



Universidade do Minho
Instituto de Educação

Paulo Alexandre de Andrade Vieira

**O uso da Gamificação na Aprendizagem
da Matemática: Um estudo de caso**



Universidade do Minho
Instituto de Educação

Paulo Alexandre de Andrade Vieira

O uso da Gamificação na Aprendizagem da Matemática: Um estudo de caso

Relatório de estágio

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino
Básico e no Ensino Secundário

Trabalho efetuado sob a orientação da

Professora Doutora Maria Helena Martinho

DIREITOS DE AUTOR E CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO DO TRABALHO POR TERCEIROS

Este é um trabalho académico que pode ser utilizado por terceiros desde que respeitadas as regras e boas práticas internacionalmente aceites, no que concerne aos direitos de autor e direitos conexos.

Assim, o presente trabalho pode ser utilizado nos termos previstos na licença abaixo indicada.

Caso o utilizador necessite de permissão para poder fazer um uso do trabalho em condições não previstas no licenciamento indicado, deverá contactar o autor, através do RepositóriUM da Universidade do Minho.

[Esta licença permite que outros distribuam, remixem, adaptem e criem a partir do seu trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que lhe atribuam o devido crédito pela criação original. É a licença mais flexível de todas as licenças disponíveis. É recomendada para maximizar a disseminação e uso dos materiais licenciados.]



Atribuição-Compartilha Igual
CC BY-SA

<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Agradecimentos

Agradeço ao professor António Domingues, professor cooperante na ESFH, por toda a disponibilidade que sempre demonstrou em ajudar-me em todas as tarefas relacionadas com a execução do estágio.

Agradeço à professora Maria Helena Martinho, professora supervisora, por toda a disponibilidade que sempre demonstrou em ajudar-me em todos os aspectos relacionados com o estágio profissional.

Agradeço à professora Judite Cruz, professora do mestrado, por com as suas aulas ter permitido que em mim uma fusão de conhecimentos entre as áreas da psicologia-cognição e a da aprendizagem. Agradeço-lhe também pelos seus incentivos à investigação.

Deixo também um agradecimento geral a todos os professores do mestrado em Ensino de Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário por toda a aprendizagem que me proporcionaram.

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

Uso da Gamificação na Aprendizagem da Matemática: Um estudo de caso

Resumo

O termo gamificação é usado para referir a aplicação de elementos de jogo a ambientes que não são de jogo. Os elementos de jogo são elementos usados no design dos jogos. A gamificação tem por objectivo intervir num sistema ou área através do desenho de sistemas motivacionais que permitam amplificar valores intrínsecos de engajamento desse sistema ou área.

Este projecto de estágio teve por finalidade aplicar o conceito de gamificação ao ensino secundário e na sala de aula. No estudo da arte que fizemos constatamos que este estudo é inovador, emergente, e a sua aplicação nesta área é incipiente. Isso obrigou-nos a desenhar todo o sistema quase sem pontos guias. Tivemos de escolher os elementos de jogo a usar, tivemos de pensar como traduzi-los para o contexto educativo, e ainda dentro do que fosse possível definir a forma de avaliar o engajamento criado por eles. Além de tudo isto definimos, criamos, e preparamos os meios para concretizar todo o processo de gamificação: as plataformas de hospedagem, a cloud, os forms, etc.... Além disso desenhamos para toda a intervenção educativa um mecanismos de ensino e aprendizagem baseado em resumos da teoria (leituras) e fichas de trabalho.

Os elementos elementos de jogo escolhidos foram o avatar, as narrativas, a cooperação, o feedback e a competição. Alguns destes elementos de jogo já existem e são usados na educação a novidade está que agora são visto como fazendo parte de um todo, a gamificação. E são traduzidos e usados tendo em atenção esse contexto.

O avatar foi usado como mapa de conteúdos, formulário de fórmulas trigonométricas, descrevendo aspecto humano. A narrativa foi traduzida em mnemónicas, o feedback apareceu nos retornos que a plataforma de gamificação devolveia em tempo real às submissões do alunos, em pontuações e correcção das questões. A cooperação foi testada através da implementação de duas formas distintas de os alunos em grupo trabalharem, a que chamamos de série e paralelo. No trabalho em série em cada momento todo o grupo se debruçava somente sobre uma questão da ficha. No trabalho em paralelo a ficha é totalmente disponibilizada e o grupo organiza-se como entende podendo ocorrer que várias questões estejam a ser resolvidas simultaneamente pelo grupo. A competição foi traduzida numa corrida projectada na sala de aula em que o grupo avançava à medida que ia respondendo correctamente às questões. Para medirmos o engajamento recorremos a raciocínio abduutivo suportado em medida de análise estatística descritiva e usamos também medidas qualitativas que serviram para corroborar as conclusões.

Palavras-chave: Aprendizagem, Gamificação, Matemática

Using Gamification in Mathematics Learning: A case study

Abstract

The term gamification is used to refer to the application of gaming elements to non-gaming environments. The elements of game are elements used in the design of the games. Gamification aims to intervene in a system or area through the design of motivational systems that allow amplifying intrinsic values of engagement of that system or areas.

This internship project aimed to apply the concept of gamification to secondary education and in the classroom. In the study of the art that we did, we verified that this study is innovative, emerging, and its application in this area is incipient. This forced us to draw the whole system with almost no guide points. We had to choose the elements of the game to use, we had to think how to translate them into the educational context, and still within what it was possible to define how to evaluate the engagement created by them. In addition to this, we define, create, and prepare an ecosystem to achieve the entire process of gamification: hosting platforms, cloud scripts, forms, etc ... In addition, we design for all educational intervention a teaching and learning mechanism based on theory summaries (Lectures) and worksheets

The game elements chosen were the avatar, the narratives, the cooperation, the feedback and the competition. Some of these game elements already exist and are used in education the novelty is that they are here seen as part of a whole, gamification. And they are translated and used in this context.

The avatar was used as a content map, it is a set of trigonometric formulas, whose forms describing an human aspect. The narrative was translated into mnemonics, feedback appeared in the returns that the gamification platform returned in real time to the student submissions, in scores and correction of the issues. Cooperation has been tested through the implementation of two distinct ways of working in group, which we call series and parallel. In serial work members of the group are working in only one question, current question. After submit the current question the system give them more one. In parallel work all the question are fully made available in same time and the group organizes itself as it sees fit. Can be happen that several issues are being solved simultaneously by the group. The competition was translated into a race planned in the classroom in which the group progressed when they answered the questions correctly. To measure engagement, we used abductive reasoning supported by a descriptive statistical analysis, and we also used qualitative measures that served to corroborate the conclusions.

Keywords: Gamification, Learning, Mathematics

Índice

Índice	vii
Índice de Tabelas	x
Índice de figuras	xi
1. Introdução	1
2. Gamificação	3
3. Contextualização e Descrição do Trabalho realizado	8
3.1. Caracterização das turmas	8
3.1.1 A turma do 11º ano	9
3.1.2 A turma do 12º ano	9
3.2 Mecanismos de aprendizagem	9
3.2. 1 Fichas de Trabalho	9
3.2.2 Observação de contextos e intervenção educativa	10
3.3. Gamificando	15
3.4 Os Elementos de jogo	22
3.4.1 O Avatar	22
3.4.1.1 O avatar traduzido no processo educativo	22
3.4.1.2 O Srº Trigonometria Cubista	23
3.4.2 A Narrativa	26
3.4.2.1 As narrativas no processo educativo	26
3.4.2.2 A tabela das mnemónicas	26
3.4.3 O avatar e as narrativas na sala de aula	30
3.4.3.1 Momento de gamificação	30
3.4.3.2 Momento de resolução das tarefas	30
3.4.4 O Feedback	31
3.4.4.1 O Feedback no processo educativo	31
3.4.4.2 Pontuações e correcções	31
3.4.5 A Competição	32

3.4.5.1 A Competição no processo educativo	32
3.4.5.2 Os quadros competitivos	33
3.4.6 A Cooperação	35
3.4.6.1 A Cooperação no processo educativo	35
3.4.6.2 Processo de ensino-aprendizagem em série e paralelo (Ambivalência 1)	36
3.4.6.3 Processo de ensino-aprendizagem, Ambivalência 2	37
3.4.7 Competição e Feedback, Competição e Cooperação na sala de aula	37
3.4.7.1 Momento de gamificação e resolução de tarefas	38
4. Dados: tratamento e análise	39
4.1 Abdução	39
4.2 Tópicos de estatística	41
4.3 Avatar e Narrativas	42
4.3.1 Análise quantitativa às Mnemónicas	44
4.3.2 Análise qualitativa Avatar + Mnemónicas	54
4.3.3 Conclusão: O engajamento do avatar e narrativas	55
4.4 Competição, Cooperação, Feedback	59
4.4.1 Dados da ficha nº 4 (Tarefa 2)	60
4.4.2 Resultados da aprendizagem em série (Dados da ficha nº 5, Tarefa 3)	64
4.4.3 Resultados da aprendizagem em paralelo (Dados da ficha nº 6, Tarefa 4)	67
4.4.4 Conclusão: O engajamento dos elementos de jogo: competição, cooperação, feedback, restrição de tempo, aversão a perda, e recompensa	73
5. Conclusão	78
Bibliografia	80
Anexo	83
Caracterização das turmas	83
Apêndice	85
FAQ (Frequent Ask Questions)	85
Leituras	87
Leitura nº 1	87
Leitura nº 2	88
Leitura nº 3	88

Fichas de Trabalho	89
Ficha de Trabalho 11º ano sobre Trigonometria (Avatares+ Narrativas/Mnemónicas)	89
Ficha do 12º ano, ficha dos senos	95
Ficha do 12º ano, ficha dos cosenos	99
Ficha de Trabalho nº 1	103
Ficha de Trabalho nº 2	108
Ficha de Trabalho nº 3	110
Ficha de Trabalho nº 4	111
Ficha de Trabalho nº 5	113
Ficha de Trabalho nº 6	113

Índice de Tabelas

Tabela 1: Elementos de jogo Adaptado de Costa e Marchiori (2015)	3
Tabela 2: Conteúdos e tempos de intervenção.....	11
Tabela 3: Quadro de endereços de recursos	12
Tabela 4: Etapas de planeamento de aplicação da gamificação segundo a metodologia de Huang	15
Tabela 5: Aplicação e medição dos elementos de jogo.	19
Tabela 6: Tabela de Menmónicas construída na sala de aula (continua)	28
Tabela 7: (continuação) Tabela de Mnemónicas construída na sala de aula	29
Tabela 8: categorização das mnemónicas usadas	29
Tabela 9: elementos de jogo, variáveis e medidas	43
Tabela 10: Correlação entre as variáveis N° Mnemónicas usadas e N° Respostas Correctas (11° ano)	48
Tabela 11: Tabela das resposta da ficha nº4.....	61
Tabela 12: Quadro das variáveis em estudo (ficha nº 4).....	63
Tabela 13: Quadro das variáveis em estudo (ficha nº 5).....	64
Tabela 14: Quadro das variáveis em estudo (ficha nº 5).....	66
Tabela 15: Momentos de tempo, num dia, de submissão das respostas à ficha nº 6.	68
Tabela 16: Tabela de medidas estatística do momento de tempo de resposta à ficha nº 6 condicionada por grupo	69
Tabela 17: Tabela de medidas estatística do momento de tempo de resposta à ficha nº 6 condicionada por questão	69
Tabela 18: Tempo que decorreu entre a resposta a uma questão e o início das tarefas.	70
Tabela 19: O tempo que decorrido entre início das tarefas e as respostas submetidas condicionadas por grupo sendo medidas através de medidas estatística	71
Tabela 20: O tempo que decorrido entre início das tarefas e as respostas submetidas condicionadas por grupo sendo medidas através de medidas estatística	72

Índice de figuras

Figura 1: Etapas necessárias para aplicar a gamificação na educação.....	5
Figura 2: Scopus, TITLE-ABS-KEY ("gamification" AND "Math*") [realizada, 14-07-2018]	6
Figura 3: Scopus, TITLE-ABS-KEY ("gamification" AND "Math*") AND (Classroom) [realizada, 14-07-2018]	7
Figura 4: Scopus, TITLE-ABS-KEY ("gamification" AND "Math*") AND (Classroom) AND ("High School") [realizada, 14-07-2018]	7
Figura 5: Mecanismo de aprendizagem	14
Figura 6: O Sr° Número	23
Figura 7: O Sr° Trigonometria a olhar de lado.....	24
Figura 8: O Sr° Trigonometria a olhar de frente.....	24
Figura 9: Les Demoiselles d'Avignon (Cubista, Picasso).	25
Figura 10: O Sr° Trigonometria Cubista.	25
Figura 11: O ultimo Avatar (desenhado).	26
Figura 12: excerto da ficha de trabalho, em papel, entregue no 11° ano	31
Figura 13: Composição de imagens: ficha de problemas/pós submissão/feedback (ficha n° 4)	32
Figura 14: Figura onde é mostrado programado o backOffice dos quadros competitivos (cloud da google).	33
Figura 15: Imagem em backOffice, esta imagem é enviada para o site (frontOffice).	34
Figura 16: Quadro de aprendizagem em competição.	34
Figura 17: Questões certas e erradas na ficha n° 6.....	35
Figura 18: Questionário da ficha de trabalho n° 5.....	36
Figura 19: Site onde constavam todas as questões das tarefas (aprendizagem em paralelo) ficha n° 6.....	37
Figura 20: distribuições simétricas e assimétricas.	42
Figura 21: Excerto da ficha de trabalho (online) entregue ao 11° ano, ver apendice ou em http://goo.gl/3jDKPy .46	
Figura 22: resultados do 11° ano.	47
Figura 23: Tabela de dados construída a partir da Ficha n° 1, do Seno, realizada no 12° ano.	51
Figura 24: Tabela de dados construída a partir da Ficha n° 1, do Coseno, realizada no 12° ano	53
Figura 25: Reprodução do Sr° Trigonometria.....	54
Figura 26: Reprodução de mnemónicas.....	55
Figura 27: Reprodução de mnemónica encontrada.	55
Figura 28: figura dinâmica da competição, projetada na sala de aula ficha n°5.	67

1. Introdução

A este projecto de estágio supervisionado foi dado o acrónimo de GEMA, projecto GEMA, **G**amification na **ap**rendizagem da **MA**temática, por pretender aplicar o conceito de gamification doravante chamada de gamificação ao ensino secundário. *A questão em investigação no trabalho consiste em determinar como aplicar, ao ensino secundário, o conceito de gamificação na aprendizagem de matemática.* A escolha da questão de investigação teve a ver com o facto de no estado da arte que fizemos este mostrar que o uso da gamificação em sala de aula no caso da matemática e para o ensino secundário embora em crescimento ainda é incipiente (figura 1, 2, 3).

Para responder à questão em investigação aplicamos a gamificação ao ensino secundário, em duas turmas, uma do 11º ano e outra do 12º ano, e a dois domínios de conteúdo (Programa e Metas Curriculares de Matemática, (PMCM), 2013), Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI), doravante chamado somente de Trigonometria, e fizemos, dentro do possível, uma avaliação do seu impacto na aprendizagem. A intervenção no 11º ano é uma intervenção unicamente para complementar a intervenção do 12º ano. A escolha do domínio de conteúdo Trigonometria veio-nos da noção empírica de que este é um domínio de conteúdo onde ocorrem frequentemente problemas de aprendizagem e por isso ser um campo que podia propiciar o surgimento de engajamento por aplicação da gamificação. Assim, este projecto de estágio supervisionado tem 2 objetivos:

- i) aplicar o conceito de gamificação na aprendizagem do domínio de conteúdo Trigonometria,
- ii) avaliar, dentro do possível, o impacto das estratégias de gamificação usadas.

O primeiro objectivo, i), está diretamente relacionados com a questão em investigação que consiste em saber como aplicar o conceito de gamificação ao ensino secundário. O objectivo ii) foi introduzido porque achamos interessante que houvesse uma avaliação da aprendizagem realizada, mesmo que esta fosse incipiente e simplificada.

Para realizarmos o objectivo i) tivemos que escolher os elementos de jogo¹, adequados a usar, e tivemos de refletir, bastante, em como traduzi-los, no contexto educativo, para a situação concreta da aprendizagem no ensino secundário. Escolhemos 5 *elementos de jogo principais*: o Avatar, a Narrativa, a Cooperação, a Competição e o Feedback. Em consequência destes elementos de jogo, a que chamamos principais, aparecem outros destes derivados a que chamamos *elementos de jogo consequentes*: Aversão a perda, Recompensa, e Restrição de tempo.

¹ Os actores num jogo

Para a realização do objectivo ii) fizemos uma análise quantitativa, usando os dados recolhidos nas fichas online, e qualitativa a partir de dados obtidos de produções dos alunos e de apontamentos pessoais recolhidos durante a intervenção educativa.

O relatório está estruturado em 5 capítulos e 3 posteriores secções. Os capítulos intitulam-se: Introdução, Gamificação, Descrição do trabalho realizado, Dados: tratamento e análise, e Conclusão. Na introdução, este capítulo, definimos a questão de investigação, os objectivos e a motivação do trabalho e descrevemos a estrutura do relatório. No capítulo seguinte, gamificação, apresentamos o conceito de gamificação e um estudo onde se mostra a evolução da presença do conceito na literatura. No capítulo seguinte descrevemos o trabalho que foi realizado no processo de investigação. No capítulo 4 é realizado o tratamento e análise dos dados. No capítulo seguinte são apresentadas conclusões. Aos capítulos o relatório tem adicionados 3 secções finais: as referências, o apêndice e o anexo. Nas referências constam a bibliografia de citações presentes no texto. No apêndice apresentamos, para melhor entendimento do estágio, uma introdução ao projecto com base em perguntas e respectivas respostas num contexto de FAQ (Frequent Ask Questions, ver Apêndice). No anexo colocamos dados obtidos de terceiros para comprovar referências no relatório.

2. Gamificação

Neste capítulo fazemos o enquadramento teórico do trabalho. Começamos por definir o conceito de gamificação e de elemento de jogo, em seguida apresentamos uma lista de elementos de jogo categorizada e uma metodologia para desenhar sistemas de gamificação na educação. Por último apresentamos um estudo sobre a aplicação da gamificação no ensino secundário

O termo gamificação (Deterding et al, 2011) é usado para denotar a aplicação de elementos de jogo a ambientes que não são de jogo. Como elementos de jogo entendemos os elementos usados no design dos jogos². A gamificação (Deterding, 2012) não tem por objectivo criar um mundo divertido ou um conjunto de diversões a aplicar a um sistema ou área de intervenção. O seu objectivo é desenhar sistemas motivacionais que permitam amplificar valores intrínsecos de engajamento de um sistema ou área a intervir. Esses valores de engajamento já existem, são intrínsecos ao sistema ou área a intervir, a gamificação amplifica-os. No desenho desses sistemas motivacionais são usados elementos de jogo.

Na educação, em coerência com o que foi referido, a partir dos valores intrínsecos existentes, nos educadores (vontade de ensinar) e nos educandos (vontade de aprender), a gamificação desenha sistemas motivacionais aplicados ao processo de aprendizagem, que amplificam os valores intrínsecos de educandos e educadores, fazendo uso de elementos usados nos jogos.

Em seguida apresentamos uma listagem dos elementos de jogo construída a partir da listagem apresentada em Costa e Marchiori (2015) (Tabela 1). Os elementos de jogo estão classificados segundo a categorização feita por Werbach e Hunter (2012) em: dinâmicas de jogo, mecanismos de jogo, e componentes de jogo. Acrescentamos à lista herdada de Costa e Marchiori (2015) a azul dois novos elementos de jogo. Estes elementos de jogo constam do nosso trabalho e não estavam na lista: a Aversão a perda e a Restrição de tempo. Dividimos os elementos de jogo em principais e consequentes. Como consequentes entendemos os elementos de jogo que resultam da existência de elementos principais. Os elementos de jogo principais do trabalho estão na tabela 1 classificados: o Avatar é um *componente de jogo*, a Narrativa é uma *dinâmica de jogo* e a Cooperação, a Competição e o Feedback são *mecanismos de jogo*. Os elementos consequentes: A aversão a perda, a Recompensa, e a Restrição de tempo são todos mecanismos de jogo.

Tabela 1: Elementos de jogo Adaptado de Costa e Marchiori (2015)

Dinâmicas de jogo	Mecanismos de jogo	Componentes de Jogo
-------------------	--------------------	---------------------

² Há uma grande discussão à volta do que significa e como identificar elementos usados no design dos jogos. Resolvemos não entrar nessa discussão e damos-lhe o sentido comum e heurístico apresentado em Deterding et al (2011). Para não adular o que se diz não traduzimos para português. “We therefore suggest restricting ‘gamification’ to the description of elements that are characteristic to games – elements that are found in most (but not necessarily all) games, readily associated with games, and found to play a significant role in gameplay”.

emoções	Aquisição de recursos	Avatar
narrativa	Avaliação (Feedback)	Bens virtuais
progressão	Chance	Boss
relacionamentos	Cooperação e competição	Coleções
restrições	Desafios	Combate
	Recompensas	Disputa
	Transações	Conteúdos desbloqueáveis
	Turnos	Emblemas/medalhas
	Vitória	Gráfico Social
	Restrição de tempo	Missão
	Aversão a perda	Níveis
		Pontos
		Presentes
		Ranking
		Times

Segundo Huang et al (2013) o planejamento da aplicação da gamificação, a um caso concreto na educação, deve ser feita através de 5 etapas sequências. Essas etapas podem ser definidas através da resposta a 5 questões, tal como está ilustrado na figura 1.

Etapas necessárias para aplicar a gamificação na educação

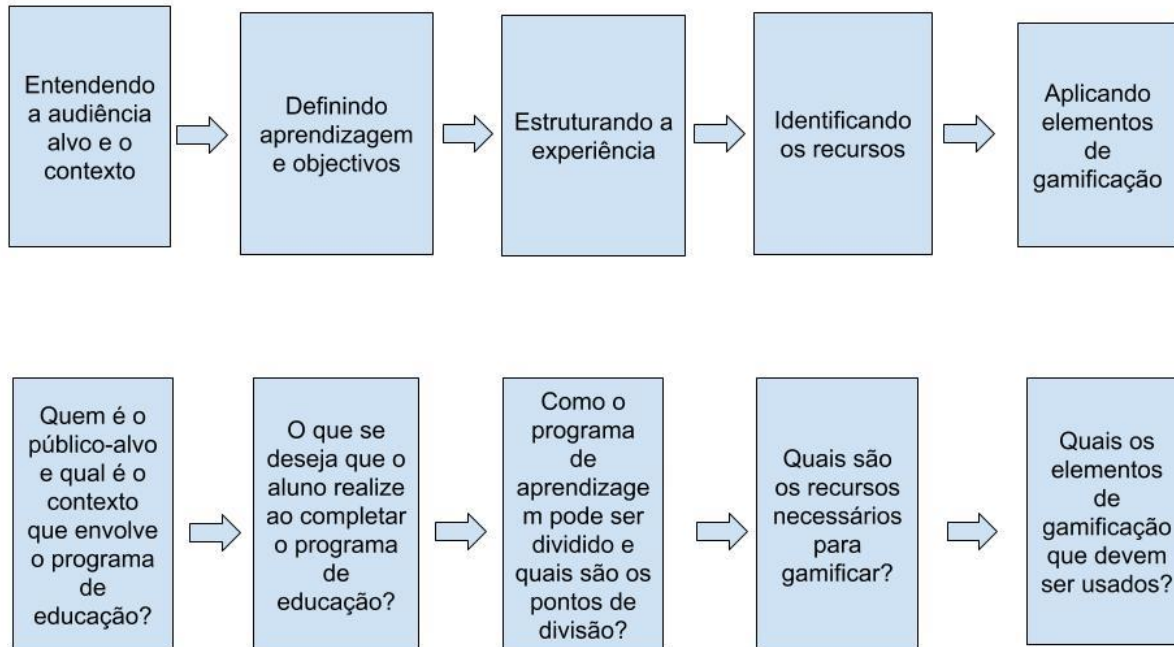


Figura 1: Etapas necessárias para aplicar a gamificação na educação

Nos últimos anos tem existido um crescente fenómeno de integração da gamificação na educação (Caponetto et al, 2014). Para exemplo, há referências da aplicação da gamificação, na Khan Academy³, na aprendizagem da área de ciências de computação (Morrison, 2013) e na aprendizagem da matemática (Light et al, 2014). Mas muitos outros exemplos ficam por referir.

Esse uso crescente da gamificação tem originado que se recorra a um conjunto de estratégias ou técnicas que, quando devidamente aplicadas, atuam no processo de aprendizagem, tornando a aprendizagem mais motivadora e envolvente. Nesse sentido também facilitam o ensino, tornando o binómio ensino aprendizagem ubíquo. É no seguimento deste crescimento que aparece este projecto que pretende aplicar técnicas de gamificação no ensino secundário.

Por último com o objectivo de enquadrar teoricamente o estudo que pretendíamos fazer, aplicação da gamificação no ensino secundário ao caso da matemática, apresentamos 3 pesquisas que fizemos na base

³ <https://www.khanacademy.org/>, [Março 2018]

de dados scopus⁴. O scopus possui embebida na plataforma um conjunto de possibilidades de análise de dados como: a possibilidade de pesquisa através do uso de expressões regulares, pesquisas por expressões lógicas, uso de filtros, etc. Usamos várias dessas ferramentas.

Na primeira pesquisa procuramos literatura que apresentava no título, no abstract ou nas keywords⁵ as palavras “gamification” e “Math*”⁶. Resultou na identificação de 117 entradas dispostas da forma que é mostrada na figura 2. Como se pode observar o ano de 2017 é o ano onde aparece mais literatura que envolve gamificação e a matemática o que é um prenúncio da importância e iminência do tema.

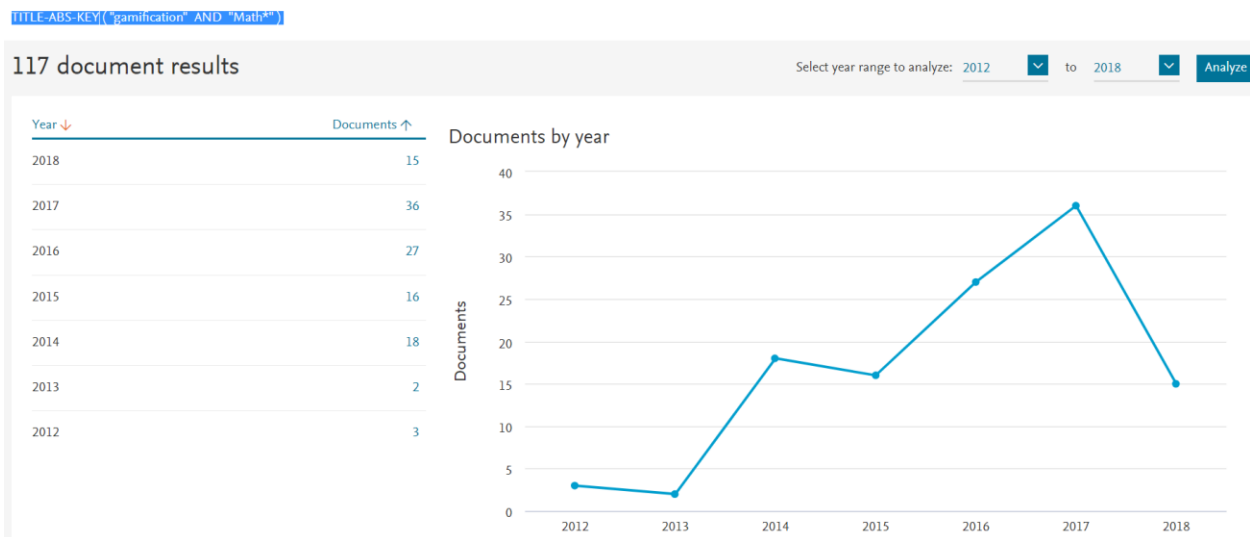


Figura 2: Scopus, TITLE-ABS-KEY ("gamification" AND "Math*") [realizada, 14-07-2018]

Após esta primeira análise resolvemos adicionar um filtro, esse filtro foi a expressão sala de aula ('classroom'). O número de entradas reduziu para metade. O que mostra que apesar de o tema vir em crescendo e ser emergente ainda há pouca literatura sobre o tema em contexto de uso em sala de aula (figura 3). Em seguida voltamos a fazer um novo refinamento. Refinamos o filtro para o caso do ensino secundário (usamos a expressão 'high school'). As entradas reduzem-se a 11: 3, 0, 2, 6 respectivamente de 2014 a 2017. O que mostra que apesar de o tema vir em crescendo e ser emergente a sua aplicação, o nosso projecto de aplicar a gamificação à matemática, na sala de aula e ao ensino secundário é inovadora (figura 4).

⁴ <https://www.scopus.com>

⁵ TITLE-ABS-KEY ("gamification" AND "Math*") (expressão usada na busca)

⁶ Math* significa que procuramos as palavras Math ou Math seguida de qualquer letra do alfabeto

(TITLE-ABS-KEY ("gamification" AND "math*")) AND (classroom)

53 document results

Select year range to analyze: 2012 to 2018 Analyze

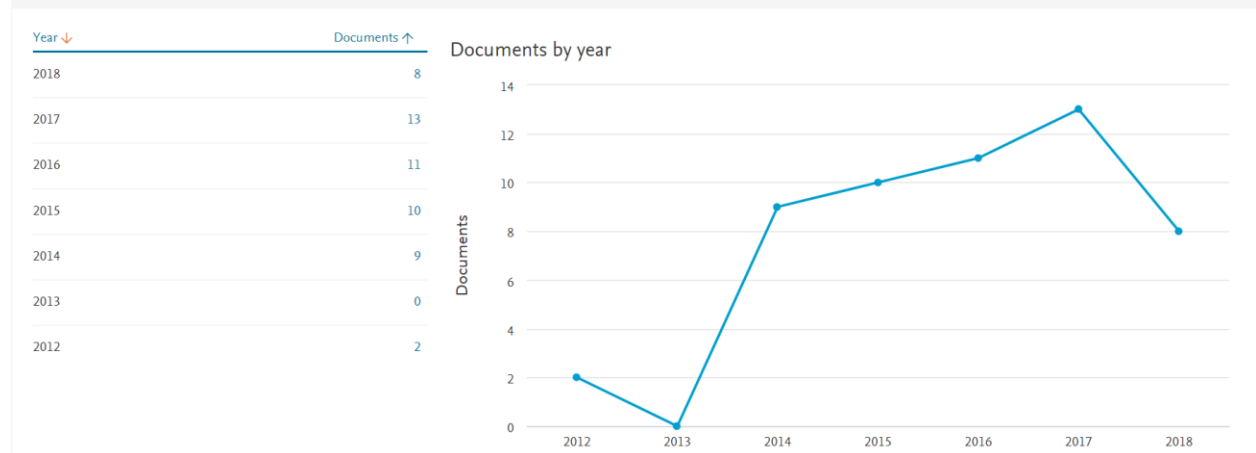


Figura 3: Scopus, TITLE-ABS-KEY ("gamification" AND "Math*") AND (Classroom) [realizada, 14-07-2018]

(TITLE-ABS-KEY ("gamification" AND "math*")) AND ((classroom)) AND ("high school")

11 document results

Select year range to analyze: 2014 to 2017 Analyze

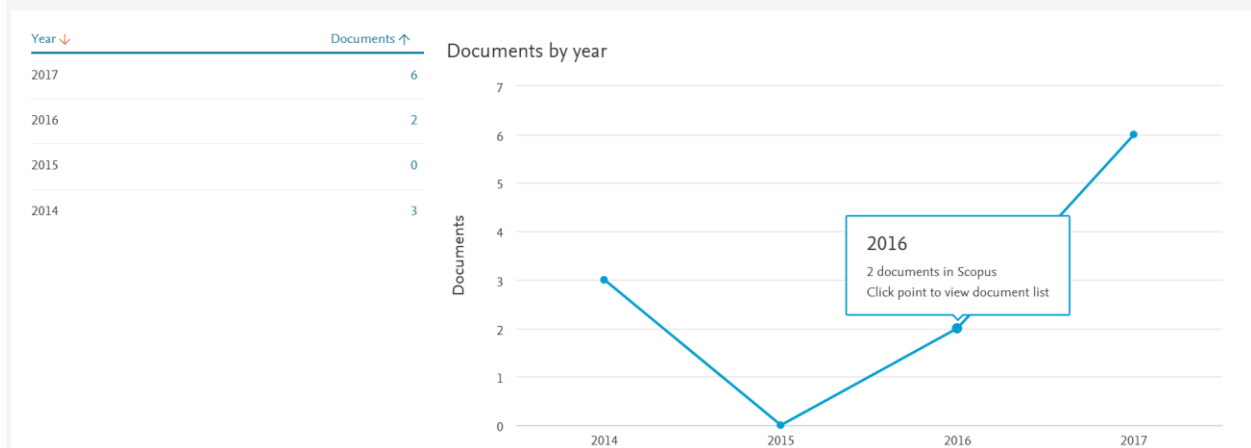


Figura 4: Scopus, TITLE-ABS-KEY ("gamification" AND "Math*") AND (Classroom) AND ("High School") [realizada, 14-07-2018]

3. Contextualização e Descrição do Trabalho realizado

Esta secção tem por objetivo contextualizar e descrever o trabalho realizado. Nessa perspectiva dividimos a secção em 4 subsecções. Na primeira subsecção, 3.1, intitulada *Caracterização das turmas* apresentamos uma análise das turmas intervencionadas. Em seguida na subsecção *Mecanismos de aprendizagem* descrevemos o mecanismo de aprendizagem que criamos e marcamos dois momentos importantes do projecto: o momento de leccionação de conteúdos e o momento de avaliação da aprendizagem. Na subsecção 3.3 *Gamificando* referimos como concretizamos as etapas do processo de gamificação na educação, proposto por Huang et al (2013). Por último na subsecção 3.4, *Elementos de jogo*, descrevemos os elementos de jogo, o processo de ideação da sua criação, e a forma como cada um deles foi usado na intervenção educativa.

3.1. Caracterização das turmas

O projecto foi aplicado a duas turmas na Escola Secundária Francisco de Holanda (ESFH), uma do 11º ano e outra do 12º ano. A intervenção educativa na turma do 11º ano foi muito circunscrita e consistiu de 2 aulas, 4 tempos lectivos. Todo o resto da intervenção educativa foi realizada na turma do 12º ano. Uma das práticas lectivas em relevo durante o estágio foi a de realizar rápidos diagnósticos do estado da aprendizagem dos alunos. Esses rápidos diagnósticos consistiram em questões de resposta rápida. Essas questões foram usadas em contextos de gamificação. Foi esta abordagem adicionada ao facto do domínio de conteúdo Trigonometria ser herdado do 11º ano que nos levou a considerar estender a intervenção educativa, inicialmente não prevista, a uma turma do 11º ano. O domínio de conteúdo dominante da intervenção educativa, seguidamente chamado de tema, foi o tema Trigonometria e Funções Trigonométricas (TFT). Este tema é um tema do 11º ano e é desenvolvido no 12º ano. Assim, a intervenção no 11º ano foi feita no fim de leccionado o conteúdo TFT. Na primeira, das 2 aulas⁷, foi realizado o processo de gamificação, usando o avatar e a narrativa, e na 2ª aula foi resolvida uma ficha de trabalho de conclusão de matéria onde se fez uso das questões de resposta rápida. No 12º ano foi feito algo semelhante com a diferença de que a intervenção se deu no início da leccionação do tema e por isso serviu para diagnosticar o quanto os conteúdos do 11º ano estavam presentes. Em concreto com a experiência educativa que descrevemos pretendemos ter casos de uso da gamificação, em contexto de diagnóstico de conhecimentos, na fase de início e de conclusão de conteúdos, temas, leccionados.

Para a caracterização das turmas usamos um documento da escola, ESHF, cuja reprodução pode ser encontrada no anexo. Para um melhor enquadramento das turmas apresentamos uma análise de alguns dos descritores e fazemos uma análise em contexto escolar e familiar.

⁷ Cada aula foram 2 periodos de 50 minutos

3.1.1 A turma do 11º ano

Contexto escolar. A turma do 11º ano era constituída por um total de 30 alunos, 16 rapazes e 14 raparigas, 26 dos quais eram do concelho de Guimarães, 5 viviam a mais de 5 km de distância da escola, e todos demoravam até 30 minutos a chegar à escola. A ida para a escola era feita de forma muito heterogénea, a pé, automóvel, autocarro. 3 dos alunos no ano anterior não frequentaram a ESFH, frequentaram um externado (o mesmo). 10 alunos tinham retenções no seu percurso escolar, 9 deles tinham 1 retenção, e as disciplinas preferidas eram a Economia (9 alunos) e a Matemática (8 alunos). As disciplina em que apresentavam dificuldades eram muito heterogéneas e 2 dos alunos consideraram que tinham dificuldades a matemática.

Contexto familiar. 25 dos alunos estavam inseridos em agregados familiares de 4 elementos e em 22 (respectivamente, 26) dos alunos o pai (respectivamente, a mãe) trabalhavam por conta própria. Em 70% dos alunos os pais tinham escolaridade entre o 3º ciclo e o ensino secundário.

3.1.2 A turma do 12º ano

Contexto escolar. A turma do 12º ano era constituída por um total de 27 alunos, 6 rapazes e 21 raparigas, 25 dos alunos eram do concelho de Guimarães mas 18 viviam a mais de 5 km de distância da escola, em particular, 6 demoravam entre 30 e 60 minutos a chegar à escola. A maioria, 24 dos alunos, deslocavam-se para a escola usando o autocarro. No ano anterior 26 dos alunos já frequentavam a ESFH. Apenas um dos alunos tinha uma retenção no seu percurso escolar. As disciplinas preferidas eram a Educação Física (14 alunos) e a Matemática (15 alunos). A disciplina que os alunos descreviam como tendo maiores dificuldades foi o Português (15 alunos).

Contexto familiar. 16 dos alunos estavam inseridos em agregados familiares de 4 elementos e em 18 (respectivamente, 16) dos alunos o pai (respectivamente, a mãe) trabalhavam por conta própria. Nenhum dos alunos tinham pais com formação universitária.

3.2 Mecanismos de aprendizagem

3.2. 1 Fichas de Trabalho

Durante a intervenção educativa foram preparadas várias fichas de trabalho. No projecto existem dois tipos de fichas de trabalho: *Fichas de trabalho repositório*⁸ e *Fichas de Trabalho para os alunos*⁹.

As *fichas de trabalho repositório* são fichas de trabalho que serviram para apoiar a leccionação. Essas fichas de trabalho ou foram sendo resolvidas em sala de aula em interacção aluno(s)-professor ou serviram como “local” (repositório) onde se iam buscando exercícios que eram resolvidos na sala de aula. Destas fichas não foram recolhidos dados produzidos por alunos.

⁸ Ficha de Trabalho nº 1, 2, 3 (anexo)

⁹ Fichas de Trabalho 11º ano, 12º ano Ficha dos Senos, 12º ano Ficha dos Cosenos, Ficha de trabalho nº 4, 5, 6 (anexo)

Quanto às *fichas de trabalho para os alunos*, estas foram fichas de trabalho que foram resolvidas pelos alunos em trabalho de grupo. Destas há dados recolhidos. Estas fichas foram operacionalizadas como quizzes na web (sempre), algumas delas foram também distribuídas em papel, e foram 6 fichas. Estas fichas foram enquadradas em 4 tarefas.

A noção de tarefa que é tomada neste trabalho distancia-se da noção que a palavra toma nas ciências da educação. No trabalho tarefa tem o sentido comum da palavra, significa trabalho a realizar.

A intervenção no 11º ano restringiu-se somente à Tarefa 1, e foi somente realizada para complementar a intervenção do 12º ano na Tarefa 1. A intervenção no 12º ano abrangeu as tarefas 1, 2, 3, e 4. As tarefas correspondem às seguintes fichas de trabalho. Tarefas 1 corresponde a 3 fichas de trabalho, Fichas de trabalho 11º ano, 12º ano Ficha dos Senos, 12º ano Ficha dos Cosenos; Tarefa 2, 12º ano, Ficha de trabalho nº 4; Tarefa 3, 12º ano, Ficha de Trabalho nº 5; e Tarefa 4, 12º ano, Ficha de trabalho nº 6. Voltaremos a este ponto na subsecção Gamificando

As fichas nº 5 e nº 6 têm duas diferenças substanciais que consistem no seu modo de disponibilização na web. As fichas são disponibilizadas em um de dois modos possíveis, que chamamos, i) *disponível para trabalho em série* (a ficha nº 5) e ii) *disponível para trabalho em paralelo* (a ficha nº 6). Por i) (*disponível para trabalho em série*) significa que em cada momento os alunos só têm, da ficha de trabalho, uma questão disponível, a questão corrente (a questão que estão a responder), e só podem aceder a uma nova questão quando submetem a questão corrente. Por ii) (*disponível para trabalho em paralelo*) significa que todas as questões da ficha de trabalho estão disponíveis em simultâneo. A modalidade da disponibilidade em série faz que, em cada momento, todos os elementos de um grupo de trabalho estejam concentrados na resolução de um exercício e um só. Já a modalidade de disponibilização em paralelo permite que os grupos se possam organizar em subgrupos e dentro do grupo dividam tarefas. Isso possibilita ao grupo no mesmo momento estar a trabalhar em várias questões distintas.

As fichas de trabalho na web foram construídas usando o serviço google form¹⁰ e a infraestrutura de suporte para o funcionamento da competição foi construída usando serviços e hospedagem da cloud da google e do hostinger24¹¹.

Para todo o contexto de ensino aprendizagem foi desenhado e seguido um mecanismo de ensino aprendizagem (ver figura 5) baseado em Leituras (resumos da teoria) que podiam ser usados pelos alunos e em fichas de trabalho (prática).

3.2.2 Observação de contextos e intervenção educativa

¹⁰ <https://www.google.com/forms/about/>

¹¹ <https://www.hosting24.com/>

O projecto GEMA foi concretizado em 2 fases sequenciais: observação de contextos educativos e intervenção educativa. A fase inicial consistiu em tomar conhecimentos dos contextos educativos, foi uma fase em que se observaram aulas e outros contextos escolares. A fase seguinte foi a fase de intervenção educativa. No projecto foram efetuados dois tipos de intervenções educativa: de leccionação de conteúdos (fase de ensino), e de avaliação da aprendizagem (fase de avaliação).

Na intervenção educativa de leccionação de conteúdos foi realizada a leccionação de dois domínio de conteúdo, Trigonometria e Funções Trigonométricas e Números Complexos, e a preocupação foi centrada na leccionação dos conteúdos. Na intervenção educativa relativa à avaliação da aprendizagem a preocupação foi centrada na avaliação dos conceitos leccionados. Os conteúdos leccionados e os respectivos tempos lectivos foram os que se encontram na tabela que se segue.

Tabela 2: Conteúdos e tempos de intervenção.

Conteúdos	Tempos
Síntese do conteúdo Trigonometria e Funções Trigonométricas (11º ano).	4
Estudo intuitivo com base no círculo trigonométrico, tanto a partir de um gráfico. particular, como usando calculadora gráfica (12º ano).	10
Estudo intuitivo da função $\sin(x)/x$ quando x tende para zero (12º ano).	4
Derivadas do seno, cosseno e tangente (12º ano).	8
Noções básicas de números complexos, representação e operações (12º ano).	4

Nas intervenções educativas nas suas duas vertentes (fase ensino, fase aprendizagem) foram aplicadas estratégias de gamificação. Os resultados e conclusões apresentados, obtidos no projecto, são consequência da recolha de dados durante o processo de aprendizagem e de avaliação e da sua posterior análise. Tal como pode ser observado na figura 5 o mecanismo de ensino-aprendizagem que construímos consiste em duas fases, a *fase de ensino* em que o foco é centrado na transmissão de conteúdos e a *fase de avaliação* em que o foco é centrado na avaliação dos conteúdos transmitidos. A *fase de ensino* está materializada em um conjunto de 3 documentos que são resumos dos conteúdos, a cada um desses documentos chamamos *Leituras*²². Nesta fase também é feita uma breve e curta avaliação da aprendizagem através da tarefa 1 a que correspondem 3 fichas de exercícios (Ficha 11º ano, 12º ano Ficha dos Senos, 12º ano Ficha dos Cosenos). Essas fichas são fichas com questões de resposta rápida. Este tipo de avaliação serve para o

²² paulovieira.formalmachine2015.com/estagio/index.html

docente diagnosticar de forma breve o conhecimento de certo assunto ou se a mensagem foi transmitida com sucesso. Na fase de avaliação o foco é centrado na avaliação dos conteúdos que foram ensinados na fase de ensino. A fase de avaliação consiste na realização de 3 tarefas que correspondem a fichas de trabalho na internet, as fichas 4, 5 e 6 (Tabela 3). Nessas tarefas há uma forte intervenção da gamificação. A intervenção educativa é feita em ambiente de competição (ficha nº 5 e 6) e sem competição (ficha nº 4), em cooperação (aprendizagem em série - ficha nº 5, e aprendizagem em paralelo - ficha nº 6), e sempre com feedback e recompensa. Na ficha nº 5 é possível voltar a submeter as questões respondidas, na ficha nº 6 isso não é possível. Essa diferença permite que surja o elemento de jogo consequente Aversão a perda.

Tabela 3: Quadro de endereços de recursos¹³

	Leituras	Comentarios	url	Comentário
Fase de ensino.	Leitura nº 1 http://bit.ly/2GECs0q .	Leitura sobre propriedades das funções trigonométricas.	Ficha nº 1 (genérica). bit.ly/2RSHad7 (ficha de trabalho repositório).	Ficha de exercícios genéricos, a realizar em sala de aula, sobre as propriedades das funções trigonométricas.
			Ficha, 11º ano http://goo.gl/3jDKPy (ficha de trabalho para os alunos).	Ficha de exercícios para o 11º ano envolvendo Avatar+ Narrativa.
			Ficha 1_1, ficha do Seno, 12º ano https://bit.ly/2p2e5PY (ficha de trabalho para os alunos).	Fichas de exercícios para o 12º ano uso, do Avatar+ Narrativa, Senos, Cos.
			Ficha 1_2, ficha do CoSeno, 12º ano https://bit.ly/2VclZr1 (ficha de trabalho para os alunos).	

¹³ Os recursos que constam neste quadro também podem ser vistos no url, "paulovieira.formalmachine2015.com/estagio/index.html"

	Leitura n° 2 http://bit.ly/2DsHudu .	Leitura sobre propriedades da função $\sin(x)/x$.	Ficha n° 2 bit.ly/2Gmb5sl (ficha de trabalho repositório).	Ficha de exercícios de aplicação da Leitura n° 2. A ficha é sobre propriedades da função $\sin(x)/x$ e obtenção das derivadas trigonométricas.
	Leitura n° 3 http://bit.ly/2TJMH7y .	Leitura sobre: derivadas de funções trigonométricas, derivadas de compostas de trigonométricas.	Ficha n° 3 http://bit.ly/2RSMY6m (ficha de trabalho repositório).	Ficha de exercícios de aplicação de aplicação da Leitura n° 3. A ficha é sobre derivadas de compostas envolvendo funções trigonométricas.
Fase de avaliação.			Ficha n° 4 https://goo.gl/RuzLf5 (ficha de trabalho para os alunos).	Ficha de problemas envolvendo funções trigonométricas, suas propriedades e limites notáveis.
			Ficha n° 5 https://bit.ly/2Fodv9N (ficha de trabalho para os alunos).	Ficha de exercícios sobre funções trigonométricas e derivadas de compostas de trigonométricas (resolução em série).
			Ficha n° 6 https://bit.ly/2M9hLdK (ficha de trabalho para os alunos).	Ficha de exercícios sobre funções trigonométricas e derivadas de compostas de trigonométricas (resolução em paralelo).

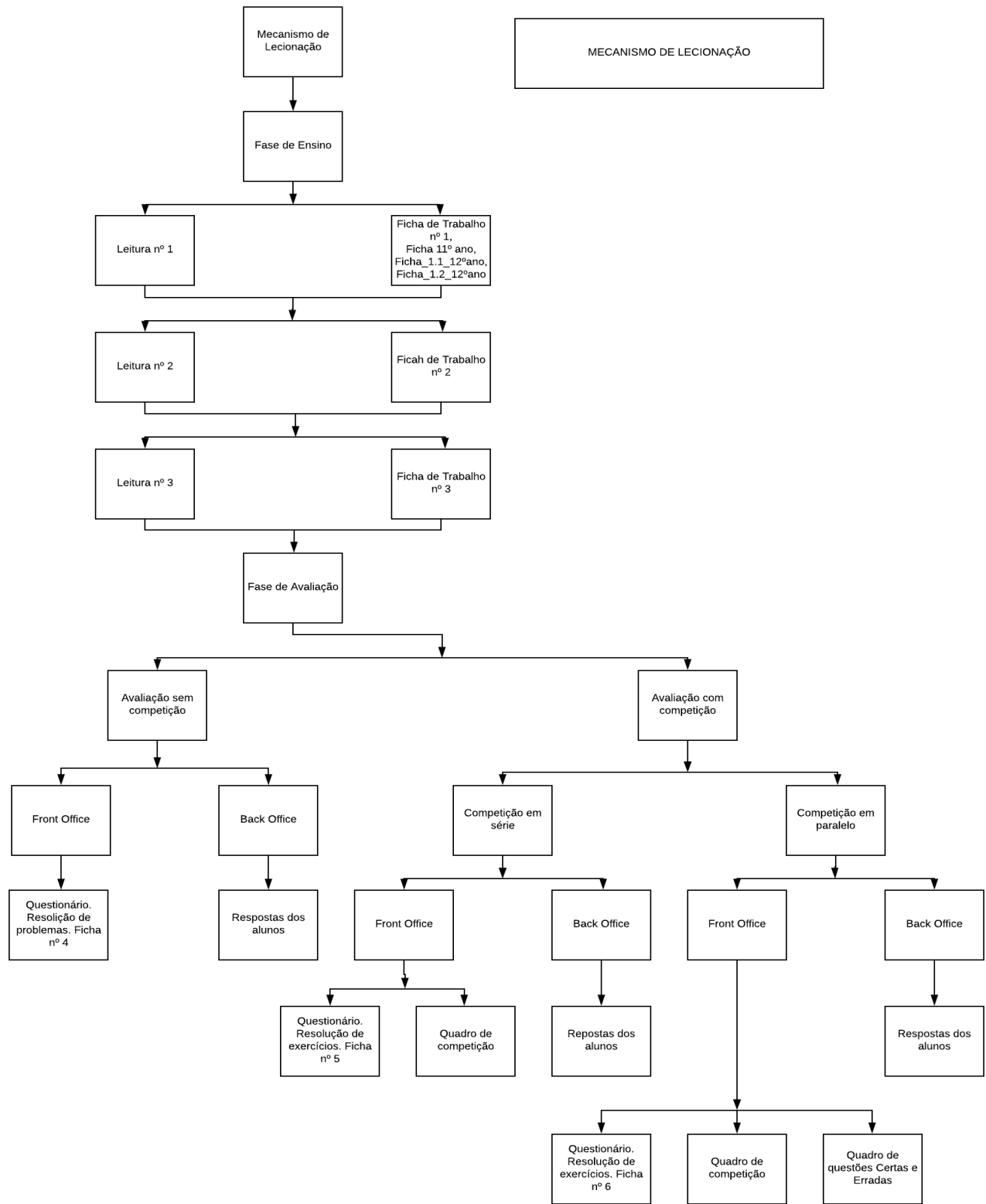


Figura 5: Mecanismo de aprendizagem

3.3. Gamificando

Nesta subsecção vamos descrever: como traduzimos, para o nosso caso, os elementos de jogo escolhidos para o contexto educativo; como capturamos as manifestações de sucesso e insucesso de cada uma das estratégias de gamificação usadas.

Como já sabemos para Huang et al (2013) o planeamento da aplicação da gamificação, a um caso concreto na educação, deve ser feita através de 5 etapas sequências. Na tabela 4, apresentamos a forma como aplicamos essas 5 etapas. Em seguida, na tabela 5, explicamos em que consistem na intervenção educativa, cada uma das estratégias de gamificação e como medimos a sua intervenção na aprendizagem.

Quanto aos elementos de jogo principais estes foram traduzidos para o contexto educativo da seguinte forma:

- i) O **avatar** foi traduzido como um mapa de conceito do domínio de conteúdo TRI onde a disposição dos conteúdos desenha uma figura com aspecto humano (ver figura 11).
- ii) A **narrativa** foi traduzido, operacionalizada, em mnemónicas (ver figura 12/13)
- ii) A **cooperação** foi traduzida nas modalidades de disponibilização das fichas: em série e/ou em paralelo. Todos os alunos cooperando para a resolução de uma mesma questão (série) ou todos cooperando para o trabalho global do grupo através da questão/ões em que trabalharam (paralelo).
- iv) A **competição** foi traduzida na projecção, na zona do quadro, em 2 aulas de um quadro competitivo onde existia uma meta e um lugar de partida para cada grupo. Os grupos iam aproximando-se da meta à medida que iam respondendo às questões correctamente. Isto criou na sala de aula e nos grupos um ambiente competitivo (ver figura 15/16).
- v) O **feedback** foi traduzida no facto de as fichas de resolução na web quando submetidas retornarem pontuações e avaliarem a correcção da resposta (ver figura 13).

Os elementos de jogo consequentes, a Recompensa, a Restrição de tempo, e a Aversão à perda são consequência da Competição, Feedback e da Cooperação. Grosso modo a Recompensa, o sentimento de recompensa manifesta-se nas pontuações, a Restrição de tempo no facto de as questões, fichas e exercícios terem de ser respondidas num tempo de bom senso e num contexto máximo de 1 aula, e a Aversão a perda manifesta-se no facto de se estar num ambiente de competição e em algumas das fichas não haver possibilidade de voltar a submeter respostas de questões já respondidas.

A metodologia de Huang aplicada ao nosso caso

Tabela 4: Etapas de planeamento de aplicação da gamificação segundo a metodologia de Huang

Etapas	Questão a	Resposta. Uso da gamificação na	Resposta. Uso da
--------	-----------	---------------------------------	------------------

(Huang)	responder (Huang)	intervenção educativa de leccionação de conteúdos (fase de ensino)	gamificação na intervenção educativa de avaliação da aprendizagem (fase de avaliação)
Entendendo a audiência alvo e o contexto	Quem é o público-alvo e qual é o contexto que envolve o programa de educação?	período de observação de aulas e de outros contextos educativos	período de observação de aulas e de outros contextos educativos
Definindo aprendizagem e objectivos	O que se deseja que o aluno realize ao completar o programa de educação?	<p>i) Sintetizar e Relembrar conceitos de trigonometria e suas propriedades.</p> <p>ii) Recordar a teoria de limites e usar o limite notável, $\sin x/x$, quando x tende para zero: continuidade, assíntotas.</p> <p>iii) Obter por definição as derivadas do seno e do cosseno. Para isso usar as fórmulas da soma do seno e do cosseno</p> <p>iv) Obter regras de derivação para funções trigonométricas. Para isso usar a regra da derivação composta.</p> <p>v) Resolver problemas relacionados com situações reais.</p> <p>vi) Estudar números complexos, representação e operações.</p> <p>Realização de fichas de trabalho, ao 11ºano e ao 12º ano, sobre i), envolvendo elementos de jogo relacionados com a fase de ensino (Avatar + Narrativas) (1 tarefa)</p>	<p>Resolver em grupo ficha de problemas e fichas de trabalho, na web e em papel, com feedback imediato e pontuações para autoavaliação dos alunos, diagnóstico e avaliação em aprendizagem dos conteúdos leccionados.</p> <p>A execução deste item foi dividido em 3 tarefas.</p>
Estruturando a experiência	Como o programa de aprendizagem pode ser dividido e quais são os	<p>O programa de aprendizagem pode ser dividido em 4 partes:</p> <p>i) estudo de propriedades de funções trigonométricas,</p> <p>ii) estudo dos limites e do limite notável $\sin x/x$ quando x tende para zero,</p>	<p>A avaliação em aprendizagem é dividida em 3 partes: i) resolução, em grupo, de ficha de problemas sobre</p>

	pontos de divisão?	<p>iii) estudo das derivadas de funções trigonométricas</p> <p>iv) estudo de números complexos</p> <p>A divisão do programa de aprendizagem encontra-se na tabela 1 sobre conteúdos e tempos lectivos</p>	<p>propriedades de funções trigonométricas,</p> <p>ii) resolução, em grupo, de ficha de trabalho relativamente aos limites notáveis e derivadas de funções trigonométricas, e</p> <p>iii) resolução, em grupo, de ficha de trabalho sobre trigonometria e números complexos</p>
Identificando os recursos	Quais são os recursos necessários para gamificar?	i) Manual escolar, ii) Leituras (resumos da teoria), iii) o avatar, iv) tabela de mnemónicas, v) ficha de trabalho- na web, vi) fichas de trabalho vii) calculadora	<p>i) Leituras (resumos da teoria),</p> <p>ii) O avatar</p> <p>iii) ficha de trabalho-na web,</p> <p>iv) calculadora,</p> <p>v) smartphones,</p> <p>vi) Uso de forms na web, e</p> <p>vii) serviços da cloud do Google.</p> <p>viii) serviço de host da hostinger24</p>
Aplicando elementos de gamificação	Quais os elementos de gamificação que devem ser usados?	Foram usados 2 elementos de gamificação: Narrativa e Avatar	vão ser usados 8 elementos de jogo: Avatar, Narrativa, Feedback, Competição, Cooperação, Restrições de tempo, Aversão à perda, Recompensa

Prestando atenção ao planeamento construído, a metodologia de Huang que descrevemos na tabela 4, no item “Definindo aprendizagem e objetivos” que consiste em responder à questão “O que se deseja que o aluno realize ao completar o programa de educação?” tanto na coluna relativa à fase de ensino como na de avaliação existem referências a tarefas que o aluno realizou. Na totalidade é feita referência às 4 tarefas realizadas na intervenção educativa. Em seguida descrevemos em que consistiu cada uma dessas tarefas.

i) A tarefa 1 foi realizada na fase de ensino e consistiu na realização de 3 fichas de exercícios: a ficha do 11º ano; a ficha do 12º ano, ficha dos senos; e a ficha do 12º ano, ficha dos cosenos. A tarefa ocorreu em 4 aulas e foi uma intervenção nas 2 turmas, na de 11º ano e na turma de 12º ano. E correspondeu a 2

aulas em cada turma, 4 tempos lectivos¹⁴. Esta tarefa é a única tarefa onde se fez intervenção na turma do 11º ano. A tarefa consistiu na realização de questões de resposta rápida, sobre trigonometria, com o objectivo de fazer um diagnóstico sobre o conhecimento da turma relativa ao tema. No 12º ano a tarefa foi realizada na primeira aula de abordagem do tema trigonometria e serviu para sintetizar e lembrar os conhecimentos do ano anterior. No 11º ano foi a última aula do tema e serviu para sintetizar/consolidar conhecimentos e diagnosticar a aprendizagem do tema leccionado. Na tarefa houve a intervenção de vários elementos de jogo, os elementos de jogo protagonistas foram o avatar e a narrativa. O avatar e a narrativa são elementos de jogo com características de uso na fase de ensino pois um e outro têm por finalidade sistematizar/consolidar conhecimentos.

Os alunos tinham um avatar e uma tabela de mnemónicas construída a partir de narrativas sobre as propriedades das funções trigonométricas. Nesta tarefa os alunos em grupo resolviam uma ficha de exercícios sobre propriedades de funções trigonométricas, na web e em papel. Na ficha do 11º ano cada questão inclui um pequeno questionário sobre se usaram ou não mnemónicas na resolução da questão.

ii) As tarefas 2, 3 e 4 foram tarefas realizadas no momento de avaliação de aprendizagem e consistiram, de fichas de trabalho-na web, respectivamente das fichas de trabalho nº 4, 5 e 6. Essas fichas de trabalho consistiram respectivamente de: uma ficha de problemas, uma ficha de trabalho em que era possível repetir a submissão de uma ficha de trabalho onde não era possível repetir a submissão.

Tarefa 2: Nesta tarefa os alunos resolveram em grupo uma ficha com problemas, na web, envolvendo trigonometria. Após a submissão os alunos tiveram acesso à correção e pontuação obtida.

Tarefa 3: Nesta tarefa os alunos resolveram em grupo uma ficha de trabalho, na web, envolvendo limites conhecidos e derivadas de funções trigonométricas. Após a submissão os alunos tiveram acesso à correção e pontuação obtida e podiam voltar a submeter uma nova resolução. Existia um quadro competitivo, onde eram registados em tempo real os resultados obtidos pelos grupo. Em cada momento, online, o grupo só tinha acesso a uma e uma só questão da ficha de trabalho. Todo o esforço do grupo em cada momento foi concentrado na resolução de uma única questão da ficha.

Tarefa 4: Nesta tarefa os alunos resolveram em grupo uma ficha de trabalho, na web e online, sobre trigonométricas e números complexos. Após a submissão os alunos tiveram acesso à correção e pontuação obtida, não podiam voltar a submeter uma nova resolução. Existiam dois quadros projectados, um quadro competitivo onde eram registadas em tempo real os resultados obtidos por todos os grupos e outro quadro onde eram sinalizadas as respostas correctas ou erradas às questões. Em cada momento, online, o grupo tinha acesso a todas as questões da ficha de trabalho. O grupo podia trabalhar em várias questões em simultâneo.

¹⁴ Cada tempo lectivo é de 50 minutos

A partir da informação recolhida na realização das tarefas efetuamos a avaliação do uso das estratégias de gamificação na intervenção educativa. A forma como essa avaliação é feita está descrito na tabela 5.

Tabela 5: Aplicação e medição dos elementos de jogo.

Elemento de jogo	Aplicação na intervenção	Medição na intervenção
Avatar.	2 tempos lectivos de 11º ano de fim do tema trigonometria e 2 tempos lectivos do 12º ano de início do tema trigonometria onde foi apresentado o Srº Trigonometria Cubista e foi feita referência ao facto de as suas formas serem fórmulas trigonométricas. O Srº Trigonometria Cubista foi distribuído numa imagem e/ou foi desenhada no quadro.	A avaliação do elementos de jogo Avatar: realizada na tarefa 1. Variáveis a usar: <ul style="list-style-type: none"> ● Dos resultados obtidos nas fichas de trabalho (11º e 12º ano). ● De referências qualitativas ao avatar nas respostas. ● Dos apontamentos pessoais das aulas relativas às reações dos alunos quando foi apresentado o avatar.
Narrativa.	Numa aula de 11º ano de fim do tema trigonometria e numa aula do 12º ano de início do tema trigonometria. As propriedades das funções trigonométricas foram relatadas em breves histórias sobre o comportamento de trigonométricos indivíduos e co-indivíduos (matemática dual) e foi preenchida uma tabela de mnemónicas sobre as propriedades das funções trigonométricas (seno/Coseno, tg/cotg, sec/Cosec, etc...)(matemática dual)	Avaliação do elemento de jogo narrativa: realizada na tarefa 1. Variáveis a usar: <ul style="list-style-type: none"> ● Aparecimento nas resoluções de excertos da Tabela de mnemónicas sobre as propriedades das funções trigonométricas. ● Respostas a questões da ficha de exercícios sobre propriedades de funções trigonométricas. ● Respostas a questionário sobre o uso de mnemónicas.

Feedback.	<p>Nas tarefas 1, 2, 3, e 4 o elemento feedback apareceu como feedback imediato nas pontuação obtidas e na marcação das respostas como corretas. Ambos os dados foram enviados, para os alunos, imediatamente após a submissão das fichas de trabalho.</p> <p>Este contexto cria uma situação de feedback do trabalho que está a ser realizado pelos alunos. Nas tarefas 1, 2 e 3 os alunos podiam responder, online, mais de uma vez às questões colocadas. Na tarefa 4 uma vez submetida uma resposta não podia haver outra submissão.</p>	<p>Avaliação do elemento de jogo Feedback: realizada nas tarefa 2 e 3.</p> <p>Variáveis a ter em atenção:</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Número de questões respondidas em cada tentativa. ● Número de submissões por questão. ● Número de respostas corretas em cada tentativa. ● Número de questões erradas que são corrigidas.
Restrições de tempo.	<p>Na sala de aula foi dado um tempo limitado de resolução a todas as tarefa, tarefas 1, 2, 3 e 4. Este contexto criou restrição de tempo na execução das tarefas.</p>	<p>Avaliação da Restrições de tempo: nas tarefas 2,3 e 4.</p> <p>Variáveis a ter em atenção:</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Número de questões respondidas. ● Número de submissões por questão. ● Tempo (tempo médio) de resposta a cada questão. ● Evolução do tempo de resposta à medida que as respostas vão sendo submetidas.
Aversão a perda.	<p>Na tarefa 4, na realização da ficha de trabalho, os alunos só podiam submeter as respostas às questões uma vez. No momento de realização foram projectados dois quadros registando em tempo real os resultados que os grupos foram obtendo. Num dos quadros foram mostradas as questões em que cada grupo foi acertando e errando e no outro quadro aparece a pontuação. Este contexto criou nos grupos receio de perda.</p>	<p>Avaliação da Aversão a perda: na tarefa 4.</p> <p>Variáveis a ter em atenção:</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Tempo de resposta às questões. ● Relação entre tempo de resposta às questões e a evolução do quadro

		<p>competitivo.</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Produções e diálogos dos alunos.
Recompensa.	<p>A Recompensa manifestou-se nas pontuações obtidas nas diferentes tarefas. As compensações/recompensas importantes para o elemento de jogo Recompensa foram as pontuações que se obtiveram nas tarefas 2, 3 e 4.</p>	<p>Avaliação da Recompensa: na tarefa 2, 3, 4.</p> <p>Variáveis a ter em atenção:</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Número de submissões por questão. ● O aumento da classificação do grupo entre as tarefas mostra que o grupo se sentiu estimulado pela recompensa na aprendizagem. ● Produções e diálogos dos alunos.
Competição.	<p>A realização das tarefas 3 e 4 foi feita em ambiente de competição. Quando a tarefa estava a ser executada foi projectado na zona do quadro um quadro competitivo dos resultados que foram sendo obtidos. Isso criou na sala um ambiente competitivo. Além disso, na tarefa 3 em cada momento todos os elementos do grupo estiveram obrigatoriamente concentrados na mesma questão da ficha de trabalho, pois as questões aparecem em sequência umas após as outras. Na tarefa 4 as questões foram todas disponibilizadas em simultâneo permitindo que dentro do grupo pudessem existir simultaneamente várias questões a serem trabalhadas.</p> <p>A existência de um quadro competitivo, o facto de várias questões serem respondidas em simultâneo, e a diminuição dos tempos de respostas entre as questões são variáveis que mostram estímulos por competição.</p>	<p>Avaliação da Competição: na tarefa 3, 4.</p> <p>Variáveis a ter em atenção:</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Número de submissões por questão. ● Evolução dos tempos de respostas na tarefa 3, na tarefa 4. ● Número de questões que são trabalhadas em simultâneo na tarefa 4. ● Classificação do grupo. ● Produções e diálogos dos alunos.

Cooperação.	A cooperação esteve presente na forma como se realizaram as tarefas 3 e 4, tarefas realizadas em sequência (tarefa 3, todos os elementos do grupo a trabalharem na mesma questão) e a possibilidade de haver tarefas realizadas em paralelo (tarefa 4, podiam existir elementos do grupo a trabalharem em questões distintas).	<p>Avaliação da Cooperação: na tarefa 3, 4. A avaliação da cooperação vai ser feita através da comparação dos resultados obtidos na execução das tarefas 3 e 4.</p> <p>Variáveis a considerar:</p> <ul style="list-style-type: none"> ● O Score obtido. ● Número de submissões por questão. ● O tempo de execução de cada exercício. ● Produções e diálogos dos alunos.
-------------	--	---

3.4 Os Elementos de jogo

Nesta secção vamos relatar como os elementos de jogo principais são traduzidos para o contexto educativo, vamos descrever o elemento de jogo traduzido, o processo de ideação da sua construção, quando interessante, e vamos explicar como o aplicamos no contexto educativo. A descrição vai ser feita por esta ordem: avatar, narrativa, feedback, competição, e cooperação.

3.4.1 O Avatar

3.4.1.1 O avatar traduzido no processo educativo

Segundo a descrição que já fizemos do elemento de jogo Avatar ele foi traduzido como formulário do domínio de conteúdo TRI onde a disposição das fórmulas desenhou uma figura com aspecto humano (ver figura 10). Agimos dessa forma porque no aturado estudo e reflexão que fizemos, chegamos à conclusão que o avatar teria de: i) ser uma imagem, ii) ser uma personificação, por ser um avatar, iii) servir para sintetizar conhecimentos. Assim, criamos uma imagem, personificada num homem, que chamamos o Sr^o Trigonometria Cubista, cujas formas são obtidas através da descrição de fórmulas trigonométricas. Para sintetizar conhecimento, nas formas do Sr^o trigonometria, descrevemos as principais fórmulas, trigonométricas, ensinadas no ensino secundário.

3.4.1.2 O Sr^o Trigonometria Cubista

Nesta subseção vamos descrever o processo de ideação que nos levou a construir o Sr^o Trigonometria Cubista, o nosso avatar. O processo de ideação iniciou-se com a reminiscência do Sr^o Número, que é um personagem que usei, durante anos, como forma lúdica de apresentar o departamento de matemática a alunos do 1^o ciclo.

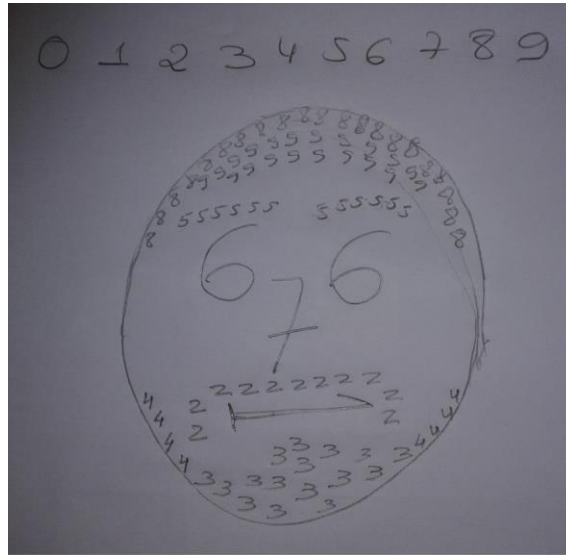


Figura 6: O Sr^o Número

Da ideia do Sr^o Número surgiu a ideia de criar o Sr^o Trigonometria. Inicialmente foram criados dois avatares, fig 7 e fig 8. Olhando para o avatar da fig 7 parece que o avatar está a olhar para o lado pois marcamos a negro o ângulo, α , para evidenciar o ângulo que aparece na descrição das fórmulas, do sin, cos, tg, etc...; $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\text{tg}(\alpha)$. Na figura 8 o avatar parece estar a olhar de frente, porque o triângulo que faz parte do olho do avatar tem marcado a negro o ângulo recto, para evidenciar que as fórmulas são fórmulas obtidas em triângulos retângulos.

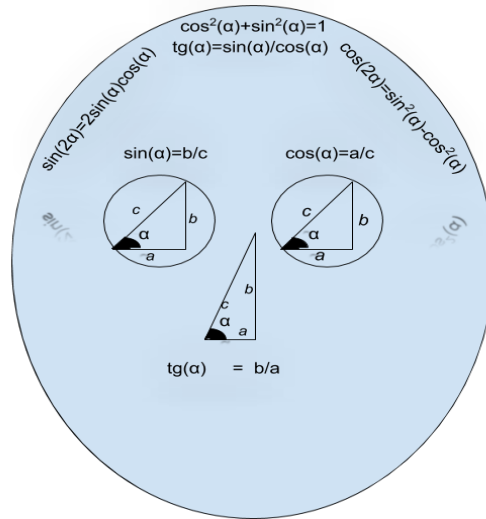


Figura 7: O Sr^o Trigonometria a olhar de lado.

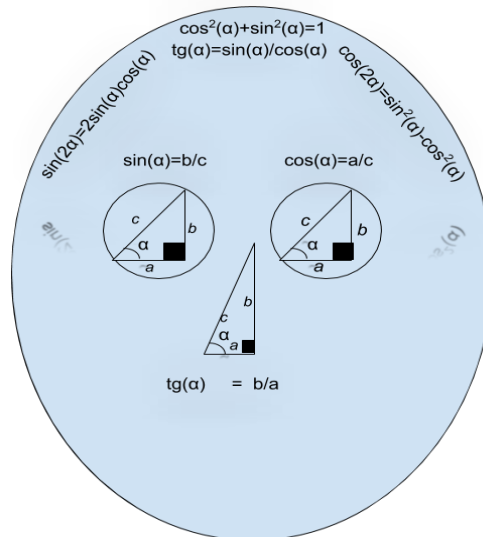


Figura 8: O Sr^o Trigonometria a olhar de frente.

Assim, ficamos com duas imagens, dois avatares, mas pretendemos uma só imagem, um só avatar. Durante o processo de ideação ocorreu-nos que estávamos perante um problema que era resolúvel pela técnica que Picasso criou e que deu origem à fase cubista. No cubismo pinta-se um objecto em várias perspectivas conservando a visão geral do que o objecto é. Ocorreu-nos ainda, para exemplo, um quadro, o Les Demoiselles d'Avignon, onde isso é evidente. Seguindo a ideia de um objecto numa mesma imagem ser colocado em várias perspectivas sem perder a sua unidade e significado, surgiu-nos a ideia do Sr^o Trigonometria Cubista. Assim, sem perder as formas humanas e em simultâneo, teríamos nos triângulos marcas a negro para os ângulos, para o ângulo que é usado nas fórmulas trigonométricas e para o ângulo recto, com o objectivo de evidenciar respectivamente o ângulo usado nas fórmulas e o facto de os triângulos terem de ser retângulos.



Figura 9: Les Demoiselles d'Avignon (Cubista, Picasso).

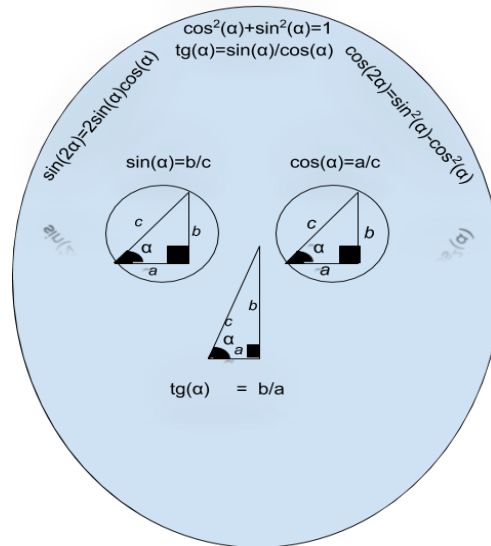


Figura 10: O Sr^o Trigonometria Cubista.

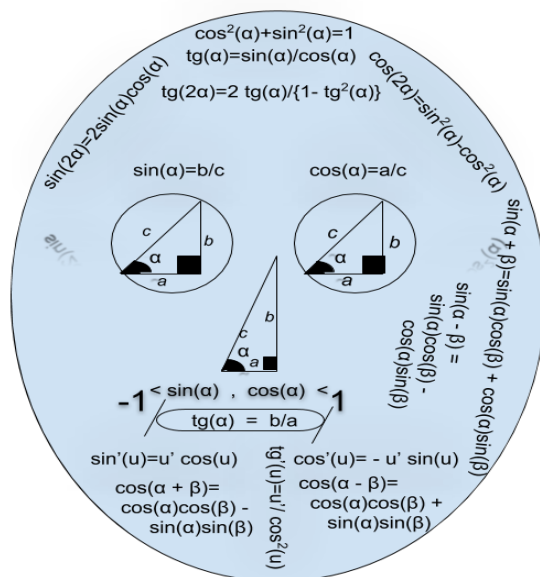


Figura 11: O ultimo Avatar (desenhado).

Figuras, desenhadas à mão, semelhantes às figuras 6, 7, 8, e 10 foram apresentadas na sala de aula. A figura 9 também foi apresentada em sala de aula, imediatamente antes da figura 10. A figura 11 representa o avatar mais detalhado (Vieira, Martinho, Domingues, 2018)

3.4.2 A Narrativa

3.4.2.1 As narrativas no processo educativo

Para traduzir o elemento de jogo a(s) narrativa(s) procuramos no processo educativo práticas associadas a narrativas e deparamo-nos com as mnemónicas. As mnemónicas são auxiliares de memória que, através de pequenas narrativas, associam novos conhecimentos a ideias/construções/descrições “amigáveis” com o conhecimento já possuído. Para o nosso caso construímos uma tabela (ver tabela 6/7), de mnemónicas, onde constam mnemónicas que conhecemos e que usamos, na nossa prática “diária”, desde há muito tempo e que nos têm auxiliado a memória sobre propriedades das funções trigonométricas.

Portanto, o elemento de jogo a(s) narrativa(s) foi traduzida no processo educativo como mnemónicas.

3.4.2.2 A tabela das mnemónicas

O elemento de jogo Narrativas foi traduzido numa tabela de mnemónicas. Na tabela de mnemónica as narrativas foram expressas por descrições orais e através de desenhos, e/ou pequenos apontamentos escritos (ver tabela 6/7). Para exemplificar o uso de Mnemónicas e de como preenchemos a tabela podemos deixar aqui o testemunho que se segue.

As mnemónicas que construímos na sala de aula foram antecedidas de um relato no qual personificamos o Sin e o Cos e descrevemos o Sin como um indivíduo virtuoso e às direitas e o Cos como o contrário.

Passados à construção da tabela de mnemónicas e no caso da primeira mnemónica da tabela, está escrito na tabela, “O seno não é preguiçoso (O senhor seno é um indivíduo com mts qualidades)”. Para esse item descrevemos uma das qualidades do Sin, não ser preguiçoso. Na descrição oral que fizemos dissemos “(...) como o seno não é preguiçoso, ele de/em pé, em $\pi/2$ (90 graus), é que vale mais, vale 1, o $\text{Sin}(\pi/2)=1$. Deitado, em descanso, o Sin não vale nada, $\text{sin}(0)=\text{sin}(\pi)=0$ ”. Em seguida preenchemos a coluna respectiva da descrição e escrevemos um referencial bidimensional onde aparecia marcado o ângulo $\pi/2$ e escrevemos “ $\text{sin}(\pi/2)=1$ ” seguido da expressão “de pé vale tudo” e “ $\text{sin}(0)=0$ ” seguido da expressão “deitado não vale nada” (ver tabela 6-7). E foi assim construída a primeira entrada da tabela. A construção da primeira entrada da tabela de mnemónicas descrita serviu para de forma imediata construir a quarta entrada, que foi a que se seguiu, que é sobre o coseno, sobre o facto de o Cos ser preguiçoso. Essa Mnemónica aparece na tabela como “Coseno é preguiçoso (o Senhor Coseno é um indivíduo com características complicadas)”. A primeira entrada serviu ainda para comparar o Sen com o Cos e dizer que como “o Cos é preguiçoso deitado, em zero rad (zero graus), é que ele vale mais, $\text{Cos}(0)=1$ e que em pé não vale nada”. Essa oralidade traduziu-se na seguinte acção escrita. Na coluna descrição, na 4ª entrada, aparece escrito um referencial e as expressões “ $\text{Cos}(0)=1$ deitado tem o maior valor” e “ $\text{Cos}(\pi/2)=0$ de pé nada vale”. E foi dessa forma que fomos construindo a tabela.

Tabela 6: Tabela de Memórias construída na sala de aula (continua)

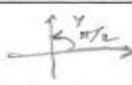
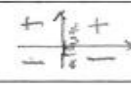

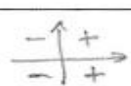
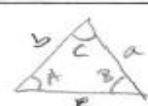
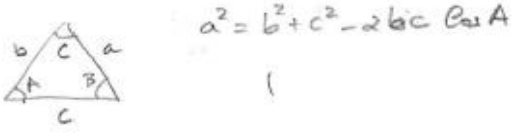
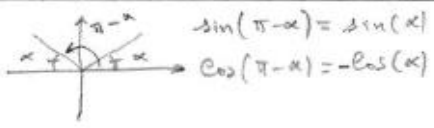
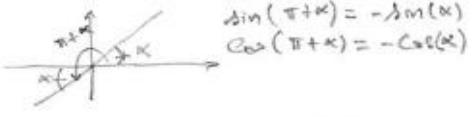
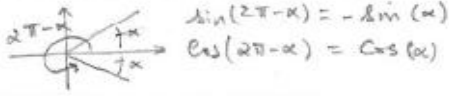
Mnemônicas	Descrição																
O seno não é preguiçoso (o Senhor seno é um indivíduo com mts qualidades)	 $\text{sen}(\pi/2) = 1$ • de Joe vale tudo $\text{sen}(0) = 0$ • deitado nos vale nada																
O seno não é mentiroso	$\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$ mente no sinal																
O seno não nos tenta enganar	 alturas positivas • abrigos positivos																
Coseno é preguiçoso (o Senhor Coseno é um indivíduo com características complicadas)	 $\text{cos} 0 = 1$ • deitado tem o maior valor $\text{cos}(\pi/2) = 0$ • do pé nada vale																
Coseno é mentiroso	$\text{cos}(-x) = \text{cos} x$ mente no sinal																
Coseno tenta enganar	 em alturas positivas tomamos valores negativos																
Coseno e Seno são complementares	$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$ FFT																
Tabela trigonométrica	<table border="1" data-bbox="665 903 1136 1092"> <thead> <tr> <th></th> <th>$\pi/6$</th> <th>$\pi/4$</th> <th>$\pi/3$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>sen</td> <td>$1/2$</td> <td>$\sqrt{2}/2$</td> <td>$\sqrt{3}/2$</td> </tr> <tr> <td>cos</td> <td>$\sqrt{3}/2$</td> <td>$\sqrt{2}/2$</td> <td>$1/2$</td> </tr> <tr> <td>tg</td> <td>$1/\sqrt{3}$</td> <td>1</td> <td>$\sqrt{3}$</td> </tr> </tbody> </table>		$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	sen	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	tg	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$														
sen	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$														
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$														
tg	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$														
Mnemônica da lei dos senos	 $\frac{\text{sen} A}{a} = \frac{\text{sen} B}{b} = \frac{\text{sen} C}{c}$																

Tabela 7: (continuação) Tabela de Mnemónicas construída na sala de aula

Mnemónica da lei dos cosenos	
Mnemónica de redução do 2º quadrante para o 1º quadrante	
Mnemónica de redução do 3º quadrante para o 1º quadrante	
Mnemónica de redução do 4º quadrante para o 1º quadrante	
Mnemónica de conversão entre radianos e graus	<p>Regra de 3 Simples</p> $2\pi \text{ rad} \xrightarrow{\quad} 360^\circ$ $5 \text{ rad} \xrightarrow{\quad} x$ $x = \frac{5 \times 360}{2\pi}$

Para melhor estudar as mnemónicas categorizamos as mnemónicas construídas e a cada categoria atribuímos um nome e uma cor (ver tabela 8). Na tabela 8 e nos agrupamentos cujo nome só por si torne inteligível as mnemónicas que a constituem não apresentamos comentários sobre as mnemónicas que a constituem.

Tabela 8: categorização das mnemónicas usadas

	Legenda	Categorização das Mnemónicas	
Amarelo		Mnemónicas de personificação explícita	O Sin é um indivíduo com comportamento e ideias correctas. O Cos é um indivíduo com comportamento e ideias reprováveis
Azul claro		Mnemónicas de personificação implícita	O Sin não mente no sinal; $\sin(-x) = -\sin(x)$. O Cos mente no sinal, $\cos(-x) = \cos(x)$
verde		Mnemónica de argumentos elementares para o sin, cos, tg	Mnemónicas para obter valores para Sin, Cos e Tg em argumentos simples. Mnemónica para a construção da tabela trigonométrica, 30°, 45° 60°, e Mnemónicas para obter valores de Sin, Cos e Tg em argumentos de 0°, 90°, 180°, 270°, 360°
azul escuro		Mnemónicas para redução ao 1º quadrante	
bordo		Mnemónicas para saber o sinal do Sin, Cos e Tg em cada um dos quadrantes	
marrom		Mnemónicas para definir Sin, Cos e Tg	
vermelho		Mnemónica para regra de 3 simples	
rosa		Mnemónica das lei dos sin e dos Cosenos	
cinzento		Mnemónica da Fórmula fundamental da trigonometria	

3.4.3 O avatar e as narrativas na sala de aula

O avatar e a narrativa foram usados no mesmo momento da intervenção educativa. Por isso optamos por descrevê-los aqui numa subsecção conjunta. A intervenção educativa consistiu de aulas ao 11º ano e ao 12º ano. Duas aulas, quatro tempos lectivos, para cada um dos anos. Em cada um dos anos, 11º ano e 12º ano, a utilização do avatar e da narrativa na intervenção educativa tiveram dois momentos. O momento de gamificação e o da resolução de tarefas.

3.4.3.1 Momento de gamificação

A intervenção educativa, em cada um dos anos, foi dividida em 2 grandes momentos, o momento de gamificação e o da resolução de tarefas. No momento de gamificação foi apresentado o Srº Trigonometria Cubista. A partir dele os alunos puderam ter à mão fórmulas e definições trigonométricas. O Avatar, como elemento de síntese do conhecimento. Os alunos ficam com um resumo, numa imagem e nas suas mãos, das fórmulas trigonométricas. Após a apresentação do avatar, foi entregue aos alunos uma folha de mnemónicas e esta foi preenchida enquanto foram feitas pequenas narrações acompanhadas com desenhos.

Após o momento de gamificação os alunos ficaram em mão com dois objectos de síntese/resumo da matéria, o avatar, onde podiam consultar fórmulas ensinadas e a tabela das mnemónicas onde podiam encontrar truques para se recordarem das propriedades das funções trigonométricas.

3.4.3.2 Momento de resolução das tarefas

Para o outro momento educativo, o da resolução da tarefa, preparamos um conjunto de exercícios, que disponibilizamos aos alunos, em quiz, na internet¹⁵ e que lhes entregamos também em papel. A ficha de tarefas em papel entregue aos alunos do 12º ano (anexos) é exatamente a mesma que está na web e a ficha entregue aos alunos do 11º ano contém uma única diferença em relação à que estava na web. A ficha do 11º ano, em papel (anexo), continha em cada exercício uma opção adicional chamada Mnemónicas com dois quadrados S e N, para os alunos colocarem se usaram (S) ou não (N) Mnemónicas na resolução do exercício (ver figura 12). Os alunos do 11º ano foram agrupados por carteira, formando grupos de 2, 3 elementos conforme a carteira/mesa, dando 11 grupos de trabalho. Os alunos do 12º ano foram agrupados em grupos de 3 ou 4 elementos, deu um total de 8 grupos de trabalho. Foi ainda pedido aos alunos, em cada uma das turmas, que no caso de usarem alguma mnemónica que não tivesse sido mencionada que a descrevessem na folha de exercícios em papel. Nenhum dos grupo apresentou qualquer descrição nova.

¹⁵ <https://bit.ly/2p2e5PY> (Ficha 1_1, do Seno, 12º ano), <https://bit.ly/2VclZr1> (Ficha 1_2, do Cos, 12º ano), <http://goo.gl/3jDKPy> (Ficha, 11º ano)

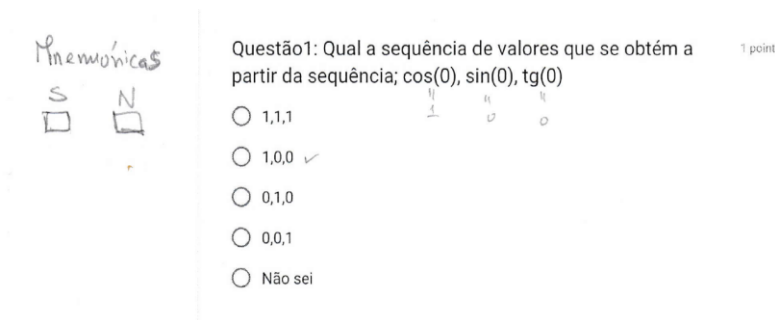


Figura 12: excerto da ficha de trabalho, em papel, entregue no 11º ano

3.4.4 O Feedback

3.4.4.1 O Feedback no processo educativo

Alguns dos elementos de jogo, como o Feedback, estão presentes no processo de ensino e aprendizagem e na sala de aula desde sempre. Para esses elementos a diferença está que neste projecto são estudados, pensados, desenhados, e usados como parte de um todo, a gamificação.

O Feedback está presente desde sempre no processo de ensino e aprendizagem como elemento consequente da comunicação. Neste estágio ele apareceu com essa naturalidade em questões/dúvidas e respostas na sala de aula entre professor(estagiário)/aluno(s) e apareceu também nas pontuações e nas correcções que retornam para os alunos após a submissão das fichas de trabalho (ver figura 13). O Feedback é um elemento essencial do diagnóstico e da avaliação.

3.4.4.2 Pontuações e correcções

A figura 13 é ilustrativa da forma como o Feedback foi usado na sala de aula. A figura 13 é uma composição de imagens que demonstram o processo em que apareceu o Feedback; nela temos excertos de uma ficha de trabalho, da sua submissão, e do retorno (Feedback) dos resultados enviados. No projecto para todas as fichas de trabalho dadas na sala de aula, que tiveram implementação na web, existiu retorno semelhante. Este retorno foi implementado em forms do google Form que existem na Cloud da google. Os alunos submeteram as questões e receberam o feedback, ambos, por smartphone. O Feedback consistiu sempre na pontuação dos resultado de cada questão, do resultado total das questões respondidas, e da indicação de se essa resposta estava correcta ou não. Em algumas fichas de trabalho e no caso de a resposta não estar correcta o Feedback continha também a resposta correcta. Este tipo de prática lectiva está a generalizar-se devido às clouds.

Ficha de Trabalho/Problemas

Uma rolha de cortiça foi colocada num reservatório com líquido. Através de um sistema mecânico é possível provocar ondulação na superfície da água. Essa ondulação, é provocada durante 1 minutos e, é modelada pela função $d(t)=40 + 2,5 \cos(0,4t)$, sendo: t- o tempo em segundos após o início da ondulação, d(t) - a distância em centímetros da rolha ao fundo do reservatório.

Indique o seu grupo de trabalho

Choose ▾

1- Ao fim de quanto tempo, pela primeira vez, após o início da experiência, a distância da rolha ao fundo do reservatório é máxima? (arredonde o resultado obtido) 1 point



✗ 2- Quanto tempo faltava para o fim da experiência quando, pela última vez, a distância da rolha ao fundo do reservatório foi mínima? (arredonde o resultado obtido) 0/1

- 11 segundos ✗
- 5 segundos
- 16 segundos
- 27 segundos
- Não consegui resolver

Correct answer

- 5 segundos

✓ 3- Sabe-se que um intervalo com amplitude igual ao período positivo mínimo da função é $[\pi/7, p]$, p - real. Determine o valor de p. O valor de p é? 1/1

- $36/7 * \pi$ ✓
- $34/7 * \pi$
- $30/7 * \pi$
- $40/11 * \pi$
- Não consegui resolver

Figura 13: Composição de imagens: ficha de problemas/pós submissão/feedback (ficha n° 4)

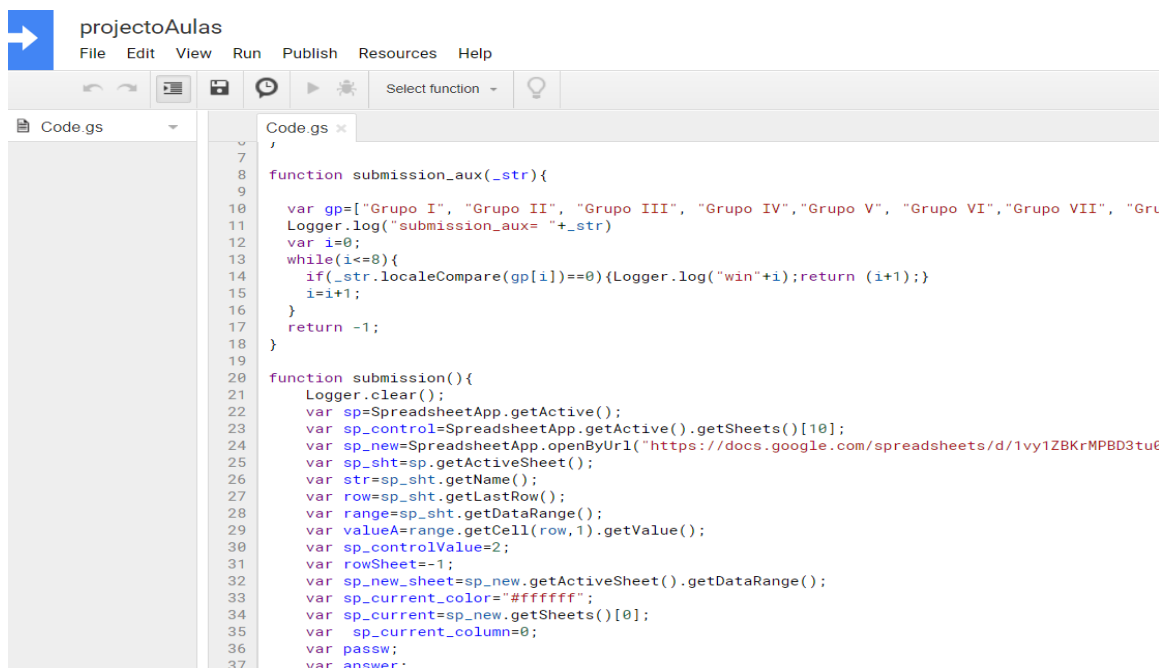
3.4.5 A Competição

3.4.5.1 A Competição no processo educativo

O elemento de jogo Competição apareceu na sala de aula através de quadros competitivos projectados na aula onde apareciam registos, de dados em tempo real, das respostas. Na competição realizada através da ficha n° 5 (tarefa 3) existia somente um tipo de quadro. Um quadro onde apareciam registadas as pontuações (ver figura 16). Durante a execução da tarefa 3 resultou evidente por comentários dos alunos que devíamos incluir um outro quadro onde aparecessem as respostas respondidas (por número de questão) marcando, com cores distintas, as questões respondidas corretamente (talvez usando o verde), as respondidas erradamente (talvez usando o vermelho) e as por responder (talvez deixando a branco). E assim na tarefa 4 incluímos o quadro cuja necessidade havia emergido. Assim, para a competição executada na tarefa 4 foi preparado um site de competição com dois quadros: um para pontuações (ver figura 16) e o outro para marcação das questões certas, erradas e por responder (ver figura 17). As imagens da figura 16 e 17 são as imagens em frontOffice e correspondem à da parte do site onde está cada um dos quadros competitivos.

A ideia desses quadros, pelo menos de um deles, é a de simularem uma corrida entre os grupos. Este elemento de jogo, Competição, apareceu nas tarefas 3 e 4 relativas respectivamente às ficha 5 e ficha 6. Na figura 14 mostra-se uma figura do backOffice onde as imagens dos quadros competitivos foram programados (excerto de um script) para o frontOffice. A figura 15 mostra os quadros competitivos da tarefa 4 em backOffice.

Os quadros competitivos e as dinâmicas das respostas criaram na sala de aula um ambiente dinâmico e competitivo entre grupos.



```
projectoAulas
File Edit View Run Publish Resources Help
Code.gs
Code.gs x
7
8
9
10 function submission_aux(_str){
11     var gp=["Grupo I", "Grupo II", "Grupo III", "Grupo IV", "Grupo V", "Grupo VI", "Grupo VII", "Gru
12     Logger.log("submission_aux= "+_str)
13     var i=0;
14     while(i<=8){
15         if(_str.localeCompare(gp[i])==0){Logger.log("win"+i);return (i+1);}
16         i=i+1;
17     }
18     return -1;
19 }
20
21 function submission(){
22     Logger.clear();
23     var sp=SpreadsheetApp.getActive();
24     var sp_control=SpreadsheetApp.getActive().getSheets()[10];
25     var sp_new=SpreadsheetApp.openByUrl("https://docs.google.com/spreadsheets/d/1vy1ZBKrMPBD3tu0
26     var sp_sht=sp.getActiveSheet();
27     var str=sp_sht.getName();
28     var row=sp_sht.getLastRow();
29     var range=sp_sht.getDataRange();
30     var valueA=range.getCell(row,1).getValue();
31     var sp_controlValue=2;
32     var rowSheet=-1;
33     var sp_new_sheet=sp_new.getActiveSheet().getDataRange();
34     var sp_current_color="#ffffff";
35     var sp_current=sp_new.getSheets()[0];
36     var sp_current_column=0;
37     var passw;
38     var answer;
```

Figura 14: Figura onde é mostrado programado o backOffice dos quadros competitivos (cloud da google).

3.4.5.2 Os quadros competitivos

Nesta secção mostramos os quadros que foram usados para a criação do elemento de jogo competição.

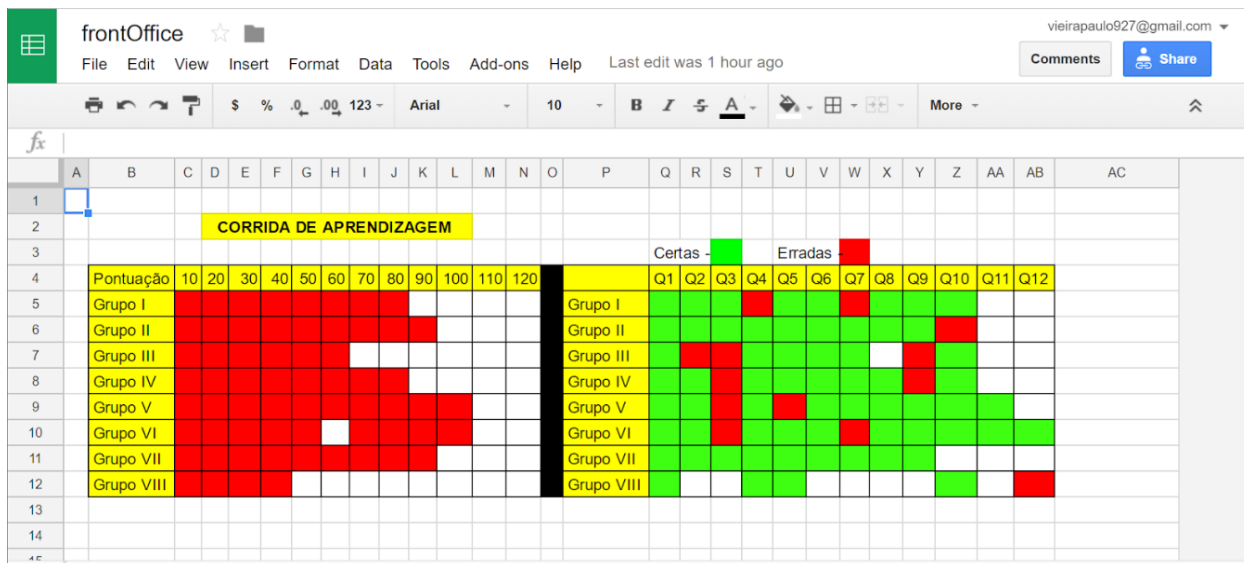


Figura 15: Imagem em backOffice, esta imagem é enviada para o site (frontOffice).

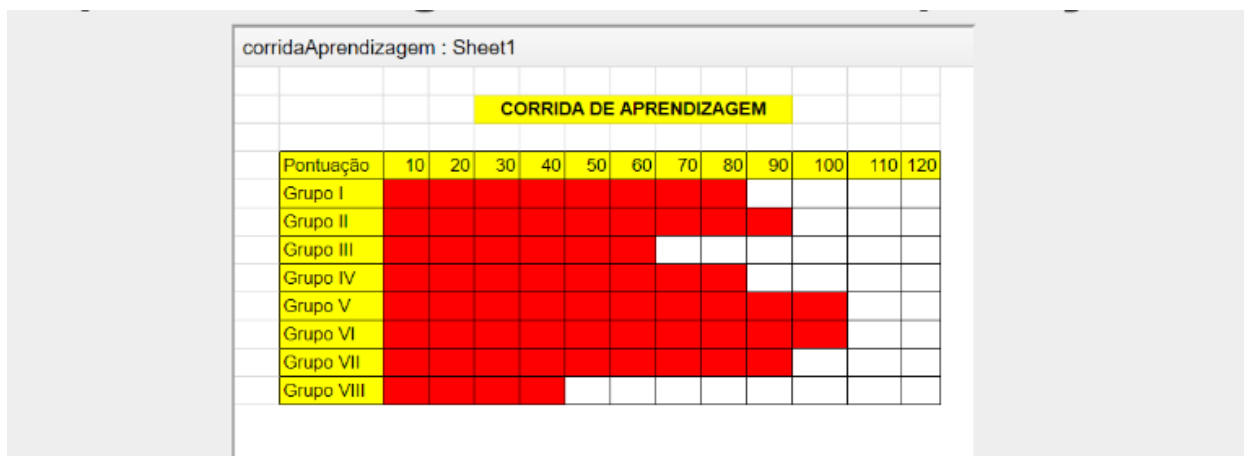


Figura 16: Quadro de aprendizagem em competição.

A Figura 16 corresponde a um figura dinâmica da competição, projetada na sala de aula, onde foram automaticamente e em tempo real registados as aproximações à meta, por grupo, resultante das respostas às questões ¹⁶

¹⁶ Este é o quadro de pontuações resultante da execução da tarefa 4. Na tarefa 3 existiu um quadro semelhante.

Certas e Erradas : Sheet1												
	Certas -			Erradas -								
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12
Grupo I												
Grupo II												
Grupo III												
Grupo IV												
Grupo V												
Grupo VI												
Grupo VII												
Grupo VIII												

Figura 17: Questões certas e erradas na ficha nº 6.

A Figura 17 é uma figura dinâmica da competição, projetada na sala de aula, e nela foram automaticamente e em tempo real registados os resultados positivos/negativos, por grupo, das respostas às questões.

3.4.6 A Cooperação

3.4.6.1 A Cooperação no processo educativo

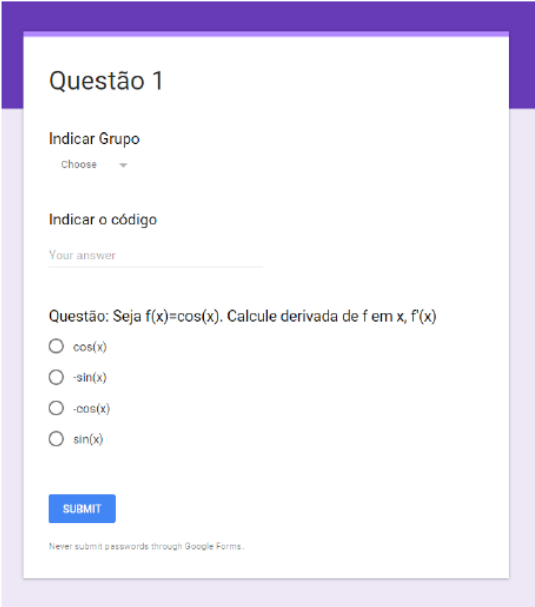
O elemento de jogo Cooperação consistiu na contribuição de cada um dos elementos do grupo para a realização das tarefas que o grupo estava incubido. Os grupos estavam sujeitos a 2 tipos distintos de ambientes ambivalentes: ambivalência 1 e ambivalência 2.

Ambivalência 1: esta ambivalência é estabelecida pelo acesso às questões da ficha de exercícios. Na realização das tarefas: numa tarefa (tarefa 3) o grupo só tinha acesso em cada momento a uma questão da ficha de trabalho. O grupo acedia à questão seguinte quando submetia a resposta à questão em que estava a trabalhar (ver figura 18) ou, noutra tarefa (tarefa 4) as questões foram todas simultaneamente disponibilizadas em um site e o grupo em cada momento tinham acesso a todas as questões (ver figura 19). Esta ambivalência, na realização, em que os grupos se moveram origina diferentes posturas de cooperação. Num contexto todos os elementos do grupo estão a trabalhar na mesma questão, no outro contexto pode haver distribuição de questões entre os elementos do grupo o que cria outro tipo de cooperação entre os elementos do grupo.

Ambivalência 2: esta ambivalência consistiu no facto de os grupos puderem em certas tarefas voltar a responder às questões já respondidas ou não o poderem fazer. O que cria também diferenças na cooperação.

3.4.6.2 Processo de ensino-aprendizagem em série e paralelo (Ambivalência 1)

Ao processo de aprendizagem em que ao grupo só é permitido acesso a uma questão em cada momento é designada como processo de aprendizagem em série e ao outro (contrário) é designado por processo de aprendizagem em paralelo. A implementação do processo em série pode ser feito através de uma sucessão de *forms* e esse foi o processo seguido (ver figura 18). Já o processo em paralelo exige a construção de um site onde todas as questões estão simultaneamente disponibilizadas e foi esta a implementação seguida (ver figura 19). Os processos foram aplicados em intervenções e momentos distintos.



The image shows a screenshot of a Google Form titled "Questão 1". The form is set against a white background with a purple border. It contains the following elements:

- Questão 1**: The title of the question.
- Indicar Grupo**: A dropdown menu with the text "Choose" and a downward arrow.
- Indicar o código**: A label for the code field.
- Your answer**: A text input field.
- Questão: Seja $f(x)=\cos(x)$. Calcule derivada de f em x , $f'(x)$** : The main question text.
- Options**: Four radio button options: $\cos(x)$, $-\sin(x)$, $-\cos(x)$, and $\sin(x)$.
- SUBMIT**: A blue button to submit the answer.
- Footer**: A small text at the bottom: "Never submit passwords through Google Forms."

Figura 18: Questionário da ficha de trabalho n° 5

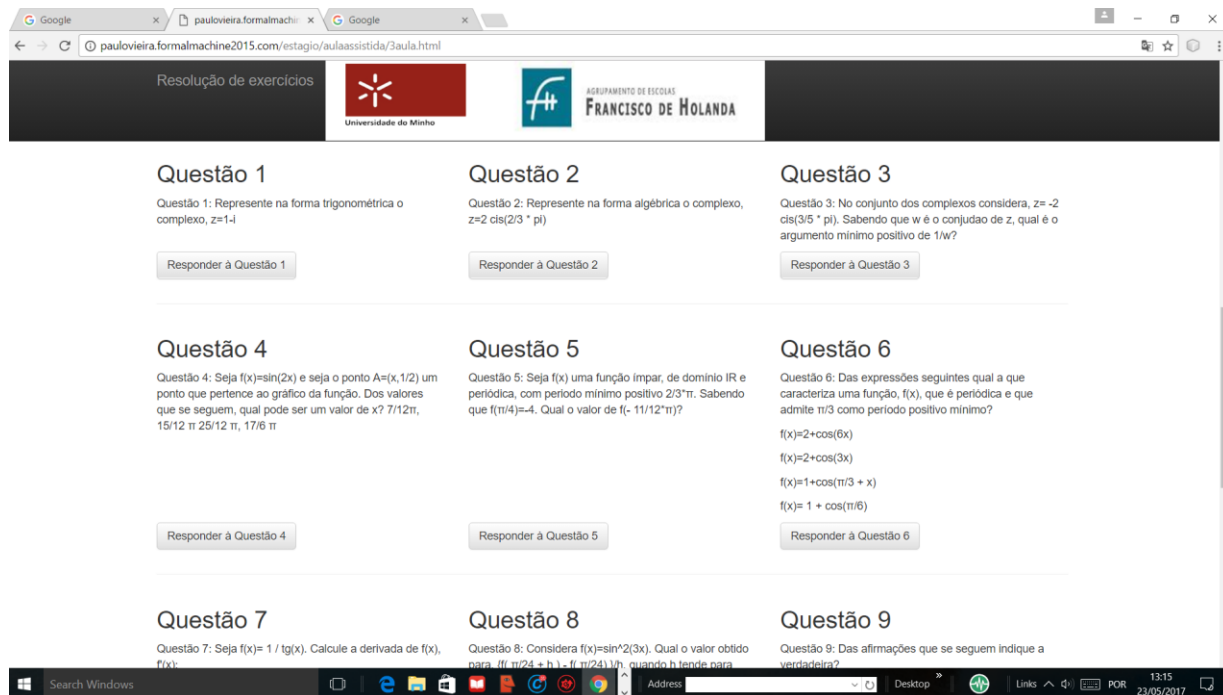


Figura 19: Site onde constavam todas as questões das tarefas (aprendizagem em paralelo) ficha n° 6.

3.4.6.3 Processo de ensino-aprendizagem, Ambivalência 2

A ficha de trabalho n° 6 foi realizada sob a condição de submissão única, após uma submissão os alunos não podiam voltar a submeter a mesma questão. Contrariamente, na ficha de trabalho n° 5 cada questão podia ser submetida múltiplas vezes contando sempre a última submissão. Isto teve óbvia influência no comportamento dos elementos do grupo e influência sobre o resultado da sua cooperação.

3.4.7 Competição e Feedback, Competição e Cooperação na sala de aula

Os elementos de jogo cooperação, competição e feedback originaram o aparecimento de outros três elementos de jogo como consequentes, a Recompensa, Restrição de tempo e a Aversão a perda. Para exemplo vejamos alguns casos. A Recompensa apareceu claramente embebida no Feedback basta prestar atenção à figura 13 e reparar-se que nesse elemento de jogo foram atribuidos pontos e classificações, ou seja, recompensas. Outro exemplo, a Restrição de tempo foi uma necessidade que surgiu do facto de haver um programa por cumprir e da necessidade de ser realizada a Competição. A Competição só por si implica que a realização de tarefas se executasse no tempo de uma única aula.

A Cooperação, Competição e Feedback ocorreram respectivamente nas tarefas: 3 e 4; 3 e 4; e 1, 2, 3, e 4. A Recompensa, Aversão a perda e a Restrição de tempo ocorreram nas tarefas respectivamente: 2, 3, 4 ; 4; e 1, 2, 3, 4. Estas tarefas foram aplicadas à turma do 12° ano. Para as realizar os alunos foram agrupados em 6 a 8 grupos, dependendo da tarefa, e trabalharam sobre fichas de trabalho online. Cada grupo tinha 3/4 elementos.

3.4.7.1 Momento de gamificação e resolução de tarefas

Nos elementos de jogos Cooperação, Competição e Feedback a gamificação e a resolução de tarefas ocorrem em momentos quase simultâneos. O único desfasamento resultou do processo de gamificação a usar ter de ser explicado. Então antes da resolução da tarefa existiu, sempre nas tarefas onde ocorreram estes elementos de jogo, um breve briefing de cerca de 5 minutos onde se explicou como decorreria a aula e se executaria a tarefa planeada. Após isso passou-se a resolução da tarefa.

4. Dados: tratamento e análise

Nesta secção abordamos o conceito de abdução, seguido de tópicos de estatística. Por último para cada um dos elementos de jogo vamos analisar os dados recolhidos. Foram recolhidos dados quantitativos e qualitativos. Os dados de natureza quantitativa são tratados usando estatística descritiva. Os dados de natureza qualitativa, neste trabalho, são usados para complementar as conclusões, e servem para evidenciar situações relativas ao engajamento.

As conclusões da análise relativas ao engajamento são obtidas por, dedução, indução e abdução. Nesse sentido começamos com uma subsecção, chamada Abdução, na qual definimos Abdução. Posteriormente apresentamos a análise de dados e vamos descrevê-la em duas novas subsecções. A subsecção Avatar e Narrativas e a subsecção Competição, Cooperação e o Feedback.

4.1 Abdução

Existem 3 formas diferentes de obter conclusões: a dedutiva, a indutiva, e a abductiva (Haig, 2005).

Na dedutiva, a conclusão é sempre verdadeira desde que as premissas sejam verdadeiras. Consiste de a partir de regras gerais concluir acerca de regras particulares.

Premissas: i) Todos os homens são mortais, ii) Sócrates é homem

Conclusão: Sócrates é mortal

A verdade da conclusão deriva diretamente da verdade das premissas. O que é inferido é necessariamente verdade se as premissas forem verdadeiras. Esta forma de conclusão faz prova em matemática.

A conclusão indutiva, pode nem sempre ser verdadeira. Mas aqui há alguma confusão por nas teorias dedutivas existirem mecanismos de provas chamados de indução.

Permissas:

i) o primeiro dominó, dominó 1, tomba sobre o segundo dominó, dominó 2

ii) Se o i -ésimo dominó, dominó na posição i , tombar, então tomba o $i+1$ -ésimo dominó, dominó na posição $i+1$

Então Todos os dominós tombarão

Quando as conclusões são obtidas desta forma, na verdade são conclusões dedutivas. O raciocínio anterior é uma raciocínio que faz prova matemática e é designado por indução nas teorias dedutivas. Mas não é a

este raciocínio que aqui chamamos de raciocínio indutivo. Separados os casos com o nome de indução consideramos que as conclusões por indução surgem quando a partir de regras particulares criam-se regras gerais. As suas conclusões são muitas vezes obtidas através de pensamento probabilístico, estatístico, e assintótico. Exemplo, (Douven, 2017)

Permissas:

- i) 96% dos estudantes de colégios flamencos falam ambas Alemão e Francês
- ii) Lousie é estudante num colégio flamenco

Conclusão:

Lousie fala alemão e francês

Obviamente que esta conclusão não deriva das premissas, e pode mesmo nem sequer ser verdadeira apesar das premissas o serem. Louise pode fazer parte dos 14% que não falam ambas as línguas. O que ocorre é que tem um alto grau de probabilidade frequencista, assintótico, de ser verdadeira. Este raciocínio não faz prova matemática mas é um mecanismo que participa na construção de ciência em várias áreas como forma de raciocínio para conhecimento à posteriori¹⁷.

A conclusão abductiva consiste de a partir de observações incompletas obter a melhor predição possível. Esta predição pode nem sempre ser verdadeira mas é a melhor possível no contexto em que ocorreu. As suas conclusões são importantes no contexto de descoberta científico, para a geração de hipóteses e para a justificação de hipóteses.

Na geração de hipóteses: (Peirce on abduction¹⁸, Douven, 2017)

O facto surpreendente, C, é observado

Se A fosse verdade então C seria óbvio

Assim, Existe razão para suspeitar que A é verdade

Na justificação de hipóteses: (Douven, 2017)

ABD1

Dada a evidência E e as explicações do candidato H1,..., Hn de E,
inferir verdade para o Hi que melhor explica E.

ABD2

Dada a evidência E e as explicações do candidato H1,..., Hn de E,
inferir a verdade do Hi que explica E melhor, desde que Hi seja satisfatório / bom o suficiente para a explicação.

¹⁷ Conhecimento à priori e conhecimento à posteriori (Kant, 1999)

¹⁸ Supplement to Abduction (Douvan, 2017)

ABD3

Dada a evidência E e as explicações do candidato H_1, \dots, H_n de E ,
Se H_i explica E melhor do que qualquer uma das outras hipóteses,
inferir que H_i está mais perto da verdade do que qualquer uma das outras hipóteses.

Este tipo de raciocínio não produz prova matemática mas é essencial no contexto de descoberta científico (Schickore, 2018). Na literatura um dos personagens que mais usa este tipo de raciocínio e de conclusão é Sherlock Holmes (Patokorpi, 2007)

Nos objectivos referimos que neste trabalho a avaliação do impacto das estratégias de gamificação usadas é feita dentro do possível. Esta noção de dentro do possível consiste em dizer que as conclusões que tiramos sobre a existência e intensidade do engajamento criado pelos elementos de jogo são sempre conclusões abduativas.

Sem querer neste texto defender este tipo de raciocínio e ou de conclusões nas ciências da educação, obtidas a partir dele, deixamos aqui quatro testemunhos¹⁹. O primeiro de que uma busca no google scholar envolvendo a expressão “abduction + educational science” em (05-04-2019) obteve 21600 entradas, o que significa que a abdução é usada nas ciências de educação. Como segundo testemunho deixamos as palavras escritas por Scott et al (2006)²⁰

“

(...) Abduction is an alternative to retroductive, inductive and deductive strategies in educational research.

”

Como terceiro testemunho deixamos o artigo de Gold et al (2011) onde descreve as regras do raciocínio abduativo e por último deixamos a descrição sobre o que é a abdução que consta na Stanford Encyclopedia of Philosophy e que foi escrito por Douven (2017). Em nossa opinião as quatro referências que deixamos são suficientes para de forma breve esclarecer o leitor e servem de guia inicial a um leitor interessado.

4.2 Tópicos de estatística

Nesta subsecção recordamos a noção de marginal de uma função e de como classificar a distribuição segundo a sua assimetria.

Para o tratamento de dados quantitativo começamos por agrupar os dados quase sempre em tabelas bidimensionais cujas entradas são as questões e os grupos. Ora isto dá um tipo de função

¹⁹ A defesa deste tipo de raciocínio está fora do escopo deste trabalho.

²⁰ Não fazemos a tradução do que para não adulterar o que foi escrito.

$F = F(\text{questões}, \text{grupos})$ e na análise original naturalmente o aparecimento das suas funções marginais, $F_{\text{grupo}} = F(\text{questões}, \bullet)$ marginal do grupo, e $F_{\text{questão}} = F(\bullet, \text{grupos})$ marginal da questão. Isto ocorre em quase toda a análise de dados realizada para os diferentes elementos de jogo. Devido a isso e para um melhor esclarecimento do leitor a primeira análise que fazemos, e que aparece na primeira secção, é uma análise mais matematizada e em que essa formulação toma vida. Essa primeira secção dedica-se à análise quantitativa das Mnemónicas. Nas restantes secções análises subsequentes do mesmo tratamento matemático fica subentendido.

Seguidamente apresentamos a classificação da assimetria de uma distribuição pela posição comparativa dos valores da média, moda e mediana

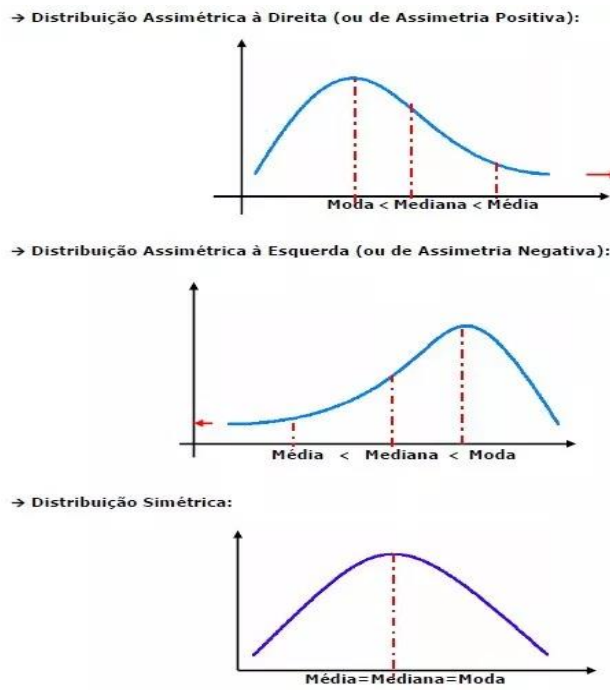


Figura 20: distribuições simétricas e assimétricas.

O tratamento de dados tem em atenção os itens que vão ser tidos em conta para fazer a avaliação sobre o uso das estratégias de gamificação na intervenção educativa. A forma como essa avaliação é feita, para cada um dos elementos de jogo, está descrito na tabela 5, “Tabela 5: Aplicação e medição dos elementos de jogo”.

4.3 Avatar e Narrativas

No caso do Avatar e Narrativas existem dois tipos de dados a ter em atenção. Dados de natureza quantitativa e qualitativa e por isso haverá também dois tipos de análise: quantitativa (para as mnemónicas, narrativas) e qualitativa (para a imagem, avatar, e para as mnemónicas, narrativas).

O processo de recolha, selecção e organização dos dados para o avatar e as narrativas têm em atenção os itens a usar para medir o impacto no processo de aprendizagem dos elementos jogo avatar e narrativas. Nesta secção às ficha de trabalho das tarefas nº 1: Ficha 11º ano; Fichas do 12º ano, ficha de senos; e Ficha do 12º ano ficha de cosenos; chamamos de forma abreviada de fichas de exercícios (Tabela 3).

Para o caso do avatar os itens a considerar são: os Resultados obtidos nas fichas de trabalho (11º e 12º ano), as Referências qualitativas ao avatar nas respostas, e os Apontamentos pessoais das aulas

Para o caso das narrativas são: o Aparecimento nas resoluções de excertos da Tabela de mnemónicas sobre as propriedades das funções trigonométricas, as Respostas a questões da ficha de exercícios sobre propriedades de funções trigonométricas, e as Respostas a questões sobre o uso de mnemónicas.

Tabela 9: elementos de jogo, variáveis e medidas

Elemento de jogo	Variáveis em estudo	Tipo variável	Descrição da medição
Avatar-imagem	A1- Resultados obtidos nas fichas de trabalho (11º e 12º ano) A1=A1(questão,grupo)	quantitativa	Medida de valor absoluto.
	A2- Referências qualitativas ao avatar nas respostas	qualitativa	esboços de desenhos
	A3- Apontamentos pessoais das aulas	qualitativa	descrições de momentos de aula
Narrativa-mnemónicas	N1- Aparecimento nas resoluções de excertos da Tabela de mnemónicas sobre as propriedades das funções trigonométricas	qualitativa	esboços de desenhos, palavras personificando sen e cos
	N2- Respostas a questões da ficha de exercícios sobre propriedades de funções trigonométricas. N2=N2(questão,grupo)	quantitativa	Medida de valor absoluto
	N3- Respostas a questionário sobre o uso de mnemónicas. N3= N3(questão,grupo)	quantitativa	Medidas de valor absoluto

A variável A1: Através da variável A1 não se pretende tirar conclusões sobre os benefícios ou não do uso do Avatar. Apenas se pretende analisar, neste contexto de uso do avatar, os resultados obtidos (ou melhor, a

correção das respostas) por questão, por grupo, e comparar os resultados obtidos entre as questões e entre os grupos. O objectivo é ter para “memória” resultados num cenário de uso do avatar. Estes resultados poderão vir a ser usados em estudos posteriores.

A variável A2: consiste no aparecimento, nas fichas de exercícios, de esboços ou excertos de esboços do avatar ou de partes do avatar. Esta variável indica por abdução engajamento na aprendizagem criado pelo avatar.

A variável A3: é uma variável subjetiva que consiste de apontamentos pessoais das aulas que sejam manifestações de engajamento. As referências que contêm podem indicar por abdução um engajamento da aprendizagem positivo ou negativo com o avatar.

A variável N1: é uma variável qualitativa que consiste de nas resoluções, das fichas de exercícios, aparecerem esboços de figuras que são semelhantes às que estão desenhadas na Tabela de mnemónicas. Esse aparecimento é por abdução considerado um sinal qualitativo de existência de engajamento entre a aprendizagem e a narrativas-mnemónicas.

A variável N2: é uma variável quantitativa que indica para cada questão e grupo se esta está correctamente respondida (valor 1) ou não (valor 0).

A variável N3- é uma variável quantitativa que indica para cada questão e grupo se os alunos indicaram que na resolução fizeram uso de mnemónicas (valor 1) ou não (valor 0).

Usando as variáveis N2 e N3 fizemos um estudo de correlação entre a pontuação obtidas nos resultados e uso de mnemónicas por grupos e por questão. A partir daí tiramos conclusões por abdução sobre o engajamento das mnemónicas com a aprendizagem.

As variáveis A2, A3, N1 não apresentam representatividade para serem consideradas funções. Por isso são encaradas como manifestações qualitativas esporádicas que testemunham, em concordância, na direcção e sentido de certas conclusões.

A análise de dados do avatar e das narrativas é uma análise que vai ser feita, nesta secção, sobre 3 fichas de trabalho. A ficha do 11º ano, a ficha do 12º ano relativos aos senos, e a ficha do 12º ano relativa aos cosenos. A análise mais matematizada é apresentada na ficha do 11º ano. Nas outras fichas análise semelhante é subentendida. A função F1 serve para indicar a pontuação numa ficha de trabalho, F1 - indica o valor das pontuações. A função F2 serve para indicar o uso de mnemónicas na resolução, F2 - indica o uso de mnemónicas na ficha.

4.3.1 Análise quantitativa às Mnemónicas

Vamos começar por analisar os dados relativos à ficha de trabalho dada ao 11º ano. Essa ficha consistiu de 13 exercícios²¹ e a turma foi dividida em 11 grupos de trabalho. Os resultados obtidos, relativos ao 11º ano, para análise quantitativa estão sintetizados em 2 figuras: figura 22 e tabela 10. Na figura 22 apresentamos um quadro onde estão sintetizados os resultados obtidos na ficha de trabalho do 11º ano e são calculadas as funções marginais. A tabela 10 serve para apresentarmos medidas estatísticas e fazer uma avaliação da correlação através das funções marginais de F1 e F2 entre os resultados obtidos, pelos alunos, nas fichas de trabalho e o uso de mnemónicas. Ou seja, essa correlação é medida nos grupos={grupo I, ..., grupo XI} e nas questões={questão 1, ..., questão 13}. As variáveis :

$F1(\text{questões}, \bullet)$, $F2(\text{questões}, \bullet)$ que se definem como

$$F1(\text{questões}, \bullet) = \sum_{x \in \text{questões}} F1(x, \bullet),$$

$$F2(\text{questões}, \bullet) = \sum_{x \in \text{questões}} F2(x, \bullet)$$

e que quando aplicadas ao grupo j temos que

$$F1(\text{questões}, \bullet)(\text{grupo } j) = F1(\text{questões}, \text{grupo } j) = \sum_{x \in \text{questões}} F1(x, \text{grupo } j),$$

$$F2(\text{questões}, \bullet)(\text{grupo } j) = F2(\text{questões}, \text{grupo } j) = \sum_{x \in \text{questões}} F2(x, \text{grupo } j)$$

são as marginais, marginais de grupo, de F1 e F2. Note que, no caso do nosso estudo, os resultados destas funções são dados em número de questões. E as variáveis:

$F1(\bullet, \text{grupos})$, $F2(\bullet, \text{grupos})$ que se definem como

$$F1(\bullet, \text{grupos}) = \sum_{x \in \text{grupos}} F1(\bullet, x),$$

$$F2(\bullet, \text{grupos}) = \sum_{x \in \text{grupos}} F2(\bullet, x)$$

e que quando aplicadas à questão i temos que

$$F1(\bullet, \text{grupos})(\text{questão } i) = F1(\text{questão } i, \text{grupos}) = \sum_{x \in \text{grupos}} F1(\text{questão } i, x),$$

$$F2(\bullet, \text{grupos})(\text{questão } i) = F2(\text{questão } i, \text{grupos}) = \sum_{x \in \text{grupos}} F2(\text{questão } i, x)$$

são as marginais, marginais de questão, de F1 e F2. Note que, no caso do nosso estudo, os resultados destas funções são dados em número de grupos.

Usando as “variáveis” $F1(\text{questões}, \bullet)$, $F2(\text{questões}, \bullet)$ vamos estudar a correlação entre as pontuações e o uso de mnemónicas nos grupos. Usando as “variáveis” $F1(\bullet, \text{grupos})$, $F2(\bullet, \text{grupos})$ vamos estudar a correlação entre as pontuações e o uso de mnemónicas nas questões.

No quadro (fig 22) apresentam-se, em colunas, as questões numeradas de 1 a 13²². Em cima do número de cada questão está uma cor que corresponde ao tipo de mnemónica que se podia usar na questão (ver tabela 8). Na tabela (fig 22) as colunas devem ser lidas ao pares contíguos branco-amarelo, (como exemplo vejamos imediatamente o primeiro e segundo par).

O primeiro par contíguo branco-amarelo é o que consta de ‘coluna branca’ chamada Score relacionada com a ‘coluna amarela’ chamada Score M. Indicam o valor do score obtido pelo grupo nas 13 questões (Score)

²¹ <http://goo.gl/3jDKPy> (Ficha, 11º ano)

²² Cada número de questão alterna com a letra M que significa Mnemónica. O objectivo é que sinalize, para cada questão (a que consta à esquerda, aos olhos de quem lê) se foi ou não usada mnemónicas na resposta que o grupo deu (o grupo que consta da respectiva linha)

e em quantas dessas 13 foram usadas mnemónicas (Score M). Correspondem respectivamente às funções marginais $F1(\text{questões}, \bullet)$ (coluna branca), $F2(\text{questões}, \bullet)$ (coluna amarela).

O segundo par contíguo branco-amarelo que aparece na figura 22 é 1 e M, correspondendo respectivamente à questão 1 e M de mnemónica para sinalizar respectivamente para cada grupo (tomemos um grupo genérico J) se a questão 1 foi respondida com acerto ($F1(\text{grupo J}, \text{questão 1})=1$ ou 0) e se na resolução houve ou não uso de mnemónicas ($F2(\text{grupo J}, \text{questão 1})=1$ ou 0). Todas as outras colunas que se seguem devem ler-se agrupadas da esquerda para a direita, ‘coluna branca’-‘coluna amarela’, correspondendo respectivamente a ‘número da questão’-‘uso de mnemónica na questão’. Para os pares relativos a ‘número da questão’-‘uso de mnemónica na questão’ nos valores a coluna branca 0 (resp. 1) significa resposta errada (resp. certa). Na coluna amarela 0 (resp. 1) significa que não se usou mnemónicas (resp. que se usou mnemónicas). Tudo isto para o grupo indicado na linha onde se fazem as leituras da ‘coluna branca’-‘coluna amarela’. No fim da tabela há uma linha horizontal azul clara designada por TOTAIS. Os valores dessa linha correspondem aos totais naturais de cada coluna e são as funções marginais $F1(\text{questões}, \bullet)$, $F2(\text{questões}, \bullet)$. Na linha imediatamente abaixo, para uma mais “amigável” avaliação, há a transformação dos valores da linha azul em percentagens.

Ficha de Trabalho - Trigonometria (Avatar+Mnemónicas/Narrativas)

* Required

Indique o seu grupo de trabalho *

Choose ▼

Digite o código do seu grupo *

Your answer

Questão1: Qual a sequência de valores que se obtém a partir da sequência; $\cos(0)$, $\sin(0)$, $\text{tg}(0)$

1 point

- 1,1,1
- 1,0,0
- 0,1,0
- 0,0,1
- Não sei

Questão2: Sabendo que $\sin(a)=0.43$ e $\cos(a)=0.9028$ (valores aproximados a 4 décimas) . Qual a sequência de valores que se obtém da sequência: $\sin(-a)$, $\cos(-a)$, $\text{tg}(-a)$

1 point

- 0.43; 0.9028; 0.4763
- 0.43; 0.9028; - 0.4763
- 0.43; - 0.9028; - 0.4763
- 0.43; -0.9028; 0.4763
- Não sei

Questão3: Qual a sequência de valores correcta que se obtém da sequência: $\cos(30)$, $\sin(60)$, $\cos(60)$, $\sin(30)$. $\text{sqrt}(3)/2$ aproxime a 0.866

1 point

- 0.866, 0.866, 0.5, - 0.5
- 0.5, 0.5, 0.866, 0.866
- 0.866, 0.5, 0.866, 0.5
- 0.866, 0.866, 0.5, 0.5
- Não sei

Figura 21: Excerto da ficha de trabalho (online) entregue ao 11º ano, ver apêndice ou em <http://goo.gl/3jDKPy>

- Das mnemónicas possíveis de ocorrer, a mnemónica menos usada foi a categorizada com a cor bordô e nome *Mnemónicas para argumentos elementares para o sin, cos, tg* (foi usada em 39% dos casos possíveis)

Na figura 22 podemos observar que o uso de mnemónicas na questão 12 pelos grupos foi de 9% e que por isso tendo em conta o contexto podemos considerá-lo um outlier.

Para avaliar a correlação entre a resolução correcta dos exercícios e o uso de mnemónicas, usamos os dados a partir da Figura 22, e calculamos a correlação entre as funções marginais correspondentes de F1 e F2. Além dessa correlação usamos medidas estatísticas exploratórias para avaliar as funções marginais.

Tabela 10: Correlação entre as variáveis N° Mnemónicas usadas e N° Respostas Correctas (11° ano)

F1(•, grupos), F2(•, grupos) varia em função das questões		F1(questões, •), F2(questões, •) varia em função dos grupos	
F1(questão i, grupos)= Número de grupos que responderam correctamente à questão i, em 11 grupos possíveis	F2(questão i, grupos)= Número de grupos que usaram mnemónicas para responder à questão i, em 11 grupos possíveis	F1(questões, grupo J)= Número de questões respondidas corretamente pelo grupo J, em 13 questões possíveis	F2(questões, grupo J)= Número de questões em que o grupo J usou mnemónicas, em 13 questões possíveis
11	7	11	7
11	11	11	9
11	5	8	7
11	8	6	9
5	7	10	6
5	5	9	2
11	7	12	13
10	5	9	9
11	10	11	7
11	7	11	6
9	4	13	10

	4	1		
	11	8		
Média	9.308	6.538	10.090	7.727
Moda	11	7	11	7
Mediana	11	7	11	7
Variância	7.397	6.769	3.890	7.818
desvio padrão	2.719	2.601	1.972	2.796
correlação	correl(F1(•, grupos), F2(• ,grupos)) =	0.610	correl(F1(questões, •), F2(questões, •))=	0.295

Considerações:

- *Relativamente à correcção das respostas nos grupos, F1(•, grupos).* Em média cada questão foi respondida corretamente por 9 dos 11 grupos o que mostra que a turma em geral tem um bom conhecimento da matéria. O resultado da média é obtido com um desvio padrão de aproximadamente 3 grupos. Grande parte das questões foram respondidas corretamente por 6 a 11 grupos em 11 grupos possíveis. Mais concretamente o intervalo, [média – desv pad; média + desv pad] = [9-3 ; min{9+3,11}] = [6;11] corresponde a 77% dos elementos em estudo. Ou seja 77% das questões foram respondidas corretamente por 6 a 11 grupos. A mediana e a moda desta variável são a mesma e têm valor de 11 grupos em 11 possíveis. O que significa que o maior valor é 11 em 11 e a distribuição à esquerda e à direita de 11 têm a mesma quantidade de elementos. Contudo a média é 9 o que indica dispersão no lado esquerdo da distribuição, tal dispersão não ocorre do lado direito (à direita a distribuição degenera em 11). Assim, estamos perante uma distribuição com ligeira assimetria à esquerda. Por abdução concluímos que nos grupos a correcção das respostas às questões em função das questões é modelado através de uma distribuição assimétrica negativa.
- *Relativamente ao uso de mnemónicas nos grupos, F2(• ,grupos).* Em média por questão 7 dos grupos em 11 possíveis fizeram uso de mnemónicas. Os valores da média, moda e mediana são próximos a ponto de os podermos considerar iguais. Por isso estamos na presença de uma distribuição aproximadamente simétrica. O desvio padrão é de aproximadamente 2.5, e em 69% das questões foram usadas mnemónicas por 5 a 10 grupos, [média – desv pad; média + desv pad]=[7-2.5; 7+2.5]=[4.5; 9.5]. Por abdução

concluimos que nos grupos o uso de mnemónicas em função das respostas é modelado através de uma distribuição simétrica.

- *Correlação entre a correcção das respostas nos grupos e o uso de mnemónicas nos grupos*, $\text{correl}(F1(\bullet, \text{grupos}), F2(\bullet, \text{grupos}))$. A correlação entre as variáveis é positiva. É alta e de cerca de 60%. Assim, fica mostrado uma forte correlação positiva que existe nos grupos entre as correcção das respostas por questão e o uso de mnemónicas por questão.
- *Relativamente à correcção das respostas nas questões*, $F1(\text{questões}, \bullet)$. Em média cada grupo respondeu correctamente a 10 das 13 questões. O resultado da média é obtido com um desvio padrão de aproximadamente 2 questões. Ou seja, grande parte dos grupos responderam corretamente entre 8 a 12 questões das 13 possíveis. Mais concretamente, 91% dos grupos responderam corretamente de 8 a 12 questões, intervalo, $[\text{média} - \text{desv pad}; \text{média} + \text{desv pad}] = [10-2; 10+2] = [8; 12]$. A mediana e a moda desta variável são a mesma e têm valor de 11 questões em 13 possíveis. Contudo em média os grupos responderam correctamente a 10 questões. Assim, a maior parte dos grupos respondeu correctamente a 11 questões e a quantidade de grupos que respondeu correctamente a menos de 11 questões é o mesmo que a quantidade de grupos que respondeu correctamente pelo menos 11 questões. Esta relação entre a média, a moda e a mediana cria na distribuição um ligeiro enviesamento para a esquerda. Estamos perante uma aproximada distribuição assimétrica à esquerda. Por abdução concluimos que perante questões, a correcção das respostas em função dos grupos é modelada através de uma distribuição assimétrica à esquerda.
- *Relativamente ao uso de mnemónicas nas questões*, $F2(\text{questões}, \bullet)$. Em média cada grupo usou mnemónicas em 7 questões de 13 possíveis. O resultado é obtido com um desvio padrão de 3 questões. Observando os dados concluimos que 91% grupos usou mnemónicas entre $[\text{média} - \text{desv pad}; \text{média} + \text{desv pad}] = [7-3; 7+3] = [4; 9]$ questões. Por abdução concluimos que perante questões, o uso de mnemónicas em função dos grupos é modelada através de uma distribuição simétrica.
- *Correlação entre a correcção das respostas nas questões e o uso de mnemónicas nas questões*, $\text{correl}(F1(\text{questões}, \bullet), F2(\text{questões}, \bullet))$: A medição da correlação entre as variáveis é positiva. É de cerca de 29%. Por abdução concluimos que perante questões a correcção das respostas e o uso mnemónicas em grupos influenciam-se no mesmo sentido.

Vamos agora passar à análise da tarefa 1 realizada no 12º ano. A variável F1 aparece com o mesmo significado, F1 - indica o valor das pontuações na ficha, mas usada em cada um dos casos concretos, 12º ano ficha dos senos e 12º ano ficha dos cosenos.

Não fazemos medições da correlação, dos scores com o uso de mnemónicas, no 12º ano porque assumimos que nesta tarefa, por defeito, em todos os exercícios os grupos usaram mnemónicas.

Assumimos que estamos sempre na presença do uso de mnemónicas porque: as mnemónicas apareceram na primeira aula do tema, como síntese para revisão de matéria; e por terem sido usados num tipo de exercícios, de resposta rápida. Pensamos que ambas em conjunto criam um ambiente altamente apelativo ao uso de mnemónicas. E assim assumimos que estas são sempre usadas.

A fig 23 e 24 são tabelas de dados agrupados a partir das tarefas que foram realizadas no 12º ano. A figura 23 é relativa a exercícios sobre o Seno e a figura 24 sobre o Coseno. No preenchimento da tabela (fig 23, 24), 1 significa que a resposta foi correta e 0 que a resposta foi errada e representam a variável F1. Cada tabela tem a sua variável F1. Por exemplo na figura 23 para a questão 4, “Ocorre $\sin(-x) = \sin(x)$? ” o grupo IV respondeu errado, $F1(\text{questão sin 4, grupo IV}) = 0$, mas o grupo V respondeu correctamente, $F1(\text{questão sin 4, grupo V}) = 1$.

Nas fig 23 e 24 A coluna Respostas Correctas corresponde à variável marginal questões, $F1(\bullet, \text{ grupos})$. A linha com o título Score corresponde à variável marginal grupos, $F1(\text{questões}, \bullet)$. A análise da variável marginal $F1(\text{questões}, \bullet)$ é feita usando medidas estatísticas e a análise da variável marginal $F1(\bullet, \text{ grupos})$ é feita através da categorização das mnemónicas.

(Cor) Mnemónicas usadas	Quest Sin	Questão	Grupos								Resposta Correctas	% CATEGORIA	
			I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII			
	1	O sin é preguiçoso?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	
	2	O Sin é mentiroso?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	
	3	O sin é racista?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100.00%
	4	Ocorre, $\sin(-x) = -\sin(x)$?	0	0	0	0	1	0	1	1	3	37.50%	
	5	$\sin(0)$?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	
	6	$\sin(\pi/2)$?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	
	7	$\sin(\pi)$?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	
	8	$\sin(3\pi/2)$?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100.00%
	9	$\sin(-5\pi/3)$?	1	1	1	0	0	1	1	1	6		
	10	$\sin(-2\pi/3)$?	1	0	1	1	0	1	1	1	6		
	11	$\sin(4\pi/3)$?	1	0	1	1	1	0	0	1	5		
	12	$\sin(7\pi/6)$?	1	0	1	1	1	1	1	1	7		
	13	$\sin(11\pi/6)$?	1	1	1	1	0	1	0	0	5	72.50%	
	14	Calcule $\sin(x)$, se $\cos(x) = 0.6$ e $3/2\pi < x < 2\pi$	0	0	0	0	1	0	0	1	2		
	15	Calcule $\sin(x)$, se $\cos(x) = 0.6$ e $1/2\pi < x < \pi$	0	0	0	0	1	0	0	0	1	18.75%	
	16	Dada imagem de um triangulo rectangulo, a cujos lados estão atribuidos valores, calcular sin?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100.00%
		Score	13	10	13	12	13	12	12	14			
		percentagem	81%	63%	81%	75%	81%	75%	75%	88%			
		nédia =	12.4		moda =		13.0						
		mediana =	12.5		variância =		1.4						
					desvio padrão =		1.2						

Figura 23: Tabela de dados construída a partir da Ficha nº 1, do Seno, realizada no 12º ano.

Considerações:

- Quanto ao número de questões respondidas corretamente, $F1(\text{questões}, \bullet)^{23}$. Em média cada grupo respondeu corretamente a 12 questões em 16 possíveis com um desvio padrão de 1 questão, o que dá uma distribuição muito pouco dispersa. Isto significa, grosso modo, que quase todos os grupos acertaram entre 11 a 13 questões em 16. Há muito homogeneidade. A distribuição de frequências, da distribuição $F1(\text{questões}, \bullet)$, é quase simétrica porque a média moda e mediana são praticamente iguais. A distribuição de frequências apresenta ligeiro enviesamento para a esquerda.
- Houve 4 grupos que responderam acertadamente a mais de 80% das questões. O grupo que apresenta menor percentagem de respostas correctas mesmo assim acerta em 63% das questões.
- Das mnemónicas possíveis de ocorrer, as categorizadas com a cor amarela, verde, marrom e azul escuro, respectivamente com os nomes, *Mnemónicas de personificação explicita*, *Mnemónica de argumentos elementares para o sin, cos, tg*, *Mnemónicas para definir Sin, Cos e Tg*, e *Mnemónicas para redução ao 1º quadrante*, são as que apresentam maiores percentagens nas respostas correctas às questões respectivamente 100%, 100%, 100% e 73%.
- Das mnemónicas possíveis de ocorrer, as categorizadas com azul claro e bordô, respectivamente com os nome, *Mnemónicas de personificação implícita*, e *Mnemónicas para saber o sinal do Sin, Cos e Tg em cada um dos quadrantes*, são as que apresentam menores percentagens nas respostas correctas às questões, respectivamente 37,5% e 18,75%.

²³ Para a ficha dos Senos

(Cor) Mnemónicas usadas	Quest Cos	Questão	Grupos								Resposta Correctas	% CATEGORIA	
			I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII			
		1 O cos é preguiçoso?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	
		2 O Cos é mentiroso?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	
		3 O Cos é racista?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100.00%
		4 Ocorre, $\text{Cos}(-x)=-\text{Cos}(x)$?	0	1	1	1	0	1	1	0	5	62.50%	
		5 $\text{Cos}(0)$?	1	1	1	1	1	1	1	1	8		
		6 $\text{Cos}(\pi/2)$?	1	1	1	1	1	1	1	1	8		
		7 $\text{Cos}(\pi)$?	1	0	1	0	1	0	1	0	4		
		8 $\text{Cos}(3 \pi/2)$?	1	0	1	0	1	0	1	0	4	75.00%	
		9 $\text{Cos}(-5 \pi/3)$?	1	1	1	1	1	1	1	0	7		
		10 $\text{Cos}(-2 \pi/3)$?	1	1	0	0	1	1	1	1	6		
		11 $\text{Cos}(4 \pi/3)$?	1	1	1	0	1	1	1	1	7		
		12 $\text{Cos}(7 \pi/6)$?	1	1	1	0	1	0	1	1	6		
		13 $\text{Cos}(11 \pi/6)$?	1	1	1	1	1	1	1	1	8	85.00%	
		14 Calcule $\text{Cos}(x)$, se $\text{Sin}(x)=0.6$ e $3/2 \pi < x < 2 \pi$	1	1	1	1	1	1	1	1	8		
		15 Calcule $\text{Cos}(x)$, se $\text{Sin}(x)=0.6$ e $1/2 \pi < x < \pi$	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100.00%	
		16 Dada imagem de um triangulo rectangulo, a cujos lados estão atribuidos valores, calcular Cos?	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100.00%	
		Score	15	14	15	11	15	13	16	12			
		percentagens	94%	88%	94%	69%	94%	81%	100%	75%			
		nédia =	13.9		moda =		15.0						
		mediana =	14.5		variância =		3.0						
					desvio padrão =		1.7						

Figura 24: Tabela de dados construída a partir da Ficha nº 1, do Coseno, realizada no 12º ano

Considerações:

- Quanto ao número de questões respondidas corretamente, $F1(\text{questões}, \bullet)^{24}$. Em média cada grupo respondeu correctamente a 14 questões em 16 com um desvio padrão de aproximadamente 2 questões, o que dá uma distribuição pouco dispersa. O que significa, grosso modo, que quase todos os grupos acertaram entre 12 a 16 questões em 16. Há muito homogeneidade. A distribuição de frequências, da distribuição $F1(\text{questões}, \bullet)$, é ligeiramente distorcida à esquerda porque $\text{média} < \text{mediana} < \text{moda}$.
- Houve 7 grupos em 8 que responderam acertadamente a mais de 80% das questões
- Das mnemónicas possíveis de ocorrer, as categorizadas com a cor amarela, rosa, marrom e azul escuro, respectivamente com os nomes, *Mnemónicas de personificação explícita*, *Mnemónica para básicos de sin, cos, tg*, *Mnemónicas para definir Sin, Cos e Tg*, e *Mnemónicas para redução ao 1º*

²⁴ Para a ficha dos cosenos

quadrante, são as que apresentam maiores percentagens nas respostas correctas às questões respectivamente 100%, 100%, 100% e 85%.

- Das mnemónicas possíveis de ocorrer, as categorizadas com azul claro, respectivamente com o nome, *Mnemónicas de personificação implícita*, foi a que apresentou menor percentagem nas respostas correctas às questões, 62,5%. Ainda assim, muito acima dos 50%. A mnemónica de cor verde, *Mnemónica de argumentos elementares para o sin, cos, tg*, apresentou 75% nas respostas correctas às questões.

4.3.2 Análise qualitativa Avatar + Mnemónicas

No trabalho de estágio a aparecem dados qualitativos que pela sua existência nos fazem concluir por abdução que retratam situações em que houve engajamento. Encontramos 3 tipos de situação. Numa das resoluções da ficha do 11º ano foi encontrada uma reprodução do avatar, o Srº Trigonometria (fig 25). Outro tipo de situação foi o de termos encontrado noutras resoluções da mesma ficha reproduções de figuras e anotações que foram feitas, no momento da gamificação, relativas à tabela das mnemónicas (fig 26, 27). Na figura 26, por exemplo, é reproduzida a mnemónica *Mnemónicas para saber o sinal do Sin, Cos e Tg em cada um dos quadrantes*. Na figura 27 está reproduzida a *Mnemónica de argumentos elementares para o sin, cos, tg*. Por último, nos apontamentos da aula, do docente estagiário, encontra-se escrito que "... quando apresentei o Sr Trigonometria surgiu um burburinho sorridente vindo de alguns alunos". Todas estas manifestações, por abdução consideramos serem manifestações de situações de engajamento criado pelos elementos de jogo avatar e mnemónicas.

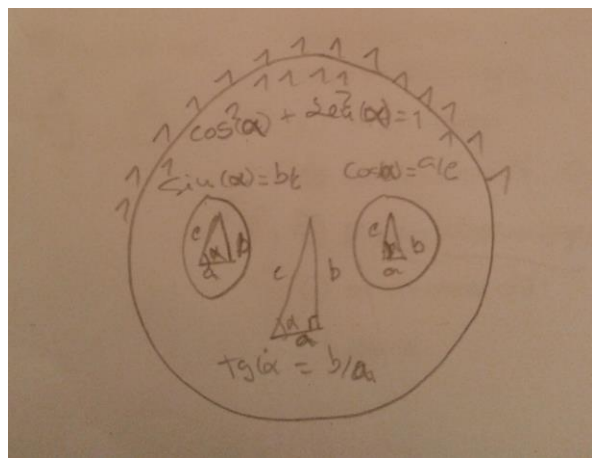


Figura 25: Reprodução do Srº Trigonometria

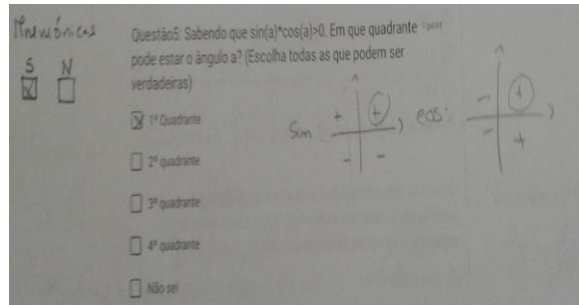


Figura 26: Reprodução de mnemónicas.

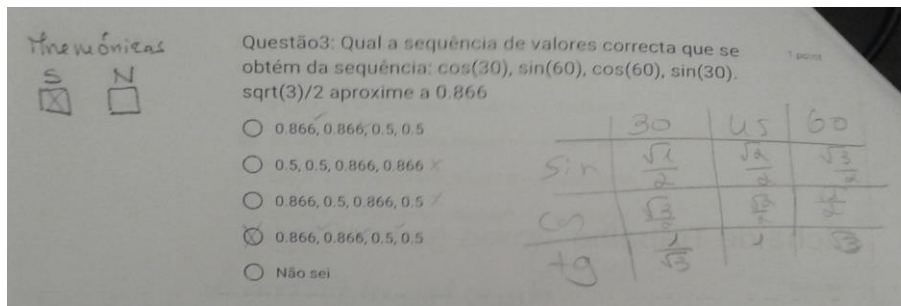


Figura 27: Reprodução de mnemónica encontrada.

4.3.3 Conclusão: O engajamento do avatar e narrativas

Vamos usar as variáveis A1, A2 e A3 para fazer uma avaliação abductiva do elemento de jogo avatar. A variável A1 corresponde à variável F1 nas fichas do 11º ano, 12º ano dos senos e 12º ano dos cosenos.

<p>A1- Resultados obtidos nas fichas de trabalho (11º e 12º ano).</p>	<p>As medições da variável A1 que corresponde aos resultados obtidos nas fichas de exercícios foram realizadas em 3 situações distintas. Foi feita numa turma do 11º ano, na turma do 12º ano usando os resultados da ficha de exercícios relativa ao seno, e na turma do 12º ano usando os resultados da ficha de exercícios relativa ao coseno. $A1=F1$.</p> <p>Recordamos que com a variável A1 não se pretende tirar conclusões sobre os benefícios ou não do uso do Avatar. Apenas se pretende analisar, neste contexto de uso do avatar, os resultados obtidos (ou melhor, a correcção das respostas) por questão, por grupo, comparar os resultados obtidos entre as questões e entre os grupos. O objectivo é ter para “memória” resultados num cenário de uso do avatar que possam vir a ser usados em estudos posteriores.</p>
---	---

	<p>Tendo em atenção o objectivo desta variável estudamos os scores obtidos pelos alunos, nas fichas de trabalho, em ambiente com o avatar segundo dois tipos de variáveis, variável em função das questões e variável em função dos grupos.</p> <p>No estudo dessas variáveis de ambas tanto nas 11º ano como 12º ano as distribuições apresentaram enviesamento para a esquerda. Assim em termos de modelação podemos pensar que o fenómeno pontuações nas fichas tem uma distribuição de frequências modelável através de uma curva enviesada à esquerda. As estimativas dos parâmetros da curva podem ser obtidas através dos valores da média, mediana, moda, desvio padrão e quartis estimados a partir da amostra. Por abdução concluímos que essa modelação foi provocado pelo engajamento criado pelo elemento de jogo Avatar.</p>
A2- Referências qualitativas ao avatar nas respostas.	Existiu um caso de reprodução do avatar numa ficha de trabalho (ver figura 25). É uma caso que demonstra de forma clara engajamento criado pelo elemento de jogo.
A3- Apontamentos pessoais das aulas.	Existiu um apontamento das aulas em que se descreve que "... quando apresentei o Sr Trigonometria surgiu um burburinho sorridente vindo de alguns alunos" (ver secção 4.3.2). É uma caso que demonstra de forma clara engajamento criado pelo elemento de jogo avatar.

A variável A1 serve para fazer uma análise exploratória de hipóteses que depois devem ser verificadas-averiguadas. O objectivo é gerar hipóteses de investigação com alta probabilidade de serem verdadeiras. Através da variável A1 vamos deixar para memória um forma possível de modelar o comportamento da avaliação da aprendizagem num contexto de gamificação com o elemento de jogo avatar. Tal pode ser útil para estudos comparativos futuros. São ainda necessários estudos de verificação do modelo deixado através da técnica de grupos de controlo. As variáveis A2 e A3 demonstram situações qualitativas claras de engajamento do elemento de jogo avatar com o processo de ensino-aprendizagem.

Em seguida vamos procurar avaliar o elemento de jogo narrativa-mnemónicas. Essa avaliação é feita através das variáveis N1, N2 (variável F1) e N3 (variável F2). A variável N1 apresenta em esboços de desenhos como sinais qualitativos de engajamento. A variável N2 indica se certa questão foi ou não por certo grupo respondida corretamente. Com ela podemos obter scores de resultados correctos pelos grupos e pelas questões, usando as suas marginais. A variável N3 indica para certa questão se certo grupo usou ou não mnemónicas na sua resolução. Para fazermos uma avaliação abductiva do engajamento do elemento de jogo narrativa-mnemónicas vamos usar: i) a variável N1 como variável qualitativa e verificamos a

existência na ficha do 11º ano de esboços de desenhos semelhantes aos que existem nas tabela das mnemónicas (Figura 26, 27), ii) dados da variável N2 para analisar a conformidade dos resultados obtidos entre as questões e as questões teste (questões, para verificar a compliance, que permitem verificar que a resposta a certa questão está dada de acordo com o entendimento que se pretende) iii) uma análise categórica das mnemónicas através do uso da variável N3 nas fichas do 12º ano e iv) os resultados da correlação entre as variáveis N2 e N3 na ficha de 11º ano.

<p>N1- Aparecimento nas resoluções de excertos da Tabela de mnemónicas sobre as propriedades das funções trigonométricas.</p>	<p>Esta situação ocorreu em vários exercícios da ficha do 11º ano. Para exemplos deixamos as imagens das figuras: 26, 27. São casos que demonstram de forma clara engajamento criado pelo elemento de jogo narrativas-mnemónicas.</p>
<p>Avaliação da conformidade entre as questões e as questões teste nas fichas do 12º ano do seno e do coseno. conformidade(questões,questões teste).</p>	<p>Analizamos as fichas do 12º ano, do seno e do coseno. As questões destas fichas podem dividir-se em questões de 2 tipos: a(s) questão(ões) (questões da(s) mnemónica(s)), onde se questiona propriedades do seno e cos personificando-os, e as a(s) questão(ões) teste (questões que testam, verificam, se a questão(ões) da(s) mnemónica(s)) está bem empregue, onde se questiona as propriedades do seno e cos personificando-os. Exemplo de questão “o Sen é preguiçoso?” (personificação) (Questão sin 1); e as questões teste (questões teste das mnemónicas) que testam se de facto a resposta dada à questão (questão da mnemónica) está correcta. Exemplo de questão teste para a questão colocada anteriormente, “qual o valor de Sin(0)?” (Questão sin 5).</p> <p>Para outro exemplo, agora na ficha dos cosenos. Questão da mnemónica é se ocorre $\text{Cos}(-x) = -\text{Cos}(x)$? (Questão cos 4) e a questão teste, que atesta se a mnemónica está entendida como se pretende, é a questão de saber quanto seria $\text{Cos}(-2\pi/3)$, $\text{Cos}(-2\pi/3)$? (Questão cos 10)</p> <p>O alto grau de conformidade entre questões e questões teste demonstra abduktivamente sinais de engajamento criado pelo elemento de jogo. Em seguida publicamos os resultados entre questões sobre o conhecimento da mnemónicas e questões teste que verificam esse conhecimento. A conformidade obtida é de no mínimo superior ou igual a 62% ($15 \cdot 100 / 24$ aproximadamente</p>

	<p>62%)(ver Número de conformidades no quadro que se segue). O que demonstra forte engajamento do elemento de jogo narrativas</p> <p>Quadro sobre o estudo da conformidade entre questões e questões teste</p> <table border="1" data-bbox="651 436 1409 1308"> <thead> <tr> <th data-bbox="651 436 834 562">Figura</th> <th data-bbox="834 436 1024 562">Questão de conhecimento da mnemónica</th> <th data-bbox="1024 436 1247 562">Questão que testa conhecimento da mnemónica</th> <th data-bbox="1247 436 1409 562">Numero de conformidades</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="651 562 834 688">Figura 23 (ficha 12º ano, ficha dos senos)</td> <td data-bbox="834 562 1024 688">Questão sin 1</td> <td data-bbox="1024 562 1247 688">Questão sin 5, 6, 7</td> <td data-bbox="1247 562 1409 688">8+8+8=24 em 24</td> </tr> <tr> <td data-bbox="651 688 834 814">Figura 23(ficha 12º ano, ficha dos senos)</td> <td data-bbox="834 688 1024 814">Questão sin 2</td> <td data-bbox="1024 688 1247 814">Questão sin 4, 9, 10</td> <td data-bbox="1247 688 1409 814">3+6+6=15 em 24</td> </tr> <tr> <td data-bbox="651 814 834 940">Figura 23(ficha 12º ano, ficha dos senos)</td> <td data-bbox="834 814 1024 940">Questão sin 3</td> <td data-bbox="1024 814 1247 940">Questão sin 11, 12, 13</td> <td data-bbox="1247 814 1409 940">5+7+5=17 em 24</td> </tr> <tr> <td data-bbox="651 940 834 1066">Figura 24(ficha 12º ano, ficha dos cosenos)</td> <td data-bbox="834 940 1024 1066">Questão cos 1</td> <td data-bbox="1024 940 1247 1066">Questão cos 5, 6, 7</td> <td data-bbox="1247 940 1409 1066">8+8+4=20 em 24</td> </tr> <tr> <td data-bbox="651 1066 834 1192">Figura 24(ficha 12º ano, ficha dos cosenos)</td> <td data-bbox="834 1066 1024 1192">Questão cos 2</td> <td data-bbox="1024 1066 1247 1192">Questão cos 4, 9, 10</td> <td data-bbox="1247 1066 1409 1192">5+7+6=18 em 24</td> </tr> <tr> <td data-bbox="651 1192 834 1308">Figura 24(ficha 12º ano, ficha dos cosenos)</td> <td data-bbox="834 1192 1024 1308">Questão cos 3</td> <td data-bbox="1024 1192 1247 1308">Questão cos 11, 12, 13</td> <td data-bbox="1247 1192 1409 1308">7+6+8=21 em 24</td> </tr> </tbody> </table>	Figura	Questão de conhecimento da mnemónica	Questão que testa conhecimento da mnemónica	Numero de conformidades	Figura 23 (ficha 12º ano, ficha dos senos)	Questão sin 1	Questão sin 5, 6, 7	8+8+8=24 em 24	Figura 23(ficha 12º ano, ficha dos senos)	Questão sin 2	Questão sin 4, 9, 10	3+6+6=15 em 24	Figura 23(ficha 12º ano, ficha dos senos)	Questão sin 3	Questão sin 11, 12, 13	5+7+5=17 em 24	Figura 24(ficha 12º ano, ficha dos cosenos)	Questão cos 1	Questão cos 5, 6, 7	8+8+4=20 em 24	Figura 24(ficha 12º ano, ficha dos cosenos)	Questão cos 2	Questão cos 4, 9, 10	5+7+6=18 em 24	Figura 24(ficha 12º ano, ficha dos cosenos)	Questão cos 3	Questão cos 11, 12, 13	7+6+8=21 em 24
Figura	Questão de conhecimento da mnemónica	Questão que testa conhecimento da mnemónica	Numero de conformidades																										
Figura 23 (ficha 12º ano, ficha dos senos)	Questão sin 1	Questão sin 5, 6, 7	8+8+8=24 em 24																										
Figura 23(ficha 12º ano, ficha dos senos)	Questão sin 2	Questão sin 4, 9, 10	3+6+6=15 em 24																										
Figura 23(ficha 12º ano, ficha dos senos)	Questão sin 3	Questão sin 11, 12, 13	5+7+5=17 em 24																										
Figura 24(ficha 12º ano, ficha dos cosenos)	Questão cos 1	Questão cos 5, 6, 7	8+8+4=20 em 24																										
Figura 24(ficha 12º ano, ficha dos cosenos)	Questão cos 2	Questão cos 4, 9, 10	5+7+6=18 em 24																										
Figura 24(ficha 12º ano, ficha dos cosenos)	Questão cos 3	Questão cos 11, 12, 13	7+6+8=21 em 24																										
correl(N2(•, grupos), N3(• ,grupos))	<p>Correlação entre a correcção das respostas nos grupos e o uso de mnemónicas nos grupos, correl(N2(•, grupos), N3(• ,grupos)). A correlação entre as variáveis é positiva. É alta e de cerca de 60%. Assim, fica mostrado uma forte correlação positiva que existe nos grupos entre as correcção das respostas por questão e o uso de mnemónicas por questão, o que é um sinal de engajamento do elemento de jogo narrativas-mnemónicas.</p>																												

Das medições abduativas através das variáveis N1, N2, N3 concluímos que o elementos de jogo narrativa originou engajamento positivo no processo de ensino-aprendizagem.

4.4 Competição, Cooperação, Feedback

A avaliação do impacto dos elementos de jogo competição, cooperação e feedback no processo de ensino e aprendizagem do projecto vai ser mensurado tendo em atenção as tarefas 2, 3 e 4 e as fichas de trabalho 4, 5 e 6. Nessas tarefas e fichas são tidas em consideração as seguintes variáveis:

i) na mensuração da Competição (na tarefa 3, 4):

- Número de submissões por questão
- A evolução dos tempos de respostas na tarefa 3 e na tarefa 4,
- O número de questões que são trabalhadas em simultâneo na tarefa 4,
- Classificação do grupo, e
- Produções e diálogos dos alunos

ii) na mensuração da Cooperação (na tarefa 3, 4):

- O Score obtido
- Número de submissões por questão
- O tempo de execução de cada exercício
- Produções e diálogos dos alunos

iii) na mensuração do Feedback (na tarefa 2, 3):

- Número de submissões por questão
- Número de questões respondidas em cada tentativa.
- Número de respostas corretas em cada tentativa.
- Número de questões erradas que são corrigidas.

O impacto na aprendizagem dos elementos de jogo consequentes, Restrições de tempo, Aversão a perda e Recompensa, é feita considerando:

iv) para a Restrição de tempo (nas tarefas 2,3 e 4):

- Número de questões respondidas.
- Número de submissões por questão
- Tempo (tempo médio) de resposta a cada questão.
- Evolução do tempo de resposta à medida que as respostas vão sendo submetidas
- Produções e diálogos dos alunos

v) para a Aversão a perda (na tarefa 4):

- Tempo de resposta às questões
- Relação entre tempo de resposta às questões e o quadro competitivo
- Produções e diálogos dos alunos

vi) para a Recompensa (na tarefa 2, 3, 4):

- Número de submissões por questão
- O aumento da classificação do grupo entre as tarefas mostrará que o grupo se sentiu estimulado pela recompensa na aprendizagem
- Produções e diálogos dos alunos

Estas variáveis pressupõem o agrupamento dos dados em várias tabelas para que seja possível a análise de dados. As tarefas 2, 3 e 4, em análise, têm 2 contextos de aprendizagem a aprendizagem em série e em paralelo. As tabelas são construídas respeitando cada um desses contextos, o contexto em série e o contexto em paralelo. Para o caso das tarefas 3 e 4, o grupo VII, embora por vezes apareça em alguns dos quadros-tabela em estudo, não corresponde a um grupo jogador. É um grupo criado para efetuar experiências com o sistema.

4.4.1 Dados da ficha nº 4 (Tarefa 2)

A tabela, tabela 11, que se segue refere-se à ficha nº 4 e foi resolvida na tarefa nº2. A ficha consistiu de 3 problemas envolvendo funções trigonométricas e os alunos foram agrupados em 14 grupos (quase todos grupos dois a dois). A ficha foi resolvida online²⁵. Nesta tarefa intervieram os elementos de jogo Feedback, a Aversão a perda e a Recompensa. Vamos medir o seu impacto no ensino-aprendizagem através das variáveis:

- Número de questões respondidas.
- Tempo (tempo médio) de resposta a cada questão.
- Número de respostas corretas em cada tentativa.
- Número de questões erradas que são corrigidas.

Na tabela nº 11 podem ser encontrados os dados relativos à ficha de trabalho. Desses dados constam para cada grupo: os momentos em tempo das submissões, todas as suas submissões, o score obtido em cada submissão, e as respostas dadas. A partir da tabela 11 elaboramos outro quadro, a tabela 12. Nesta tabela os dados são agrupados por grupo e: constam o número de submissões, o tempo médio de respostas entre submissões, são indicadas as respostas correctas, e a avaliação. As variáveis apresentadas na tabela 12 permitem abordar as variáveis em estudo:

- o número de submissões permite considerações sobre o Número de questões respondidas,
- o tempo médio de respostas entre submissões permite considerações sobre o Tempo (tempo médio) de resposta a cada questão,

²⁵ <https://goo.gl/RuzLf5>

- o número de respostas correctas em cada submissão permite considerações sobre o Número de respostas corretas em cada tentativa, e
- o número de questões erradas que são corrigidas.

Verificou-se que os alunos sempre que fizeram uma submissão submeteram sempre todas as questões. Assim, entendemos substituir nas variáveis a avaliação do Número de questões respondidas pelo Número de submissões. Tendo em atenção as considerações referidas anteriormente vamos fazer a avaliação das variáveis em estudo a partir de uma análise à tabela 12.

Tabela 11: Tabela das resposta da ficha n^o4

Timestamp	Score	Indique o seu grupo de trabalho	1- Ao fim de quanto tempo, pela primeira vez, após o início da experiência, a distância da rolha ao fundo do reservatório é máxima? (arredonde o resultado obtido)	2- Quanto tempo faltava para o fim da experiência quando, pela última vez, a distância da rolha ao fundo do reservatório foi mínima? (arredonde o resultado obtido)	3- Sabe-se que um intervalo com amplitude igual ao período positivo mínimo da função é $[\pi/7, p]$, p - real. Determine o valor de p . O valor de p é?
5/2/2017 10:25:34	1 / 3	Grupo I	11 segundos	11 segundos	$36/7 * \pi$
5/2/2017 10:29:43	2 / 3	Grupo XIV	11 segundos	5 segundos	$36/7 * \pi$
5/2/2017 10:27:49	2 / 3	Grupo VII	16 segundos	27 segundos	$36/7 * \pi$
5/2/2017 10:49:26	3 / 3	Grupo I	16 segundos	5 segundos	$36/7 * \pi$
5/2/2017 10:55:58	3 / 3	Grupo III	16 segundos	5 segundos	$36/7 * \pi$
5/2/2017 10:55:59	3 / 3	Grupo III	16 segundos	5 segundos	$36/7 * \pi$
5/2/2017 10:55:59	3 / 3	Grupo III	16 segundos	5 segundos	$36/7 * \pi$
5/2/2017 10:56:49	3 / 3	Grupo II	16 segundos	5 segundos	$36/7 * \pi$

5/2/2017 10:57:04	3 / 3	Grupo VI	16 segundos	5 segundos	36/7 *pi
5/2/2017 10:57:09	3 / 3	Grupo VI	16 segundos	5 segundos	36/7 *pi
5/2/2017 10:57:14	3 / 3	Grupo VI	16 segundos	5 segundos	36/7 *pi
5/2/2017 10:57:17	3 / 3	Grupo VI	16 segundos	5 segundos	36/7 *pi
5/2/2017 11:01:26	3 / 3	Grupo V	16 segundos	5 segundos	36/7 *pi
5/2/2017 11:01:51	3 / 3	Grupo IV	16 segundos	5 segundos	36/7 *pi
5/2/2017 11:22:30	2 / 3	Grupo VIII	16 segundos	27 segundos	36/7 *pi

Considerações (o que nos dizem os dados):

- Vários dos grupos, 5 em 14, não fizeram qualquer submissão. Ou seja 35% da turma não fez qualquer submissão. Isto na falta de outra razão visível demonstra falta de sucesso no uso das estratégias de gamificação usadas para este caso concreto dos problemas.
- Houve um grupo que fez 5 submissões com tempos de submissão muito curtos entre eles em todas teve a máxima pontuação. Isto demonstra que o grupo estaria a fazer experiências com o sistema e que as respostas podem não ter a haver com tentativas de melhoria nas pontuações.
- Há 3 grupos com 2 submissões e tempos de diferença entre as submissões a rondar a 1 hora sem terem acertado em todas as questões na primeira submissão. Isto são tentativas de melhoria dos resultados. E parece indicar engajamento provocado pelos elementos de jogo.
- Há 4 grupos que fizeram mais de uma submissão e destes apenas um conseguiu melhorias. Indicia engajamento dos elementos de jogo e dificuldade na resolução dos problemas propostos.
- 5 dos grupos só fizeram uma submissão. Para 35% da turma os problemas foram de resolução relativamente fácil, sem dificuldade considerável.
- 6 dos grupos acertaram em todas as questões e 3 dos grupos acertaram em 2 questões. Isto mostra um grau de sucesso alto na resolução dos problema. Cerca de 64% da turma acertou em mais de metade das questões.
- Não há grupos que tenham acertado numa só questão. Existiu um que acertou uma questão mas que numa nova submissão acertou em 2. Isto mostra que os grupos se dividiram em dois grandes pólos, os grupos que resolveram bem as questões e entenderam os problemas, cerca de 64%, e os grupos com grande dificuldades até de interesse nas matérias, cerca de 35% da turma.

Tabela 12: Quadro das variáveis em estudo (ficha n° 4)

	Número de submissões	Tempos de resposta entre submissões	Respostas correcta em cada submissão	Avaliação em cada submissão
Grupo I	2	00:24:52	1,3	1,3
Grupo II	1	02:15	3	3
Grupo III	3	00:01;01:50	3,3,3	3,3,3,
Grupo IV	1	30:24	3	3
Grupo V	1	30:25	3	3
Grupo VI	5	00:05; 00:05;00:03; 00:24	3,3,3,3,3	3,3,3,3,3
Grupo VII	1	31:15	2	2
Grupo VIII	1	31:30	2	2
Grupo IX				
Grupo X				
Grupo XI				
Grupo XII				
Grupo XIII				
Grupo XIV	1	56:56	2	2

Perante o que no dizem os dados podemos tecer um conjunto de considerações relativas às variáveis definidas acima.

Considerações (o que nos dizem os dados):

- Número de questões respondidas: aqui a questão deve ser reescrita para número de submissões efetuadas. 35% não fizeram qualquer submissão, 4 em 14 fizeram uma submissão (29%), 3 em 14 fizeram 2 submissões (21%), 1 fez 3 submissões (0.07%) e 1 fez 5 submissões (0.07%).
- Tempo (tempo médio) de resposta em cada submissão: o tempo foi calculado pelas diferença entre tempos de submissão (o tempo da primeira submissão de cada grupo é comparado com o tempo da primeira submissão realizada na ficha que foi a realizada pelo grupo I às 10:25:34). Tempo médio entre submissões: 19:48 segundos
- Número de respostas corretas em cada submissão: foram realizadas 16 submissões, às quais correspondiam $16 \times 3 = 48$ questões possíveis a submeter, e foram respondidas correctamente $12 \times 3 + 3 \times 3 + 1 = 43$ questões.
- Número de questões erradas que são corrigidas: só ocorreu em um grupo e numa só questão

4.4.2 Resultados da aprendizagem em série (Dados da ficha n° 5, Tarefa 3)

Do conjunto de variáveis que estão definidas para análise dos elementos de jogo, que constam da tabela 3. Dessas variáveis as que são colhidas nas tarefa 3 são as seguintes:

Número de submissões por questão (tabela 13)

Número de respostas corretas em cada tentativa (tabela 13).

Número de questões erradas que são corrigidas (tabela 13).

Tempo (tempo médio) de resposta a cada questão (tabela 14).

Evolução do tempo de resposta à medida que as respostas vão sendo submetidas (tabela 14).

Número de questões respondidas em cada tentativa (figura 28).

Classificação do grupo (figura 28)

Produções e diálogos dos alunos

O grupo VII, não corresponde a um grupo jogador. É um grupo para efetuar experiências com o sistema. Esta tarefa, tarefa 3, foi realizada permitindo aos grupos voltarem a submeter questões já submetidas. Em seguida vamos fazer algumas considerações aos dados reunidos e que estão tabelados na tabela 13, 14 e a figura 28. A figura e as tabelas contêm os dados que permitem expressar as variáveis em estudo.

Tabela 13: Quadro das variáveis em estudo (ficha n° 5)

Aprendizagem em série											
	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Questão 6	Questão 7	Questão 8	Questão 9	Questão 10	Soma
Grupo I	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	11
Grupo II	2	2	2	1 2 (xv)		1	1	1	1	1	14
Grupo III	2	2	3	2	1	1	1	1 1 (x)		1	15
Grupo IV	3	1	1	1	1	1	1	1 2 (xx)		1	13
Grupo V	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	12

Grupo VI	6	6	5	5	5	5	5	5	8 5 (xxxxvvv)	6	56
Grupo VII	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	4
Soma	17	14	14	12	11	10	10	12	14	12	

A Tabela 13 é uma tabela de dupla entrada. Cada célula(i,j) indica o número de respostas submetidas, pelo grupo j, para responder à questão i. Nas células, por exemplo, a inscrição 'xxvix' significa que as submissões relativas a essa célula foram sequencialmente xxvix em que x- incorrectamente respondida e v - corretamente respondida.

Considerações (o que nos dizem os dados):

- Número de questões respondidas em cada tentativa. Vamos reformular esta questão para número de tentativas usadas por um grupo para responderem a uma questão. Podemos encontrar claramente um outlier o grupo 6. Este grupo para responder a 10 questões fez 56 submissões. Muito anormal comparativamente aos restantes grupos. Retirando o outlier os resultados são muito parecidos. Os grupos de I a V realizaram, para todas a totalidade das questões, entre 12 a 15 submissões. O grupo III fez 3 submissões para a questão 3 e o grupo IV fez o mesmo na questão 1. A questão 1 foi a questão que teve mais submissões, 17 (11 se não se contar as submissões do outlier grupo VI). E a que teve menos foi a questão 6 e 7, 10 submissões (5 sem o outlier grupo VI).
- Número de respostas corretas em cada tentativa (tabela 13). Há uma grande quantidade de submissões sucessivas com a mesma resposta correcta. Retirando o outlier que é o grupo 6 verificamos que em 67 submissões somente em 2 existiram alterações de resposta nas submissões passando da errada a certa (3%). E existiram 2 respostas erradas numa das submissões a resposta submetida continuou errada.
- Número de questões erradas que são corrigidas, No grupo VI (outlier) a questão 9 passou de errada a certa mas foram necessárias 8 submissões para o grupo ter a certeza da resposta que daria. No grupo II relativamente à questão 5, esta passou de resposta errada a resposta correcta. E no grupo IV na questão 9 apesar de ter havido uma tentativa de correcção, após correcção a resposta continuou errada.
- Existiram unicamente 4 respostas que inicialmente começaram por ser erradas: grupo II, questão 5 (posteriormente corrigido); grupo III, questão 9 (não corrigido); grupo IV, questão 9 (não corrigido); grupo VI, questão 9 (corrigido)

Tabela 14: Quadro das variáveis em estudo (ficha n° 5)

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7
Questão1		0:00:45	0:12:18	0:12:08;0:01:12 (média= 0:06:40)	0:00:33	0:00:19;0:00:06;0:01:38;0:10:33;0:00:19;0:00:02 (média= 0:02:10)	
Questão2		0:01:05	0:12:01			0:00:28;0:00:02;0:01:37;0:10:36;0:00:08 (média= 0:02:34)	
Questão3			0:11:02			0:00:09;0:00:02;0:00:16;0:10:34 (média= 0:02:45)	
Questão4						0:00:00;0:00:01;0:00:02;0:10:09 (média= 0:02:33)	
Questão5		0:00:28				0:00:00;0:00:01;0:00:01;0:10:04 (média= 0:02:32)	
Questão6						0:00:00;0:00:01;0:00:27;0:09:36 (média= 0:02:31)	
Questão7						0:00:02;0:00:01;0:00:07;0:09:31 (media= 0:02:25)	
Questão8	0:00:27				0:00:12	0:00:40;0:00:01;0:00:01;0:00:05;0:09:18 (média= 0:02:01)	
Questão9		0:00:42		0:01:08		0:00:02;0:00:02;0:00:02;0:00:23;0:00:07;0:00:09;0:00:08;0:03:11;0:04:52 (média= 0:01:13)	
				0:01:05		0:00:01;0:00:01;0:00:08;0:06:37;0:00:01 (média= 0:01:22)	

A Tabela 14 é uma tabela de dupla entrada em que cada célula(i,j) indica a diferença entre submissões consecutivas entre as questão i realizada pelo grupo j. 0:12:18 deve ler-se 0 horas, 12 minutos e 18 segundos.

Considerações (o que nos dizem os dados):

- O grupo 6 que é um grupo de comportamento outlier em quantidade de questões submetidas tem tempos médios de submissão de 0:01:13 a 0:02:45 (0 horas, 02 minutos e 45 segundos)
- Os tempos de submissão dos restantes grupos pode ser dividido em dois tipos de tempo que designamos por 'tempo curto' e por 'tempo médio'. As submissões de 'tempo curto' nos restantes grupos (sem o grupo 6) variam entre os 0:00:05 e 0:01:08. As submissões de 'tempo médio' nos mesmo grupos variam entre os 0:11:02 e 0:12:18.

	CORRIDA DE APRENDIZAGEM									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Grupo I										
Grupo II										
Grupo III										
Grupo IV										
Grupo V										
Grupo VI										
Grupo VII										

Figura 28: figura dinâmica da competição, projectada na sala de aula ficha nº5.

A figura 28 foi projectada no quadro e nela foram, e em tempo real, registados as aproximações à meta, por grupo, resultante das respostas às questões. Momento relativo à vitória do grupo I na ficha nº 5

4.4.3 Resultados da aprendizagem em paralelo (Dados da ficha nº 6, Tarefa 4)

Variáveis a ter em atenção:

Número de questões respondidas. (tabela 15)

Tempo (tempo médio) de resposta a cada questão. (tabela 15)

Evolução do tempo de resposta à medida que as respostas vão sendo submetida

Tempo de resposta às questões

Relação entre tempo de resposta às questões e o quadro de questões certas e erradas
 Relação entre tempo de resposta às questões e a evolução do quadro competitivo
 Relação entre a evolução do quadro de questões certas e erradas e o quadro competitivo

O aumento da classificação do grupo entre as tarefas mostrará que o grupo se sentiu estimulado pela recompensa na aprendizagem

Evolução dos tempos de respostas na tarefa 4
 Número de questões que são trabalhadas em simultâneo na tarefa 4
 Classificação do grupo
 Produções e diálogos dos alunos

A Tabela 15 é uma tabela de dupla entrada construída a partir das submissões à ficha nº6 em que em cada célula(i,j) consta o momento de tempo, num dia de 24 h, em que o grupo j (coluna) responde à questão i (linha). Aliás todas as tabelas que se seguem nesta secção são relativas às submissões das respostas à Ficha nº 6.

Tabela 15: Momentos de tempo, num dia, de submissão das respostas à ficha nº 6.

Grupos	I	II	III	IV	V	VI
Questão 1	10:28:22	10:26:07	10:28:50	10:24:09	10:24:20	10:28:03
Questão 2	10:30:22	10:29:42	10:33:15	10:35:52	10:26:39	10:28:19
Questão 3	10:34:05	10:38:14	10:42:41	10:38:34	10:31:53	10:31:14
Questão 4	10:37:26	10:47:27	10:54:08		10:38:28	10:38:24
Questão 5	11:00:21	10:56:52	11:13:31	11:10	10:47:19	10:24:28
Questão 6	11:03:39	11:05:00	11:16:54	11:11:11	10:55:26	10:48:10
Questão 7	11:21:23	11:07:55	11:22:44	11:11:40	10:58:26	10:50:33
Questão 8	11:24:43	11:17:59		11:24:54	11:25:17	11:10:17
Questão 9	11:20:30	11:21:47	11:34:25	11:27:56	11:11:01	11:07:29
Questão 10	11:30:11	11:29:12	11:39:12	11:12:26	11:18:52	11:21:50
Questão 11					11:31:43	11:20:28
Questão 12						11:32:58

Tabela 16: Tabela de medidas estatística do momento de tempo de resposta à ficha n° 6 condicionada por grupo

	U(./grupo I)	U(./grupo II)	U(./grupo III)	U(./grupo IV)	U(./grupo V)	U(./grupo VI)
médias	10:59:06	10:58:02	11:05:04	11:01:54	10:55:24	10:53:31
mediana	11:02:00	11:00:56	11:13:31	11:11:11	10:55:26	10:49:22
desvio padrao	0:24:38	0:22:08	0:26:13	0:22:58	0:23:54	0:24:13
maximo	11:30:11	11:29:12	11:39:12	11:27:56	11:31:43	11:32:58
minimo	10:28:22	10:26:07	10:28:50	10:24:09	10:24:20	10:24:28
max - min	1:01:49	1:03:05	1:10:22	1:03:47	1:07:23	1:08:30

A tabela 16 é uma tabela de dupla entrada. Em cada célula (i,j) consta para cada grupo j (coluna j) o momento de tempo das suas medidas através de uma medida estatística (dada na linha i).

Na tabela 16: U - é o momento de tempo de resposta às questões condicionada a um dado grupo.

Considerações (o que nos dizem os dados):

- O tempo de resposta a todas as questões max-min é sensivelmente igual entre os grupos. A variação entre os grupos é de no máximo 9 minutos.
- O desvio padrão das respostas é sensivelmente a mesma entre os grupos e anda à volta dos 20 aos 25 minutos.
- O tempo mediano mostra que sensivelmente a meio da aula todos os grupos tinham respondido a metade das questões.

Tabela 17: Tabela de medidas estatística do momento de tempo de resposta à ficha n° 6 condicionada por questão

X(.)	média	mediana	desvio padrao	máximo	mínimo	max-min
X(./questão 1)	10:26:33	10:26:07	0:01:55	10:28:50	10:24:09	0:04:41
X(./questão 2)	10:30:55	10:30:22	0:03:07	10:35:52	10:26:39	0:09:13
X(./questão 3)	10:37:49	10:38:14	0:06:05	10:48:05	10:31:14	0:16:51
X(./questão 4)	10:44:11	10:42:58	0:07:01	10:54:08	10:37:26	0:16:42
X(./questão 5)	10:57:44	11:00:21	0:17:23	11:13:31	10:24:28	0:49:03
X(./questão 6)	11:05:18	11:05:00	0:10:46	11:16:54	10:48:10	0:28:44

X(/questão 7)	11:11:10	11:11:40	0:13:10	11:25:27	10:50:33	0:34:54
X(/questão 8)	11:23:01	11:24:49	0:08:15	11:34:54	11:10:17	0:24:37
X(/questão 9)	11:23:14	11:21:47	0:11:41	11:39:31	11:07:29	0:32:02
X(/questão 10)	11:25:03	11:23:38	0:08:42	11:39:12	11:12:26	0:26:46
X(/questão 11)	11:26:06	11:26:06	0:07:57	11:31:43	11:20:28	0:11:15
X(/questão 12)	11:34:15	11:34:15	0:01:49	11:35:32	11:32:58	0:02:34

A Tabela 17 é uma tabela de dupla entrada. Em cada célula (i,j) consta para a cada questão i (linha i) o momento de tempo em que os grupos respondem à questão j medido através de uma medida estatística (presente na coluna j). Na tabela 17: X - é o momento, de tempo, de resposta dos grupos condicionada a cada questão.

Considerações (o que nos dizem os dados):

- Os desvios de tempo de resposta a cada questão é sempre baixo. Praticamente insignificante na questão nº 1 e o maior desvio ocorre na questão 7, esse tempo é de 13 minutos.
- A diferença entre os máximo e mínimo em cada questão é bastante curto na questão 1 e é de cerca de 34 minutos na questão 7. Isso pode mostrar que na questão 7 pode haver um grupo que tenha demorado muito mais tempo que os restantes a responder.

Tabela 18: Tempo que decorreu entre a resposta a uma questão e o início das tarefas.

Grupos	I	II	III	IV	V	VI
Questão 1	0:04:13	0:01:58	0:04:41	0:00:00	0:00:11	0:03:54
Questão 2	0:06:13	0:05:33	0:09:06	0:11:43	0:02:30	0:04:10
Questão 3	0:09:56	0:14:05	0:18:32	0:14:25	0:07:44	0:07:05
Questão 4	0:13:17	0:23:18	0:29:59	0	0:14:19	0:14:15
Questão 5	0:36:12	0:32:43	0:49:22	0:46	0:23:10	0:00:19
Questão 6	0:39:30	0:40:51	0:52:45	0:47:02	0:31:17	0:24:01
Questão 7	0:57:14	0:43:46	0:58:35	0:47:31	0:34:17	0:26:24
Questão 8	1:00:34	0:53:50	0	1:00:45	1:01:08	0:46:08
Questão 9	0:56:21	0:57:38	1:10:16	1:03:47	0:46:52	0:43:20
Questão 10	1:06:02	1:05:03	1:15:03	0:48:17	0:54:43	0:57:41
Questão 11	0	0	0	0	1:07:34	0:56:19

Questão 12	0	0	0	0	0	1:08:49
------------	---	---	---	---	---	---------

A tabela 18 é uma tabela de dupla entrada. Em cada célula(i,j) consta o tempo que decorreu entre o início das tarefas e a resposta do grupo j (coluna j) à questão i (linha i).

Considerações (o que nos dizem os dados):

Confrontando esta tabela com a tabela de respostas certas e erradas concluímos que:

- Os grupos I, II, III, IV não responderam às questões 11 e 12. Pelo menos não há dados dos tempos de resposta em relação ao início das tarefas. O grupo V não respondeu à questão 12.
- grupo IV apresenta duas questões respondidas em simultâneo a questão 1 e a questão 4. Há aqui um claro trabalho em paralelo.
- O grupo VI foi o grupo vencedor da competição. E apresenta tempos de resposta a várias questões que mostram que existiu trabalho de grupo em paralelo. Pelos tempos de resposta parece que o grupo se dividiu em 2 subgrupos. Para exemplo. A questão 1 e a questão 2 foram respondidas em tempos relativamente ao início da tarefa de 0:03:54 e 0:04:10 respectivamente e a Questão 6 e Questão 7 nos tempos 0:24:01 e 0:26:24 respectivamente.

Tabela 19: O tempo que decorrido entre início das tarefas e as respostas submetidas condicionadas por grupo sendo medidas através de medidas estatística

	V(/grupo I)	V(/grupo II)	V(/grupo III)	V(/grupo IV)	V(/grupo V)	V(/grupo VI)
médias	0:29:08	0:28:14	0:30:42	0:28:19	0:28:39	0:29:22
mediana	0:24:45	0:28:01	0:24:16	0:30:22	0:27:14	0:25:13
desvio padrao	0:26:07	0:23:58	0:29:01	0:25:59	0:24:31	0:24:13
maximo	1:06:02	1:05:03	1:15:03	1:03:47	1:07:34	1:08:49
minimo	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:19
max - min	1:06:02	1:05:03	1:15:03	1:03:47	1:07:34	1:08:30

A Tabela 19 é uma tabela de dupla entrada. Em cada célula (i,j) consta o tempo que decorreu entre início das tarefas e a resposta do grupo j (coluna j) medido através de uma medida estatística (dada na linha i).

Na tabela 19: U - é o momento de tempo de resposta às questões condicionado a um grupo; V = U - mínimo - é o tempo decorrido entre o início das tarefas e a resposta dada a uma questão condicionada a um certo grupo; U(/Grupo j) - é o momento de tempo das respostas às questões condicionadas ao grupo j (questões respondidas pelo grupo j); e V(/Grupo j)= U(/Grupo j) - minimo - é o tempo decorrido entre o início das tarefas e a resposta dada, pelo grupo j, a uma questão.

O início das tarefas é considerado o momento de tempo em que ocorreu a primeira de todas as respostas às questões. Neste estudo esse momento de tempo ocorreu com a resposta à questão 1 pelo grupo IV.

Considerações (o que nos dizem os dados):

- O tempo médio de resposta dos grupos a todas as questões foi sensivelmente o mesmo. Andou à volta de 30 minutos com um desvio padrão de sensivelmente 25 minutos.
- Sensivelmente entre 25 a 30 minutos os grupos tinham respondido a metade das questões do total de questões que responderam
- Houve homogeneidade de comportamento dos grupos

Tabela 20: O tempo que decorrido entre início das tarefas e as respostas submetidas condicionadas por grupo sendo medidas através de medidas estatística

Y(.)	média	mediana	desvio padrão	máximo	minimo	max-min
Y(./questão 1)	0:02:06	0:01:54	0:01:58	0:04:41	0:00:00	0:04:41
Y(./questão 2)	0:05:55	0:05:53	0:03:45	0:11:43	0:00:00	0:11:43
Y(./questão 3)	0:11:58	0:12:01	0:07:25	0:23:56	0:00:00	0:23:56
Y(./questão 4)	0:15:01	0:14:17	0:11:00	0:29:59	0:00:00	0:29:59
Y(./questão 5)	0:29:23	0:34:28	0:20:00	0:49:22	0:00:00	0:49:22
Y(./questão 6)	0:36:01	0:40:11	0:17:38	0:52:45	0:00:00	0:52:45
Y(./questão 7)	0:41:08	0:45:39	0:20:37	1:01:18	0:00:00	1:01:18
Y(./questão 8)	0:44:09	0:57:12	0:28:08	1:10:45	0:00:00	1:10:45
Y(./questão 9)	0:51:42	0:57:00	0:23:31	1:15:22	0:00:00	1:15:22
Y(./questão 10)	0:53:17	0:58:35	0:22:59	1:15:03	0:00:00	1:15:03
Y(./questão 11)	0:15:29	0	0:28:50	1:07:34	0:00:00	1:07:34
Y(./questão 12)	0:17:32	0	0:32:27	1:11:23	0:00:00	1:11:23

A tabela 20 é uma tabela de dupla entrada. Em cada célula(i,j) consta o tempo que decorreu entre o início das tarefas e a resposta dada pelos grupos condicionado à questão i (linha i) medido através de uma medida estatística j (presente na coluna j). Na tabela 20: X - é o momento, de tempo, de resposta dos grupos condicionado à questão uma certa questão; Y = X- mínimo - é o tempo decorrido entre o início das tarefas e as respostas dos grupos condicionado a uma questão; X(./questão i) - é o momento, de tempo, em que a

questão i foi respondida; $Y(./\text{questão } i) = X(\text{questão } i) - \text{mínimo}$ - é o tempo decorrido entre o início das tarefas e a resposta à questão i.

O início das tarefas é considerado o momento de tempo em que ocorreu a primeira de todas as respostas às questões. Neste estudo esse momento de tempo ocorreu com a resposta à questão 1 pelo grupo IV.

Considerações (o que nos dizem os dados):

- O tempo médio de resposta a cada questão mostra que as primeiras questões a serem respondidas foram as questões 1,2 e as últimas foram as questões 9, 10. As questões 11, 12 têm, tempos médios de respostas semelhantes às 3 e 4 e repartem com elas o serem as 3^a e 4^a primeiras questões a serem respondidas.

- a questão 1 apresenta respostas em tempos de aula muito próximo variam 4 minutos. Já as questões da 7 à 12 apresentam tempos de respostas que variam em mais de uma hora.

4.4.4 Conclusão: O engajamento dos elementos de jogo: competição, cooperação, feedback, restrição de tempo, aversão a perda, e recompensa

	Elementos de jogo principais	Avaliação do engajamento do elemento de jogo no processo ensino-aprendizagem
Competição, tarefas 3, 4.	Número de submissões por questão.	(tarefa 3) Todos os grupos submeteram todas as questões. Em média houve 13 submissões para 10 questões. Forte engajamento. (tarefa 4) Nem todas as questões foram respondidas. Avaliação de engajamento imperceptível.
	A evolução dos tempos de respostas na tarefa 3.	(tarefa 3) - Não há diferenças assinaláveis na evolução dos tempos de resposta de questões resubmetidas. Não demonstra engajamento.
	O número de questões que são trabalhadas em simultâneo na tarefa 4.	Consideramos que 2 questões estão a ser trabalhadas em simultâneo se a submissão entre elas foi de diferença de até 3 minutos. Observamos dos dados que na realização da tarefa 4 ocorreram pelo menos 16 pares destas situações. Situação que demonstra engajamento.
	Classificação do grupo.	Só avaliamos a classificação na tarefa 4. (tarefa 4) Observamos que todos os grupos erraram entre uma e três questões. Situação que demonstra engajamento.

	Produções e diálogos dos alunos.	Não avaliada.
Avaliação final: A competição provocou engajamento no processo de ensino aprendizagem é isso que nos dizem os dados, pois das 5 variáveis em estudo para avaliação do engajamento deste elemento de jogo 3 demonstram engajamento.		
Cooperação, tarefas 3, 4.	O Score obtido.	Só avaliamos a classificação na tarefa 4. (tarefa 4) Observamos que todos os grupos erraram entre uma e três questões. Situação que demonstra engajamento.
	Número de submissões por questão.	(tarefa 3) Todos os grupos submeteram todas as questões. Em média houve 13 submissões para 10 questões. Situação que demonstra engajamento. (tarefa 4) Nem todas as questões foram respondidas. Situação de engajamento imperceptível.
	O tempo de execução de cada exercício.	(tarefa 3) - Não há diferenças assinaláveis na evolução dos tempos de resposta de questões resubmetidas. Não há engajamento.
	Produções e diálogos dos alunos.	Não avaliada.
Avaliação final: As variáveis demonstram engajamento provocado pelo elemento de jogo.		
Feedback, tarefas 2, 3.	Número de submissões por questão.	(tarefa 3) Todos os grupos submeteram todas as questões. Em média houve 13 submissões para 10 questões. Situação que demonstra engajamento.
	Número de questões respondidas em cada tentativa.	(tarefa 3) Número de questões respondidas em cada tentativa. Reformulamos esta questão para número de tentativas de um grupo para uma questão. Encontrar claramente um outlier o, grupo 6. Este grupo para responder a 10 questões fez 56 submissões. Muito anormal comparativamente aos restantes grupos. Retirando o outlier os resultados são muito parecidos. Os grupos para 10 questões realizaram entre 12 a 15 submissões. O grupo III fez 3 submissões para a questão 3 e o grupo IV fez o mesmo na questão 1. A questão 17 foi a questão que teve mais submissões, 16. E a que teve menos foi a questão 5 e 7, 9 submissões. Situação que demonstra engajamento.
	Número de respostas corretas em cada tentativa.	- Número de respostas corretas em cada tentativa (tabela 13). Há uma grande quantidade de submissões sucessivas com a mesma resposta e correcta. Retirando o outlier que é o grupo 6 verificamos que em 67 submissões somente em 2 existiram

	alterações de resposta nas submissões passando da errada a certa (3%). E existiram 2 respostas erradas numa das submissões a resposta submetida continuou errada. Situação que demonstra engajamento.
Número de questões erradas que são corrigidas.	- Número de questões erradas que são corrigidas, No grupo VI (outlier) a questão 9 passou de errada a certa mas foram necessárias 8 submissões para o grupo ter a certeza da resposta que daria. No grupo II relativamente à questão 5 esta passou de resposta errada a resposta correcta. E no grupo IV na questão 9 apesar de ter havido uma tentativa de correcção, após correcção, a resposta continuou errada. - Existiram unicamente 4 respostas que inicialmente começaram por ser erradas: grupo II, questão 5 (posteriormente corrigido); grupo III, questão 9 (não corrigido); grupo IV, questão 9 (não corrigido); grupo VI, questão 9 (corrigido) . Situação que demonstra engajamento.
Avaliação final: As variáveis demonstram engajamento provocado pelo elemento de jogo.	

Para os elementos de jogo consequentes não faremos considerações finais sobre o engajamento que provocam por considerarmos desnecessária. Essas considerações são feitas somente nas variáveis que foram consideradas pertinentes para medir o engajamento que o elemento de jogo provoca no processo ensino-aprendizagem.

	Elementos de jogo consequentes	Avaliação do engajamento do elemento de jogo no processo ensino-aprendizagem
Restrição de tempo, tarefas 2,3, e 4.	Número de questões respondidas.	(tarefa 3) Todos os grupos submeteram todas as questões. E em média houve 13 submissões para 10 questões. (tarefa 4) Nem todas as questões foram respondidas.
	Número de submissões por questão.	(tarefa 3) Todos os grupos submeteram todas as questões. E em média houve 13 submissões para 10 questões. (tarefa 4) Nem todas as questões foram respondidas.
	Tempo (tempo médio) de resposta a cada questão.	- O tempo médio de resposta a cada questão mostra que as primeiras questões a serem respondidas foram as questões 1, 2 e as últimas foram as questões 9,

		<p>10. As questões 11, 12 têm, tempos médios de respostas semelhantes às 3 e 4 e repartem com elas o serem as 3ª e 4ª questões primeiras questões a serem respondidas.</p> <p>- A questão 1 apresenta respostas em tempos de aula muito próximo variam 4 minutos. Já as questões da 7 à 12 apresentam tempos de respostas que variam em mais de uma hora.</p>
	Evolução do tempo de resposta à medida que as respostas vão sendo submetidas.	(tarefa 3) - Não há diferenças assinaláveis na evolução dos tempos de resposta de questões resubmetidas.
	Produções e diálogos dos alunos.	Não avaliada.
Aversão a perda, tarefa 4.	Tempo de resposta às questões.	<p>- O tempo médio de resposta a cada questão mostra que as primeiras questões foram as questões 1, 2 e as últimas foram as questões 9, 10. As questões 11, 12 têm, tempos médios de respostas semelhantes às 3 e 4 e repartem com elas o serem as 3ª e 4ª primeiras questões a serem respondidas.</p> <p>- A questão 1 apresenta respostas em tempos de aula muito próximo variam 4 minutos. Já as questões da 7 à 12 apresentam tempos de respostas que variam em mais de uma hora.</p>
	Relação entre tempo de resposta às questões e o quadro de competitivo .	(tarefa 4) O grupo 6 que submeteu todas as questões e fez um trabalho de grupo grande. As questões 1, 2, 3, 5 foram resolvidas em paralelo. O mesmo aconteceu às questões 6, 7 e às questões 8, 9. Isto permitiu ao grupo uma entrada ou actualizações em competição em grande. No entanto nas duas primeiras submissões houve duas respostas erradas. Há uma grande percentagem de grupos que erraram a questão 3 que correspondeu quase sempre à terceira submissão que fizeram. Tirando o grupo I e VI que apresentaram trabalho paralelo claro os outros foram respondendo às questões sucessivamente pelo número da questão.
	Produções e diálogos dos aluno.	Não avaliada.
Recompensa,	Número de submissões por questão.	(tarefa 3) todos os grupos submeteram todas as

tarefa 2, 3, e 4.		questões. E em média houve 13 submissões para 10 questões. (tarefa 4) Nem todas as questões foram respondidas.
	O aumento da classificação do grupo entre as tarefas mostrará que o grupo se sentiu estimulado pela recompensa na aprendizagem.	(tarefa 3) - Não há diferenças assinaláveis na evolução dos tempos de resposta de questões resubmetidas.
	Produções e diálogos dos alunos.	Não avaliada.

5. Conclusão

A questão em investigação no trabalho consistiu em determinar como aplicar, ao ensino secundário, o conceito de gamificação na aprendizagem de matemática. Para a concretizarmos escolhemos um tema de intervenção e definimos 2 objetivos: i) aplicar o conceito de gamificação na aprendizagem do domínio de conteúdo Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI); e ii) avaliar, dentro do possível, o impacto das estratégias de gamificação usadas.

Após isso escolhemos os elementos de jogo a usar na intervenção educativa: o avatar, narrativa, cooperação, competição, o feedback. Como consequências destes surgiram outros a que chamamos elementos de jogo consequentes: a recompensa, aversão a perda, e a restrição de tempo. Estes elementos foram identificados e foi descrito a forma como apareceram. Definimos um mecanismo de funcionamento para o ensino aprendizagem baseado em Leituras e Ficha de Trabalho e aplicamos uma metodologia conhecida para desenhar o sistema de gamificação na educação. Disto tudo nos surgiram respostas para a questão de investigação.

O avatar foi usado como um formulário do domínio de conteúdo TRI onde a disposição das fórmulas desenhava uma figura com aspecto humano. A narrativa foi operacionalizada em mnemónicas. Observamos que as mnemónicas na verdade são pequenas narrativas que permitem associações de ideias/conceitos que levam a lembrar conceitos. A cooperação foi traduzida na forma de trabalho dos elementos do grupo, se em cada momento todos os elementos estão concentrados na execução de uma só tarefa ou se podiam simultaneamente estarem a resolver diferentes trabalhos. A competição foi traduzida na projecção, na zona do quadro de um quadro competitivo onde existia uma meta e um lugar de partida para cada grupo. Os grupos iam aproximando-se da meta à medida que iam respondendo às questões correctamente. Isto criou na sala de aula e nos grupos um ambiente competitivo. O feedback foi encarado como o retorno pelo sistema da submissão de respostas às fichas de trabalho. Esse retorno fez-se pelas pontuações da ficha submetida e pela avaliação como correcta ou não das respostas. No caso de incorreção era também retornada a resposta correcta.

Para operacionalizar tudo isso usamos ferramentas como o serviço google form, para construir as fichas, e duas infraestruturas uma de hospedagem, hostinger24, e outra para armazenamento de conteúdos a cloud da google. A cloud foi ainda usada para algum processamento em tempo real. Durante o processo educativo recorreremos amiúde a um conjunto de técnicas de diagnóstico da situação como questões de resposta rápida cujos resultados eram apoiadas depois em elementos de gamificação.

O objectivo deste trabalho foi essencialmente o de desenhar formas de aplicar o conceito de gamificação ao ensino secundário e em particular a situações de sala de aula. Por isso identificamos elementos de jogo a usar, desenhamos formas de os aplicar, e identificamos ferramentas para os implementar. Em consequência levantamos âncora também para medir o efeito da gamificação e das técnicas aplicadas. A abordagem foi de como poderíamos fazer essa medição. Para isso usamos conclusões abduativas. Essas conclusões de sentido exploratório permitiram-nos gerar hipóteses de como medir o engajamento através da criação de modelos de comportamento dos fenómenos. Esses modelos devem ser tomados como hipóteses a verificar em estudos posteriores. Essas hipóteses devem ser encaradas como de probabilidade forte. Assim chegamos à conclusão que:

- i) A avaliação do engajamento pode ser feito através de aspectos qualitativos ou quantitativos.
- ii) As medições qualitativas servem para corroborar as quantitativas. Usamos isso por exemplo para corroborar os altos scores obtidos no uso do avatar com os expressões dos alunos na aula e desenhos do avatar nas fichas de trabalho.
- iii) As avaliações quantitativas, sempre que necessário, devem ser feitas usando um modelo de conformidade, para verificar se o que se pretende com os elementos de jogo está de acordo com o sua implementação. No nosso caso, necessitamos de um modelo de conformidade para o elemento de jogo narrativa.
- iv) Para as medições quantitativas devem usar-se medidas de estatística descritiva, médias, modas, medianas, desvios padrões, variâncias, quartis. Devemos usá-las para nos sensibilizar para o comportamento numéricos dos fenómenos em contexto de gamificação. Usamos isso por exemplo para os elementos de jogo, Feedback, Cooperação e Competição.
- v) A existência de altas correlações, em contexto de gamificação, pode indiciar engajamento. Usamos este facto por exemplo para mostrar engajamento no elemento de jogo narrativas correlações, ao medirmos a correlação dos scores com o uso de mnemónicas.
- v) A classificação de um fenómeno em contexto de gamificação pela assimetria, se enviesado à esquerda, pode ser uma demonstração forte de engajamento do elemento de jogo. Usamos isso por exemplo nos elementos de jogo avatar e narrativas.
- vi) se usarmos para cada elemento de jogo um conjunto de variáveis para nos indicarem a existência ou não de engajamento. A decisão de existência de engajamento pelo elemento de jogo pode ser tomada se a maioria das variáveis apontavam nesse sentido. Fizemos isso para os elementos de jogo Feedback, Cooperação e Competição.

A forma como medimos engajamento dos elementos de jogo é por nós aqui deixada como um conjunto de ideias já aplicadas para a construção de um modelo para a mediação do engajamento dos elementos de jogo em contexto gamificação. Esse é um dos passos naturais que se deve seguir a este trabalho.

Bibliografia

Caponetto, I., Earp, J., Ott, M. (2014, October). Gamification and education: A literature review. In European Conference on Games Based Learning (Vol. 1, p. 50). Academic Conferences International Limited.

Costa, A. C. S., & Marchiori, P. Z. (2015). Gamificação, elementos de jogos e estratégia: uma matriz de referência. *InCID: Revista de Ciência da Informação e Documentação*, 6(2), 44-65.

Caponetto, I., Earp, J., Ott, M. (2014, October). Gamification and education: A literature review. *In European Conference on Games Based Learning (Vol. 1, p. 50)*. Academic Conferences International Limited.

De Sousa Borges, S., Durelli, V. H., Reis, H. M., Isotani, S. (2014, March). A systematic mapping on gamification applied to education. In Proceedings of the 29th Annual ACM Symposium on Applied Computing (pp. 216-222). ACM.

Dalkir, K., & Beaulieu, M. (2017). *Knowledge management in theory and practice*. MIT press.

Deterding, S., Dixon, D., Khaled, R., Nacke, L. (2011, September). From game design elements to gamefulness: defining gamification. *In Proceedings of the 15th international academic MindTrek conference: Envisioning future media environments* (pp. 9-15). ACM.

Deterding, S.. 2012. (July 2012) Gamification: designing for motivation. *Interactions*, volume 19, number 4, July+August 2012 (pp. 14-17). DOI: <https://doi.org/10.1145/2212877.2212883>

Douven, Igor, "Abduction", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/sum2017/entries/abduction/>>.

Gold, J., Walton, J., Cureton, P., & Anderson, L. (2011). Theorising and practitioners in HRD: the role of abductive reasoning. *Journal of European Industrial Training*, 35(3), 230-246

Haig, B. D. (2005). An abductive theory of scientific method. *Psychological methods*, 10(4), 371.

Huang, W. H. Y., Soman, D. (2013). Gamification of education. Research Report Series: Behavioural Economics in Action, Rotman School of Management, University of Toronto.

Kant, I. (1999). *Critique of pure reason*. Cambridge university press.

Light, D., Pierson, E. (2014). Increasing student engagement in math: The use of khan academy in Chilean classrooms. *International Journal of Education and Development using Information and Communication Technology*, 10(2), 103

Morrison, B. B., DiSalvo, B. (2014, March). Khan academy gamifies computer science. *In Proceedings of the 45th ACM technical symposium on Computer science education* (pp. 39-44). ACM.

Ministério da Educação e Ciência. (2013). Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário. 20/12/2016, de Ministério da Educação e Ciência Site web: goo.gl/z17iqh

Novak, J. D., & Canas, A. J. (2007). Theoretical origins of concept maps, how to construct them, and uses in education. *Reflecting Education*, 3(1), 29-42.

Patokorpi, E. (2007). Logic of Sherlock Holmes in technology enhanced learning. *Journal of Educational Technology & Society*, 10(1), 171-185.

Reichherzer, T. R., Cañas, A. J., Ford, K. M., & Hayes, P. J. (1998). The Giant: A classroom collaborator. In *Proceedings of the Workshop on Pedagogical Agents, San Antonio, TX*.

Rughinis, R. (2013, June). Gamification for productive interaction: Reading and working with the gamification debate in education. In *Information Systems and Technologies (CISTI), 2013 8th Iberian Conference on* (pp. 1-5). IEEE.

Schell, J. (2010). Design outside the box. DICE summit.

Scott, D., & Morrison, M. (2006). *Key ideas in educational research*. A&C Black.

Schickore, Jutta, "Scientific Discovery", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.),

URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/scientific-discovery/>>.

Vieira, P., Martinho H., Domingues, A. Gamificação, imagem, mnemónicas e trigonometria, comunicação no profmat2018.

Site web: <http://domitila.edu.pt/ProfMat2018/programa/simposioComunica.html>

Wang, S., Lo, D., Jiang, L. (2013, March). An empirical study on developer interactions in StackOverflow. In Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on Applied Computing (pp. 1019-1024). ACM.

Werbach, Kevin. (2016). Curso de Gamification. 20/12/2016, plataforma de elearning Coursera Sitio web: <https://www.coursera.org/learn/gamification> 9-15). ACM.

Werbach, K., & Hunter, D. (2012). *For the win: How game thinking can revolutionize your business*. Wharton Digital Press.

Anexo

Caracterização das turmas



Turma: **11CSE1**

Caracterização Socioeconómica

Ano letivo: **2017-18**

N.º de alunos		
Sexo	N.º	%
Masculino	16	53
Feminino	14	47
Total	30	

Idade dos alunos		
Idade	N.º	%
<15	0	0
15	3	10
16	17	57
17	10	33
18		
>18		

Repetências		
	N.º	%
Nenhuma	20	67
Uma	9	30
Duas	1	3
Três ou mais		
No presente ano	0	0

Disciplinas preferidas		
Disciplinas	N.º	%
PORTUGUES	2	7
ED. FÍSICA	1	3
INGLÊS	2	7
FILOSOFIA	1	3
ECONOMIA	9	30
GEOGRAFIA	7	23
MATEMÁTICA	8	27

Disciplinas c/ dificuldades		
Disciplinas	N.º	%
PORTUGUÊS	1	3
ED. FÍSICA	5	17
INGLÊS	8	27
FILOSOFIA	3	10
ECONOMIA	6	20
GEOGRAFIA	1	3
MATEMÁTICA	2	7

Naturalidade dos alunos			
Concelho	N.º	%	
Guimarães	26	87	
Outros	4	13	

Residência dos alunos		
Concelho	N.º	%
Guimarães	28	93
Outros	2	7

Localização da residência		
Distância à escola (em Km)	N.º	%
[0,1[1	3
[1,2[2	7
[2,5[23	77
≥ 5	5	17

Localização da residência		
Tempo gasto (em minutos)	N.º	%
[0,15[25	83
[15,30[5	17
[30,60[
[60,90[
≥ 90		

Localização da residência		
Meio de deslocação	N.º	%
A pé	3	10
Autocarro	6	20
Comboio	0	0
Transporte público	10	33
Automóvel	11	37
Motociclo/ bicicleta	0	0
Outro meio		

Escola frequentada no ano anterior		
	N.º	%
Escola Sec. Francisco de H	27	90
Externato Delfim Ferreira	3	10

Idade dos pais dos alunos				
Idade	Pai		Mãe	
	N.º	%	N.º	%
< 35	0	0	0	0
[35,40[4	13	5	17
[40,45[18	60	19	63
[45,50[5	17	3	10
[50,55[2	7	2	7
[55,60[1	3	1	3
[60,64[
≥ 64				

Habilitações académicas dos Pais				
Habilitações	Pai		Mãe	
	N.º	%	N.º	%
Sem habilitações	0	0	0	0
Básico - 1º ciclo	0	0	0	0
Básico - 2º ciclo	8	27	5	17
Básico - 3º ciclo	12	40	12	40
Secundário	9	30	10	33
Pós-graduação				
Bacharelato			1	3
Licenciatura	1	3	1	3
Mestrado			1	3
Doutoramento				

Situação socioeconómica dos pais dos alunos				
Situação	Pai		Mãe	
	N.º	%	N.º	%
T. por conta de outrem	22	73	25	83
T. por conta própria isolado	1	3	1	3
T. por conta própria empregador	6	20	2	7
Desempregado	1	3	1	3
Estudante				
Doméstico			1	3
Reformado				
Situação desconhecida				
Outra				

Agregado familiar		
N.º de elementos	N.º	%
2	1	3
3	2	7
4	25	83
5	2	7
>5		



Turma: **12CT4**

Caracterização Socioeconómica

Ano letivo **2016-2017**

N.º de alunos		
Sexo	N.º	%
Masculino	6	22
Feminino	21	78
Total	27	

Idade dos alunos		
Idade	N.º	%
<15		
15		
16	3	11
17	22	81
18	1	4
>18		

Repetências		
	N.º	%
Nenhuma	25	93
Uma	1	4
Duas		
Três ou mais		
No presente ano		

Disciplinas preferidas		
Disciplinas	N.º	%
BGG	8	30
ED. FÍSICA	14	52
INGLÊS	5	19
MATEMÁTICA	15	56
FILOSOFIA		
F.Q.	9	33

Disciplinas c/ dificuldades		
Disciplinas	N.º	%
PORTUGUÊS	14	52
MATEMÁTICA	3	11
F.Q.	7	26
INGLÊS	5	19
FILOSOFIA		
BILOGIA	2	7
ED. FÍSICA	1	4

Naturalidade dos alunos		
Concelho	N.º	%
Guimarães	25	93
Outros	1	4

Residência dos alunos		
Concelho	N.º	%
Guimarães	25	93
Outros	1	4

Localização da residência		
Distância à escola (em Km)	N.º	%
[0,1[2	7
[1,2[1	4
[2,5[5	19
≥ 5	18	67

Localização da residência		
Tempo gasto (em minutos)	N.º	%
[0,15[7	26
[15,30[13	48
[30,60[6	22
[60,90[
≥ 90		

Localização da residência		
Meio de deslocação	N.º	%
A pé	2	7
Autocarro	24	89
Comboio		
Transporte público		
Automóvel		
Motociclo/ bicicleta		
Outro meio		

Escola frequentada no ano anterior		
	N.º	%
Escola Sec. Francisco de H	26	96

Idade dos pais dos alunos				
Idade	Pai		Mãe	
	N.º	%	N.º	%
< 35	4	15		
[35,40[11	41		
[40,45[8	30		
[45,50[5	19		
[50,55[3	11		
[55,60[
[60,64[
≥ 64				

Habilitações académicas dos Pais				
Habilitações	Pai		Mãe	
	N.º	%	N.º	%
Sem habilitações				
Básico - 1º ciclo	6	22	6	22
Básico - 2º ciclo	9	33	4	15
Básico - 3º ciclo	3	11	4	15
Secundário	4	15	6	22
Pós-graduação				
Bacharelato				
Licenciatura				
Mestrado				
Doutoramento				

Situação socioeconómica dos pais dos alunos				
Situação	Pai		Mãe	
	N.º	%	N.º	%
T. por conta de outrem	18	67	16	59
T. por conta própria isolado	3	11		
T. por conta própria empregador	2	7		
Desempregado			1	4
Estudante				
Doméstico				
Reformado	2	7		
Situação desconhecida				
Outra				

Agregado familiar		
N.º de elementos	N.º	%
2	2	7
3	4	15
4	16	59
5	3	11
>5	1	4

Apêndice

FAQ (Frequent Ask Questions)

FAQ1: Qual foi o tema da intervenção?

A intervenção educativa foi realizada em um dos 7 domínios de conteúdo do 12º ano. O domínio de conteúdo Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI).

FAQ2: Porque foi escolhido este tema?

O tema TRI foi escolhido pela sua importância na matemática e fora dela. As ferramentas matemáticas que fazem parte do tema TRI, têm uso matemático em si mesmo, e são usadas em múltiplas áreas da engenharia. É essencial o seu uso nomeadamente em problemas que envolvem o estudo de fenómenos periódicos. Muitos destes fenómenos, são fenómenos do dia a dia, e são descritos através da definição de parâmetros existentes em funções trigonométricas tais como: amplitude, fase, velocidade angular, período, frequência etc... Todos eles de grande uso em problemas práticos e de engenharia.

FAQ3: Qual o motivo porque é dada importância ao uso da matemática em engenharia?

Não há qualquer motivo especial. Apenas o facto de o mestrando ter grande afinidade pelas áreas da engenharia.

FAQ4: Como é lecionado o tema?

A leccionação do tema escolhido é dividida em 2 fases, a fase de ensino e a fase de avaliação da aprendizagem. Ambas as fases fazem parte do processo de aprendizagem. A fase de ensino é uma fase onde são leccionados os conteúdos teóricos e são realizados exercícios. A fase de avaliação é uma fase de aplicação da gamificação onde são resolvidos online fichas de problemas, problemas e exercícios. Neste a tónica é colocada na avaliação.

FAQ5: Em que consiste a fase de ensino?

A fase de ensino consiste na leccionação de conteúdos. Nesta fase são usados dois tipos de textos de apoio. As leituras e as fichas de trabalho. As leituras, são 3, e são resumos teóricos dos conteúdos e nesta fase, fase de ensino, servem para uma mais fácil explicação e um melhor entendimento dos conteúdos. As fichas de trabalho servem para consolidação de conhecimentos. Nesta fase, fase de ensino, são trabalhadas as fichas de trabalho nº 1, 2 e 3 e as fichas: do 11º ano, ficha do 12º ano Ficha senos, e ficha do 12º ano Ficha dos cosenos.

A leccionação teórica deste tema ao 12º ano é dividida em 3 partes, cada uma correspondendo a uma leitura:

- i) O estudo das funções trigonométricas, sin, cos e tg e das suas propriedades (Leitura nº 1)
- ii) O estudo da função $\sin(x)/x$ (Leitura nº 2), e
- iii) O estudo das derivadas das funções trigonométricas: sin, cos e tg e as outras aplicações em matemática (Leitura nº 3).

Nas 6 fichas, desta fase, os exercícios que as constituem são exercícios para consolidação de conhecimentos:

- i) A ficha de trabalho nº 1. É uma ficha de exercícios sobre as funções trigonométricas, sin, cos, tg, e suas propriedades. O conteúdo teórico para a resolução desta ficha está essencialmente na Leitura nº 1
- ii) As fichas: do 11º ano, do 12º ano dos Senos, e dos Cosenos são fichas para consolidação de conhecimentos através do uso das técnicas de gamificação. Usam os elementos de jogo Avatar + Narrativas.
- iii) A ficha de trabalho nº 2. Esta ficha consiste na resolução de exercícios que envolvem limites conhecidos e o limite da função $\sin(x)/x$ quando x tende para 0 e ou quando x tende para $+\infty$. O conteúdo teórico para a resolução desta ficha está na Leitura nº 2.
- iv) A ficha de trabalho nº 3. Esta ficha consiste na resolução de exercícios sobre derivadas das funções trigonométricas, sin, cos, tg e algumas aplicações da trigonometria na matemática. O conteúdo teórico para a resolução desta ficha está na Leitura nº 3.

FAQ6: Em que consiste a fase de avaliação?

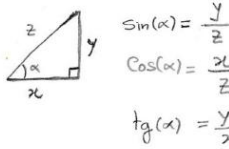
A fase de avaliação é uma fase com grande feedback e consiste na realização de 3 fichas de trabalho na web:

- i) A ficha de trabalho nº 4. Esta ficha de trabalho consiste de um questionário na web, composto de 3 questões, sobre a resolução de um problema que envolve funções trigonométricas e suas propriedades (Tabela 3).
- ii) A ficha de trabalho nº 5 (Tabela 3). Esta ficha de trabalho consiste de uma sequência de 10 questões sobre trigonometria. O conteúdo teórico para a resolução desta ficha está na Leitura nº 1, 2, 3. As questões são respondidas de forma sucessiva a partir da primeira questão (Tabela 3). O trabalho é planeado para ser feito em grupo e em cada momento todos os elementos do grupo trabalham sobre a mesma questão. A submissão da questão i dá acesso ao enunciado da questão $i+1$. A esta forma de trabalhar em sucessão, estando todos os elementos do grupo concentrados numa só questão e o acesso à questão seguinte só se dar quando é submetida a questão em trabalho, chamamos trabalho em série, em sequência.
- iii) A ficha de trabalho nº 6 (ver Tabela 3). Esta ficha de trabalho consiste de um conjunto de 12 questões e incide sobre toda a matéria lecionada. O conteúdo teórico para a resolução desta ficha está na leitura nº 1, 2, 3. Neste questionário, contrariamente ao anterior, todas as questões estão disponíveis em simultâneo

num site construído para o efeito²⁶. O trabalho é planeado para ser feito em grupo e em cada momento no grupo podem todas ou várias questões estarem a ser trabalhadas, podendo o grupo reagrupar-se em subgrupos de trabalho. A esta forma de trabalhar chamamos trabalho em paralelo.

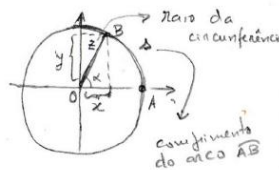
Leituras

Leitura nº 1



$\sin(\alpha) = \frac{y}{z}$
 $\cos(\alpha) = \frac{x}{z}$
 $\text{tg}(\alpha) = \frac{y}{x}$

grau: divisão do \odot em 400 partes iguais
 grau: divisão do \odot em 360 partes iguais
 radianos: relação entre $\frac{\Delta}{Z}$



Raio da circunferência
 comprimento do arco AB

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	N.D.

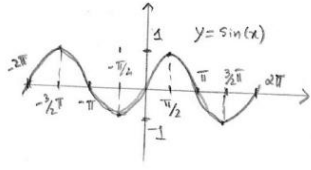
Leitura nº 1: Sin, Cos, tg

①. f é periódica e tem período T ($T \neq 0$) se:
 $f(x+T) = f(x), \forall x \in D_f$
 Ao menor valor positivo T que verifica esta condição dá-se o nome de período positivo mínimo.

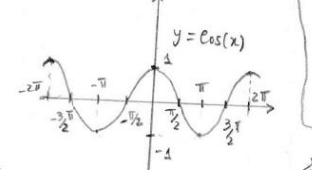
②. se f é uma f.v.v. definida por: $f(x) = \sin(ax)$ $a \neq 0$
 então f é uma função periódica, sendo $\frac{2\pi}{a}$ o período da função. ($\frac{2\pi}{|a|}$ é o período positivo mínimo de f .)

③. se f é uma função tal que $f(x) = \sin(ax+b)$ $a \neq 0$. Então:
 i) f é periódica e o período positivo mínimo é $\frac{2\pi}{|a|}$,
 ii) obtém-se o gráfico de f a partir do gráfico de $y = \sin(ax)$ através de uma translação associada ao vetor $\vec{u} = (-\frac{b}{a}, 0)$

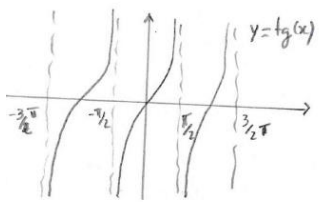
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
 $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
 $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
 $\text{tg}(x \pm y) = \frac{\text{tg}(x) \pm \text{tg}(y)}{1 \mp \text{tg}(x)\text{tg}(y)}$



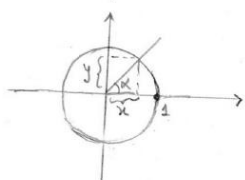
$y = \sin(x)$



$y = \cos(x)$



$y = \text{tg}(x)$



$\sin(x) = \sin(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $\cos(x) = \cos(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $\text{tg}(x) = \text{tg}(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

²⁶ <http://paulovieira.formalmachine2015.com/estagio/aulaassistida/3aula.html>

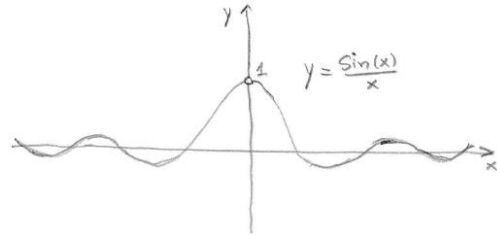
Leitura n° 2

Leitura n° 2,

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

• $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$
 $\downarrow x \rightarrow \pm \infty$ $\downarrow x \rightarrow \pm \infty$
 0 0

logo, $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$



Leitura n° 3

Leitura n° 3

Derivadas de Funções trigonométricas

• $(\sin(x))'_x = \cos(x)$

• $(\cos(x))'_x = -\sin(x)$

• $(\operatorname{tg}(x))'_x = \frac{1}{\cos^2(x)}$

• Para $u = u(x)$. Composição de $\sin, \cos, \operatorname{tg}$ com $u = u(x)$

$(\sin(u(x)))'_x = u'(x) \cos(u(x))$

$(\cos(u(x)))'_x = -u'(x) \sin(u(x))$

$(\operatorname{tg}(u(x)))'_x = \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$

• $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$ [derivada de funções compostas]

• $1 + \operatorname{tg}^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ [igualdade interessante]

Números Complexos

• $z = \overset{\operatorname{Re}(z)}{a} + \overset{\operatorname{Im}(z)}{b}i$ (forma algébrica)

• $i^2 = -1$

• $\bar{z} = a - ib$ conjugado de $z = a + ib$

• $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (módulo de z)

• $z = a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$

$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) = \rho \operatorname{cis}(\theta)$

↓
 toma θ tal que $\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}$

e $-\pi/2 < \theta < \pi/2$

• $(a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$

• $\rho_1 \operatorname{cis}(\theta_1) \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_2) = \rho_1 \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$

• $\frac{1}{\rho \operatorname{cis} \theta} = \frac{1}{\rho} \operatorname{cis}(-\theta)$

Fichas de Trabalho

Ficha de Trabalho 11º ano sobre Trigonometria (Avatares+ Narrativas/Mnemónicas)

Ficha de Trabalho - Trigonometria (Avatar+Mnemónicas/Narrativas)

* Required

Indique o seu grupo de trabalho *

Choose ▼

Digite o código do seu grupo *

Your answer

Questão1: Qual a sequência de valores que se obtém a partir da sequência: $\cos(0)$, $\sin(0)$, $\text{tg}(0)$

1,1,1

1,0,0

0,1,0

1 point

0,0,1

Não sei

Questão2: Sabendo que $\sin(a)=0.43$ e $\cos(a)=0.9028$ (valores aproximados a 4 décimas) . Qual a sequência de valores que se obtém da sequência: $\sin(-a)$, $\cos(-a)$, $\text{tg}(-a)$

0.43; 0.9028; 0.4763

-0.43; 0.9028; - 0.4763

0.43; - 0.9028; - 0.4763

1 point

-0.43; -0.9028; 0.4763

Não sei

Questão3: Qual a sequência de valores correcta que se obtém da sequência: $\cos(30)$, $\sin(60)$, $\cos(60)$, $\sin(30)$. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ aproxime a 0.866

1 point

0.866, 0.866, 0.5, - 0.5

0.5, 0.5, 0.866, 0.866

0.866, 0.5, 0.866, 0.5

0.866, 0.866, 0.5, 0.5

Não sei

Questão4: Suponha que tem um triângulo com ângulos A, B, C com os lados opostos respectivamente a, b, e c. Sabendo que $a=4\text{ cm}$, $b=4\text{ cm}$, o ângulo B é 30° e que A está no 1° quadrante. Qual o valores da sequência, A, C, c? 1 point

- $30^\circ, 120^\circ, 6.928\text{ cm}$
- $120^\circ, 30^\circ, 6.928\text{ cm}$
- $60, 90, 6.928\text{ cm}$
- $90, 60, 10\text{ cm}$
- Não sei

Questão5: Sabendo que $\sin(a) \cdot \cos(a) > 0$. Em que quadrante pode estar o ângulo a? (Escolha todas as que podem ser verdadeiras) 1 point

- 1° Quadrante
- 2° quadrante
- 3° quadrante
- 4° quadrante
- Não sei

Questão6: Para o ângulo a tal que $-\pi/2 < a < \pi/2$. Qual o valor de $\sin(a) \cdot \text{tg}(a)$? 1 point

- sempre negativo
- sempre positivo
- às vezes positivo outras vezes negativo
- sempre menor que 1
- não sei

Questão7: Sabendo que a está no 1° quadrante. Qual a sequência de valores obtida a partir de: $\sin(180+a)$, $\cos(180+a)$, $\text{tg}(180+a)$? 1 point

- $\sin(a), \cos(a), \text{tg}(a)$
- $\sin(a), -\cos(a), -\text{tg}(a)$
- $-\sin(a), -\cos(a), \text{tg}(a)$
- $-\sin(a), \cos(a), \text{tg}(a)$
- Não sei.

Questão8: Sabendo que, a está no 1º quadrante, $\sin(a)=0.43$ e que $\cos(a)=0.9028$ (valores aproximados a 4 décimas). Qual a sequência de valores que se obtém da sequência: $\sin(180-a)$, $\cos(180-a)$, $\text{tg}(180-a)$

1 point

- 0.9028, 0.43, 0.4763
- 0.43, - 0.9028, - 0.4763
- 0.43, 0.9028, 0.4763
- 0.43, - 0.9028, 2.0995
- Não sei

Questão9: Quanto vale 1 radiano em graus?

1 point

- 57.2958 Graus
- 55.32 Graus
- 0.017.2 Graus
- 55 Graus
- Não sei

Questão10: Qual a sequência de valores que se pode obter a partir da sequência: $\sin(30)$, $\sin(30 \text{ radianos})$?

1 point

- 0.5, -0.988
- 0.5, 0.988
- 0.988, 0.5
- 0.5, 0.988
- Não sei.

Questão11: Em que quadrante se encontra o ângulo a (10 radianos) e o ângulo b (275 graus)?

1 point

- ângulo $a \rightarrow$ 1º quadrante, ângulo $b \rightarrow$ 1 quadrante
- ângulo $a \rightarrow$ 3º quadrante, ângulo $b \rightarrow$ 4 quadrante
- ângulo $a \rightarrow$ 3º quadrante, ângulo $b \rightarrow$ 3quadrante
- ângulo $a \rightarrow$ 1º quadrante, ângulo $b \rightarrow$ 4 quadrante
- Não sei

Questão 12: Se $|\sin(x)| = 1$. Podemos concluir que:

1 point

- $x = k * \pi$, com k inteiro
- $x = k * \pi/2$, com k inteiro
- $x = - \pi/2 + 2 * k * \pi$, com k inteiro
- $x = - \pi/2 + k * \pi$, com k inteiro

Questão13: Suponha que tem um triângulo com ângulos A, B, C ^{1 point}
com os lados opostos respectivamente a, b, e c. Sabendo que $c=2$ cm, $b=4$ cm, o ângulo A é 30° . Qual é o comprimento lo lado a?

- 2.4787 cm
- 1.4787 cm
- 3.123 cm
- 5.123 cm
- Não sei

SUBMIT

Never submit passwords through Google Forms.

This content is neither created nor endorsed by Google. [Report Abuse](#) - [Terms of Service](#) - [Privacy Policy](#)

Google Forms

Ficha do 12º ano, ficha dos senos

Questões sobre o $\sin(x)$

* Required

Grupo *

Choose ▼

Das características que se seguem indique as que pertencem ao $\sin(x)$ e que pode usar como mnemónicas

- O $\sin(x)$ não é
- preguiçoso o $\sin(x)$ é
- preguiçoso o $\sin(x)$ é
- mentiroso o $\sin(x)$
- não é mentiroso o
- $\sin(x)$ é racista o
- $\sin(x)$ não é racista
- No $\sin(x)$ acontece que $\sin(-x)=-\sin(x)$. No $\sin(x)$ o "-" pula pula pula

No $\sin(x)$ NÃO acontece que $\sin(-x)=-\sin(x)$. No $\sin(x)$ o "-" é absorvido

Qual o valor de $\sin(0)$?

Choose ▼

Qual o valor de $\sin(\pi/2)$?

Choose ▼

Qual o valor de $\sin(\pi)$?

Choose ▼

Qual o valor de $\sin(3\pi/2)$?

Choose ▼

Qual o valor de $\sin(-5\pi/3)$?

Choose ▼

Qual o valor de $\sin(-2\pi/3)$?

Choose ▼

Qual o valor de $\sin(4\pi/3)$?

Choose ▼

Qual o valor de $\sin(7\pi/6)$?

Choose ▼

Qual o valor de $\sin(11 \cdot \pi/6)$?

Choose ▼

Sabendo que $\cos(x)=0.6$ e que $3/2 \pi < x < 2 \pi$. Qual o valor de $\sin(x)$?

Choose ▼

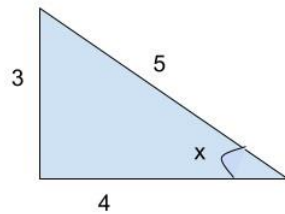
Sabendo que $\cos(x)=-0.6$ e que $\pi/2 < x < \pi$. Qual o valor de $\sin(x)$?

Choose ▼

Tomando o triângulo rectângulo da figura. Qual o valor de $\sin(x)$?

Choose ▼

triângulo rectângulo



SUBMIT

This content is neither created nor endorsed by Google. [Report Abuse](#) - [Terms of Service](#) - [Privacy Policy](#)

Google Forms

Ficha do 12º ano, ficha dos cosenos

Questões sobre o $\cos(x)$

* Required

Grupo *

Choose ▼

Das características que se seguem indique as que pertencem ao $\cos(x)$ e que pode usar como mnemónicas

- O $\cos(x)$ não é
- preguiçoso o $\cos(x)$ é
- preguiçoso o $\cos(x)$ é
- mentiroso o $\cos(x)$
- não é mentiroso o
- $\cos(x)$ é racista o
- $\cos(x)$ não é racista
- No $\cos(x)$ NÃO acontece que $\cos(-x)=-\cos(x)$. No $\cos(x)$ o "-" NÃO é absorvido
- No $\cos(x)$ acontece que $\cos(-x)=-\cos(x)$. No $\cos(x)$ o "-" é absorvido

Qual o valor de $\cos(0)$?

Choose ▼

Qual o valor de $\cos(\pi/2)$?

Choose ▼

Qual o valor de $\cos(\pi)$?

Choose ▼

Qual o valor de $\cos(3\pi/2)$?

Choose ▼

Qual o valor de $\cos(-5\pi/3)$?

Choose ▼

Qual o valor de $\cos(-2\pi/3)$?

Choose ▼

Qual o valor de $\cos(4\pi/3)$?

Choose ▼

Qual o valor de $\cos(7\pi/6)$?

Choose ▼

Qual o valor de $\cos(11\pi/6)$?

Choose ▼

Sabendo que $\sin(x)=0.6$ e que $3/2\pi < x < 2\pi$. Qual o valor de $\cos(x)$?

Choose ▼

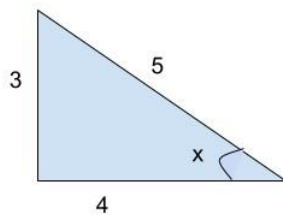
Sabendo que $\sin(x)=-0.6$ e que $\pi/2 < x < \pi$. Qual o valor de $\cos(x)$?

Choose ▼

Tomando o triângulo rectângulo da figura. Qual o valor de $\cos(x)$?

Choose ▼

triângulo rectângulo



SUBMIT

This content is neither created nor endorsed by Google. [Report Abuse](#) - [Terms of Service](#) - [Privacy Policy](#)

Google Forms

Ficha de Trabalho nº 1

Exercícios Estágio, Ficha de Trabalho nº 1

Paulo Alexandre de Andrade Vieira

Março 2017

$\sin(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{tg}(x)$

Exercício 1.1 Preencha o quadro que se segue:

Graus	30°	45°	60°	90°	180°
radianos					
grados					

Exercício 1.2 Determine o domínio de $f(x)$, sendo:

a) $f(x) = 1 - \sin(2x)$,

b) $f(x) = \cos(5x)$,

c) $f(x) = 1 + \operatorname{tg}(2x)$,

d) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$,

e) $f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{tg}(x)}$ e $x \in]0, \pi[$,

f) $f(x) = 1 + \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3})$

Exercício 1.3 Determine o contradomínio da função $f(x)$, sendo:

a) $f(x) = 1 - \sin(2x)$,

b) $f(x) = 1 - 3\sin(x + \frac{\pi}{3})$,

c) $f(x) = 1 + \sin^2(x)$,

d) $f(x) = \frac{1}{2 + \sin(x)}$,

e) $f(x) = 3 - 2\cos(x - \frac{\pi}{4})$,

f) $f(x) = 2 - \operatorname{tg}(x)$,

g) $f(x) = 1 - \operatorname{tg}^2(x)$,

h) $f(x) = 2 + |\operatorname{tg}(2x)|$,

i) $f(x) = 1 + \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3})$,

j) $f(x) = 1 - \sin(2x)$

Exercício 1.4 Estude a função f quanto paridade, sendo:

$$f(x) = \sin(x) - \sin(\frac{x}{2}),$$

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x},$$

$$f(x) = 1 - 2\sin(\pi + x),$$

$$f(x) = 1 - \cos(\pi - 2x)$$

Exercício 1.5 Resolva as equações:

a) $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$

b) $3 + 2\sin(2x) = 0,$

c) $|2\sin(x)| = 1,$

d) $2\sin^2(x) - \sin(x) = 1,$

e) $\operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right)$

f) $\sqrt{3} + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$

g) $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}^2(x)$ e $x \in [0, 2\pi]$

h) $1 - \sin(2x) = 0$ no intervalo $[-\pi, \pi],$

i) $3 - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

Exercício 1.6 Encontre os maximizantes e minimizantes de $f(x)$ e os seus máximos e mínimos $f(x)$, sendo:

a) $f(x) = 1 - \sin(2x),$

b) $f(x) = 3 - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$

c) $f(x) = \cos(x)$ no intervalo $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right]$

Exercício 1.7 Mostre que:

a) $\frac{2\pi}{3} \notin$ solução da equação $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2\cos(x) = 0,$

b) para qualquer $x \in \mathbb{R}, \cos(-x)\cos(\pi - x) - \sin^2(\pi + x) = -1,$

c) para qualquer $x \in \mathbb{R}, \cos(x)\cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x),$

d) $\frac{\cos^4(x) - \sin^4(x)}{\cos^2(x)} = 1 - \operatorname{tg}^2(x)$ para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$

Exercício 1.8 Mostre que:

a) $\pi \notin$ período de f , com $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

b) $\pi \notin$ período de f , com $f(x) = 1 - \cos(\pi - 2x)$

Exercício 1.9 Determina o período positivo mínimo da função $f(x)$, sendo:

a) $f(x) = \sin(x),$

b) $f(x) = \sin(3x),$

- c) $f(x) = \sin(-\frac{x}{2})$,
d) $f(x) = 1 + \cos(\pi x)$,
e) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$,
f) $f(x) = 1 + \sin(3x + \frac{\pi}{6})$,
g) $f(x) = 2 - \cos(4x - \frac{4}{3}\pi)$,
h) $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$,
i) $f(x) = \operatorname{tg}(\frac{x}{3})$,
j) $f(x) = \operatorname{tg}(2x + \frac{\pi}{6})$

Exercício 1.10 Seja

$f(x) = 1 + \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3})$, $g(x) = \sin(x)\cos(x)$ e $h(x) = 1 - \cos(\pi - 2x)$. Determina:

- a) as equações das assíntotas do gráfico de $f(x)$ no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \pi[$,
b) $\sin(\frac{3\pi}{2} + x)$ sabendo que $f(x - \frac{2\pi}{3}) = -2$ e $0 < x < \pi$
c) o conjunto solução da condição $g(x) < 0$ e $x \in [0, 2\pi]$,
d) $h(\alpha)$ sabendo que $\sin(2\alpha) = \frac{1}{3}$ e $\alpha \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

Exercício 1.11 Seja f uma função periódica, de domínio \mathbb{R} , sendo $\frac{\pi}{3}$ o seu período positivo mínimo. Sabe-se que $f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ e $f(\frac{\pi}{4}) = -\frac{5}{2}$.

i) Determina para que valores de k se tem:

i.a) $\frac{7\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3}$

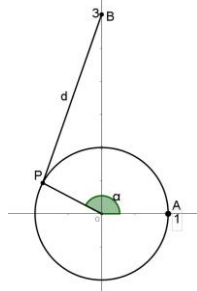
i.b) $\frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}$

ii) Indique o valor de $f(\frac{7\pi}{6})$

Exercício 1.12 Em relação a um referencial o.n. XOY, indica as coordenadas do vetor associado translação que transforma o gráfico de:

- a) $y = \cos(2x)$ no gráfico de $y = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$
b) $y = \cos(3x)$ no gráfico de $y = \cos(3x + \frac{\pi}{2})$
c) $y = \operatorname{tg}(2x)$ no gráfico de $y = \operatorname{tg}(2x + \frac{\pi}{3})$
d) $y = \sin(\frac{x}{2})$ no gráfico de $y = \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})$

Exercício 1.13 Toma agora e os dados que se seguem e resolve.

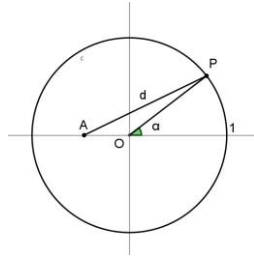


Sabe-se que:

- o ponto $A = (1, 0)$, $B = (0, 3)$ e P move-se ao longo da circunferência

- α é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado em que o lado origem é o semieixo positivo Ox e o lado extremidade \emptyset a semirreta OP , sendo $\alpha \in [0, 2\pi[$
- a) Indique as coordenadas do ponto P , em função de α
- b) Sendo $d = PB$, mostre que $d^2 = 10 - 6\sin(\alpha)$
- c) Para um certo valor de α pertencente ao intervalo $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ tem-se $\text{tg}(\alpha) = \sqrt{15}$.
Determina d para esse valor de α .

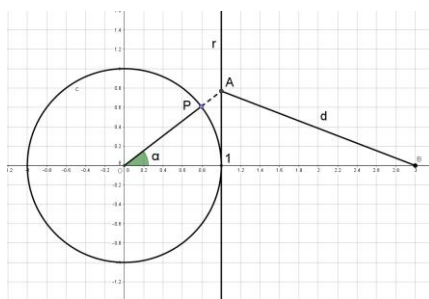
Exercício 1.14 Toma agora e os dados que se seguem e resolve. Sabe-se que:



- o ponto $A = (-\frac{1}{2}, 0)$ e P move-se ao longo da circunferência
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado em que o lado origem é o semieixo positivo Ox e o lado extremidade é a semirreta OP , sendo $\alpha \in [0, 2\pi[$
- a) Indique as coordenadas do ponto P , em função de α
- b) Sendo $d = PA$, mostre que $d^2 = \frac{5}{4} + \cos(\alpha)$
- c) Determina o valor exacto de d se $\alpha = \frac{5\pi}{3}$
- d) Para um certo valor de α pertencente ao intervalo $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ tem-se $\sin(\alpha) = -0.6$. Determina d para esse valor de α .

Exercício 1.15 Toma agora e os dados que se seguem e resolve. Sabe-se que:

- o ponto P move-se ao longo da circunferência



- α é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado em que o lado origem é o semieixo positivo Ox e o lado extremidade é a semirreta OP , sendo $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$
- o ponto A é a interseção da recta OP com a recta r de equação $x = 1$,
- o ponto $B = (3, 0)$

a) Mostre que $d = \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2(\alpha)}$

b) Para um dado valor de α , tem-se $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$. Determina, neste caso, o valor de d .

c) Para um certo valor de α , o valor de d é $\sqrt{29}$. Determina, neste caso, o valor exacto de $\sin(\alpha)$.

Exercício 1.16 Resolva as tarefas 1 (pp. 129), 2 (pp. 32), 3 (pp. 136), 4 (pp. 140), 5 (pp. 144), 6 (pp. 145), 7 (pp. 147) do livro de texto

Ficha de Trabalho nº 2

Exercícios Estágio, Ficha de Trabalho nº 2

Paulo Alexandre de Andrade Vieira

Março 2017

1 Estudo de limites da função, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

Exercício 1.1 (uso directo do limite)

Calcule cada um dos limites que se seguem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - \sin(\frac{x}{4})}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \sin(\frac{1}{x})}.$$

Exercício 1.2 (multiplicar no numerador e denominador por: $1 + \cos(x)$) Calcule cada um dos limites que se seguem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{(2x^2)};$$

Exercício 1.3 (uso $\frac{\sin(x)}{x}$ quando x tende para $+\infty$)

Calcule cada um dos limites que se seguem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(|\sin(x)|)}{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \cos(x - \frac{\pi}{2})}{x};$$

Exercício 1.4 (técnica que usa redução do cos para o sin) Calcule cada um dos limites que se seguem:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - \cos(x - \frac{\pi}{2}))}{x}; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\pi - x)}{x - \frac{\pi}{2}}$$

2 Derivadas de sin, cos, tg

Exercício 2.1 Mostre que $\frac{\cos(h) - 1}{h} = -\frac{\sin(h)}{h} \frac{\sin(h)}{\cos(h) + 1}$

Exercício 2.2 Mostre as seguintes igualdades:

i)

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \text{ ii)}$$

$$\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \cos(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \frac{\sin(h)}{h} \text{ iii)}$$

$$\frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg}(x)}{h} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2(x)}{1 - \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(h)} \frac{\sin(h)}{h} \frac{1}{\cos(h)}$$

Exercício 2.3 i) Calcule o limite quando h tende para zero para cada uma das alíneas do exercício 2.2 ii) Obtenha, por

definição, as derivadas de $\sin(x)$, $\cos(x)$, e $\operatorname{tg}(x)$.

Exercício 2.4 Em cada uma das alíneas calcule a derivada de cada uma das funções:

i) $f(x) = x^2 \sin(-x + \frac{\pi}{3})$, $g(x) = \sqrt{1 - \sin(\pi x)}$

ii) $f(x) = 1 + \frac{\cos(x)}{2}$, $g(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, $h(x) = \ln(\cos(3x - \pi))$

iii) $f(x) = x + \operatorname{tg}(3x)$, $g(x) = (1 - \operatorname{tg}(x))^2$, $h(x) = \operatorname{tg}(x^4)$

Ficha de Trabalho nº 3

Ficha Trabalho nº 3

Exercício 1. Questão: Seja $f(x) = \cos(5x)$. Calcule derivada de f em x , $f'(x)$

Exercício 2. Questão: Seja $f(x) = \sin(x^2)$. Calcule derivada de f em x , $f'(x)$

Exercício 3. Questão: Seja $f(x) = 2x \operatorname{tg}(x^3)$. Calcule derivada de f em x , $f'(x)$

Exercício 4. Questão: Qual o valor de $\cos(4\pi)$?

Exercício 5. Questão: Qual o valor de $\sin(\frac{9\pi}{2})$?

Exercício 6. Questão: Qual o valor de $\operatorname{tg}(\frac{5\pi}{4})$?

Exercício 7. Questão: Qual o valor de $\cos(3\pi)$?

Exercício 8. Questão: Calcule o limite de $\sin(2x)/x$, quando $x \rightarrow 0$?

Exercício 9. Questão: Calcule o limite de $\operatorname{tg}(x)/(2x)$, quando x tende para zero?

Exercício 10. Questão: Calcule o limite de $\cos(x)/x$, quando x tende para zero?

Ficha de Trabalho nº 4

Ficha de Trabalho/Problemas

Uma rolha de cortiça foi colocada num reservatório com líquido. Através de um sistema mecânico é possível provocar ondulação na superfície da água. Essa ondulação, é provocada durante 1 minutos e, é modelada pela função $d(t)=40 + 2,5 \cos(0.4t)$, sendo: t - o tempo em segundos após o início da ondulação, $d(t)$ - a distância em centímetros da rolha ao fundo do reservatório.

Indique o seu grupo de trabalho

Choose ▼

Ao fim de quanto tempo, pela primeira vez, após o início da experiência, a distância da rolha ao fundo do reservatório é máxima? (arredonde o resultado obtido)

- 11 segundos
- 5 segundos
- 16 segundos
- 27 segundos
- Não consegui resolver

Quanto tempo faltava para o fim da experiência quando, pela última vez, a distância da rolha ao fundo do reservatório foi mínima? (arredonde o resultado obtido)

- 11 segundos
- 5 segundos
- 16 segundos
- 27 segundos
- Não consegui resolver

Sabe-se que um intervalo com amplitude igual ao período positivo mínimo da função é $[\pi/7, p]$, p - real. Determine o valor de p . O valor de p é?

- $36/7 * \pi$
- $34/7 * \pi$
- $30/7 * \pi$
- $40/11 * \pi$
- Não consegui resolver

SUBMIT

Ficha de Trabalho nº 5

- 1) Questão: Seja $f(x)=\cos(x)$. Calcule a derivada de f em x , $f'(x)$?
- 2) Questão: Seja $f(x)=\cos(x)$. Calcule derivada de f em x , $f'(x)$?
- 3) Questão: Seja $f(x)=\text{tg}(x)$. Calcule derivada de f em x , $f'(x)$?
- 4) Questão: Qual o valor de $\cos(0)$?
- 5) Questão: Qual o valor de $\sin(\pi/2)$?
- 6) Questão: Qual o valor de $\text{tg}(\pi/4)$?
- 7) Questão: Qual o valor de $\cos(\pi)$?
- 8) Questão: Calcule o limite de $\sin(2x)/x$, quando $x \rightarrow 0$?
- 9) Questão: Calcule o limite de $\text{tg}(x)/(2x)$, quando x tende para zero?
- 10) Questão: Calcule o limite de $\cos(x)/x$, quando x tende para zero (positivo)?

Ficha de Trabalho nº 6

Questão 1

Questão 1: Represente na forma trigonométrica o complexo, $z=1-i$

Responder à Questão 1 (https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSeyRmf3D9WWh1-RWirad6sJpV9psUnkGUtO2yhjsUAg_aeDIg/viewform#)

Questão 2

Questão 2: Represente na forma algébrica o complexo, $z=2 \text{ cis}(2/3 * \pi)$

Responder à Questão 2 (https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSfkxIRUE0rDIgIUNMHsTnS4Gnu6tuyNI_YyhuzI26UhoSKYPw/viewform#)

Questão 3

Questão 3: No conjunto dos complexos considera, $z= -2 \text{ cis}(3/5 * \pi)$. Sabendo que w é o conjugado de z , qual é o argumento mínimo positivo de $1/w$?

Responder à 3 (<https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLScvaORlv-A9vQpw9UJMIJAXPRdoF1wcFP->

Questão 4

Questão 4: Seja $f(x)=\sin(2x)$ e seja o ponto $A=(x,1/2)$ um ponto que pertence ao gráfico da função. Dos valores que se seguem, qual pode ser um valor de x ? $7/12\pi$, $15/12\pi$, $25/12\pi$, $17/6\pi$

Responder à Questão 4

(<https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSeUSANgNkA4r6dCZZL92d-aUiOD5EMozVrsXpb-l38l2bCIVw/viewform#>)

Questão 5

Questão 5: Seja $f(x)$ uma função ímpar, de domínio \mathbb{R} e periódica, com período mínimo positivo $2/3\pi$. Sabendo que $f(\pi/4)=-4$. Qual o valor de $f(11/12\pi)$?

Responder à Questão 5 (<https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSd2OjHDuDRp-puWuIXj-xCI20D2Ahd8hvEedHCsrkPDxGMLCQ/viewform#>)

Questão 6

Questão 6: Das expressões seguintes qual a que caracteriza uma função, $f(x)$, que é periódica e que admite $\pi/3$ como período positivo mínimo?

$$f(x)=2+\cos(6x)$$

$$f(x)=2+\cos(3x)$$

$$f(x)=1+\cos(\pi/3 + x)$$

$$f(x)= 1 + \cos(\pi/6)$$

Responder à6

Questão 7

Questão 7: Seja $f(x)= 1 / \operatorname{tg}(x)$. Calcule a derivada de $f(x)$, $f'(x)$:

Responder à Questão 7

(<https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSfBvhMBirMYL2pWcy6Fhm2R2cXUgu2bvQaugIKIKnHVEeN0fA/viewform#>)

Questão 8

Questão 8: Considera $f(x)=\sin^2(3x)$. Qual o valor obtido para, $\{f(\pi/24 + h) - f(\pi/24)\}/h$, quando h tende para zero?

Responder à Questão 8 (<https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdAsvoR1W8-A6mSZL16WcebiNG2bS71ORUkyRGW0uXjP7NaPg/viewform#>)

Questão 9

Questão 9: Das afirmações que se seguem indique a verdadeira?

i) quando x tende para + infinito,
 $\sin(x)/x = 1$; ii) quando x tende para +
infinito, $\sin(1/x)/(1/x) = 1$; iii) quando x
tende para zero, $\sin(x)/x = +$ infinito; iv)
quando x tende para + infinito, $x*\sin(x)$
 $= +$ infinito

Responder à9

Questão 10

Questão 10: No plano complexo está representado o ponto A (no 2º quadrante) que é a imagem geométrica de um número complexo z . Seja w o conjugado de z . A imagem geométrica de i/w é um ponto de que quadrante?

Responder à Questão 10

(<https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSds7oUzjOz96jbmE2l3t05O5KW-XnK4innjKsQFBFyRWOWS5g/viewform#>)

Questão 11

Questão 11: Considera um numero complexo, z , e o seu conjugado é w tal que Em que $iz=w$. Qual o lugar geométrico formado por esses números?

Responder à Questão 11 (https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdStjQg7y7fFBb-W0qfhpUoECY844ROzaBXd3o7q_rzc4DmSQ/viewform#)

Questão 12

Questão 12: Na figura está representada, um segmento de recta [AB], diâmetro da circunferência de centro M. Considere que A e B são as imagens geométricas, respectivamente de $z_A = -2+3i$ e de $z_B = 2+i$. Dos seguintes conjuntos, indica o que é representado geometricamente por [CD].

i) $\{z - n^{\circ} \text{ complexo: } |z+2+i|=|z-2+3i| \text{ e}$

$|z| \leq \sqrt{5}\}$ ii) $\{z - n^{\circ} \text{ complexo: } |z-2-$

$i|=|z+2-3i| \text{ e } |z-2i| \geq \sqrt{5}\}$ iii) $\{z - n^{\circ}$

complexo: $|z-2-i|=|z+2-3i| \text{ e } |z-2i| \leq 5\}$

iv) $\{z - n^{\circ} \text{ complexo: } |z-2-i|=|z+2-3i| \text{ e } |z-$

$2i| \leq \sqrt{5}\}$

Responder à 2 (<https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSChUsD4ID5mmAuJO2BjOhd->)

© Paulo Alexandre de Andrade Vieira

Email: vieirapaulo927@gmail.com