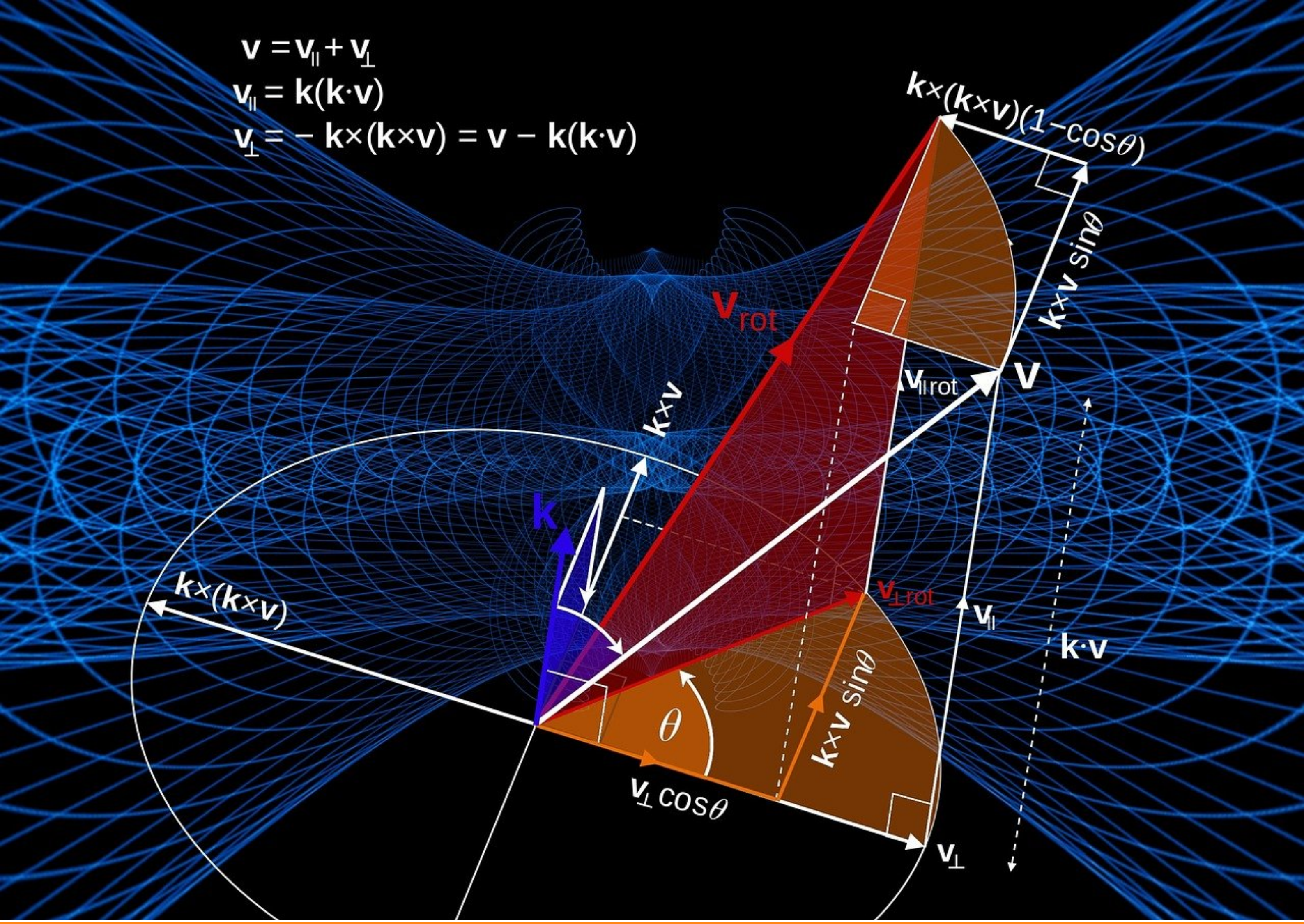


Complementos de
Álgebra Linear e Geometria Analítica

Autores: Irene Brito e Gaspar J. Machado

Instituição: Universidade do Minho

Data: dezembro 2020

Versão: 1.0

Índice

ii

Lista de Figuras

Capítulo 1 Produto interno em $\mathbb{R}^n$

Introdução

- *Produto interno e norma*
- *Ortogonalidade*
- *Projeção ortogonal*
- *Método dos mínimos quadrados*
- *Regressão linear*
- *Método de ortogonalização de Gram-Schmidt*
- *Decomposição QR*

Neste capítulo apresenta-se o produto interno como um conceito fundamental para descrever características geométricas de vetores em $\mathbb{R}^n$. Assim, a norma associada ao produto interno permite calcular distâncias e ângulos entre dois vetores. O conceito de ortogonalidade juntamente com a projeção ortogonal são importantes para resolver problemas de minimização através do Método dos mínimos quadrados. O Método dos mínimos quadrados é usado para determinar modelos de regressão linear. O Método de ortogonalização de Gram-Schmidt, que transforma uma base numa base ortonormada, permite determinar a decomposição QR de uma matriz. A decomposição QR é relevante para simplificar em certos casos a resolução de problemas de mínimos quadrados.

1.1 Produto interno e norma

A seguinte definição de produto interno generaliza a definição de produto escalar de dois vetores. Neste curso apenas se consideram espaços vetoriais reais, passando-se apenas a dizer "espaço vetorial".

Definição 1.1

Sejam V um espaço vetorial e a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x \cdot y. \end{array}$$

Diz-se que esta aplicação define um ***produto interno*** *se:*

(a) $\forall x, y \in V [x \cdot y = y \cdot x]$.

(b) $\forall x, y, z \in V [x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z]$.

(c) $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} [(\alpha x) \cdot y = \alpha (x \cdot y)]$.

(d) $\forall x \in V \backslash \{0_V\} [x \cdot x > 0]$.

(e) $0_V \cdot 0_V = 0$.

♠

Também se usam as notações $x|y$, (x,y), $\langle x,y \rangle$ e $(x|y)$ para representar o produto interno dos vetores x e y.

Definição 1.2

Chama-se ***espaço euclidiano*** *a um par* $(V, \cdot)$ *onde* V *é um espaço vetorial de dimensão finita e a aplicação* $\cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *é um produto interno.*

♠

Teorema 1.1

Seja a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) & \longmapsto & x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n. \end{array}$$

Então, $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ *é um espaço euclidiano.*

♡

Observação O produto interno usual de $\mathbb{R}^n$ é o produto interno do teorema anterior, que também é designado por produto interno euclidiano. É fácil de verificar que as propriedades (a)-(e) da Definição 1.1 são válidas para este produto interno.

Exercício 1.1 Determine o produto interno dos vetores $x = (1, -2, 1)$ e $y = (3, 4, 5)$.

Resolução $x \cdot y = (1, -2, 1) \cdot (3, 4, 5) = 1 \times 3 + (-2) \times 4 + 1 \times 5 = 0.$

A seguinte definição de norma generaliza o conceito de comprimento de um vetor.

Definição 1.3

Sejam V *um espaço vetorial e a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\| : & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \|x\|. \end{array}$$

Diz-se que esta aplicação é uma ***norma*** *se:*

(a) $\forall x, y \in V [\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|]$. *(desigualdade triangular)*

(b) $\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} [\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|]$.

(c) $\forall x \in V \backslash \{0_V\} [\|x\| > 0]$.

(d) $\|0_V\| = 0$.

♠

Definição 1.4

Chama-se ***espaço normado*** *a um par* $(V, \|\cdot\|)$ *onde* V *é um espaço vetorial e a aplicação* $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma norma.*

♠

Teorema 1.2

Sejam $(V, \cdot)$ *um espaço euclidiano e a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\| : & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x \cdot x}. \end{array}$$

Então, $(V, \|\cdot\|)$ *é um espaço normado.*

♡

Definição 1.5

À norma definida no teorema anterior chama-se ***norma induzida pelo produto interno****.* ♠

A norma por defeito num espaço euclidiano é a norma induzida pelo produto interno.

Teorema 1.3

Seja a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & \|(x_1,\ldots,x_n)\| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}. \end{array}$$

Então, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *é um espaço normado.* ♡

Observação

- A norma por defeito de $\mathbb{R}^n$ é a norma do teorema anterior, que também é designada por norma euclidiana.
- A título ilustrativo, apresentam-se mais exemplos de normas em $\mathbb{R}^n$:
  (a) $\|x\|_p = \left(|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \in \mathbb{N}$ (fazendo $p=2$ obtém-se a norma euclidiana).
  (b) $\|x\|_\infty = \max(|x_1|,\ldots,|x_n|)$.

Exercício 1.2 Determine as normas dos vetores $x=(1,0,2)$ e $y=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Resolução

$$\|x\| = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \sqrt{5}.$$

$$\|y\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}} = 1.$$

Definição 1.6

Sejam $(V,\cdot)$ *um espaço euclidiano e* $x \in V$*. Então,* x *diz-se um* ***vetor unitário*** *se* $\|x\|=1$. ♠

Exercício 1.3 Indique se os vetores do Exercício 1.2 são unitários.

Resolução *Atendendo à resolução do Exercício 1.2. tem-se que* $\|x\| = \sqrt{5} \neq 1$*, pelo que* x *não é um vetor unitário, e* $\|y\|=1$*, pelo que* y *é um vetor unitário.*

Teorema 1.4. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Seja $(V,\cdot)$ *um espaço euclidiano. Então:*

$$\forall x,y \in V\,[|x\cdot y| \leqslant \|x\|\|y\|].$$ ♡

Demonstração Sejam $x,y \in V$ e $t \in \mathbb{R}$. Atendendo às propriedades do produto interno, tem-se que

$$(tx+y)\cdot(tx+y) \geq 0 \Leftrightarrow t^2\|x\|^2 + 2t(x\cdot y) + \|y\|^2 \geq 0,$$

que é um polinómio de segundo grau em t. O polinómio de segundo grau é maior ou igual a zero para cada t se e só se

$$4(x \cdot y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$

ou

$$(x \cdot y)^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2.$$

Como $(x \cdot y)^2 = |x \cdot y|^2$, conclui-se que

$$|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|.$$

□

Definição 1.7

Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano, $\|\cdot\|$ a norma induzida pelo produto interno e $x, y \in V$. Chama-se ***distância*** *entre os vetores x e y, que se representa por $d(x, y)$, a*

$$d(x, y) \overset{def}{=} \|x - y\|.$$

Exercício 1.4 Determine a distância entre os vetores $x = (1, 0, 2)$ e $y = (3, 1, 0)$.

Resolução

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(1, 0, 2) - (3, 1, 0)\| = \|(-2, -1, 2)\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3.$$

Definição 1.8

Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano, $\|\cdot\|$ a norma induzida pelo produto interno e $x, y \in V$. Chama-se ***ângulo*** *entre os vetores x e y, que se representa por $\angle(x, y)(\in [0, \pi])$, a*

$$\angle(x, y) \overset{def}{=} \begin{cases} 0 & \textit{se } x = 0_V \textit{ ou } y = 0_V, \\ \arccos\left(\frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}\right) & \textit{se } x \neq 0_V \textit{ e } y \neq 0_V. \end{cases}$$

Observação Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano, $\|\cdot\|$ a norma induzida pelo produto interno e $x, y \in V$. Então:

(a) Atendendo à desigualdade de Cauchy-Schwarz tem-se que $-1 \leq \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|} \leq 1$, pelo que a definição de ângulo entre dois vetores faz sentido.

(b)

$$x \cdot y = \|x\|\|y\| \cos\theta, \text{ em que } \theta = \angle(x, y).$$

Exercício 1.5 Determine o ângulo entre os vetores $x = (1, 0, 2)$ e $y = (3, 1, 0)$.

Resolução

$$\begin{aligned} \angle(x, y) &= \arccos\left(\frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{(1, 0, 2) \cdot (3, 1, 0)}{\|(1, 0, 2)\|\|(3, 1, 0)\|}\right) \end{aligned}$$

$$= \arccos\left(\frac{3+0+0}{\sqrt{5}\sqrt{10}}\right)$$
$$= \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{50}}\right).$$

1.2 Ortogonalidade

Definição 1.9

Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano, $\|\cdot\|$ a norma induzida pelo produto interno e $x, y \in V$. Os vetores x e y dizem-se ***ortogonais*** *(ou perpendiculares), que se representa por $x \perp y$, se $\angle(x, y) = \frac{\pi}{2}$.* ♠

Observação Se $x \neq 0_V$ e $y \neq 0_V$, então, $x \perp y$ se e só se $x \cdot y = 0$, pois

$$\angle(x, y) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arccos\left(\frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \cdot y = 0.$$

Exercício 1.6 Indique o valor lógico das seguintes proposições:

P_1: "Os vetores $x = (1, 1, 2)$ e $y = (0, 0, 0)$ são ortogonais."

P_2: "Os vetores $z = (1, 0, 2)$ e $w = (2, 3, -1)$ são ortogonais."

P_3: "Os vetores $z = (1, 0, 2)$ e $v = (3, 1, 0)$ são ortogonais."

Resolução

P_1 *Como $\angle(x, y) = 0$, pois $y = 0_{\mathbb{R}^3}$, os vetores x e y não são ortogonais. Assim, P_1 é uma proposição falsa.*

P_2 *Como $z \cdot w = (1, 0, 2) \cdot (2, 3, -1) = 2 + 0 - 2 = 0$, os vetores z e w são ortogonais. Assim, P_2 é uma proposição verdadeira.*

P_3 *Como $z \cdot v = (1, 0, 2) \cdot (3, 1, 0) = 3 + 0 + 0 = 3 \neq 0$, os vetores z e v não são ortogonais. Assim, P_3 é uma proposição falsa.*

Definição 1.10

Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano, $\|\cdot\|$ a norma induzida pelo produto interno e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Diz-se que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ formam uma ***base ortogonal*** *se o conjunto dos vetores é uma base e se cada um dos vetores considerado é ortogonal a cada um dos outros, i.e., $v_i \cdot v_j = 0$ para $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$.* ♠

Exercício 1.7 Verifique se os vetores $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (1, -1)$ formam uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$.

Resolução *Como*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0,$$

então v_1, v_2 são linearmente independentes e formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Além disso

$$v_1 \cdot v_2 = 1 - 1 = 0,$$

pelo que $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.11

*Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano, $\|\cdot\|$ a norma induzida pelo produto interno e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Diz-se que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ formam uma **base ortonormada** se o conjunto dos vetores é uma base ortogonal e além disso $\|v_i\| = 1$, para $i = 1, \ldots, n$.* ♠

Diz-se também que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ formam um sistema ortogonal (ou conjunto ortogonal) ou sistema ortonormado (ou conjunto ortonormado) se verificarem as propriedades da Definição 1.10 ou da Definição 1.11, respetivamente.

Exercício 1.8 Verifique se os vetores $v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$ e $v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1)$ formam uma base ortonormada de $\mathbb{R}^2$.

Resolução *Como*

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} = 1 \neq 0,$$

então v_1, v_2 são linearmente independentes e formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Além disso

$$\|v_1\| = 1, \ \|v_2\| = 1, \ v_1 \cdot v_2 = 0.$$

Assim, conclui-se que $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^2$.

Observação Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base ortogonal, então facilmente se obtém uma base ortonormada, dividindo cada vetor v_i, $i = 1, \ldots, n$, pela sua norma $\|v_i\|$. Assim, $\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \ldots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right\}$ é uma base ortonormada.

Exercício 1.9 Determine uma base ortonormada a partir dos vetores $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (1, -1)$.

Resolução *Como já foi visto no Exercício 1.7 que $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortogonal, então dividindo os vetores pelas respetivas normas, tem-se*

$$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \ \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1),$$

pelo que $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)\right\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.12

*Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano e $W \subseteq V$. Chama-se **complemento ortogonal** de W, que se representa por $W^\perp$, ao conjunto*

$$W^\perp \stackrel{def}{=} \{v \in V : \forall w \in W \, [v \perp w]\}.$$

♠

Exercício 1.10 Seja $W = \{(0, 0, 2)\}$. Determine $W^\perp$.

Resolução *Como* $W \subseteq \mathbb{R}^3$*, seja* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$*. Então* $(a,b,c) \in W^\perp$ *se e só se* $(a,b,c) \perp (0,0,2)$*. Como* $(a,b,c)\cdot(0,0,2) = 0 \Leftrightarrow c = 0$*, conclui-se que*

$$W^\perp = \{(a,b,0) : a,b \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0),(0,1,0)\rangle.$$

Exercício 1.11 Sejam $W_1 = \langle (1,0,0)\rangle$ e $W_2 = \langle (0,1,0)\rangle$. Mostre que nenhum destes subespaços é complemento ortogonal do outro (apesar dos vetores de W_1 e de W_2 serem ortogonais).

Resolução *Como*

$$\begin{aligned} W_1^\perp &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \forall (x,0,0) \in W_1\, [(a,b,c) \perp (x,0,0)]\} \\ &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \forall (x,0,0) \in W_1\, [(a,b,c)\cdot(x,0,0) = 0]\} \\ &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \forall x \in \mathbb{R}\, [ax = 0]\} \\ &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0\} \\ &= \{(0,b,c) : b,c \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (0,1,0),(0,0,1)\rangle, \end{aligned}$$

então $W_1^\perp \neq W_2$.

Como

$$\begin{aligned} W_2^\perp &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \forall (0,y,0) \in W_2\, [(a,b,c) \perp (0,y,0)]\} \\ &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \forall (0,y,0) \in W_2\, [(a,b,c)\cdot(0,y,0) = 0]\} \\ &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \forall y \in \mathbb{R}\, [by = 0]\} \\ &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b = 0\} \\ &= \{(a,0,c) : a,c \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,0,0),(0,0,1)\rangle, \end{aligned}$$

então $W_2^\perp \neq W_1$.

Logo, nenhum dos subespaços W_1 *e* W_2 *é complemento ortogonal do outro, apesar de* $\forall (x,0,0) \in W_1$ *e* $\forall (0,y,0) \in W_2$*, se ter* $(x,0,0) \perp (0,y,0)$*, pois* $(x,0,0)\cdot(0,y,0) = 0$*.*

Teorema 1.5

Sejam $(V,\cdot)$ *um espaço euclidiano e* W *um subespaço de* V*. Então:*

(a) $W^\perp$ *é um subespaço de* V*.*

(b) O único vetor comum a W *e* $W^\perp$ *é* 0_V*.*

(c) O complemento ortogonal de $W^\perp$ *é* W*, i.e.* $(W^\perp)^\perp = W$*.* ♡

Definição 1.13

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$*.*

(a) *Chama-se* ***espaço nulo*** *da matriz A, que se representa por $\mathrm{N}(A)$, ao conjunto solução do sistema homogéneo cuja matriz dos coeficientes é a matriz A, ou seja,*

$$\mathrm{N}(A) \stackrel{def}{=} \mathrm{CS}_{(Ax=\underline{0})}\,.$$

(b) *Chama-se* ***espaço das linhas*** *da matriz A, que se representa por $\mathrm{EL}(A)$, ao conjunto gerado pelas linhas da matriz A, ou seja,*

$$\mathrm{EL}(A) \stackrel{def}{=} \langle \ell_{1,A}, \ldots, \ell_{m,A} \rangle.$$

(c) *Chama-se* ***espaço das colunas*** *da matriz A, que se representa por $\mathrm{EC}(A)$, ao conjunto gerado pelas colunas da matriz A, ou seja,*

$$\mathrm{EC}(A) \stackrel{def}{=} \langle c_{1,A}, \ldots, c_{m,A} \rangle.$$

Exercício 1.12 Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right]$. Determine o espaço nulo $\mathrm{N}(A)$, o espaço das linhas $\mathrm{EL}(A)$ e o espaço das colunas $\mathrm{EC}(A)$ da matriz A.

Resolução *Para determinar $\mathrm{N}(A)$, resolve-se o sistema homogéneo $Ax = \underline{0}$, onde $x = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]$, vindo*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(A|\underline{0}) = 2 = n$, onde n é o número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 0 \\ \quad\; - 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Assim, tem-se $\mathrm{N}(A) = \{(0,0)\}$

O espaço das linhas de A é

$$\mathrm{EL}(A) = \langle (1,4), (2,4) \rangle = \{(\alpha + 2\beta, 4\alpha + 4\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

O espaço das colunas A é

$$\mathrm{EC}(A) = \langle (1,2), (4,4) \rangle = \{(\gamma + 4\delta, 2\gamma + 4\delta) : \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}.$$

O seguinte teorema estabelece uma relação geométrica entre os espaço nulo e o espaço das linhas de uma matriz.

Teorema 1.6

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então:

(a) *O de A e o espaço das linhas de A são complementos ortogonais em $\mathbb{R}^n$ considerando o produto interno usual, ou seja,*

$$\mathrm{N}(A)^\perp = \mathrm{EL}(A) \qquad e \qquad \mathrm{EL}(A)^\perp = \mathrm{N}(A).$$

(b) O espaço nulo de A^{T} e o espaço das colunas de A são complementos ortogonais em $\mathbb{R}^m$ considerando o produto interno usual,

$$\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}})^{\perp} = \mathrm{EC}(A) \qquad e \qquad \mathrm{EC}(A)^{\perp} = \mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}).$$

♡

Exercício 1.13 Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Verifique que $\mathrm{EL}(A)$ e $\mathrm{N}(A)$ são complementos ortogonais em $\mathbb{R}^3$.

(b) Verifique que $\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}})$ e $\mathrm{EC}(A)$ são complementos ortogonais em $\mathbb{R}^2$.

Resolução

(a) Para determinar $\mathrm{N}(A)$, *resolve-se o sistema homogéneo* $Ax = \underline{0}$, *onde* $x = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right]$, *vindo*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(A|\underline{0}) = 2 < n = 3$, *onde* n *é o número de incógnitas, então o sistema é possível e indeterminado. A incógnita* x_2 *é uma incógnita livre e o sistema é equivalente ao sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2\alpha \\ x_2 = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Assim, tem-se $\mathrm{N}(A) = \{(-2\alpha, \alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle(-2, 1, 0)\rangle$.

O espaço das linhas de A *é*

$$\mathrm{EL}(A) = \langle(1, 2, 0), (2, 4, 1)\rangle = \{(\beta + 2\gamma, 2\beta + 4\gamma, \gamma) : \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Por um lado, tem-se

$$\mathrm{EL}(A)^{\perp} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \forall (a, b, c) \in \mathrm{EL}(A) [(x, y, z) \perp (a, b, c)]\},$$

onde $(a, b, c) = (\beta + 2\gamma, 2\beta + 4\gamma, \gamma), \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. *Como*

$$\begin{aligned} (x, y, z) \perp (a, b, c) &\Leftrightarrow (x, y, z) \cdot (\beta + 2\gamma, 2(\beta + 2\gamma), \gamma) = 0 \\ &\Leftrightarrow x(\beta + 2\gamma) + 2y(\beta + 2\gamma) + z\gamma = 0 \\ &\Leftrightarrow (\beta + 2\gamma)(x + 2y) + z\gamma = 0, \end{aligned}$$

então $x + 2y = 0 \wedge z = 0$.

Logo $\mathrm{EL}(A)^{\perp} = \{(-2y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = \langle(-2, 1, 0)\rangle = \mathrm{N}(A)$.

Por outro lado, tem-se

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(A)^{\perp} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{N}(A) \, [(x, y, z) \perp (\alpha, \beta, \gamma)]\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \forall (-2\alpha, \alpha, 0) \in \mathrm{N}(A) \, [(x, y, z) \perp (-2\alpha, \alpha, 0)]\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \forall \alpha \in \mathbb{R} \, [-2\alpha x + \alpha y = 0]\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \forall \alpha \in \mathbb{R} \, [\alpha(-2x + y) = 0]\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x\} \end{aligned}$$

$$= \{(x, 2x, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \langle (1, 2, 0), (0, 0, 1) \rangle.$$

Como

$$\mathrm{EL}(A) = \{(\beta + 2\gamma, 2(\beta + 2\gamma), \gamma) : \beta + 2\gamma, \gamma \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 2, 0), (0, 0, 1) \rangle,$$

então $\mathrm{N}(A)^\perp = \mathrm{EL}(A)$.

Logo $\mathrm{EL}(A)$ *e* $\mathrm{N}(A)$ *são complementos ortogonais em* $\mathbb{R}^3$.

(b) *Para determinar* $\mathrm{N}(A^\mathrm{T})$, *resolve-se o sistema homogéneo* $A^\mathrm{T} x = \underline{0}$, *onde* $x = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]$, *vindo*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(A|\underline{0}) = 2 = n$, *onde* n *é o número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Assim, tem-se $\mathrm{N}(A^\mathrm{T}) = \{(0, 0)\}$.

O espaço das colunas de A *é*

$$\mathrm{EC}(A) = \langle (1, 2), (2, 4), (0, 1) \rangle = \langle (1, 2), (0, 1) \rangle = \mathbb{R}^2.$$

Por um lado, tem-se

$$\begin{aligned} \mathrm{EC}(A)^\perp &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \forall (a, b) \in \mathrm{EC}(A)\ [(x, y) \perp (a, b)]\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \forall (a, b) \in \mathrm{EC}(A)\ [xa + yb = 0]\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \wedge y = 0\} \\ &= \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{EL}(A)^\perp = \mathrm{N}(A^\mathrm{T})$.

Por outro lado, tem-se

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(A^\mathrm{T})^\perp &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \forall (a, b) \in \mathrm{N}(A^\mathrm{T})\ [(x, y) \perp (a, b)]\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \cdot (0, 0) = 0]\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0x + 0y = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{N}(A^\mathrm{T})^\perp = \mathrm{EC}(A)$.

Assim, conclui-se que $\mathrm{EC}(A)$ *e* $\mathrm{N}(A^\mathrm{T})$ *são complementos ortogonais em* $\mathbb{R}^2$.

1.3 Projeção ortogonal

Em várias aplicações, por exemplo na área da Física, é necessário decompor um vetor em duas direções: uma paralela e outra perpendicular a um outro vetor de referência dado. Se a e b são dois vetores do plano $\mathbb{R}^2$ tais que $b \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, então vetor a pode ser escrito como $a = w + u$, onde w é um vetor paralelo a b (o que significa que w e b são linearmente dependentes) e u é um vetor ortogonal a b (ver Figura 1.1).

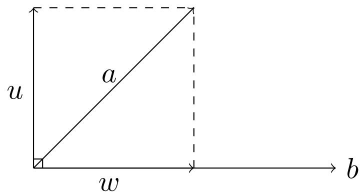


Figura 1.1: Decomposição de um vetor em duas direções ortogonais.

Geometricamente, o vetor w pode ser obtido da seguinte forma. Sejam $a = v_{A_1A_2}$ o vetor com ponto inicial A_1 e ponto final A_2 e $b \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. Considera-se uma reta perpendicular ao vetor b que passa no ponto final A_2 do vetor a. Seja Q o ponto de interseção dessa reta com o vetor b. Então, tem-se que $w = v_{A_1Q}$ é o vetor com ponto inicial A_1 e ponto final Q (ver Figura 1.2).

O vetor w é designado por vetor projeção ortogonal de a sobre b e será mais à frente representado por $\operatorname{proj}_b a$.

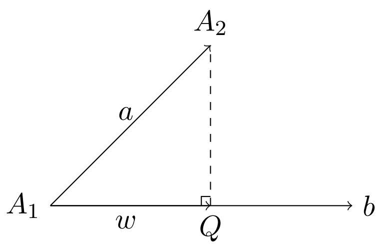


Figura 1.2: Projeção ortogonal de um vetor sobre outro vetor.

Considere os vetores w e $v = a - w$ (ver Figura 1.3). Como w e b são vetores linearmente dependentes, então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $w = kb$. Assim, tem-se que $a = w + v = kb + v$.

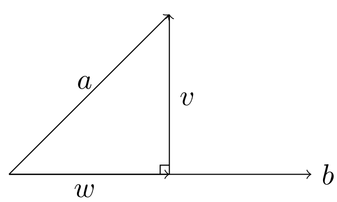


Figura 1.3: Vetor $a = w + v$ com $w \parallel b$ e $v \perp b$.

Considerando $a = kb + v$ e calculando o produto interno de a com b e de $kb + v$ com b, obtém-se a seguinte igualdade

$$a \cdot b = (kb + v) \cdot b \Leftrightarrow a \cdot b = k(b \cdot b) + v \cdot b.$$

Como v é perpendicular a b, a última igualdade simplifica para $a \cdot b = k\|b\|^2$, logo,

$$k = \frac{a \cdot b}{\|b\|^2}.$$

Como $w = kb$, então, substituindo o valor de k nesta expressão, conclui-se que

$$w = \frac{a \cdot b}{\|b\|^2} b.$$

Estes resultados podem ser generalizados quando a e b pertencem a um espaço vetorial de dimensão finita. Faz então sentido definir o vetor $w = \operatorname{proj}_b a$ da seguinte forma.

Definição 1.14

*Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano e $a, b \in V$ tais que $b \neq 0_V$. Chama-se **projeção ortogonal do vetor** a **sobre o vetor** b, que se representa por $\operatorname{proj}_b a$, ao vetor*

$$\operatorname{proj}_b a \overset{def}{=} \frac{a \cdot b}{\|b\|^2} b.$$

♠

No seguinte teorema estão resumidos os resultados obtidos anteriormente.

Teorema 1.7

Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano e $a, b \in V$ tais que $b \neq 0_V$. Então:

(a) O vetor $a - \operatorname{proj}_b a$ é ortogonal ao vetor $\operatorname{proj}_b a$.

(b) $a = w + v$, onde $w = \operatorname{proj}_b a$ e $v = a - \operatorname{proj}_b a$, sendo w e b linearmente dependentes e v ortogonal a b.

♡

Na Figura 1.4 pode observar-se que $a = \operatorname{proj}_b a + (a - \operatorname{proj}_b a)$; b e $\operatorname{proj}_b a$ são linearmente dependentes e $a - \operatorname{proj}_b a$ é ortogonal a b.

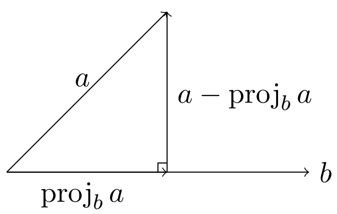


Figura 1.4: Vetores a, b, $\operatorname{proj}_b a$ e $a - \operatorname{proj}_b a$.

O comprimento do vetor da projeção ortogonal de a sobre b é

$$\|\operatorname{proj}_b a\| = \frac{|a \cdot b|}{\|b\|},$$

pois

$$\|\operatorname{proj}_b a\| = \left\| \frac{a \cdot b}{\|b\|^2} b \right\| = \frac{\|a \cdot b\|}{\|b\|^2} \|b\| = \frac{|a \cdot b|}{\|b\|}.$$

O vetor da projeção ortogonal de a sobre b também pode ser escrito da forma

$$\operatorname{proj}_b a = \frac{a \cdot b}{\|b\|^2} b = \frac{\|a\|\|b\| \cos\varphi}{\|b\|^2} b = \|a\| \cos\varphi \frac{b}{\|b\|},$$

onde φ é o ângulo formado entre os vetores a e b.

Observação A Definição 1.14 também pode ser entendida de outra forma, tendo em conta o ângulo entre os vetores a e b.

(a) Considere $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Note que se tem

$$\cos\varphi = \frac{a \cdot b}{\|a\|\|b\|} = \frac{|a \cdot b|}{\|a\|\|b\|} \quad \text{e} \quad \cos\varphi = \frac{\|\operatorname{proj}_b a\|}{\|a\|}$$

(ver Figura 1.5). Igualando as duas expressões para $\cos\varphi$: $\frac{|a \cdot b|}{\|a\|\|b\|} = \frac{\|\operatorname{proj}_b a\|}{\|a\|}$, e resolvendo em ordem a $\|\operatorname{proj}_b a\|$ obtém-se

$$\|\operatorname{proj}_b a\| = \frac{|a \cdot b|}{\|b\|}.$$

O vetor $\operatorname{proj}_b a$, que tem direção e sentido de b e comprimento $\|\operatorname{proj}_b a\|$, é obtido multiplicando $\frac{a \cdot b}{\|b\|}$ pelo vetor unitário $\frac{b}{\|b\|}$:

$$\operatorname{proj}_b a = \frac{a \cdot b}{\|b\|} \frac{b}{\|b\|} = \frac{a \cdot b}{\|b\|^2} b.$$

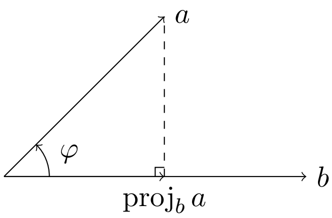


Figura 1.5: Vetor $\operatorname{proj}_b a$ com $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Considere $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Note que se tem (ver Figura 1.6)

$$\cos\varphi = \frac{a \cdot b}{\|a\|\|b\|} \quad \text{e} \quad \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi = \frac{\|\operatorname{proj}_b a\|}{\|a\|}.$$

Igualando as duas expressões para $\cos\varphi$, vem $\frac{a \cdot b}{\|a\|\|b\|} = -\frac{\|\operatorname{proj}_b a\|}{\|a\|}$, donde se obtém

$$\|\operatorname{proj}_b a\| = -\frac{a \cdot b}{\|b\|} \ (\geq 0).$$

O vetor $\operatorname{proj}_b a$, que tem direção e sentido oposto de b e comprimento $\|\operatorname{proj}_b a\|$, é obtido multiplicando $-\frac{a \cdot b}{\|b\|}$ pelo vetor unitário $-\frac{b}{\|b\|}$:

$$\operatorname{proj}_b a = -\frac{a \cdot b}{\|b\|}\left(-\frac{b}{\|b\|}\right) = \frac{a \cdot b}{\|b\|^2} b.$$

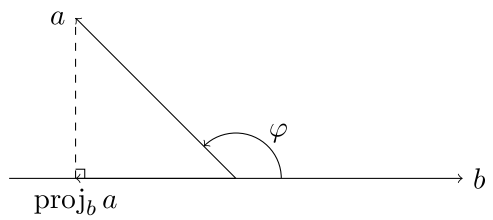


Figura 1.6: Vetor $\operatorname{proj}_b a$ com $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Exercício 1.14 Sejam $u = (2, 2)$ e $v = (1, 2)$.

(a) Determine a projeção ortogonal do vetor v sobre o vetor u.

(b) Calcule o comprimento do vetor da projeção ortogonal de v sobre u usando dois processo distintos.

(c) Determine um vetor ortogonal ao vetor da projeção ortogonal de v sobre u.

Resolução

(a)

$$\operatorname{proj}_u v = \frac{u \cdot v}{\|u\|^2} u = \frac{(2,2) \cdot (1,2)}{\|(2,2)\|^2}(2,2) = \frac{2+4}{(\sqrt{4+4})^2}(2,2) = \frac{3}{2}(1,1)$$

(ver Figura 1.7).

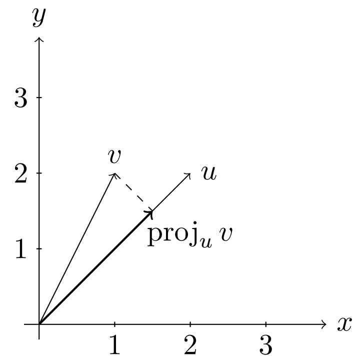


Figura 1.7: Vetores u, v e $\operatorname{proj}_u v$.

(b) Processo 1:

$$\|\operatorname{proj}_u v\| = \frac{|u \cdot v|}{\|u\|} = \frac{6}{\sqrt{8}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Processo 2: Tendo em conta o resultado da alínea anterior, então

$$\|\operatorname{proj}_u v\| = \left\|\frac{3}{2}(1,1)\right\| = \frac{3}{2}\|(1,1)\| = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

(c) O vetor

$$v - \operatorname{proj}_u v = (1,2) - \frac{3}{2}(1,1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

é ortogonal a $\operatorname{proj}_u v$*, pois* $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 0$ *(ver Figura 1.8).*

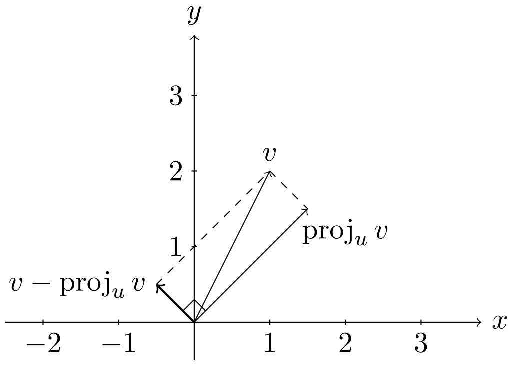


Figura 1.8: Vetor $v - \operatorname{proj}_u v$.

Exercício 1.15 Sejam $u = (1, 1, 0)$ e $v = (2, 2, 3)$.

(a) Determine a projeção ortogonal do vetor v sobre o vetor u.

(b) Calcule o comprimento do vetor da projeção ortogonal de v sobre u usando dois processo distintos.

(c) Determine um vetor ortogonal ao vetor da projeção ortogonal de v sobre u.

Resolução

(a)

$$\operatorname{proj}_u v = \frac{u \cdot v}{\|u\|^2} u = \frac{(1,1,0)\cdot(2,2,3)}{\|(1,1,0)\|^2}(1,1,0) = \frac{2+2}{(\sqrt{2})^2}(1,1,0) = (2,2,0).$$

(b) Processo 1:

$$\|\operatorname{proj}_u v\| = \frac{|u \cdot v|}{\|u\|} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Processo 2: Tendo em conta o resultado da alínea anterior, então

$$\|\operatorname{proj}_u v\| = \|(2,2,0)\| = 2\sqrt{2}.$$

(c) O vetor

$$v - \operatorname{proj}_u v = (2,2,3) - (2,2,0) = (0,0,3)$$

é ortogonal a $\operatorname{proj}_u v$*, pois* $(0,0,3)\cdot(2,2,0) = 0$.

Teorema 1.8

Seja $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano não nulo. Então, existe uma base ortonormada em V. ♡

O processo que se apresenta a seguir permite construir uma base ortonormada a partir de uma base qualquer do espaço e é designado por método de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Teorema 1.9. (Método de ortogonalização de Gram-Schmidt)

Sejam V um espaço euclidiano não nulo de dimensão n e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de V. Então, o seguinte algoritmo determina uma base ortonormada de V:

Passo 1 *[calcular o primeiro vetor da base ortonormada]*

$w_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.

Passo 2 *[calcular os restantes vetores da base ortonormada]*

para $k \leftarrow 2$ ***até*** n ***fazer***

$$z_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} w_i \ (e_k \cdot w_i)$$

$$w_k = \frac{z_k}{\|z_k\|}$$

fimpara

Os vetores z_k*,* $k = 2, \ldots, n$ *também podem ser escritos da forma*

$$z_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \operatorname{proj}_{w_i} e_k.$$

♡

Demonstração Sejam V um espaço euclidiano não nulo de dimensão n e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de V.

(a) O vetor

$$z_2 = e_2 - \operatorname{proj}_{w_1} e_2 = e_2 - w_1 \ (e_2 \cdot w_1)$$

é ortogonal a w_1 e z_2 não é nulo, porque se $z_2 = 0_V$ ter-se-ia

$$e_2 = (e_2 \cdot w_1) w_1 = \frac{e_2 \cdot w_1}{\|e_1\|} e_1,$$

o que significa que e_2 seria múltiplo de e_1, o que é impossível visto que e_1 e e_2 são vetores linearmente independentes.

Os vetores w_1 e $w_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|}$ formam um sistema ortonormado.

(b) O vetor

$$\begin{aligned} z_3 &= e_3 - \operatorname{proj}_{w_1} e_3 - \operatorname{proj}_{w_2} e_3 \\ &= e_3 - w_1 \ (e_3 \cdot w_1) - w_2 \ (e_3 \cdot w_2) \end{aligned}$$

é ortogonal a w_1 e w_2 e, como no passo anterior, a independência linear de $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ assegura que $z_3 \neq 0_V$.

Os vetores w_1, w_2 e $w_3 = \frac{z_3}{\|z_3\|}$ formam um sistema ortonormado.

(c) Continuando este processo, calculando os vetores

$$\begin{aligned} z_k &= e_k - \operatorname{proj}_{w_1} e_k - \operatorname{proj}_{w_2} e_k - \cdots - \operatorname{proj}_{w_{k-1}} e_k \\ &= e_k - w_1 \ (e_k \cdot w_1) - w_2 \ (e_k \cdot w_2) - \cdots - w_{k-1} \ (e_k \cdot w_{k-1}) \end{aligned}$$

e

$$w_k = \frac{z_k}{\|z_k\|}$$

para $k = 4, \ldots, n$, mostra-se que os vetores $w_1, \ldots, w_n$ formam uma base ortonormada em V.

□

Observação Note que, no teorema anterior, w_k é ortogonal a $\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$.

Exercício 1.16 Usando o método de Gram-Schmidt, obtenha a partir dos vetores da base $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (0,1,1)$, $e_3 = (0,0,1)$ uma base ortonormada $\{w_1, w_2, w_3\}$.

Resolução *Aplicando o processo de Gram-Schmidt obtém-se:*

$$w_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1);$$

$$\begin{aligned} z_2 &= e_2 - w_1\,(e_2 \cdot w_2) \\ &= (0,1,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\,\left((0,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right) \\ &= (0,1,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \end{aligned}$$

$$w_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{6}(-2,1,1);$$

$$\begin{aligned} z_3 &= e_3 - w_1\,(e_3 \cdot w_1) - w_2\,(e_3 \cdot w_2) \\ &= (0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\,\left((0,0,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{6}}{6}(-2,1,1)\,\left((0,0,1)\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}(-2,1,1)\right) \\ &= (0,1,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1}{6}(-2,1,1) \\ &= \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

$$w_3 = \frac{z_3}{\|z_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Assim, conclui-se que a base ortonormada $\{w_1, w_2, w_3\}$ obtida a partir dos vetores e_1, e_2, e_3 é dada por

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{\sqrt{6}}{6}(-2,1,1), \frac{\sqrt{2}}{2}\,(0,-1,1)\right\}.$$

Teorema 1.10

Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormada do espaço euclidiano $(V, \cdot)$ e $u \in V$, então

$$u = (u \cdot v_1)v_1 + (u \cdot v_2)v_2 + \cdots + (u \cdot v_n)v_n.$$

♡

Demonstração Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base, então

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\,[u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n].$$

Basta então provar que $\alpha_i = u \cdot v_i$, para $i = 1, \ldots, n$:

$$u \cdot v_i = (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n)\cdot v_i = \alpha_1(v_1 \cdot v_i) + \cdots + \alpha_n(v_n \cdot v_i) = \alpha_i,$$

pois $v_i \cdot v_i = 1$ e $v_j \cdot v_i = 0$ para $i \neq j$. □

Exercício 1.17 Considere a base ortonormada $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), (0,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \right\}$ de $\mathbb{R}^3$. Escreva o vetor $u = (2,1,1)$ como combinação linear dos vetores da base B.

Resolução *Sejam* $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $v_2 = (0,0,1)$ *e* $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$. *Como*

$$u \cdot v_1 = (2,1,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$u \cdot v_2 = (2,1,1) \cdot (0,0,1) = 1,$$

$$u \cdot v_3 = (2,1,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}},$$

então

$$u = (u \cdot v_1)v_1 + (u \cdot v_2)v_2 + (u \cdot v_3)v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1 + v_2 + \frac{3}{\sqrt{2}}v_3.$$

Definição 1.15

Sejam $(V, \cdot)$ *um espaço euclidiano,* W *um subespaço de* V *e* $v \in V$*. Diz-se que o vetor* w *é a* ***projeção ortogonal de*** v ***sobre o subespaço vetorial*** W*, que se representa por* $w = \operatorname{proj}_W v$*, se*

$$\forall x \in W \; [(v - w) \perp x].$$

A Figura 1.9 ilustra a projeção ortogonal de um vetor v sobre um subespaço vetorial W em que $w = \operatorname{proj}_W v$ e $(v - w) \perp x$, onde x é um vetor qualquer de W.

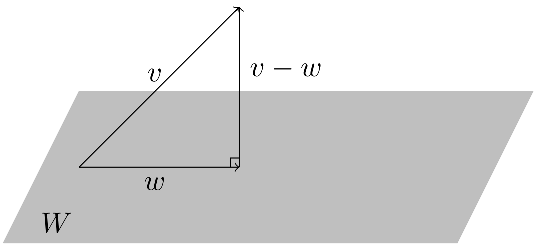


Figura 1.9: Projeção ortogonal de um vetor sobre um subespaço vetorial.

Teorema 1.11

Sejam $(V, \cdot)$ *um espaço euclidiano,* W *um subespaço de* V *e* $v \in V$*.*

(a) Se $W = \{0_W\}$*, então* $\operatorname{proj}_W v = 0_W$*.*

(b) Se $W = V$*, então* $\operatorname{proj}_W v = v$*.*

(c) Se $\{w_1, \ldots, w_n\}$ *é uma base ortonormada de* W*, então*

$$\operatorname{proj}_W v = (v \cdot w_1)w_1 + \cdots + (v \cdot w_n)w_n.$$

Demonstração

(a) Se $W = \{0_W\}$, $W^\perp = V$ e $0_W + v$ é a decomposição de v como soma de um vetor de W com um vetor de $W^\perp$. Logo, $\operatorname{proj}_W v = 0_W$.

(b) Se $W = V$, então $W^\perp = \{0_V\}$ e assim,

$$v = \operatorname{proj}_V v + \operatorname{proj}_{\{0_V\}} v = \operatorname{proj}_V v + 0_V = \operatorname{proj}_V v.$$

(c) Seja $\{w_1, \ldots, w_n\}$ uma base ortonormada de W e suponha que $v = w + w'$ onde $w \in W$ e $w' \in W^\perp$. Então, pelo Teorema 1.10 tem-se

$$\operatorname{proj}_W v = w = (w \cdot w_1)w_1 + (w \cdot w_2)w_2 + \cdots + (w \cdot w_n)w_n.$$

Como $w \cdot w_i = v \cdot w_i$, $i = 1, \ldots, n$, porque

$$v \cdot w_i = (w + w') \cdot w_i = w \cdot w_i + w' \cdot w_i$$

e $w' \cdot w_i = 0$, então conclui-se que

$$\operatorname{proj}_W v = (v \cdot w_1)w_1 + \cdots + (v \cdot w_n)w_n.$$

□

Exercício 1.18 Seja W o subespaço gerado pelos vetores ortonormados $v_1 = (0, 1, 0)$ e $v_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$. Determine a projeção ortogonal do vetor $u = (1, 1, 1)$ sobre W.

Resolução *A projeção ortogonal de u sobre W pode ser calculada usando a fórmula do teorema anterior:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_W u &= (u \cdot v_1)v_1 + (u \cdot v_2)v_2 \\
&= ((1,1,1) \cdot (0,1,0))\,(0,1,0) + \left((1,1,1) \cdot \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)\right)\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) \\
&= (0,1,0) - \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) \\
&= \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right).
\end{aligned}$$

Teorema 1.12

Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano, W um subespaço de V e $v \in V$. Então, v pode ser escrito na forma única

$$v = w + w',$$

onde $w \in W$ e $w' \in W^\perp$. ♡

Demonstração Sejam $v \in V$, $w \in W$ e $\{w_1, \ldots, w_n\}$ uma base ortonormada de W, que pode ser construída através do Método de ortogonalização de Gram-Schmidt. Então, pelo Teorema 1.11 tem-se

$$w = (v \cdot w_1)w_1 + \cdots + (v \cdot w_n)w_n.$$

Seja ainda $w' = v - w$, então, $w + w' = w + (v - w) = v$. Assim, resta provar que $w \in W$ e $w' \in W^\perp$. Pelo facto de w ser uma combinação linear dos vetores da base de W, conclui-se que $w \in W$. Para provar que $w' \in W^\perp$, é necessário mostrar que $w' \cdot u = 0$ é válido para todo $u \in W$. Como $u \in W$, então u pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base de

W:

$$u = k_1 w_1 + \cdots + k_n w_n,$$

onde $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$. Assim, tem-se

$$w' \cdot u = (v - w) \cdot u = v \cdot u - w \cdot u.$$

Além disso, é válido que

$$v \cdot u = v \cdot (k_1 w_1 + \cdots + k_n w_n) = k_1(v \cdot w_1) + \cdots + k_n(v \cdot w_n)$$

e

$$\begin{aligned} w \cdot u &= ((v \cdot w_1)w_1 + \cdots + (v \cdot w_n)w_n) \cdot (k_1 w_1 + \cdots + k_n w_n) \\ &= k_1(v \cdot w_1) + \cdots + k_n(v \cdot w_n), \end{aligned}$$

porque $w_1, \ldots, w_n$ são vetores ortonormados. Conclui-se assim, que $v \cdot u$ e $w \cdot u$ são iguais e como consequência

$$w' \cdot u = v \cdot u - w \cdot u = 0,$$

que é o que se pretendia provar.

Para mostrar que w e w' são os únicos vetores que têm as propriedades indicadas no teorema, suponha que também é possível escrever

$$v = x + x',$$

onde $x \in W$ e $x' \in W^\perp$. Subtraindo à equação anterior a expressão $v = w + w'$, obtém-se

$$0_V = (x - w) + (x' - w') \Leftrightarrow w - x = x' - w'.$$

Como w' e x' são ortogonais a W, então a sua diferença é um vetor ortogonal a W, *i.e.* $x' - w' \in W^\perp$, porque para todo $u \in W$ se tem

$$u \cdot (x' - w') = u \cdot x' - u \cdot w' = 0 - 0 = 0,$$

mas $x' - w'$ é um vetor pertencente a W, porque $x' - w' = w - x \in W$, dado que $w, x \in W$. Então, pelo Teorema 1.5 , como $x' - w' \in W^\perp$ e $x' - w' \in W$, conclui-se que $x' - w' = 0_V$ e assim $x' = w'$. Assim, a igualdade $w - x = x' - w'$ implica que $x = w$, ficando provado que os vetores w e w' são únicos. $\square$

Observação No teorema anterior, o vetor $v = w + w'$ pode ser escrito na forma

$$v = \operatorname{proj}_W v + \operatorname{proj}_{W^\perp} v,$$

onde

$$w = \operatorname{proj}_W v \in W,$$
$$w' = v - w = \operatorname{proj}_{W^\perp} v \in W^\perp$$

(ver Figura 1.10).

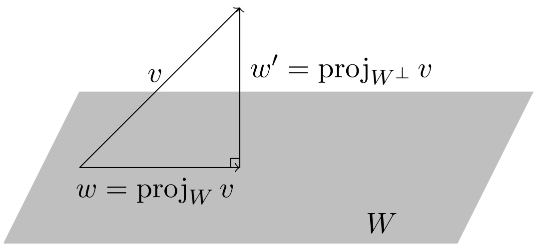


Figura 1.10: Vetores v, $\text{proj}_W v$ e $\text{proj}_{W^\perp} v$.

Exercício 1.19 Sejam $W = \langle(2,1,-3)\rangle$ e $v = (1,-1,1)$. Determine $w \in W$ e $w' \in W^\perp$ tal que $v = w + w'$.

Resolução *Como $v = \text{proj}_W v + \text{proj}_{W^\perp} v$ e $w_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(2,1,-3)$ forma uma base ortonormada de W, tem-se*

$$\begin{aligned} w &= \text{proj}_W v \\ &= (v \cdot w_1)w_1 \\ &= \left((1,-1,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}(2,1,-3)\right)\frac{1}{\sqrt{14}}(2,1,-3) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{14}}\frac{1}{\sqrt{14}}(2,1,-3) \\ &= -\frac{1}{7}(2,1,-3). \end{aligned}$$

De $v = w + w'$, obtém-se

$$w' = v - w = (1,-1,1) - \left(-\frac{1}{7}(2,1,-3)\right) = \frac{1}{7}(9,-6,4).$$

Exercício 1.20 Considere $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ e $v = (1,2,3)$. Determine $\text{proj}_W v$ e $\text{proj}_{W^\perp} v$.

Resolução *Como*

$$W = \{(x,y,z) : x - y + z = 0\} = \{(y-z,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\} = \langle(1,1,0),(-1,0,1)\rangle,$$

então $\{(1,1,0),(-1,0,1)\}$ é uma base de W, porque, como nenhum dos vetores é combinação linear do outro, os vetores são linearmente independentes. Aplicando o processo de Gram-Schmidt para transformar a base $\{e_1,e_2\} = \{(1,1,0),(-1,0,1)\}$ numa base ortonormada $\{w_1,w_2\}$, obtém-se

$$w_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0);$$

$$\begin{aligned} z_2 &= e_2 - w_1(e_2 \cdot w_1) \\ &= (-1,0,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\left((-1,0,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right) \\ &= (-1,0,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}(-1,1,2), \end{aligned}$$

$$w_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{4}{4}}}(-1,1,2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2).$$

Assim,

$$\{w_1, w_2\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)\right\}$$

é uma base ortonormada.

Então,

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_W v &= (v \cdot w_1)w_1 + (v \cdot w_2)w_2 \\
&= \left((1,2,3) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \\
&\quad + \left((1,2,3) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)\right)\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2) \\
&= \frac{3}{2}(1,1,0) + \frac{7}{6}(-1,1,2) \\
&= \frac{1}{3}(1,8,7)
\end{aligned}$$

e

$$\operatorname{proj}_{W^\perp} v = v - \operatorname{proj}_W v = (1,2,3) - \frac{1}{3}(1,8,7) = \frac{1}{3}(2,-2,2).$$

O seguinte teorema estabelece uma caracterização útil de matrizes ortogonais.

Teorema 1.13

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A é uma matriz ortogonal se e só se as colunas de A formam um sistema ortonormado. ♡

Demonstração Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Como $c_{i,A} \cdot c_{j,A} = \ell_{i,A^{\mathrm{T}}} c_{j,A} = (A^{\mathrm{T}}A)_{ij}$, para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, então as colunas $c_{1,A}, \ldots c_{n,A}$ são ortonormadas se

$$(A^{\mathrm{T}}A)_{ij} = \begin{cases} 1, & se \quad i = j \\ 0, & se \quad i \neq j, \end{cases}$$

que é equivalente a ter $A^{\mathrm{T}}A = I_n$. □

Exercício 1.21 Verifique se a matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é ortogonal usando dois processos distintos.

Resolução

- *Processo 1:*

  Sejam $c_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $c_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ *e* $c_3 = (0,0,1)$ *os vetores coluna da matriz A. Como*

$$c_1 \cdot c_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + 0 = 0$$

$$c_1 \cdot c_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \cdot (0,0,1) = 0$$

$$c_2 \cdot c_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \cdot (0,0,1) = 0$$

e

$$\|c_1\| = \left\| \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \right\| = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\|c_2\| = \left\| \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \right\| = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$$\|c_1\| = \|(0,0,1)\| = 1,$$

então, as colunas de A formam um sistema ortonormado. Logo, A é uma matriz ortogonal.

- *Processo 2: Como*

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3,$$

então A é uma matriz ortogonal.

Teorema 1.14. (Decomposição QR)

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que as suas colunas são linearmente independentes. Então, A admite uma única decomposição QR (ou fatorização QR) na forma

$$A = QR,$$

onde $Q \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz com vetores coluna ortonormados e $R \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz triangular superior invertível com elementos positivos na diagonal. ♡

Demonstração Sejam $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um conjunto linearmente independente de $\mathbb{R}^m$ e $\{q_1, \ldots, q_n\}$ uma base ortonormada obtida pelo processo de Gram-Schmidt aplicado a $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Sejam, ainda, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ a matriz que tem nas colunas os vetores $e_1, \ldots, e_n$ e $Q \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ a matriz que tem nas colunas os vetores $q_1, \ldots, q_n$, ou seja,

$$A = [e_1 \cdots e_n] \qquad \text{e} \qquad Q = [q_1 \cdots q_n]\,.$$

Então, pelo teorema anterior pode escrever-se

$$\begin{aligned} e_1 &= (e_1 \cdot q_1)q_1 + (e_1 \cdot q_2)q_2 + \cdots + (e_1 \cdot q_n)q_n \\ e_2 &= (e_2 \cdot q_1)q_1 + (e_2 \cdot q_2)q_2 + \cdots + (e_2 \cdot q_n)q_n \\ &\vdots \\ e_n &= (e_n \cdot q_1)q_1 + (e_n \cdot q_2)q_2 + \cdots + (e_n \cdot q_n)q_n. \end{aligned}$$

As equações anteriores podem ser escritas na forma matricial

$$[e_1 \cdots e_n] = [q_1 \cdots q_n] \begin{bmatrix} e_1 \cdot q_1 & e_2 \cdot q_1 & \cdots & e_n \cdot q_1 \\ e_1 \cdot q_2 & e_2 \cdot q_2 & \cdots & e_n \cdot q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_1 \cdot q_n & e_2 \cdot q_n & \cdots & e_n \cdot q_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = QR.$$

Como q_j é ortogonal a $e_1, \ldots, e_{j-1}$ para $j \geq 2$, então

$$R = \begin{bmatrix} e_1 \cdot q_1 & e_2 \cdot q_1 & \cdots & e_n \cdot q_1 \\ 0 & e_2 \cdot q_2 & \cdots & e_n \cdot q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_n \cdot q_n \end{bmatrix}.$$

A matriz R é invertível, porque os elementos da diagonal de R são não nulos. Note que, como para $j = 1, \ldots, n$ se tem

$$e_j = (e_j \cdot q_1)q_1 + (e_j \cdot q_2)q_2 + \cdots + (e_j \cdot q_n)q_n$$

e $\{q_1, \ldots, q_n\}$ é uma base ortonormada, então

$$e_k \cdot q_k = ((e_k \cdot q_k)q_k) \cdot q_k = (e_k \cdot q_k)(q_k \cdot q_k)$$

para qualquer $k = 1, \ldots, n$.

Se $e_k \cdot q_k = 0$ ter-se-ia $q_k \cdot q_k = 0$, o que é impossível, porque $\{q_1, \ldots, q_n\}$ é uma base ortonormada, logo $e_k \cdot q_k \neq 0$ para $k = 1, \ldots, n$.

Para provar que os elementos da diagonal de R são positivos, recorre-se ao seguinte lema.

Lema 1.1

A matriz R da decomposição $A = QR$ pode ser escrita na forma

$$R = \begin{bmatrix} \|z_1\| & e_2 \cdot q_1 & \cdots & e_n \cdot q_1 \\ 0 & \|z_2\| & \cdots & e_n \cdot q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|z_n\| \end{bmatrix},$$

onde $\|z_1\| = \|e_1\|$ e $\|z_k\| = \|e_k - \sum_{i=1}^{k-1} q_i \, (e_k \cdot q_i)\|$ para $k = 2, \ldots, n$. ♡

Demonstração Pelo Método de ortogonalização de Gram-Schmidt, os vetores da base ortonormada $\{q_1, \ldots, q_n\}$ construída a partir de $\{e_1, \ldots, e_n\}$ são dados por

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{e1}{\|e1\|} \\ q_2 &= \frac{z_2}{\|z_2\|}, \text{ onde } z_2 = e_2 - q_1(e_2 \cdot q_1) \\ q_3 &= \frac{z_3}{\|z_3\|}, \text{ onde } z_3 = e_3 - q_1(e_3 \cdot q_1) - q_2(e_3 \cdot q_2) \\ &\vdots \\ q_n &= \frac{z_n}{\|z_n\|}, \text{ onde } z_n = e_n - \sum_{i=1}^{n-1} q_i \, (e_n \cdot q_i). \end{aligned}$$

Estas equações podem ser reescritas do seguinte modo

$$\begin{aligned} e_1 &= \|e_1\|q_1 \\ e_2 &= (e_2 \cdot q_1)q_1 + \|z_2\|q_2 \\ e_3 &= (e_3 \cdot q_1)q_1 + (e_3 \cdot q_2)q_2 + \|z_3\|q_3 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$e_n = (e_n \cdot q_1)q_1 + (e_n \cdot q_2)q_2 + \cdots (e_n \cdot q_{n-1})q_{n-1} + \|z_n\|q_n.$$

Passando estas equações para a forma matricial, obtém-se

$$[e_1 \cdots e_n] = [q_1 \cdots q_n] \begin{bmatrix} \|e_1\| & e_2 \cdot q_1 & \cdots & e_n \cdot q_1 \\ 0 & \|z_2\| & \cdots & e_n \cdot q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|z_n\| \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = QR.$$

Resta mostrar que esta matriz R é equivalente à matriz da decomposição QR obtida anteriormente. Observe que, calculando os produtos internos $e_i \cdot q_i$, $i = 1, \dots, n$, usando as equações para $e_1, \dots, e_n$ obtidas anteriormente e tendo em conta que $\{q_1, \dots, q_n\}$ é uma base ortonormada, se tem

$$\begin{aligned} e_1 \cdot q_1 &= \|e_1\| \\ e_2 \cdot q_2 &= \|z_2\| \\ e_3 \cdot q_3 &= \|z_3\| \\ &\vdots \\ e_n \cdot q_n &= \|z_n\|. \end{aligned}$$

Então, conclui-se que

$$R = \begin{bmatrix} e_1 \cdot q_1 & e_2 \cdot q_1 & \cdots & e_n \cdot q_1 \\ 0 & e_2 \cdot q_2 & \cdots & e_n \cdot q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_n \cdot q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|z_1\| & e_2 \cdot q_1 & \cdots & e_n \cdot q_1 \\ 0 & \|z_2\| & \cdots & e_n \cdot q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|z_n\| \end{bmatrix},$$

onde $\|z_1\| = \|e_1\|$ e $\|z_k\| = \|e_k - \sum_{i=1}^{k-1} q_i \, (e_k \cdot q_i)\|$ para $k = 2, \dots, n$ □

Fica assim provado que os elementos da diagonal da matriz R são positivos: $\|z_i\| > 0$, $i = 1, \dots, n$. Recorde que o Método de ortogonalização de Gram-Schmidt também garante que $\|z_i\| \neq 0$, $i = 1, \dots, n$. □

Corolário 1.1

Seja A uma matriz quadrada. Se A é invertível, então A admite uma única decomposição QR. ♡

Demonstração Seja A uma matriz quadrada. Então, A é invertível se e só se as colunas de A são linearmente independentes. Logo, pelo Teorema 1.14, sendo $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que as suas colunas são linearmente independentes, conclui-se que A admite uma única fatorização $A = QR$, onde $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz com vetores coluna ortonormados e $R \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz triangular superior com elementos positivos na diagonal. □

Exercício 1.22 Determine a decomposição QR da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução *Aplicando o método de Gram-Schmidt aos vetores coluna*

$$\{e_1, e_2, e_3\} = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

de A *— que são linearmente independentes porque* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ *— para construir uma base ortonormada* $\{q_1, q_2, q_3\}$, *obtém-se*

$$q_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),$$

$$w_2 = e_2 - (e_2 \cdot q_1)q_1 = \frac{1}{3}\left(-2,1,1\right), q_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1),$$

$$w_3 = e_3 - (e_3 \cdot q_2)q_2 - (e_3 \cdot q_1)q_1 = \frac{1}{2}\left(0,-1,1\right),$$

$$q_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(0,-1,1\right).$$

Então, $A = QR$, *onde*

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

e

$$R = \begin{bmatrix} e_1 \cdot q_1 & e_2 \cdot q_1 & e_3 \cdot q_1 \\ 0 & e_2 \cdot q_2 & e_3 \cdot q_2 \\ 0 & 0 & e_3 \cdot q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Teorema 1.15

Sejam W *um subespaço do espaço euclidiano* V *e* $u \in V$. *Então* $\operatorname{proj}_W u$ *é a melhor aproximação de* u *a* W *no sentido*

$$\forall w \in W \quad [\|u - \operatorname{proj}_W u\| \leq \|u - w\|],$$

onde a igualdade é válida se e só se $w = \operatorname{proj}_W u$. ♡

Demonstração Para todo $w \in W$ é possível escrever

$$u - w = (u - \operatorname{proj}_W u) + (\operatorname{proj}_W u - w).$$

Por um lado, tem-se $(\operatorname{proj}_W u - w) \in W$, porque é a diferença de dois vetores de W, por outro lado, $(u - \operatorname{proj}_W u) \in W^{\perp}$. Então, pelo Teorema de Pitágoras, sabe-se que

$$\|u - w\|^2 = \|u - \operatorname{proj}_W u\|^2 + \|\operatorname{proj}_W u - w\|^2.$$

Se $w \neq \operatorname{proj}_W u$, então o segundo termo do lado direito da expressão anterior é positivo e assim

$$\|u - w\|^2 > \|u - \operatorname{proj}_W u\|^2,$$

que é equivalente a

$$\|u-w\| > \|u - \operatorname{proj}_W u\|,$$

ficando provada a desigualdade.

Se $w = \operatorname{proj}_W u$, obtém-se a igualdade. Se, por outro lado, $\|u - \operatorname{proj}_W u\| = \|u-w\|$, então substituindo esta igualdade na equação obtida pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$\|u-w\|^2 = \|u-w\|^2 + \|\operatorname{proj}_W u - w\|^2 \Leftrightarrow \|\operatorname{proj}_W u - w\|^2 = 0.$$

Então, $\|\operatorname{proj}_W u - w\| = 0$ e das propriedades da definição de norma resulta que $\operatorname{proj}_W u - w = 0_V$, logo $w = \operatorname{proj}_W u$, ficando provado que a igualdade é válida se e só se $w = \operatorname{proj}_W u$. $\square$

1.4 Método dos mínimos quadrados

Quando se formula um problema como um sistema de equações lineares, espera-se, na maior parte dos casos, que o sistema seja possível e determinado. Nestes casos, o sistema de equações lineares tem uma solução $\bar{x}$, dita exata, tendo-se $A\bar{x} - b = \underline{0}$, em que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$ e se identifica $\mathbb{R}^m$ com $\mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$. No entanto, pode acontecer que o sistema, que devia ser possível e determinado do ponto de vista teórico, devido a falhas nas medições ou devido a erros de arredondamento, tenha os elementos de A e/ou b ligeiramente perturbados, tendo como consequência que o sistema se torne impossível. Nestas situações o objetivo passa a ser determinar x de modo a minimizar $\|Ax - b\|$, em que a quantidade $\|Ax - b\|$ pode ser vista como uma medida de erro. Assim, quanto menor é o valor de $\|A\tilde{x} - b\|$, melhor é a aproximação de $\tilde{x}$ como solução de $Ax = b$, tendo-se $\|A\tilde{x} - b\| = 0$ no caso de $\tilde{x}$ ser uma solução exata do sistema.

O **problema de mínimos quadrados** consiste em determinar x que minimiza $\|Ax - b\|$ em relação ao produto interno euclidiano em $\mathbb{R}^m$. O vetor x é designado por **solução de mínimos quadrados** de $Ax = b$.

Seja $e = A\tilde{x} - b$ o erro que resulta da aproximação com $\tilde{x}$. Se $e = (e_1, \ldots, e_m)$, onde e_i, $i = 1, \ldots, m$, representa o erro correspondente à coordenada i, então a solução de mínimos quadrados minimiza $\|e\| = \sqrt{e_1^2 + \cdots + e_m^2}$ e, assim, minimiza $\|e\|^2 = e_1^2 + \cdots + e_m^2$ (daí a designação “mínimos quadrados”).

Para resolver o problema de mínimos quadrados, seja W o espaço das colunas de A, $\mathrm{EC}(A)$. Então, para todo o x, Ax é uma combinação linear das colunas de A. Basta observar que

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Geometricamente, resolver o problema de mínimos quadrados consiste em encontrar $\tilde{x}$ tal que $A\tilde{x}$ é o vetor mais próximo de b em W. E o vetor mais próximo é a projeção ortogonal de b em W (ver Figura 1.11). Note que pelo Teorema 1.15 se tem $\|b - \text{proj}_W\, b\| \leq \|b - Ax\|$. Então, um vetor $\tilde{x}$ que é solução dos mínimos quadrados de $Ax = b$ tem que satisfazer

$$A\tilde{x} = \text{proj}_W\, b.$$

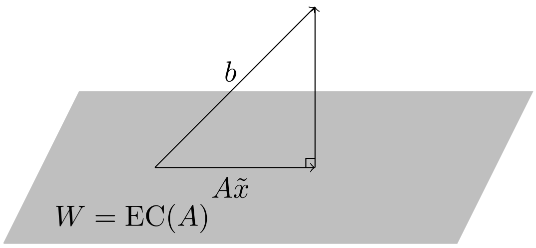


Figura 1.11: Vetor $A\tilde{x} = \text{proj}_W\, b \in \text{EC}(A)$.

A solução de mínimos quadradros pode ser determinada da seguinte forma. Sabe-se que

$$b - Ax = b - \text{proj}_W\, b$$

é ortogonal a W (ver Figura 1.12); mas W é o espaço das colunas de A, então $b - Ax$ pertence ao espaço nulo de A^{T}, $\text{N}(A^{\text{T}})$, pois $\text{EC}(A)^{\perp} = \text{N}(A^{\text{T}})$.

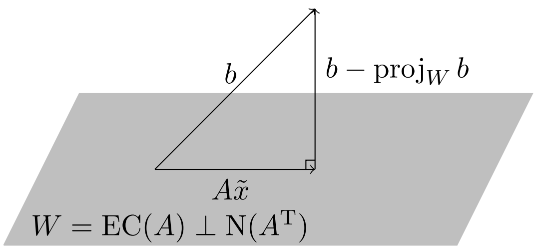


Figura 1.12: Vetor $b - \text{proj}_W\, b$ ortogonal a $\text{EC}(A)$.

Como $b - Ax \in \text{N}(A^{\text{T}})$, então a solução de mínimos quadrados de $Ax = b$ tem que satisfazer a equação

$$A^{\text{T}}(b - Ax) = \underline{0},$$

que é equivalente a

$$A^{\text{T}}Ax = A^{\text{T}}b.$$

Este sistema é designado por **sistema normal associado a** $Ax = b$ e as equações correspondentes designam-se por **equações normais associadas a** $Ax = b$. As soluções de $A^{\text{T}}Ax = A^{\text{T}}b$ são as **soluções de mínimos quadrados** de $Ax = b$.

Teorema 1.16

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então:

(a) $A^{\mathrm{T}}A$ *é uma matriz simétrica.*

(b) $\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{N}(A)$.

(c) $\mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}})$.

♡

Demonstração

(a) Como $(A^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A$, então $A^{\mathrm{T}}A$ é uma matriz simétrica.

(b) Seja $x \in \mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}A)$. Então, tem-se $A^{\mathrm{T}}Ax = \underline{0} \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}(Ax) = \underline{0}$, o que significa que $Ax \in \mathrm{N}(A^{\mathrm{T}})$, mas $\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}) = \mathrm{EC}(A)^{\perp}$, pelo que $Ax \in \mathrm{EC}(A)^{\perp}$. Por outro lado, $Ax \in \mathrm{EC}(A)$, visto que Ax é uma combinação linear das colunas de A, e como $\mathrm{EC}(A) \cap \mathrm{EC}(A)^{\perp} = \underline{0}$ (ver Teorema 1.5), então $Ax = \underline{0}$, o que significa que $Ax \in \mathrm{N}(A)$. Assim, conclui-se que $\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}A) \subseteq \mathrm{N}(A)$.

Considere agora $x \in \mathrm{N}(A)$, então $Ax = \underline{0}$, donde se conclui que $x \in \mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}A)$, porque

$$Ax = \underline{0} \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}\underline{0} \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}Ax = \underline{0}.$$

Assim, conclui-se que $\mathrm{N}(A) \subseteq \mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}A)$.

Logo, como $\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}A) \subseteq \mathrm{N}(A)$ e $\mathrm{N}(A) \subseteq \mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}A)$, fica provado que $\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{N}(A)$.

(c) Para provar que $\mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}})$, basta observar que

$$\mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}A)^{\perp} = \mathrm{N}(A)^{\perp} = \mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}}),$$

onde na segunda igualdade se usou o resultado da alínea (b) deste teorema.

□

Exercício 1.23 Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Verifique que:

(a) $A^{\mathrm{T}}A$ é uma matriz simétrica.

(b) $\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{N}(A)$.

(c) $\mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}})$.

Resolução

(a) Como

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

conlcui-se que $A^{\mathrm{T}}A$ é uma matriz simétrica (porque $A^{\mathrm{T}}A = (A^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}}$).

(b) Para determinar $\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}A)$, resolve-se o sistema homogéneo $A^{\mathrm{T}}Ax = \underline{0}$, onde $x = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]$, vindo

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A^{\mathrm{T}}A) = \operatorname{car}(A^{\mathrm{T}}A|\underline{0}) = 2 = n$*, onde* n *é o número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ \qquad\quad 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Assim, tem-se $\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}A) = \{(0,0)\}$*.*

Para determinar $\mathrm{N}(A)$*, resolve-se o sistema homogéneo* $Ax = \underline{0}$*, onde* $x = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]$*, vindo*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_2}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|\underline{0}) = 2 = n$*, onde* n *é o número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ \qquad - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Assim, tem-se $\mathrm{N}(A) = \{(0,0)\}$*.*

Logo, é válido que $\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{N}(A)$*.*

(c) Como

$$\mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}}) = \langle (1,2), (1,0), (0,2) \rangle = \mathbb{R}^2$$

e

$$\mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}}A) = \langle (2,2), (2,4) \rangle = \mathbb{R}^2,$$

verifica-se que $\mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}})$*.*

Teorema 1.17

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$*. Se* $\operatorname{car}(A) = n$*, então* $A^{\mathrm{T}}A$ *é uma matriz invertível.* ♡

Demonstração Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{car}(A) = n$. Então,

$$\dim\langle c_1, \ldots, c_n \rangle = \dim\langle \ell_1, \ldots, \ell_m \rangle = n,$$

ou seja, $\dim(\mathrm{EC}(A)) = \dim(\mathrm{EL}(A)) = n$. Como $\mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}}) = \mathrm{EL}(A)$, obtém-se $\dim(\mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}})) = n$ e, como pelo Teorema 1.16 é válido que $\mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}})$, conclui-se que $\dim(\mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}}A)) = n$. Daqui resulta que $\operatorname{car}(A^{\mathrm{T}}A) = n$.

Observe agora que, como $\operatorname{car}(A) = n$, então $Ax = \underline{0}$ é um sistema possível e determinado. Como pelo Teorema 1.16 se tem $\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{N}(A)$, então $A^{\mathrm{T}}Ax = \underline{0}$ é um sistema possível e determinado.

Assim, sendo $A^{\mathrm{T}}Ax = \underline{0}$ um sistema possível e determinado e $\operatorname{car}(A^{\mathrm{T}}A) = n$, conclui-se que $A^{\mathrm{T}}A$ é uma matriz invertível. □

Exercício 1.24 Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Verifique se $A^{\mathrm{T}}A$ é um matriz invertível:

(a) usando o teorema anterior.

(b) calculando $\det(A^{\mathrm{T}}A)$.

Resolução

(a) Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tem-se que $\operatorname{car}(A) = 2$, *que coincide com o número de colunas de* A. *Assim, conclui-se que* $A^{\mathrm{T}}A$ *é uma matriz invertível.*

(b) Como

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix},$$

então $\det(A^{\mathrm{T}}A) = 16 - 4 = 12 \neq 0$, *logo,* $A^{\mathrm{T}}A$ *é uma matriz invertível.*

Teorema 1.18

Seja $Ax = b$ *um sistema de equações lineares com* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Então,* x *é solução de mínimos quadrados de* $Ax = b$ *se e só se* x *é solução do sistema normal associado*

$$A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b.$$

♡

Demonstração Ver a introdução no início desta secção. □

Teorema 1.19

Seja $Ax = b$ *um sistema de equações lineares com* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Então:*

(a) O sistema normal associado

$$A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$$

é sempre possível e todas as soluções do sistema normal são soluções de mínimos quadrados de $Ax = b$.

(b) Se $\operatorname{car}(A) = n$, *então* $A^{\mathrm{T}}A$ *é invertível e existe uma única solução de mínimos quadrados que é dada por*

$$x = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}b.$$

♡

Demonstração

(a) Pelo Teorema 1.16 tem-se que $\mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}})$. Como $\mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{EC}(A^{\mathrm{T}}A|A^{\mathrm{T}}b)$, onde $A^{\mathrm{T}}A|A^{\mathrm{T}}b$ é a matriz ampliada do sistema normal $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$, porque as colunas de $A^{\mathrm{T}}b$ formam uma combinação linear das colunas de A^{T}, então conclui-se que

$$\operatorname{car}(A^{\mathrm{T}}A) = \operatorname{car}(A^{\mathrm{T}}A|A^{\mathrm{T}}b),$$

o que significa que o sistema normal é sempre possível.

Para mostrar que todas as soluções do sistema normal são soluções de mínimos quadrados de $Ax = b$, suponha que existem duas soluções x_1 e x_2 do sistema normal. Então, tem-se

$$A^{\mathrm{T}}A(x_1 - x_2) = A^{\mathrm{T}}b - A^{\mathrm{T}}b = \underline{0},$$

de modo que $y = x_1 - x_2 \in \mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}A)$ e, pelo Teorema 1.16, como $\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{N}(A)$, então $y \in \mathrm{N}(A)$, logo $Ay = \underline{0}$.

Tendo em conta que $x_1 = y + x_2$, vem

$$Ax_1 - b = A(y + x_2) - b = Ax_2 - b.$$

Isto significa que $\|e\| = \|Ax_1 - b\|^2 = \|Ax_2 - b\|^2$. Assim, conclui-se que todas as soluções do sistema normal têm o mesmo erro $\|e\|$, como consequência do Teorema 1.18, estas soluções do sistema normal são soluções de mínimos quadrados de $Ax = b$.

(b) Suponha que $\mathrm{car}(A) = n$. Então, pelo Teorema 1.17, a matriz $A^{\mathrm{T}}A$ é invertível, pelo que o sistema normal $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$ tem uma única solução dada por $x = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}b$.

□

Teorema 1.20

Seja $Ax = b$ um sistema de equações lineares com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se W é o espaço das colunas de A, $W = \mathrm{EC}(A)$, e x é a solução de mínimos quadrados de $Ax = b$, então a projeção ortogonal de b em W é

$$\mathrm{proj}_W\, b = Ax.$$

♡

Demonstração Ver a introdução no início desta secção. □

Observação Note que a solução de mínimos quadrados de $Ax = b$ não é de facto uma solução de $Ax = b$, a não ser que o sistema $Ax = b$ seja possível, mas é uma solução do sistema normal associado $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$. No caso de $Ax = b$ ser um sistema possível a solução de $Ax = b$ é a solução de mínimos quadrados que coincide com a solução de $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$.

Exercício 1.25 Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$.

(a) Determine a solução de mínimos quadrados do sistema de equações lineares $Ax = b$.

(b) Calcule a projeção ortogonal de b no espaço $\mathrm{EC}(A)$.

Resolução

(a) Seja $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

e

$$A^{\mathrm{T}}b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Então o sistema normal associado $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$ *é*

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo este sistema pelo Método de Gauss, vem

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 14 \\ -2 & 6 & -7 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \frac{2}{3}\ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 14 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{7}{3} \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A^{\mathrm{T}}A) = \operatorname{car}(A^{\mathrm{T}}A|A^{\mathrm{T}}b) = 2 = n$*, onde* n *é o número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} 3x_1 - \ 2x_2 = 14 \\ \qquad \frac{14}{3}x_2 = \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Logo, a solução de mínimos quadrados é dada por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(b) A projeção ortogonal de b *no espaço* $\mathrm{EC}(A)$ *é* Ax*, onde* x *é a solução de mínimos quadrados:*

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} \\ -\frac{9}{2} \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.26 Determine a projeção ortogonal de $u = (2, 1, 3)$ no subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (1, 2, 1)$ usando o Método dos mínimos quadrados.

Resolução *Seja* $W = \mathrm{EC}(A) = \langle v_1, v_2 \rangle$*. Então,* $\operatorname{proj}_W u = Ax$*, onde* $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ *e* $x = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]$ *é a solução de mínimos quadrados de* $Ax = u$*.*

Tem-se

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

e

$$A^{\mathrm{T}}u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Então, o sistema normal associado $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}u$ *é*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo este sistema pelo Método de Gauss, vem

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \frac{3}{2}\ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

Como $\operatorname{car}(A^{\mathrm{T}}A) = \operatorname{car}(A^{\mathrm{T}}A|A^{\mathrm{T}}u) = 2 = n$*, onde* n *é o número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 3 \\ \frac{3}{2}x_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Logo, $\operatorname{proj}_W u = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$

1.5 Método dos mínimos quadrados e regressão linear

Os modelos de regressão linear permitem descrever a relação formal entre variáveis baseada em dados obtidos experimentalmente. Estes modelos podem ser ajustados usando o Método dos mínimos quadrados.

Considere duas variáveis x e y e dados (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$. Suponha que existe um polinómio que melhor se ajusta aos dados. O objetivo é determinar um polinómio de grau k,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k,$$

de modo que $f(x_i)$ seja a melhor aproximação para y_i para todo $i = 1, \ldots, n$. A qualidade da aproximação é determinada através das diferenças (erros) $y_i - f(x_i)$ entre os dados observados y_i e os dados previstos $f(x_i)$ (ver Figura 1.13).

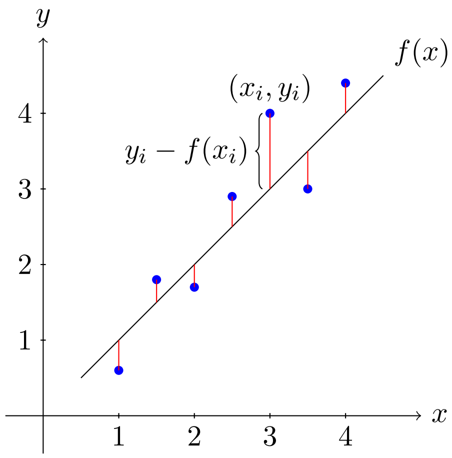


Figura 1.13: Reta de regressão e dados com erros $y_i - f(x_i)$.

Para obter a melhor aproximação pretende-se minimizar

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2.$$

O problema de mínimos quadrados consiste neste caso em determinar a função f que minimiza a soma dos quadrados dos erros. A função f que minimiza a soma dos quadrados dos erros é designada por polinómio de regressão linear de y em x. O modelo diz-se "linear", porque o modelo é linear nos parâmetros $a_0, \ldots, a_k$. Para ver que este problema de mínimos quadrados tem solução, considere as matrizes

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^k \end{bmatrix}, \; z = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix},$$

então

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_k x_i^k)]^2 = \|y - Az\|^2.$$

Assim, o objetivo passa a ser:

minimizar $\|y - Az\|$ quando z varia em $\mathbb{R}^k$.

Lembre-se que aqui se identifica $\mathbb{R}^n$ com $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, em particular $\mathbb{R}^k$ com $\mathcal{M}_{k\times 1}(\mathbb{R})$.

Note que $W = \{Az : z \in \mathbb{R}^k\} = \mathrm{EC}(A)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e

$\min\{\|y - Az\| : z \in \mathbb{R}^k\} = \min\{\|y - w\| : w \in W\}$.

De acordo com o Teorema 1.15, o único elemento de W que está mais próximo de y é $\mathrm{proj}_W(y)$.

Assim, a aproximação de mínimos quadrados é obtida resolvendo

$Az = \mathrm{proj}_W(y)$.

Este sistema é possível porque $\mathrm{proj}_W(y) \in W = \{Az, z \in \mathbb{R}^k\}$. O sistema é possível e determinado se as colunas de A forem linearmente independentes, o que acontece se $\exists i \neq j [x_i \neq x_j]$.

Estes resultados são apresentados no seguinte teorema.

Teorema 1.21

Se $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, n$, são dados em que pelo menos dois dos $x_1, \ldots, x_n$ são distintos, então existem $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ únicos tais que

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_k x_i^k)]^2 \leq \sum_{i=1}^{n} [y_i - (c_0 + c_1 x_i + \cdots + c_k x_i^k)]^2,$$

$\forall c_0, c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$. *Além disso, se* $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^k \end{bmatrix}$ *e* $z = \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$, *então* $z_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}$ *é a solução de* $Az = \mathrm{proj}_W(y)$, *onde* $W = \mathrm{EC}(A)$.

♡

Observação

(a) A solução de mínimos quadrados z_0 é a solução do sistema normal

$$A^{\mathrm{T}} A z = A^{\mathrm{T}} y.$$

(b) Se o polinómio de regressão é de grau 1, *i.e.*, se $k = 1$, então a função f que minimiza a soma dos quadrados dos erros é designada por reta de regressão de y em x.

Exercício 1.27 Considere os dados $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,1)$ e $(4,-1)$. Determine a reta de regressão linear que melhor se ajusta aos dados no sentido dos mínimos quadrados.

Resolução *A reta que melhor se ajusta aos dados é uma função da forma* $f(x) = a_0 + a_1 x$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.

Substituindo os dados (x, y) *na equação* $y = f(x)$*, obtém-se*

$$\begin{cases} a_0 + \ \ a_1 = 2 \\ a_0 + 2a_1 = 1 \\ a_0 + 3a_1 = 1 \\ a_0 + 4a_1 = -1. \end{cases}$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial $Az = y$*, onde* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ *e* $z = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$.

Então $A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$ *e* $A^{\mathrm{T}}y = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. *Resolvendo o sistema normal* $A^{\mathrm{T}}Az = A^{\mathrm{T}}y$

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

pelo Método de Gauss, vem

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 10 & 3 \\ 10 & 30 & 3 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \frac{5}{2}\ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 10 & 3 \\ 0 & 5 & -\frac{9}{2} \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A^{\mathrm{T}}A) = \operatorname{car}(A^{\mathrm{T}}A|A^{\mathrm{T}}y) = 2 = n$*, onde* n *é o número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} 4a_0 + 10a_1 = 3 \\ \qquad\ \ 5a_1 = -\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{30}{10} \\ a_1 = -\frac{9}{10}. \end{cases}$$

Então, a reta de regressão linear $f(x) = a_0 + a_1 x$ *fica definida por*

$$f(x) = 3 - \frac{9}{10}x$$

(ver Figura 1.14).

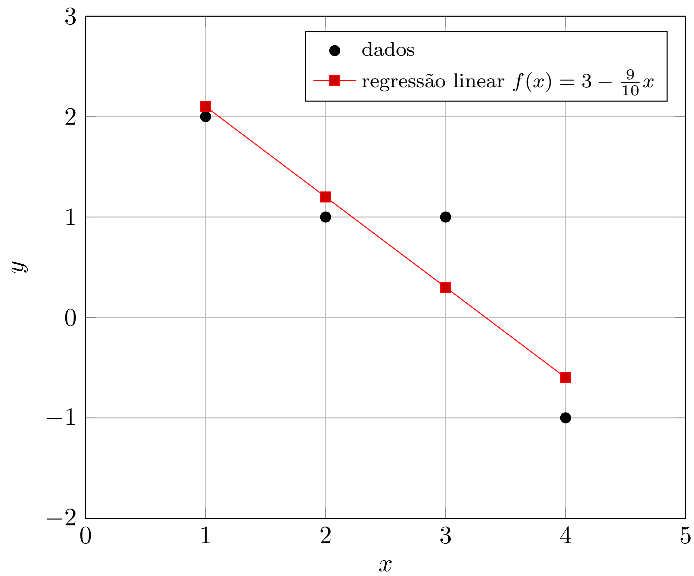


Figura 1.14: Reta de regressão linear.

Exercício 1.28 Considere os dados $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ e $(2, 9)$. Determine a função quadrática que melhor se ajusta aos dados no sentido dos mínimos quadrados.

Resolução *A função quadrática que melhor se ajusta aos dados é um polinómio de segundo grau da forma* $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.
Substituindo os dados (x, y) *na equação* $y = f(x)$*, obtém-se*

$$\begin{cases} a_0 - \ \ a_1 + \ \ a_2 = 0 \\ a_0 \qquad\qquad\quad\ = 1 \\ a_0 + \ \ a_1 + \ \ a_2 = 3 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 9. \end{cases}$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial $Az = y$*, onde* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$ *e* $z = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$. *Então,* $A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix}$ *e* $A^{\mathrm{T}}y = \begin{bmatrix} 13 \\ 21 \\ 39 \end{bmatrix}$. *Resolvendo o sistema normal* $A^{\mathrm{T}}Az = A^{\mathrm{T}}y$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 21 \\ 39 \end{bmatrix}$$

pelo Método de Gauss, vem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 13 \\ 2 & 6 & 8 & 21 \\ 6 & 8 & 18 & 39 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \frac{3}{2}\ell_1]{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 13 \\ 0 & 5 & 5 & \frac{29}{2} \\ 0 & 5 & 9 & \frac{39}{2} \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_2]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 13 \\ 0 & 5 & 5 & \frac{29}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A^{\mathrm{T}}A) = \operatorname{car}(A^{\mathrm{T}}A|A^{\mathrm{T}}y) = 3 = n$*, onde* n *é o número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} 4a_0 + 2a_1 + 6a_2 = 13 \\ 5a_1 + 5a_2 = \frac{29}{2} \\ 4a_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{11}{20} \\ a_1 = -\frac{33}{20} \\ a_2 = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Então, o polinómio de regressão linear $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ *fica definido por*

$$f(x) = \frac{11}{20} + \frac{33}{20}x + \frac{5}{4}x^2 = 0.55 + 1.65x + 1.25x^2$$

(ver Figura 1.15).

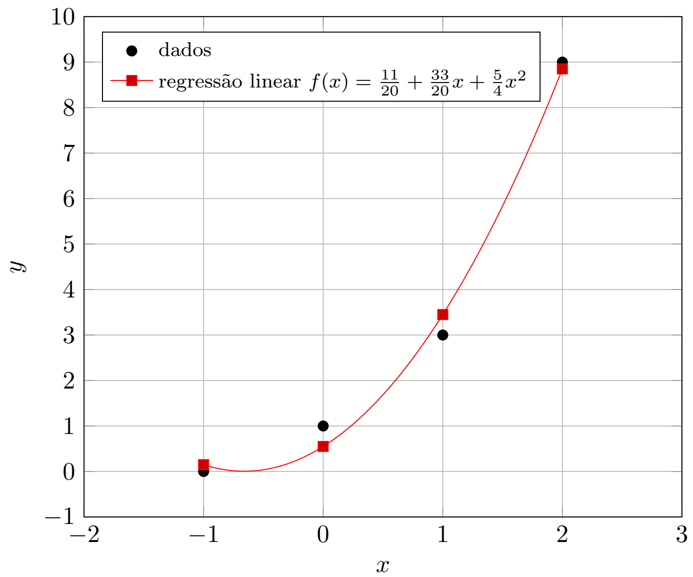


Figura 1.15: Polinómio de regressão linear.

1.6 Método dos mínimos quadrados e decomposição QR

Considerando o problema de mínimos quadrados para o sistema de equações lineares $Ax = b$, com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, foi visto que, se $\operatorname{car}(A) = n$, então existe uma única solução de mínimos quadrados $x = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}b$. Esta expressão fica com uma forma mais simples, se a matriz A é substituída pela decomposição QR.

Teorema 1.22

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *tal que as colunas de* A *são linearmente independentes e seja* $A = QR$ *a fatorização QR da matriz* A*. Então, para todo* $b \in \mathbb{R}^m$ *a equação* $Ax = b$ *tem uma única solução de mínimos quadrados dada por*

$$x = R^{-1}Q^{\mathrm{T}}b.$$

♡

Demonstração Considere o problema de mínimos quadrados para o sistema de equações lineares $Ax = b$, com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. A solução de mínimos quadrados é a solução do sistema normal associado $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$. Se car$(A) = n$, então $A^{\mathrm{T}}A$ é invertível e

$$x = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}b.$$

Além disso, como car$(A) = n$, então as colunas de A são linearmente independentes e assim, A admite a decomposição QR. Neste caso, A pode ser substituída pela decomposição QR e a expressão da solução de mínimos quadrados pode ser simplificada da seguinte forma:

$$A^{\mathrm{T}}A = (QR)^{\mathrm{T}}QR = R^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}QR = R^{\mathrm{T}}R,$$

porque Q é uma matriz ortogonal, logo $Q^{\mathrm{T}}Q = I_m$, e

$$A^{\mathrm{T}}b = (QR)^{\mathrm{T}}b = R^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}b,$$

então

$$x = (R^{\mathrm{T}}R)^{-1}R^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}b = R^{-1}(R^{\mathrm{T}})^{-1}R^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}b = R^{-1}Q^{\mathrm{T}}b.$$

□

Observação A solução $x = R^{-1}Q^{\mathrm{T}}b$ é a solução do sistema $Rx = Q^{\mathrm{T}}b$.

Exercício 1.29 Determine a solução de mínimos quadrados do sistemas de equações lineares $Ax = b$, onde $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$, usando a decomposição QR por dois processos distintos.

Resolução

- *Processo 1:*

  Como os vetores coluna $c_1 = (3, 0, 4)$ e $c_2 = (2, 1, 1)$ de A são linearmente independentes, porque nenhum vetor é combinação linear do outro, então A admite uma decomposição QR. Aplicando o Método de Gram-Schmidt a $\{c_1, c_2\}$ para construir uma base ortonormada $\{q_1, q_2\}$ obtém-se

  $$q_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \frac{1}{5}(3, 0, 4),$$
  $$w_2 = c_2 - (c_2 \cdot q_1)q_1 = \left(\frac{4}{5}, 1, -\frac{3}{5}\right),$$
  $$q_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{5}, 1, -\frac{3}{5}\right).$$

  Então $A = QR$, com

  $$Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} c_1 \cdot q_1 & c_2 \cdot q_1 \\ 0 & c_2 \cdot q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

  Calculando R^{-1}, obtém-se

  $$R^{-1} = \frac{1}{\frac{10}{\sqrt{2}}} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{\sqrt{2}}{5} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

A única solução de mínimos quadrados é então calculada da seguinte forma:

$$x = R^{-1}Q^{\mathrm{T}}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{\sqrt{2}}{5} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

- *Processo 2:*

  Neste caso a solução de mínimos quadrados é a solução do sistema $Rx = Q^{\mathrm{T}}b$, onde as matrizes Q e R já foram calculadas no processo anterior:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

  Então,

$$Q^{\mathrm{T}}b = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{5}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

  e resolve-se o sistema $Rx = Q^{\mathrm{T}}b$ dado pela matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{5}{\sqrt{2}} \end{array}\right].$$

  Como $\operatorname{car}(R) = \operatorname{car}(Q^{\mathrm{T}}b) = 2 = n$, onde n é o número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 5x_1 + \quad 2x_2 = 4 \\ \qquad \frac{2}{\sqrt{2}}x_2 = -\frac{5}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{9}{5} \\ x_2 = -\frac{5}{2}. \end{cases}$$

  Logo, a solução de mínimos quadrados é $x = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$.

Exercício 1.30 Considere os dados $(1,7)$, $(2,4)$, $(3,3)$. Determine a reta de regressão linear que melhor se ajusta aos dados no sentido dos mínimos quadrados:

(a) resolvendo o sistema normal associado.

(b) usando a decomposição QR.

Resolução *A reta que melhor se ajusta aos dados é uma função da forma $f(x) = a_0 + a_1x$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.*

Substituindo os dados (x,y) na equação $y = f(x)$, obtém-se

$$\begin{cases} a_0 + \quad a_1 = 7 \\ a_0 + 2a_1 = 4 \\ a_0 + 3a_1 = 3. \end{cases}$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial $Az = y$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $z = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$.

(a) *O sistema normal associado a* $Az = y$ *é* $A^{\mathrm{T}}Az = A^{\mathrm{T}}y$, *onde* $A^{\mathrm{T}}A = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{smallmatrix}\right]$ *e* $A^{\mathrm{T}}y = \left[\begin{smallmatrix} 14 \\ 24 \end{smallmatrix}\right]$. *Resolvendo o sistema normal* $A^{\mathrm{T}}Az = A^{\mathrm{T}}y$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 24 \end{bmatrix}$$

pelo Método de Gauss, vem

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 24 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 14 \\ 0 & 2 & -4 \end{array}\right].$$

Como $\mathrm{car}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{car}(A^{\mathrm{T}}A|A^{\mathrm{T}}y) = 2 = n$, *onde* n *é o número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} 3a_0 + 6a_1 = 14 \\ \qquad 2a_1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{26}{3} \\ a_1 = -2. \end{cases}$$

Então, a reta de regressão linear $f(x) = a_0 + a_1 x$ *fica definida por*

$$f(x) = \frac{26}{3} - 2x$$

(ver Figura 1.16).

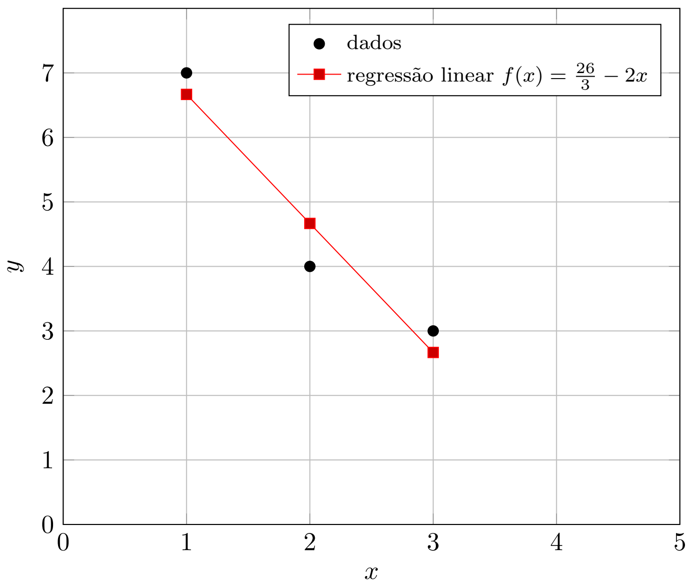


Figura 1.16: Reta de regressão linear.

(b) *Como os vetores coluna* $c_1 = (1,1,1)$ *e* $c_2 = (1,2,3)$ *de* A *são linearmente independentes, porque nenhum vetor é combinação linear do outro, então* A *admite uma única decomposição QR. Aplicando o Método de Gram-Schmidt a* $\{c_1, c_2\}$ *para construir uma base ortonormada* $\{q_1, q_2\}$ *obtém-se*

$$q_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),$$

$$w_2 = c_2 - (c_2 \cdot q_1)q_1 = (-1,0,1),$$

$$q_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1).$$

Então $A = QR$*, onde*

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} c_1 \cdot q_1 & c_2 \cdot q_1 \\ 0 & c_2 \cdot q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

A única solução de mínimos quadrados é solução de $Rz = Q^{\mathrm{T}}y$*, onde*

$$Q^{\mathrm{T}}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{\sqrt{3}} \\ -\frac{4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

A matriz ampliada de $Rz = Q^{\mathrm{T}}y$ *é*

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{3}} & \frac{14}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(R) = \operatorname{car}(Q^{\mathrm{T}}y) = 2 = n$*, onde* n *é o número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado (como já se sabia). O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} \frac{3}{\sqrt{3}}a_0 + \frac{6}{\sqrt{3}}a_1 = \frac{14}{\sqrt{3}} \\ \qquad\qquad \frac{2}{\sqrt{2}}a_1 = -\frac{4}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{26}{3} \\ a_1 = -2. \end{cases}$$

Logo, a solução de mínimos quadrados é $z = \begin{bmatrix} \frac{26}{3} \\ -2 \end{bmatrix}$ *e a reta de regressão linear* $f(x) = a_0 + a_1 x$ *é dada por*

$$f(x) = \frac{26}{3} - 2x.$$

Capítulo 2 Espaços afins

Introdução

- *Espaços afins*
- *Subespaços afins*
- *Pontos, retas e planos*
- *Problemas métricos*
- *Problemas não métricos*

Um espaço afim está associado a um espaço vetorial e os elementos de um espaço afim, que se chamam “pontos”, estão associados aos vetores do espaço vetorial. Neste capítulo, após a definição de espaço afim, serão introduzidas diferentes formas de representação de subespaços afins, como pontos, retas e planos. Serão depois estudados problemas não métricos, como o paralelismo entre subespaços afins. A métrica, que é a norma usual, permite estudar problemas métricos, como o cálculo de distâncias e ângulos entre subespaços afins.

2.1 Espaços afins

Em geometria, um espaço afim pode ser pensado informalmente como um espaço vetorial onde não existe a noção de origem. Num espaço vetorial, depois de se definir um sistema de coordenadas, os pontos são descritos por coordenadas e são identificados como vetores. A introdução de coordenadas através da escolha de uma origem do referencial e das direções dos eixos de coordenadas destrói a homogeneidade do espaço. Num espaço afim são considerados pontos sem referência a uma origem. Pode-se dizer que um espaço afim surge de um espaço vetorial, quando se ignora a escolha de uma origem e assim todos os pontos passam a ser equitativos. A relação entre um espaço afim e um espaço vetorial associado a esse espaço afim pode ser estabelecida da seguinte forma. Considere-se o espaço afim $\mathcal{E}$, cujos elementos são pontos. Definindo um ponto O no espaço afim como origem é possível associar a cada ponto $P \in \mathcal{E}$ um vetor v_{OP} (ver Figura 2.1) que permite definir uma correspondência entre os espaço afim e o espaço vetorial associado. Esta correspondência entre pontos e vetores depende da escolha da origem.

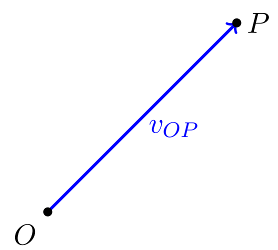


Figura 2.1: Relação entre o ponto P e o vetor v_{OP}.

Por outro lado, qualquer espaço vetorial pode ser visto como um espaço afim, que associa dois pontos A e B ao vetor que liga esses pontos $v_{AB} = B - A$ (ver Figura 2.2). Neste caso é privilegiado um ponto do espaço afim, que é o vetor nulo do espaço vetorial.

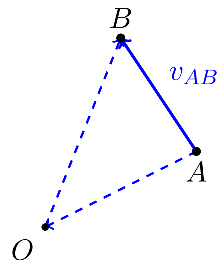


Figura 2.2: Vetor v_{AB} e pontos associados A e B.

Definição 2.1

Seja E um espaço vetorial de dimensão finita. Diz-se que um conjunto $\mathcal{E}$, não vazio, é um **espaço afim** *associado ao espaço vetorial E, se existe uma aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{E}\times\mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ & (A,B) & \longmapsto & \varphi(A,B) \end{array}$$

que verifica as seguintes condições:

(i) $\forall A, B, C \in \mathcal{E}\ [\varphi(A,B) + \varphi(B,C) = \varphi(A,C)]$.

(ii) $\forall A \in \mathcal{E}, \forall v \in E, \exists^1 B \in \mathcal{E}\ [\varphi(A,B) = v]$.

Definição 2.2

Seja E um espaço vetorial de dimensão finita e seja $\mathcal{E}$ um espaço afim associado ao espaço vetorial E. Então, os elementos de $\mathcal{E}$ chamam-se **pontos**.

Observação Seja $\mathcal{E}$ é um espaço afim associado ao espaço vetorial E. Então:

(a) Dados dois pontos $A, B \in \mathcal{E}$, representa-se o vetor $\varphi(A,B) \in E$ por v_{AB} ou por $B - A$.

(b) Dados um ponto $A \in \mathcal{E}$ e um vetor $u \in E$, representa-se o ponto $B \in \mathcal{E}$ tal que $u = v_{AB}$ por $A + u$, isto é,

$$B = A + u \Leftrightarrow u = v_{AB}.$$

Ao ponto B chama-se soma do ponto A com o vetor u.

A condição (i) da definição de espaço afim também pode ser escrita da forma: $\forall A, B, C \in \mathcal{E}\ [v_{AB} + v_{BC} = v_{AC}]$ (ver a ilustração na Figura 2.3).

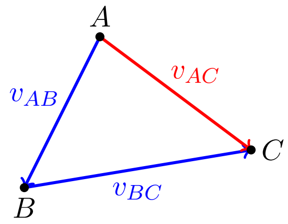


Figura 2.3: Condição (i) da definição de espaço afim.

De acordo com a condição (ii) da definição de espaço afim, para cada ponto $A \in \mathcal{E}$ e para todo o vetor $v \in E$ existe um único ponto $B \in \mathcal{E}$ tal que $v_{AB} = v$ (ver a ilustração na Figura 2.4).

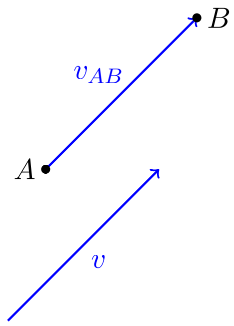


Figura 2.4: Condição (ii) da definição de espaço afim.

Qualquer espaço vetorial tem uma estrutura natural de espaço afim conforme o seguinte teorema.

Teorema 2.1

Seja V um espaço vetorial. Então, o conjunto V é um espaço afim associado ao espaço vetorial V considerando a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi: \quad V \times V &\longrightarrow \quad V \\ (x, y) &\longmapsto \quad y - x. \end{aligned}$$

♡

Demonstração Prova-se a seguir que as duas condições da definição de espaço afim são válidas para o espaço afim dos pontos V associado ao espaço vetorial V.

- Condição (i): $\forall x, y, z \in V, \varphi(x, y) + \varphi(y, z) = \varphi(x, z)$.

  Como

  $$\varphi(x, y) + \varphi(y, z) = (y - x) + (z - y) = z - x = \varphi(x, z),$$

  então a primeira condição da definição de espaço afim é válida.

- Condição (ii): $\forall x \in V, \forall v \in V, \exists^1 y \in V\ [\varphi(x, y) = v]$.

  Suponha-se que existem $y, z \in V$, com $y \neq z$, tais que $v = \varphi(x, y)$ e $v = \varphi(x, z)$. Então, $v = y - x$ e $v = z - x$ pelo que

  $$y - x = z - x \Leftrightarrow y = z.$$

Assim, conclui-se que existe um único $y \in V$ tal que $\varphi(x, y) = v$, pelo que a segunda condição da definição de espaço afim é válida.

Logo, o conjunto dos pontos V é um espaço afim associado ao espaço vetorial V. □

Definição 2.3

Chama-se **estrutura canónica** *à estrutura natural de espaço afim do espaço vetorial* $\mathbb{R}^n$*, ou seja, considerando a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) & \longmapsto & (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n). \end{array}$$

♠

Observação O conjunto $\mathbb{R}^n$ é um espaço afim associado ao espaço vetorial $\mathbb{R}^n$.

Prova-se a seguir que as duas condições da definição de espaço afim são verificadas para a estrutura canónica de $\mathbb{R}^n$.

Sejam $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ e $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$.

- Condição (i): $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(X, Y) + \varphi(Y, Z) = \varphi(X, Z)$.

$$\begin{aligned} &\varphi(X, Y) + \varphi(Y, Z) = (Y - X) + (Z - Y) \\ &= (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n) + (z_1 - y_1, \ldots, z_n - y_n) \\ &= (z_1 - x_1, \ldots, z_n - x_n) \\ &= \varphi(X, Z), \end{aligned}$$

  pelo que a primeira condição da definição de espaço afim é válida.

- Condição (ii): $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall v \in \mathbb{R}^n, \exists^1 Y \in \mathbb{R}^n \; [\varphi(X, Y) = v]$.

  Suponha-se que existem $Y, Z \in \mathbb{R}^n$, com $Y \neq Z$, tais que $v = \varphi(X, Y)$ e $v = \varphi(X, Z)$. Então,

$$(v_1, \ldots, v_n) = (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$$

  e

$$(v_1, \ldots, v_n) = (z_1 - x_1, \ldots, z_n - x_n),$$

  pelo que

$$(y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n) = (z_1 - x_1, \ldots, z_n - x_n).$$

  A equação anterior é equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y_1 - x_1 & = & z_1 - x_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ y_n - x_n & = & z_n - x_n \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} y_1 & = & z_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ y_n & = & z_n. \end{array} \right.$$

  Então, $Y = Z$ e assim conclui-se que existe um único $Y \in \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(X, Y) = v$, pelo que a segunda condição da definição de espaço afim é válida.

Teorema 2.2

Seja $\mathcal{E}$ um espaço afim associado a um espaço vetorial E. Então:

(a) $\forall A \in \mathcal{E}\ [v_{AA} = 0_E]$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{E}\ [v_{AB} = 0_E \Leftrightarrow A = B]$.

(c) $\forall A, B \in \mathcal{E}\ [v_{AB} = -v_{BA}]$.

(d) $\forall A \in \mathcal{E}, \forall u, v \in E\ [(A+u)+v = A+(u+v)]$.

♡

Demonstração

(a) Seja $A \in \mathcal{E}$. Como $v_{AA} = v_{AA} + v_{AA}$, então $v_{AA} = v_{AA} - v_{AA} = 0_E$.

(b) ($\Rightarrow$) Suponha que $v_{AB} = 0_E$. Como $v_{AA} = 0_E$, então pela propriedade (ii) da Definição 2.1 tem-se $\forall A \in \mathcal{E}, \exists^1 B \in \mathcal{E}\ [v_{AB} = 0_E]$, logo $B = A$.

($\Leftarrow$) Suponha que $A = B$. Então $v_{AB} = v_{AA}$ e $v_{AA} = 0_E$ (por (a)), logo $v_{AB} = 0_E$.

(c) Como $v_{AB} + v_{BA} = v_{AA}$ e $v_{AA} = 0_E$ (por (a)), então $v_{AB} + v_{BA} = 0_E$, logo, $v_{AB} = -v_{BA}$.

(d) Sejam $B = A + u$ e $C = B + v$. Então, por um lado, tem-se

$$(A+u)+v = B+v = C$$

e por outro lado, como $u = B - A = v_{AB}$ e $v = C - B = v_{BC}$,

$$A + (u+v) = A + (v_{AB} + v_{BC}) = A + v_{AC} = A + C - A = C,$$

concluindo-se que $(A+u)+v = A+(u+v)$.

□

Definição 2.4

Seja $\mathcal{E}$ um espaço afim associado a um espaço vetorial E de dimensão finita n e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de E. Então:

(a) Diz-se que a **dimensão** *de $\mathcal{E}$ também é n, escrevendo-se $\dim(\mathcal{E}) = n$.*

(b) Seja O um ponto. Ao par $(O; (e_1, \ldots, e_n))$ chama-se **referencial** *de $\mathcal{E}$ e ao ponto O chama-se* **origem** *do referencial. Seja X também um ponto. Ao vetor v_{OX} chama-se* **vetor posição** *do ponto X em relação à origem O. As componentes do vetor posição em relação à base do referencial chamam-se* **coordenadas** *do ponto X, que se representa por $X = (x_1, \ldots, x_n)$, ou, quando for adequado, na forma matricial $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.*

(c) Se $\mathcal{E} = E = \mathbb{R}^n$, chama-se **referencial canónico** *ao referencial $((0, \ldots, 0); ((1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)))$.*

♠

As coordenadas de um ponto arbitrário $A = (a_1, \ldots, a_n)$ em relação ao referencial canónico podem ser calculadas da seguinte forma.

Primeiro calcula-se o vetor posição

$$v_{OA} = A - O = (a_1, \ldots, a_n) - (0, \ldots, 0) = (a_1, \ldots, a_n).$$

Seguidamente obtém-se as componentes do vetor posição em relação à base canónica

$$v_{OA} = (a_1, \ldots, a_n) = a_1 e_1 + \cdots a_n e_n.$$

Por consequência, as coordenadas de A no referencial canónico são $(a_1, \ldots, a_n)$.

2.2 Subespaços afins

Definição 2.5

Seja $\mathcal{E}$ um espaço afim associado a um espaço vetorial E. Sejam $\mathcal{F}$ um subconjunto não vazio de $\mathcal{E}$ e F um subespaço vetorial de E. Diz-se que $\mathcal{F}$ é um **subespaço afim** *de $\mathcal{E}$ associado ao subespaço vetorial F se:*

(i) $\forall A, B \in \mathcal{F}\ [v_{AB} \in F]$.

(ii) $\forall A \in \mathcal{F}, \forall v \in F\ [A + v \in \mathcal{F}]$.

Exercício 2.1 Mostre que $\mathcal{G} = \{(1 + x, y, 0, 2 + y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço afim associado ao subespaço vetorial $G = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$ de $\mathbb{R}^4$.

Resolução *Prova-se a seguir que as duas condições da Definição 2.5 são válidas.*

- *Condição (i):* $\forall A, B \in \mathcal{G}\ [v_{AB} \in G]$.

  Sejam $A = (1 + x, y, 0, 2 + y), B = (1 + z, w, 0, 2 + w) \in \mathcal{G}$. *Então,*

$$\begin{aligned} v_{AB} &= B - A \\ &= (1 + z - (1 + x), w - y, 0, 2 + w - (2 + y)) \\ &= (z - x, w - y, 0, w - y) \\ &= (z - x)(1, 0, 0, 0) + (w - y)(0, 1, 0, 1) \in G. \end{aligned}$$

  Assim, conclui-se que a condição (i) é válida.

- *Condição (ii):* $\forall A \in \mathcal{G}, \forall v \in G\ [A + v \in \mathcal{G}]$.

  Sejam $A = (1 + x, y, 0, 2 + y) \in \mathcal{G}$ *e* $v = (\alpha, \beta, 0, \beta) \in G$. *Então,*

$$\begin{aligned} A + v &= (1 + x, y, 0, 2 + y) + (\alpha, \beta, 0, \beta) \\ &= (1 + x + \alpha, y + \beta, 0, 2 + y + \beta) \\ &= (1 + \bar{x}, \bar{y}, 0, 2 + \bar{y}) \in \mathcal{G}, \end{aligned}$$

  onde $\bar{x} = x + \alpha$ *e* $\bar{y} = y + \beta$.

  Assim, conclui-se que a condição (ii) é válida.

Como as condições (i) e (ii) são válidas, conclui-se que $\mathcal{G}$ é um subespaço afim associado ao subespaço vetorial G.

Exercício 2.2 Mostre que $\mathcal{H} = \{(1 + x, 2y, 3z, 2 + y + z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço afim associado ao subespaço vetorial $H = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 1), (0, 0, 3, 1) \rangle$ de $\mathbb{R}^4$.

Resolução *Prova-se a seguir que as duas condições da Definição 2.5 são válidas.*

- *Condição (i):* $\forall A, B \in \mathcal{H}\ [v_{AB} \in H]$.

  Sejam $A = (1 + x, 2y, 3z, 2 + y + z), B = (1 + a, 2b, 3c, 2 + b + c) \in \mathcal{H}$. *Então,*

$$\begin{aligned} v_{AB} &= B - A \\ &= (a - x, 2(b - y), 3(c - z), (b - y) - (c - z)) \\ &= (a - x)(1, 0, 0, 0) + (b - y)(0, 2, 0, 1) + (c - z)(0, 0, 3, 1) \in H. \end{aligned}$$

  Assim, conclui-se que a condição (i) é válida.

- *Condição (ii):* $\forall A \in \mathcal{H}, \forall v \in H\ [A + v \in \mathcal{H}]$.

  Sejam $A = (1 + x, 2y, 3z, 2 + y + z) \in \mathcal{H}$ *e* $v = (\alpha, 2\beta, 3\gamma, \beta + \gamma) \in H$. *Então,*

$$\begin{aligned} A + v &= (1 + x, 2y, 3z, 2 + y + z) + (\alpha, 2\beta, 3\gamma, \beta + \gamma) \\ &= (1 + x + \alpha, 2(y + \beta), 3(z + \gamma), 2 + y + z + \beta + \gamma) \\ &= (1 + \bar{x}, 2\bar{y}, 3\bar{z}, 2 + \bar{y} + \bar{z}) \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

  onde $\bar{x} = x + \alpha$, $\bar{y} = y + \beta$ *e* $\bar{z} = z + \gamma$.

  Assim, conclui-se que a condição (ii) é válida.

Como as condições (i) e (ii) são válidas, conclui-se que $\mathcal{H}$ *é um subespaço afim associado ao subespaço vetorial* H.

Definição 2.6

Sejam $\mathcal{E}$ *um espaço afim associado a um espaço vetorial* E *e* $\mathcal{F}$ *um subespaço afim de* $\mathcal{E}$ *associado ao subespaço vetorial* F *de* E. *A* **dimensão do subespaço afim** $\mathcal{F}$ *é definida por*

$$\dim(\mathcal{F}) \overset{def}{=} \dim(F).$$

2.3 Pontos, retas e planos

Os subespaços afins de $\mathcal{E}$ que são constituídos por um único ponto têm dimensão zero. Esses subespaços afins são subconjuntos de $\mathcal{E}$ com um único elemento: $\{P\}$ com $P \in \mathcal{E}$, são designados por pontos e podem ser representados da forma $\mathcal{P} = P + \langle 0_E \rangle$, onde E é o espaço vetorial associado ao espaço afim $\mathcal{E}$. Neste caso tem-se $\dim(\mathcal{P}) = \dim(0_E) = 0$.

Definição 2.7

Seja $\mathcal{E}$ *um espaço afim associado a um espaço vetorial* E.

(a) *Aos subespaços afins de dimensão 1 de* $\mathcal{E}$ *chama-se* **retas**: $\mathcal{R} = P + \langle u \rangle$, $P \in \mathcal{E}$ *e* u *um vetor linearmente independente, que se diz* **vetor diretor da reta** $\mathcal{R}$.

(b) *Aos subespaços afins de dimensão 2 de* $\mathcal{E}$ *chama-se* **planos**: $\mathcal{P} = P + \langle u, v \rangle$, $P \in \mathcal{E}$ *e* u *e* v *vetores linearmente independentes, que se dizem* **vetores diretores do plano** $\mathcal{P}$.

(c) *Se $\mathcal{E}$ tem dimensão $n \geq 4$, um subespaço de dimensão $n-1$ chama-se* **hiperplano**. ♠

Exercício 2.3 Considere o subespaço afim $\mathcal{F} = \{(1+x, 1, 1+x) : x \in \mathbb{R}\}$ associado ao subespaço vetorial $F = \langle(1, 0, 1)\rangle$. Determine a dimensão de $\mathcal{F}$ e caracterize $\mathcal{F}$.

Resolução *Como* $\dim(F) = 1$, *então* $\dim(\mathcal{F}) = 1$. *Assim, conclui-se que o subespaço afim $\mathcal{F}$ é uma reta.*

Exercício 2.4 Considere em $\mathbb{R}^4$ o subespaço afim $\mathcal{G} = \{(1+x, y, 0, 2+y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ associado ao subespaço vetorial $G = \langle(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1)\rangle$. Determine a dimensão de $\mathcal{G}$ e caracterize $\mathcal{G}$.

Resolução *Como* $\dim(G) = 2$, *então* $\dim(\mathcal{G}) = 2$, *logo, $\mathcal{G}$ é uma plano.*

Exercício 2.5 Considere em $\mathbb{R}^4$ o subespaço afim

$$\mathcal{H} = \{(1+x, 2y, 3z, 2+y+z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

associado ao subespaço vetorial $H = \langle(1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 1), (0, 0, 3, 1)\rangle$. Determine a dimensão de $\mathcal{H}$ e caracterize $\mathcal{H}$.

Resolução *Como* $\dim(H) = 3 = \dim(\mathbb{R}^4) - 1$, *então* $\dim(\mathcal{H}) = 3$ *e $\mathcal{H}$ é um hiperplano.*

Definição 2.8

Seja $\mathcal{E}$ um espaço afim associado a um espaço vetorial E.

(a) *Dois ou mais pontos de $\mathcal{E}$ dizem-se* **colineares** *quando existe uma reta do espaço que os contém a todos.*

(b) *Dois ou mais pontos de $\mathcal{E}$ dizem-se* **complanares** *quando existe um plano do espaço que os contém a todos.*

(c) *Duas retas dizem-se* **complanares** *quando estiverem contidas num mesmo plano.* ♠

Exercício 2.6 Verifique se os pontos $A = (-2, 1, 2)$, $B = (0, -3, 4)$ e $C = (-3, 3, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ são colineares.

Resolução *Os pontos A, B, C são colineares, i.e. pertencem à mesma reta em $\mathbb{R}^3$, se* $\dim\langle v_{AB}, v_{AC}\rangle = 1$. *Considere a matriz* $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$, *onde* $\ell_1 = v_{AB} = B - A = (2, -4, 2)$ *e* $\ell_2 = v_{AC} = C - A = (-1, 2, -1)$. *Sabe-se que* $\dim(\mathrm{EL}(A)) = \dim\langle \ell_1, \ell_2\rangle = \mathrm{car}(A)$. *Como*

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \frac{1}{2}\ell_1]{} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então $\mathrm{car}(A) = 1$, *logo* $\dim\langle v_{AB}, v_{AC}\rangle = 1$, *concluindo-se que os pontos A, B, C são colineares.*

Exercício 2.7 Verifique se os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 2, 2)$, $C = (-1, 0, 4)$ e $D = (2, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ são complanares.

Resolução *Os pontos* A, B, C, D *são complanares, i.e. pertencem ao mesmo plano em* $\mathbb{R}^3$*, se* $\dim\langle v_{AB}, v_{AC}, v_{AD}\rangle = 2$*. Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$*, onde* $\ell_1 = v_{AB} = B - A = (-1, 2, 1)$*,* $\ell_2 = v_{AC} = C - A = (-2, 0, 3)$ *e* $\ell_3 = v_{AD} = D - A = (1, 0, 0)$*. Sabe-se que* $\dim(\mathrm{EL}(A)) = \dim\langle \ell_1, \ell_2, \ell_3\rangle = \mathrm{car}(A)$*. Como*

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_1]{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 + \frac{1}{2}\ell_2]{} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

então $\mathrm{car}(A) = 3$*, logo* $\dim\langle v_{AB}, v_{AC}, v_{AD}\rangle = 3 \neq 2$*, concluindo-se que os pontos* A, B, C, D *não são colineares, porque os vetores que os unem* v_{AB}*,* v_{AC} *e* v_{AD} *geram um espaço de dimensão 3 e a dimensão de um plano é 2.*

Exercício 2.8 Verifique se as seguintes retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são complanares:

(a) $\mathcal{R} = (0, 0, 1) + \langle(1, 0, 0)\rangle$, $\mathcal{S} = (0, 4, 3) + \langle(0, 2, 1)\rangle$.

(b) $\mathcal{R} = (0, 0, 1) + \langle(1, 2, 0)\rangle$, $\mathcal{S} = (1, 0, 1) + \langle(-4, -8, 0)\rangle$.

(c) $\mathcal{R} = (0, 0, 1) + \langle(1, 2, 0)\rangle$, $\mathcal{S} = (1, 0, 1) + \langle(0, 1, 1)\rangle$.

Resolução

(a) Considere $A = (0, 0, 1) \in \mathcal{R}$ *e* $B = (0, 4, 3) \in \mathcal{S}$*. Sejam* $\ell_1 = (1, 0, 0)$ *o vetor diretor da reta* $\mathcal{R}$*,* $\ell_2 = (0, 2, 1)$ *o vetor diretor da reta* $\mathcal{S}$ *e* $\ell_3 = v_{AB} = B - A = (0, 4, 2)$*. As retas* $\mathcal{R}$ *e* $\mathcal{S}$ *são complanares se* $\dim(\langle \ell_1, \ell_2, \ell_3\rangle) = 2$*. Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ *com linhas* ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3*. Como*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então $\mathrm{car}(A) = 2$*, logo* $\dim(\langle \ell_1, \ell_2, \ell_3\rangle) = 2$*, concluindo-se que as retas* $\mathcal{R}$ *e* $\mathcal{S}$ *são complanares.*

Neste caso, as retas intersetam-se num ponto. De facto, igualando as expressões das duas retas

$$(0, 0, 1) + \langle(1, 0, 0)\rangle = (0, 4, 3) + \langle(0, 2, 1)\rangle \Leftrightarrow \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 2, 1) = (0, 4, 2),$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, e analisando a matriz ampliada deste sistema de equações lineares*

$$A|b = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \frac{1}{2}\ell_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

tem-se que $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(A|b) = 2 = n$ *(*n *é o número de incógnitas). Assim, conclui-se que o sistema tem uma única solução, que é o ponto de interseção entre as duas retas.*

(b) Considere $A = (0, 0, 1) \in \mathcal{R}$ *e* $B = (1, 0, 1) \in \mathcal{S}$*. Sejam* $\ell_1 = (1, 2, 0)$ *o vetor diretor da reta* $\mathcal{R}$*,* $\ell_2 = (-4, -8, 0)$ *o vetor diretor da reta* $\mathcal{S}$ *e* $\ell_3 = v_{AB} = B - A = (1, 0, 0)$*. As retas* $\mathcal{R}$ *e* $\mathcal{S}$ *são complanares se* $\dim(\langle \ell_1, \ell_2, \ell_3\rangle) = 2$*. Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

com linhas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. *Como*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_2]{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + 4\ell_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_2 \leftrightarrow \ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então $\operatorname{car}(A) = 2$, *logo* $\dim(\langle \ell_1, \ell_2, \ell_3 \rangle) = 2$, *concluindo-se que as retas* $\mathcal{R}$ *e* $\mathcal{S}$ *são complanares.*

Neste caso, como os vetores diretores das retas $\mathcal{R}$ *e* $\mathcal{S}$ *são linearmente dependentes, pois um vetor diretor pode ser escrito como combinação linear do outro,* $\ell_2 = -4\ell_1$, *as duas retas são paralelas.*

(c) *Considere* $A = (0,0,1) \in \mathcal{R}$ *e* $B = (1,0,1) \in \mathcal{S}$. *Sejam* $\ell_1 = (1,2,0)$ *o vetor diretor da reta* $\mathcal{R}$, $\ell_2 = (0,1,1)$ *o vetor diretor da reta* $\mathcal{S}$ *e* $\ell_3 = v_{AB} = B - A = (1,0,0)$. *As retas* $\mathcal{R}$ *e* $\mathcal{S}$ *são complanares se* $\dim(\langle \ell_1, \ell_2, \ell_3 \rangle) = 2$. *Considere a matriz* $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ *com linhas* ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. *Como*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 + 2\ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

então $\operatorname{car}(A) = 3$, *logo* $\dim(\langle \ell_1, \ell_2, \ell_3 \rangle) = 3 \neq 2$, *concluindo-se que as retas* $\mathcal{R}$ *e* $\mathcal{S}$ *não são complanares.*

Neste caso, como os vetores diretores das retas $\mathcal{R}$ *e* $\mathcal{S}$ *são linearmente independentes, pois não é possível escrever um vetor diretor como combinação linear do outro, as duas retas não são paralelas. As retas também não se intersetam, porque considerando o seguintes sistema de equações lineares*

$$(0,0,1) + \langle (1,2,0) \rangle = (1,0,1) + \langle (0,1,1) \rangle \Leftrightarrow \alpha(1,2,0) + \beta(0,1,1) = (1,0,0),$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *vem*

$$A|b = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right],$$

tem-se que $\operatorname{car}(A) = 2 \neq \operatorname{car}(A|b) = 3$, *donde se conclui que o sistema é impossível, não existindo um ponto de interseção entre as duas retas.*

Neste caso, as duas retas são enviezadas (as retas não são paralelas e não se intersetam).

Apresenta-se a seguir diferentes representações da reta.

Definição 2.9

Sejam $\mathcal{R}$ uma reta de $\mathbb{R}^3$, $P = (a, b, c)$ um ponto da reta $\mathcal{R}$ e $u = (u_1, u_2, u_3)$ um vetor diretor de $\mathcal{R}$. Então pode escrever-se

$$\mathcal{R} = P + \langle u \rangle.$$

Considere um ponto qualquer $X = (x, y, z) \in \mathcal{R}$. À expressão

$$(x, y, z) = (a, b, c) + \lambda(u_1, u_2, u_3), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

chama-se **equação vetorial** *da reta $\mathcal{R}$.* ♠

Definição 2.10

Seja $\mathcal{R}$ uma reta de $\mathbb{R}^3$ com equação vetorial

$$(x, y, z) = (a, b, c) + \lambda(u_1, u_2, u_3), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Da expressão anterior resulta o seguinte sistema

$$\begin{cases} x = a + \lambda u_1 \\ y = b + \lambda u_2 \\ z = c + \lambda u_3. \end{cases}$$

Estas equações designam-se por **equações paramétricas** *da reta $\mathcal{R}$.* ♠

Definição 2.11

Resolvendo as equações paramétricas da reta em ordem ao parâmetro λ e eliminando λ obtém-se

$$\frac{x-a}{u_1} = \frac{y-b}{u_2} = \frac{z-c}{u_3},$$

com $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, u_3 \neq 0$.

Estas equações chamam-se **equações cartesianas** *ou* **equações normais** *da reta $\mathcal{R}$.* ♠

Exercício 2.9 Determine a equação vetorial, as equações paramétricas e as equações cartesianas das seguintes retas:

(a) reta $\mathcal{R}$ que passa no ponto $A = (-1, 0, 2)$ e é paralela ao vetor $v = (1, 2, 3)$.

(b) reta $\mathcal{R}$ que passa pelos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 1, 3)$.

Resolução

(a) A equação vetorial da reta $\mathcal{R}$ é

$$(x, y, z) = (-1, 0, 2) + \alpha(1, 2, 3), \alpha \in \mathbb{R},$$

podendo-se escrever

$$\mathcal{R} = (1, 1, 1) + \langle(1, 2, 3)\rangle.$$

Da equação vetorial obtém-se as equações paramétricas:

$$x = -1 + \alpha,\ y = 2\alpha,\ z = 2 + 3\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Eliminando o parâmetro α das equações paramétricas, obtém-se as equações cartesianas:

$$x + 1 = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{3} \Leftrightarrow (2x - y = -2 \wedge 3y - 2z = -4).$$

(b) A equação vetorial da reta $\mathcal{R}$, que tem $v_{AB} = B - A = (2, -1, 0)$ como vetor diretor, é

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \alpha(2, -1, 0), \alpha \in \mathbb{R},$$

podendo-se escrever

$$\mathcal{R} = (1, 2, 3) + \langle (2, -1, 0) \rangle.$$

Da equação vetorial obtém-se as equações paramétricas:

$$x = 1 + 2\alpha,\ y = 2 - \alpha,\ z = 3,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Eliminando o parâmetro α das equações paramétricas, obtém-se as equações cartesianas:

$$\left(\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} \wedge z = 3 \right) \Leftrightarrow (x + 2y = 5 \wedge z = 3).$$

As seguintes definições contêm as representações do plano na forma vetorial e na forma de equações paramétricas. Mais à frente introduz-se a representação do plano através da equação cartesiana.

Definição 2.12

Sejam $P = (a, b, c)$ um ponto de $\mathbb{R}^3$ e $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ dois vetores linearmente independentes. O plano $\mathcal{P}$ definido pelo ponto P e pelos vetores u e v pode ser escrito da forma

$$\mathcal{P} = P + \langle u, v \rangle.$$

Dados três pontos A, B, C não colinerares do plano $\mathcal{P}$ tem-se também

$$\mathcal{P} = A + \langle v_{AB}, v_{AC} \rangle.$$

Seja $X = (x, y, z) \in \mathcal{P}$. A expressão

$$(x, y, z) = (a, b, c) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

chama-se **equação vetorial do plano** $\mathcal{P}$.

Definição 2.13

Sejam $\mathcal{P}$ um plano com equação vetorial

$$(x, y, z) = (a, b, c) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

Da expressão anterior resulta o seguinte sistema

$$\begin{cases} x = a + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = b + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = c + \lambda u_3 + \mu v_3. \end{cases}$$

Estas equações designam-se por **equações paramétricas** *do plano* $\mathcal{P}$.

O seguinte produto, definido em $\mathbb{R}^3$ e designado por produto externo ou produto vetorial, quando é aplicado a dois vetores produz um vetor.

Definição 2.14

Sejam o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ *e* $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. *Chama-se* **produto externo** *(ou* **produto vetorial***) de* x *e* y*, que se representa por* $x \times y$*, ao vetor de* $\mathbb{R}^3$ *definido por*

$$x \times y \stackrel{def}{=} (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Observação Sejam $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Então, o produto externo de x e y pode ser calculado através do "determinante simbólico"

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Exercício 2.10 Sejam os vetores $x = (1, 0, 2)$ e $y = (3, 1, 0)$.

(a) Determine $x \times y$ e $y \times x$.

(b) Mostre que $(x \times y) \perp x$ e $(x \times y) \perp y$.

Resolução

(a) $x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2e_1 + 6e_2 + e_3 = (-2, 6, 1).$

$y \times x = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2e_1 - 6e_2 - e_3 = (2, -6, -1).$

Observa-se que o produto externo não é comutativo, pois $x \times y \neq y \times x$. *Neste caso tem-se que* $x \times y = -y \times x$ *e pode provar-se que é sempre válido que* $x \times y = -y \times x$.

(b) Como $(x \times y) \cdot x = (-2, 6, 1) \cdot (1, 0, 2) = -2 \times 1 + 6 \times 0 + 1 \times 2 = 0$*, tem-se que* $(x \times y) \perp x$.

Como $(x \times y) \cdot y = (-2, 6, 1) \cdot (3, 1, 0) = -2 \times 3 + 6 \times 1 + 1 \times 0 = 0$*, tem-se que* $(x \times y) \perp y$.

Definição 2.15

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ *vetores linearmente independentes. Diz-se que* (a, b, c) *formam um* **triedro direto** *se um observador com os pés no ponto* $(0, 0, 0)$ *e com a cabeça na parte positiva de* c*, vê* a *à direita de* b.

Teorema 2.3

(a) $\forall x \in \mathbb{R}^3\, [x \times 0_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathbb{R}^3}]$.

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}^3\, [x \times y = -y \times x]$.

(c) $\forall x, y \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R}\, [x \times (\alpha y) = \alpha(x \times y)]$.

(d) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3\, [(x + y) \times z = x \times z + y \times z]$.

(e) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3\, [x \times (y + z) = x \times y + x \times z]$.

(f) $\forall x, y \in \mathbb{R}^3\, [(x \times y) \perp x$ *e* $(x \times y) \perp y]$.

(g) $\forall x, y \in \mathbb{R}^3\, [\|x \times y\| = \|x\|\|y\| \operatorname{sen} \theta]$, *onde* $\theta = \angle(x, y)$.

(h) $\|x \times y\|$ *é igual à área do paralelogramo que tem como lados* x *e* y. ♡

Demonstração

(a) Seja $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Então,

$$x \times 0_{\mathbb{R}^3} = (x_2 \times 0 - x_3 \times 0, x_3 \times 0 - x_1 \times 0, x_1 \times 0 - x_2 \times 0) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

(b) Sejam $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Como

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

e

$$-y \times x = (-y_2x_3 + y_3x_2, -y_3x_1 + y_1x_3, -y_1x_2 + y_2x_1),$$

conclui-se que $x \times y = -y \times x$.

(c) Sejam $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} x \times (\alpha y) &= (x_2\alpha y_3 - x_3\alpha y_2, x_3\alpha y_1 - x_1\alpha y_3, x_1\alpha y_2 - x_2\alpha y_1) \\ &= \alpha(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= \alpha(x \times y). \end{aligned}$$

(d) Sejam $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3), z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$. Então,

$$\begin{aligned} &(x+y)\times z = ((x_2+y_2)z_3-(x_3+y_3)z_2, (x_3+y_3)z_1-(x_1+y_1)z_3, (x_1+y_1)z_2-(x_2+y_2)z_1) \\ &= (x_2z_3 - x_3z_2, x_3z_1 - x_1z_3, x_1z_2 - x_2z_1) + (y_2z_3 - y_3z_2, y_3z_1 - y_1z_3, y_1z_2 - y_2z_1) \\ &= x \times z + y \times z. \end{aligned}$$

(e) Sejam $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3), z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$. Então,

$$\begin{aligned} &x\times(y+z) = (x_2(y_3+z_3)-x_3(y_2+z_2), x_3(y_1+z_1)-x_1(y_3+z_3), x_1(y_2+z_2)-x_2(y_1+z_1)) \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2z_3 - x_3z_2, x_3z_1 - x_1z_3, x_1z_2 - x_2z_1) \\ &= x \times y + x \times z. \end{aligned}$$

(f) Sejam $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Como

$$\begin{aligned} (x \times y) \cdot x &= (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ &= x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - x_2x_1y_3 + x_3x_1y_2 - x_3x_2y_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

então $(x \times y) \perp x$, e

$$\begin{aligned}(x \times y) \cdot y &= (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \cdot (y_1, y_2, y_3) \\ &= y_1x_2y_3 - y_1x_3y_2 + y_2x_3y_1 - y_2x_1y_3 + y_3x_1y_2 - y_3x_2y_1 \\ &= 0,\end{aligned}$$

pelo que $(x \times y) \perp y$.

(g) Sejam $x, y \in \mathbb{R}^3$. Para provar que $\|x \times y\| = \|x\|\|y\| \operatorname{sen}\theta$, onde $\theta = \angle(x, y)$, recorre-se à igualdade

$$\|x \times y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - (x \cdot y)^2,$$

que pode ser verificada calculando e simplificando as expressões dos dois lados da equação. Substituindo $x \cdot y = \|x\|\|y\| \cos\theta$ na igualdade anterior, obtém-se

$$\begin{aligned}\|x \times y\|^2 &= \|x\|^2\|y\|^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \cos^2\theta \\ &= \|x\|^2\|y\|^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= \|x\|^2\|y\|^2 \operatorname{sen}^2\theta,\end{aligned}$$

donde se conclui que

$$\|x \times y\| = \|x\|\|y\| \operatorname{sen}\theta.$$

(h) Sejam $x, y \in \mathbb{R}^3$. Considere um paralelogramo que tem como lados x e y. Então, como a área A do paralelogramo é igual ao produto do comprimento da base pela altura, em que a altura é dada por $\|x\| \operatorname{sen}\theta$ e o comprimento da base por $\|y\|$ (ver Figura 2.5), tem-se

$$A = \|y\|\|x\| \operatorname{sen}\theta = \|x \times y\|.$$

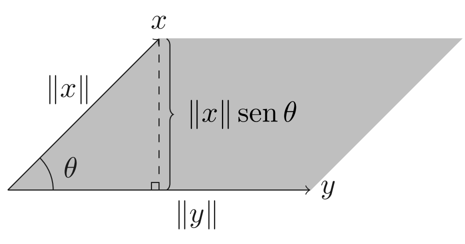


Figura 2.5: Paralelogramo de área $\|x \times y\|$.

□

Destas propriedades é importante observar que dados dois vetores x e y de $\mathbb{R}^3$, o produto externo $x \times y$ é um vetor que é ortogonal a x e a y (ver Figura 2.6) e o valor da área do paralelogramo formado pelos dois vetores é igual a $\|x \times y\|$.

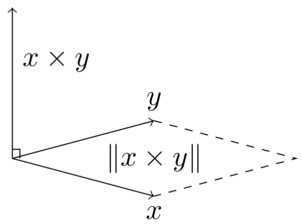


Figura 2.6: Produto externo entre dois vetores.

Observação $\forall x, y \in \mathbb{R}^3 \, [x \times y = \big(\|x\|\|y\| \operatorname{sen} \theta\big)\, n]$, onde $\theta = \angle(x, y)$ e $n \in \mathbb{R}^3$ em que $\|n\| = 1$ tal que $n \perp x$, $n \perp y$ e (x, y, n) formam um triedro direto.

Teorema 2.4

Sejam o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e $u, v \in \mathbb{R}^3$. Então:

(a) Os vetores u e v são linearmente dependentes (ou paralelos) se e só se $u \times v = 0_{\mathbb{R}^3}$. Em particular, tem-se $u \times u = 0_{\mathbb{R}^3}$.

(b) Se u e v são linearmente independentes, então $u \times v$ é o vetor perpendicular aos vetores u e v de norma igual a $\|u\|\|v\| \sin \theta$, sendo θ o ângulo formado pelos vetores u e v.

♡

Observação Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Então, tem-se

$$e_1 \times e_2 = e_3,$$
$$e_2 \times e_3 = e_1,$$
$$e_3 \times e_1 = e_2.$$

Definição 2.16

Considere o plano $\mathcal{P}$ definido pelo ponto $P = (p_1, p_2, p_3)$ e pelos vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$. Seja $X = (x, y, z)$ um ponto qualquer de $\mathcal{P}$. Então

$$X \in \mathcal{P} \Leftrightarrow v_{PX} \cdot (u \times v) = 0.$$

Efetuando cálculos, obtém-se

$$X \in \mathcal{P} \Leftrightarrow ax + by + cz = d,$$

onde $a = u_2v_3 - u_3v_2$, $b = u_3v_1 - u_1v_3$, $c = u_1v_2 - u_2v_1$ e

$$d = p_1a + p_2b + p_3c.$$

A equação $ax + by + cz = d$ chama-se **equação cartesiana do plano** $\mathcal{P}$.

♠

Na Figura 2.7, $P \in \mathcal{P}$ é um ponto dado e X é um ponto qualquer no plano $\mathcal{P}$. O vetor $u \times v$ é pependicular ao plano e assim tem-se que $v_{PX} \perp (u \times v)$.

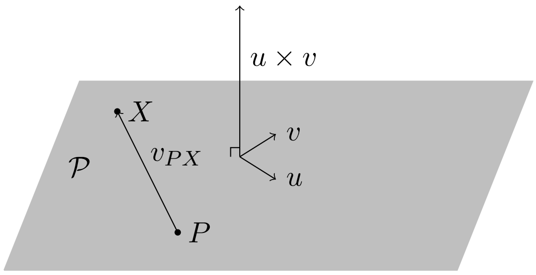


Figura 2.7: Plano $\mathcal{P}$ com $v_{PX} \perp (u \times v)$.

Observação Considere o plano $\mathcal{P}$ definido pelo ponto $P = (p_1, p_2, p_3)$ e pelos vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$. Seja $X = (x, y, z) \in \mathcal{P}$ e seja $u \times v = (a, b, c)$. Então:

$$\begin{aligned}
X \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow v_{PX} \cdot (u \times v) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - p_1, y - p_2, z - p_3) \cdot (a, b, c) = 0 \\
&\Leftrightarrow a(x - p_1) + b(y - p_2) + c(z - p_3) = 0 \\
&\Leftrightarrow ax + by + cz = p_1 a + p_2 b + p_3 c.
\end{aligned}$$

Usando a substituição $d = p_1 a + p_2 b + p_3 c$, obtém-se a equação cartesiana

$$ax + by + cz = d.$$

Exercício 2.11 Determine uma equação vetorial, equações paramétricas e uma equação cartesiana do plano $\mathcal{P}$ definido pelos pontos $A = (-4, -1, -1)$, $B = (-2, 0, 1)$, $C = (-1, -2, -3)$.

Resolução *Usando $v_{AB} = B - A = (2, 1, 2)$ e $v_{AC} = C - A = (3, -1, -2)$, então*

$$\begin{aligned}
(x, y, z) &= A + \lambda v_{AB} + \mu v_{AC} \\
&= (-4, -1, -1) + \lambda(2, 1, 2) + \mu(3, -1, -2), \;\; \lambda, \mu \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

é uma equação vetorial do plano $\mathcal{P}$. A partir da equação vetorial obtém-se as seguintes equações paramétricas

$$\begin{cases} x = -4 + 2\lambda + 3\mu \\ y = -1 + \lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda - 2\mu. \end{cases}$$

Seja $P = (x, y, z) \in \mathcal{P}$. O vetor

$$\begin{aligned}
n &= v_{AB} \times v_{AC} \\
&= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= -2e_1 + 6e_2 - 2e_3 - 3e_3 + 2e_1 + 4e_2 \\
&= (0, 10, -5)
\end{aligned}$$

é perpendicular a $\mathcal{P}$. Então, obtém-se

$$\begin{aligned}v_{AP}\cdot n=0 &\Leftrightarrow (x+4,y+1,z+1)\cdot(0,10,-5)=0\\&\Leftrightarrow 10(y+1)-5(z+1)=0\\&\Leftrightarrow 10y-5z=-5,\end{aligned}$$

donde se conclui que $10y-5z=-5$ é uma equação cartesiana de $\mathcal{P}$.

Exercício 2.12 Considere o plano $\mathcal{P}$ representado pela equação $x+2y+z=3$. Determine por dois processos distintos uma equação vetorial de $\mathcal{P}$.

Resolução

- *Processo 1:*

  O plano $\mathcal{P}$ pode ser representado da seguinte forma

  $$\begin{aligned}\mathcal{P}&=\{(x,y,3-x-2y):x,y\in\mathbb{R}\}\\&=\{x(1,0,-1)+y(0,1,-2)+(0,0,3):x,y\in\mathbb{R}\}\\&=(0,0,3)+\langle(1,0,-1),(0,1,-2)\rangle,\end{aligned}$$

  logo, uma equação vetorial de $\mathcal{P}$ é

  $$(x,y,z)=(0,0,3)+\lambda(1,0,-1)+\mu(0,1,-2),\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

- *Processo 2:*

  Escolhendo três pontos do plano $\mathcal{P}$, por exemplo,

  $$A=(3,0,0),\ \ B=(0,1,1),\ \ C=(0,0,3)\in\mathcal{P},$$

  tem-se $v_{AB}=B-A=(-3,1,1)$ e $v_{AC}=C-A=(-3,0,3)$, e, assim,

  $$(x,y,z)=(3,0,0)+\lambda(-3,1,1)+\mu(-3,0,3),\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

  é uma equação vetorial de $\mathcal{P}$.

2.4 Problemas não métricos

Os seguintes problemas, em que é estudado o paralelismo de subespaços afins, são designados por problemas não métricos, porque não necessitam da aplicação da métrica, que é a norma usual.

Definição 2.17

Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ subespaços de um certo espaço afim $\mathcal{E}$, associados aos subespaços F e G de E, respetivamente.

Diz-se que $\mathcal{F}$ é um **subespaço afim paralelo** *a $\mathcal{G}$, escrevendo-se $\mathcal{F}\parallel\mathcal{G}$, se $F\subseteq G$ ou $G\subseteq F$.* ♠

Exercício 2.13 Considere em $\mathbb{R}^3$ a reta $\mathcal{R}=(0,1,0)+\langle(1,0,-1)\rangle$ e o plano $\mathcal{P}=(1,2,2)+\langle(0,1,0),(1,0,-1)\rangle$. Verifique se $\mathcal{R}$ é paralelo a $\mathcal{P}$.

Resolução *Como* $\langle(1,0,-1)\rangle \subseteq \langle(0,1,0),(1,0,-1)\rangle$, *conclui-se que* $\mathcal{R} \parallel \mathcal{P}$.

Teorema 2.5

Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são subespaços afins paralelos, num certo espaço afim, ou a sua interseção é vazia ($\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$) ou um deles está contido no outro ($\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ou $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$). ♡

Exercício 2.14 Considere em $\mathbb{R}^3$ a reta $\mathcal{R} = (0,1,0) + \langle(1,0,-1)\rangle$. Verifique se $\mathcal{R}$ está contida nos seguintes planos:

(a) $\mathcal{P} = (1,2,2) + \langle(0,1,0),(1,0,-1)\rangle$.

(b) $\mathcal{Q} = (0,0,0) + \langle(1,1,-1),(-1,0,1)\rangle$.

Resolução

(a) Já foi visto no Exercício 2.13 que $\mathcal{R} \parallel \mathcal{P}$. Como $\nexists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (0,1,0) = (1,2,2) + \alpha(0,1,0) + \beta(1,0,-1)$, tem-se que $\mathcal{R} \cap \mathcal{P} = \emptyset$, então $\mathcal{R} \not\subseteq \mathcal{P}$.

(b) Considerando o plano $\mathcal{Q} = (0,0,0) + \langle(1,1,-1),(-1,0,1)\rangle$, como $\langle(1,0,-1)\rangle \subseteq \langle(1,1,-1),(-1,0,1)\rangle$, tem-se que $\mathcal{R} \parallel \mathcal{Q}$ e como $(0,1,0) \in \mathcal{Q}$, porque

$$(0,1,0) = (0,0,0) + 1(1,1,-1) + 1(-1,0,1),$$

então $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q}$.

Observação Considere dois planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ definidos pelas equações cartesianas $ax+by+cz = d$ e $ex + fy + gz = h$, respetivamente. Como $u = (a,b,c)$ é um vetor perpendicular ao plano $\mathcal{P}_1$, então

$$w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathcal{P}_1 \Leftrightarrow u \cdot w = 0 \Leftrightarrow aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0.$$

Assim, as soluções (x,y,z) da equação $ax + by + cz = 0$ são as coordenadas de todos os vetores do plano $\mathcal{P}_1$. Logo, $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$ se e só se

$$ax + by + cz = 0 \Leftrightarrow ex + fy + gz = 0,$$

i.e. se e só se

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : (a,b,c) = \alpha(e,f,g).$$

Observação Considere a reta $\mathcal{R}$ definida pela equação vetorial $(x,y,z) = P + \lambda(v_1, v_2, v_3),\ \lambda \in \mathbb{R}$, e o plano $\mathcal{P}_1$ definido pela equação cartesiana $ax + by + cz = d$.

Então $\mathcal{R} \parallel \mathcal{P}_1$ se e só se

$$(a,b,c) \cdot (v_1, v_2, v_3) = 0 \Leftrightarrow av_1 + bv_2 + cv_3 = 0.$$

Note que a equação cartesiana $ax + by + cz = 0$ representa o plano paralelo a $\mathcal{P}_1$ que passa na origem do referencial.

Exercício 2.15 Considere o plano $\mathcal{P}$ definido pelos pontos $A = (1,0,1)$, $B = (0,2,0)$, $C = (1,2,2)$. Determine a equação cartesiana do plano $\mathcal{Q}$ paralelo a $\mathcal{P}$ contendo a origem do sistema de eixos e a equação cartesiana do plano $\mathcal{T}$ paralelo a $\mathcal{P}$, que passa pelo ponto $P = (1,1,1)$.

Resolução *O vetor $n = v_{AB} \times v_{AC}$ é perpendicular a $\mathcal{P}$. Como $v_{AB} = B - A = (-1, 2, -1)$ e $v_{AC} = C_A = (0, 2, 1)$, obtém-se*

$$n = v_{AB} \times v_{AC} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2e_1 - 2e_3 + 2e_1 + e_2 = (4, 1, -2).$$

Então, a equação cartesiana do plano $\mathcal{Q}$, paralelo a $\mathcal{P}$, é da forma $4x + y - 2z = d$ e como $(0, 0, 0) \in \mathcal{Q}$, tem-se

$$4x + y - 2z = 0.$$

Para determinar a equação cartesiana de $\mathcal{T}$, como $\mathcal{T} \parallel \mathcal{P}$ e $(1, 1, 1) \in \mathcal{T}$, substiui-se o ponto $(1, 1, 1)$ na equação $4x + y - 2z = d$, obtendo-se $d = 3$. Logo a equação cartesiana de $\mathcal{T}$ é

$$4x + y - 2z = 3.$$

Exercício 2.16 Considere a reta $\mathcal{R}$ definida pelo sistema de equações

$$\begin{cases} x &= -2y + 1 \\ z &= y + 2 \end{cases}$$

e o plano $\mathcal{P}$ dado por $x + y + 3z = 1$. Verifique se $\mathcal{R} \parallel \mathcal{P}$.

Resolução *A reta pode ser escrita da forma*

$$\mathcal{R} = (1, 0, 2) + \langle(-2, 1, 1)\rangle,$$

onde $(-2, 1, 1)$ é um vetor diretor de $\mathcal{R}$. Sabe-se que $(1, 1, 3)$ é um vetor perpendicular a $\mathcal{P}$. Então $\mathcal{R} \parallel \mathcal{P}$ se e só se $(-2, 1, 1) \cdot (1, 1, 3) = 0$. Como

$$(-2, 1, 1) \cdot (1, 1, 3) = 2 \neq 0,$$

então conclui-se que $\mathcal{R} \nparallel \mathcal{P}$.

2.5 Problemas métricos

Nas seguintes definições é apresentado o conceito de distância entre subespaços afins. Os problemas que dependem deste conceito são designados por problemas métricos. Aqui os problemas métricos envolvem o cálculo de distâncias e ângulos e a métrica usada é a norma usual.

Definição 2.18

Sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ dois subespaços afins de $\mathbb{R}^3$. A **distância entre subespaços afins** *$\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ define-se como sendo o mínimo das distâncias entre os pontos de $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$, ou seja,*

$$d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \overset{def}{=} \min\{d(A, B) : A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2\}.$$

Definição 2.19

Sejam $P = (a, b, c)$ *e* $Q = (x, y, z)$ *dois pontos de* $\mathbb{R}^3$*, então a* **distância entre dois pontos** P *e* Q *é definida por*

$$d(P, Q) \stackrel{def}{=} \|v_{PQ}\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

♠

Exercício 2.17 Determine a distância entre os pontos $A = (1, 2, -1)$ e $B = (3, 0, 1)$.

Resolução

$$d(A, B) = \|v_{AB}\| = \|(2, -2, 2)\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}.$$

Definição 2.20

Sejam P *um ponto de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathcal{T}$ *um plano. Então, chama-se* **distância do ponto** P **ao plano** $\mathcal{T}$*, que se representa por* $d(P, \mathcal{T})$*, a*

$$d(P, \mathcal{T}) \stackrel{def}{=} d(P, Q) = \|v_{PQ}\|,$$

em que

(a) $\mathcal{R}$ *é a reta perpendicular a* $\mathcal{T}$ *que passa em* P.

(b) $Q = \mathcal{T} \cap \mathcal{R}$.

♠

A Figura 2.8 ilustra a Definição 2.20.

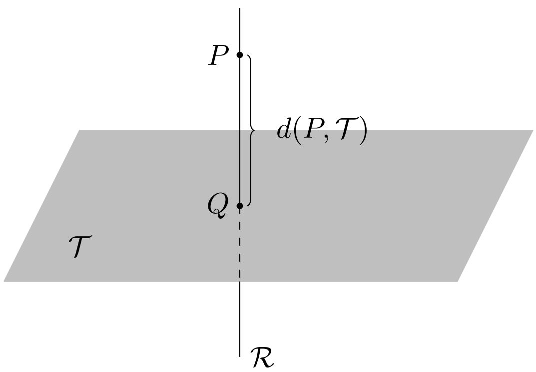


Figura 2.8: Distância de um ponto a um plano.

Observação A distância de um ponto $P \in \mathbb{R}^3$ a um plano $\mathcal{T}$ pode ser também obtida de outra forma usando a projeção ortogonal.

Sejam $ax + by + cz = d$ a equação cartesiana do plano $\mathcal{T}$, $A = (x, y, z) \in \mathcal{T}$ um ponto qualquer do plano $\mathcal{T}$ e o ponto $P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Seja $n = (a, b, c)$ o vetor normal do plano e considere que o ponto $A = (x, y, z)$ é o ponto inicial desse vetor, então a distância de P ao plano $\mathcal{T}$ é igual ao comprimento do vetor da projeção ortogonal de v_{AP} sobre n (ver Figura 2.9), ou seja,

$$d(P, \mathcal{T}) = \|\operatorname{proj}_n v_{AP}\| = \frac{|v_{AP} \cdot n|}{\|n\|}.$$

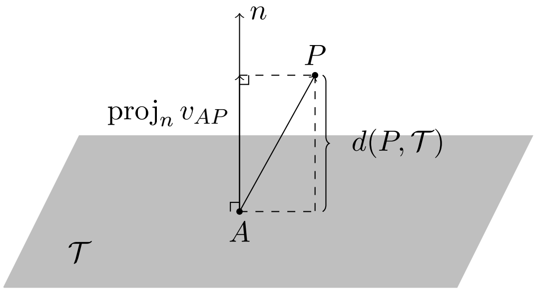


Figura 2.9: Distância de um ponto a um plano usando a projeção ortogonal.

Teorema 2.6

Sejam P um ponto de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{T}$ um plano. Então,

$$d(P,\mathcal{T}) = \|\text{proj}_n v_{AP}\|,$$

onde n é o vetor normal do plano $\mathcal{T}$ e A é um ponto qualquer de $\mathcal{T}$. ♡

Demonstração Sejam $ax + by + cz = d$ a equação cartesiana do plano $\mathcal{T}$, $A = (x, y, z) \in \mathcal{T}$ um ponto qualquer de $\mathcal{T}$ e o ponto $P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Seja $n = (a, b, c)$ o vetor normal do plano e considere que o ponto $A = (x, y, z)$ é o ponto inicial desse vetor.

Então

$$\begin{aligned}
d(P,\mathcal{T}) &= \|\text{proj}_n v_{AP}\| \\
&= \frac{|v_{AP} \cdot n|}{\|n\|} \\
&= \frac{|(P - A) \cdot n|}{\|n\|} \\
&= \frac{(x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) \cdot (a, b, c)}{\|(a, b, c)\|} \\
&= \frac{|ax_0 - ax + by_0 - by + cz_0 - cz|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
&= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.
\end{aligned}$$

A seguir prova-se que esta expressão coincide com a expressão obtida através da Definição 2.20

A reta $\mathcal{R}$ perpendicular a $\mathcal{T}$ que passa no ponto P tem equação vetorial

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda n, \ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Calculando $\mathcal{R} \cap \mathcal{T}$, obtém-se

$$\begin{aligned}
&a(x_0 + \lambda a) + b(y_0 + \lambda b) + c(z_0 + \lambda c) = d \Leftrightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 + \lambda(n \cdot n) = d \\
&\Leftrightarrow \lambda = \frac{d - ax_0 + by_0 + cz_0}{n \cdot n}.
\end{aligned}$$

Substituindo o valor de λ na equação de $\mathcal{R}$, obtém-se o ponto de interseção $Q = \mathcal{R} \cap \mathcal{T}$:

$$Q = (x_0, y_0, z_0) + \frac{d - ax_0 + by_0 + cz_0}{n \cdot n} n.$$

Pela Definição 2.20, vem que

$$\begin{aligned}
d(P,\mathcal{T}) &= d(P,Q)\\
&= \|v_{PQ}\|\\
&= \|Q-P\|\\
&= \left\|\frac{d-ax_0+by_0+cz_0}{n\cdot n}n\right\|\\
&= \frac{|d-ax_0+by_0+cz_0|\|n\|}{\|n\|^2}\\
&= \frac{|d-ax_0+by_0+cz_0|}{\|n\|}\\
&= \frac{|d-ax_0+by_0+cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},
\end{aligned}$$

concluindo-se que esta expressão coincide com a expressão anterior, obtida a partir da projeção ortogonal $\|\operatorname{proj}_n v_{AP}\|$, logo, $d(P,\mathcal{T}) = \|\operatorname{proj}_n v_{AP}\|$. □

Corolário 2.1

Sejam $P=(x_0,y_0,z_0)$ um ponto de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{T}$ um plano com equação cartesiana $ax+by+cz=d$. Então,

$$d(P,\mathcal{T}) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

♡

Exercício 2.18 Determine por três processos distintos a distância do ponto $P=(0,1,-2)$ ao plano $\mathcal{T}$ cuja equação cartesiana é $x+y+z=1$.

Resolução

- *Processo 1:*

  A reta $\mathcal{R}$, perpendicular a $\mathcal{T}$ que passa em P, é dada por

  $$(x,y,z) = (0,1,-2)+\lambda(1,1,1),\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

  Para se determinar o ponto de interseção $Q=\mathcal{T}\cap\mathcal{R}$ substitua-se primeiro $(x,y,z) = (\lambda,1+\lambda,-2+\lambda)$ na equação cartesiana de $\mathcal{T}$, vindo

  $$\lambda+1+\lambda-2+\lambda=1 \Leftrightarrow 3\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=\frac{2}{3}.$$

  Substituindo $\lambda=\frac{2}{3}$ na equação de $\mathcal{R}$, obtém-se
  $Q=(0,1,-2)+\frac{2}{3}\times(1,1,1)=\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},-\frac{4}{3}\right)$.
  Então,

  $$d(P,\mathcal{T}) = d(P,Q) = \|v_{PQ}\| = \|Q-P\| = \|\frac{2}{3}(1,1,1)\| = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

- *Processo 2:*

  Seja A um ponto qualquer de $\mathcal{T}$, por exemplo $A=(1,0,0)\in\mathcal{T}$ e seja $n=(1,1,1)$ o vetor perpendicular a $\mathcal{T}$. Tem-se que $v_{AP}=P-A=(-1,1,-2)$. Então,

  $$d(P,\mathcal{T}) = \|\operatorname{proj}_n v_{AP}\| = \frac{|v_{AP}\cdot n|}{\|n\|} = \frac{(-1,1,-2)\cdot(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

- *Processo 3:*

  Aplicando a fórmula do Corolário 2.1, obtém-se

$$\begin{aligned} d(P,\mathcal{T}) &= \frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|1\times 0+1\times 1+1\times(-2)-1|}{\sqrt{1+1+1}} \\ &= \frac{|-2|}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Exercício 2.19 Determine por três processos distintos a distância do ponto $P=(-2,-4,-3)$ ao plano $\mathcal{T}:\ x+2y+3z=9$.

Resolução

- *Processo 1:*

  A reta $\mathcal{R}$ perpendicular a $\mathcal{T}$ que passa em P é dada por

$$\mathcal{R}:\ (x,y,z)=(-2,-4,-3)+\lambda(1,2,3).$$

  Para se determinar $Q=\mathcal{T}\cap\mathcal{R}$, substitua-se $(x,y,z)=(-2+\lambda,-4+2\lambda,-3+3\lambda)$ na equação cartesiana de $\mathcal{T}$, vindo

$$-2+\lambda+2(-4+2\lambda)+3(-3+3\lambda)=9 \Leftrightarrow 14\lambda=28 \Leftrightarrow \lambda=2.$$

  Assim, $Q=(-2,-4,-3)+2\times(1,2,3)=(0,0,3)$, pelo que

$$d(P,\mathcal{T})=d(P,Q)=||v_{PQ}||=\|(2,4,6)\|=\sqrt{2^2+4^2+6^2}=2\sqrt{14}.$$

- *Processo 2:*

  Seja A um ponto qualquer de $\mathcal{T}$, por exemplo $A=(0,0,3)\in\mathcal{T}$ e seja $n=(1,2,3)$ o vetor perpendicular a $\mathcal{T}$. Tem-se que $v_{AP}=P-A=(-2,-4,-6)$. Então,

$$d(P,\mathcal{T})=\|\operatorname{proj}_n v_{AP}\|=\frac{|v_{AP}\cdot n|}{\|n\|}=\frac{(-2,-4,-6)\cdot(1,2,3)}{\|(1,2,3)\|}=\frac{28}{\sqrt{14}}=2\sqrt{14}.$$

- *Processo 3:*

  Aplicando a fórmula do Corolário 2.1, obtém-se

$$\begin{aligned} d(P,\mathcal{T}) &= \frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|1\times(-2)+2\times(-4)+3\times(-3)-9|}{\sqrt{1+4+9}} \\ &= \frac{|-28|}{\sqrt{14}} \\ &= 2\sqrt{14}. \end{aligned}$$

Definição 2.21

Sejam P um ponto de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{R}$ uma reta. Então, chama-se **distância do ponto P à reta** *$\mathcal{R}$, que se representa por $d(P,\mathcal{R})$, a $d(P,\mathcal{R})\overset{def}{=}d(P,Q)$, em que*

(a) *$\mathcal{T}$ é o plano perpendicular a $\mathcal{R}$ que passa em P.*

(b) *$Q = \mathcal{T} \cap \mathcal{R}$.*

A Figura 2.10 ilustra a Definição 2.21.

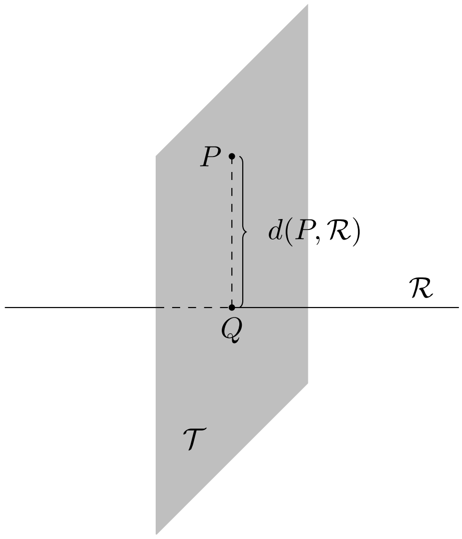


Figura 2.10: Distância de um ponto a uma reta.

Observação A distância de um ponto $P \in \mathbb{R}^3$ a uma reta $\mathcal{R}$ pode ser também obtida de outra forma usando a projeção ortogonal.

Sejam $A = (x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{R}$ um ponto qualquer da reta $\mathcal{R}$ e o ponto $P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Seja $n = (a, b, c)$ o vetor diretor de $\mathcal{R}$. Então a distância de P à reta $\mathcal{R}$ é igual ao comprimento do vetor que é a diferença entre o vetor v_{AP} e o vetor projeção ortogonal de v_{AP} sobre n (ver Figura 2.11), ou seja

$$d(P, \mathcal{R}) = \|v_{AP} - \operatorname{proj}_n v_{AP}\| = \left\| v_{AP} - \frac{v_{AP} \cdot n}{n \cdot n} n \right\|.$$

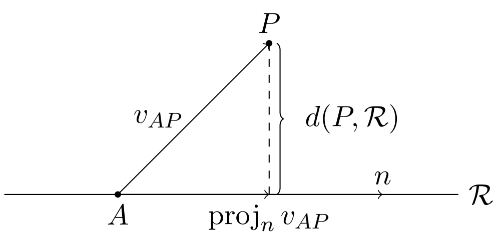


Figura 2.11: Distância de um ponto a uma reta usando a projeção ortogonal.

Teorema 2.7

Sejam P um ponto de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{R}$ uma reta. Então,

$$d(P, \mathcal{R}) = \|v_{AP} - \operatorname{proj}_n v_{AP}\|,$$

onde n é o vetor diretor da reta $\mathcal{R}$ e A é um ponto qualquer de $\mathcal{R}$. ♡

Demonstração Sejam $A = (x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{R}$ e $P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Seja $n = (a, b, c)$ o vetor diretor de $\mathcal{R}$. Então,

$$d(P, \mathcal{R}) = \|v_{AP} - \operatorname{proj}_n v_{AP}\| = \left\|v_{AP} - \frac{v_{AP} \cdot n}{n \cdot n} n\right\|.$$

A seguir prova-se que esta expressão coincide com a expressão obtida através da Definição 2.21.

Seja $\mathcal{T}$ o plano perpendicular a $\mathcal{R}$ que passa em P. Então, a equação cartesiana de $\mathcal{T}$ é da forma $ax + by + cz = d$ e, como $P \in \mathcal{P}$, $d = ax_0 + by_0 + cz_0$, vem que a equação cartesiana de $\mathcal{T}$ pode ser escrita da forma

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0.$$

A equação vetorial da reta $\mathcal{R}$ tem a expressão

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda(a, b, c), \ \lambda \in \mathbb{R},$$

onde $A = (x_1, y_1, z_1)$ é um ponto qualquer da reta $\mathcal{R}$.

Calculando $\mathcal{T} \cap \mathcal{R}$, e resolvendo a equação em ordem a λ, obtém-se a seguinte expressão.

$$\begin{aligned}
&a(x_1 + \lambda a) + b(y_1 + \lambda b) + c(z_1 + \lambda c) = ax_0 + by_0 + cz_0 \\
&\quad \Leftrightarrow (a, b, c) \cdot (x_1, y_1, z_1) + \lambda(n \cdot n) = (a, b, c) \cdot (x_0, y_0, z_0) \\
&\quad \Leftrightarrow \lambda = \frac{(a, b, c) \cdot (x_0, y_0, z_0) - (a, b, c) \cdot (x_1, y_1, z_1)}{n \cdot n} \\
&\quad \Leftrightarrow \lambda = \frac{(a, b, c) \cdot ((x_0, y_0, z_0) - (x_1, y_1, z_1))}{n \cdot n} \\
&\quad \Leftrightarrow \lambda = \frac{n \cdot (P - A)}{n \cdot n}
\end{aligned}$$

Substituindo agora a expressão de λ na equação vetorial de $\mathcal{R}$, obtém-se o ponto de interseção $Q = \mathcal{T} \cap \mathcal{R}$:

$$Q = A + \frac{n \cdot (P - A)}{n \cdot n} n.$$

Da Definição 2.21 resulta que

$$\begin{aligned}
d(P, \mathcal{R}) &= d(P, Q) \\
&= \|v_{PQ}\| \\
&= \|Q - P\| \\
&= \left\|A + \frac{n \cdot (P - A)}{n \cdot n} n - P\right\| \\
&= \left\|\frac{n \cdot (P - A)}{n \cdot n} n - (P - A)\right\| \\
&= \left\|\frac{n \cdot (P - A)}{n \cdot n} n - v_{AP}\right\| \\
&= \left\|v_{AP} - \frac{n \cdot (P - A)}{n \cdot n}\right\|,
\end{aligned}$$

que coincide com a expressão anterior, obtida com a projeção ortogonal $\|v_{AP} - \operatorname{proj}_n v_{AP}\|$, logo, $d(P, \mathcal{R}) = \|v_{AP} - \operatorname{proj}_n v_{AP}\|$. □

Exercício 2.20 Determine por dois processos distintos a distância entre o ponto $P = (4, 3, 0)$ e a reta $\mathcal{R}: \ (x, y, z) = (2, 1, -1) + \lambda(1, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$.

Resolução

- *Processo 1:*

  O plano $\mathcal{T}$, perpendicular a $\mathcal{R}$ que passa em P, é dado pela equação $x + y = d$. Como $P \in \mathcal{T}$, então $d = 4 + 3 = 7$, logo

  $$\mathcal{T}: \ x + y = 7.$$

  Para se determinar $Q = \mathcal{T} \cap \mathcal{R}$, substitua-se $(x, y, z) = (2 + \lambda, 1 + \lambda, -1)$ na equação cartesiana de $\mathcal{T}$, vindo

  $$2 + \lambda + 1 + \lambda = 7 \Leftrightarrow 2\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

  Assim,

  $$Q = (2, 1, -1) + 2 \times (1, 1, 0) = (4, 3, -1)$$

  pelo que

  $$d(P, \mathcal{R}) = d(P, Q) = \|v_{PQ}\| = \|Q - P\| = \|(0, 0, -1)\| = \sqrt{(-1)^2} = 1.$$

- *Processo 2:*

  Seja A um ponto qualquer da reta $\mathcal{R}$, por exemplo $A = (2, 1, -1) \in \mathcal{R}$. Seja $n = (1, 1, 0)$ o vetor diretor de $\mathcal{R}$ e considere $v_{AP} = P - A = (2, 2, 1)$. Então,

  $$\operatorname{proj}_n v_{AP} = \frac{v_{AP} \cdot n}{n \cdot n} n = \frac{(2, 2, 1) \cdot (1, 1, 0)}{(1, 1, 0) \cdot (1, 1, 0)}(1, 1, 0) = \frac{4}{2}(1, 1, 0) = (2, 2, 0)$$

  e, assim,

  $$d(P, \mathcal{R}) = \|v_{AP} - \operatorname{proj}_n v_{AP}\| = \|(2, 2, 1) - (2, 2, 0)\| = \|(0, 0, 1)\| = 1.$$

Definição 2.22

Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$ dois planos. Chama-se **distância entre os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$**, *que se representa por $d(\mathcal{P}, \mathcal{T})$, a:*

(a)

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{T}) \stackrel{def}{=} 0,$$

se os dois planos são coincidentes.

(b)

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{T}) \stackrel{def}{=} 0,$$

se os dois planos se intersetam.

(c)

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{T}) \stackrel{def}{=} d(\mathcal{P}, Q),$$

se os dois planos são paralelos, onde Q é um ponto qualquer de $\mathcal{T}$. Neste caso, o problema fica reduzido ao cálculo da distância de um ponto a um plano. ♠

Na Figure 2.12 pode observar-se que no caso em que os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$ são paralelos, o cálculo da distância entre $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$ fica reduzido ao cálculo da distância de um ponto a um plano.

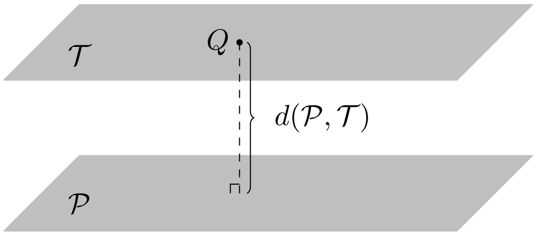


Figura 2.12: Distância entre dois planos paralelos.

Exercício 2.21 Considere os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$ definidos pelas equações $x + 2y - 2z = 3$ e $2x + 4y - 4z = 7$, respetivamente. Determine a distância entre os dois planos.

Resolução *Os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$ são paralelos visto que os seus vetores normais, que são $(1, 2, -2)$ e $(2, 4, -4)$, respetivamente, são linearmente dependentes. Seja Q um ponto arbitrário de $\mathcal{P}$, por exemplo $Q = (3, 0, 0) \in \mathcal{P}$. Considere ainda um ponto arbitrário $A = (x, y, z) \in \mathcal{T}$ e o vetor normal $n = (2, 4, -4)$ ao plano $\mathcal{T}$. Então, como*

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{T}) = d(Q, \mathcal{T}) = \|\operatorname{proj}_n v_{AQ}\|,$$

pode calcular-se a distância da seguinte forma

$$\begin{aligned}
d(\mathcal{P}, \mathcal{T}) &= \|\operatorname{proj}_n v_{AQ}\| \\
&= \frac{|v_{AQ} \cdot n|}{\|n\|} \\
&= \frac{|(Q - A) \cdot n|}{\|n\|} \\
&= \frac{|(Q \cdot n) - (A \cdot n)|}{\|n\|} \\
&= \frac{|(3, 0, 0) \cdot (2, 4, -4) - (x, y, z) \cdot (2, 4, -4)|}{\|(2, 4, -4)\|} \\
&= \frac{|6 - 7|}{6} \\
&= \frac{1}{6},
\end{aligned}$$

onde na sexta igualdade se usou o facto de $(x, y, z) \cdot (2, 4, -4) = 7$, que é a expressão da equação cartesiana do plano $\mathcal{T}$.

Definição 2.23

Sejam $\mathcal{P}$ um plano e $\mathcal{R}$ uma reta. Chama-se **distância entre a reta $\mathcal{R}$ e o plano $\mathcal{P}$**, *que se representa por $d(\mathcal{P}, \mathcal{R})$, a:*

(a)

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{R}) \stackrel{def}{=} 0,$$

se $\mathcal{R}$ está contida em $\mathcal{P}$.

(b)

$$d(\mathcal{P},\mathcal{R}) \stackrel{def}{=} 0,$$

se $\mathcal{R}$ interseta $\mathcal{P}$.

(c)

$$d(\mathcal{P},\mathcal{R}) \stackrel{def}{=} d(\mathcal{P},Q),$$

se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}$ são paralelos, onde Q é um ponto qualquer de $\mathcal{R}$. Neste caso, o problema fica reduzido ao cálculo da distância de um ponto a um plano.

Na Figure 2.13 pode observar-se que no caso em que o plano $\mathcal{P}$ e a reta $\mathcal{R}$ são paralelos, o cálculo da distância entre $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}$ fica reduzido ao cálculo da distância de um ponto a um plano.

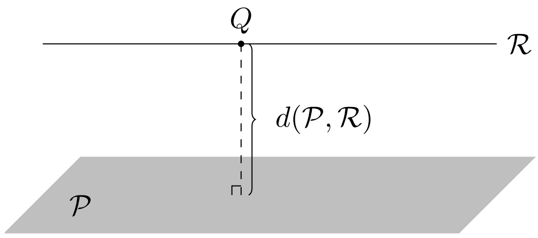


Figura 2.13: Distância entre uma reta e um plano.

Exercício 2.22 Considere o plano $\mathcal{P}$ de equação $x-y-z=2$ e a reta $\mathcal{R}$ definida pela equação vetorial $(x,y,z)=(1,0,1)+\lambda(2,1,1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Determine a distância entre a reta $\mathcal{R}$ e o plano $\mathcal{P}$.

Resolução *Seja $n=(1,-1,-1)$ o vetor normal a $\mathcal{P}$ e $v=(2,1,1)$ o vetor diretor de $\mathcal{R}$. A reta $\mathcal{R}$ é paralela ao plano $\mathcal{P}$, porque*

$$n\cdot v=(1,-1,-1)\cdot(2,1,1)=0.$$

Tem-se aina que $\mathcal{R}\not\subset\mathcal{P}$, porque, por exemplo $Q=(1,0,1)\in\mathcal{R}$ e $Q\notin\mathcal{P}$. Seja A um ponto qualquer de $\mathcal{P}$, por exemplo $A=(2,0,0)\in\mathcal{P}$. Então,

$$d(\mathcal{P},\mathcal{R})=d(\mathcal{P},Q)=\|\operatorname{proj}_n v_{AQ}\|.$$

Como $v_{AQ}=Q-A=(-1,0,1)$, obtém-se

$$d(\mathcal{P},\mathcal{R})=\|\operatorname{proj}_n v_{AQ}\|=\frac{|v_{AQ}\cdot n|}{\|n\|}=\frac{|(-1,0,1)\cdot(1,-1,-1)|}{\|(1,-1,-1)\|}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Definição 2.24

Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ duas retas. Chama-se **distância entre as retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$**, *que se representa por $d(\mathcal{R},\mathcal{S})$, a:*

(a)

$$d(\mathcal{R},\mathcal{S}) \stackrel{def}{=} 0,$$

se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são concorrentes.

(b)

$$d(\mathcal{R},\mathcal{S}) \overset{def}{=} d(P,\mathcal{S}),$$

se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são paralelas, onde P é um ponto qualquer da reta $\mathcal{R}$.

(c)

$$d(\mathcal{R},\mathcal{S}) \overset{def}{=} d(\mathcal{R},\mathcal{P}),$$

se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são enviezadas, onde $\mathcal{P}$ é o plano que contém $\mathcal{S}$ e é paralelo a $\mathcal{R}$. ♠

Na Figure 2.14 observar-se que no caso em que as retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são paralelas, o cálculo da distância entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}$ fica reduzido ao cálculo da distância de um ponto a uma reta.

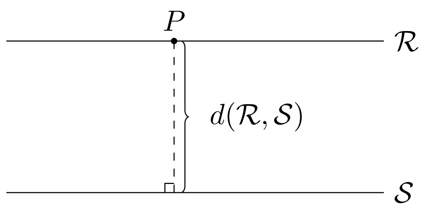


Figura 2.14: Distância entre duas retas paralelas.

Na Figure 2.15 observar-se que no caso em que as retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são enviezadas, o cálculo da distância entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}$ fica reduzido ao cálculo da distância de uma reta a um plano, paralelo a esta reta, que contém a outra reta.

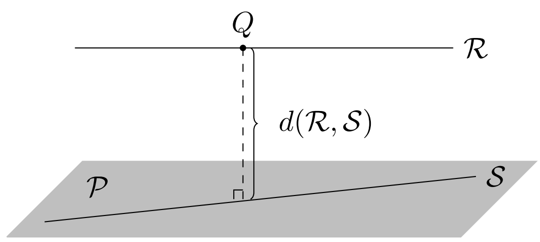


Figura 2.15: Distância entre duas retas enviezadas.

Exercício 2.23 Considere as retas $\mathcal{R} = (1,1,2) + \langle(1,0,-2)\rangle$ e $\mathcal{S} = (0,0,0) + \langle(2,1,1)\rangle$. Determine a distância entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$.

Resolução *Como $(1,0,-2) \neq k(2,1,1)$, $k \in \mathbb{R}$, então $\mathcal{R} \nparallel \mathcal{S}$.*

Para analisar se as retas se intersetam, considere o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned}&(1,1,2) + \alpha(1,0,-2) = (0,0,0) + \beta(2,1,1)\\ &\quad \Leftrightarrow \alpha(1,0,-2) + \beta(-2,-1,-1) = (-1,-1,-2),\end{aligned}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Como

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 + 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -4 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 5\ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

conclui-se que o sistema de equações é impossível, logo $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \emptyset$.

Seja $\mathcal{T}$ *o plano que contém* $\mathcal{S}$ *tal que* $\mathcal{T} \parallel \mathcal{R}$. *Seja* n *um vetor normal a* $\mathcal{T}$. *Então,* n *pode ser calculado a partir de* $n = (2,1,1) \times (1,0,-2)$. *Tem-se*

$$n = (2,1,1) \times (1,0,-2) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2e_1 + e_2 - e_3 + 4e_2 = (-2,5,-1).$$

Considere um ponto $A \in \mathcal{T}$, *por exemplo* $A = (0,0,0) \in \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ *e seja* P *um ponto quaquer de* $\mathcal{R}$, *por exemplo* $P = (1,1,2) \in \mathcal{R}$. *Então, como* $d(\mathcal{R},\mathcal{S}) = d(\mathcal{R},\mathcal{T}) = d(P,\mathcal{T})$, *obtém-se*

$$d(\mathcal{R},\mathcal{S}) = \|\operatorname{proj}_n v_{AP}\| = \frac{|v_{AP} \cdot n|}{\|n\|} = \frac{|(1,1,2)\cdot(-2,5,-1)|}{\|(-2,5,-1)\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{30}.$$

Definição 2.25

Sejam $\mathcal{R}$ *e* $\mathcal{S}$ *duas retas de* $\mathbb{R}^3$ *com vetores diretores* u *e* v, *respetivamente. Chama-se* **ângulo entre as retas** $\mathcal{R}$ **e** $\mathcal{S}$, *que se representa por* $\angle(\mathcal{R},\mathcal{S})$, *a*

$$\angle(\mathcal{R},\mathcal{S}) \overset{def}{=} \arccos\left(\frac{|u \cdot v|}{\|u\|\|v\|}\right).$$

Observação Seja $\theta = \angle(\mathcal{R},\mathcal{S})$. Então:

- $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $\theta = 0$ se e só se as retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são paralelas.

Exercício 2.24 Determine o ângulo entre a reta $\mathcal{R}: \ (x,y,z) = (3,17,3) + \lambda(4,6,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e a reta $\mathcal{S}$ definida pelas equações cartesianas

$$\frac{x}{3} = \frac{y+10}{3} = \frac{z+9}{6}.$$

Resolução *O vetor* $(4,6,2)$ *é um vetor diretor da reta* $\mathcal{R}$.

A reta $\mathcal{S}$ *pode ser definida pelas equações paramétricas*

$$\begin{cases} x = 3\mu \\ y + 10 = 3\mu \\ z + 9 = 6\mu, \end{cases}$$

$\mu \in \mathbb{R}$, *pelo que* $(3,3,6)$ *é um vetor diretor da reta* $\mathcal{S}$.

Então, o ângulo entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ é dado por

$$\begin{aligned}\angle(\mathcal{R}, s) &= \arccos\left(\frac{|(4,6,2)\cdot(3,3,6)|}{\|(4,6,2)\|\|(3,3,6)\|}\right)\\ &= \arccos\left(\frac{|12+18+12|}{\sqrt{16+36+4}\sqrt{9+9+36}}\right)\\ &= \arccos\left(\frac{42}{\sqrt{56}\sqrt{54}}\right)\\ &= \arccos\left(\frac{\sqrt{21}}{6}\right).\end{aligned}$$

Definição 2.26

Sejam $\mathcal{R}$ uma reta e $\mathcal{P}$ um plano. Chama-se **ângulo entre a reta $\mathcal{R}$ e o plano $\mathcal{P}$**, *que se representa por $\angle(\mathcal{R}, \mathcal{P})$, a*

$$\angle(\mathcal{R}, \mathcal{P}) \overset{def}{=} \operatorname{arcsen}\left(\frac{|u\cdot w|}{\|u\|\|w\|}\right),$$

onde u é um vetor diretor da reta $\mathcal{R}$ e w é um vetor perpendicular ao plano $\mathcal{P}$.

Observação Seja $\theta = \angle(\mathcal{R}, \mathcal{P})$, então:

- $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
- $\theta = 0$ se e só se a reta $\mathcal{R}$ á paralela ao plano $\mathcal{P}$.

Exercício 2.25 Determine o ângulo entre a reta $\mathcal{R}: \ (x, y, z) = (-1, 0, 1) + \lambda(0, 4, 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e o plano $\mathcal{T}: \ 4x - 3y = 1$.

Resolução *Sendo $(0, 4, 3)$ um vetor diretor de $\mathcal{R}$ e $(4, -3, 0) \perp \mathcal{T}$, então*

$$\begin{aligned}\angle(\mathcal{R}, \mathcal{T}) &= \operatorname{arcsen}\left(\frac{|(0,4,3)\cdot(4,-3,0)|}{\|(0,4,3)\|\|(4,-3,0)\|}\right)\\ &= \operatorname{arcsen}\left(\frac{|-12|}{\sqrt{16+9}\sqrt{16+9}}\right)\\ &= \operatorname{arcsen}\left(\frac{12}{25}\right).\end{aligned}$$

Definição 2.27

Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ dois planos. Chama-se **ângulo entre os dois planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$**, *que se representa por $\angle(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$, a*

$$\angle(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \overset{def}{=} \arccos\left(\frac{|n_1\cdot n_2|}{\|n_1\|\|n_2\|}\right),$$

onde n_1 e n_2 são vetores perpendiculares a $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, respetivamente.

Exercício 2.26 Determine o ângulo entre o plano $\mathcal{P}: \ -3x + 2y - z = 4$ e o plano $\mathcal{T}: \ x - 3y + 4z = 5$.

Resolução *Sendo* $(-3,2,-1) \perp \mathcal{P}$ *e* $(1,-3,4) \perp \mathcal{T}$*, então*

$$\begin{aligned}
\angle(\mathcal{P},\mathcal{T}) &= \arccos\left(\frac{|(-3,2,-1)\cdot(1,-3,4)|}{\|(-3,2,-1)\|\|(1,-3,4)\|}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{|-3-6-4|}{\sqrt{9+4+1}\sqrt{1+9+16}}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{14}\sqrt{26}}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{\sqrt{91}}{14}\right).
\end{aligned}$$

Capítulo 3 Cónicas e Quádricas

Introdução

- *Cónicas*
- *Quádricas*
- *Formas quadráticas*
- *Diagonalização de matrizes*

As cónicas e quádricas podem ser definidas por equações quadráticas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respetivamente. Estas equações têm uma representação matricial equivalente, contendo uma forma quadrática que depende de uma matriz simétrica. Através de transformações de coordenadas é possível transformar as equações em formas reduzidas que permitem a identificação das cónicas e quádricas. A ferramenta essencial nessas transformações é a diagonalização de uma matriz simétrica com a ajuda de uma matriz ortogonal.

3.1 Cónicas

Definição 3.1

Chama-se **cónica** *ao conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas satisfazem a equação de segundo grau*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0,$$

com $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c \in \mathbb{R}$. ♠

Observação

(a) Como uma cónica é uma equação de segundo grau em $\mathbb{R}^2$, tem-se na equação da definição anterior que $a_{11} \neq 0 \vee a_{12} \neq 0 \vee a_{22} \neq 0$.

(b) Por uma questão de simplificação de linguagem, diz-se por vezes "Considere a cónica $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$" em vez de "Considere a cónica com equação $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$."

A seguir apresentam-se as definições de cónicas na forma reduzida e exemplos.

Definição 3.2

Uma cónica diz-se que está na **forma reduzida** *ou* **forma canónica** *se é dada por uma das seguintes equações:*

(a) $\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + d = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$.

(b) $\lambda_1x^2 + d = 0$, $\lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$.

(c) $\lambda_1x^2 = 2ay$, $\lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}$. ♠

Definição 3.3

Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$. *Chama-se* **elipse** *à cónica cuja equação reduzida é*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Exercício 3.1 Considere a cónica $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Identifique a cónica e faça o seu esboço.

Resolução *A cónica* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, *que já está na forma reduzida (com* $a = 3$, $b = 2$*), é uma elipse (ver Figura 3.1).*

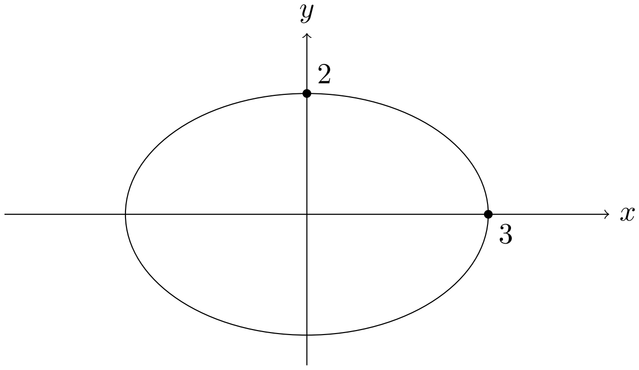


Figura 3.1: Esboço da cónica $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Definição 3.4

Seja $\rho \in \mathbb{R}^+$. *Chama-se* **circunferência** *à cónica cuja equação reduzida é*

$$x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Exercício 3.2 Considere a cónica $x^2 + y^2 = 2$. Identifique a cónica e faça o seu esboço.

Resolução *A cónica* $x^2 + y^2 = 2$, *que já está na forma reduzida (com* $\rho = \sqrt{2}$*), é uma circunferência (ver Figura 3.2).*

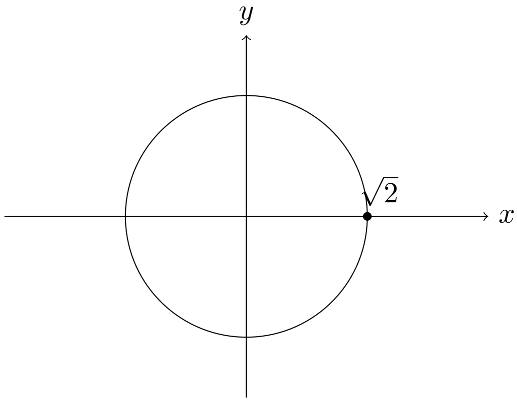


Figura 3.2: Esboço da cónica $x^2 + y^2 = 2$.

Definição 3.5

Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$. Chama-se **hipérbole** *à cónica cuja equação reduzida é*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ou \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

♠

Exercício 3.3 Considere a cónica $x^2 - y^2 = 1$. Identifique a cónica e faça o seu esboço.

Resolução *A cónica $x^2 - y^2 = 1$, que já está na forma reduzida (com $a = b = 1$ na equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$), é uma hipérbole (ver Figura 3.3).*

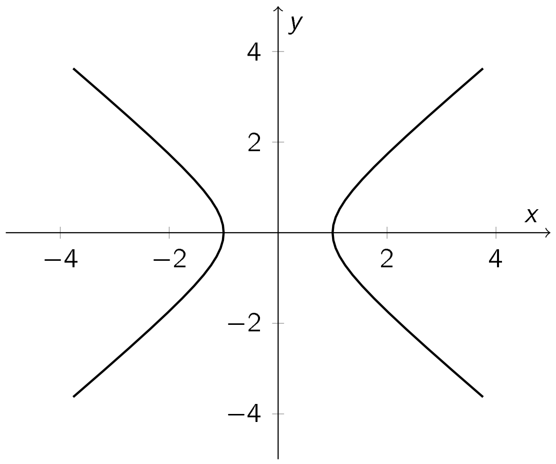


Figura 3.3: Esboço da cónica $x^2 - y^2 = 1$.

Definição 3.6

Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$. Chama-se **parábola** *à cónica cuja equação reduzida é*

$$ax^2 - by = 0 \;\; ou \;\; ay^2 - bx = 0 \;\; ou \;\; ax^2 + by = 0 \;\; ou \;\; ay^2 + bx = 0.$$

♠

Exercício 3.4 Considere a cónica $y = 2x^2$. Identifique a cónica e faça o seu esboço.

Resolução *A cónica $y = 2x^2$, que já está na forma reduzida (com $a = 2$ e $b = 1$ na equação $ax^2 - by = 0$), é uma parábola (ver Figura 3.4).*

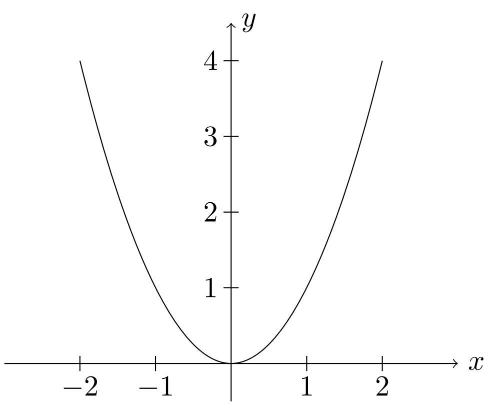


Figura 3.4: Esboço da cónica $y = 2x^2$.

Definição 3.7

Uma cónica chama-se **cónica degenerada** *se não há pontos de* $\mathbb{R}^2$ *que satisfaçam a sua equação, ou se, existindo, eles definem uma reta, duas retas ou apenas um ponto de* $\mathbb{R}^2$. ♠

Observação Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$. Então, as seguintes equações definem cónicas degeneradas:

(a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$.

(b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$.

(c) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

(d) $x^2 = a^2$, $y^2 = b^2$.

(e) $x^2 = -a^2$, $y^2 = -b^2$.

(f) $x^2 = 0$, $y^2 = 0$.

Teorema 3.1

Uma cónica ou é uma elipse ou uma circunferência ou uma hipérbole ou uma parábola ou uma cónica degenerada. ♡

Na observação que se segue, apresenta-se um resumo das cónicas não degeneradas na forma reduzida, ou seja, cónicas que se podem escrever como

$$\lambda_1 x^{\alpha_1} + \lambda_2 y^{\alpha_2} = d,$$

com

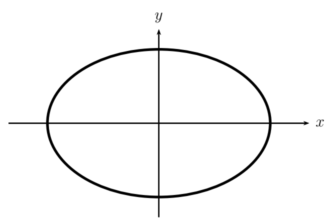
- $\lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{R} - \{0\}, i, j \in \{1, 2\} \wedge i \neq j$,
- $\alpha_1, \alpha_2 \in \{1, 2\} \wedge (\alpha_1 = 2 \vee \alpha_2 = 2)$ e
- $d \in \{0, 1\}$.

Observação Resumo das cónicas não degeneradas:

(a) $d = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$

  (a.i) $\lambda_i > 0$, $\lambda_j > 0$

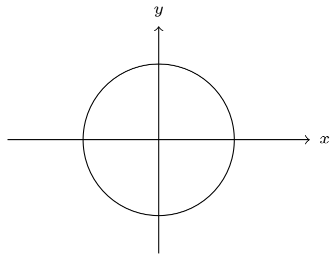
    (a.i.1) $\lambda_i \neq \lambda_j$: elipse



$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Figura 3.5: Elipse.

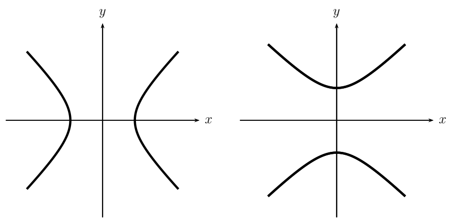
(a.i.2) $\lambda_i = \lambda_j$: circunferência



$x^2 + y^2 = 4$

Figura 3.6: Circunferência.

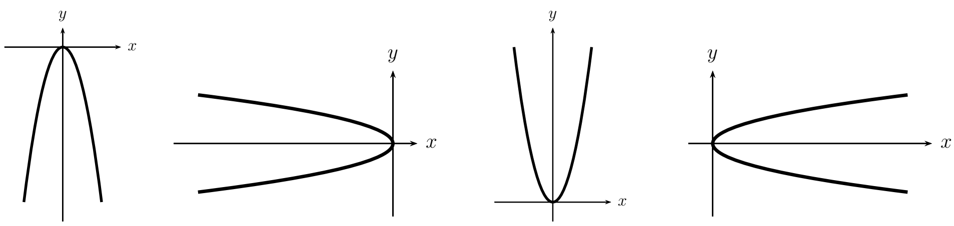
(a.ii) $\lambda_i > 0$, $\lambda_j < 0$: hipérbole



$x^2 - y^2 = 1$ $\quad$ $-x^2 + y^2 = 1$

Figura 3.7: Hipérbole.

(b) $d = 0$, $\alpha_i = 2$, $\alpha_j = 1$: parábola



$4x^2 + y = 0$ $\quad$ $4x + y^2 = 0$ $\quad$ $4x^2 - y = 0$ $\quad$ $4x - y^2 = 0$

Figura 3.8: Parábola.

Os gráficos da elipse, circunferência e hipérbole na forma reduzida são simétricos em relação aos dois eixos coordenados e em relação à origem. A parábola na forma reduzida tem o vértice na origem e é simétrica em relação a um dos eixos coordenados.

Observação A cónica

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

pode ser escrita na forma matricial

$$X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0,$$

onde $A = \left[\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{smallmatrix}\right]$ (uma matriz simétrica), $B = \left[\begin{smallmatrix} b_1 & b_2 \end{smallmatrix}\right]$ e $X = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$, pois

$$\begin{aligned} X^{\mathrm{T}}AX &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{12}x + a_{22}y \end{bmatrix} \\ &= a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{12}xy + a_{22}y^2 = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \\ BX &= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b_1x + b_2y. \end{aligned}$$

Definição 3.8

Seja a cónica $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$. Chama-se **forma quadrática** *associada à cónica ao termo*

$$X^{\mathrm{T}}AX = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

♠

Exercício 3.5 Escreva a cónica $x^2 + 8x - 24y = -36$ na forma matricial.

Resolução *A forma matricial da cónica é*

$$X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0,$$

onde $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $B = \left[\begin{smallmatrix} 8 & -24 \end{smallmatrix}\right]$, $X = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$ *e* $c = 36$.

Teorema 3.2

Através de mudanças de coordenadas correspondentes a rotações e/ou translações, é sempre possível transformar uma cónica numa das formas reduzidas.

♡

Observação Caso 1 — translação de eixos:

As cónicas que não estão na forma reduzida e que não têm o termo cruzado ($a_{12} = 0$) podem ser transformadas na forma reduzida através de uma translação de eixos.

(a) Quando os termos em x^2 e em x têm coeficientes não-nulos ($a_{11} \neq 0 \wedge b_1 \neq 0$), aplica-se uma translação horizontal de eixos.

(b) Quando os termos em y^2 e em y têm coeficientes não-nulos ($a_{22} \neq 0 \wedge b_2 \neq 0$), aplica-se uma translação vertical de eixos.

(c) Quando os termos em x^2, x, y^2, y são não-nulos ($a_{11} \neq 0 \wedge b_1 \neq 0 \wedge a_{22} \neq 0 \wedge b_2 \neq 0$), considera-se uma combinação de uma translação horizontal e translação vertical de eixos.

Os novos eixos, nos quais a cónica já está na forma reduzida, podem ser determinados completando os quadrados na expressão da cónica.

Exercício 3.6 Considere a cónica $x^2 + 8x + 4y^2 - 24y = -36$.

(a) Determine a mudança de coordenadas de modo que a cónica resultante esteja na forma reduzida.

(b) Identifique e esboce a cónica.

Resolução

(a) *Por um lado, tem-se*

$$\begin{aligned}
x^2+8x &= x^2+8x+\left(\frac{8}{2}\right)^2-\left(\frac{8}{2}\right)^2\\
&= x^2+8x+16-16\\
&= (x+4)^2-16,\\
4y^2-24y &= 4(y^2-6y)\\
&= 4\left(y^2-6y+\left(\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2\right)\\
&= 4(y^2-6y+9-9)\\
&= 4((y-3)^2-9).
\end{aligned}$$

Substituindo as expressões anteriores na equação da cónica, obtém-se

$$\begin{aligned}
&x^2+8x+4y^2-24y=-36\\
&\Leftrightarrow (x+4)^2-16+4((y-3)^2-9)=-36\\
&\Leftrightarrow (x+4)^2+4(y-3)^2=-36+16+36\\
&\Leftrightarrow (x+4)^2+4(y-3)^2=16\\
&\Leftrightarrow \frac{(x+4)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{4}=1\\
&\Leftrightarrow \frac{(x+4)^2}{4^2}+\frac{(y-3)^2}{2^2}=1.
\end{aligned}$$

A mudança de coordenadas $x'=x+4$ e $y'=y-3$ transforma a cónica na seguinte forma reduzida:

$$\frac{(x')^2}{4^2}+\frac{(y')^2}{2^2}=1.$$

(b) *A equação $\frac{(x')^2}{4^2}+\frac{(y')^2}{2^2}=1$ é a equação reduzida de uma elipse. A origem $x'=0$, $y'=0$ do novo sistema de coordenadas x' e y' está em $x=-4$, $y=3$.*

Na Figura 3.9 apresenta-se o esboço da cónica.

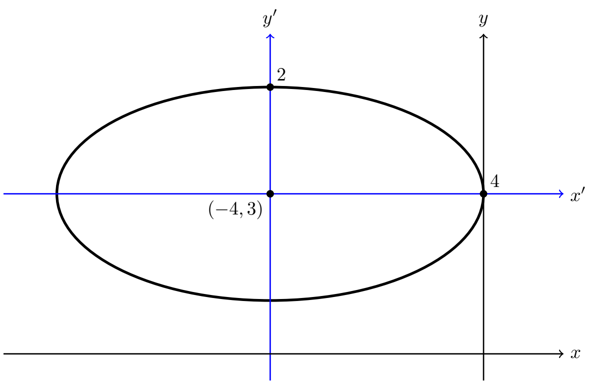


Figura 3.9: Esboço da cónica $x^2+8x+4y^2-24y=-36$.

Observação Caso 2 — rotação de eixos:

As cónicas que não estão na forma reduzida e que têm o termo cruzado ($a_{12} \neq 0$) podem ser transformadas na forma reduzida através de uma rotação dos eixos. Neste caso, é necessário eliminar o termo cruzado, o que pode ser feito através da diagonalização da matriz simétrica A, aplicando o Teorema 3.4.

Definição 3.9

Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é **ortogonalmente diagonalizável** *se existem uma matriz ortogonal $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ($P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$) e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que*

$$P^{\mathrm{T}}AP = D.$$

♠

Teorema 3.3

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, A é ortogonalmente diagonalizável se e só se A é uma matriz simétrica.

♡

Teorema 3.4

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica. Então:

(a) Os valores próprios de A são reais.

(b) Vetores próprios correspondentes a valores próprios distintos são ortogonais.

(c) A é ortogonalmente diagonalizável, i.e., existe uma matriz $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que P é ortogonal e $P^{\mathrm{T}}AP = D$, onde D é uma matriz diagonal.
As colunas de $P = \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & P_n \end{bmatrix}$ são os vetores próprios ortonormados $P_1, \ldots, P_n$ da matriz A.

♡

O seguinte algoritmo permite construir a partir de uma matriz simétrica A uma matriz P que diagonaliza A ortgonalmente.

Algoritmo 3.1

Algoritmo para construir uma matriz P que diagonaliza ortogonalmente uma matriz simétrica A:

(1) determinar o espetro $\lambda(A)$ da matriz A;

(2) determinar uma base para cada espaço próprio da matriz A;

(3) construir uma base ortonormada para cada espaço próprio da matriz A;

(4) construir a matriz $P = \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & P_n \end{bmatrix}$ em que cada coluna $P_i, i = 1, \ldots, n$, é um vetor da base obtida em (3).

♣

Teorema 3.5

Seja $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$ *a equação de uma cónica e seja* $X^{\mathrm{T}}AX = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ *a forma quadrática associada. Então é possível rodar os eixos de coordenadas tal que a equação da cónica no novo sistema de coordenadas* x' *e* y' *tem a forma*

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + b_1'x' + b_2'y' + c = 0,$$

onde λ_1 *e* λ_2 *são os valores próprios de* A.

A mudança de coordenadas — rotação — é dada por

$$X = PX',$$

onde $X = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$, $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ *e* P *é uma matriz ortogonal que diagonaliza* A *e* $\det(P) = 1$. ♡

Observação Seja P uma matriz ortogonal que diagonaliza A.Então, substituindo $X = PX'$ na forma quadrática $X^{\mathrm{T}}AX$ e no termo BX da forma matricial da cónica, obtém-se:

$$X^{\mathrm{T}}AX = (PX')^{\mathrm{T}}A(PX') = (X')^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}APX' = (X')^{\mathrm{T}}DX'$$

$$= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2,$$

$$BX = BPX' = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = b_1'x' + b_2'y',$$

onde $b_1' = b_1p_{11} + b_2p_{21}$ e $b_2' = b_1p_{12} + b_2p_{22}$.

Como se pode observar, os termos quadráticos já não possuem o termo cruzado.

Observação

(a) Seja $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que define a rotação de um ângulo $\theta \in (0, \pi)$ no sentido anti-horário em torno da origem. Então

$$T_\theta(e_1) = T_\theta(1, 0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta),$$

pois, sendo $T_\theta(1, 0) = (x, y)$, das relações trigonométricas tem-se que $\cos\theta = \frac{x}{1}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{1}$ (ver Figura 3.10). Considerando $T_\theta(e_2) = T_\theta(0, 1)$, então as coordenadas (x, y) deste novo vetor são tais que $\cos\theta = \frac{y}{1}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{-x}{1}$ (ver Figura 3.10), assim,

$$T_\theta(e_2) = T_\theta(0, 1) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta).$$

Logo, a matriz que representa esta rotação é dada por

$$A_{T_\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

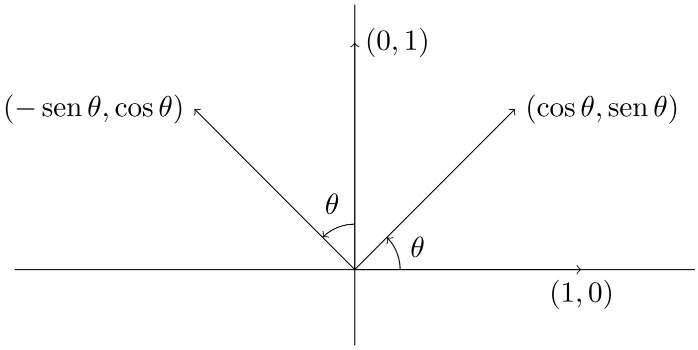


Figura 3.10: Rotação no sentido anti-horário em torno da origem.

(b) Seja $T_{-\theta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que define a rotação de um ângulo $\theta \in (0, \pi)$ no sentido horário em torno da origem. Então

$$T_{-\theta}(e_1) = T_{-\theta}(1,0) = (\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta),$$

pois, sendo $T_{-\theta}(1,0) = (x,y)$, das relações trigonométricas tem-se que $\cos\theta = \frac{y}{1}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{1}$ (ver Figura 3.11). Considerando $T_{-\theta}(e_2) = T(0,1)$, então as coordenadas (x,y) deste novo vetor são tais que $\cos\theta = \frac{x}{1}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{-y}{1}$ (ver Figura 3.11), assim,

$$T_{-\theta}(e_2) = T_{-\theta}(0,1) = (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta).$$

A matriz que representa esta rotação é dada por

$$A_{T_{-\theta}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

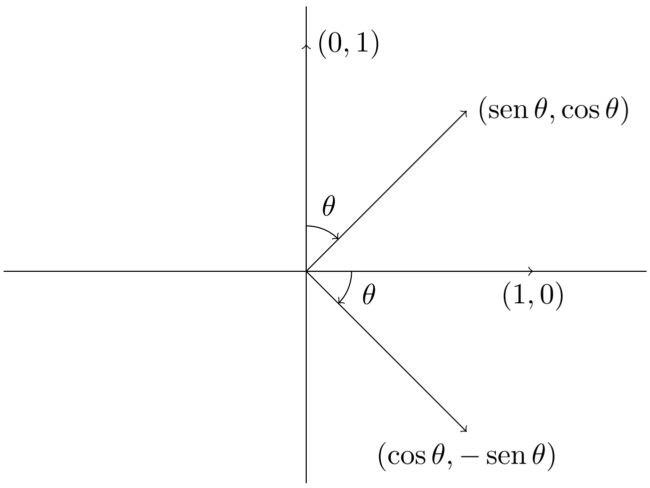


Figura 3.11: Rotação no sentido horário em torno da origem.

Passa-se a seguir a representar as matrizes de rotação A_{T_θ} e $A_{T_{-\theta}}$ por $R(\theta)$ e $R(-\theta)$, respetivamente.

Definição 3.10

(a) A **matriz de rotação no sentido anti-horário** *$R(\theta)$, que representa a rotação de um ângulo $\theta \in (0, \pi)$ no sentido anti-horário em torno da origem, é definida por*

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(b) A **matriz de rotação no sentido horário** *$R(-\theta)$ que representa a rotação de um ângulo $\theta \in (0, \pi)$ no sentido horário em torno da origem é dada por*

$$R(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

♠

Observação Sejam $R(\theta)$ e $R(-\theta)$, $\theta \in (0, \pi)$, matrizes de rotação em $\mathbb{R}^2$. Então:

(a) $R(-\theta) = R^{\mathrm{T}}(\theta)$.

(b) $R(\theta)$ e $R(-\theta)$ são matrizes ortogonais com

$$\det(R(\theta)) = \det(R(-\theta)) = 1.$$

(c) Como $R(\theta)$ é uma matriz ortogonal, então

$$R^{-1}(\theta) = R^{\mathrm{T}}(\theta) = R(-\theta).$$

Observação

(a) A matriz P do Teorema 3.5 é uma matriz de rotação.

(b) Se a matriz P construída com o Algoritmo 3.1 é tal que $\det(P) = -1$, então basta trocar as duas colunas de P para se obter a matriz de rotação.

(c) Geometricamente, o problema da eliminação do termo cruzado corresponde a fazer uma rotação de eixos de modo que a cónica no novo sistema de eixos rodados já esteja na forma reduzida. Deste ponto de vista, o problema passa pela determinação do ângulo θ na matriz de rotação.

Exercício 3.7 Considere a cónica $10x^2 - 8xy + 4y^2 = 12$.

(a) Determine a mudança de coordenadas de modo que a cónica resultante esteja na forma reduzida.

(b) Identifique e esboce a cónica.

(c) Determine o ângulo θ associado à matriz de rotação usada para transformar a cónica na forma reduzida.

Resolução

(a) A equação da cónica pode ser escrita da seguinte forma matricial:

$$10x^2 - 8xy + 4y^2 = 12 \Leftrightarrow X^{\mathrm{T}}AX = 12,$$

com $A = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. *Calculando os valores próprios da matriz* A*, obtém-se:*

$$\begin{aligned}
&\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 10-\lambda & -4 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 14\lambda + 24 = 0 \\
&\quad \Leftrightarrow \lambda = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 96}}{2} = \frac{14 \pm 10}{2} \Leftrightarrow \lambda = 12 \vee \lambda = 2 \\
&\quad \Rightarrow \lambda(A) = \{2, 12\}.
\end{aligned}$$

Para determinar do espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = 2$*, resolve-se o sistema:*

$$(A - 2I_2)x_1 = \underline{0},$$

ou seja, $A_1 x_1 = b_1$*, com* $A_1 = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$, $x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}$ *e* $b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$*, vindo*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \frac{1}{2}\ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A_1) = \operatorname{car}(A_1|b_1) = 1 < n = 2$ *(*n *é o número de incógnitas),* $A_1 x_1 = b_1$ *é um sistema possível e indeterminado (como tinha que ser) equivalente ao sistema de equações lineares*

$$\left\{ 8x_{11} - 4x_{12} = 0 \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = \frac{\alpha}{2} \\ x_{12} = \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Assim, tem-se que $E_2 = \{(\frac{\alpha}{2}, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$*, pelo que, por exemplo,* $p_1 = (1, 2)$ *é um vetor próprio associado ao valor próprio* $\lambda_1 = 2$*. Como* $\|p_1\| = \sqrt{5}$*, então normalizando* p_1 *obtém-se a primeira coluna da matriz* P*:* $P_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$*. Para determinar do espaço próprio associado ao valor próprio* $\lambda_2 = 12$*, resolve-se o sistema:*

$$(A - 12I_2)x_2 = \underline{0},$$

ou seja, $A_2 x_2 = b_2$*, com* $A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}$ *e* $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$*, vindo*

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A_2) = \operatorname{car}(A_2|b_2) = 1 < n = 2$ *(*n *é o número de incógnitas),* $A_2 x_2 = b_2$ *é um sistema possível e indeterminado (como tinha que ser) equivalente ao sistema de equações lineares*

$$\left\{ -2x_{21} - 4x_{22} = 0 \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x_{21} = -2\alpha \\ x_{22} = \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Assim, tem-se que $E_{12} = \{(-2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$*, pelo que, por exemplo,* $p_2 = (-2, 1)$ *é um vetor próprio associado ao valor próprio* $\lambda_2 = 12$*. Como* $\|p_2\| = \sqrt{5}$*, então normalizando* p_2 *obtém-se a segunda coluna da matriz* P*:* $P_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Logo, a matriz ortogonal P *com* $\det(P) = 1$ *que diagonaliza* A *é*

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verificação:

$$
\begin{aligned}
P^{\mathrm{T}}AP &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}10 & -4\\ -4 & 4\end{bmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & -4\\ -4 & 4\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}2 & 4\\ -24 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 12\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Usando a mudança de variável $X = PX'$, vem

$$X^{\mathrm{T}}AX = 12 \Leftrightarrow (X')^{\mathrm{T}}DX' = 12 \Leftrightarrow 2(x')^2 + 12(y')^2 = 12,$$

onde $D = P^{\mathrm{T}}AP = \left[\begin{smallmatrix}2 & 0\\ 0 & 12\end{smallmatrix}\right]$. Logo, a mudança de coordenadas que permite transformar a cónica na forma reduzida é $X = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{smallmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{smallmatrix}\right]X'$.

(b) A cónica na forma reduzida pode ser escrita da seguinte forma

$$2(x')^2 + 12(y')^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{(x')^2}{6} + (y')^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{(x')^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{(y')^2}{1^2} = 1,$$

que é a equação reduzida de uma elipse.

Na Figura 3.12 apresenta-se o esboço da cónica.

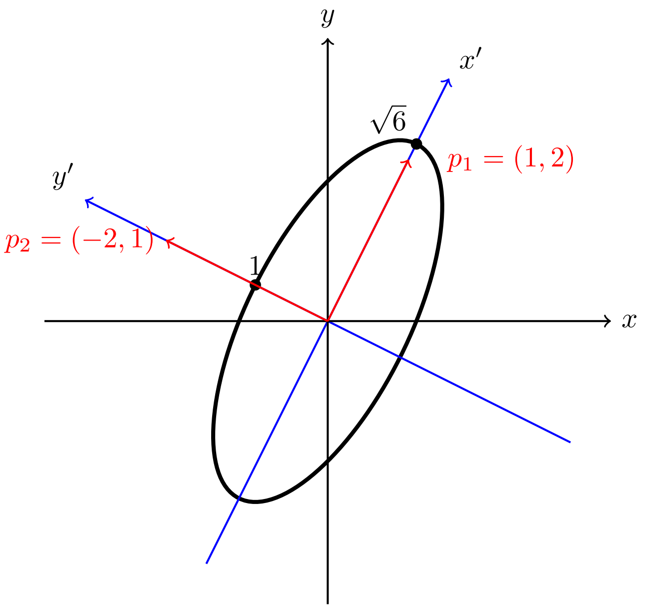


Figura 3.12: Esboço da cónica $10x^2 - 8xy + 4y^2 = 12$.

(c) *O ângulo θ que corresponde à rotação do sistema de eixos $x'y'$ em relação ao sistema de eixos xy pode ser determinado a partir da matriz P:*

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

logo

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \arctan(2)\ (\approx 63.43^\circ).$$

Observação Caso 3 — rotação e translação de eixos:

As cónicas que não estão na forma reduzida com termo cruzado e com coeficientes de x^2 e x e/ou coeficientes de y^2 e y não-nulos podem ser transformadas na forma reduzida aplicando primeiro uma rotação de eixos (ver caso 2). No novo sistema de eixos rodados x' e y' a cónica já não tem termo cruzado:

$$X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0 \Leftrightarrow (PX')^{\mathrm{T}}APX' + BPX' + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + b_1'x' + b_2'y' + c = 0,$$

onde $b_1' = b_1p_{11} + b_2p_{21}$ e $b_2' = b_1p_{12} + b_2p_{22}$.

De seguida aplica-se uma translação de eixos (ver caso 1). No novo sistema de eixos x'' e y'', que é obtido completando os quadrados na expressão da cónica em x' e y', a cónica ficará na forma reduzida.

Exercício 3.8 Considere a cónica $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y = 8$.

(a) Determine a mudança de coordenadas de modo que a cónica resultante esteja na forma reduzida.

(b) Identifique e esboce a cónica.

(c) Determine o ângulo θ associado à matriz de rotação usada para transformar a cónica na forma reduzida no exercício.

Resolução

(a) *A equação da cónica pode ser escrita na seguinte forma matricial*

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y = 8 \Leftrightarrow X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0,$$

onde $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, $B = \left[\begin{smallmatrix} -2\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \end{smallmatrix}\right]$, $c = -8$ *e* $X = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$.

A seguir determina-se os valores próprios da matriz A:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) = 0 &\Leftrightarrow \left|\begin{smallmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{smallmatrix}\right| = 0 \\ &\Leftrightarrow (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0. \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula resolvente, obtém-se

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 3 \Rightarrow \lambda(A) = \{1, 3\}.$$

Logo, $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = 3$ *são valores próprios da matriz* A.

Para determinar o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = 1$*, tem que se resolver o seguinte sistema:*

$$(A - I_2)x_1 = \underline{0},$$

ou seja, $A_1x_1 = b_1$*, com* $A_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, $x_1 = \left[\begin{smallmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{smallmatrix}\right]$ *e* $b_1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$*, vindo*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A_1) = \operatorname{car}(A_1|b_1) = 1 < n = 2$ *(*n *é o número de incógnitas),* $A_1x_1 = b_1$ *é um sistema possível e indeterminado (como tinha que ser) equivalente ao sistema de equações lineares*

$$\{x_{11} - x_{12} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = \alpha \\ x_{12} = \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Assim, tem-se:

$$E_1 = \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

pelo que, por exemplo, $p_1 = (1, 1)$ *é um vetor próprio associado ao valor próprio* $\lambda_1 = 1$. *Como* $\|p_1\| = \sqrt{2}$*, então normalizando* p_1 *obtém-se a primeira coluna da matriz* P*:* $P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. *Para determinar o espaço próprio associado ao valor próprio* $\lambda_2 = 3$*, resolve-se o sistema*

$$(A - 3I_2)x_2 = \underline{0},$$

ou seja, $A_2x_2 = b_2$*, com* $A_2 = \left[\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$, $x_2 = \left[\begin{smallmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{smallmatrix}\right]$ *e* $b_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$*, vindo*

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A_2) = \operatorname{car}(A_2|b_2) = 1 < n = 2$ *(*n *é o número de incógnitas),* $A_2x_2 = b_2$ *é um sistema possível e indeterminado (como tinha que ser) equivalente ao sistema de equações lineares*

$$\{-x_{21} - x_{22} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{21} = -\alpha \\ x_{22} = \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Assim, tem-se $E_3 = \{(-\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$*, pelo que, por exemplo,* $p_2 = (-1, 1)$ *é um vetor próprio associado ao valor próprio* $\lambda_2 = 3$. *Como* $\|p_2\| = \sqrt{2}$*, então normalizando* p_2 *obtém-se a segunda coluna da matriz* P*:* $P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. *Logo, a matriz ortogonal* P *com* $\det(P) = 1$ *que diagonaliza* A *é*

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verificação:

$$
\begin{aligned}
P^{\mathrm{T}}AP &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & 3\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Usando a mudança de variável $X = PX'$, vem

$$
\begin{aligned}
X^{\mathrm{T}}AX + BX + c &= (PX')^{\mathrm{T}}APX' + BPX' + c\\
&= 1(x')^2 + 3(y')^2 + \begin{bmatrix}-2\sqrt{2} & 4\sqrt{2}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} - 8\\
&= (x')^2 + 3(y')^2 + 2x' + 6y' - 8,
\end{aligned}
$$

logo,

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y = 8 \Leftrightarrow (x')^2 + 3(y')^2 + 2x' + 6y' = 8.$$

Completando os quadrados na equação anterior, obtém-se

$$(x')^2 + 2x' + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 + 3\left((y')^2 + 2y' + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) = 8.$$

A equação anterior simplifica para

$$
\begin{aligned}
&(x')^2 + 2x' + 1 - 1 + 3\left((y')^2 + 2y' + 1 - 1\right) = 8\\
&\Leftrightarrow (x')^2 + 2x' + 1 + 3\left((y')^2 + 2y' + 1\right) = 8 + 1 + 3\\
&\Leftrightarrow (x' + 1)^2 + 3(y' + 1)^2 = 12\\
&\Leftrightarrow \frac{(x' + 1)^2}{12} + \frac{(y' + 1)^2}{4} = 1.
\end{aligned}
$$

Aplicando agora a mudança de variável $x'' = x' + 1$, $y'' = y' + 1$, a equação é transformada na seguinte forma reduzida

$$\frac{(x'')^2}{12} + \frac{(y'')^2}{4} = 1.$$

Logo, para transformar a cónica na forma reduzida aplica-se primeiro uma rotação de eixos definida pela mudança de coordenadas

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}X'$$

e de seguida uma translação de eixos definida por

$$x'' = x' + 1,\ y'' = y' + 1.$$

(b) A equação

$$\frac{(x'')^2}{12}+\frac{(y'')^2}{4}=1 \Leftrightarrow \frac{(x'')^2}{(\sqrt{12})^2}+\frac{(y'')^2}{(2)^2}=1$$

é a equação reduzida de uma elipse.

Na Figura 3.13 apresenta-se o esboço da cónica.

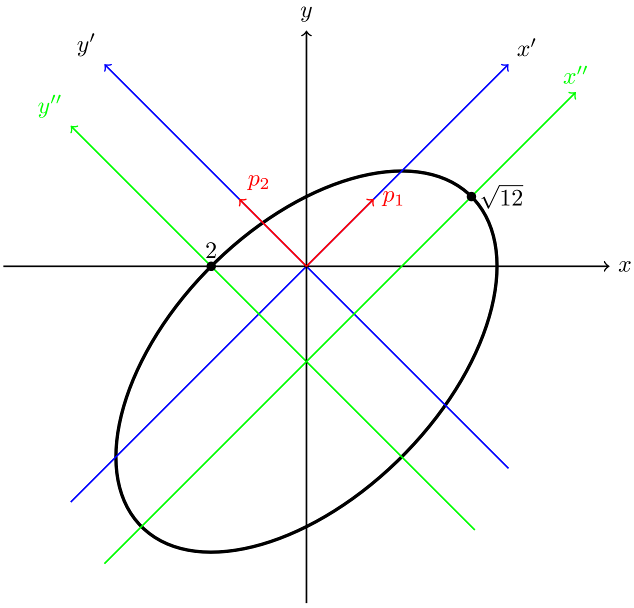


Figura 3.13: Esboço da cónica $2x^2-2xy+2y^2-2\sqrt{2}x+4\sqrt{2}y=8$.

(c) O ângulo θ correspondente à rotação usada no exercício anterior pode ser determinado a partir da matriz P:

$$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix},$$

logo

$$\theta=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}(=45^\circ).$$

Observação As cónicas não-degeneradas podem ser classificadas a partir dos valores próprios da matriz A da forma quadrática $X^{\mathrm{T}}AX$.

Sejam λ_1,λ_2 os valores próprios da matriz A. Então, a cónica é:

(a) uma elipse (ou circunferência), se $\lambda_1\lambda_2>0$;

(b) uma hipérbole, se $\lambda_1\lambda_2<0$;

(c) uma parábola, se $\lambda_1=0\vee\lambda_2=0$.

Note ainda que se $\det(A)\neq 0$, então a cónica é uma elipse (ou circunferência) ou uma hipérbole. Se $\det(A)=0$, então a cónica é uma parábola.

Exercício 3.9 Considere a cónica não-degenerada $2x^2+4x-4y=-6$.

(a) Classifique a cónica a partir dos valores próprios da matriz da forma quadrática associada.

(b) Determine a mudança de coordenadas de modo que a cónica resultante esteja na forma reduzida.

(c) Identifique e esboce a cónica.

Resolução

(a) A cónica pode ser escrita na forma matricial $X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0$, em que a matriz da forma quadrática $X^{\mathrm{T}}AX$ é $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Como os valores próprios da matriz A são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 0$, sendo um dos valores próprios nulo, então a cónica é uma parábola.

(b) Como a cónica não tem termo cruzado, completa-se o quadrado para a transformar da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
2x^2 + 4x - 4y = -6 &\Leftrightarrow 2(x^2 + 2x + 1 - 1) - 4y = -6 \\
&\Leftrightarrow 2(x+1)^2 - 2 - 4y = -6 \\
&\Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 4y - 4 \\
&\Leftrightarrow (x+1)^2 = 2(y-1).
\end{aligned}$$

Usando a mudança de coordenadas $x' = x + 1$, $y' = y - 1$, obtém-se a equação na forma reduzida

$$x'^2 = 2y'.$$

(c) A equação reduzida $x'^2 = 2y'$ representa uma parábola.

Na Figura 3.14 apresenta-se o esboço da cónica.

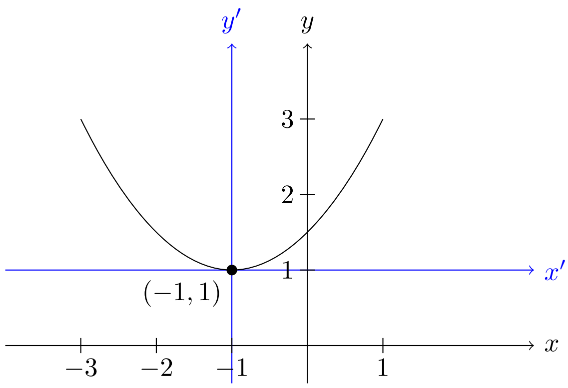


Figura 3.14: Esboço da cónica $2x^2 + 4x - 4y = -6$.

3.2 Quádricas

Definição 3.11

Chama-se **quádrica** *ao conjunto de pontos de $\mathbb{R}^3$ cujas coordenadas satisfazem uma equação de segundo grau em três variáveis*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0,$$

com $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, b_1, b_2, b_3, c \in \mathbb{R}$.

Observação Como uma quádrica é uma equação de segundo grau em $\mathbb{R}^3$, tem-se na equação da definição anterior que $a_{11} \neq 0 \vee a_{22} \neq 0 \vee a_{33} \neq 0 \vee a_{12} \neq 0 \vee a_{13} \neq 0 \vee a_{23} \neq 0$.

Definição 3.12

Uma quádrica diz-se que está na **forma reduzida** *(ou* **forma canónica***) se é dada por uma das seguintes equações:*

(a) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$.

(b) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$.

(c) $\lambda_1 x^2 + d = 0$, $\lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$.

(d) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 2az$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}$.

(e) $\lambda_1 x^2 = 2ay$, $\lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}$.

♠

Definição 3.13

Sejam $a, b, c, \rho \in \mathbb{R}^+$. Então, chama-se **elipsóide** *à quádrica cuja equação reduzida é*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \; a, \; b \text{ e } c \text{ não todos iguais},$$

e **esfera** *à quádrica cuja equação reduzida é*

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$

♠

Exercício 3.10 Considere a quádrica de equação $x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 1$. Identifique a quádrica e faça o seu esboço.

Resolução *A quádrica pode ser escrita na seguinte forma canónica* $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$ *(com $a = 1$, $b = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $c = \frac{\sqrt{3}}{3}$), que é a equação reduzida de um elipsóide.*

Na Figura 3.15 apresenta-se o esboço da quádrica.

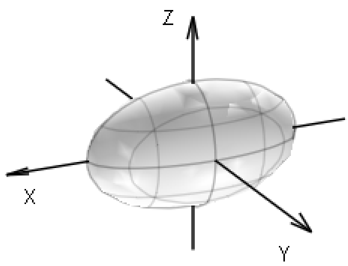


Figura 3.15: Esboço da quádrica $x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 1$.

Observação Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ não todos iguais e o elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.
- No plano XOZ — a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$.
- No plano YOZ — a elipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$.

(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

(c) Superfície de revolução se $a = b$, em que a geratriz é a elipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ e o eixo é o eixo coordenado OZ, ou se $a = c$, em que a geratriz é a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e o eixo é o eixo coordenado OY, ou se $b = c$, em que a geratriz é a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ e o eixo é o eixo coordenado OX.

Definição 3.14

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Então, chama-se **hiperbolóide de uma folha** *à quádrica cuja equação reduzida é*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad ou \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad ou \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

♠

Exercício 3.11 Considere a quádrica de equação $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Identifique a quádrica e faça o seu esboço.

Resolução *A quádrica pode ser escrita na seguinte forma canónica $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1^2} - \frac{z^2}{1^2} = 1$ (com $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$), que é a equação reduzida de um hiperbolóide de uma folha.*

Na Figura 3.16 apresenta-se o esboço da quádrica.

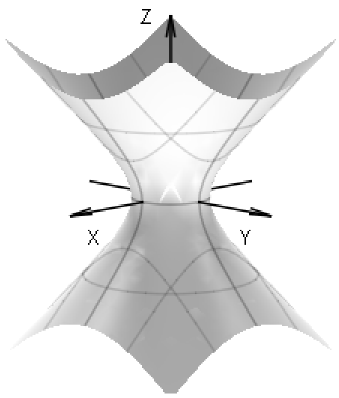


Figura 3.16: Esboço da quádrica $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Observação Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ e o hiperbolóide de uma folha $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.
- No plano XOZ — a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$.
- No plano YOZ — a hipérbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$.

(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

(c) Superfície de revolução se $a = b$, em que a geratriz é a hipérbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ e o eixo é o eixo coordenado OZ.

Definição 3.15

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. *Então, chama-se* **hiperbolóide de duas folhas** *à quádrica cuja equação reduzida é*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad ou \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad ou \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Exercício 3.12 Considere a quádrica de equação $\frac{x^2}{3} - 2y^2 - 2z^2 = 1$. Identifique a quádrica e faça o seu esboço.

Resolução *A quádrica pode ser escrita na seguinte forma canónica* $\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$ *(*$a = \sqrt{3}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$*), que é a equação reduzida de um hiperbolóide de duas folhas.*

Na Figura 3.17 apresenta-se o esboço da quádrica.

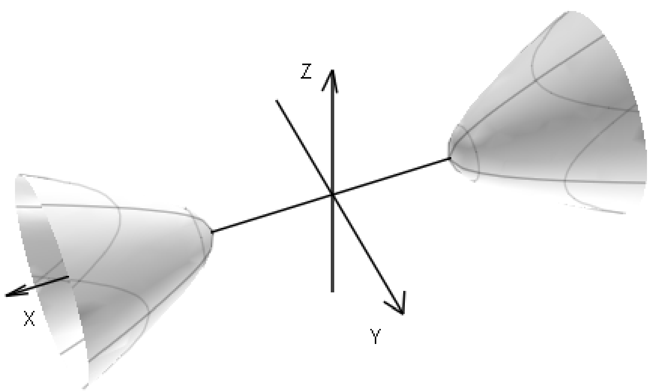


Figura 3.17: Esboço da quádrica $\frac{x^2}{3} - 2y^2 - 2z^2 = 1$.

Observação Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ e o hiperbolóide de duas folhas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Então,

(a) traços:
- no plano XOY — a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.
- No plano XOZ — a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$.
- No plano YOZ — não existe.

(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

(c) Superfície de revolução se $b = c$, em que a geratriz é a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e o eixo é o eixo coordenado OX.

Definição 3.16

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. *Então, chama-se* **cone** *à quádrica cuja equação reduzida é*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad ou \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad ou \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

♠

Exercício 3.13 Considere a quádrica de equação $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Identifique a quádrica e faça o seu esboço.

Resolução *A quádrica pode ser escrita na seguinte forma canónica* $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1^2} - \frac{z^2}{1^2} = 0$ *(com* $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$*), que é a equação reduzida de um cone.*

Na Figura 3.18 apresenta-se o esboço da quádrica.

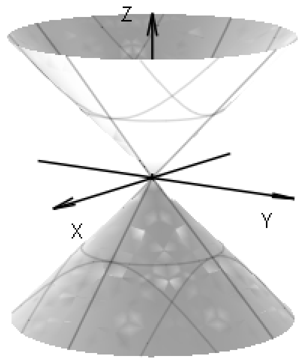


Figura 3.18: Esboço da quádrica $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Observação Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ e o cone $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Então,

(a) traços:
- no plano XOY — o ponto $(0, 0, 0)$.
- No plano XOZ — o par de retas $\frac{z}{c} = \pm\frac{x}{a}$, $y = 0$.
- No plano YOZ — o par de retas $\frac{z}{c} = \pm\frac{y}{b}$, $x = 0$.

(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

(c) Superfície de revolução se $a = b$, em que a geratriz é a reta $\frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, $x = 0$ e o eixo é o eixo coordenado OZ.

Definição 3.17

Sejam $a, b, c, \rho \in \mathbb{R}^+$. *Então, chama-se* **cilindro elítico** *à quádrica cuja equação reduzida é*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \neq b, \quad ou \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a \neq c,$$

$$ou \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, b \neq c,$$

e **cilindro circular** *à quádrica cuja equação reduzida é*

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad ou \quad x^2 + z^2 = \rho^2 \quad ou \quad y^2 + z^2 = \rho^2.$$

Exercício 3.14 Considere a quádrica de equação $x^2 + 2y^2 = 1$. Identifique a quádrica e faça o seu esboço.

Resolução *A quádrica pode ser escrita na seguinte forma canónica* $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 0$ *(com* $a = 1$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$*), que é a equação reduzida de um cilindro elítico.*

Na Figura 3.19 apresenta-se o esboço da quádrica.

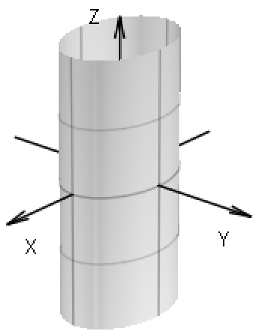


Figura 3.19: Esboço da quádrica $x^2 + 2y^2 = 1$.

Observação Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$, e o cilindro elítico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Então,

(a) traços:
- no plano XOY — a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.
- No plano XOZ — o par de retas $x = \pm a$, $y = 0$.
- No plano YOZ — o par de retas $y = \pm b$, $x = 0$.

(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

(c) Superfície cilíndrica reta, em que a diretriz é a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e a geratriz é paralela ao eixo coordenado OZ.

Definição 3.18

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. *Então, chama-se* **cilindro hiperbólico** *à quádrica cuja equação reduzida é*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ou \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ou \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad ou$$
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad ou \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad ou \quad -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Exercício 3.15 Considere a quádrica de equação $x^2 - 4y^2 = 1$. Identifique a quádrica e faça o seu esboço.

Resolução *A quádrica pode ser escrita na seguinte forma canónica* $\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$ *(com* $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$*), que é a equação reduzida de um cilindro hiperbólico.*

Na Figura 3.20 apresenta-se o esboço da quádrica.

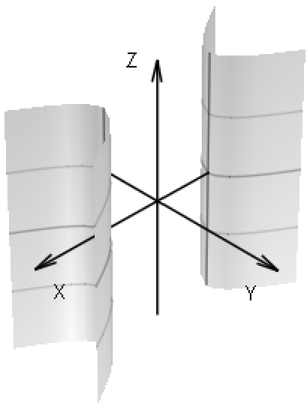


Figura 3.20: Esboço da quádrica $x^2 - 4y^2 = 1$.

Observação Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ e o cilindro hiperbólico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Então,

(a) traços:
- no plano XOY — a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.
- No plano XOZ — o par de retas $x = \pm a$, $y = 0$.
- No plano YOZ — não existe.

(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

(c) Superfície cilíndrica, em que a diretriz é a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e a geratriz é paralela ao eixo coordenado OZ.

Definição 3.19

Sejam $a, b, c, \rho \in \mathbb{R}^+$ *e* $p, q, r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$*. Então, chama-se* **parabolóide elítico** *à quádrica cuja equação reduzida é*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz, a \neq b, \quad ou \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2qy, a \neq c,$$
$$ou \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2rx, b \neq c,$$

e **parabolóide circular** *à quádrica cuja equação reduzida é*

$$x^2 + y^2 = 2p\rho^2 z \quad ou \quad x^2 + z^2 = 2q\rho^2 y \quad ou \quad y^2 + z^2 = 2r\rho^2 x.$$

♠

Exercício 3.16 Considere a quádrica de equação $x^2 + y^2 = z$. Identifique a quádrica e faça o seu esboço.

Resolução *A quádrica pode ser escrita na seguinte forma canónica* $x^2 + y^2 = 2\frac{1}{2}z$ *(com* $\rho = 1$, $p = \frac{1}{2}$*), que é a equação reduzida de um parabolóide circular.*

Na Figura 3.21 apresenta-se o esboço da quádrica.

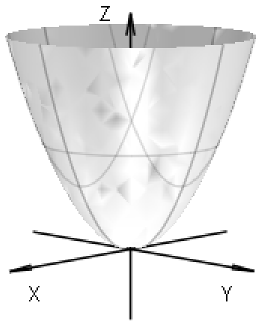


Figura 3.21: Esboço da quádrica $x^2 + y^2 = z$.

Observação Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e o parabolóide elítico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — o ponto $(0, 0, 0)$.
- No plano XOZ — a parábola $\frac{x^2}{a^2} = 2pz$, $y = 0$.
- No plano YOZ — a parábola $\frac{y^2}{b^2} = 2pz$, $x = 0$.

(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados XOZ e YOZ e ao eixo coordenado OZ.

(c) Superfície de revolução se $a = b$, em que a geratriz é a parábola $\frac{y^2}{b^2} = 2pz$ e o eixo é o eixo coordenado OZ.

Definição 3.20

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ *e* $p, q, r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. *Então, chama-se* **parabolóide hiperbólico** *à quádrica cuja equação reduzida é*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2qy \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2rx.$$

♠

Exercício 3.17 Considere a quádrica de equação $x^2 - y^2 = z$. Identifique a quádrica e faça o seu esboço.

Resolução *A quádrica pode ser escrita na seguinte forma canónica* $\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{1^2} = 2\frac{1}{2}z$ *(com* $a = 1$, $b = 1$, $p = \frac{1}{2}$*), que é a equação reduzida de um parabolóide hiperbólico.*

Na Figura 3.22 apresenta-se o esboço da quádrica.

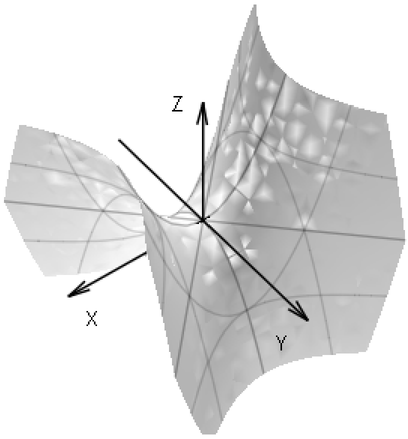


Figura 3.22: Esboço da quádrica $x^2 - y^2 = z$.

Observação Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e o parabolóide hiperbólico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — o par de retas $\frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b}$, $z = 0$.
- No plano XOZ — a parábola $\frac{x^2}{a^2} = 2pz$, $y = 0$.
- No plano YOZ — a parábola $-\frac{y^2}{b^2} = 2pz$, $x = 0$.

(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados XOZ e YOZ e ao eixo coordenado OZ.

(c) Nunca é uma superfície de revolução.

Definição 3.21

Sejam $p, q, r, s, m, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então, chama-se **cilindro parabólico** *à quádrica cuja equação reduzida é*

$$x^2 = 2py \quad ou \quad y^2 = 2qx \quad ou \quad x^2 = 2rz \quad ou$$
$$z^2 = 2sx \quad ou \quad y^2 = 2mz \quad ou \quad z^2 = 2ny.$$

♠

Exercício 3.18 Considere a quádrica de equação $4x^2 = y$. Identifique a quádrica e faça o seu esboço.

Resolução *A quádrica pode ser escrita na seguinte forma canónica $x^2 = 2\frac{1}{8}y$ (com $p = \frac{1}{8}$), que é a equação reduzida de um cilindro parabólico.*

Na Figura 3.23 apresenta-se o esboço da quádrica.

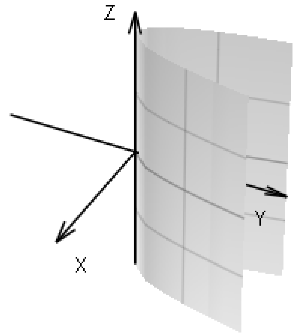


Figura 3.23: Esboço da quádrica $4x^2 = y$.

Observação Sejam $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e o cilindro parabólico $x^2 = 2py$. Então,

(a) traços:
- no plano XOY — a parábola $x^2 = 2py$, $z = 0$.
- No plano XOZ — a reta $x = 0$, $y = 0$.
- No plano YOZ — a reta $y = 0$, $x = 0$.

(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados XOY e YOZ e ao eixo coordenado OY.

(c) Superfície cilíndrica, em que a diretriz é a parábola $x^2 = 2py$ e a geratriz é paralela ao eixo coordenado OZ.

Definição 3.22

Uma quádrica diz-se **quádrica degenerada** *se não há pontos de* $\mathbb{R}^3$ *que satisfaçam a sua equação, ou se, existindo, eles definem dois planos, um plano, uma reta ou apenas um ponto de* $\mathbb{R}^3$.

Observação Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Então, as seguintes equações definem quádricas degeneradas:

(a) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

(b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$.

(c) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $-\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

(d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$, $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$.

(e) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

(f) $x^2 = a^2$, $y^2 = b^2$, $z^2 = c^2$.

(g) $x^2 = -a^2$, $y^2 = -b^2$, $z^2 = -c^2$.

(h) $x^2 = 0$, $y^2 = 0$, $z^2 = 0$.

Na observação que se segue, apresenta-se um resumo das quádricas não degeneradas na forma reduzida, ou seja, quádricas que se podem escrever como

$$\lambda_1 x^{\alpha_1} + \lambda_2 y^{\alpha_2} + \lambda_3 z^{\alpha_3} = d,$$

com

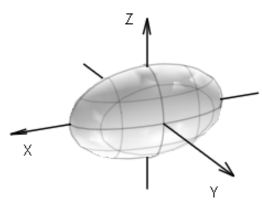
- $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k \in \mathbb{R}$,
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{1, 2\} \wedge (\alpha_1 = 2 \vee \alpha_2 = 2 \vee \alpha_3 = 2)$ e
- $d \in \{0, 1\}$.

Observação Resumo das quádricas não degeneradas:

(a) $d = 1$

(a.i) $\alpha_i = 2, \alpha_j = 2, \alpha_k = 2, i, j, k \in \{1, 2, 3\}, i \neq j \neq k \neq i,$

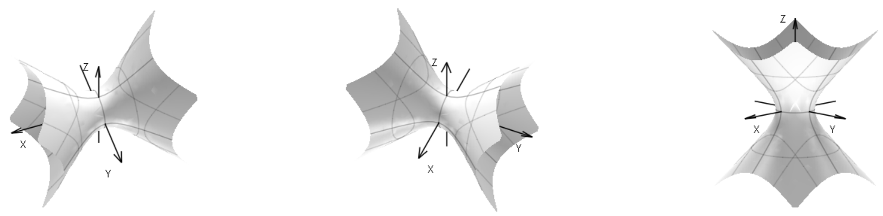
(a.i.1) $\lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k > 0$: elipsóide ou esfera.



$$x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 1$$

Figura 3.24: Elipsóide.

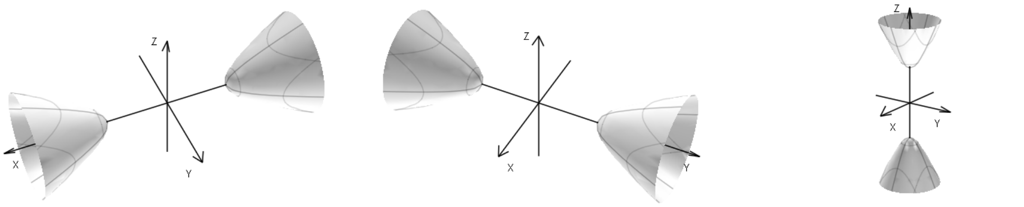
(a.i.2) $\lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k < 0$: hiperbolóide de uma folha.



$-x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $\quad$ $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ $\quad$ $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

Figura 3.25: Hiperbolóide de uma folha.

(a.i.3) $\lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k < 0$: hiperbolóide de duas folhas.

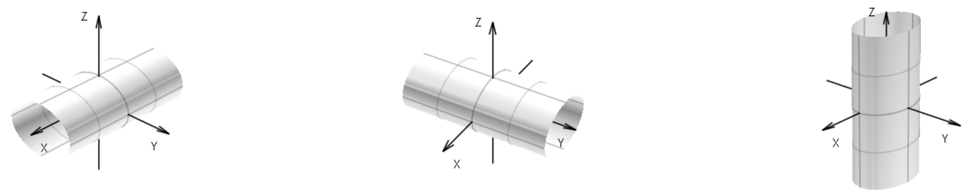


$\frac{x^2}{3} - 2y^2 - 2z^2 = 1$ $\qquad$ $-2x^2 + \frac{y^2}{3} - 2z^2 = 1$ $\qquad$ $-2x^2 - 2y^2 + \frac{z^2}{3} = 1$

Figura 3.26: Hiperbolóide de duas folhas.

(a.ii) $\alpha_i = 2, \alpha_j = 2, i, j, k \in \{1, 2, 3\}, i \neq j \neq k \neq i$,

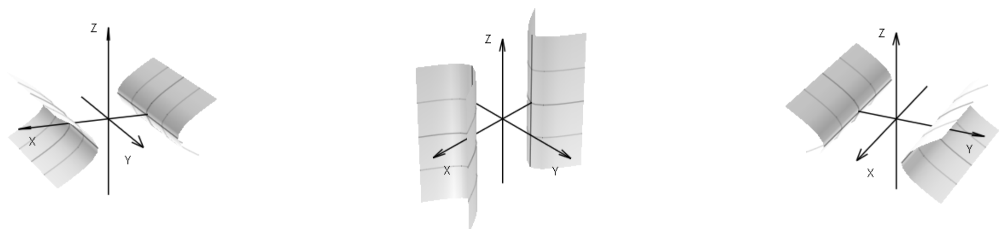
(a.ii.1) $\lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k = 0$: cilindro elítico ou circular.



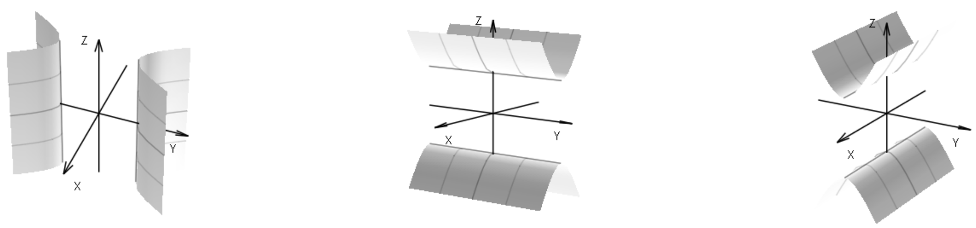
$y^2 + 2z^2 = 1$ $\qquad$ $x^2 + 2z^2 = 1$ $\qquad$ $x^2 + 2y^2 = 1$

Figura 3.27: Cilindro.

(a.ii.2) $\lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k = 0$: cilindro hiperbólico.



$x^2 - 4z^2 = 1$ $\qquad$ $x^2 - 4y^2 = 1$ $\qquad$ $y^2 - 4z^2 = 1$

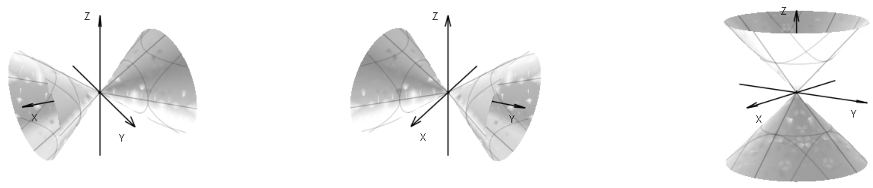


$y^2 - 4x^2 = 1$ $\qquad$ $z^2 - 4x^2 = 1$ $\qquad$ $z^2 - 4y^2 = 1$

Figura 3.28: Cilindro hiperbólico.

(b) $d = 0$

(b.i) $\alpha_i = 2, \alpha_j = 2, \alpha_k = 2, \lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k < 0, i, j, k \in \{1, 2, 3\}, i \neq j \neq k \neq i$: cone.

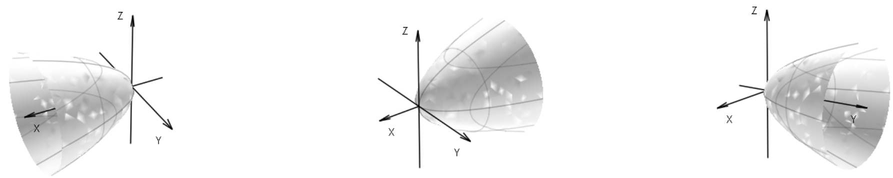


$x^2 - y^2 - 2z^2 = 0$ $\quad -x^2 + y^2 - z^2 = 0$ $\quad -x^2 - y^2 + 2z^2 = 0$

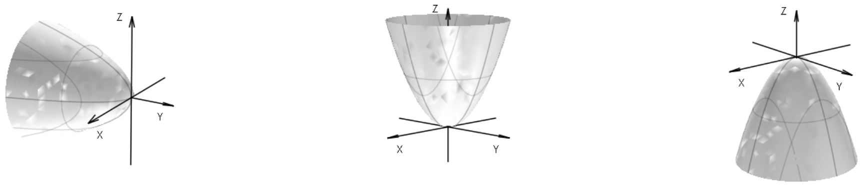
Figura 3.29: Cone.

(b.ii) $\alpha_i = 2, \alpha_j = 2, \alpha_k = 1, i, j, k \in \{1, 2, 3\}, i \neq j \neq k \neq i$,

(b.ii.1) $\lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k \neq 0$: parabolóide elítico ou circular.



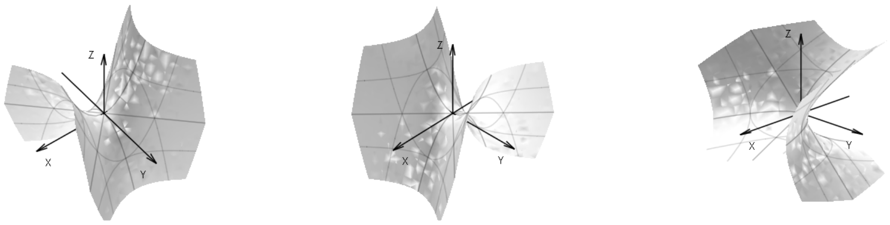
$y^2 + z^2 - x = 0$ $\quad y^2 + z^2 + x = 0$ $\quad x^2 + z^2 - y = 0$



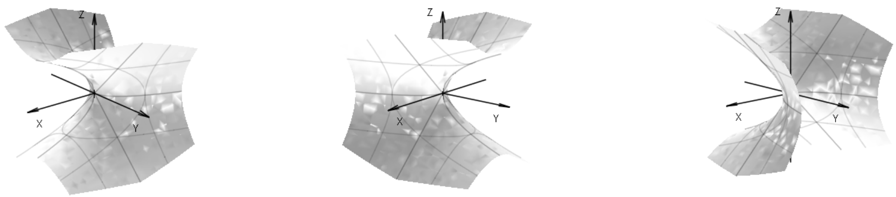
$x^2 + z^2 + y = 0$ $\quad x^2 + y^2 - z = 0$ $\quad x^2 + y^2 + z = 0$

Figura 3.30: Parabolóide circular.

(b.ii.2) $\lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k \neq 0$: parabolóide hiperbólico.



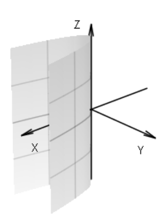
$x^2 - y^2 - z = 0$ $\quad$ $x^2 - y^2 + z = 0$ $\quad$ $y^2 - z^2 - x = 0$



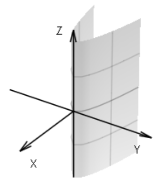
$y^2 - z^2 + x = 0$ $\quad$ $z^2 - x^2 - y = 0$ $\quad$ $z^2 - x^2 + y = 0$

Figura 3.31: Parabolóide hiperbólico.

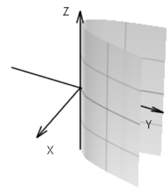
(b.iii) $\alpha_i = 2, \alpha_j = 1, \lambda_k = 0, i, j, k \in \{1, 2, 3\}, i \neq j \neq k \neq i$: cilindro parabólico.



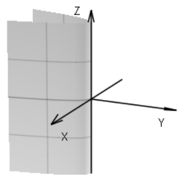
$4y^2 - x = 0$



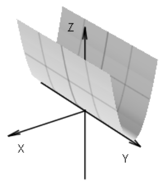
$4y^2 + x = 0$



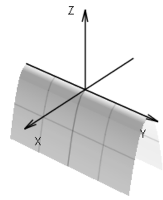
$4x^2 - y = 0$



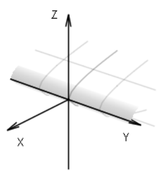
$4x^2 = -y$



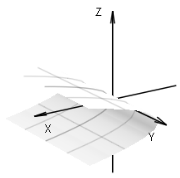
$4x^2 = z$



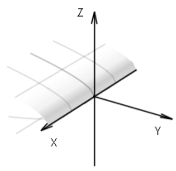
$4x^2 = -z$



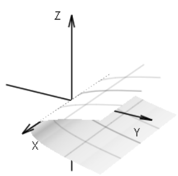
$4z^2 + x = 0$



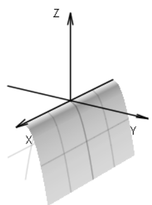
$4z^2 - x = 0$



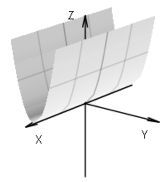
$4z^2 + y = 0$



$4z^2 - y = 0$



$4y^2 + z = 0$



$4y^2 - z = 0$

Figura 3.32: Cilindro parabólico.

Observação A quádrica

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

pode ser escrita na forma matricial $X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0$, onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, pois

$$\begin{aligned} X^{\mathrm{T}}AX &= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z \end{bmatrix} \\ &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BX &= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= b_1x + b_2y + b_3z. \end{aligned}$$

Definição 3.23

Seja a quádrica

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0.$$

Chama-se **forma quadrática** *associada à quádrica ao termo*

$$X^{\mathrm{T}}AX = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz.$$

♠

Exercício 3.19 Escreva a quádrica $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 5yz + 7x + 2z = 3$ na forma matricial.

Resolução *A forma matricial da quádrica é $X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $c = -3$.*

Teorema 3.6

Através de mudanças de coordenadas correspondentes a rotações e/ou translações, é sempre possível transformar uma quádrica numa das formas reduzidas.

♡

Observação Caso 1 — translação de eixos:

As quádricas que não estão na forma reduzida e sem termo cruzado podem ser transformadas na forma reduzida através de uma translação de eixos.

(a) Quando os termos em x^2 e em x têm coeficientes não-nulos ($a_{11} \neq 0 \wedge b_1 \neq 0$), aplica-se uma translação do eixo x.

(b) Quando os termos em y^2 e em y têm coeficientes não-nulos ($a_{22} \neq 0 \wedge b_2 \neq 0$), aplica-se uma translação do eixo y.

(c) Quando os termos em z^2 e em z têm coeficientes não-nulos ($a_{33} \neq 0 \wedge b_3 \neq 0$), aplica-se uma translação do eixo z.

Dependendo dos termos não-nulos da quádrica, pode ter que se considerar uma combinação das translações de eixos. Os novos eixos, nos quais a quádrica já está na forma reduzida, podem ser determinados completando os quadrados na expressão da quádrica.

Exercício 3.20 Considere a quádrica $4x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 16x - 216y + 304 = 0$. Determine a mudança de coordenadas de modo que a quádrica resultante esteja na forma reduzida e classifique a quádrica.

Resolução *Por um lado, tem-se*

$$4x^2 - 16x = 4(x^2 - 4x + 4) - 16 = 4(x-2)^2 - 16,$$
$$36y^2 - 216y = 36(y^2 - 6y + 9) - 324 = 36(y-3)^2 - 324.$$

Substituindo as expressões anteriores na equação da quádrica, obtém-se

$$\begin{aligned}
&4x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 16x - 216y + 304 = 0\\
&\quad \Leftrightarrow 4(x-2)^2 - 16 + 36(y-3)^2 - 9z^2 - 324 + 304 = 0\\
&\quad \Leftrightarrow 4(x-2)^2 + 36(y-3)^2 - 9z^2 = 36\\
&\quad \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{9} + (y-3)^2 - \frac{z^2}{4} = 1.
\end{aligned}$$

A mudança de variáveis $x' = x - 2$, $y' = y - 3$ e $z' = z$ transforma a quádrica na seguinte forma reduzida

$$\frac{(x')^2}{9} + (y')^2 - \frac{(z')^2}{4} = 1,$$

que é a equação de um hiperbolóide de uma folha.

Observação Caso 2 — rotação de eixos:

Como no caso das cónicas, as quádricas que não estão na forma reduzida e com termo(s) cruzado(s) podem ser transformadas na forma reduzida através de uma rotação dos eixos.

Quando o coeficiente de pelo menos um dos termos cruzados é não-nulo ($a_{12} \neq 0 \vee a_{13} \neq 0 \vee a_{23} \neq 0$), então é necessário eliminar o(s) termo(s) cruzado(s). Os termos cruzados podem ser eliminados através da diagonalização da matriz simétrica A, aplicando o Teorema 3.4 Esse processo de diagonalização está relacionado com uma transformação dos eixos que corresponde geometricamente a uma rotação.

Teorema 3.7

Seja a quádrica

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0.$$

Então, os eixos podem ser rodados tal que a equação da quádrica no novo sistema de coordenadas x', y', z' tem a forma

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + b_1'x' + b_2'y' + b_3'z' + c = 0,$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são os valores próprios de $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$. A rotação é obtida através da substituição

$$X = PX',$$

onde P é uma matriz ortogonal que diagonaliza A e $\det(P) = 1$. ♡

Observação Seja P uma matriz ortogonal que diagonaliza A com $\det(P) = 1$. Então, substituindo $X = PX'$ na forma quadrática $X^{\mathrm{T}}AX$ e no termo BX da forma matricial da quádrica, obtém-se:

$$\begin{aligned} X^{\mathrm{T}}AX &= (PX')^{\mathrm{T}}A(PX') \\ &= (X')^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}APX' \\ &= (X')^{\mathrm{T}}DX' \\ &= \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2, \end{aligned}$$

$$BX = BPX' = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = b_1'x' + b_2'y' + b_3'z',$$

onde $b_1' = b_1p_{11} + b_2p_{21} + b_3p_{31}$, $b_2' = b_1p_{12} + b_2p_{22} + b_3p_{32}$ e $b_3' = b_1p_{13} + b_2p_{23} + b_3p_{33}$.

Algoritmo 3.2

Algoritmo para construir uma matriz que diagonaliza ortogonalmente uma matriz simétrica:

(1) determinar o espetro da matriz;

(2) determinar uma base para cada espaço próprio da matriz;

(3) construir uma base ortonormada para cada espaço próprio da matriz;

(4) construir a matriz em que cada coluna é um vetor da base obtida em (3) — esta é uma matriz que diagonaliza ortogonalmente a matriz dada. ♣

Observação

- A base ortonormada em (3) pode ser obtida através do Algoritmo de ortogonalização de Gram-Schmidt apresentado a seguir (cf. Teorema 1.9 do Capítulo 1).

- Se $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tiver três valores próprios distintos, i.e., se os valores próprios de A forem todos simples, então basta normalizar os vetores próprios correspondentes.

Algoritmo 3.3. (Algoritmo de ortogonalização de Gram-Schmidt)

Algoritmo de ortogonalização de Gram-Schmidt para a construção de uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$:

Seja $\{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$.

Efetuando os cálculos:

(a) $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$;

(b) $v_2' = u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1$, $v_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|}$;

(c) $v_3' = u_3 - \langle u_3, v_1\rangle v_1 - \langle u_3, v_2\rangle v_2$, $v_3 = \frac{v_3'}{\|v_3'\|}$;

obtém-se uma base ortonormada $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. ♣

Exercício 3.21 Determine uma base ortonormada a partir da base $\{(-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Resolução *Aplicando o algoritmo de Gram-Schmidt, vem*

(a) $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$;

(b)

$$\begin{aligned}
v_2' &= u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1 \\
&= (-1,0,1) - \langle (-1,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \\
&= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right), \\
v_2 &= \frac{2}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2);
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
v_3' &= u_3 - \langle u_3, v_1\rangle v_1 - \langle u_3, v_2\rangle v_2 \\
&= (1,1,1) - \langle (1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \\
&\quad - \langle (1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2) \\
&= (1,1,1), \\
v_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).
\end{aligned}$$

Então, $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\}$ *é uma base ortonormada de* $\mathbb{R}^3$.

Definição 3.24

(a) A **matriz de rotação em torno do eixo** x**,** $R_x(\theta)$*, que representa a rotação de um ângulo* $\theta \in (0, \pi)$ *no sentido anti-horário em torno dos eixo* x*, é definida por*

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(b) A **matriz de rotação em torno do eixo** y**,** $R_y(\theta)$*, que representa a rotação de um ângulo* $\theta \in (0, \pi)$ *no sentido anti-horário em torno dos eixo* y*, é definida por*

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(c) A **matriz de rotação em torno do eixo** z**,** $R_z(\theta)$*, que representa a rotação de um ângulo* $\theta \in (0, \pi)$ *no sentido anti-horário em torno dos eixo* z*, é definida por*

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

♠

Observação

(a) As matrizes de rotação de um ângulo θ no sentido horário em torno de cada um dos eixos são as transpostas das matrizes anteriores: $R_x^{\mathrm{T}}(\theta)$, $R_y^{\mathrm{T}}(\theta)$, $R_z^{\mathrm{T}}(\theta)$, que podem também ser obtidas substituindo θ por $-\theta$ nas matrizes anteriores, isto é:

$$R_x(-\theta) = R_x^{\mathrm{T}}(\theta),\; R_y(-\theta) = R_y^{\mathrm{T}}(\theta),\; R_z(-\theta) = R_z^{\mathrm{T}}(\theta).$$

(b) As matrizes de rotação em $\mathbb{R}^3$ são matrizes ortogonais com

$$\det(R_x(\theta)) = \det(R_y(\theta)) = \det(R_z(\theta)) = 1,$$
$$\det(R_x^{\mathrm{T}}(\theta)) = \det(R_y^{\mathrm{T}}(\theta)) = \det(R_z^{\mathrm{T}}(\theta)) = 1.$$

(c) Qualquer rotação em torno da origem em $\mathbb{R}^3$ pode ser dada como composição de rotações em torno dos três eixos e a matriz de rotação correspondente é o produto das matrizes de rotação em torno dos eixos.

Observação

(a) A matriz P do Teorema 3.7 é uma matriz de rotação.

(b) Se a matriz P construída com o Algoritmo 3.2 é tal que $\det(P) = -1$, então basta trocar duas das colunas de P para se obter a matriz de rotação com $\det(P) = 1$.

(c) Geometricamente, a existência de termo(s) cruzado(s) na equação da quádrica indica que o seu gráfico foi rodado em torno da origem. Se a quádrica só tiver um termo cruzado, então basta uma rotação em torno de um dos eixos para eliminar o termo cruzada, por exemplo se o coeficiente do termo cruzado xy é não nulo, então é necessária uma rotação em torno do eixo z para o eliminar e para esse fim usa-se como matriz P uma matriz $R_z(\theta)$ com um dado ângulo θ. Se a quádrica tiver dois ou três termos cruzados, então a matriz de rotação P pode ser identificada como produto de duas ou, respetivamente, três matrizes de rotação da Definição 3.24.

Exercício 3.22 Considere a quádrica $2xy + z = 0$. Determine a mudança de coordenadas de modo que a quádrica resultante esteja na forma reduzida e classifique a quádrica.

Resolução *A quádrica pode ser escrita na seguinte forma matricial:*

$$2xy + z = 0 \Leftrightarrow X^{\mathrm{T}}AX + BX = 0,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculando os valores próprios de A, obtém-se

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = -1 \vee \lambda = 0 \vee \lambda = 1 \\ &\Rightarrow \lambda(A) = \{-1, 0, 1\}. \end{aligned}$$

Para determinar o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = -1$, resolve-se o sistema

$$(A + I_3)x_1 = \underline{0},$$

ou seja, $A_1x_1 = b_1$, com $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix}$ e $b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, vindo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow{\ell_2 \leftrightarrow \ell_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A_1) = \operatorname{car}(A_1|b_1) = 2 < n = 3$ (n é o número de incógnitas), $A_1x_1 = b_1$ é um sistema possível e indeterminado (como tinha que ser) equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \qquad = 0 \\ \qquad\qquad x_{13} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = -\alpha \\ x_{12} = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_{13} = 0. \end{cases}$$

Assim, tem-se:

$$E_{-1} = \{(-\alpha, \alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

pelo que, por exemplo, $p_1 = (-1, 1, 0)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = -1$. Como $\|p_1\| = \sqrt{2}$, então normalizando p_1 obtém-se a primeira coluna da matriz P: $P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Para determinar o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_2 = 0$, resolve-se os sistema:

$$Ax_2 = \underline{0},$$

ou seja, $Ax_2 = b_2$*, com* $A = \left[\begin{smallmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right]$, $x_2 = \left[\begin{smallmatrix} x_{21}\\ x_{22}\\ x_{23} \end{smallmatrix}\right]$ *e* $b_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{smallmatrix}\right]$*, vindo*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftrightarrow \ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right].$$

Como $\text{car}(A) = \text{car}(A|b_2) = 2 < n = 3$ *(*n *é o número de incógnitas),* $Ax_2 = b_2$ *é um sistema possível e indetermiando (como tinha que ser) equivalente ao sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} x_{21} &= 0\\ x_{22} &= 0\\ x_{23} &= \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Assim, tem-se:

$$E_0 = \{(0,0,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

pelo que, por exemplo, $p_2 = (0,0,1)$ *é um vetor próprio associado ao valor próprio* $\lambda_2 = 0$ *com* $\|p_2\| = 1$*, assim* $P_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Para determinar o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_3 = 1$*, resolve-se o sistema:*

$$(A - I_3)x_3 = \underline{0},$$

ou seja, $A_3x_3 = b_3$*, com* $A_3 = \left[\begin{smallmatrix} -1&1&0\\ 1&-1&0\\ 0&0&-1 \end{smallmatrix}\right]$, $x_3 = \left[\begin{smallmatrix} x_{31}\\ x_{32}\\ x_{33} \end{smallmatrix}\right]$ *e* $b_3 = \left[\begin{smallmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{smallmatrix}\right]$*, vindo*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1&1&0&0\\ 1&-1&0&0\\ 0&0&-1&0 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&-1&0 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftrightarrow \ell_3}{\longleftrightarrow}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1&1&0&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right].$$

Como $\text{car}(A_3) = \text{car}(A_3|b_3) = 2 < n = 3$ *(*n *é o número de incógnitas),* $A_3x_3 = b_3$ *é um sistema possível e indeterminado (como tinha que ser) equivalente ao sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} -x_{31} + x_{32} \qquad = 0\\ \qquad\qquad - x_{33} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{31} = \alpha\\ x_{32} = \alpha \in \mathbb{R}\\ x_{33} = 0. \end{cases}$$

Assim, tem-se:

$$E_1 = \{(\alpha,\alpha,0) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

pelo que, por exemplo, $p_3 = (1,1,0)$ *é um vetor próprio associado ao valor próprio* $\lambda_3 = 1$*. Como* $\|p_3\| = \sqrt{2}$*, então normalizando* p_3 *obtém-se a terceira coluna da matriz* P*:* $P_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{smallmatrix} 1\\ 1\\ 0 \end{smallmatrix}\right]$.

Para determinar uma matriz ortogonal que diagonaliza A *com* $\det(P) = 1$*, é necessário trocar as colunas de* $P = [P_1\ P_2\ P_3]$*. Considere-se a matriz* $P = \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right]$*. Então,* P *é* *uma matriz ortogonal P que diagonaliza A e $\det(P) = 1$.*

Verificação (Exercício.): $P^{\mathrm{T}}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Usando a mudança de variável $X = PX'$, e sabendo que $P^{\mathrm{T}}AP = D = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, então

$$X^{\mathrm{T}}AX + B^{\mathrm{T}}X = 0 \Leftrightarrow (X')^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}AP)X' + B^{\mathrm{T}}PX' = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' & -y' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x')^2 - (y')^2 + z' = 0,$$

que é a equação reduzida de um parabolóide hiperbólico.

Exercício 3.23 Determine o ângulo θ associado à matriz de rotação usada para transformar a quádrica na forma reduzida no Exercício 3.22.

Resolução *O ângulo θ correspondente à rotação usada no exercício anterior pode ser determinado a partir da matriz P:*

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_z(\theta),$$

logo

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}(= 45^\circ).$$

Observação Caso 3 — rotação e translação de eixos:

As quádricas que não estão na forma reduzida com termo(s) cruzado(s) e com coeficientes de x^2 e x e/ou coeficientes de y^2 e y e/ou coeficientes de z^2 e z não-nulos podem ser transformadas na forma reduzida aplicando primeiro uma rotação de eixos (ver caso 2). No novo sistema de eixos rodados x', y' z' a quádrica já não tem termo(s) cruzado(s):

$$X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0 \Leftrightarrow (PX')^{\mathrm{T}}APX' + BPX' + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + \left[\begin{smallmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{smallmatrix}\right] + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + b_1'x' + b_2'y' + b_3'z' + c = 0,$$

onde

$$b_1' = b_1p_{11} + b_2p_{21} + b_3p_{31},$$

$$b_2' = b_1p_{12} + b_2p_{22} + b_3p_{32},$$

$$b'_3 = b_1 p_{13} + b_2 p_{23} + b_3 p_{33}.$$

De seguida aplica-se uma translação de eixos (ver caso 1). No novo sistema de eixos x'', y'' e z'', que é obtido completando os quadrados na expressão da quádrica em x', y' e z', a quádrica ficará na forma reduzida.

Exercício 3.24 Considere a quádrica $x^2 - y^2 - z^2 + 2\sqrt{3}xy - 6y - 9 = 0$. Determine a mudança de coordenadas de modo que a quádrica resultante esteja na forma reduzida e classifique a quádrica.

Resolução *A quádrica pode ser escrita na seguinte forma matricial:* $x^2 - y^2 - z^2 + 2\sqrt{3}xy - 6y - 9 = 0 \Leftrightarrow X^{\mathrm{T}}AX + BX - 9 = 0$*, onde* $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}$*. A seguir determina-se os valores próprios da matriz* A*:*

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow (-1-\lambda)(\lambda^2 - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = -2 \vee \lambda = -1 \vee \lambda = 2$$
$$\Rightarrow \lambda(A) = \{-2, -1, 2\}.$$

Para determinar o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = -2$*, tem que se resolver o seguinte sistema:*

$$(A + 2I_3)x_1 = \underline{0},$$

ou seja, $A_1 x_1 = b_1$*, com* $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix}$ *e* $b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$*, vindo*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A_1) = \operatorname{car}(A_1|b_1) = 2 < n = 3$ *(*n *é o número de incógnitas),* $A_1 x_1 = b_1$ *é um sistema possível e indeterminado (como tinha que ser) equivalente ao sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} 3x_{11} + \sqrt{3}x_{12} & = 0 \\ & x_{13} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha \\ x_{12} = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_{13} = 0. \end{cases}$$

Assim, tem-se:

$$E_{-2} = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha, \alpha, 0 \right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

pelo que, por exemplo, $p_1 = (-\sqrt{3}, 3, 0)$ *é um vetor próprio associado ao valor próprio* $\lambda_1 = -2$*. Como* $\|p_1\| = 2\sqrt{3}$*, então* $P_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Para determinar o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_2 = -1$, tem que se resolver o seguinte sistema:

$$(A + I_3)x_2 = \underline{0},$$

ou seja, $A_2x_2 = b_2$*, com* $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix}$ *e* $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$*, vindo*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|b_2) = 2 < n = 3$ *(n é o número de incógnitas),* $A_2x_2 = b_2$ *é um sistema possível e indeterminado (como tinha que ser) equivalente ao sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} 2x_{21} + \sqrt{3}x_{22} = 0 \\ \quad - \frac{3}{2}x_{22} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{21} = 0 \\ x_{22} = 0 \\ x_{23} = \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Assim, tem-se:

$$E_{-1} = \{(0, 0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

pelo que, por exemplo, $p_2 = (0, 0, 1)$ *é um vetor próprio associado ao valor próprio* $\lambda_2 = -1$ *com* $\|p_2\| = 1$*, assim* $P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Para determinar o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_3 = 2$, tem que se resolver o seguinte sistema: $(A - 2I_3)x_3 = \underline{0}$*, ou seja,* $A_3x_3 = b_3$*, com* $A_3 = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix}$ *e* $b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$*, vindo*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \sqrt{3}\ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftrightarrow \ell_3}{\longleftrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A_3) = \operatorname{car}(A_3|b_3) = 2 < n = 3$ *(n é o número de incógnitas),* $A_3x_3 = b_3$ *é um sistema possível e indeterminado (como tinha que ser) equivalente ao sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} -x_{31} + \sqrt{3}x_{32} \qquad = 0 \\ \qquad\qquad - 3x_{33} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{31} = \sqrt{3}\alpha \\ x_{32} = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_{33} = 0. \end{cases}$$

Assim, tem-se:

$$E_2 = \left\{ \left(\sqrt{3}\alpha, \alpha, 0\right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

pelo que, por exemplo, $p_3 = (\sqrt{3}, 1, 0)$ *é um vetor próprio associado ao valor próprio* $\lambda_3 = 2$*. Como* $\|p_3\| = 2$*, então* $P_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Então, considerando $P = [P_3\ P_1\ P_2]$*, obtém-se a seguinte matriz ortogonal* P *que diagonaliza* A *com* $\det(P) = 1$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz diagonal fica definida da forma

$$P^{\mathrm{T}}AP = D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Usando a mudança de variável $X = PX'$*, e sabendo que* $P^{\mathrm{T}}AP = D = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$*, então,*

$$\begin{aligned} & X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0 \Leftrightarrow (X')^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}AP)X' + BPX' + c = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - 9 = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x' & -2y' & -z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -3\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - 9 = 0 \\ & \Leftrightarrow 2(x')^2 - 2(y')^2 - (z')^2 - 3x' - 3\sqrt{3}y' - 9 = 0. \end{aligned}$$

Completando os quadrados na expressão anterior, vem

$$\begin{aligned} & 2(x')^2 - 2(y')^2 - (z')^2 - 3x' - 3\sqrt{3}y' - 9 = 0 \\ & \Leftrightarrow 2\left((x')^2 - \frac{3}{2}x' + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}\right) - 2\left((y')^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}y' + \frac{27}{16} - \frac{27}{16}\right) - (z')^2 = 9 \\ & \Leftrightarrow 2\left(x' - \frac{3}{4}\right)^2 - 2\left(y' + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 - (z')^2 + \frac{27}{8} - \frac{9}{8} - 9 = 0. \end{aligned}$$

Usando agora mudança de variável $x'' = x' - \frac{3}{4}$, $y'' = y' + \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $z'' = z'$*, obtém-se a seguinte equação*

$$2(x'')^2 - 2(y'')^2 - (z'')^2 = \frac{27}{4} \Leftrightarrow \frac{(x'')^2}{27/8} - \frac{(y'')^2}{27/8} - \frac{(z'')^2}{27/4} = 1,$$

que é a equação reduzida de um hiperbolóide de duas folhas.

Exercício 3.25 Determine o ângulo θ associado à matriz de rotação usada para eliminar o termo cruzado na quádrica do Exercício 3.24.

Resolução *O ângulo θ correspondente à rotação usada no exercício anterior pode ser determinado a partir da matriz P:*

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_z(\theta),$$

logo

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}(= 30°).$$

Exercício 3.26 Considere a quádrica $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz = 3$. Determine a mudança de coordenadas de modo que a quádrica resultante esteja na forma reduzida e classifique a quádrica.

Resolução *A quádrica pode ser escrita na seguinte forma matricial $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz = 3 \Leftrightarrow X^{\mathrm{T}}AX + c = 0$, onde $A = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right]$, $X = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right]$ e $c = -3$. Calculando os valores próprios da matriz A, obtém-se*

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = \{2, 8\},$$

onde 2 é uma valor próprio de multiplicidade 2 e 8 é um valor próprio simples.

Para determinar o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = 2$, resolve-se o sistema

$$(A - 2I_3)x_1 = \underline{0},$$

ou seja, $A_1x_1 = b_1$, com $A_1 = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, $x_1 = \left[\begin{smallmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{smallmatrix}\right]$ e $b_1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, vindo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1]{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A_1) = \operatorname{car}(A_1|b_1) = 1 < n = 3$ (n é o número de incógnitas), $A_1x_1 = b_1$ é um sistema possível e indeterminado (como tinha que ser) equivalente ao sistema de equações lineares

$$\left\{ 2x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} = 0 \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = -\alpha - \beta \\ x_{12} = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_{13} = \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Assim, tem-se:

$$E_2 = \{(-\alpha - \beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

pelo que, por exemplo, $p_1 = (-1, 1, 0)$ e $p_2 = (-1, 0, 1)$ são vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda_1 = 2$. Note que p_1 e p_2 formam uma base de E_2, mas não são ortogonais.

Para determinar uma base ortonormada de E_2 aplica-se o algoritmo de ortogonalização de Gram-Schmidt a $\{p_1, p_2\} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$:

(a)

$$v_1 = \frac{p_1}{\|p_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0);$$

(b)

$$\begin{aligned} v_2' &= p_2 - \langle p_2, v_1\rangle v_1 \\ &= (-1,0,1) - \langle (-1,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \\ &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \\ v_2 &= \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right). \end{aligned}$$

Logo, $\{v_1, v_2\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$ *é uma base de ortonormada de* E_2*.*

Para determinar o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_2 = 8$*, resolve-se o sistema*

$$(A - 8I_3)x_2 = \underline{0},$$

ou seja, $A_2x_2 = b_2$*, com* $A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$*,* $x_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix}$ *e* $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$*, vindo*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\substack{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \frac{1}{2}\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 + \frac{1}{2}\ell_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\text{car}(A_2) = \text{car}(A_2|b_2) = 2 < n = 3$ *(*n *é o número de incógnitas),* $A_2x_2 = b_2$ *é um sistema possível e indeterminado (como tinha que ser) equivalente ao sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} -4x_{21} + 2x_{22} + 2x_{23} = 0 \\ \qquad\quad - 3x_{22} + 3x_{23} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{21} = \alpha \\ x_{22} = \alpha \\ x_{23} = \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Assim, tem-se:

$$E_8 = \{(\alpha, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

pelo que, por exemplo, $p_3 = (1,1,1)$ *é um vetor próprio associado ao valor próprio* $\lambda_2 = 8$*. Como* $\|p_3\| = \sqrt{3}$*, então* $P_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$*.*

Então, uma matriz ortogonal P *que diagonaliza* A *é*

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

e $\det(P) = 1$. *Assim, tem-se*

$$P^{\mathrm{T}}AP = D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Usando a mudança de variável $X = PX'$, *vem*

$$X^{\mathrm{T}}AX + c = 0 \Leftrightarrow (X')^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}AP)X' + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x' & 2y' & 8z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2(x')^2 + 2(y')^2 + 8(z')^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x')^2}{3/2} + \frac{(y')^2}{3/2} + \frac{(z')^2}{3/8} = 1,$$

que é a equação reduzida de um elipsóide.

Observação Uma quádrica não-degenerada na forma reduzida $\lambda_1 x^{\alpha_1} + \lambda_2 y^{\alpha_2} + \lambda_3 z^{\alpha_3} = d$, onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{1, 2\} \wedge (\alpha_1 = 2 \vee \alpha_2 = 2 \vee \alpha_3 = 2)$ e $d \in \{0, 1\}$, pode ser classificada a partir dos valores próprios da matriz A da forma quadrática $X^{\mathrm{T}}AX$.

(a) Se $\det(A) \neq 0$ e $d = 1$, então a quádrica é:
   (i) um elipsóide ou uma esfera se A tiver 3 valores próprios positivos;
   (ii) um hiperbolóide de uma folha se A tiver 2 valores próprios positivos e 1 valor próprio negativo;
   (iii) um hiperbolóide de duas folha se A tiver 1 valor próprio positivo e 2 valors próprios negativos.

(b) Se $\det(A) \neq 0$ e $d = 0$, então a quádrica é um cone elítico ou circular (A tem 2 valores próprios positivos e 1 valor próprio negativo).

(c) Se $\det(A) = 0$ e $d = 1$, então a quádrica é
   (i) um cilindro elítico ou circular se A tem 1 valor próprio nulo e 2 valores próprios positivos;
   (ii) um cilindro hiperbólico se A tem 1 valor próprio nulo e 2 valores próprios de sinais contrários.

(d) Se $\det(A) = 0$ e $d = 0$, então a quádrica é
   (i) um parabolóide elítico ou circular se A tem 1 valor próprio nulo e 2 valores próprios positivos;
   (ii) um parabolóide hiperbólico se A tem 1 valor próprio nulo e 2 valores próprios de sinais contrários;
   (iii) um cilindro parabólico se A tem 2 valores próprios nulos.

Exercício 3.27 Considere a quádrica não-degenerada

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz - x + y = 0.$$

(a) Classifique a quádrica a partir dos valores próprios da matriz da forma quadrática associada.

(b) Determine a mudança de coordenadas de modo que a quádrica resultante esteja na forma reduzida e identifique a quádrica.

Resolução

(a) A cónica pode ser escrita na forma matricial $X^{\mathrm{T}}AX + BX = 0$, em que a matriz da forma quadrática $X^{\mathrm{T}}AX$ é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

A seguir determina-se os valores próprios da matriz A:

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)^3 + 1 + 1 - 3(1-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2(-\lambda + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 0 \vee \lambda = 3$$

$$\Rightarrow \lambda(A) = \{0, 3\},$$

onde $\lambda = 0$ é um valor próprio de multiplicidade 2.

Então, como A tem 2 valores próprios nulos, a quádrica é um cilindro parabólico.

(b) Para determinar a mudança de coordenadas é necessário construir a matriz P que diagonaliza A, calculando primeiro os espaços próprios associados aos valores próprios.

O espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = 0$, é obtido resolvendo o sistema

$$(A - 0I_3)x_1 = \underline{0},$$

ou seja, $Ax_1 = b_1$, com $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix}$ e $b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, vindo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1]{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|b_1) = 1 < n = 3$ (n é o número de incógnitas), $Ax_1 = b_1$ é um sistema possível e indeterminado (como tinha que ser) equivalente ao sistema de equações lineares

$$\{x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = -\alpha - \beta \\ x_{12} = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_{13} = \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Assim, tem-se:

$$E_0 = \{(-\alpha - \beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

pelo que, por exemplo, $p_1 = (-1, 1, 0)$ e $p_2 = (-1, 0, 1)$ são vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$. Note que p_1 e p_2 formam uma base de E_0, mas não são ortogonais.

Para determinar uma base ortonormada de E_0 aplica-se o algoritmo de ortogonalização de Gram-Schmidt a $\{p_1, p_2\} = \{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$:

(a)

$$v_1 = \frac{p_1}{\|p_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0);$$

(b)

$$\begin{aligned} v_2' &= p_2 - \langle p_2, v_1\rangle v_1 \\ &= (-1,0,1) - \langle(-1,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \\ &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \\ v_2 &= \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right). \end{aligned}$$

Logo, $\{v_1, v_2\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$ é uma base de ortonormada de E_0.
Para determinar o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_2 = 3$, resolve-se o sistema

$$(A - 3I_3)x_2 = \underline{0},$$

ou seja, $A_2x_2 = b_2$, com $A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix}$ e $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, vindo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \frac{1}{2}\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 + \frac{1}{2}\ell_1}}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right] \underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_2}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A_2) = \operatorname{car}(A_2|b_2) = 2 < n = 3$ (n é o número de incógnitas), $A_2x_2 = b_2$ é um sistema possível e indeterminado (como tinha que ser) equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} -2x_{21} + x_{22} + x_{23} = 0 \\ \quad -\frac{3}{2}x_{22} + \frac{3}{2}x_{23} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{21} = \alpha \\ x_{22} = \alpha \\ x_{23} = \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Assim, tem-se:

$$E_3 = \{(\alpha, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

pelo que, por exemplo, $p_3 = (1,1,1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda_2 = 3$. Como $\|p_3\| = \sqrt{3}$, então $P_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Então, uma matriz ortogonal P que diagonaliza A é

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

e $\det(P) = 1$. *Assim, tem-se*

$$P^{\mathrm{T}}AP = D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Usando a mudança de variável $X = PX'$, *vem*

$$\begin{aligned}
&X^{\mathrm{T}}AX + BX = 0 \Leftrightarrow (X')^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}AP)X' + BPX' = 0 \\
&\quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = 0 \\
&\quad \Leftrightarrow 3(z')^2 + \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = 0 \\
&\quad \Leftrightarrow 3(z')^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} x' = 0,
\end{aligned}$$

que é a equação reduzida de um cilindro parabólico.

Bibliografia

Anton, H. and Rorres, C. (2005). *Elementary Linear Algebra with Applications*. Wiley.

Axler, S. (1997). *Linear Algebra Done Right*. Springer.

Giraldes, E., Fernandes, V., and Smith, P. (1995). *Curso de Álgebra Linear e Geometria Analítica*. McGraw-Hill.

Leon, S. (1999). *Álgebra Linear com Aplicações*. Livros Técnicos e Científicos.

Monteiro, A. (2001). *Álgebra Linear e Geometria Analítica*. McGraw-Hill.

Robinson, D. (2006). *A Course in Linear Algebra with Applications*. World Scientific.

Wright, D. (1999). *Introduction to Linear Algebra*. McGraw-Hill.

Índice remissivo