)z+kt &= 2 \\ kx+ky+(2-k)z+kt &= 2 \\ kx+ky+(2-k)z-t &= 2 \end{cases}$

2.5 Para que valores de a, b, c os seguintes sistemas têm solução?

a) $\begin{cases} x+2y-3z &= a \\ 3x-y+2z &= b \\ x-5y+8z &= c \end{cases}$ c) $\begin{cases} ax+y+z+t &= 1 \\ x+by+z+t &= 1 \\ x+y+cz+t &= 1 \\ x+y+z+(abc)t &= 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y+4z &= a \\ 2x+3y-z &= b \\ 3x+y+2z &= c \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ ax+by+cz &= 2 \\ a^2x+b^2y+c^2z &= 2 \end{cases}$

2.6 Considere o sistema $\begin{cases} ax+by &= e \\ cx+dy &= f \end{cases}$, com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{K}$, sendo a, b, c, d não todos nulos. Mostre que:

a) se $ad-bc \neq 0$ então o sistema tem uma única solução;

b) se $ad-bc=0$ e $af-ec \neq 0$ então o sistema não tem solução;

c) se $ad-bc=0$ e $af-ec=0$ então o sistema tem mais do que uma solução.

2.7 Para cada uma das matrizes quadradas que aparecem nos exercícios anteriores (incluindo as matrizes dos coeficientes dos sistemas) verifique se são invertíveis e, em caso afirmativo, calcule a sua inversa.

3 Espaços vectoriais

3.1 Definições e preliminares

Sobre o espaço $\mathbb{R}^n$ (ou mais geralmente, $\mathbb{K}^n$) temos definidas as operações de soma e de multiplicação por um escalar dadas por:

- se $\mathrm{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathrm{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$ então $\mathrm{X} + \mathrm{Y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$;
- se $\mathrm{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ então $\lambda\,\mathrm{X} = (\lambda\, x_1, \ldots, \lambda\, x_n)$.

Estas operações satisfazem várias propriedades: a soma é comutativa, associativa, etc., a multiplicação por um escalar é distributiva em relação à soma, etc..

Um espaço com estas características será designado de espaço vectorial. Mais concretamente temos a seguinte definição.

Definição 3.1. *Seja V um conjunto não vazio admitindo duas funções, a que chamaremos soma (ou adição) e multiplicação por um escalar*

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V, \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times V & \longrightarrow & V. \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

Diz-se que V, conjuntamente com estas operações é um **espaço vectorial sobre** $\mathbb{K}$ *se:*

A1. $\forall u, v \in V, \quad u + v = v + u$ *(a adição é comutativa);*

A2. $\forall u, v, w \in V, \quad (u + v) + w = u + (v + w)$ *(a adição é associativa);*

A3. $\exists u_0 \in V\ \forall u \in V, \quad u + u_0 = u_0 + u = u$ *(existência de elemento neutro para a adição);*

A4. $\forall u \in V\ \exists v \in V, \quad u + v = v + u = u_0$ *(todo o elemento tem simétrico);*

M1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\ \forall u \in V, \quad (\lambda + \mu) \cdot u = (\lambda \cdot u) + (\mu \cdot u)$ *(distributividade da multiplicação escalar em relação à adição em $\mathbb{K}$);*

M2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall u, v \in V, \quad \lambda \cdot (u + v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v)$ *(distributividade da multiplicação escalar em relação à adição em V);*

M3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\ \forall u \in V, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u$ *(compatibilidade da multiplicação em $\mathbb{K}$ com a multiplicação escalar);*

M4. $\forall u \in V, \quad 1 \cdot u = u$ *(identidade da multiplicação escalar).*

É claro que $\mathbb{K}^n$ com a adição e multiplicação por um escalar usuais satisfaz estes axiomas, em que $(0, \ldots, 0)$ é o elemento neutro da adição e o simétrico de um vector $(x_1, \ldots, x_n)$ é $(-x_1, \ldots, -x_n)$. Vejamos mais alguns exemplos.

Deixaremos de denotar a multiplicação escalar por um ponto. Deste modo escreveremos $\lambda\, u$ em vez de $\lambda \cdot u$.

Exemplos 3.2. Fica como exercício verificar que nos exemplos seguintes estamos na presença de espaços vectoriais.

1. $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, com a soma de matrizes e a multiplicação por um escalar já definidas.
2. $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, o conjunto das funções reais de variável real, com a adição e a multiplicação escalar definidas por: se $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $f + g$ e $\lambda \cdot f$ são tais que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$, se $x \in \mathbb{R}$.
3. $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, o conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a n, com a adição e multiplicação escalar usuais.
4. $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, o conjunto dos polinómios, com a adição e multiplicação escalar usuais.

Essencialmente os exemplos de espaços vectoriais que daremos serão do tipo dos já referidos, ou subconjuntos deles. De qualquer maneira vou dar um exemplo com um aspecto um pouco diferente embora, como poderemos ver mais tarde, não seja assim tão diferente.

Consideremos $V = \mathbb{R}_0^+$ com as operações

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+, \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+. \\ (\lambda, x) & \mapsto & x^\lambda \end{array}$$

Aplicado a estes exemplo os axiomas de espaço vectoriais são

A1. $\forall x, y \in \mathbb{R}_0^+, \quad xy = yx;$

A2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_0^+, \quad (xy)z = x(yz);$

A3. $\exists x_0 \in \mathbb{R}_0^+ \ \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \quad xx_0 = x_0x = x;$

A4. $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ \ \exists y \in \mathbb{R}_0^+, \quad xy = yx = x_0;$

M1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \ \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \quad x^{\lambda+\mu} = x^\lambda x^\mu;$

M2. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \ \forall x, y \in \mathbb{R}_0^+, \quad (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda;$

M3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \ \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \quad (x^\mu)^\lambda = x^{\lambda\,\mu};$

M4. $\forall x \in \mathbb{R}_0^+, \quad x^1 = x.$

A verificação deste axiomas no caso em questão é muito simples.

Proposição 3.3 (Unicidade do elemento neutro e do simétrico)**.** *Se V é um espaço vectorial então:*

a) existe um só elemento neutro para a adição;

b) cada elemento de V tem um único simétrico.

Demonstração. Suponhamos que z_1 e z_2 são elementos neutros para a adição. Então

$$z_1 + z_2 = \begin{cases} z_1 & \text{porque } z_2 \text{ é elemento neutro da adição} \\ z_2 & \text{porque } z_1 \text{ é elemento neutro da adição} \end{cases}$$

e, portanto $z_1 = z_2$.

Por outro lado, se $u \in V$ e u_1 e u_2 são simétricos de u então, se u_0 for o elemento neutro,

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 + u_0 \quad \text{porque } u_0 \text{ é elemento neutro} \\ &= u_1 + (u + u_2) \quad \text{porque } u_2 \text{ é simétrico de } u \\ &= (u_1 + u) + u_2 \quad \text{porque a operação } + \text{ é associativa} \\ &= u_0 + u_2 \quad \text{porque } u_1 \text{ é simétrico de } u \\ &= u_2 \quad \text{porque } u_0 \text{ é elemento neutro} \end{aligned}$$

e, portanto, $u_1 = u_2$. □

Atendendo aos resultados acima enunciados, denotaremos o elemento neutro da adição de V por 0_V, ou simplesmente 0, se não houver dúvidas quanto ao espaço vectorial em causa. Chamaremos a 0_V o vector nulo ou o zero de V. Analogamente, dado $u \in V$ denotaremos o seu simétrico por $-u$. Escreveremos $u - v$ (dita a diferença de u por v) para significar $u + (-v)$. Fica como exercício mostrar algumas propriedades "naturais" desta operação. Por exemplo, se $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ então $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$ e $(u - v) - w = u - (v + w)$.

As seguintes são algumas propriedades dos espaços vectoriais "mais ou menos evidentes", mas que necessitam demonstração.

Proposição 3.4. *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, $u, v \in V$ e $\alpha, \beta \in K$. Então:*

a) $-0_V = 0_V$*;*

b) se $u + v = u + w$ *então* $v = w$*;*

c) se $u + u = u$ *então* $u = 0_V$*;*

d) $\alpha 0_V = 0_V$*;*

e) $0u = 0_V$*;*

f) $(-\alpha)\,u = \alpha\,(-u) = -(\alpha\,u)$*;*

g) se $\alpha\,u = \alpha v$ *então* $\alpha = 0$ *ou* $u = v$*;*

h) se $\alpha\,u = 0_V$ *então* $\alpha = 0$ *ou* $u = 0_V$*;*

i) se $\alpha\,u = \beta u$ *então* $\alpha = \beta$ *ou* $u = 0_V$*.*

Demonstração.

a) Atendendo à definição de simétrico de um elemento, $-0_V = 0_V$ se e só se $0_V + 0_V = 0_V$. Esta última igualdade é verdadeira porque 0_V é o elemento neutro da soma.

b) Da igualdade $u+v = u+w$ obtemos, somando $-u$ (à esquerda) a ambos os membros e usando a associatividade da operação $+$, $v = w$.

c) Caso particular de b), pois $u = u + 0_V$.

d) Como $\alpha\, 0_V + \alpha\, 0_V = \alpha\, (0_V + 0_V) = \alpha\, 0_V$ então a conclusão segue de c).

e) Como $0u = (0+0)u = 0u + 0u$ então a conclusão segue de c).

f) Mostrar que $(-\alpha)\, u = -(\alpha\, u)$ é equivalente a mostrar que $(-\alpha)\, u + (\alpha\, u) = 0_V$. Usando a distributividade da multiplicação escalar em relação à adição (vectorial) e a alínea anterior temos $((-\alpha)+\alpha)\, u = 0u = 0_V$. A outra igualdade tem demonstração análoga.

g) De $\alpha\, u = \alpha v$ obtemos, se $\alpha \neq 0$, $\frac{1}{\alpha}\,(\alpha u) = \frac{1}{\alpha}\,(\alpha v)$, ou seja $u = v$, usando os axiomas M3 e M4.

h) Caso particular da alínea anterior (porque $0_V = \alpha\, 0_V$).

i) De $\alpha\, u = \beta v$ obtemos $(\alpha - \beta)\, u = 0_V$. E a conclusão segue da alínea anterior.

□

3.2 Subespaços vectoriais

Definição 3.5. *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e W um subconjunto de V. W diz-se um subespaço vectorial de V e denotamos por $W \leq V$ se:*

a) $0_V \in W$;

b) $\forall u, v \in W,\ u + v \in W$;

c) $\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall u \in W \quad \alpha\, u \in W$.

Deste modo, se W for um subespaço vectorial de um espaço vectorial V, então W é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ relativamente às operações de adição e multiplicação escalar definidas em V, restritas a W.

Por vezes a condição a) aparece substituída pela condição mais fraca"$W \neq \emptyset$". Mas de facto, nada se altera pois, na presença da condição c), se existe $u \in W$ então $0\, u \in W$, ou seja, $0_V \in W$.

Vejamos alguns exemplos simples.

- V e $\{0_V\}$ são sempre subespaços vectoriais de V, ditos **subespaços triviais**.
- Em $\mathbb{R}$, os únicos subespaços vectoriais são $\{0\}$ e $\mathbb{R}$. Suponhamos que $W \leq \mathbb{R}$ e que existe $a \in W$ tal que $a \neq 0$. Vejamos que $W = \mathbb{R}$. Se $x \in \mathbb{R}$ então $x \in W$ porque é o produto de um escalar, $\frac{x}{a}$, por um elemento de W, a.
- Em $\mathbb{R}^2$ qualquer recta que passe na origem é um subespaço vectorial. Para ver isso basta notar que a recta é um conjunto da forma $\{(x,y) : ax + by = 0\}$, com $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Fica como exercício mostrar que os únicos subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^2$ são os triviais e as rectas que passam na origem.
- Como no ponto acima, em $\mathbb{R}^3$ qualquer recta ou plano que passe na origem é um subespaço vectorial. Estes subespaços e os triviais são de facto os únicos subespaços de $\mathbb{R}^3$.
- $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é um subespaço vectorial de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ que por sua vez é um subespaço vectorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- O conjunto das matrizes simétricas (ou das anti-simétricas) de ordem $n \times n$, o conjunto das matrizes triangulares superiores (ou das inferiores), o conjunto das matrizes diagonais são subespaços do conjunto das matrizes de ordem $n \times n$.
- Se $n, m \geq 2$, o conjunto das matrizes em escada de ordem $m \times n$ **não** é um subespaço do conjunto das matrizes de ordem $m \times n$.
- O conjunto das soluções de um sistema linear de m equações e n incógnitas é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ se e só se o sistema for homogéneo.

Nota 3.6. *Vejamos alguns exemplos em $\mathbb{R}^2$ que mostram que as três condições na definição de subespaço vectorial são necessárias.*

a) O conjunto vazio satisfaz b) e c) da definição de subespaço vectorial e não satisfaz a).

b) A união de duas rectas de $\mathbb{R}^2$ que passem na origem satisfaz a) e c) e não b). Ver Proposição 3.14 para uma generalização deste resultado.

c) $\mathbb{Z} \times \{0\}$ satisfaz a) e b) e não c).

A primeira nota acima vale em qualquer espaço vectorial, a terceira vale num espaço vectorial que não se reduza ao elemento neutro (no lugar de $\mathbb{Z} \times \{0\}$ consideramos o conjunto formado pelos múltiplos inteiros de um qualquer (mas fixo) vector não nulo). Quando à segunda nota ela é válida em qualquer espaço vectorial que tenha dois elementos não nulos que não sejam múltiplos um do outro.

A segundo e a terceira condição na definição de subespaço vectorial podem ser substituídas (sem alterar o significado) por:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall u, v \in W \quad \alpha\, u + \beta v \in W.$$

ou ainda

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K},\ \forall u_1, \cdots, u_n \in W \quad \alpha_1\, u_1 + \cdots + \alpha_n\, u_n \in W.$$

Pretendemos de seguida definir o que se entende pelo subespaço gerado por um conjunto. A ideia é a de que será o menor subespaço que contem esse conjunto. Começamos por um resultado que fundamentará a definição a seguir.

Proposição 3.7. *A intersecção de subespaços vectoriais de um espaço vectorial V é um subespaço vectorial de V.*

Demonstração. Seja $(W_i)_{i \in I}$ uma família de subespaços de V e $W = \cap_{i \in I} W_i$. Então $0_V \in W$ porque $0_V \in W_i$, para todo $i \in I$. Se $u, v \in W$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ então $u, v \in W_i$ para todo $i \in I$ e, como W_i é um subespaço vectorial de V, $u + v, \alpha\, u \in W_i$. Assim $u + v, \alpha\, u \in \cap_{i \in I} W_i = W$. □

Tem assim sentido a seguinte definição.

Definição 3.8. *Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $S \subseteq W$. Chama-se* **subespaço gerado** *por S à intersecção de todos os subespaços vectoriais de V que contêm S.*

É claro que o subespaço gerado por um conjunto S é o menor subespaço que contém S.

Notação. *Nas condições da definição anterior denotaremos por $\langle S \rangle$ o subespaço gerado por S. Se $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ escreveremos $\langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ em vez de $\langle \{u_1, \ldots, u_n\} \rangle$.*

Antes de darmos alguns exemplos, vamos ver mais uma definição.

Definição 3.9. *Sejam V um espaço vectorial e $S \subseteq V$. Diz-se que $u \in V$ é uma combinação linear de elementos de S se existirem $n \in \mathbb{N}$, $u_1, \ldots, u_n \in S$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$.*

Denotemos por $L(S)$ o conjunto formado por todas as combinações lineares de elementos de S. Note-se que $L(S) \subseteq \langle S \rangle$ pois $\langle S \rangle$ é um subespaço vectorial que contém S. É também claro que $S \subseteq L(S)$ e que $0_V \in L(S)$ se S for não vazio, uma vez que $0_V = 0u$ se $u \in S$.

Proposição 3.10. *Se V é um espaço vectorial e S é um subconjunto não vazio de V então $\langle S \rangle = L(S)$.*

Demonstração. Vimos acima que $S \subseteq L(S) \subseteq \langle S \rangle$. Se mostrarmos que $L(S)$ é um subespaço vectorial de V então concluímos que $\langle S \rangle \subseteq L(S)$, pois $\langle S \rangle$ é o menor subespaço vectorial de V que contém S.

De facto se $u, v \in L(S)$ e $\alpha \in K$ então existem $u_1, \ldots, u_n \in S$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ e $v_1, \ldots, v_k \in S$ e $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{K}$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ e $v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_k$. Assim $u + v, \alpha\, u \in L(S)$ porque $u + v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_k$ e $\alpha u = \alpha\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha\alpha_n u_n$. Finalmente, $0_V \in L(S)$ porque S é não vazio. □

Como consequência imediata desta proposição temos o seguinte resultado.

Proposição 3.11. *Sejam V um espaço vectorial e $S, T \subseteq V$. Então $\langle S \rangle \subseteq \langle T \rangle$ se e só se todo o elemento de S é combinação linear de elementos de T. Por conseguinte $\langle S \rangle = \langle T \rangle$ se e só se todo o elemento de S é combinação linear de elementos de T e todo o elemento de T é combinação linear de elementos de S.* □

Exemplos 3.12. Vejamos alguns exemplos.

a) $\langle \emptyset \rangle = \{0_V\}$.

b) Em $\mathbb{R}$, se $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ então $\langle a \rangle = \mathbb{R}$.

c) Em $\mathbb{R}^2$, $\langle (1,0) \rangle = \langle (-2,0) \rangle = \mathbb{R} \times \{0\}$.

d) Em $\mathbb{R}^2$, $\langle (1,0),(0,1) \rangle = \langle (1,1),(1,0) \rangle = \mathbb{R}^2$.

e) Em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\langle 1, x, x^2, \ldots, x^n \rangle = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

f) Em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\langle \{x^k : k \in \mathbb{N}_0\} \rangle = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

g) Em $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$, $\langle \{A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) :$ A tem todos as entradas nulas excepto uma que é igual a $1\} \rangle$ é igual a $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$.

h) Se T é obtido de S substituindo um elemento por um seu múltiplo não nulo então $\langle S \rangle = \langle T \rangle$.

i) Se T é obtido de S substituindo um elemento por esse elemento somado a uma combinação linear de outros elementos de S então $\langle S \rangle = \langle T \rangle$.

Definição 3.13. *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e U um seu subespaço vectorial. Um subconjunto S de U diz-se um* **conjunto gerador** *de U, se $\langle S \rangle = U$. Diz-se que U é* **finitamente gerado** *se admitir um conjunto gerador que seja finito.*

Note-se que $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ e $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ são finitamente gerados. Por outro lado $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado uma vez que um subconjunto gerado por um conjunto finito de polinómios está contido em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ em que n é o maior de entre os graus dos polinómios desse conjunto.

Contrariamente ao que acontece com a intersecção, a união de subespaços nem sempre é um subespaço como vimos na Nota 3.6. De facto a união de dois subespaços é um subespaço apenas em casos triviais.

Proposição 3.14. *A união de dois subespaços de um espaço vectorial V é um subespaço se e só se um deles contiver o outro.*

Demonstração. Sejam V_1 e V_2 dois subespaços de V tais que $V_1 \cup V_2$ é um subespaço de V. Suponhamos que $V_1 \not\subseteq V_2$ e que $V_2 \not\subseteq V_1$ e sejam $u \in V_1 \setminus V_2$ e $v \in V_2 \setminus V_1$. Como $V_1 \cup V_2$ é um subespaço então $u + v \in V_1 \cup V_2$ e, portanto $u + v \in V_1$ ou $u + v \in V_2$. Se $u + v \in V_1$ então $v = \underbrace{(u+v)}_{\in V_1} - \underbrace{u}_{\in V_1} \in V_1$, o que é absurdo. Se $u + v \in V_2$ então $u = \underbrace{(u+v)}_{\in V_2} - \underbrace{v}_{\in V_2} \in V_2$, o que é absurdo. □

Definição 3.15. *Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e U, W dois subespaços de V. Chama-se* **soma** *de U e W e denota-se por $U + W$ a*

$$U + W = \{u + w : u \in U,\ w \in W\}.$$

A soma diz-se **directa** *e denota-se por $U \oplus W$ se $U \cap W = \{0_V\}$.*
Se $V = U \oplus W$ dizemos que V é soma directa de U e W e que W é suplementar de U relativamente a V.

Note-se que, nas condições anteriores temos $U + W = W + U$.

Proposição 3.16. *Nas condições da definição anterior, $U + W = \langle U \cup W \rangle$.*

Demonstração. É claro que $U \cup W \subseteq U + W \subseteq \langle U \cup W \rangle$. Resta então ver que $U + W$ é um subespaço de V. Se $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ então $(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = \underbrace{(u_1 + u_2)}_{\in U} + \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\in W} \in U + W$, $\alpha(u_1 + w_1) = \underbrace{(\alpha\, u_1)}_{\in U} + \underbrace{(\alpha\, w_1)}_{\in W} \in U + W$. É claro que $0_V \in U + W$ pois $0_V = \underbrace{0_V}_{\in U} + \underbrace{0_V}_{\in W}$. □

Proposição 3.17. *Se V é um espaço vectorial e V_1, V_2, V_3 são subespaços vectoriais de V então $V_3 = V_1 \oplus V_2$ se e só se todo o elemento de V_3 se escreve de maneira única como soma de um elemento de V_1 com um elemento de V_2.*

Demonstração. Suponhamos que $V_3 = V_1 \oplus V_2$ e que $v_1 + v_2 = w_1 + w_2$, com $v_1, w_1 \in V_1$ e $v_2, w_2 \in V_2$. Então $\underbrace{v_1 - w_1}_{\in V_1} = \underbrace{w_2 - v_2}_{\in V_2}$. Como $V_1 \cap V_2 = 0_V$ então $v_1 - w_1 = 0_V = w_2 - v_2$ e, portanto $v_1 = w_1$ e $v_2 = w_2$.

Suponhamos agora que V_3 satisfaz a condição referida e seja $u \in V_1 \cap V_2$. Então $V_3 \ni u = \underbrace{u}_{\in V_1} + \underbrace{0_V}_{\in V_2} = \underbrace{0_V}_{\in V_1} + \underbrace{u}_{\in V_2}$, e a conclusão segue. □

Vejamos alguns exemplos:

- $\mathbb{R}^2$ é a soma directa de dois quaisquer subespaços não triviais de $\mathbb{R}^2$ que sejam diferentes (no fundo duas rectas diferentes que passam na origem). Para mostrar isso usamos um resultado referido na página 25 que diz quais são os subespaços de $\mathbb{R}^2$;
- $\mathbb{R}^3$ é a soma directa de uma recta que passe na origem com um plano que passe na origem e que não contenha a recta. A justificação é análogo à do exemplo anterior e usa um resultado referido na página 25 que diz quais são os subespaços de $\mathbb{R}^3$;
- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ é a soma directa de $U = \{a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n : \; n \in \mathbb{N}, \, a_i = 0, \text{ se } i \text{ é par}\}$ com $V = \{a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n : \; n \in \mathbb{N}, \, a_i = 0, \text{ se } i \text{ é ímpar}\}$;
- $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ não é a soma directa do espaço formado pelas matrizes triangulares superiores com o espaço formado pelas matrizes triangulares inferiores pois a intersecção destes espaços é formado pelas matrizes diagonais;
- $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ é a soma directa do espaço formado pelas matrizes simétricas com o espaço formado pelas matrizes anti-simétricas (ver Exercício 1.27);
- $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ é soma directa de $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \; f \text{ é par}\}$ com $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \; f \text{ é ímpar}\}$.

3.3 Dependência linear e bases

Uma lista finita de elementos de um conjunto X é um sucessão $(x_1, \ldots, x_n)$, com $x_1, \ldots, x_n$. A diferença entre lista e conjunto é a seguinte: duas listas $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_m)$ são iguais se e só se $n = m$ e $x_i = y_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$; dois conjuntos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e $\{y_1, \ldots, y_m\}$ são iguais se e só se para qualquer $i = 1, \ldots, n$ existe $j = 1, \ldots, m$ tal que $x_i = y_j$ e para qualquer $r = 1, \ldots, m$ existe $s = 1, \ldots, n$ tal que $y_r = y_s$. Por exemplo: $(1,2,3) \neq (3,2,1)$ mas $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$, $(1,2,3,1) \neq (1,2,3)$ mas $\{1,2,3,1\} = \{1,2,3\}$.

Vamos agora definir o que se entende por base de um espaço vectorial. A ideia é que seja uma lista cujo conjunto associado seja gerador do espaço e que não admita nenhum seu subconjunto próprio como conjunto gerador.

Definição 3.18. *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $A \subseteq V$. Diz-se que A é* **linearmente independente** *ou* **livre** *se a única maneira de escrever o vector nulo como combinação linear dos elementos de A é considerando todos os coeficientes nulos, isto é,*

$$\forall n \in \mathbb{N} \; \forall u_1, \ldots, u_n \in A \; \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} : [\alpha_1 u_1 + \cdots \alpha_n u_n = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = \cdots = \alpha_n] \, .$$

A diz-se **linearmente dependente** *se não for linearmente independente.*

Por exemplo:

- se $0_V \in A$ então A é linearmente dependente;
- $\{(1,0),(0,1)\}$ é livre (em $\mathbb{R}^2$);
- o conjunto formado pelas matrizes de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ com todas as entradas nulas excepto uma que é igual a 1 é livre em $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$;
- o conjunto $\{\operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$ é livre em $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$;
- se A é livre e B é uma sub-família de A então B também é livre.

A justificação para o nome (linearmente dependente) está no seguinte resultado.

Proposição 3.19. *Seja A um subconjunto de um espaço vectorial V. As seguintes condições são equivalentes:*

a) *A é linearmente independente;*

b) *nenhum elemento de A se escreve como combinação linear dos outros elementos de A;*

c) *todo o elemento de $\langle A\rangle$ escreve-se de modo único como uma combinação linear de elementos de A.*

Em particular, se A tiver dois elementos então A é linearmente dependente se e só se um dos elementos é múltiplo do outro.

Demonstração.
b) $\Rightarrow$ *a)* Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ e $v_1, \ldots, v_n \in A$ tais que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V$. Se existisse i tal que $\alpha_i \neq 0$ então $v_i = -\sum_{j\neq i} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} v_j$, contrariando b).

a) $\Rightarrow$ *c)* Se u se se escreve como combinação linear de elementos de A de duas maneiras diferentes então os vectores de A envolvidos nessas duas combinações lineares são em número finito. Suponhamos que esse vectores são $v_1, \ldots, v_n$ e sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tais que $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ e $u = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$. Subtraindo as igualdades obtemos $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0_V$ e, como A é linearmente independente, $\alpha_i = \beta_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$.
c) $\Rightarrow$ *b)* Suponhamos que existe $u \in A$ e $u_1, \ldots, u_n \in A$ tais que $u \notin \{u_1, \ldots, u_n\}$ e u é combinação linear de $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Então existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$. Deste modo $0_V = u - \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$, o que contradiz c), uma vez que $0_v = 0u + 0u_1 + \cdots + 0u_n$. □

Em $\mathbb{K}^n$, se quisermos ver se um dado conjunto A com k elementos é linearmente independente acabamos por ser levados a estudar um sistema linear homogéneo com n equações e k incógnitas. Em particular, se $k > n$ então o sistema tem mais do que uma solução. Concluímos assim que qualquer subconjunto de $\mathbb{K}^n$ com mais do que n elementos é linearmente dependente.

Definição 3.20. *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Uma lista $\mathcal{B}$ de elementos de V diz-se uma* **base** *de V se os seus elementos formarem um conjunto que é simultaneamente um gerador de V e linearmente independente.*
Por convenção, costuma-se considerar que o conjunto vazio é uma base de $\{0_V\}$.
Diz-se que V tem dimensão finita se admitir uma base com um número finito de elementos.

Por exemplo, em $\mathbb{R}^n$, $\big(e_1, \ldots, e_n\big)$, em que e_i é o vector de $\mathbb{R}^n$ que tem 1 na i-ésima coordenada e 0 nas outras, é uma base de $\mathbb{R}^n$, que se diz **base canónica**. Note-se que, se $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ então $u = \sum_{i=1}^n a_i e_i$.

Exemplos 3.21. *Vejamos alguns exemplos.*

a) $\big((1,0),(1,1)\big)$ *é uma base de $\mathbb{R}^2$. É claro que a lista é linearmente independente pois se $a(1,0)+b(1,1) = (0,0)$ então $a+b = 0$ e $b = 0$ de onde obtemos $a = b = 0$. Por outro lado, dado $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ existem $x, y \in \mathbb{R}^2$ tais que $x(1,0) + y(1,1) = (a,b)$, basta considerar $x = a - b$ e $y = b$.*

b) *Se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ então $\big((a,b),(c,d)\big)$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ se e só se $ad - bc \neq 0$ (ver Exercício 2.6).*

c) *Se $u, v \in \mathbb{R}^2$ então $\big(u, v\big)$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ se e só se nenhum dos dois vectores é múltiplo do outro.*

d) *Se $n, m \in \mathbb{N}$ é imediato verificar que $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ admite uma base com $n \times m$ elementos. Basta considerar uma lista formada pelas matrizes que têm uma entrada igual a 1 e todas as outras nulas.*

e) *O espaço vectorial formado pelas matrizes simétricas de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admite uma base com $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos. Basta considerar o conjunto formado pelas matrizes $A_{i,j}$, com $i \geq j$ em que: as entradas de $A_{i,j}$ são todas nulas com a excepção das entradas da linha i e coluna j e da linha j e coluna i que são iguais a 1.*

f) *O espaço vectorial formado pelas matrizes anti-simétricas de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admite uma base com $\frac{n(n-1)}{2}$ elementos. Basta considerar o conjunto formado pelas matrizes $A_{i,j}$, com $i > j$ em que: as entradas de $A_{i,j}$ são todas nulas com a excepção das entradas da linha i e coluna j e da linha j e coluna i que são iguais a 1 e -1 respectivamente.*

g) *O espaço vectorial formado pelos polinómios reais numa variável admite uma base numerável. Basta pensar no conjunto $\{x^k : k \in \mathbb{N}_0\}$.*

O seguinte resultado é consequência imediata das definições.

Lema 3.22. *Seja V um espaço vectorial e $\mathcal{B}$ uma base de V. Então:*

a) Se $\mathcal{B}^*$ é uma sublista própria de $\mathcal{B}$ então $\mathcal{B}^*$ não forma um conjunto gerador de V;

b) se $\mathcal{B}$ é uma sublista própria de uma lista $\mathcal{B}'$ então $\mathcal{B}'$ não forma um conjunto livre. $\square$

Demonstração. Seja u um elemento de $\mathcal{B}$ que não pertence a $\mathcal{B}^*$. Como $\mathcal{B}$ é linearmente independente, a Proposição 3.19 garante-nos que u não é combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}^*$.

Seja u um elemento de $\mathcal{B}'$ que não pertence a $\mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ gera V, u é combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$. A Proposição 3.19 garante-nos então que $\mathcal{B}'$ não é livre. $\square$

Temos agora três questões. Consideremos um espaço vectorial V.

- Dado um conjunto A de geradores de V como encontrar um seu subconjunto que forme uma base?

  Resposta incompleta: Se A for um conjunto linearmente independente então A define uma base. Caso contrário, existe $u \in A$ que é combinação linear de $A \setminus \{u\}$. Nesse caso $\langle A \setminus \{u\} \rangle = \langle A \rangle = V$. De seguida repetimos o processo com $A \setminus \{u\}$ no lugar de A. Se o conjunto A for finito então ao fim de um número finito de passos chegamos a um subconjunto B de A tal que B é linearmente independente e tal que $\langle B \rangle = V$.

- Dado um conjunto A linearmente independente como encontrar uma base de V que contenha A?

  Resposta incompleta: Se A não gerar V então existe $u \in V \setminus \langle A \rangle$. Deste modo $A \cup \{u\}$ é linearmente independente e $\langle A \cup \{u\} \rangle$ é estritamente maior do que $\langle A \rangle$. A ideia agora é a repetir o processo. O problema é garantir que o processo termina! Veremos isto nem sempre acontece, mas acontece se V for finitamente.

- Se tivermos duas bases como mostrar que elas têm o mesmo cardinal? Se isso for possível então podemos definir o que se entende por dimensão de um espaço vectorial.

Proposição 3.23. *Sejam V um espaço vectorial e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Se $u \in V$ é tal que existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ e $\alpha_k \neq 0$ então podemos substituir v_k por u no conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ que obtemos um conjunto que gera o mesmo espaço, isto é, $\langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle = \langle \{u, v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_k\} \rangle$.*

Além disso se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ for um conjunto linearmente independente então $\{u, v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_k\}$ também é linearmente independente.

Demonstração. Para a primeira parte basta ver que v_k é combinação linear dos elementos do novo conjunto. E isto é verdade porque $v_k = \frac{1}{\alpha_k} u - \sum_{i \neq k} \frac{\alpha_i}{\alpha_k} v_i$.

Suponhamos agora que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente. Para simplificar a escrita vamos supôr que $k = 1$. Sejam $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tais que $\beta_1 u + \sum_{i=2}^n \beta_i v_i = 0_V$ e vejamos que $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$. Da igualdade $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ obtemos $\beta_1 (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) + \sum_{i=2}^n \beta_i v_i = 0_V$ ou seja

$$\beta_1 \alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^n (\beta_1 \alpha_i + \beta_i) v_i = 0_V.$$

Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto linearmente independente então $\beta_1 \alpha_1 = 0 = \beta_1 \alpha_2 + \beta_2 = \cdots = \beta_1 \alpha_n + \beta_n = 0$. Da primeira igualdade tiramos $\beta_1 = 0$, porque $\alpha_1 \neq 0$ e, portanto, $\beta_2 = \cdots = \beta_n$. $\square$

Vejamos agora (parte de) a resposta às três questões referidas acima. O Teorema de Steinitz, a seguir, responde às duas primeiras questões, sendo que a demonstração da primeira já foi feita de um modo informal. A terceira questão será analisada no corolário seguinte.

Teorema 3.24 (Steinitz)**.** *Sejam V um espaço vectorial que não se reduz ao elemento neutro, $n, m \in \mathbb{N}$, A um conjunto gerador de V com n elementos e $\{x_1, \ldots, x_m\}$ um subconjunto de V linearmente independente. Então:*

a) existe $B \subseteq A$ tal que B gera V e é um conjunto linearmente independente (isto é, define uma base);

b) $m \leq n$ e a lista $(x_1, \ldots, x_m)$ pode ser completada com $n - m$ elementos de A de modo a obtermos um conjunto gerador de V.

Além disso, se A for um conjunto linearmente independente então a lista que se obtém em b) é uma base de V.

Demonstração. a) Formalmente a demonstração pode ser feita por indução sobre o cardinal de A. Se o cardinal de A for igual a 1 então A é livre, pois o seu único elemento não é o vector nulo. Seja $k \in \mathbb{N}$, com $k \geq 2$ e suponhamos que o resultado é válido para conjuntos geradores de V com k elementos e vejamos que o resultado também é válido para conjuntos com $k+1$ elementos. Seja então A um conjunto gerador de V com $k+1$ elementos. Se A for livre tomamos $B = A$. Se A não for livre então existe $u \in A$ que se escreve como combinação linear dos elementos de $A \setminus \{u\}$. Deste modo $\langle A \setminus \{u\} \rangle = \langle A \rangle = V$. Como $A \setminus \{u\}$ tem k elementos e gera V podemos usar a hipótese (dita de indução) e concluir que existe $B \subseteq A \setminus \{u\}$ que gera V e é um conjunto livre. E a conclusão segue porque $B \subseteq A$.

b) Como A é um conjunto gerador de V e x_1 não é o vector nulo então x_1 é uma combinação linear **não nula** dos elementos de A. Neste caso, a proposição anterior garante-nos que podemos substituir um dos elementos de A por x_1, continuando com um conjunto gerador de V. Assim a lista (x_1) pode ser completada com $n-1$ elementos de A de modo a obtermos um conjunto gerador de V.

Seja l o maior inteiro entre 1 e m tal que a lista $(x_1, \ldots, x_l)$ pode ser completada com $n-l$ elementos de A de modo a obtermos um conjunto gerador de V. Vejamos que $l = m$.

Suponhamos que $l < m$. Por definição de l existem $v_{l+1}, \ldots, v_n \in A$ tais que $B = \{x_1, \ldots, x_l, v_{l+1}, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V. Em particular existem escalares $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tais que $x_{l+1} = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_l x_l + \beta_{l+1} v_{l+1} + \cdots + \beta_n v_n$. Note-se que existe $k \geq l+1$ tal que $\beta_k \neq 0$ pois x_{l+1} não é combinação linear de $\{x_1, \ldots, x_l\}$. Usando novamente a proposição anterior podemos substituir em B, v_k por x_{l+1}, obtendo um conjunto gerador de V que contem $\{x_1, \ldots, x_{l+1}\}$ e $n-(l+1)$ elementos de A, contrariando a definição de l. Mostramos assim que $l = m$.

Para a última observação, basta usar a segunda parte da proposição anterior. $\square$

Corolário 3.25. *Se V é um espaço vectorial finitamente gerado então V admite uma base finita. Além disso, duas quaisquer bases de V têm o mesmo número de elementos.*

Demonstração. Seja A um conjunto gerador de V. Se $A = \{0_V\}$ então não há nada a provar. Se $A \neq \{0_V\}$ basta aplicar a alínea a) do Teorema de Steinitz.

Vejamos agora que duas quaisquer bases de V têm o mesmo número de elementos. Sejam $(v_1, \ldots, v_n)$ e $(u_1, \ldots, u_m)$ duas bases de V. Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V e $\{u_1, \ldots, u_m\}$ é linearmente independente então, pelo Teorema de Steinitz, $m \leq n$. Inversamente, como $\{u_1, \ldots, u_m\}$ é um conjunto gerador de V e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente então, pelo Teorema de Steinitz, $n \leq m$. $\square$

O resultado acima enunciado é também válido para espaços vectoriais que não são finitamente gerados, mas a sua demonstração usa resultados (Lema de Zorn) que estão fora do âmbito da disciplina.

O resultado enunciado neste último corolário dá coerência à seguinte definição.

Definição 3.26. *Se V é um espaço vectorial finitamente gerado chamamos* **dimensão** *de V e denotamos por* $\dim V$ *ao cardinal de uma base de V.*

Já sabemos que $\mathbb{R}^n$ tem dimensão n, pois $(e_1, \ldots, e_n)$ é uma base de $\mathbb{R}^n$. Um exemplo muito simples de um espaço vectorial sem dimensão finita é $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Isto acontece porque, se B é um subconjunto finito de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ e n é maior dos graus dos elementos (polinómios) que pertencem a B então $\langle B \rangle \subseteq \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Corolário 3.27. *Se V é um espaço vectorial de dimensão finita então todo o seu subconjunto linearmente independente pode ser prolongado a um conjunto que é simultaneamente linearmente independente e que gera V (isto é, define uma base de V).*

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 3.24 a este conjunto considerando A uma qualquer base de V. $\square$

Podemos agora juntar estes resultados para concluir o seguinte.

Teorema 3.28. *Sejam V um espaço vectorial de dimensão n ($n \in \mathbb{N}$) e $\mathcal{B}$ uma lista com m ($m \in \mathbb{N}$) elementos. Então:*

a) se $\mathcal{B}$ gera V então $m \geq n$;

b) se $\mathcal{B}$ é linearmente independente então $n \geq m$;

c) se $n = m$ e $\mathcal{B}$ gera V então $\mathcal{B}$ é base de V;

d) se $n = m$ e $\mathcal{B}$ é linearmente independente então $\mathcal{B}$ é base de V.

Em particular se $\mathcal{B}$ tem n elementos então $\mathcal{B}$ é linearmente independente se e só se gera V (se e só se é base de V).

Demonstração. a) e c) Se $\mathcal{B}$ é um conjunto gerador então sabemos que contém uma base de V que, por hipótese tem n elementos.

b) e d) Se $\mathcal{B}$ for linearmente independente então, pelo Teorema de Steinitz, pode ser prolongada a uma base, que tem de ter n elementos. $\square$

Exemplo 3.29. Seja $V = \mathbb{R}^4$ e $A = \{(1,1,1,1),(1,2,1,2)\}$. Como encontrar uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os elementos de A? Começamos por verificar que A é um conjunto livre. De seguida temos algumas opções, com mais ou menos cálculos.

- Escolhemos, $\boxed{\text{mais ou menos}}$ à sorte dois elementos de $\mathbb{R}^4$ (podendo ser um de cada vez ou os dois ao mesmo tempo) e vamos ver se os 4 elementos formam uma base. Como vimos atrás, basta-nos fazer essa escolha dentro de uma base que já conheçamos, por exemplo a base canónica (para evitar contas). Temos $\binom{4}{2}$ maneiras de o fazer. Devido ao Teorema 3.28 um subconjunto de $\mathbb{R}^4$ com 4 elementos forma uma base se e só se for livre.

  Vou fazer uma escolha *azarada* mas que mesmo assim pode ser aproveitada. Vamos ver se o conjunto $B = \{(1,1,1,1),(1,2,1,2),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$ é livre. Somos levados ao sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 0\\ x+2y+z &=& 0\\ x+y &=& 0\\ x+2y+w &=& 0. \end{array}\right.$$

  que é sucessivamente equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 0\\ x+2y+z &=& 0\\ x+2y+w &=& 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+y \qquad\quad &=& 0\\ y+z \qquad &=& 0\\ y \qquad +w &=& 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+y \qquad\quad &=& 0\\ y+z \qquad &=& 0\\ z-w &=& 0 \end{array}\right.$$

  Daqui concluímos que o conjunto B é linearmente dependente, mas que $\{(1,1,1,1),(1,2,1,2),(0,1,0,0)\}$ (e também $\{(1,1,1,1),(1,2,1,2),(0,0,0,1)\}$) é livre. Ou seja, a tentativa foi falhada mas podemos aproveitar um dos dois vectores que escolhemos e de seguida resta-nos acrescentar um. Temos apenas mais duas escolhas, $(1,0,0,0)$ ou $(0,0,1,0)$. De certeza (por causa dos resultados provados) que

$$\{(1,1,1,1),(1,2,1,2),(0,1,0,0),(1,0,0,0)\} \text{ ou } \{(1,1,1,1),(1,2,1,2),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$$

  é uma base de $\mathbb{R}^4$ (basta ver que é livre). Resta agora fazer a verificação!

- Se seguirmos o processo referido acima (juntar os elementos da base canónica - ou outra qualquer) consideramos o conjunto $\{(1,1,1,1),(1,2,1,2),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ e chegamos sucessivamente aos sistemas

$$x(1,1,1,1)+y(1,2,1,2)+z(1,0,0,0)+t(0,1,0,0)+r(0,0,1,0)+s(0,0,0,1)=(0,0,0,0)$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0\\ x+2y+t &=& 0\\ x+y+r &=& 0\\ x+2y+s &=& 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z \qquad\qquad &=& 0\\ y-z+t \qquad\quad &=& 0\\ z \quad -r \quad &=& 0\\ y-z \qquad\quad +s &=& 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z \qquad\qquad &=& 0\\ y-z+t \qquad\quad &=& 0\\ z \quad -r \quad &=& 0\\ t \quad -s &=& 0 \end{array}\right.$$

  Deste modo $\big((1,1,1,1),(1,2,1,2),(1,0,0,0),(0,1,0,0)\big)$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ que contem os elementos de A (escolhemos os vectores associados à variáveis que "têm pivôs" no sistema).

  Fica ainda provado que $\mathbb{R}^4$ é soma directa do espaço gerado por $\{(1,1,1,1),(1,2,1,2)\}$ pelo espaço gerado por $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$.

Corolário 3.30. *Seja V um espaço vectorial de dimensão finita $n \in \mathbb{N}$ e U um subespaço vectorial de V. Então:*

a) U tem dimensão finita e $\dim U \leq \dim V$*;*

b) se $\dim U = \dim V$ *então $U = V$;*

c) existe um subespaço W tal que $V = U \oplus W$. Por consequência $\dim V = \dim U + \dim W$.

Demonstração. a) Se U tivesse dimensão maior do que n então existiria um subconjunto de U com mais do que n elementos e que era linearmente independente. Como esse subconjunto também está contido em V, chegamos a uma contradição atendendo ao teorema anterior.

b) Seja $\mathcal{B}$ uma base de U. Se $\mathcal{B}$ não for base de V então pode ser completada de modo a obter uma base de V com mais elementos do que $\mathcal{B}$. Mas isto contradiz a igualdade $\dim U = \dim V$.

c) Seja $(v_1, \ldots, v_k)$ uma base de U e $w_1, \ldots, w_{n-k} \in V$ tais que $(v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_{n-k})$ é uma base de V. Consideremos $W = \langle w_1, \ldots, w_{n-k} \rangle$ e mostremos que $V = U \oplus W$. Se $v \in V$ então, por definição de V, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_{n-k} \in \mathbb{K}$ tais que $v = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k}_{\in U} + \underbrace{\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_{n-k} u_{n-k}}_{\in W}$. Deste modo $v \in U + V$.

Por outro lado, se $v \in U \cap W$ então existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_{n-k} \in \mathbb{K}$ tais que $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_{n-k} w_{n-k}$ ou seja $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + 0\, w_1 + \cdots + 0\, w_{n-k} = 0\, v_1 + \cdots + 0\, v_k + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_{n-k} w_{n-k}$. Daqui obtemos $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_{n-k} = 0$, pois caso contrário teríamos um elemento de V escrito de duas maneiras diferentes como combinação linear de elementos de uma base de V. Concluímos assim que $v = 0$. $\square$

O seguinte resultado relaciona as dimensões entre dois espaços vectoriais e a sua soma. Não é de admirar que a resposta dependa da intersecção desses espaços.

O resultado é semelhante ao princípio da inclusão-exclusão que na sua forma mais simples diz que se A e B forem conjuntos finitos então $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (denotamos o cardinal de um conjunto X por $|X|$). Este princípio pode ser generalizado para calcular o cardinal de uma união finita de conjuntos finitos. Por exemplo $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$.

Teorema 3.31 (Teorema das dimensões)**.** *Sejam V um espaço vectorial e U e W dois subespaços vectoriais de V de dimensão finita. Então*

$$\dim (U + W) = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W).$$

Demonstração. Sejam $k = \dim U$, $p = \dim W$ e $m = \dim (U \cap W)$. Vamos supôr que $m > 0$ uma vez que o caso em que $m = 0$ já foi tratado na alínea c) do corolário anterior.

Seja $(x_1, \ldots, x_m)$ uma base de $U \cap W$. Usando o Teorema 3.24 existem $u_1, \ldots, u_{k-m} \in U$ e $w_1, \ldots, w_{p-m} \in W$ tais que $(x_1, \ldots, x_m, u_1, \ldots, u_{k-m})$ é uma base de U e $(x_1, \ldots, x_m, w_1, \ldots, w_{p-m})$ é uma base de W. Deste modo

$$U + W = \langle x_1, \ldots, x_m, u_1, \ldots, u_{k-m}, x_1, \ldots, x_m, w_1, \ldots, w_{p-m} \rangle = \langle x_1, \ldots, x_m, u_1, \ldots, u_{k-m}, w_1, \ldots, w_{p-m} \rangle.$$

Para concluir resta mostrar que $\{x_1, \ldots, x_m, u_1, \ldots, u_{k-m}, w_1, \ldots, w_{p-m}\}$, que é um conjunto com $m + (k-m) + (p-m)$ elementos, é linearmente independente.

Se $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{k-m} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{p-m} \beta_i w_i = 0_V$ então

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{p-m} \beta_i w_i}_{\in W} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{k-m} \alpha_i u_i}_{\in U}$$

e portanto $\sum_{i=1}^{k-m} \alpha_i u_i \in U \cap W$. Deste modo existem $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{K}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{k-m} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i.$$

Como $\{x_1, \ldots, x_m, u_1, \ldots, u_{k-m}\}$ é livre então $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-m} = \mu_1 = \cdots = \mu_m = 0$. Substituindo acima obtemos $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{p-m} \beta_i w_i = 0_V$, e a conclusão segue pois $(x_1, \ldots, x_m, w_1, \ldots, w_{p-m})$ é uma base de W. $\square$

Exemplos 3.32. Suponhamos que U e V são dois subespaços de $\mathbb{R}^4$ não contidos um no outro. Deste modo $U + V$ contém estritamente U e V e, portanto $\dim (U + V) > \dim U, \dim V$. Temos as seguintes possibilidades:

- se $\dim U = 3$ ou $\dim V = 3$ então $U + V = \mathbb{R}^4$;
- se $\dim U = \dim V = 2$ então $U + V = \mathbb{R}^4$, se $U \cap V = \{0_V\}$ ou $\dim (U + V) = 3$, caso contrário;
- se $\dim U = 2$ e $\dim V = 1$ ou $\dim V = 2$ e $\dim U = 1$, então $\dim (U + V) = 3$;
- se $\dim U = \dim V = 1$ então $\dim (U + V) = 2$.

Apenas a título de curiosidade, se quiséssemos generalizar o teorema das dimensões indo de encontro ao espírito do teorema da inclusão-exclusão teríamos qualquer coisa do género

$$\dim(U+V+W) = \dim U + \dim V + \dim V - \Big[\dim(U\cap V) + \dim(U\cap W) + \dim(V\cap W)\Big] + \dim(U\cap V\cap W),$$

que facilmente vemos que é falso. Basta considerar três subespaços de $\mathbb{R}^2$ todos diferentes e com dimensão um.

3.4 Característica de uma matriz

Definição 3.33. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se:*

- **característica de linha** *de A, e representa-se por $c_l(A)$, à dimensão do subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas m linhas de A.*
- **característica de coluna** *de A, e representa-se por $c_c(A)$, à dimensão do subespaço vectorial de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas n colunas de A.*

Por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ então:

- $c_l(A) = 2$ porque $\big\langle (1,1,1,1), (0,1,2,1), (1,2,3,2) \big\rangle = \big\langle (1,1,1,1), (0,1,2,1) \big\rangle$ (porque o terceiro vector é soma dos dois primeiros) e $\big\langle (1,1,1,1), (0,1,2,1) \big\rangle$ tem dimensão dois porque nenhum dos vectores é múltiplo do outro.
- $c_c(A) = 2$ porque $\big\langle (1,0,1), (1,1,2), (1,2,3), (1,1,2) \big\rangle = \big\langle (1,0,1), (1,1,2), (1,2,3) \big\rangle = \big\langle (1,1,2), (1,2,3) \big\rangle$ (porque o primeiro vector é o dobro do segundo menos o terceiro) e $\big\langle (1,1,2), (1,2,3) \big\rangle$ tem dimensão dois porque nenhum dos vectores é múltiplo do outro.

Nas condições da definição acima, é claro que $c_l(A) \le n$ e $c_l(A) \le m$, porque se trata da dimensão de um subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado por m vectores. De modo análogo se vê que $c_c(A) \le m$ e $c_c(A) \le n$.

Atendendo às definições temos ainda $c_l(A^T) = c_c(A)$ e $c_c(A^T) = c_l(A)$.

É também claro que, se fizermos operações elementares sobre linhas em A então a característica de linha da matriz obtida é igual à característica de linha de A.

Nota 3.34. *Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ então os vectores coluna são os vectores Ae_i, em que $e_1, \ldots, e_n$ são os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^n$. Em particular, se $u \in \mathbb{R}^n$ então Au é combinação linear dos vectores coluna de A, ou seja $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ é um conjunto de geradores de $\{Au : u \in \mathbb{R}^n\}$.*

De modo dual, os vectores linha são os vectores e_jA, em que $e_1, \ldots, e_m$ são os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^m$. Em particular, se $u \in \mathbb{R}^m$ então uA é combinação linear dos vectores linha de A, ou seja, $\{e_1A, \ldots, e_mA\}$ é um conjunto de geradores de $\{uA : u \in \mathbb{R}^m\}$.

Proposição 3.35. *Se $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ então $c_l(A)$ é igual ao número de pivôs de qualquer matriz em escada que seja obtida de A usando operações elementares.*

Demonstração. Seja B uma matriz em escada nas condições referidas. Então o número de linhas não nulas de B é igual ao número de pivôs de B. Pelo que foi dito acima $c_l(A) = c_l(B)$ e portanto resta mostrar que as linhas não nulas de B formam um conjunto linearmente independente.

Sejam $u_1, \ldots, u_r$ os vectores linha não nulos de B e suponhamos que o pivô de u_i, aparece na posição j_i. Deste modo $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ e $u_i = (0, \ldots, p_{j_i}, - - -)$, para algum $p_{j_i} \neq 0$.

Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tais que $\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \cdots + \alpha_ru_r = (0, \ldots, 0)$ e mostremos que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$.

Da igualdade $\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \cdots + \alpha_ru_r = (0, \ldots, 0)$ temos, em particular,

$$\begin{cases} \alpha_1 p_{j_1} & = & 0 & \text{igualando as } j_1\text{-ésimas coordenadas} \\ \alpha_1\square + \alpha_2 p_{j_2} & = & 0 & \text{igualando as } j_2\text{-ésimas coordenadas} \\ \alpha_1\square + \alpha_2\square + \alpha_3 p_{j_3} & = & 0 & \text{igualando as } j_3\text{-ésimas coordenadas} \\ & \vdots & & \\ \alpha_1\square + \alpha_2\square + \alpha_3\square + \cdots + \alpha_r p_{j_r} & = & 0 & \text{igualando as } j_r\text{-ésimas coordenadas.} \end{cases}$$

Da primeira igualdade tiramos $\alpha_1 = 0$, porque $p_{j_1} \neq 0$. Substituindo α_1 por 0 nas outras igualdades obtemos $\alpha_2 = 0$. Repetindo o processo concluímos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$. $\square$

O seguinte é o resultado principal desta subsecção.

Teorema 3.36. *Se $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ então $c_l(A) = c_c(A)$.*

Demonstração. Seja r a característica linha de A e $u_1, \ldots, u_m$ os vectores linha de A. Apenas para simplificar a escrita vamos supor que as primeiras r linhas de A, $u_1, \ldots, u_r$, são linearmente independentes.

Vejamos que $Au_1, \ldots, Au_r$ formam um conjunto linearmente independente ou seja, $\langle Au_1, \ldots, Au_r\rangle$ tem dimensão r. Sejam $c_1 \ldots, c_r \in \mathbb{K}$ tais que $c_1Au_1 + \cdots + c_rAu_r = (0, \ldots, 0)$. Denotemos $c_1u_1 + \cdots + c_ru_r$ por v. Note-se que, por definição, a componente j de Au_i é igual a $u_j \cdot u_i$ e daqui se conclui que a componente j de Av é igual a $\sum_{i=1}^{n} c_iu_j \cdot u_i$ ou seja $u_j \cdot v$. Por outro lado $Av = c_1Au_1 + \cdots + c_rAu_r = (0, \ldots, 0)$ e portanto $u_j \cdot v = 0$ para $j = 1, \ldots, r$. Então

$$v \cdot v \quad = \quad (c_1u_1 + \cdots + c_ru_r) \cdot v = c_1u_1 \cdot v + \cdots + c_ru_r \cdot v = 0$$

de onde se conclui que $v = 0$ e, como $\{u_1, \ldots, u_r\}$ é linearmente independente, $c_1 = \cdots = c_r = 0$.

Por outro lado, pela Nota 3.34, $\langle Au_1, \ldots, Au_r\rangle$, que tem dimensão r, está contido no espaço gerado pelos vectores coluna de A. Fica assim mostrando que $c_c(A) \geq r = c_l(A)$.

Finalmente, aplicando o resultado agora provado à matriz A^T obtemos $c_c(A^T) \geq c_l(A^T)$ e a conclusão segue pois $c_l(A^T) = c_c(A)$ e $c_c(A^T) = c_l(A)$. □

Definição 3.37. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos* **característica** *de A, e representa-se por $c(A)$, à característica de linha, ou equivalentemente, de coluna, de A.*

Os seguintes resultados são consequência do que foi feito quando estudamos sistemas de equações lineares. Recordamos a Proposição 2.3, a Proposição 3.35, o método de eliminação de Gauss e o que foi dito sobre o número de pivôs de uma matriz em escada.

Corolário 3.38. *Se $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ então:*

a) a dimensão do espaço de soluções do sistema homogéneo $AX = 0$ é igual a $n - c(A)$.

b) um sistema $AX = \mathbf{b}$ tem solução se e só se $c(A|b) = c(A)$. □

Corolário 3.39. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. As seguintes condições são equivalentes.*

a) A é invertível;

b) o sistema $AX = 0$ tem uma única solução;

c) $c(A) = n$.

Vamos agora ver um resultado que, juntamente com o que já foi dito, caracteriza os subespaços lineares de $\mathbb{R}^n$. Comecemos com um exemplo. Consideremos o espaço vectorial de $\mathbb{R}^4$, $F = \langle(1, 1, 0, 1),(0, -1, 1, 1),(1, 2, -1, 0),(2, 3, -1, 1)\rangle$. Um elemento (x_1, x_2, x_3, x_4) pertence a F se e só se existem $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ tais que $a_1(1, 1, 0, 1) + a_2(0, -1, 1, 1) + a_3(1, 2, -1, 0) + a_4(2, 3, -1, 1) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ou seja

$$\begin{cases} a_1 + 0a_2 + a_3 + 2a_4 &= x_1 \\ a_1 - a_2 + 0a_3 + 3a_4 &= x_2 \\ 0a_1 + a_2 + a_3 - a_4 &= x_3 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 &= x_4 \end{cases}$$

Vamos colocar em escada a matriz aumentada deste sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & x_1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & x_4 - x_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \to L_3 + L_2 \\ L_4 \to L_4 + L_2}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 + x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 + x_2 - 2x_1 \end{array}\right)$$

Como o sistema tem solução se e só se a característica da matriz dos coeficientes do sistema for igual à característica da matriz aumentada então $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in F$ se e só se $x_3 + x_2 - x_1 = 0$ e $x_4 + x_2 - 2x_1 = 0$. Deste modo os elementos de F são as soluções do sistema homogéneo $\begin{cases} x_3 + x_2 - x_1 &= 0 \\ x_4 + x_2 - 2x_1 &= 0. \end{cases}$

É claro que, se tivesse reparado que, por exemplo, o terceiro e o quarto vector do conjunto de geradores de F que foi dado eram combinação linear dos outros dois então as contas seriam mais simples. De facto, como $(1, 2, -1, 0) = (1, 1, 0, 1) + (0, -1, 1, 1)$ e $(2, 3, -1, 1) = 2(1, 1, 0, 1) - (0, -1, 1, 1)$ então $F = \langle (1, 1, 0, 1), (0, -1, 1, 1) \rangle$. Deste modo (x_1, x_2, x_3, x_4) pertence a F se e só se existem $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que $a_1(1, 1, 0, 1) + a_2(0, -1, 1, 1) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ou seja

$$\begin{cases} a_1 + 0a_2 &= x_1 \\ a_1 - a_2 &= x_2 \\ 0a_1 + a_2 &= x_3 \\ a_1 + a_2 &= x_4 \end{cases}$$

Vamos colocar em escada a matriz aumentada deste sistema

$$\left(\begin{array}{rr|c} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1}]{} \left(\begin{array}{rr|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 - x_1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_3 \to L_3 + L_2 \\ L_4 \to L_4 + L_2}]{} \left(\begin{array}{rr|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 + x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_4 + x_2 - 2x_1 \end{array}\right)$$

Concluímos assim (e novamente) que $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_3 + x_2 - x_1 = 0,\ x_4 + x_2 - 2x_1 = 0\}$.

É também claro que poderia ter seguido um caminho mais rápido reescrevendo o sistema acima na forma

$$\begin{cases} a_1 &= x_1 \\ a_2 &= x_3 \\ a_1 - a_2 &= x_2 \\ a_1 + a_2 &= x_4 \end{cases}$$

de onde saía $x_2 = x_1 - x_3$ e $x_4 = x_1 + x_3$.

Teorema 3.40. *Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é um subespaço de $\mathbb{K}^n$ se e só se for o conjunto de soluções de um sistema linear homogéneo de n variáveis.*

Demonstração. (Para a implicação que ainda não foi feita) Sejam F um subespaço de $\mathbb{K}^n$, $k = \dim F$ e $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ um conjunto gerador de F. Um elemento $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ pertence a F se e só se existem $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ tais que $a_1u_1 + \cdots + a_ku_k = (x_1, \ldots, x_n)$. Esta última igualdade é um sistema de n equações e k incógnitas $(a_1, \ldots, a_k)$. A matriz aumentada deste sistema é

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & x_n \end{array}\right)$$

em que o vector da coluna i é u_i, ou seja, $u_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})$, com $i = 1, \ldots, k$. Se a característica da matriz dos coeficientes for igual a n então o sistema é sempre possível e, portanto, $F = \mathbb{K}^n$. Se a característica da matriz dos coeficientes for s, sendo $s < n$ então usando o método de eliminação de Gauss este sistema é equivalente a um sistema cuja matriz aumentada está em escada. Deste modo, o sistema é possível se e só se a característica da matriz aumentada for igual a s. Isto significa que os $n - s$ elementos da última coluna têm de ser iguais a 0. Para terminar resta notar que estes elementos são combinações lineares de $\{x_1, \ldots, x_n\}$. $\square$

Na prova do teorema começamos com um conjunto gerador de F. É claro que, na prática, convém começar com uma base de F pois isso diminui os cálculos. É também de esperar que se começarmos com dois conjuntos de geradores de F possamos chegar a sistemas diferentes (mas com as mesmas soluções, claro!).

3.5 Exercícios

3.1 Considere $\mathbb{R}^2$ com a operação soma de vectores usual e a multiplicação escalar definida por $k \odot (a, b) = (ka, 0)$. Mostre que $\mathbb{R}^2$ com estas operações apenas não satisfaz um dos axiomas de espaço vectorial.

3.2 Considere $\mathbb{R}^2$ com as operações $\oplus$ e $\odot$ definidas por:

a) $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ e $k \odot (a, b) = (ka, b)$;

b) $(a, b) \oplus (c, d) = (a, b)$ e $k \odot (a, b) = (ka, kb)$;

c) $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ e $k \odot (a, b) = (k^2a, k^2b)$.

Quais os axiomas de espaço vectorial são satisfeitos em cada caso?

3.3 Verifique se $\mathbb{R}^+$ com a soma e a multiplicação escalar definidas por

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad x \oplus y = xy, \quad \alpha \odot x = x^\alpha$$

é um espaço vectorial real.

3.4 Mostre que o axioma da comutatividade da soma em espaços vectoriais pode ser deduzido dos restantes axiomas.

3.5 Mostre que os seguintes conjuntos são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$:

a) $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$;

b) $\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$;

c) $\{(a, b, c) : a = 2b\}$;

d) $\{(a, b, c) : a + b + c = 0\}$;

e) $\{(a, b, c) : a - b = 2a + 3b + 3c = 0\}$;

f) $\{(a, b, c) : a^2 + b^2 + c^2 = 0\}$;

g) $\{(a, b, c) : \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ (a, b, c) = \lambda(1, 1, 2) + \mu(2, 3, 4)\}$;

h) $\{(2a + 3b + c, -2a + 7b - 14c, -11a + b - c) : \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

3.6 Mostre que os seguintes conjuntos não são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$:

a) $\mathbb{R} \times \{0, 1\} \times \mathbb{R}$;

b) $\{(a, b, c) : a \geq 0\}$;

c) $\{(a, b, c) : a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$;

d) $\{(a, b, c) : a \leq b \leq c\}$;

e) $\{(a, b, c) : ab = 0\}$;

f) $\{(a, b, c) : a = b^2\}$;

g) $\{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

3.7 Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ são subespaços vectoriais?

a) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A = A^T\}$;

b) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A = -A^T\}$;

c) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A \text{ é triangular superior}\}$;

d) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : AB = BA\}$, em que B é uma certa matriz fixa;

e) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : AB = B^2AB\}$, em que B é uma certa matriz fixa;

f) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A \text{ é invertível}\}$;

g) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : AA = A\}$;

h) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : AA^T = I\}$;

3.8 Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ são subespaços vectoriais?

a) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(3) = 0\}$;
b) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(3) = f(1)\}$;
c) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f$ é par$\}$;
d) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f$ é ímpar$\}$;
e) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f$ é periódica$\}$;
f) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(3) = f(1) + 2\}$;
g) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+\}$;
h) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$;
i) $\{f \in C^1(\mathbb{R}) : xf'(x) + 2f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$;
j) $\{f \in C^2(\mathbb{R}) : e^x f''(x) + xf'(x) + \cos(x)\, f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$;
k) $\{f \in C^1(\mathbb{R}) : xf'(x) + 2x\, f(x)^2 = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$;
l) $\{f \in C^1(\mathbb{R}) : f'(x) - f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$;
m) $\{f \in C(\mathbb{R}) : \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe$\}$;
n) $\{f \in C(\mathbb{R}) : \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0\}$.

3.9 Escreva $(1, 2, -5)$ como combinação linear dos vectores $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ e $(2, -1, 1)$.

3.10 Escreva $(2, -5, 3)$ como combinação linear dos vectores $(1, -3, 2)$, $(2, -4, -1)$ e $(1, -5, 7)$.

3.11 Escreva a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como combinação linear das matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3.12 Para que valores de $k \in \mathbb{R}$, o vector $(1, -2, k)$ é combinação linear dos vectores $(3, 0, -2)$ e $(2, -1, -5)$?

3.13 Encontre uma relação sobre a, b, c para que:

a) (a, b, c) seja combinação linear dos vectores $(3, 0, -2)$ e $(2, -1, -5)$;
b) (a, b, c) seja combinação linear dos vectores $(2, 1, 0)$, $(1, -1, 2)$ e $(0, 3, -4)$.

3.14 Para que valores de $k \in \mathbb{R}$, $\langle (1, k, 1), (1, 0, 0)\rangle = \langle (1, 1, 1), (1, 2, 2)\rangle$?

3.15 Para que valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \in \langle (2, 1, 0), (1, 1, 1)\rangle$?

3.16 Para que valores de $k \in \mathbb{R}$, $\{(1, -2, k), (3, 0, -2), (2, -1, -5)\}$ é livre?

3.17 Mostre que, se $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ então $\{\alpha\, u - \beta\, v, \gamma\, v - \alpha\, w, \beta\, w - \gamma\, u\}$ é um conjunto linearmente dependente.

3.18 Dê um exemplo de uma infinidade de bases de $\mathbb{R}^3$ de tal modo que nenhuma delas tem um elemento que é múltiplo de um elemento de outra das bases.

3.19 Considere V o conjunto formado pelas sucessões reais. Quais dos seguintes subconjuntos de V é um subespaço?

a) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_6 = 0\}$;
b) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_6 + a_5 = 10\}$;
c) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_6 + a_5 \leq 10\}$;
d) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n = 2a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}\}$;
e) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \forall n \in \mathbb{N}\}$;
f) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n = 0$ apenas para um número finito de n's$\}$;
g) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n = 0$ para um número infinito de n's$\}$.

3.20 (Sucessão de Fibonacci) Considere o subespaço $F = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$, referido no exercício anterior.

a) Mostre que se α é um zero do polinómio $x^2 - x + 1$ então a sucessão $\left(\alpha^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pertence a F.

b) Mostre que, se α e β são zeros distintos do polinómio $x^2 - x + 1$ então $\big(\left(\alpha^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\beta^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ é uma base de F.

c) Encontre uma expressão geral para a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ tal que $a_1 = a_2 = 1$.

3.21 Encontre uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha os vectores $(1, 2, 3)$ e $(1, 0, 2)$.

3.22 Mostre que $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 1, -1)\}$ gera $\mathbb{R}^3$.

3.23 Mostre que $U = \{(0, b, c) : b, c \in \mathbb{R}\}$ é gerado por $\{(0, 1, 1), (0, 2, -1)\}$ e por $\{(0, 1, 2), (0, 2, 3), (0, 3, 1)\}$.

3.24 Mostre que $\{2 + 3\,i, 1 - 2\,i\}$ gera $\mathbb{C}$, visto como espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$.

3.25 Mostre que $\{(2 + 3\,i, 1 - 2\,i), (1 - 2\,i, 2 + 3\,i)\}$ gera $\mathbb{C}^2$, visto como espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$.

3.26 Encontre um conjunto gerador de W em que $W = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\} \cap \langle(1, 2, 3), (1, -1, 1)\rangle$.

3.27 Verifique se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ são livres:

a) $\{(1, 2, -1, 4), (3, 8, -5, 7), (2, 9, 4, 23)\}$;

b) $\{(1, -2, 4, 1), (2, 1, 0, -3), (3, -6, 1, 4)\}$;

c) $\{(1, 1, 1, 1), (0, 2, 2, 2), (2, 0, 2, 0), (0, 0, 1, 1)\}$.

d) $\{(1, 1123, 1, 1), (430, 23, 2, 2), (21, -222220, 2, 0), (10, 10, 1, 1), (-12, 143, 1, 0, 38)\}$.

3.28 Mostre que se $\{u_1, u_2, u_3\}$ é um conjunto livre de um espaço V então $\{u_1 + u_2, u_1 + u_3, u_2 + u_3\}$ também é livre.

3.29 Quais dos seguintes conjuntos formam uma base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{K})$?

a) $\{1, x, x^2, x^3 + 1\}$;

b) $\{x^3, x^3 + x^2, x^3 + x^2 + x, x^3 + x^2 + x + 1\}$;

c) $\{x, x^2, x^2 + x, x^3 + x + x^2\}$;

d) $\{2, x^3 + 1, x^3 + x^2, x^3 + x\}$;

e) $\{1, x^2 + 2x, x^3 - x^2 + x, x^3 - 2x^2 - x + 2, x^3 + 1\}$.

3.30 Encontre uma base dos seguintes subespaços de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

a) $\{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$.

b) $\{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : f(1) = 0\}$.

c) $\{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : f(1) = f(2) = 0\}$.

d) $\{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : f(1) = f(2) = f(3) = 0\}$.

e) $\{f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0\}$.

3.31 Sejam $f, g, h \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ tais que $\begin{pmatrix} f(0) & g(0) & h(0) \\ f'(0) & g'(0) & h'(0) \\ f''(0) & g''(0) & h''(0) \end{pmatrix}$ é uma matriz invertível. Mostre que o conjunto $\{f, g, h\}$ é um subconjunto livre de $C^2(\mathbb{R})$.
Generalize o resultado considerando n funções pertencentes a $C^{n-1}(\mathbb{R})$.

3.32 Mostre que $\{f, g\}$, em que $f(x) = x^3$, $g(x) = \left|x^3\right|$, é um subconjunto livre de $C^1(\mathbb{R})$ e $\begin{pmatrix} f(0) & g(0) \\ f'(0) & g'(0) \end{pmatrix}$ não é invertível.

3.33 Qual a dimensão do espaço vectorial $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$, se $|S| = 1$, se $|S| = 2$ e se $|S| = 3$?

3.34 Quais dos seguintes subconjuntos de $C\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ são livres?

a) $\{\operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$;

b) $\{\operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x), 1\}$;

c) $\{\operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x), \operatorname{tg}(x)\}$;

d) $\{1, \operatorname{sen}(x), \operatorname{sen}(2x)\}$;

e) $\{1, \operatorname{sen}^2(x), \cos(2x)\}$.

3.35 Sejam $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tais que $u_i \cdot u_j = 0$ (u_i e u_j são perpendiculares) para todo $i \neq j$. Mostre que $\{u_1, \ldots, u_k\}$ é um conjunto livre.

3.36 Considere U o subespaço vectorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gerado pelas potências de $|x|$.

a) Mostre que $x^3 \notin U$.

b) Quais são os polinómios que pertencem a U?

3.37 Seja $A = \{(a - b + 2c, 2a + 3b - c, -4a - 11b + 7c, 5b - 5c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

a) Calcule uma base de A.

b) Complete a base encontrada de modo a obter uma base de $\mathbb{R}^4$.

c) Encontre um subespaço B de $\mathbb{R}^4$ tal que $A \oplus B = \mathbb{R}^4$.

3.38 Seja $B = \{(a - b + c, -2a + 3b - c, 3a - b + 5c, a + 2b + 4c, 2a + 2b + 6c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

a) Calcule uma base de B.

b) $\{(1, -2, 3, 1, 1), (0, 2, 4, 6, 8)\}$ é uma base de B?

c) Complete a base encontrada de modo a obter uma base de $\mathbb{R}^5$.

d) Sendo $U = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 : x - y + z = x - 3y + t = x + z + 2t\}$, calcule a dimensão de $U \cap B$.

3.39 Se U e W são subespaço de $\mathbb{R}^7$ com dimensão 4 e 5 respectivamente, quais são as possíveis dimensões de $U \cap W$?

3.40 Sejam $U = \{(a, b, c) : a + b + c = 0\}$, $V = \{(a, b, c) : a = c\}$ e $W = \{(0, 0, c) : c \in \mathbb{R}\}$. Mostre que $\mathbb{R}^3 = U + V = U + W = V + W$. Quais das somas são directas?

3.41 Dê um exemplo de:

a) Subespaço vectorial V de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{R}^4 = V \oplus \{(x, y, z, t) : x + y + z + t = 0\}$;

b) um subespaço vectorial V de $\mathbb{R}^5$ com dimensão 2 e contido em $\{(x, y, z, t, w) : x + y - 2z + t + 2w = 0\}$;

c) V e W, subespaços vectoriais próprios de $\mathbb{R}^5$ tais que $V + W = \mathbb{R}^5$ e $\dim V \cap W = 2$;

d) U, V, W subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^4$, todos com dimensão 3 e tais que $\mathbb{R}^4 = U \oplus V = U \oplus W = U \oplus W$.

3.42 Dê um exemplo de um espaço vectorial V de dimensão numerável e de dois subespaços vectoriais de V, U e W com dimensão numerável e tais que $V = U \oplus W$.

3.43 Sejam U, V, W subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$ tais que $\mathbb{R}^3 = U + V = U + W = V + W$. Mostre que, pelo menos, uma das somas não é directa.

3.44 Sejam U e V dois subespaços de $\mathbb{R}^3$ com dimensão 2. Mostre que, se $U \neq V$ então $U + V = \mathbb{R}^3$.

3.45 Seja V um espaço vectorial e $U_1, \ldots, U_k$ subespaços de V. Dizemos que a soma $U_1 + \cdots + U_k$ é directa e escrevemos $U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ se para todo i, a intersecção de U_i com a soma dos outros subespaços for o subespaço nulo.

a) Dê exemplos de subespaços de $\mathbb{R}^4$, U_1, U_2, U_3 tais que $U_1 \cap U_j = \{0\}$, se $i \neq j$ e tais que a soma $U_1 + U_2 + U_3$ não é directa.

b) Mostre que se a soma $U_1 + \cdots + U_k$ é directa e V tem dimensão finita então $\dim(U_1 + \cdots + U_k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \dim(U_i)$.

3.46 Em cada uma alíneas encontre uma base de $U+V$ e uma base $U \cap W$.

a) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$ e $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y+3z=0\}$.

b) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$ e $V = \langle\{(1,1,1)\}\rangle$.

c) $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z=0\}$ e $V = \langle\{(1,1,1,1),(3,0,0,1)\}\rangle$.

d) $U = \langle(1,1,1,1,1),(1,-2,1,-1,1),(0,1,0,1,2),(3,-1,3,0,1)\rangle$ e $V = \langle\{(1,0,1,1,1),(3,1,0,1,1)\}\rangle$.

e) $U = \langle(1,3,3,1,4),(-1,-4,1,2,2),(2,9,0,-5,-2)\rangle$ e $W = \langle(1,6,2,-2,3),(-2,-8,1,6,5),(-1,-3,1,5,6)\rangle$.

f) $U = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) :\ A$ é triangular inferior$\}$ e $V = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) :\ A$ é triangular superior$\}$

g) $U = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) :\ A$ é simétrica$\}$ e $V = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) :\ A$ é triangular superior$\}$.

3.47 Calcule a característica das seguintes matrizes.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 13 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 11 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 7 & 12 & 17 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

g) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

h) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

j) $\begin{pmatrix} 1 & -1354 & 3 & 123 \\ 2 & -1 & 10 & -3214 \end{pmatrix}$.

k) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

l) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \\ 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$.

3.48 Calcule, consoante os valores de $a,b,c \in \mathbb{R}$ a característica das seguintes matrizes.

a) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1a & \\ a & a-1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & b & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & c & a & 1 \\ 0 & c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

f) $\begin{pmatrix} a+b & 0 & 1 & a-c \\ 0 & 1 & a & b+c \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

g) $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ a & b & c & 1 \\ b & c & 1 & a \\ c & 1 & a & b \end{pmatrix}$.

h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

3.49 Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Qual a característica de A?

b) Calcule uma base para o espaço das linhas de A.

c) Calcule uma base para o espaço das colunas de A.

d) Encontre um complementar para o espaço das linhas de A.

e) Encontre um complementar para o espaço das colunas de A.

f) Resolva o sistema $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.50 Encontre um sistema linear homogéneo do qual os seguintes conjuntos geram o espaço de soluções:

a) $\{(1,1)\}$, em $\mathbb{R}^2$;

b) $\{(1,1,0),(2,-1,1)\}$, em $\mathbb{R}^3$;

c) $\{(1,1,0),(1,1,1),(0,1,1)\}$, em $\mathbb{R}^3$;

d) $\{(1,-2,0,3,-1),(2,-3,2,5,-3),(1,-2,1,2,-2)\}$, em $\mathbb{R}^5$.

3.51 Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$.

a) Mostre que: $c(AB) \leq c(A)$ e $c(AB) \leq c(B)$.

b) Dê um exemplo, com $n = m = p = 3$, em que $c(A) = c(B) = 2$ e $C(AB) = 1$.

c) Mostre que, se $m = n$ e A é invertível então $c(AB) = c(B)$.

d) Mostre que, se $n = p$ e B invertível então $c(AB) = c(A)$.

4 Aplicações lineares

Informalmente uma aplicação linear é uma função de um espaço vectorial para outro que "respeita" as operações de soma e de multiplicação por escalares definidos nesses espaços. No que segue vou denotar, se daí não advier nenhuma confusão, estas operações em espaços vectoriais diferentes pelo mesmo símbolo. Deste modo denotarei por $+$ a operação de soma de vectores em qualquer espaço vectorial. Se houver alguma dúvida sobre o espaço vectorial a que nos estamos a referir quando falamos dessas operações costuma-se escrever $+_V$ e $\cdot_V$ em vez de $+$ e $\cdot$.

4.1 Preliminares

Definição 4.1. *Sejam V e W espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma função $T : V \to W$ diz-se uma* **aplicação linear** *se*

a) $\forall u, v \in V$, $T(u + v) = T(u) + T(v)$;

b) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in V$, $T(\lambda\, u) = \lambda\, T(u)$.

Começamos por notar que as condições a) e b) acima poderiam ser substituídas, sem alterar o sentido da definição (é claro) por

$$\boxed{\text{c) } \forall u, v \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ T(\alpha\, u + \beta\, v) = \alpha\, T(u) + \beta\, T(v).}$$

De facto a) e b) são casos particulares de c) e podemos obter c) usando a) em primeiro lugar e depois b).
Note-se ainda que, com o mesmo tipo de argumentos, podemos substituir c) por

$$\boxed{\text{d) } \forall n \in \mathbb{N}\ \forall u_1, \ldots, u_n \in V,\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ T\left(\textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i\, u_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\, T(u_i).}$$

Segue também da definição que, se $T : V \to W$ é uma aplicação linear então a imagem do elemento zero de V é o elemento zero de W. Vejamos duas provas deste resultado:

- como $0_V = 0_V + 0_V$ então $T(0_V) = T(0_V) + T(0_V)$ e, aplicando a Proposição 3.4, alínea c), temos $T(0_V) = 0_W$;
- como $0\,0_V = 0_V$ então $T(0_V) = 0T(0_V) = 0_W$;

Exemplos 4.2. *Como primeiros e mais simples exemplos de aplicações lineares temos a função identidade de V para V (sendo V um espaço vectorial) e a função nula de V para outro espaço vectorial.*

Podemos facilmente ver, se $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ então a função $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ definida por $T(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ é linear. Isto acontece porque, se $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ então

$$\begin{aligned} T\big((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)\big) &= T(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = a_1(x_1 + y_1) + \cdots + a_n(x_n + y_n) \\ &= \big(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n\big) + \big(a_1y_1 + \cdots + a_ny_n\big) = T(x_1, \ldots, x_n) + T(y_1, \ldots, y_n) \\ T\big(\lambda(x_1, \ldots, x_n)\big)\big) &= T(\lambda\, x_1, \ldots, \lambda\, x_n) = a_1(\lambda\, x_1) + \cdots + a_n(\lambda\, x_n) \\ &= \lambda(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n\big) = \lambda T(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Proposição 4.3. *Sejam, V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $T = (T_1, \ldots, T_n) : V \to \mathbb{K}^n$. Então T é uma aplicação linear se e só se T_i for aplicação linear para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Demonstração. Se $u, v \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ então

$$T(\alpha\, u + \beta\, v) = \Big(T_1(\alpha\, u + \beta\, v), T_2(\alpha\, u + \beta\, v), \ldots, T_n(\alpha\, u + \beta\, v)\Big)$$

$$\alpha\, T(u) + \beta\, T(v) = \Big(\alpha\, T_1(u) + \beta\, T_1(v), \alpha\, T_2(u) + \beta\, T_2(v), \ldots, \alpha\, T_n(u) + \beta\, T_n(v)\Big)$$

e a conclusão segue imediatamente. $\square$

Daqui se conclui imediatamente que, se $a_{ij} \in \mathbb{K}$ para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$ então a função $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida por $T(x_1, \ldots, x_n) = \big(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n\big)$ é linear. De qualquer modo os cálculos serão feitos mais à frente numa situação um pouco mais geral (ver Corolário 4.23).

Proposição 4.4. *Se U, V, W são espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T : U \to V$ e $S : V \to W$ são lineares então $S \circ T : U \to W$ é linear.*

Demonstração. Sejam $u, v \in U$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned} (S \circ T)(\alpha\, u + \beta\, v) &= S(T(\alpha\, u + \beta\, v)) \quad \text{por definição de composição} \\ &= S(\alpha T(u) + \beta T(v)) \quad \text{porque } T \text{ é linear} \\ &= \alpha S(T(u)) + \beta S(T(v)) \quad \text{porque } S \text{ é linear} \end{aligned}$$

e a conclusão segue. □

Proposição 4.5. *Se V e W são espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ então $\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W,\ T \text{ é linear}\}$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.*

Demonstração. Basta-nos provar que, se $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ e $a, b \in \mathbb{K}$ então $a\, S + b\, T$ é linear. Isto acontece porque, se $u, v \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ então

$$\begin{aligned} (a\, S + b\, T)(\alpha\, u + \beta\, v) &= a\, S(\alpha\, u + \beta\, v) + b\, T(\alpha\, u + \beta\, v) \quad \text{por definição} \\ &= a\,(\alpha\, S(u) + \beta\, T(v)) + b\,(\alpha\, T(u) + \beta\, S(v)) \quad \text{porque } S \text{ e } T \text{ são lineares} \\ &= a\,\alpha\, S(u) + a\,\beta\, T(v) + b\,\alpha\, T(u) + b\,\beta\, S(v) \\ &= \alpha\,(a\, S(u) + b\, T(u)) + \beta\,(a\, S(v) + b\, T(v)) \\ &= \alpha\,(a\, S + b\, T)(u) + \beta\,(a\, S + b\, T)(v) \end{aligned}$$

mostrando assim que $a\, S + b\, T$ é linear. □

Vamos agora ver que conhecer uma aplicação linear é equivalente a conhecer as imagens dos elementos de uma base do domínio. Vejamos um exemplo. Suponhamos que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação linear tal que

$$T(1, 1) = (2, 0, 3),\ T(-1, 1) = (2, 0, 1).$$

Vejamos que esta informação chega para conhecer T. Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Note-se que $(x, y) = \frac{y+x}{2}(1, 1) + \frac{y-x}{2}(-1, 1)$. Deste modo $T(x, y) = \frac{y+x}{2}T(1, 1) + \frac{y-x}{2}T(-1, 1) = (2y, 0, 2y + x)$ e, pelo que vimos atrás, T é linear.

Teorema 4.6. *Sejam V e W espaços vectoriais e $\mathcal{B}$ uma base de V. Para cada elemento de u em $\mathcal{B}$ escolhamos um elemento w_u de W. Nestas condições existe uma e uma só aplicação linear $T : V \to W$ tal que $T(u) = w_u$, para qualquer $u \in \mathcal{B}$.*

Demonstração. Para $v \in V$ sejam $n \in \mathbb{N}$, $u_1, \ldots u_n \in \mathcal{B}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tais que $v = \sum_{i=1}^n a_i u_i$. Note-se que o facto de $\mathcal{B}$ ser uma base garante que <u>esta escolha é única</u>, se não usarmos coeficientes nulos. Como queremos que T seja linear então teremos de definir $T(v) = \sum_{i=1}^n a_i T_1(u_i)$. Até aqui mostramos que se existir uma aplicação nas condições referidas então ela é única.

Vejamos agora que a função T que definimos é linear. Sejam $u, v \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e vejamos que $T(\alpha\, u + bv) = \alpha\, T(u) + \beta\, T(v)$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de V então u e v são combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$. Acrescentando eventualmente coeficientes nulos podemos assumir que os elementos de $\mathcal{B}$ envolvidos na representação linear de u e de v são os mesmos. Deste modo existem $n \in \mathbb{N}, m,\ v_1, \ldots v_m \in \mathcal{B},\ a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ tais que $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ e $u = \sum_{i=1}^n b_i v_i$. Assim $\alpha\, u + \beta\, v = \sum_{i=1}^n [\alpha\, a_i v_i + \beta\, b_i v_i] = \sum_{i=1}^n (\alpha\, a_i + \beta\, b_i) v_i$ e, portanto, $T(\alpha\, u + \beta\, v) = \sum_{i=1}^n (\alpha\, a_i + \beta\, b_i) T(v_i) = \alpha \sum_{i=1}^n a_i T(v_i) + \beta \sum_{i=1}^n b_i T(v_i)$, atendendo à definição de T. Concluímos assim que $T(\alpha\, u + \beta\, v) = \alpha\, T(u) + \beta\, T(v)$. □

Vamos agora dar um nome às funções lineares consoante são injectivas, sobrejectivas, etc.. Mas antes vamos mostrar o seguinte resultado.

Lema 4.7. *Se V e W são espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \to W$ é uma aplicação linear bijectiva então T^{-1} é linear.*

Demonstração. Sejam $w_1, w_2 \in W$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Então, <u>atendendo a que T é bijectiva</u>

$$\begin{aligned} T^{-1}(\alpha\, w_1 + \beta\, w_2) = \alpha\, T^{-1}(w_1) + \beta\, T^{-1}(w_2) &\iff T\left(T^{-1}(\alpha\, w_1 + \beta\, w_2)\right) = T\left(\alpha\, T^{-1}(w_1) + \beta\, T^{-1}(w_2)\right) \\ &\iff \alpha\, w_1 + \beta\, w_2 = \alpha\, T\left(T^{-1}(w_1)\right) + \beta\, T\left(T^{-1}(w_2)\right) \quad \text{porque } T \text{ é linear} \\ &\iff \alpha\, w_1 + \beta\, w_2 = \alpha\, w_1 + \beta\, w_2, \end{aligned}$$

mostrando assim que T^{-1} é linear. □

Definição 4.8. *Sejam V e W dois espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \to W$ uma aplicação linear. Diz-se que T é um*

a) **monomorfismo** *se for injectiva;*

b) **epimorfismo** *se for sobrejectiva;*

c) **isomorfismo** *se for bijectiva;*

d) **endomorfismo** *se $V = W$;*

e) **automorfismo** *se for bijectiva e $V = W$.*

Definição 4.9. *Dois espaços vectoriais dizem-se isomorfos se existir um isomorfismo de um para o outro.*

É claro que a composta de monomorfismos (respectivamente epimorfismos) é um monomorfismo (respectivamente, isomorfismo). Atendendo ao Lema 4.7 e à Proposição 4.4, a relação de isomorfismo é uma relação de equivalência. Chamamos espaços isomorfos a dois espaços que admitem um isomorfismo entre eles.

Exemplos 4.10. *Vejamos alguns exemplos simples de espaços isomorfos. Nos primeiros casos apresento um isomorfismo entre os espaços (as provas são imediatas). De qualquer modo veremos mais à frente que dois espaços vectoriais finitamente baseados são isomorfos se e só se tiverem a mesma dimensão.*

a) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto & x + iy \end{array}$, *com* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

b) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) & \mapsto & (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n \end{array}$, *com* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

c) $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{n+1} & \longrightarrow & \mathcal{P}_n(\mathbb{K}) \\ (a_0, a_1, \dots, a_n) & \mapsto & a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \end{array}$

d) $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^{mn} \\ (a_{ij})_{m\times n} & \mapsto & \big(a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}\big) \end{array}$

e) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A = A^T\}$ *é isomorfo a* $\mathbb{K}^{\frac{n(n+1)}{2}}$*;*

f) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A = -A^T\}$ *é isomorfo a* $\mathbb{K}^{\frac{n(n-1)}{2}}$*;*

g) O espaço de soluções de um sistema linear homogéneo de m equações e n incógnitas é isomorfo a $\mathbb{K}^k$, sendo $k = n - c(A)$, em que A e a matriz dos coeficientes do sistema.

Proposição 4.11. *Se V e W são espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \to W$ é uma aplicação linear então:*

a) se T é um monomorfismo então T transforma conjuntos livres de V em conjuntos livres de W;

b) se T é um epimorfismo então T transforma conjuntos geradores de V em conjuntos geradores de W.

Em particular se T é um monomorfismo então $\dim V \leq \dim W$ e se se T é um epimorfismo então $\dim V \geq \dim W$.

Demonstração. Suponhamos que T é um monomorfismo e A é um subconjunto livre de V. Vejamos que o conjunto $B = \{T(v) : v \in A\}$ é livre. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $u_1, \dots, u_n$, n elementos diferentes pertencentes a B e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tais que $a_iu_1 + \cdots + a_nu_n = 0_W$. Por definição de B, para cada $i = 1, \dots, n$ existe $v_i \in A$ tal que $T(v_i) = u_i$. Deste modo,

$$T(a_iv_1 + \cdots + a_nv_n) = a_iT(v_1) + \cdots + a_nT(v_n) = a_iu_1 + \cdots + a_nu_n = 0_W.$$

Como T é injectiva concluímos que $a_iv_1 + \cdots + a_nv_n = 0_V$. Como $v_1, \dots, v_n$ são elementos diferentes pertencentes a A e A é livre, então $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Aplicando este resultado a um conjunto A livre e gerador de V obtemos, usando o Teorema 3.28, alínea b) e o facto de T ser injectiva, $\dim V = |A| = |B| \leq \dim W$.

Suponhamos agora que T é sobrejectiva e consideremos A um conjunto gerador de V e $B = \{T(v) : v \in A\}$. Vejamos que todo o elemento de W é combinação linear de elementos de B. Seja $u \in W$. Como T é sobrejectiva, existe $v \in V$ tal que $T(v) = u$. Usando o facto de A gerar V, consideremos agora $n \in \mathbb{N}$, $v_1, \ldots, v_n \in A$ e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tais que $v = a_i v_1 + \cdots + a_n v_n$. Deste modo

$$u = T(v) = T(a_i v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_i T(v_1) + \cdots + a_n T(v_n)$$

e a conclusão segue porque $T(v_1), \ldots, T(v_n) \in B$.

Aplicando este resultado a um conjunto A livre e gerador de V obtemos, usando o Teorema 3.28, alínea a), $\dim V = |A| \geq |B| \geq \dim W$. □

O seguinte resultado, que em certa medida generaliza a proposição anterior, diz-nos quando é que pode existir um monomorfismo, epimorfismo ou isomorfismo de um espaço vectorial noutro espaço vectorial.

Teorema 4.12. *Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita. Então*

a) Existe um epimorfismo $T : V \to W$ se e só se $\dim V \geq \dim W$;

b) Existe um monomorfismo $T : V \to W$ se e só se $\dim V \leq \dim W$;

c) Existe um isomorfismo $T : V \to W$ se e só se $\dim V = \dim W$.

Demonstração. Vejamos as implicações que ainda não foram mostradas. Sejam $n = \dim V$, $m = \dim W$, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ uma base de V e $\mathcal{B}' = (w_1, \ldots, w_m)$ uma base de W. Pelo Teorema 4.6, definir uma aplicação linear de V para W equivale a definir as imagens dos elementos de $\mathcal{B}$.

Suponhamos que $n \geq m$. Defina-se $T(v_i) = w_i$, para $i = 1, \ldots, m$ e $T(v_i) = 0_V$, se $i > m$ (a imagem deste elementos é irrelevante para o que segue). Deste modo T fica definido e é claro que T é sobrejectiva pois a imagem dos elementos de $\mathcal{B}$ contém todos os elementos de $\mathcal{B}'$.

Suponhamos agora que $n \leq m$ e defina-se $T(v_i) = w_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Vejamos que T é injectiva. Seja $v \in V$ tal que $T(v) = 0_W$ e vejamos que $v = 0_V$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de V existem $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tais que $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. Deste modo $0_W = T(v) = a_1 T(v_1) + \cdots + a_n T(v_n) = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n$. Como $\{w_1, \ldots, w_n\}$ é livre então $a_1 = \cdots = a_n = 0$ e, portanto $v = 0_V$.

Se $n = m$ a função definida nos dois casos anteriores é a mesma e, por isso, é bijectiva. □

Nota 4.13. *No teorema anterior consideramos que os espaços vectoriais em questão são finitamente gerados. De facto o resultado é válido (com a "mesma" demonstração) se os espaços não forem finitamente gerados. O que falta mostrar é que todo o espaço vectorial admite uma base e que duas quaisquer bases desse espaço têm o mesmo cardinal. Este resultado é verdadeiro mas a sua demonstração usa o chamado Lema de Zorn, que não é do conhecimento dos alunos.*

Vamos agora defini,r dada uma aplicação linear $T : V \to W$ (V e W espaços vectoriais), dois espaços *naturais*, um deles subespaço de V e o outro subespaço de W.

Definição 4.14. *Sejam V e W espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \to W$ uma aplicação linear. Define-se*

a) <u>núcleo de T</u>, e denota-se por $\mathrm{Nuc}(T)$ como sendo $\{v \in V : T(v) = 0_W\}$;

b) <u>imagem de T</u>, e denota-se por $\mathrm{Im}(T)$ como sendo $\{T(v) : v \in V\}$.

O seguinte resultado é uma consequência imediata das definições.

Proposição 4.15. *Se V e W são espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \to W$ é uma aplicação linear então $\mathrm{Nuc}(T)$ é um subespaço de V e $\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço de W. Além disso, T transforma qualquer conjunto de geradores de V (em particular, bases de V) num conjunto de geradores de $\mathrm{Im}(T)$.*

Demonstração. Como $T(0_V) = 0_W$ então $0_V \in \mathrm{Nuc}(T)$ e $0_W \in \mathrm{Im}(T)$.

Sejam $v_1, v_2 \in \mathrm{Nuc}(T)$ e $a, b \in \mathbb{K}$. Temos $av_1 + bv_2 \in \mathrm{Nuc}(T)$ pois

$$\begin{aligned} T(av_1 + bv_2) &= aT(v_1) + bT(v_2) \quad \text{porque } T \text{ é linear} \\ &= 0_W \text{ porque } T(v_1) = T(v_2) = 0_W \end{aligned}$$

Mostramos assim que $\mathrm{Nuc}(T) \leq V$.

Por outro, se $u_1, u_2 \in \mathrm{Im}(T)$ e $a, b \in \mathbb{R}$ então, escolhendo $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = u_1$ e $T(v_2) = u_2$, temos $T(av_1 + bv_2) = aT(v_1) + bT(v_2) = au_1 + bu_2$, mostrando assim que $au_1 + bu_2 \in \mathrm{Im}(T)$.

Para a última parte basta usar a Proposição 4.11. □

Exemplo 4.16. *Consideremos* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $T(x, y, z) = (2x - y + z, -x + 3z)$. *Vamos calcular uma base de* $\mathrm{Nuc}(T)$ *e de* $\mathrm{Im}(T)$. *Temos*

$$(x, y, z) \in \mathrm{Nuc}(T) \iff \begin{cases} 2x - y + z &= 0 \\ \quad -x + 3z &= 0 \end{cases}$$

Daqui concluímos que $\mathrm{Nuc}(T) = \{(3z, 7z, z) : z \in \mathbb{R}\}$ *e portanto* $\big((3, 7, 1)\big)$ *é uma base de* $\mathrm{Nuc}(T)$. *Por outro lado* $\{T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1)\}$ *ou seja* $\{(2, -1), (-1, 0), (1, 3)\}$ *é um conjunto de geradores de* $\mathrm{Im}(T)$. *Daqui se obtém facilmente que* $\big((2, -1), (-1, 0)\big)$ *é uma base de* $\mathrm{Im}(T)$ *e, é claro que* T *é sobrejectiva.*

Este exemplo pode ser generalizado da seguinte forma.

Exemplo 4.17. *Seja* $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *definido por*

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \big(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n\big),$$

em que $a_{ij} \in \mathbb{K}$ *para* $i = 1, \ldots, m$ *e* $j = 1, \ldots, n$. *Então:*

- $\mathrm{Nuc}(T)$ *é o conjunto das soluções do sistema*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

  que sabemos ser um espaço vectorial de dimensão $n - c(A)$ *em que* A *é a matriz dos coeficientes do sistema.*

- $\mathrm{Im}(T) = \{(b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{K}^m\}$ *tal que o sistema*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

  admite solução. Sabemos da proposição anterior que o conjunto formado pelas imagens dos vectores de uma qualquer base de $\mathbb{K}^n$ *forma uma base de* $\mathrm{Im}(T)$. *Em particular se escolhermos a base canónica de* $\mathbb{K}^n$ *as suas imagens são os vectores coluna da matriz* A. *Deste modo* $\dim \mathrm{Im}(T)$ *é igual à característica coluna de* A *que é igual a* $c(A)$.

  Concluímos assim que $\dim \mathrm{Nuc}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = n$.

Vamos agora caracterizar as funções injectivas em função do seu núcleo.

Proposição 4.18. *Sejam* V *e* W *dois espaços vectoriais sobre* $\mathbb{K}$ *e* $T : V \to W$. *Nestas condições, se* $u \in V$ *e* $w = T(u)$ *então* $T^{-1}(w) = \{u + v : v \in \mathrm{Nuc}(T)\}$. *Em particular* T *é injectiva se e só se* $\mathrm{Nuc}(T) = \{0_V\}$.

Demonstração. Note-se que, se $v \in \mathrm{Nuc}(T)$ então $T(u+v) = T(u)+T(v) = w$ e portanto $u+v \in T^{-1}(w)$. Inversamente, se $v \in T^{-1}(w)$ então $v = u + (v - u)$ e $v - u \in \mathrm{Nuc}(T)$ porque $T(v - u) = T(v) - T(u) = 0_W$. □

Note-se que a Proposição 2.5, alínea c), relativo a soluções de sistemas de equações lineares, é um caso particular deste resultado.

Vamos agora generalizar o Corolário 3.38 que relaciona a característica de uma matriz com a dimensão do espaço de soluções do sistema homogéneo associado à matriz. De facto estes resultados são equivalentes!

Teorema 4.19 (do núcleo e da imagem)**.** *Sejam V e W espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$, sendo V de dimensão finita. Se $T : V \to W$ é linear então*

$$\dim V = \dim \operatorname{Nuc}(T) + \dim \operatorname{Im}(T).$$

Demonstração. Seja $(u_1, \ldots, u_k)$ uma base de $\operatorname{Nuc}(T)$. Usando o Corolário 3.27 existem $v_1, \ldots, v_r \in V$ tais que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_r)$ é uma base de V. Temos

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(T) &= \langle T(u_1), \ldots, T(u_k), T(v_1), \ldots, T(v_r) \rangle \text{ pelo Corolário 4.15} \\ &= \langle T(v_1), \ldots, T(v_r) \rangle \text{ porque } T(u_i) = 0_W, \text{ para } i = 1, \ldots, k. \end{aligned}$$

Para concluir a demonstração basta ver que este último conjunto é livre. Para ver isso, sejam $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{K}$ tais que $a_1T(v_1)+\cdots+a_rT(v_r) = 0_W$ ou seja $T(a_1v_1+\cdots+a_rv_r) = 0_W$. Deste modo $a_1v_1+\cdots+a_rv_r \in \operatorname{Nuc}(T)$ e portanto existem $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{K}$ tais que $a_1v_1 + \cdots + a_rv_r = b_1u_1 + \cdots + b_ru_k$ ou seja $a_1v_1 + \cdots + a_rv_r - b_1u_1 - \cdots - b_ru_k = 0_V$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de V concluímos que $a_1 = \cdots = a_r = b_1 = \cdots = b_k = 0$, o que mostra que $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ é um conjunto livre. □

Vejamos uma consequência imediata deste resultado (que já poderia ter sido demonstrado!)

Corolário 4.20. *Sejam V e W espaços vectoriais com a mesma dimensão finita e $T : V \to W$ uma aplicação linear. Então T é injectiva se e só se for sobrejectiva (e portanto bijectiva).*

Demonstração. Pela Proposição 4.18, T é injectiva se e só se $\operatorname{Nuc}(T) = \{0_V\}$ ou seja $\dim \operatorname{Nuc}(T) = 0$. Por outro lado T é sobrejectiva se e só se $\operatorname{Im}(T) = W$ ou seja $\dim \operatorname{Im}(T) = \dim W$. A conclusão segue agora da igualdade

$$\dim \operatorname{Nuc}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim V$$

pois $\dim \operatorname{Nuc}(T) = 0$ se e só se $\dim \operatorname{Im}(T) = \dim W$ (recorde-se que estamos a supor que $\dim W = \dim V$). □

O que é usado explicitamente na demonstração do corolário anterior que não é válido para espaços de dimensão infinita é o seguinte resultado, já referido e usado várias vezes: se tivermos dois subespaços de um espaço vectorial com a mesma dimensão finita e um contido no outro então eles são iguais.

Exemplo 4.21. *Seja $\mathcal{S}$ o espaço vectorial definido pelas sucessões reais (com a soma e produto por um escalar usuais) e sejam $T_1, T_2 : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ definidas por*

$$T_1((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}, \qquad T_2((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \text{em que } b_1 = 0 \text{ e } b_{n+1} = a_n, \text{ se } n \in \mathbb{N}.$$

ou se quisermos,

$$T_1(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots,) = (a_2, a_3, a_4, \ldots), \qquad T_2(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots,) = (0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots).$$

É assim fácil de ver que T_1 é sobrejectiva e T_2 é injectiva. Isto pode ser visto directamente ou notando que $T_1 \circ T_2$ é a função identidade. Por outro lado T_1 não é injectiva porque (por exemplo) $T_1(1, 0, 0, 0, \ldots,) = T_1(0, 0, 0, 0, \ldots,)$, e T_2 não é sobrejectiva porque (por exemplo) $(1, 0, 0, \ldots,) \notin \operatorname{Im}(T)$. De facto $\operatorname{Nuc}(T_1) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n = 0, \ \forall n \geq 2\}$ e $\operatorname{Im}(T) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_1 = 0\}$.

Note-se ainda que $T_2 \circ T_1$ não é a identidade pois é definida por $(T_2 \circ T_1)(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots,) = (0, a_2, a_3, a_4, \ldots)$.

Exemplo 4.22. *Um outro exemplo "interessante" é dado pelas aplicações lineares $T_1, T_2 : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definidas por: $T_1(f) = f'$ e $T_2(f) = pf$ em que p é um polinómio não constante fixado. Então T_1 é sobrejectiva e não injectiva e T_2 é injectiva e não sobrejectiva.*

4.2 Aplicações lineares entre espaços vectoriais de dimensão finita

Estamos agora em condições de caracterizar as aplicações lineares entre espaços vectoriais de dimensão finita.

Notação. *Se $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ for uma base de um espaço vectorial de dimensão n ($n \in \mathbb{N}$) então, para todo $v \in V$ existem $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ únicos tais que $v = x_1\, u_1 + \cdots + x_n\, v_n$. Escreveremos simplesmente $v = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$. No caso em que o espaço em questão é $\mathbb{K}^n$ e a base é a base canónica simplificaremos ainda mais a escrita, $v = (x_1, \ldots, x_n)$.*

Corolário 4.23. *Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}^*$ bases de V e W respectivamente e suponhamos que* $\dim(V) = n$ *e* $\dim(W) = m$. *Uma aplicação $T : V \to W$ é linear se e só se existe uma matriz $(a_{ij})_{m\times n}$ tal que*

$$\forall (x_1,\dots,x_n)_{\mathcal{B}} \in V \quad T\big((x_1,\dots,x_n)_{\mathcal{B}}\big) = \big(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n, a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n,\dots,a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\big)_{\mathcal{B}^*}. \quad (1)$$

Demonstração. Suponhamos que T é linear e seja $\mathcal{B} = \big(u_1,\dots,u_n\big)$ e $\mathcal{B}^* = \big(v_1,\dots,v_n\big)$. Suponhamos que, para $i = 1,\dots,n$, $T(u_i) = (a_{1i}, a_{2i},\dots,a_{m,i})_{\mathcal{B}'}$. Nestas condiçoes, se $(x_1,\dots,x_n)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$ então $x = \sum_{i=1}^n x_i\, u_i$ e, portanto

$$\begin{aligned} T\big((x_1,\dots,x_n)_{\mathcal{B}}\big) &= T\left(\sum_{i=1}^n x_i\, u_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i\, T(u_i) \quad \text{porque } T \text{ é linear} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i\,(a_{1i},a_{2i},\dots,a_{m,i})_{\mathcal{B}^*} = \left(\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i, \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i,\dots,\sum_{i=1}^n a_{mi}x_i\right)_{\mathcal{B}^*}. \end{aligned}$$

Inversamente, vejamos que uma função definida como em (1) é linear. Sejam $x = (x_1,\dots,x_n)_{\mathcal{B}} \in V$, $y = (y_1,\dots,y_n)_{\mathcal{B}} \in V$ e $a, b \in \mathbb{K}$. Então,

$$\begin{aligned} T(ax+by) &= \left(\sum_{i=1}^n a_{1i}(ax_i+by_i), \sum_{i=1}^n a_{2i}(ax_i+by_i),\dots,\sum_{i=1}^n a_{mi}(ax_i+by_i)\right)_{\mathcal{B}^*} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_{1i}ax_i, \sum_{i=1}^n a_{2i}ax_i,\dots,\sum_{i=1}^n a_{mi}ax_i\right)_{\mathcal{B}^*} + \left(\sum_{i=1}^n a_{1i}by_i, \sum_{i=1}^n a_{2i}by_i,\dots,\sum_{i=1}^n a_{mi}by_i\right)_{\mathcal{B}^*} \\ &= a\left(\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i, \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i,\dots,\sum_{i=1}^n a_{mi}x_i\right)_{\mathcal{B}^*} + b\left(\sum_{i=1}^n a_{1i}y_i, \sum_{i=1}^n a_{2i}y_i,\dots,\sum_{i=1}^n a_{mi}y_i\right)_{\mathcal{B}^*} \end{aligned}$$

e a conclusão segue de imediato. □

Estes últimos resultados fazem uma ligação entre $\mathcal{L}(V,W)$ e o espaço $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, sendo $\dim(V) = n$ e $\dim(W) = m$. Resumindo temos.

Definição 4.24. *Sejam V e W espaços vectoriais tais que* $\dim(V) = n$ *e* $\dim(W) = m$ *e sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}^*$ bases de V e de W, respectivamente. Se $T : V \to W$ é uma aplicação linear chamamos <u>matriz de T relativamente às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}^*$</u> à (única) matriz de $A = (a_{ij})_{m\times n}$ dada pelo Corolário 4.23. Denotamos esta matriz por $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}\, T$.*

Por vezes escreveremos $T\big((x_1,\dots,x_n)_{\mathcal{B}}\big) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\, T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. De facto $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\, T$ é a matriz coluna cujos elementos são as coordenadas, pela ordem correcta, de $T\big((x_1,\dots,x_n)_{\mathcal{B}}\big)$ na base $\mathcal{B}'$.

Nota 4.25. *Nas condições da definição anterior e tendo em conta o Corolário 4.23 a matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}\, T$ é a matriz $m\times n$ cujo elemento da coluna i, linha j é a j-ésima coordenada da imagem do i-ésimo elemento de $\mathcal{B}$. Costuma-se dizer que na coluna i são colocados por ordem as coordenadas na base $\mathcal{B}^*$ do i-ésimo elemento da base $\mathcal{B}$.*

Exemplo 4.26. *Se $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a função identidade e $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$ então é imediato ver (usando por exemplo a nota acima) que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} I$ é a matriz identidade, independentemente de $\mathcal{B}$. Por outro lado, se $\mathcal{B}^*$ for outra base de $\mathbb{R}^n$ então $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}\, I$ é a matriz $n\times n$ cuja coluna j tem os elementos do j-ésimo elemento de $\mathcal{B}^*$.*

Por exemplo, se $\mathcal{B}^* = \big((5,1,2),(1,1,0),(1,0,3)\big)$ *a matriz* $\mathcal{M}_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}_3}\, I = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Fazendo os cálculos podemos ver que

$$\begin{aligned} (1,0,0) &= \frac{3}{10}(5,1,2) - \frac{3}{10}(1,1,0) - \frac{2}{10}(1,0,3) \\ (0,1,0) &= -\frac{3}{10}(5,1,2) - \frac{13}{10}(1,1,0) + \frac{2}{10}(1,0,3) \\ (0,0,1) &= -\frac{1}{10}(5,1,2) + \frac{1}{10}(1,1,0) + \frac{4}{10}(1,0,3) \end{aligned}$$

e, portanto, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{B}}\, I = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{13}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}.$

Exemplo 4.27. *Consideremos* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $T(x, y, z) = (2x - y + z, -x + 3z)$*. Temos, se estivermos a trabalhar com as bases canónicas de* $\mathbb{R}^3$ *e de* $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_2} T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Consideremos agora em $\mathbb{R}^3$ *a base* $\mathcal{B} = \big((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\big)$*. Como* $T(1, 1, 1) = (2, 2)$*,* $T(1, 1, 0) = (1, -1)$ *e* $T(1, 0, 0) = (2, -1)$ *temos*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_2} T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Seja $u = (2, 1, 3)$*. É claro que* $T(2, 1, 3) = (6, 7)$*. Se tivéssemos de calcular* $T(2, 1, 3)$ *conhecendo apenas a matriz* $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_2} T$ *começaríamos por escrever o vector* $(2, 1, 3)$ *na basa* $\mathcal{B}$*. Resolvendo o sistema inerente obtemos* $(2, 1, 3) = (3, -2, 1)_{\mathcal{B}}$*. Deste modo*

$$T(u) = 3T(1, 1, 1) - 2T(1, 1, 0) + T(1, 0, 0) = (6, 7).$$

Como é referido acima este resultado pode ser obtido notando que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_2} T \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Complicando ainda mais, vamos considerar a base $\mathcal{B}^* = \big((1, 1), (1, -1)\big)$ *em* $\mathbb{R}^2$*. Para calcular* $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*} T$ *teremos de escrever a imagem dos elementos de* $\mathcal{B}$ *na base* $\mathcal{B}^*$*. Fazendo alguns cálculos obtemos* $T(1, 1, 1) = (2, 2) = (2, 0)_{\mathcal{B}^*}$*,* $T(1, 1, 0) = (1, -1) = (0, 1)_{\mathcal{B}^*}$ *e* $T(1, 0, 0) = (2, -1) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})_{\mathcal{B}^*}$ *e, portanto*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*} T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Note-se que, à luz do que foi dito, os espaços $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ e $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ são isomorfos. Mais concretamente, usando as propriedades que conhecemos sobre matrizes e o Corolário 4.23 temos o seguinte resultado.

Teorema 4.28. *Sejam* V *e* W *espaços vectoriais tais que* $\dim(V) = n$ *e* $\dim(W) = m$ *e sejam* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}^*$ *bases de* V *e de* W*, respectivamente. Nestas condições a função*

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{L}(V, W) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) \\ & T & \mapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*} T \end{array}$$

é um isomorfismo. □

O seguinte resultado mostra que a ligação entre aplicações lineares e matrizes é um pouco mais forte. De facto a composição de aplicações lineares corresponde à multiplicação das matrizes associadas a essas aplicações.

Teorema 4.29. *Sejam* U*,* V *e* W *espaços vectoriais sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensão finita,* $\mathcal{B}_1$*,* $\mathcal{B}_2$ *e* $\mathcal{B}_3$ *bases de* U*,* V *e* W *respectivamente e* $T : U \to V$ *e* $S : V \to W$ *aplicações lineares. Então*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3} (S \circ T) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3} S \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} T.$$

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{B}_1 = \big(u_1, \ldots, u_n\big)$, $\mathcal{B}_2 = \big(v_1, \ldots, v_m\big)$ e $\mathcal{B}_3 = \big(w_1, \ldots, w_k\big)$.

$$\begin{array}{rlrl} (a_{ij})_{m \times n} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} T, & & (b_{ri})_{k \times m} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3} S, \\ (c_{rj})_{k \times n} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3} (S \circ T) & & (d_{rj})_{k \times n} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3} S \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} T. \end{array}$$

Vejamos que,

$$\forall r = 1, \ldots, k \quad \forall j = 1, \ldots, n \qquad c_{rj} = d_{rj}.$$

Por definição de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3}(S\circ T)$, $(S\circ T)(u_j) = (c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{kj})_{\mathcal{B}_3} = \displaystyle\sum_{r=1}^{k} c_{rj} w_r$.

Por outro lado

$$\begin{aligned}
(S\circ T)(u_j) &= S(T(u_j)) = S\left((a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})_{\mathcal{B}_2}\right) \quad \text{por definição de } \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} T \\
&= S\left(a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{mj}v_m\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} S(v_i) \quad \text{por linearidade} \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} (b_{1i}, b_{2i}, \ldots, b_{ki})_{\mathcal{B}_3} \quad \text{por definição de } \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3} S \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \sum_{r=1}^{k} b_{ri} w_r
\end{aligned}$$

Deste modo

$$(S\circ T)(u_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{k} b_{ri}a_{ij}w_r = \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} b_{ri}a_{ij}w_r = \sum_{r=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ri}a_{ij}\right) w_r = \sum_{r=1}^{k} d_{rj}w_r.$$

Note-se que mostramos que $\sum_{r=1}^{k} d_{rj}w_r = \sum_{r=1}^{k} c_{rj}w_r$. Mas isto prova, atendendo a que $\mathcal{B}_3$ é uma base que $d_{rj} = c_{rj}$ para todo $r = 1, \ldots, k$. ☐

Vejamos algumas consequências deste resultado.

Corolário 4.30. *Sejam $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $U_1, U_2, \ldots, U_k$ espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita, e, para $i = 1, \ldots, k$ seja $\mathcal{B}_i$ uma base de U_i. Se $T_i : U_i \to U_{i+1}$, para $i = 1, \ldots, k-1$ é uma aplicação linear então*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_k}(T_{k-1}\circ\cdots\circ T_2\circ T_1) = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{k-1}}^{\mathcal{B}_k} T_{k-1}\right)\cdots\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3} T_2\right)\cdot\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} T_1\right).$$

Demonstração. Basta aplicar repetidamente o teorema anterior. ☐

Corolário 4.31. *Sejam U e V espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita, $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases de U e V respectivamente e $T : U \to V$ é um isomorfismo então*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} T^{-1} = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} T\right)^{-1}.$$

Em particular, se $V = U$ e I_U é a identidade em U então $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} I_U = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} I_U\right)^{-1}$.

Demonstração. Pelos resultados acima sabemos que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(T^{-1}\circ T) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} T^{-1}\cdot\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} T$ e a conclusão segue porque $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(T^{-1}\circ T) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(I_U)$ é a matriz identidade. ☐

Corolário 4.32. *Sejam U e V espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita, $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases de U, $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ bases de V e Então se $T : U \to V$ é uma aplicação linear*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{D}_2} T = \mathcal{M}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2} I_V\cdot\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{D}_1} T\cdot\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} I_U.$$

Em particular, se $V = U$,

$$\boxed{\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2} T = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} I_U\right)^{-1}\cdot\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1} T\cdot\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} I_U.} \quad \textit{ou seja} \quad \boxed{\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2} T = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} I_U\cdot\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1} T\cdot\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} I_U\right)^{-1}.}$$

Demonstração. Note-se que $T = I_V\circ T\circ I_U$. Resta agora aplicar convenientemente o Corolário 4.30 e, para a segunda parte, o corolário anterior. ☐

Aplicando estes resultados ao Exemplo 4.27 temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} T &= \mathcal{M}_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{B}'} I_{\mathbb{R}^2} \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_2} T \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_3} I_{\mathbb{R}^3} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Pelo menos na resolução de alguns exercícios e para evitar calcular matrizes inversas, podemos olhar para a igualdade (nas condições referidas acima)

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2} T = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} I_U\right)^{-1} \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1} T \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} I_U$$

na forma equivalente

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} I_U \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2} T = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1} T \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} I_U.$$

O resultado do corolário anterior dá origem à seguinte definição.

Definição 4.33. *Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Diz-se que A é semelhante a B se existir uma matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertível tal que $A = P^{-1}BP$.*

Proposição 4.34. *A relação de semelhança entre matrizes quadradas é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

É claro que A é semelhante A porque $A = I_n^{-1}AI_n$, sendo I_n a matriz identidade de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Por outro lado se existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertível tal que $A = P^{-1}BP$ então $B = PAP^{-1}$ e portanto B é semelhante a A (porque P é a matriz inversa de P^{-1}). Finalmente, se existem $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertíveis tais que $A = P^{-1}BP$ e $B = Q^{-1}CQ$ então $A = P^{-1}BP = P^{-1}Q^{-1}CQP = (QP)^{-1}C(QP)$. □

Note-se que a única matriz que é equivalente à matriz identidade I_n é a própria matriz I_n. Isto acontece porque, se B for equivalente a I_n então $B = P^{-1}I_nP$, para alguma matriz invertível P. O que está em causa é a I_n comuta com qualquer matriz. É então claro que, no lugar de I_n podemos colocar qualquer matriz diagonal.

A ligação entre a definição de semelhança de matrizes quadradas e Corolário 4.32 é óbvio mas pode ser levada um pouco mais além.

Proposição 4.35. *Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Então A e B são semelhantes se e só se existem bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$ e uma aplicação linear $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ tais que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} T$ e $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} T$. Além disso uma das bases pode ser arbitrária.*

Demonstração. Seja $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertível tal que $B = P^{-1}AP$ e consideremos $\mathcal{B}$ uma base qualquer de $\mathbb{K}^n$.

Defina-se $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ tal que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} T$. Como já foi referido, isto é feito definindo a imagem de j-ésimo elemento de B como $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})_{\mathcal{B}}$, se $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

Consideremos $\mathcal{B}'$ a base de $\mathbb{K}^n$ cujo j-ésimo elemento é $(p_{1j}, p_{2j}, \ldots, p_{nj})_{\mathcal{B}}$, se $P = (p_{ij})_{n\times n}$. Deste modo $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} I_n$. Usando agora o Corolário 4.32 temos

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} T = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} I_n \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} T \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} I_n = P^{-1}AP = B.$$

A outra implicação é simplesmente o Corolário 4.32. □

Por exemplo, duas quaisquer matrizes da forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 2 \end{pmatrix}$, com $x \in \mathbb{R}$ são semelhantes pois, se $x \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & 0 \\ 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x & 0 \\ 1 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}.$$

4.3 Exercícios resolvidos

Vamos de seguida ver alguns exemplos.

Exercício 1. Seja V um espaço vectorial de dimensão n. Pretende-se encontrar as aplicações lineares $T : V \to V$ tais que

$$\forall u \in V \quad \{T(u), u\} \text{ é um conjunto linearmente dependente.}$$

Isto significa que, para todo $u \in V$ existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T(u) = \lambda u$ (note-se que λ pode depender de u).

Suponhamos que T satisfaz a condição e seja $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ uma base de V. Então para todo $i = 1, \ldots, n$ existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tal que $T(u_i) = \lambda_i u_i$. O que vamos mostrar é que a linearidade de T vai implicar que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.

Para $i = 2, \ldots, n$, como $\{T(u_i - u_1), u_i - u_1\}$ é um conjunto linearmente dependente e $u_i - u_1 \neq 0$, existe $A_i \in \mathbb{K}$ tal que $T(u_i - u_1) = A_i(u_i - u_1) = A_i u_i - A_i u_1$. Por outro lado $T(u_i - u_1) = T(u_i) - T(u_1) = \lambda_i u_i - \lambda_1 u_1$.

Igualando os dois valores que encontramos para $T(u_i - u_1)$ obtemos $A_i u_i - A_i u_1 = \lambda_i u_i - \lambda_1 u_1$. Usando agora o facto de $\{u_i, u_1\}$ ser um conjunto livre temos $A_i = \lambda_i$ e $A_i = \lambda_1$ e, portanto, $\lambda_i = \lambda_1$ para todo $i = 2, \ldots, n$.

Finalmente, se $u \in V$, sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. Então $T(u) = \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n) = \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_1 u_n = \lambda_1 (\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \lambda_1 u$.

Exercício 2. Sejam $V_1, V_2, \ldots, V_k$ subespaços de $\mathbb{K}^n$ tais que $V_i \subseteq V_{i+1}$ e $\dim V_i = i$, para $i = 1, \ldots, k-1$. Vamos definir uma aplicação linear $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ tal que $\mathrm{Nuc}(T^i) = V_i$, para $i = 1, \ldots, k$. Note-se que, se $v \in \mathbb{K}^n$ então:

- $v \in V_1$ se e só se $T(v) = 0$;
- $v \in V_2$ se e so se $T^2(v) = 0$, ou seja, se e só se $T(v) \in V_1$;
- $(\cdots)$
- $v \in V_k$ se e só se $T^k(v) = 0$, ou seja, se e só se $T(v) \in V_{k-1}$.

Como definir T equivale a definir as imagens dos elementos de uma base de $\mathbb{K}^n$ então a observação acima leva-nos a considerar uma base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tal que $(v_1, \ldots, v_i)$ é uma base de V_i para $i = 1, \ldots, k$. Define-se então $T(v_1) = 0$, $T(v_j) = v_{j-i}$, se $j = 2, \ldots, k$ e $T(v_j) = v_j$, se $j > k$. É assim fácil ver que T está nas condições referidas. O esquema a "reter" é

$$v_{k+j} \xrightarrow[T]{} v_{k+j}, \qquad\qquad v_k \xrightarrow[T]{} v_{k-1} \quad \cdots \quad \xrightarrow[T]{} v_2 \xrightarrow[T]{} v_1 \xrightarrow[T]{} 0.$$

Exercício 3. Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ correspondente a uma rotação no sentido directo em volta da origem de um ângulo α. Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Então existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que, se $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) = (\rho \cos(\gamma), \rho\,\mathrm{sen}\,(\gamma))$. O ponto (x, y) é enviado por f no ponto $(x', y') = (\rho \cos(\gamma + \alpha), \rho\,\mathrm{sen}\,(\gamma + \alpha))$. Como

$$\rho \cos(\gamma + \alpha) = \rho \cos(\gamma)\cos(\alpha) - \rho\,\mathrm{sen}\,(\gamma)\,\mathrm{sen}\,(\alpha), \quad \rho\,\mathrm{sen}\,(\gamma + \alpha) = \rho\,\mathrm{sen}\,(\gamma)\cos(\alpha) + \rho \cos(\gamma)\,\mathrm{sen}\,(\alpha)$$

temos $f(x, y) = \big(\cos(\alpha)\, x - \mathrm{sen}\,(\alpha)\, y, \mathrm{sen}\,(\alpha) x + \cos(\alpha)\, y\big)$.

Fica assim mostrado que f é linear e $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_2} f = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\mathrm{sen}\,(\alpha) \\ \mathrm{sen}\,(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

Note-se que, se assumíssemos que f era linear então o cálculo da matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_2} f$ era bem mais simples pois $f(1, 0) = (\cos(\alpha), \mathrm{sen}\,(\alpha))$ e $f(0, 1) = (-\mathrm{sen}\,(\alpha), \cos(\alpha))$.

Exercício 4. Vamos agora definir $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z)$ é a imagem ao espelho relativamente ao plano de equação $x+y=0$. Vamos agora escolher três vectores que formem uma base de $\mathbb{R}^3$ e cuja imagem por T seja fácil de calcular. Escolhemos dois vectores u e v no plano e um vector w perpendicular ao plano. Note-se que $T(u)=u$, $T(v)=v$ e $T(w)=-w$, ficando assim definido T. Temos assim, se $\mathcal{B}=\big(u,v,w\big)$, com $w=(1,1,0)$, $u=(0,0,1)$ e $v=(1,-1,0)$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_3}T &= \begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0&1&-1\\0&-1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\\frac12&-\frac12&0\\\frac12&\frac12&0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercício 5. Consideremos agora, em $\mathbb{R}^3$ uma rotação T de um ângulo π em relação a um eixo. Suponhamos que $(2,1,1)$ é um vector desse eixo. Vamos (novamente) escolher uma base que se adapte convenientemente a este problema. Consideremos $u=(2,1,1)$ e v e w dois vectores não colineares e que sejam perpendiculares a $(2,1,1)$. Nesta situação $T(u)=u$, $T(v)=-v$ e $T(w)=-w$. Deste modo, se $v=(0,1,-1)$, $w=(1,-2,0)$ e $\mathcal{B}=\big(u,v,w\big)$ então $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. Sendo assim

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_3}T=\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_3}I\cdot\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}T\cdot\mathcal{M}_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{B}}I=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&-2\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&-2\\1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}=\frac13\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\2&1&-2\end{pmatrix},$$

e portanto $T(x,y,z)=\frac13(x+2y+2z,2x-2y+z,2x+y-2z)$.

Exercício 6. Vamos agora definir $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z)$ é a projecção do vector (x,y,z) no plano de equação $ax+by+cz=0$ (com $a,b,c\in\mathbb{R}$ não todos nulos). Vamos assumir que T é linear (embora isso possa ser verificado!). Vamos agora escolher três vectores que formem uma base de $\mathbb{R}^3$ e cuja imagem por T seja fácil de calcular. Escolhemos dois vectores u e v no plano e um vector w perpendicular ao plano. Note-se que $T(u)=u$, $T(v)=v$ e $T(w)=0$, ficando assim definido T. Temos assim, se $\mathcal{B}=\big(u,v,w\big)$, com $w=(a,b,c)$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_3}T = \begin{pmatrix}u_1&v_1&a\\u_2&v_2&b\\u_3&v_3&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1&v_1&a\\u_2&v_2&b\\u_3&v_3&c\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}u_1&v_1&0\\u_2&v_2&0\\u_3&v_3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1&v_1&w_1\\u_2&v_2&w_2\\u_3&v_3&w_3\end{pmatrix}^{-1}.$$

Vamos tentar resolver com a maior generalidade possível. Vamos supor que $a\neq 0$. Neste caso podemos escolher $u=(b,-a,0)$ e $v=(-c,0,a)$. Temos assim

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_3}T = \begin{pmatrix}b&c&0\\-a&0&0\\0&a&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&-c&a\\-a&0&b\\0&a&c\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a(a^2+b^2+c^2)}\begin{pmatrix}a(b^2-c^2)&-b(2c^2+a^2)&c(2b^2+a^2)\\-a^2b&a(c^2+a^2)&-acb\\-a^2c&-acb&a(b^2+c^2)\end{pmatrix}$$

Definida a matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_3}T$ fica definida a aplicação T. Atendendo à generalidade com que estamos a lidar, os cálculos não foram muito complicados.

Exercício 7. Consideremos as funções $T,S:\mathcal{P}_3\to\mathcal{P}_3$ tal que para cada polinómio p, $T(p)=p''+p$ e $S(p)(t)=(1+3t)p'(t)$. Calculemos $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}T$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}S$, sendo $\mathcal{B}=\big(1,t,t^2,t^3\big)$. Como:

- $T(1)=1=(1,0,0,0)_{\mathcal{B}}$, $T(t)=t=(0,1,0,0)_{\mathcal{B}}$, $T(t^2)=2+t^2=(2,0,1,0)_{\mathcal{B}}$ e $T(t^3)=6t+t^3=(0,6,0,1)_{\mathcal{B}}$;
- $S(1)=(0,0,0,0)_{\mathcal{B}}$, $S(t)=1+3t=(1,3,0,0)_{\mathcal{B}}$, $S(t^2)=2t+6t^2=(0,2,6,0)_{\mathcal{B}}$ e $S(t^3)=3t+t^3=(0,0,3,9)_{\mathcal{B}}$

temos

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} T \ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} S \ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Daqui podemos concluir que T e um isomorfismo, porque a matriz acima tem característica 4. Por outro lado $\mathrm{Im}(S)$ tem dimensão 3 e (é claro) $\mathrm{Nuc}(S)$ tem dimensão 1.

É claro que a expressão de T e S pode ser feita directamente usando a definição. De facto

- $T(a+bt+ct^2+dt^3) = 2c+6dt+a+bt+ct^2+dt^3 = a+2c+(b+6d)\,t+c\,t^2+d\,t^3$;
- $S(a+bt+ct^2+dt^3) = (1+3t)(b+2ct+3dt^2 = b+(2c+3b)\,t+(3d+6c)\,t^2+9d\,t^3$.

Isto pode ser "confirmado" usando as matrizes de T e de S. Temos

$$\begin{aligned} T(a+bt+ct^2+dt^3) &= T((a,b,c,d)_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \\ &= (a+2c, b+6d, c, d)_{\mathcal{B}} = a+2c+(b+6d)\,t+c\,t^2+d\,t^3. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S(a+bt+ct^2+dt^3) &= S((a,b,c,d)_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \\ &= (b, 2c+3b, 3d+6c, 9d)_{\mathcal{B}} = b+(2c+3b)\,t+(3d+6c)\,t^2+9d\,t^3. \end{aligned}$$

Exercício 8. Consideremos $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_2} T = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$. Vejamos que existe uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} T$ é diagonal.

Queremos encontrar $u, v \in \mathbb{R}^2$ tais que $\mathcal{B} = (u, v)$ seja uma base e $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} T$ seja diagonal, isto é, $T(u)$ múltiplo de u e $T(v)$ múltiplo de v. Mas, se $w = (a, b) \neq (0, 0)$ então

$$T(a,b) = \lambda(a,b) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} (-5-\lambda)a + 4b & = 0 \\ 8a + (-1-\lambda)b & = 0 \end{cases} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} b & = \frac{5+\lambda}{4} a \\ (\lambda+9)(\lambda-3)\,a & = 0. \end{cases} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \lambda = 3 & b = 2a \\ \lambda = -9 & b = -a. \end{cases}$$

Podemos assim escolher $u = (1, 2)$, para $\lambda = 3$, e $v = (1, -1)$, para $\lambda = -9$. Deste modo $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$.

Note-se que, a partir do momento em que mostramos que há uma base de $\mathbb{R}^2$ na qual a matriz de T é diagonal, é fácil encontrar uma expressão para $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}^n$ que é a matriz de T^n na base canónica. Para isso basta notar, usando o Corolário 4.32, que

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}^n &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^n \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-9)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 3^n + 2 \cdot (-9)^n & 3^n - (-9)^n \\ 2 \cdot 3^n - 2 \cdot (-9)^n & 2 \cdot 3^n + (-9)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Note-se que esta argumentação funciona com qualquer matriz que seja semelhante a uma matriz diagonal.

$\boxed{\textbf{Exercício 9.}}$ Vamos ver em que condições existe uma aplicação linear $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ tal que $\mathrm{Nuc}(T) = \mathrm{Im}(T)$. Atendendo ao Teorema 4.19 se existir uma tal aplicação então n terá de ser par e $\dim \mathrm{Nuc}(T) = \dim \mathrm{Im}(T) = m$, sendo $n = 2m$.

Inversamente suponhamos que $n = 2m$, com $m \in \mathbb{N}$ e seja $\mathcal{B} = \big(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m\big)$ uma base de $\mathbb{K}^n$ e definamos T do seguinte modo: $T(u_i) = 0$ e $T(v_i) = u_i$, para $i = 1, \ldots, m$. Deste modo:

- $\{u_1, \ldots, u_m\} \subseteq \mathrm{Nuc}(T)$ e portanto, $\dim \mathrm{Nuc}(T) \geq m$;
- $\mathrm{Im}(T)$ é gerada por $\{u_1, \ldots, u_m\}$ e portanto $\dim \mathrm{Nuc}(T) = m$, pois $\{u_1, \ldots, u_m\}$ é um conjunto livre.

Assim $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathrm{Nuc}(T)$ e $\dim \mathrm{Im}(T) = m$. Usando o Teorema 4.19 obtemos $\dim \mathrm{Nuc}(T) = m$ e, portanto $\mathrm{Nuc}(T) = \mathrm{Im}(T)$.

Nesta segunda parte poderíamos não ter usado o Teorema 4.19. É claro que a prova ficaria mais complicada. O que falta mostrar é que $\mathrm{Nuc}(T)$ está contido no espaço gerado por $\{u_1, \ldots, u_m\}$. O raciocínio pode ser o seguinte. Seja $w \in \mathrm{Nuc}(T)$ e consideremos $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ tais que $w = a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m + b_1 v_1 + \cdots + b_m v_m \in \mathrm{Nuc}(T)$. Então $0 = T(w) = b_1 u_1 + \cdots + b_m u_m$ de onde se conclui que $b_1 = \cdots = b_m = 0$ porque $\{u_1, \ldots, u_m\}$ é um conjunto livre e portanto $w \in \mathrm{Nuc}(T)$.

$\boxed{\textbf{Exercício 10.}}$ Define-se traço de uma matriz quadrada A e denota-se por $\mathrm{tr}(A)$ como a soma dos elementos da diagonal de A. Vejamos que se $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ é uma aplicação linear e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são bases de $\mathbb{R}^n$ então $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} T$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} T$ têm o mesmo traço. Começamos por ver que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times n}$. Comecemos por notar que

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)_{n\times n} \qquad BA = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} \right)_{n\times n}.$$

Deste modo

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} \right) = \mathrm{tr}(BA).$$

Usando o Corolário 4.32 e a igualdade acima temos

$$\mathrm{tr}\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} T\right) = \mathrm{tr}\left(\underbrace{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} I} \cdot \underbrace{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} T \cdot \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} I\right)^{-1}} \right) = \mathrm{tr}\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} T \cdot \underbrace{\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} I\right)^{-1} \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} I}_{=I_n} \right) = \mathrm{tr}\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} T\right).$$

Isto significa que podemos definir o traço de uma aplicação linear de $\mathbb{K}^n$ em $\mathbb{K}^n$ como sendo o traço da matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} T$, sendo $\mathcal{B}$ uma qualquer base de $\mathbb{K}^n$.

4.4 Exercícios

É muito fácil encontrar exercícios rotineiros sobre aplicações lineares, principalmente se estivermos a lidar apenas com espaços vectoriais de dimensão finita. Por exemplo:

- Escolhemos $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, com ou sem parâmetros e podemos fazer perguntas sobre a aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = A$, sendo $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}'$ base de $\mathbb{R}^m$:
  - qual o núcleo e a imagem de T? e de T^2?
  - T é semelhante a uma matriz diagonal?
  - qual a matriz de T noutras bases (que sejam dadas)? T é um isomorfismo e se sim, qual a sua inversa.
- Escolhemos um subespaço E de $\mathbb{R}^n$ e um subespaço F de $\mathbb{R}^m$ e procuramos uma (todas!) aplicação linear com núcleo igual a E e imagem igual a F.

Desta maneira já temos um número grande de exercícios para treinar.

Para não estar sempre a repetir, U, V e W são sempre espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$.

1. Consideremos o espaço vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Quais das funções $T : \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ definidas a seguir são lineares.

   a) $T(f)(x) = f(-x)$, se $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $x \in \mathbb{R}$;

   b) $T(f)(x) = f(x+1) - f(x)$, se $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $x \in \mathbb{R}$;

   c) $T(f)(x) = f(ax+b)$, se $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $x \in \mathbb{R}$ (com $a, b \in \mathbb{R}$);

   d) $T(f)(x) = xf(x)$, se $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $x \in \mathbb{R}$;

   e) $T(f)(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, se $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $x \in \mathbb{R}$ (com $h \neq 0$).
2. Calcule T^2, em que T está definida na última alínea da pergunta anterior.
3. Seja $F : V \to W$ uma função aditiva (preserva a soma). Mostre que $F(\lambda u) = \lambda F(u)$ qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{Q}$ e $u \in V$. Sugestão: comece por considerar os casos em que: $\lambda \in \mathbb{N}$; $\lambda \in \mathbb{Z}$; λ é o inverso de um inteiro positivo.
4. Dê um exemplo de uma função <u>não linear</u> $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $T(au) = aT(u)$ para todo $a \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}^2$.
5. Mostre que, se $T : V \to W$ é linear, $A \subseteq V$. Mostre que:

   a) se $T(A)$ é um subconjunto livre de W então A é livre;

   b) se T não é injectiva então existe $B \subseteq V$ que é livre e tal que $T(B)$ não é livre.
6. Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. Mostre que a imagem recíproca por T de um subespaço vectorial de W é um subespaço vectorial de V.
7. Calcule, se existir, T^{-1} em que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é definida por:

   a) $T(x,y,z) = (x+y, y+z, z+x)$;

   b) $T(x,y,z) = (x-3y+2z, y+z, y+4z)$;

   c) $T(x,y,z) = (x+2y+4z, 2x+4z, x+y+z)$;

   d) $T(x,y,z) = (2x+12y+19z, x+123y+121z, 0)$.
8. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear tal que $T(1,1,1) = T(0,1,1) = 2\,T(0,0,1)$. Quais as possibilidades para a característica de $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_3} T$? Dê um exemplo de T em cada uma das situações.
9. Seja $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear tal que $\varphi(1,0,0) = (0,1,0)$, $\varphi(0,1,0) = (2,2,2)$ e $\varphi^3 = \varphi$. Calcule φ e, de seguida, φ^n, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
10. Mostre que não existe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear tal que $\varphi(1,0,0) = (0,1,0)$, $\varphi(0,1,0) = (2,2,0)$ e $\varphi^3 = \varphi$.

11. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineares, não bijectivas e tais $\mathrm{Nuc}(\varphi) = \mathrm{Nuc}(\psi)$ e $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}(\psi)$.

   a) Mostre que, se $n = 2$, então ϕ e ψ são múltiplas uma da outra, isto é, existe $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que $\phi(u) = \lambda\psi(u)$, para todo $u \in \mathbb{R}^2$.

   b) Mostre (com um exemplo) que o resultado da alínea anteiror não é válido se $n = 3$.

12. Considere a aplicação linear $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x, 4x - y, 2x + 3y - z) \end{array}$.

   a) Mostre que T é invertível e calcule T^{-1}.

   b) Encontre uma base $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

13. Seja $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e considere $T : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & AM - MA \end{array}$

   a) Mostre que T é linear.

   b) Considere $n = 2$ e $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e calcule uma base de $\mathrm{Nuc}(T)$, $\mathrm{Im}(T)$, $\mathrm{Nuc}(T^2)$, $\mathrm{Im}(T^2)$.

   c) Nas condições da alínea anterior calcule $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} T$, sendo $\mathcal{B}$ uma base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à sua escolha.

14. Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ aplicação linear tal que $T(1, 0, 0) = x^3 + 2x$, $T(0, 1, 0) = x^2 - 2x$ e $T(0, 0, 1) = x^3 + x^2$.

   a) Determine uma base de $\mathrm{Nuc}(T)$ e uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ que a contenha.

   b) Determine uma base de $\mathrm{Im}(T)$ e uma base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ que a contenha.

   c) Calcule $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} T$.

15. Considere $V = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ e as operações

$$\oplus : \begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ (x, y), (a, b) & \mapsto & (xa, yb) \end{array} \quad \text{e} \quad \odot : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \to & V \\ \big(\lambda, (x, y)\big) & \mapsto & (x^\lambda, y^\lambda) \end{array}.$$

   a) Mostre que V com as operações $\oplus$ e $\odot$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$.

   b) Mostre que, se $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ então $\mathcal{B}_{a.b} = \big((a, 1), (1, b)\big)$ é uma base de V.

   c) Mostre que $T : \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ (x, y) & \mapsto & (\frac{x^2}{y}, \frac{y^3}{x^2}) \end{array}$ é linear e calcule $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{2,3}}^{\mathcal{B}_{3.2}} T$.

   d) Seja $\mathcal{B} = \big((e, 1), (1, e)\big)$, em que e é o número de Euler (ou de Napier). Calcule $T(x, y)$, se $T : V \to V$ é linear e tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

16. Considere $V = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ e as operações

$$\oplus : \begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ (x, y), (a, b) & \mapsto & (xa, y + b) \end{array} \quad \text{e} \quad \odot : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \to & V \\ \big(\lambda, (x, y)\big) & \mapsto & (x^\lambda, \lambda\, y) \end{array}.$$

   Use o facto de V ser um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$.

   a) Mostre que, se $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ então $\mathcal{B}_{a,b} = \big((a, 0), (1, b)\big)$ é uma base de V.

   b) Calcule explicitamente $T : V \to V$ linear tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{2,2}}^{\mathcal{B}_{3,3}} T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   c) Seja $S : V \to V$ definida por $S(x, y) = (xe^y, y + \log x)$. Mostre que S é linear e calcule uma base do seu núcleo.

17. Sejam $S \leq \mathbb{R}^n$ e $T \leq \mathbb{R}^m$. Quais as condições sobre S e T de modo a que exista $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear tal que $\mathrm{Nuc}(\varphi) = S$ e $\mathrm{Im}(\varphi) = T$?

18. Sejam $\mathcal{B} = \big((1,1),(2,3)\big)$, $\mathcal{D} = \big((1,2),(2,1)\big)$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathcal{M}_D^D T$.

19. Sejam U, V, W espaços vectoriais, $T : U \to V$ e $S : V \to W$ aplicações lineares. Mostre que, se $\big(u_1, \ldots, u_r\big)$ é uma base de $\mathrm{Nuc}(T)$ e $\big(T(w_1), \ldots, T(w_k)\big)$ é uma base de $\mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Nuc}(S)$ então $\big(u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_k\big)$ é uma base de $\mathrm{Nuc}(S \circ T)$.

20. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}} T$ é a matriz identidade sendo $\mathcal{B} = \big((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\big)$ e $\mathcal{D} = \big((1,1,0),(2,1,0),(0,0,-1)\big)$. Sejam ainda $\mathcal{B}' = \big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ e $\mathcal{C}_3 = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$. Calcule $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} T$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} T$, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{B}} T$, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_3} T$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} T^{-1}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{B}} T^{-1}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_3} T^{-1}$. Calcule ainda $T(x,y,z)$.

21. Sejam $A_1 = \{(a+c, a+b+2c, -a+b, 2a+b+3c); a,b,c \in \mathbb{R}\}$, $A_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t = 0\}$ e A_3 o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $(1,0,0,1)$. Para que valores de $i, j = 1,2,3$ existe uma aplicação linear de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^4$ cujo núcleo seja A_i e a imagem A_j?

22. Seja $\phi, \psi : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tais que, se $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ então $\phi(p)(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$ e $\psi(p)(x) = a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^{n+1}$. Mostre que $\phi \circ \psi = I$ e $\psi \circ \phi \neq I$.

23. Sejam $T_1, T_2, T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidos por

$$\begin{aligned} T_1(x,y,z) &= (x+y+z, x+y+z, x+y+z) \\ T_2(x,y,z) &= (2x-y-z, x-2y+z, x+y-2z) \\ T_3(x,y,z) &= (-x+y+z, x-y+z, x+y-z). \end{aligned}$$

   a) Para cada $i = 1,2,3$ calcule $\mathrm{Nuc}(T_1)$ e $\mathrm{Im}(T_i)$.
   b) Para cada $i = 1,2,3$ escolha $u \in \mathrm{Im}(T) \setminus \{(0,0,0)\}$ e calcule $T_i^{-1}(u)$.
   c) Para que valores de i, $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Nuc}(T_i) \oplus \mathrm{Im}(T_i)$.
   d) $\{T_1, T_2, T_2\}$ é um subconjunto livre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$?

24. Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_3} T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Mostre que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Nuc}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.
   b) Calcule $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (1,1,4)\}$.
   c) Encontre $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} T$ em que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ contida em $\mathrm{Nuc}(T) \cup \mathrm{Im}(T)$.

25. Sejam $T : U \to V$ e $S : V \to W$ aplicações lineares tais que $\mathrm{Nuc}(T)$ e $\mathrm{Nuc}(S)$ têm dimensão finita. Mostre que:

   a) $\mathrm{Nuc}(T) \subseteq \mathrm{Nuc}(S \circ T)$;
   b) $u \in \mathrm{Nuc}(S \circ T)$ s e sé se $T(u) \in \mathrm{Nuc}(S)$.
   c) $\dim \mathrm{Nuc}(S \circ T) = \dim \mathrm{Nuc}(T) + \dim \mathrm{Nuc}(S) \cap \mathrm{Im}(T)$ (aplique o Teorema 4.19 à restrição de T a $\mathrm{Nuc}(S \circ T)$).
   d) $\dim \mathrm{Nuc}(S \circ T) = \dim \mathrm{Nuc}(T) + \dim \mathrm{Nuc}(S)$ se e sé se $\mathrm{Nuc}(S) \subseteq \mathrm{Im}(T)$ (em particular, se T for sobrejectiva).

26. Encontre todas as aplicações lineares $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tais que $\mathrm{Nuc}(T) = \{(x,y,z) : 2x+y+z = 0\}$ e $(1,1,1) \in \mathrm{Im}(T)$. Para cada uma delas encontre $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_3} T$.

27. Seja $T : V \to W$ tal que $\mathrm{Nuc}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$ têm dimensão finita. Mostre que V também tem dimensão finita.

28. Seja $T : V \to V$ uma aplicação linear. Mostre que $\mathrm{Nuc}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0_V\}$ se e só se $\mathrm{Nuc}(T^2) = \mathrm{Nuc}(T)$.

29. Sejam $E, F \leq V$ tais que $\dim E$ e $\dim F$ são finitas. Considere-se o espaço vectorial $E \times F$.

   a) Mostre que $\Delta^* = \{(x, -x) : x \in E \cap F\}$ é um subespaço vectorial de $E \times F$ que é isomorfo a $E \cap F$.
   b) Considere $\begin{array}{cccc} \varphi : & E \times F & \to & E + F \\ & (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$. Calcule $\mathrm{Nuc}(\varphi)$ e conclua, usando o Teorema 4.19 que $\dim E + F = \dim E + \dim F - \dim E \cap F$.

30. Seja $T : V \to V$ linear e tal que $T^2 = T$. Mostre que:

a) $(I - T)^2 = I - T$;

b) se $\lambda \in \mathbb{K}$, $u \in V \setminus \{0\}$ e $T(u) = \lambda u$ então λ é igual a 0 ou a 1.

c) $u \in \operatorname{Im}(T)$ se e só se $T(u) = u$;

d) se $u \in V$ então $T(x) - u \in \operatorname{Nuc}(T)$;

e) $V = \operatorname{Nuc}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$;

f) se V tem dimensão finita então existe uma base $\mathcal{B}$ de V tal que a $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} T$ é uma matriz diagonal cujos elementos não nulos são iguais a 1.

31. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear não nula tal que $T^3 = T$.

a) Mostre que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Nuc}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$.

b) Mostre que existe uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ e $k \leq n$ tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} T = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ em que $a_{ij} = 0$ se $i > k$ ou $j > k$ e a matriz $(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}$ é invertível e igual à sua inversa.

32. Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita, com $\dim V > \dim W$, $T : V \to W$ e $S : W \to V$ lineares.

a) Mostre que $\dim \operatorname{Im}(S \circ T) < \dim V$.

b) Conclua que $S \circ T$ não é invertível.

33. Mostre que:

a) a matriz $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, com $a \neq 0$, não é semelhante a uma matriz diagonal;

b) uma matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})(\mathbb{R})$ é semelhante a $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ se e só se $A^2 = -I_2$;

c) se A é invertível então AB é semelhante a BA.

34. Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ admitindo uma base $\mathcal{B}$. Defina $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ e $V^{**} = \mathcal{L}(V^*, \mathbb{R})$.

a) Mostre que se $x \in V$ então $\begin{array}{rccc} \widehat{x} : & V & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f(x) \end{array}$ é linear (isto é, pertence a V^{**}).

b) Mostre que se $\begin{array}{rccc} \phi : & V & \to & V^{**} \\ & x & \mapsto & \widehat{x} \end{array}$ é um monomorfismo.

c) Conclua que, se $\dim V$ é finita então V e V^{**} são isomorfos.