Barca, A., Peralbo, M., Porto, A., Duarte da Silva, B. e Almeida, L. (Eds.) (2007).
Libro de Actas do Congreso Internacional Galego-Portugués de Psicopedagoxía.
A.Coruña/Universidade da Coruña: Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía e Educación.
ISSN: 1138-1663.

ESTRATÉGIAS INTUITIVAS DE ALUNOS DO 9.º ANO DE ESCOLARIDADE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE COMBINATÓRIA

Paulo Ferreira Correia
Escola Secundária/3 de Barcelos – Barcelos/Portugal
ferreiracorreiapaulo@gmail.com
José António Fernandes
Universidade do Minho – Braga/Portugal
jfernandes@iep.uminho.pt

Resumo. A importância da Combinatória, com aplicações crescentes, implica que seja repensado o seu lugar na escola. É neste contexto que se insere o presente estudo, tendo por objectivo avaliar o potencial das estratégias intuitivas de resolução de problemas de Combinatória em alunos do 9.º ano.
O estudo foi realizado numa turma de 9.º ano, com 27 alunos, e a recolha de dados foi efectuada através da administração individual de um teste, incluindo questões sobre as operações combinatórias: permutações simples, arranjos com repetição, arranjos simples e combinações simples. As sessões de realização dos testes foram audiogravadas, tendo sido pedido aos alunos para verbalizarem os seus pensamentos e o entrevistador, sempre que pertinente, questionou-os no sentido de aprofundar a sua compreensão.
Globalmente, apesar de algumas estratégias intuitivas dos alunos se revelarem um tanto limitadas, os resultados do estudo mostram que as suas ideias intuitivas têm potencial para iniciarem o estudo da Combinatória. Verificou-se ainda que, em maior ou menor grau, o desempenho dos alunos em Combinatória foi influenciado pelo tipo de operação combinatória, pelo número de elementos envolvidos na operação combinatória e pelo desempenho em Matemática.

Palavras-chave: Combinatória; Estratégias intuitivas; Alunos do 9.º ano de escolaridade.

1. Introdução

Actualmente, o tema de Combinatória faz parte do programa de Matemática A de 12.º ano (Ministério da Educação, 2002) e no ensino básico são-lhe feitas alusões no Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais (Ministério da Educação, 2001).

A pouca ênfase dada a este tema no currículo escolar contrasta com a importância que lhe é atribuída para o desenvolvimento e a aprendizagem dos alunos, designadamente pela influência do raciocínio combinatório no desenvolvimento do pensamento formal (Piaget & Inhelder, s/d), por ser incontestavelmente um domínio privilegiado do ensino da matemática (Glaymann & Varga, 1975), aplicando-se nas mais variadas áreas científicas, e porque as estratégias gerais, não sendo apenas aplicáveis à Combinatória, relevam o papel que a Combinatória pode desempenhar na aprendizagem de técnicas gerais de resolução de problemas (Roa, Batanero, Godino & Cañizares, 1996).

As razões referidas e o facto de ser possível ensinar com êxito alguns procedimentos combinatórios a adolescentes de 10-15 anos (Fischbein, Pampu & Mînzat, 1970) realçam a conveniência de aprofundar esta temática nos currículos escolares, especificamente no âmbito da disciplina de Matemática. Com este propósito, neste texto, abordam-se as estratégias intuitivas de resolução de problemas de Combinatória em alunos do 9.º ano, a partir do estudo das estratégias utilizadas na resolução de problemas de Combinatória e da influência dos factores operação combinatória, número de elementos envolvidos na operação combinatória e desempenho em Matemática sobre o desempenho dos alunos em Combinatória.

2. A aquisição de estratégias de resolução de problemas de Combinatória

Segundo Piaget e Inhelder (s/d), atingido o período das operações formais, os adolescentes descobrem espontaneamente procedimentos sistemáticos de enumeração e de contagem combinatória. A aquisição de estratégias gerais de contagem, envolvendo operações de segunda ordem, verifica-se a partir dos 11-12 anos, no caso das combinações e dos arranjos, e as permutações não se completam antes dos 15 anos. A descoberta mais tardia das permutações deve-se, sem dúvida, ao facto de serem muito mais numerosas e implicarem o estabelecimento de uma relação segundo uma espécie de sistema móvel e reversível (transformação da ordem a partir de elementos iniciais variáveis).

Tendo feito uma análise aprofundada aos resultados obtidos nas investigações de Piaget e Inhelder, Fischbein (1975) concluiu que nem todos os sujeitos do estádio das operações formais eram capazes de descobrir o método de construir as combinações, nem sequer eram capazes de tratar satisfatoriamente os arranjos até à idade dos 13 anos e as permutações até à idade dos 14-15 anos, discordando ainda de Piaget relativamente ao período de tempo que decorre entre a aprendizagem das combinações e permutações por parte da criança. Ou seja, a capacidade requerida para as operações combinatórias desenvolve-se gradualmente, mas não fica completa durante este estádio.

Na investigação levada a cabo por Fischbein, Pampu e Mînzat (1970), envolvendo alunos do 4.º ano (10-11 anos), do 6.º ano (12-13 anos) e do 8.º ano (14-15 anos), antes de qualquer instrução, verificou-se que com o aumento da idade as estimativas subjectivas do número de permutações, em média, se aproximavam mais dos valores correctos, obtendo-se maiores diferenças entre as idades quando o número de elementos envolvidos na permutação era maior. Já em relação à natureza dos objectos considerados (números, letras e formas geométricas) não se destacaram diferenças significativas. Uma análise mais detalhada dos dados permitiu concluir que existe uma tendência geral para subestimar o número de permutações possíveis, agravando-se essa subestimação quando aumenta o número de objectos considerados. Por outro lado, uma instrução através de descoberta guiada, socorrendo-se de diagramas de árvore, revelou efeitos muito positivos, diminuindo consideravelmente as diferenças entre os grupos etários nas operações de arranjos com repetição e de permutações.

Aprofundando o estudo do papel da instrução no desenvolvimento das capacidades combinatórias em crianças de 11 a 14 anos, Fischbein e Gazit (1988, citado em Roa, 2000) estudaram as variáveis: tipo de operação combinatória, idade das crianças e natureza, abstracta ou concreta, dos elementos que se consideram no problema. Em termos de resultados, os autores concluíram que a idade e a instrução têm um efeito positivo na aquisição dos conceitos combinatórios e que para as crianças resultou mais fácil trabalhar com dígitos do que com objectos (bandeiras) e pessoas (comités). No pré-teste, a estratégia mais utilizada foi a enumeração e, no pós-teste, foi a fórmula para os arranjos e a enumeração para as combinações. Nesta investigação um dos erros mais significativos que se observou na resolução dos problemas propostos foi a atribuição da fórmula dos arranjos e das combinações indistintamente a um e a outro conceito. Ao aderirem a este erro, denominado por *erro de ordem*, os sujeitos não foram capazes de reconhecer se a ordem era ou não relevante para a resolução do problema, desenvolvendo incorrectamente as fórmulas das operações combinatórias. Concluíram também, relativamente à dificuldade das operações combinatórias, que antes da instrução a maior dificuldade correspondia às permutações e arranjos com repetição, seguindo-se os arranjos sem repetição e as combinações.

Mais recentemente, Fischbein e Grossman (1997) estudaram o mecanismo que produz as intuições combinatórias e a sua relação com os procedimentos matemáticos correctos, propondo aos sujeitos dos seu estudo (crianças e adultos) problemas de permutações, arranjos com e sem repetição e combinações. Em termos de resultados, observou-se uma tendência dos sujeitos em subestimar o número de permutações e em sobrestimar o número de combinações e arranjos, inferindo-se que as estimações se baseiam em operações binárias relacionadas com o procedimento correcto, mas que comprimem a operação necessária, que de um modo geral consta de mais de dois operandos.

Fischbein e seus colaboradores, com base nas suas investigações, afirmam que, no que se refere à instrução, esta é necessária, pois a criança não adquire sozinha as técnicas combinatórias, nem sequer no período das operações formais. Já no período das operações concretas pode-se fomentar a aquisição de técnicas combinatórias, usando diagramas de árvore como recurso didáctico.

Batanero e seus colaboradores efectuaram investigações envolvendo alunos do ensino secundário e de uma licenciatura de Matemática. Em síntese, nos seus vários estudos, Batanero e seus colaboradores destacam as variáveis modelo combinatório (selecção, distribuição e partição), operação combinatória envolvida no problema (permutação, arranjo e combinação), a dimensão dos parâmetros n e/ou p e o tipo de elementos a serem combinados (letras, números, pessoas, objectos). Estas variáveis de tarefa, na medida em que influenciam as respostas dos alunos, devem ser "reconhecidas quando organizamos o ensino, as quais devem também enfatizar o processo de modelação, o raciocínio recursivo e procedimentos sistemáticos de enumeração, em vez de nos concentrarmos apenas nos aspectos algorítmicos e nas definições das operações combinatórias" (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1997, p. 251).

Em relação às dificuldades dos alunos na resolução de problemas combinatórios, Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997) referem as seguintes: enumeração não sistemática, que consiste numa estratégia de tentativa e erro, sem qualquer procedimento recursivo que leve à formação de todas as possibilidades; uso incorrecto do diagrama de árvore; erro de ordem, em que é considerada a ordem em situações em que é irrelevante ou não é considerada em situações em que é pertinente; erro de repetição, em que não é considerada a repetição dos elementos quando tal é possível ou é considerada

ISSN: 1138-1663.

em situações de impossibilidade; confundir o tipo de objecto, isto é, os objectos idênticos são considerados distinguíveis ou os objectos distintos são considerados indistinguíveis; e confundir o tipo de célula (o tipo de subconjuntos) em modelos de partição ou de distribuição, que consiste em distinguir células (subconjuntos) idênticas ou em não diferenciar células (subconjuntos) distinguíveis.

3. Metodologia

A presente investigação centra-se no estudo do desempenho em Combinatória de alunos do 9.º ano de escolaridade. Especificamente, neste texto abordam-se as duas questões de investigação: Que estratégias utilizam os alunos do 9.º ano de escolaridade na resolução de problemas de Combinatória?; e Qual a influência dos factores operação combinatória, número de elementos envolvidos na operação combinatória e desempenho em Matemática no desempenho dos alunos em Combinatória?

Participaram no estudo os 27 alunos de uma turma do 9.º ano de escolaridade, de uma escola secundária com 3.º ciclo do ensino básico de uma cidade do distrito de Braga. As idades destes alunos variavam entre os 13 e os 17 anos, com média de idades de 14 anos (14/15 anos é a idade normal de frequência do 9.º ano) e 67% eram do sexo masculino e 33% do sexo feminino. As suas classificações na disciplina de Matemática do 8.º ano, na escala de 1 a 5, distribuíam-se pelas percentagens: 30% com nível 2, 41% com nível 3, 11% com nível 4 e 18% com nível 5. No âmbito da escola, pode dizer-se que se tratava de uma turma um pouco acima da média.

Os dados foram recolhidos através da aplicação individual de um teste. As sessões de realização dos testes, com um tempo de duração que variou entre os 35 minutos e 1h e 46 minutos, foram audiogravadas, tendo sido pedido aos alunos para verbalizarem os seus pensamentos e o entrevistador, sempre que pertinente, questionou-os no sentido de aprofundar a sua compreensão. As estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas propostos e o número de questões respondidas foram determinantes no tempo de duração das sessões.

O teste era constituído por três partes: a primeira parte destinava-se à obtenção de dados pessoais; a segunda parte incluía os problemas de Combinatória e era constituída por quatro grupos de problemas, *Dispor amigos em fila para tirar uma fotografia* (permutações simples), *Formar números* (arranjos com repetição), *Definir bandeiras com barras horizontais* (arranjos simples) e *Formar grupos de pessoas para participarem num concurso* (combinações simples); e a terceira parte destinava-se à recolha da opinião dos alunos acerca dos problemas propostos na segunda parte do questionário. Todos os grupos de problemas contemplavam um conjunto de três questões, designadas por a), b) e c), em que da questão a) para a questão b) se aumentava a dimensão da população e na questão c) se questionavam os alunos acerca da fórmula de generalização da população (n elementos). Além disso, exceptuando o primeiro conjunto de problemas, em todos os três restantes incluiu-se uma outra alínea d), em que se aumentava a dimensão da amostra e que só foi apresentada aos alunos que antes tinham resolvido correctamente as alíneas a) e b). Com esta última questão, pretendeu-se aprofundar o estudo sobre a compreensão dos alunos nas correspondentes operações combinatórias.

Em termos de tratamento e análise de dados, procedeu-se a uma análise descritiva do tipo de respostas (correctas e incorrectas), do tipo de estratégias usadas pelos alunos, estas últimas estabelecidas através de categorias definidas aquando da própria análise, e do relacionamento das respostas correctas com algumas variáveis, designadamente a operação combinatória, o número de elementos envolvidos na operação combinatória e o desempenho em Matemática.

4. Estratégias intuitivas usadas pelos alunos na resolução de problemas de Combinatória

4.1. Respostas e estratégias de resolução

Na tabela 1 apresenta-se o número de respostas correctas e erradas e de não respostas em cada uma das questões do teste por operação combinatória.

Tabela 1 – Número de respostas correctas e erradas e de não respostas (percentagem) por questão e por operação combinatória.

Questões por operação combinatória	Respostas		Não respostas
	Correctas	Erradas	
Permutações simples			
P_3	25 (93%)	2 (7%)	–
P_5	7 (26%)	20 (74)	–
P_n	3 (11%)	4 (15%)	20 (74%)
Total	**35 (43%)**	**26 (32%)**	**20 (25%)**
Arranjos com repetição			
$\overline{A}_2^3$	24 (89%)	3 (11%)	–
$\overline{A}_2^5$	23 (85%)	4 (15%)	–
$\overline{A}_2^n$	14 (52%)	6 (22%)	7 (26%)
$\overline{A}_3^5$	14 (52%)	9 (33%)	4 (15%)
Total	**75 (70%)**	**22 (20%)**	**11 (10%)**
Arranjos simples			
A_2^3	24 (89%)	3 (11%)	–
A_2^5	19 (70%)	8 (30%)	–
A_2^n	9 (33%)	8 (30%)	10 (37%)
A_3^5	15 (55%)	4 (15%)	8 (30%)
Total	**67 (62%)**	**23 (21%)**	**18 (17%)**
Combinações simples			
C_2^3	9 (33%)	18 (67%)	–
C_2^5	7 (26%)	20 (74%)	–
C_2^n	1 (4%)	13 (48%)	13 (48%)
C_3^5	–	6 (22%)	21 (78%)
Total	**17 (16%)**	**57 (53%)**	**34 (31%)**

Na totalidade do teste obteve-se 48% de respostas correctas, 32% de respostas erradas e 20% de

ISSN: 1138-1663.

não respostas. Considerando globalmente as diferentes operações combinatórias, verifica-se que foi nos arranjos com repetição que se observou a maior percentagem de respostas correctas (70%), seguindo-se os arranjos simples (62%), as permutações simples (43%) e, finalmente, as combinações simples (16%).

Em cada operação combinatória, quando aumenta o número de elementos envolvidos na operação, assiste-se a uma diminuição do número de respostas correctas. Esta diminuição é mais acentuada quando se aumenta o número de elementos da amostra ($\overline{A}_3^5, A_3^5$ e C_3^5). Recorde-se que estas questões apenas foram colocadas aos alunos que tinham respondido correctamente às duas primeiras questões das três operações combinatórias correspondentes.

Nas questões de generalização ($P_n, \overline{A}_2^n, A_2^n$ e C_2^n), em que se pretendia que os alunos descobrissem uma fórmula que lhes permitisse determinar o número de configurações nas variadas situações, o número de respostas correctas diminuiu ainda mais, sendo esse número residual no caso das combinações simples.

Quanto às estratégias usadas na resolução das tarefas, conforme se verifica na tabela 2, observou-se que os alunos recorreram à "enumeração", ao "diagrama de árvore", a "operações" numéricas e a "fórmulas". Além destas estratégias, alguns alunos recorreram simultaneamente à "enumeração e a operações" numéricas e ao "diagrama de árvore e a operações" numéricas. Houve ainda um aluno que recorreu à "tabela de dupla entrada" numa questão de combinações simples.

Na totalidade das questões do teste, exceptuando a estratégia "tabela de dupla entrada", todas as outras revelaram uma eficácia (percentagem de respostas correctas) variando entre 47% e 68%. Especificamente, as estratégias de "diagrama de árvore e operação" e a "enumeração" foram as que mais frequentemente conduziram à resposta correcta (respectivamente em 68% e 67% dos casos), seguindo-se as estratégias de "enumeração e operação" e "diagrama de árvore" (em 63% dos casos), a estratégia "operação" (em 54% dos casos) e a estratégia "fórmula" (em 47% dos casos).

De entre todas as estratégias referidas, a mais usada foi a de "enumeração" (em 31% das repostas). Nesta estratégia distinguem-se ainda duas subcategorias: "enumeração sistemática" e "enumeração não sistemática". A "enumeração sistemática, que foi mais usada nas respostas (27%), constitui uma estratégia em que existe um princípio, processo ou regra de construção das configurações, enquanto na enumeração não sistemática, que foi menos usada nas respostas (4%), tal não acontece. Em consequência, podemos dizer que a estratégia de "enumeração sistemática" é mais desenvolvida do que a estratégia de "enumeração não sistemática", pois tende a evitar que sejam

Barca, A., Peralbo, M., Porto, A., Duarte da Silva, B. e Almeida, L. (Eds.) (2007).
Libro de Actas do Congreso Internacional Galego-Portugués de Psicopedagoxía.
A.Coruña/Universidade da Coruña: Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía e Educación.
ISSN: 1138-1663.

Tabela 2 – Número de respostas nas diferentes estratégias utilizadas na resolução dos problemas de Combinatória (percentagem de respostas correctas nas estratégias) por questão, por operação combinatória e no teste.

Questões por operação combinatória	Estratégias						
	Enumeração	Diagrama de árvore	Tabela de dupla entrada	Operação	Enumeração e operação	Diagrama de árvore e operação	Fórmula
Permutações simples							
P_3	15 (93%)	11 (91%)	–	–	–	1 (100%)	–
P_5	7 (0%)	6 (0%)	–	5 (40%)	4 (25%)	5 (80%)	–
P_n	–	–	–	–	–	–	7 (43%)
Total	**22 (64%)**	**17 (59%)**	–	**5 (40%)**	**4 (25%)**	**6 (83%)**	**7 (43%)**
Arranjos com repetição							
$\overline{A}_2^3$	15 (93%)	10 (90%)	–	1 (100%)	1 (0%)	–	–
$\overline{A}_2^5$	15 (87%)	8 (88%)	–	2 (100%)	1 (0%)	1 (100%)	–
$\overline{A}_2^n$	–	–	–	–	–	–	20 (70%)
$\overline{A}_3^5$	2 (0%)	1 (0%)	–	9 (56%)	5 (80%)	6 (83%)	–
Total	**32 (84%)**	**19 (84%)**	–	**12 (67%)**	**7 (57%)**	**7 (86%)**	**20 (70%)**
Arranjos simples							
A_2^3	13 (85%)	9 (89%)	–	5 (100%)	–	–	–
A_2^5	8 (63%)	8 (88%)	–	9 (56%)	2 (100%)	–	–
A_2^n	–	–	–	–	–	–	17 (53%))
A_3^5	2 (0%)	3 (33%)	–	5 (100%)	5 (100%)	4 (100%)	–
Total	**23 (70%)**	**20 (80%)**	–	**19 (79%)**	**7 (100%)**	**4 (100%)**	**17 (53%)**
Combinações simples							
C_2^3	11 (55%)	11 (18%)	–	4 (0%)	–	1 (100%)	–
C_2^5	9 (56%)	5 (20%)	1 (0%)	6 (0%)	1 (0%)	5 (20%)	–
C_2^n	–	–	–	–	–	–	14 (7%)
C_3^5	4 (0%)	–	–	–	–	2 (0%)	–
Total	**24 (46%)**	**16 (19%)**	**1 (0%)**	**10 (0%)**	**1 (0%)**	**8 (25%)**	**14 (7%)**
Total do teste	**101 (67%)**	**72 (63%)**	**1 (0%)**	**46 (54%)**	**19 (63%)**	**25 (68%)**	**58 (47%)**

ISSN: 1138-1663.

esquecidas configurações. Em qualquer caso, a eficácia da *enumeração*, enquanto estratégia que conduz à resposta correcta, diminuiu consideravelmente à medida que aumentou o número de configurações possíveis.

A estratégia "diagrama de árvore" foi usada em 22% das respostas e, tal como a "enumeração", a sua eficácia diminuiu com o aumento do número de configurações possíveis. Já as estratégias "operação" numérica, "enumeração e operação" numérica e "diagrama de árvore e operação" numérica foram usadas, respectivamente, em 14%, 6% e 8% das respostas. Em todas estas estratégias obteve-se, respectivamente, uma eficácia (percentagem de respostas correctas na estratégia) variando entre 40% e 100%, entre 25% e 100% e entre 80% e 100% nas questões com um maior número de configurações (P_5, $\overline{A}_3^5$ e A_3^5). Nestas mesmas questões, a eficácia das estratégias de "enumeração" e "diagrama de árvore" foi de 0% para P_5 e $\overline{A}_3^5$, e respectivamente de 0% e 33% para A_3^5. Este resultado revela que quando aumenta o número de elementos envolvidos na operação combinatória a eficácia das estratégias de "enumeração" e "diagrama de árvore" diminui consideravelmente, enquanto que a estratégia de "operação" numérica, isolada ou combinada com outra, se mostra mais eficaz.

Finalmente, a estratégia *fórmula* foi usada em 18% das repostas. Esta estratégia foi apenas usada nas tarefas em que era pedida uma generalização do número total de configurações nas várias operações combinatórias consideradas (P_n, $\overline{A}_2^n$, A_2^n e C_2^n), tendo sido também a única estratégia usada nestas questões. Nesta estratégia distinguem-se duas subcategorias: a escrita de uma fórmula matemática, recorrendo a números, letras e operações entre números e letras, que foi mais frequentemente referida (69%), e a descrição de uma fórmula em linguagem corrente, recorrendo a palavras, que foi menos frequentemente referida (31%). No caso da fórmula matemática, o aluno A_{20} apresenta a resposta para os arranjos simples: "$n \times (n-1)$"; no caso da descrição da fórmula em linguagem corrente, o aluno A_9 apresenta a resposta para os arranjos com repetição: "dizia à outra pessoa para contar os algarismos que estavam lá e multiplicava pelo mesmo número de algarismos". A eficácia desta estratégia foi de 43%, 70%, 53% e 7% no caso das P_n, $\overline{A}_2^n$, A_2^n e C_2^n, respectivamente.

4.2. Factores que influenciaram o desempenho dos alunos em Combinatória

Avaliando o desempenho dos alunos em Combinatória através do número/percentagem de respostas correctas no teste, no estudo salientaram-se três factores que influenciaram esse desempenho: o tipo de operação combinatória, o número de elementos envolvidos na operação combinatória e o desempenho em Matemática.

Influência do tipo de operação combinatória

Na figura 1 podemos observar a percentagem de respostas correctas dos alunos em cada uma das operações combinatórias estudadas.

Barca, A., Peralbo, M., Porto, A., Duarte da Silva, B. e Almeida, L. (Eds.) (2007).
Libro de Actas do Congreso Internacional Galego-Portugués de Psicopedagoxía.
A.Coruña/Universidade da Coruña: Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía e Educación.
ISSN: 1138-1663.

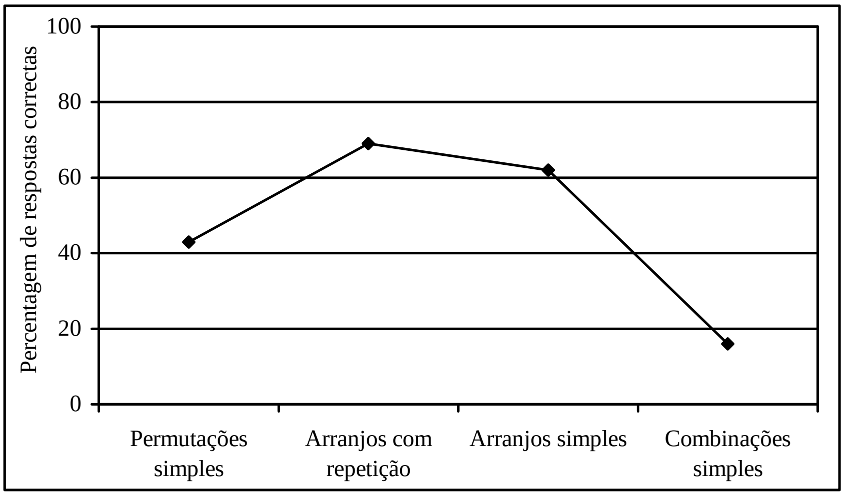

Figura 1. Percentagem de respostas correctas por operação combinatória.

Pela figura podemos verificar que os alunos tiveram menos dificuldades nos arranjos com repetição, seguindo-se os arranjos simples, as permutações simples e, finalmente, as combinações simples com dificuldades muito acentuadas. Nesta última operação, a principal dificuldade dos alunos residiu no facto de considerarem a ordem, tal como tinham feito nos arranjos.

Influência do número de elementos envolvidos nas operações combinatórias

Pela figura 2 verificamos que a percentagem de respostas correctas diminui à media que aumenta o número de elementos envolvidos nas operações combinatórias, quando passamos de a) (P_3, $\overline{A}^3_2$, A^3_2 e C^3_2), para b) (P_5, $\overline{A}^5_2$, A^5_2 e C^5_2) e, por último, para d) ($\overline{A}^5_3$, A^5_3 e C^5_3).

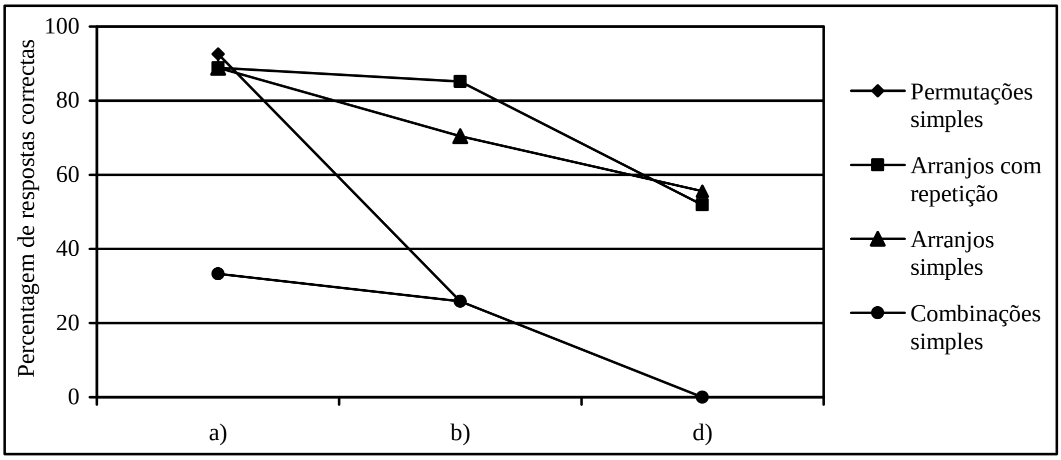

Figura 2. Percentagem de respostas correctas por número de elementos envolvidos.

Em todas as operações combinatórias o aumento das configurações possíveis, resultante do aumento do número de elementos da população ou da amostra, traduziu-se numa dificuldade crescente e regular dos alunos.

Influência do desempenho a Matemática

O desempenho dos alunos a Matemática, avaliado através dos níveis obtidos pelos alunos no 8.º ano, influenciou o número médio de respostas correctas em cada um desses níveis, conforme se observa na figura 3.

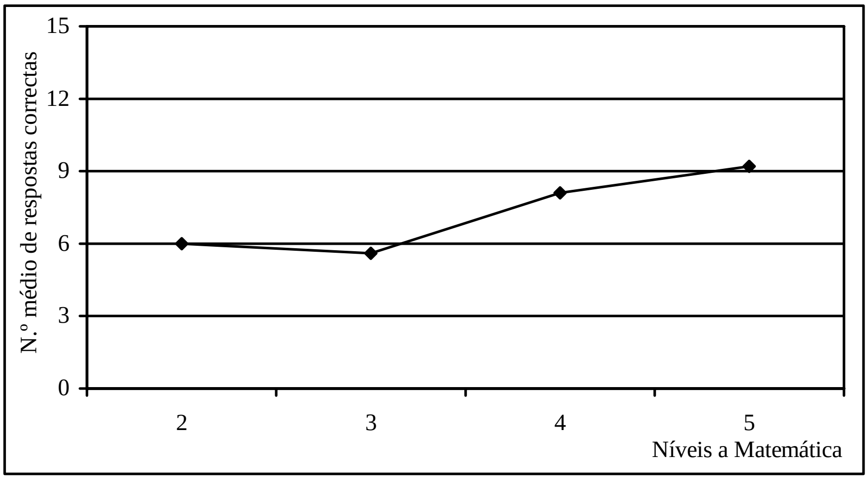

Figura 3. Número médio de respostas correctas por níveis a Matemática.

Em termos de níveis a Matemática, verifica-se uma ligeira diminuição do número médio de respostas correctas do nível 2 para o nível 3, aumentando sempre esse número a partir do nível 3 e ocorrendo o aumento mais significativo do nível 3 para o nível 4.

5. Conclusão

Em termos de respostas correctas, concluiu-se que os alunos foram mais sucedidos nos arranjos com repetição, seguindo-se os arranjos simples, as permutações e as combinações (ver tabela 1). A maior dificuldade dos alunos nas combinações deveu-se à sua adesão ao *erro de ordem* (Fischbein & Gazit, 1988, citado em Roa, 2000). Estes resultados divergem dos resultados de Piaget e Inhelder (s/d) e enfatizam a necessidade de instrução para que os alunos adquiram completamente as operações combinatórias (Fischbein, 1975).

A ordem de dificuldade das operações combinatórias foi muito semelhante à verificada no estudo de Silva, Fernandes e Soares (2004), envolvendo alunos do 12.º ano (17/18 anos é a idade normal de frequência deste ano de escolaridade) sem ensino de Combinatória. A necessidade de instrução reforça-se na medida em que no estudo referido não se obtiveram resultados consideravelmente melhores em problemas combinatórios semelhantes, embora alguns deles envolvendo um maior número de elementos.

Relativamente às estratégias intuitivas usadas pelos alunos na resolução dos problemas de Combinatória, salienta-se o recurso mais frequente à “enumeração”, seguindo-se o “diagrama de

ISSN: 1138-1663.

árvore", a "fórmula" e, por fim, a "operação" numérica. Além disso, um número considerável de respostas baseou-se em duas destas estratégias, concretamente "enumeração e operação" e "diagrama de árvore e operação". A eficácia destas estratégias, enquanto percentagem de respostas correctas que estão na sua origem, varia entre o mínimo de 47%, no caso da estratégia "formula", e o máximo de 68%, no caso da estratégia de "diagrama de árvore e operação", seguindo-se a estratégia "enumeração" com 67%.

Tal como é referido em outros estudos (e.g. Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1997; Fischbein & Gazitt, 1988, citado em Roa, 2000; Silva, Fernandes & Soares, 2004), a estratégia de enumeração é amplamente utilizada pelos alunos. No entanto, quando aumenta o número de elementos envolvidos na operação combinatória, esta estratégia é geralmente menos usada e diminuiu a sua eficácia em termos de percentagem de respostas correctas.

Já a estratégia "diagrama de árvore", contrariamente ao que aconteceu noutros estudos (Fischbein & Gazit, 1988, citado em Roa, 2000; Roa, Batanero, Godino & Cañizares, 1996; Silva, Fernandes & Soares, 2004), foi utilizada por muitos alunos. A maior utilização desta estratégia, muito valorizada por Fischbein, Pampu e Mînzat (1970) em termos de instrução, deve-se, pelo menos em parte, ao uso esporádico que dela foi feito no ensino do tema Estatística e Probabilidades, o qual tinha sido leccionado imediatamente antes.

A descoberta de uma "fórmula" para definir a generalização pretendida foi particularmente sucedida no caso dos arranjos com repetição, seguindo-se os arranjos simples, as permutações e, a grande distância, as combinações. A eficácia desta estratégia reproduz a hierarquização das percentagens de respostas correctas nas diferentes operações combinatórias.

A estratégia "operação" numérica, fundamentalmente do tipo multiplicativo, mostrou-se mais eficaz quando a resposta correcta resultava de uma operação binária, envolvendo dois operandos, como acontecia em várias questões de arranjos simples e com repetição. No caso das permutações, esta estratégia foi menos usada e nas combinações simples conduziu sempre a uma resposta errada. Uma tendência semelhante foi observada por Fischbein e Grossman (1997).

No presente estudo, constatámos que o desempenho dos alunos em Combinatória foi influenciado pelo tipo de operação combinatória, pelo número de elementos envolvidos na operação combinatória e pelo desempenho dos alunos a Matemática. No caso do tipo de operação combinatória, o sucesso obtido pelos alunos sugere que se comece por estudar os arranjos com repetição, seguindo-se os arranjos simples, as permutações e, por último, as combinações. A este propósito, deve ser recordado o sucesso obtido por Fischbein, Pampu e Mînzat (1970) com uma estratégia de instrução, baseada na exploração do diagrama de árvore, no ensino das operações de arranjos com repetição e permutações, em alunos com idade igual ou inferior à dos alunos do 9.º ano.

Tal como se verificou neste estudo, o facto do aumento do número de elementos envolvidos na operação combinatória (dimensão da população e da amostra) agravar as dificuldades dos alunos também se tem verificado em muitos outros estudos (e.g. Fischbein, Pampu & Mînzat, 1970; Navarro-Pelayo, Batanero & Godino, 1996; Silva, Fernandes & Soares, 2004). Nestes casos, as dificuldades sentidas pelos alunos devem ser enfrentadas como forma de aprofundar a sua compreensão dos algoritmos e fórmulas, pois, caso contrário, corre-se o risco de reduzir a aprendizagem dos alunos à memorização (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1997).

Por último, o facto do melhor desempenho em Matemática dos alunos estar associado a um melhor desempenho intuitivo em Combinatória constitui um aspecto promissor, pois frequentemente acontece que as intuições são muito persistentes e resistentes ao ensino (Fernandes, 1990; Fischbein, 1987).

Em conclusão, os resultados do estudo mostram que é possível ensinar com sucesso a alunos do 9.º ano de escolaridade vários procedimentos combinatórios e os resultados de outros estudos (e.g. Silva, Fernandes & Soares, 2004) implicam mesmo a necessidade de ensino, pois a aquisição de muitos aspectos do pensamento combinatório não acontece espontaneamente, contrariamente ao que Piaget e Inhelder (s/d) estabeleceram.

Referências

Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: ISO Press.

Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.

Fischbein, E. & Grossman,(1997). Schemata and Intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *34*, 27-47.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. Pampu, I, & Mînzat, I. (1970). Effects of age and instruction on combinatory ability in children. In E. Fischein (1975), *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Appendix IV, pp. 189-201). Dordrecht: Reidel.

Glaymann, M. & Varga, T. (1975). *Les Probabilités à l'école*. Paris: Cedic.

Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do ensino básico – Competências essenciais*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação (2002). *Programa de Matemática A (10.º, 11.º e 12.º anos)*. Lisboa: Autor.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. & Godino, J. D. (1996). Razionamiento combinatório em alumnos de secundário. *Educacion Matemática*, *8*(1), 26-39.

Piaget, J. & Inhelder, B. (s/d). *A origem da ideia do acaso na criança*. Rio de Janeiro: Editora Record. (Tradução portuguesa do original de 1951.)

Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D. & Cañizares, M. J. (1996). Estrategias en la resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. *Epsilon*, *36*, 433-446.

Silva, D. N., Fernandes, J. A. & Soares, A. J. (2004). Intuições de alunos do 12.º ano em combinatória: Um estudo exploratório. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 61-84). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.