Capítulo 1

PRELIMINARES

Neste primeiro capítulo podemos encontrar algumas definições e proposições que para além de nos familiarizar com a notação que iremos utilizar também têm como finalidade a referência de alguns resultados que, sendo ou não triviais, serão necessários ao longo deste trabalho.

1.1 Conjuntos parcialmente ordenados (c.p.o.'s)

1.1.1 Conceitos básicos

Seja X um conjunto não vazio. Uma *relação binária* ρ em X é um subconjunto do produto cartesiano $X \times X$. Dados $x, y \in X$, se $(x, y) \in \rho$, dizemos que x *está relacionado com* y *por* ρ e escrevemos $x \; \rho \; y$.

A relação binária ρ diz-se

- *reflexiva* se $x \; \rho \; x$ para todo $x \in X$;
- *simétrica* se $x \; \rho \; y$ implica que $y \; \rho \; x$;
- *anti-simétrica* se $x \; \rho \; y$ e $y \; \rho \; x$ implica que $x = y$;

- *transitiva* se $x\ \rho\ y$ e $y\ \rho\ z$ implica que $x\ \rho\ z$.

Seja X um conjunto não vazio. Uma *ordem parcial* em X é uma relação binária ρ em X reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Nestas condições diz-se que o par (X, ρ) é um *conjunto parcialmente ordenado* (c.p.o.). São exemplos de c.p.o.'s os pares $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, onde X é um conjunto qualquer, $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{N}, |)$, onde $|$ é a relação "é divisor de" e $(\mathbb{C}, \rho)$ onde

$$z\ \rho\ w \Longleftrightarrow \operatorname{Re} z \leq \operatorname{Re} w,\ \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Im} w \qquad (z, w \in \mathbb{C})\,.$$

A *relação identidade* ε_A, definida num conjunto não vazio A por

$$a\ \varepsilon_A\ b \Longleftrightarrow a = b \qquad (a, b \in A)\,,$$

é uma relação de ordem parcial. A *relação universal* ω_A, definida num conjunto não vazio A por

$$(\forall a, b \in A) \quad a\ \omega_A\ b$$

é uma ordem parcial em A se e só se A for singular.

No geral, representamos uma ordem parcial por $\leq$. Neste caso, escrevemos

- $a \leq b$ e dizemos que *a é menor ou igual a b*;
- $a < b$ se $a \leq b$ e $a \neq b$ e dizemos que *a é menor que b*;
- $a \nleq b$ e dizemos que *a não é menor nem igual a b*;
- $b \geq a$ se $a \leq b$ e dizemos que *b é maior ou igual a a*;
- $b > a$ se $b \geq a$ e $a \neq b$ e dizemos que *b é maior que a*;
- $a \parallel b$ se $a \nleq b$ e $b \nleq a$ e dizemos que *a e b não são comparáveis.*

Não havendo ambiguidades, se $\leq$ é uma ordem parcial definida em X, referimo-nos a X como c.p.o..

Seja X um c.p.o.. Diz-se que X é uma *cadeia* ou um *conjunto totalmente ordenado* se

$$(\forall x, y \in X) \qquad x \leq y \quad \text{ou} \quad y \leq x.$$

Diz-se que X é uma *anti-cadeia* se

$$(\forall x, y \in X) \qquad x \leq y \Leftrightarrow x = y,$$

i.e., a relação de ordem é a relação identidade ε_X. Por exemplo, o conjunto dos números naturais, quando ordenado com a ordem usual é uma cadeia.

Sejam X um c.p.o. e $x, y \in X$. Diz-se que y *cobre* x ou que x *é coberto por* y, e escreve-se $x \ll y$, se $x < y$ e

$$x \leq z \leq y \Longrightarrow z = x \text{ ou } z = y \quad (z \in X)\,,$$

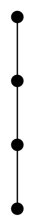
i.e., não existe $z \in X$ tal que $x < z < y$.

Podemos representar um c.p.o. finito X por um diagrama do seguinte modo:

- cada elemento de X é representado por um ponto no plano;
- para $x, y \in X$, se $x \ll y$ então o ponto que representa y está acima (em termos de coordenadas cartesianas do plano) do ponto que representa x e unem-se estes dois pontos por um segmento de recta.

A este diagrama dá-se o nome de *diagrama de Hasse.*

Por exemplo, o diagrama de uma cadeia com quatro elementos é



Diz-se que a *altura* de um c.p.o. X é n se $n+1$ é o maior número de elementos de X que constituem uma cadeia relativamente à ordem definida em X. Por exemplo, uma cadeia de 4 elementos tem altura 3.

Seja ρ uma relação binária sobre A. Chama-se *relação dual de* ρ e representa-se por ρ^d, à relação definida por

$$x \ \rho^d \ y \Longleftrightarrow y \ \rho \ x \qquad (x, y \in X)\,.$$

Obviamente, se $(X, \leq)$ é um c.p.o, então $\left(X, \leq^d\right)$ é também um c.p.o., ao qual se chama *c.p.o. dual de* $(X, \leq)$. Como $\left(\leq^d\right)^d = \leq$, temos que o c.p.o. dual de $\left(X, \leq^d\right)$ é $(X, \leq)$, pelo que dizemos que $(X, \leq)$ e $\left(X, \leq^d\right)$ são *c.p.o.'s duais.*

Se $(X, \leq)$ é um c.p.o. finito, então o diagrama de Hasse do c.p.o. dual obtém-se do diagrama de Hasse de $(X, \leq)$, invertendo-o horizontalmente.

O Princípio de Dualidade para c.p.o.'s diz-nos que uma proposição P é verdadeira se (e só se) a proposição P_d é verdadeira.

Sejam X um c.p.o. e $Y \subseteq X$. Um elemento $x \in X$ diz-se

- *majorante de* Y se

$$(\forall y \in Y) \quad y \leq x;$$

- *minorante de Y* se

$$(\forall y \in Y) \quad x \leq y;$$

- *supremo de Y* se é o menor dos majorantes de Y;

- *ínfimo de Y* se é o maior dos minorantes de Y;

- *máximo de Y* se $x \in Y$ e é supremo de Y;

- *mínimo de Y* se $x \in Y$ e é ínfimo de Y;

- um *elemento maximal de Y* se $x \in Y$ e

$$(\forall y \in Y) \quad x \leq y \Rightarrow y = x;$$

- um *elemento minimal de Y* se $x \in Y$ e

$$(\forall y \in Y) \quad y \leq x \Rightarrow y = x.$$

Observação. Sejam X um c.p.o. e $Y \subseteq X$. Se o supremo (ínfimo, máximo, mínimo) de Y existir, então é único. Neste caso representa-se por $\sup Y$ ou $\bigvee Y$ ($\inf Y$ ou $\bigwedge Y$, $\max Y$, $\min Y$, respectivamente). No caso de $Y = \{x, y\}$ e $\bigvee Y$ ($\bigwedge Y$) existir, representámo-lo por $x \vee y$ ($x \wedge y$, respectivamente).

Representamos, caso existam, o $\max X$ por 1 e o $\min X$ por 0. Os conceitos de *majorante, supremo, máximo* e *elemento maximal* são, respectivamente, duais dos conceitos de *minorante, ínfimo, mínimo e elemento minimal.*

Seja X um c.p.o.. Diz-se que X é *completo* se qualquer subconjunto de X admite ínfimo e supremo. Se todo o subconjunto não vazio de X tiver mínimo dizemos que X é um *conjunto bem ordenado.*

Note-se que se X é um conjunto bem ordenado então X é uma cadeia, mas a implicação contrária nem sempre é válida. No entanto, facilmente se prova que esta implicação é válida no caso em que a cadeia é finita.

O lema seguinte relaciona de certo modo, os conceitos de c.p.o. completo e conjunto bem ordenado.

Lema 1.1. *Seja X um c.p.o. então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *X é um c.p.o. completo;*

(ii) *Para todo $Y \subseteq X$, existe $\bigwedge Y$ em X;*

(iii) *X tem máximo e, para cada subconjunto não vazio Y de X, existe $\bigwedge Y$ em X.*

Demonstração.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Imediato pela definição de c.p.o. completo.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Para provar esta implicação, basta verificar que X tem máximo. De facto, como $\emptyset \subseteq X$, temos que $\bigwedge \emptyset = \max X$ existe em X.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Seja $Y \subseteq X$. Por hipótese, temos que existe $\bigwedge Y$ em X. Por outro lado,

$$\{x \in X : x \text{ é majorante de } Y\} \subseteq X.$$

e $\bigwedge \{x \in X : x \text{ é majorante de } Y\}$ existe em X. Como, por definição,

$$\bigvee Y = \bigwedge \{x \in X : x \text{ é majorante de } Y\},$$

vem que X é completo. $\square$

O lema anterior permite-nos concluir que se X é um c.p.o. bem ordenado com elemento máximo, então X é completo.

Seja X um c.p.o., com 0 e 1. Chamamos *átomo* a todos os elementos minimais do subconjunto $X \setminus \{0\}$ e *átomo dual* a todos os elementos maximais do subconjunto $X \setminus \{1\}$.

Um c.p.o. X diz-se *conexo* se para todos $a, b \in X$ existir $c \in X$ tal que

$$(a \leq c \quad \text{ou} \quad c \leq a) \quad \text{e} \quad (b \leq c \quad \text{ou} \quad c \leq b) \, .$$

Caso contrário, dizemos que X é *desconexo.*

Se X é desconexo, definimos *componente de ordem* como sendo um subconjunto A de X tal que A é conexo e

$$\forall x \in X \backslash A, \ \forall a \in A \qquad x \nleq a \quad e \quad a \nleq x.$$

Sejam $(X, \leq)$ e $(Y, \preceq)$ c.p.o.'s e $\varphi : X \rightarrow Y$ uma aplicação. Diz-se que φ é um *homomorfismo* se é uma aplicação *isótona,* i.e., se

$$x \leq y \Longrightarrow \varphi(x) \preceq \varphi(y) \qquad (x, y \in X) \, .$$

Se $X = Y$, o homomorfismo φ diz-se um *endomorfismo.* Representa-se por $End(X)$ o conjunto dos endomorfismos definidos em X. Se $\varphi : X \rightarrow Y$ é um homomorfismo injectivo, φ diz-se um *monomorfismo* ou *mergulho* e X diz-se *mergulhável em* Y.

Diz-se que $\phi : X \rightarrow Y$ é um *isomorfismo de c.p.o.'s (* ou *isomorfismo de ordem)* se:

(i) ϕ é sobrejectiva;

(ii) $x \leq y \Leftrightarrow \phi(x) \preceq \phi(y) \quad (x, y \in X)$.

Neste caso, $(X, \leq)$ e $(Y, \preceq)$ dizem-se *c.p.o.'s isomorfos.* Se ϕ é um isomorfismo de ordem então ϕ é uma aplicação bijectiva e isótona. Dois c.p.o.'s finitos são isomorfos se e só se tiverem diagramas de Hasse iguais.

Dado um homomorfismo $\phi : P \rightarrow P'$ de c.p.o.'s e $x \in P'$, representamos por $\phi^{-1}(x)$ o *conjunto das pré-imagens de* x *por* ϕ, i. e.,

$$\phi^{-1}(x) = \{y \in P : \phi(y) = x\} \, .$$

Se ϕ é um isomorfismo então ϕ^{-1} também o é.

Representamos por $\operatorname{Im}\phi$ o conjunto das imagens de P, i. e., $\operatorname{Im}\phi = \{\phi(y) : y \in P\}$.

Sejam X um c.p.o. e $I, F \subseteq X$. Diz-se que:

(i) I é *ideal* de X se:

(a) $I \neq \emptyset$;

(b) $(\forall i \in I)(\forall x \in X) \quad x \leq i \Rightarrow x \in I$;

(c) $(\forall x, y \in I)(\exists z \in I) \quad x \leq z$ e $y \leq z$.

(ii) F é *filtro* de X se:

(a) $F \neq \emptyset$;

(b) $(\forall f \in F)(\forall x \in X) \quad x \geq f \Rightarrow x \in F$;

(c) $(\forall x, y \in F)(\exists z \in F) \quad x \geq z$ e $y \geq z$.

O conceito de ideal é o conceito dual de filtro. Representam-se por $\mathcal{I}(X)$ e $\mathcal{F}(X)$ os conjuntos dos ideais e dos filtros de X, respectivamente.

Sejam X um c.p.o e $x \in X$. Então, $\{y \in X : y \leq x\}$ é o menor ideal de X que contém x. Chamamos-lhe *ideal principal gerado por* x e representamo-lo por $x^{\downarrow}$. Dualmente, $x^{\uparrow}$ representa o *filtro principal gerado por* x que é o menor filtro de X que contém x.

Um *corte Dedekind* de uma cadeia P é um par (I, F) de subconjuntos disjuntos de P cuja união é P e em que

$$(\forall i \in I)(\forall f \in F) \quad i \leq f.$$

Um corte Dedekind (I, F) diz-se uma *abertura* se I não tem máximo e F não tem mínimo.

Por exemplo, se F é o conjunto de todos os racionais positivos x tais que $x^2 > 2$ e $I = \mathbb{Q} \backslash F$, então (I, F) é uma abertura da cadeia dos racionais.

Um subconjunto de uma cadeia P diz-se *co-final* se não admite máximo em P. Se

P admite um subconjunto co-final, chama-se *co-finalidade* de P ao menor cardinal α tal que $\alpha^{\downarrow}$ é isomorfo a um subconjunto co-final de P. Dualmente, um subconjunto de P diz-se *co-inicial* se não admite mínimo em P e a *co-inicialidade* de P é o menor cardinal α tal que $\left(\alpha^{\downarrow}\right)^d$ é isomorfo ao subconjunto co-inicial.

Associado a cada abertura (I, F) de uma cadeia está o par (α, β) tal que α é a co-finalidade de I e β é a co-inicialidade de F. (Se I ou F forem vazios, então α ou β são 0, respectivamente).

Uma cadeia P diz-se *quase completa* se, para cada abertura (I, F), $(\alpha+1)^{\downarrow}$ não é mergulhável em I e $\left((\beta+1)^{\downarrow}\right)^d$ não é mergulhável em F, onde (α, β) é o par associado a (I, F).

Note-se que uma cadeia completa não admite qualquer abertura, pelo que é, quase completa.

Se uma cadeia é quase completa, então ela é aproximadamente completa, no sentido em que existem apenas algumas aberturas finitas. De facto, seja $((I_i, F_i) : i \in \Lambda)$ uma indexação injectiva de todas as aberturas numa cadeia P quase completa. Consideremos $((\alpha_i, \beta_i) : i \in \Lambda)$ onde, para $i \in \Lambda$, α_i é a co-finalidade de I_i e β_i é a co-inicialidade de F_i.

Suponhamos que, para distintos $i, j \in \Lambda$, $(\alpha_i,\ \beta_i) \leq \left(\alpha_j,\ \beta_j\right)$ e, sem perdas de generalidade, que $I_i \subset I_j$.

Para $I_0 \subset I_1$, temos que $\alpha_0 < \alpha_1$, donde

$$(\alpha_0, \beta_0) \leq (\alpha_1, \beta_1) \Rightarrow \beta_0^{\downarrow} \subseteq \beta_1^{\downarrow} \Rightarrow \left(\beta_1^{\downarrow}\right)^d \subseteq \left(\beta_0^{\downarrow}\right)^d, \tag{1.1}$$

pelo que $F_1 \subset F_0$.

Mas,

$$\beta_i \leq \beta_i + 1 \Rightarrow \left((\beta_i+1)^{\downarrow}\right)^d \subseteq \left(\beta_i^{\downarrow}\right)^d$$

pelo que $\left((\beta_i+1)^{\downarrow}\right)^d$é mergulhável em F_i , o que é absurdo porque (I_i, F_i) é uma abertura finita e por definição, $\left((\beta_i+1)^{\downarrow}\right)^d$ não é mergulhável em F_i.

Concluímos que $(\alpha_i,\ \beta_i) \nleq \left(\alpha_j,\ \beta_j\right)$ para quaisquer $i, j \in \Lambda$ distintos. Agora, abusando na notação escolhe-se um elemento minimal α_0 de $\{\alpha_i : i \in \Lambda\}$ e considera-se o par (α_0, β_0). Uma vez que $\alpha_0 \leq \alpha_i$ para todo $i \in \Lambda$, segue-se a partir da observação (1.1) que $\left(\beta_i^{\downarrow}\right)^d \subseteq \left(\beta_0^{\downarrow}\right)^d$ para todo o $i \neq 0$ e , assim, $\alpha_i > \alpha_0$ para todo o $i \neq 0$.

Argumento similar pela escolha de um minimal α_1 de $\{\alpha_i : i \in \Lambda \backslash \{0\}\}$, α_2 de $\{\alpha_i : i \in \Lambda \backslash \{0, 1\}\}$, etc., produz unicamente determinadas aberturas para o qual os pares associados satisfazem $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < ...$ e $\left(\beta_0^{\downarrow}\right)^d \supseteq \left(\beta_1^{\downarrow}\right)^d \supseteq \left(\beta_2^{\downarrow}\right)^d \supseteq ...$.

Então, existem apenas algumas aberturas finitas $((I_i, F_i) : i < n)$, com pares associados $((\alpha_i,\ \beta_i) : i < n)$ satisfazendo $\alpha_i < \alpha_j$ e $\left(\beta_i^{\downarrow}\right)^d \supseteq \left(\beta_j^{\downarrow}\right)^d$ para $i < j < n$.

Claramente se segue que $I_i \subset I_j$ para cada um dos pares.

Proposição 1.2. *Seja P uma cadeia e $f \in End\,(P)$. Então, para $x \in P$, ou $x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f$ tem um máximo x_I ou $x^{\uparrow} \cap \operatorname{Im} f$ tem um mínimo x_F.*

Demonstração. Suponhamos que para algum $x \in P$, $x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f$ não admite máximo e $x^{\uparrow} \cap \operatorname{Im} f$ não admite mínimo.

Então, $x \notin \operatorname{Im} f$ e $I = f^{-1}\left(x^{\downarrow}\right)$ não admite máximo uma vez que

$$\begin{aligned} i = \max I \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} f\,(i) \leq x \\ f\,(y) \leq x \Rightarrow y \leq i \Longrightarrow f\,(y) \leq f\,(i) \quad [f \in End\,(P)] \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad \left[a \in x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists y \in I : f\,(y) = a \Rightarrow a \leq f\,(i)\right] \\ &\Rightarrow \quad f\,(i) = \max\left(x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f\right), \end{aligned}$$

o que contradiz a nossa hipótese de trabalho. De modo análogo, $F = f^{-1}\left(x^{\uparrow}\right)$ não admite mínimo. Assim, (I, F) é uma abertura de P.

Sem perda de generalidades, suponhamos que $x \in I$. Seja α a co-finalidade de I.

Seja $h : \operatorname{Im} f \to P$ a aplicação definida por $h\,(y) = a$ onde a é fixo em $f^{-1}\,(y)$, para todo o $y \in \operatorname{Im} f$. Então, para $y, y^{'} \in \operatorname{Im} f$ temos que

$$h(y) = h(y') = a \Rightarrow y' = f(a) = y,$$

pelo que h é injectiva.

Mais ainda, se $y \leq y'$ e $h(y) \nleq h(y')$, i.e., $h(y) > h(y')$ temos que, pela isotonia de f,

$$y = f(h(y)) \geq f(h(y')) = y',$$

pelo que $y = y'$ e portanto, $h(y) = h(y')$, o que contradiz a hipótese $h(y) > h(y')$.

Logo,

$$y \leq y' \Rightarrow h(y) \leq h(y'),$$

pelo que h é isótona.

Da injectividade de h e da não existência de máximo de $x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f$ concluímos, que $h\left(x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f\right)$ não tem máximo, e, portanto, que $h\left(x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f\right)$ é um subconjunto co-final de I. Assim, a co-finalidade de $h\left(x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f\right)$ é α. Em particular, como h é injectiva, $\alpha^{\downarrow}$ pode ser mergulhado em $x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f$. Por outro lado, $(\alpha+1)^{\downarrow}$ pode ser mergulhado em $x^{\downarrow}$, pois $x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f \subseteq x^{\downarrow}$ e $x \in x^{\downarrow} \backslash \left(x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f\right)$. Como $x^{\downarrow} \subset I$, temos então que $(\alpha+1)^{\downarrow}$ pode ser mergulhado em I, o que é absurdo pois a co-finalidade de I é α. Portanto, $x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f$ não é co-final, i.e., $x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f$ tem máximo x_I. De igual modo, se $x \in F$, concluiríamos que $x_F = \min\left(x^{\uparrow} \cap \operatorname{Im} f\right)$ existia. $\square$

Proposição 1.3. *Se P é o dual de uma cadeia bem ordenada e $f \in End(P)$, então para todo o $x \in P$, $f(x)_I$ existe e $f(x)_I = f(x)$*

Demonstração. Sejam P o dual de uma cadeia bem ordenada e $f \in End(P)$. Como

$$f(x)^{\downarrow} = \{p \in P : p \leq f(x)\}$$

e

$$\operatorname{Im} f = \{p \in P : f(a) = p, \text{ para algum } a \in P\}$$

então

$$f(x)^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f = \{f(a) \in P : f(a) \leq f(x)\}.$$

Mais ainda, sabemos que $f(x) \in f(x)^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f$, pelo que $f(x)^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f \neq \emptyset$. Uma vez que P é o dual de uma cadeia bem ordenada, depreendemos que o máximo de qualquer subconjunto de P existe. Em particular, existe

$$\max\left(f(x)^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f\right) = f(x)_I$$

Vejamos agora que $f(x)_I = f(x)$. De facto,

$$\begin{aligned} f(x) \in f(x)^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f &\Rightarrow f(x) \leq \max\left(f(x)^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f\right) \\ &\Rightarrow f(x) \leq f(x)_I \end{aligned}$$

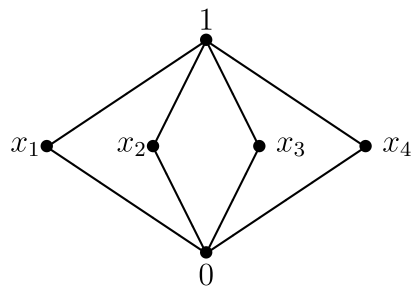
Por outro lado,

$$\begin{aligned} f(x)_I = \max\left(f(x)^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f\right) &\Rightarrow f(x)_I \in f(x)^{\downarrow} \\ &\Rightarrow f(x)_I \leq f(x) \end{aligned}$$

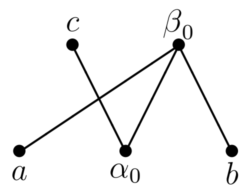
pelo que $f(x) \leq f(x)_I \leq f(x)$, ou seja, $f(x)_I = f(x)$. $\square$

1.1.2 Exemplos de c.p.o.'s

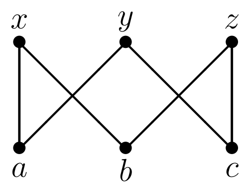
Seja α um cardinal não nulo. Representa-se por M_α o c.p.o. constituído pelos elementos $0, 1$ e α elementos $(x_i)_{1 \leq i \leq \alpha}$ que são simultaneamente átomos e átomos duais. O c.p.o. M_4 pode ser representado pelo diagrama de Hasse



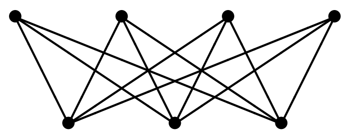
Sejam α e β cardinais não nulos. Representa-se por $N_{\alpha,\beta}$ o c.p.o. de altura 1 com α elementos minimais e β elementos maximais, em que existe um único elemento minimal α_0 menor que todos os elementos maximais, um único elemento maximal β_0 maior que todos os elementos minimais e nenhuma outra ordem. O c.p.o. $N_{3,2}$ pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse



Uma *coroa* de seis elementos é um c.p.o. Q de altura 1 com 3 elementos minimais e três elementos maximais, onde cada par de elementos minimais tem um supremo e cada par de elementos maximais tem um ínfimo. Uma coroa pode ser representada pelo diagrama de Hasse



Um *c.p.o. bipartido completo* é um c.p.o. de altura 1, em que cada elemento minimal é menor do que cada elemento maximal. Por exemplo, o diagrama de Hasse



representa um c.p.o. bipartido completo.

Ao longo deste trabalho, por abuso de linguagem, sempre que nos referirmos a M_α e $N_{\alpha,\beta}$ queremos dizer M_α, para algum cardinal não nulo α e $N_{\alpha,\beta}$, para cardinais não nulos α, β respectivamente.

1.2 Semigrupos

1.2.1 Conceitos básicos

Um *semigrupo* é um par $(S, \cdot)$, onde S é um conjunto não vazio e $\cdot$ é uma operação binária em S e associativa, i.e.,

$$\forall x, y \in S \qquad x \cdot y \in S$$
$$\forall x, y, z \in S \qquad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

Caso não crie ambiguidades, representamos o semigrupo $(S, \cdot)$ por S e falamos em *multiplicação* quando nos referimos à operação $\cdot$, chamamos *produto de x por y* ao elemento $x \cdot y$ e representamo-lo xy, para $x, y \in S$. Dado $n \in \mathbb{N}$, escrevemos x^n para representar o produto de x por ele mesmo n vezes.

Seja S um semigrupo. Um elemento $e \in S$ diz-se *idempotente* se $e^2 = e$. Representamos por $E(S)$ o conjunto dos idempotentes do semigrupo S. Se S admite um elemento u tal que

$$ux = xu = x, \quad \text{para todo } x \in S,$$

esse elemento diz-se *identidade do semigrupo S*. Um semigrupo admite, no máximo, um elemento identidade. De facto, se u e u' são elementos identidade do semigrupo, temos que

$$\begin{aligned} u &= uu' \quad [u' \text{ é identidade}] \\ &= u' \qquad [u \text{ é identidade}]. \end{aligned}$$

Um semigrupo S que admite um elemento identidade diz-se um *monóide.*

Um elemento x de um semigrupo S diz-se *regular* se $x \in xSx$. Se x é um elemento regular de um semigrupo S, temos que

$$\exists a \in S : \quad x = xax.$$

A este elemento a chamamos *pré-inverso de x em S.*

Um semigrupo S diz-se *regular* se cada $x \in S$ for regular.

Dado um c.p.o. P, se algebrizarmos o conjunto dos endomorfismos definidos em P, $End(P)$, com a composição usual de funções, estamos a atribuir a $End\,(P)$ a estrutura de um monóide. De facto,

Teorema 1.4. *Se P é um c.p.o, então $End\,(P)$ é um monóide, quando algebrizado com a composição usual de funções.*

Demonstração. Seja P um c.p.o.. Vejamos que $(End\,(P)\,,\circ)$ é um monóide, i.e.,

$$\begin{array}{lll} (i) & \forall f,g \in End\,(P) & f \circ g \in End\,(P) \\ (ii) & \forall f,g,h \in End\,(P) & (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \\ (iii) & \exists u \in End\,(P)\,, \forall f \in End\,(P) & f \circ u = u \circ f = f \end{array}$$

Sejam $f, g, h \in End\,(P)$ e $x, y \in P$. Então,

$$\begin{aligned} x \leq y \quad &\Rightarrow \quad g\,(x) \leq g\,(y) && [g \text{ é isótona}] \\ &\Rightarrow \quad f\,[g\,(x)] \leq f\,[g\,(y)] && [f \text{ é isótona}] \\ &\Rightarrow \quad f \circ g\,(x) \leq f \circ g\,(y) \end{aligned}$$

o que prova (i). Mais ainda,

$$[(f \circ g) \circ h]\,(x) = (f \circ g)\,(h\,(x)) = f\,[g\,(h\,(x))] = f\,[(g \circ h)\,(x)] = [f \circ (g \circ h)]\,(x)$$

prova que a composição usual de funções é associativa, ou seja, (ii). Por fim, consideremos a aplicação id_P definida por

$$\begin{aligned} id_P : P \quad &\rightarrow \quad P \\ x \quad &\mapsto \quad x \end{aligned}$$

Então, id_P é obviamente um elemento de $End\,(P)$ e

$$(f \circ id_P)\,(x) = f\,(id_P\,(x)) = f\,(x) = id_P\,(f\,(x)) = (id_P \circ f)\,(x)$$

o que prova (iii). $\square$

1.2.2 O conceito de ordem nos semigrupos

Um *semigrupo ordenado* S é um semigrupo no qual está definida uma relação de ordem compatível com a multiplicação, i. e.,

$$\forall x, y, z \in S \quad x \leq y \Rightarrow xz \leq yz \quad \text{e} \quad zx \leq zy$$

Seja S um semigrupo ordenado. Dizemos que S é um *semigrupo principalmente ordenado* se, para qualquer $x \in S$, existe

$$x^* = \max \{y \in S : xyx \leq x\}.$$

Proposição 1.5. *Seja S um semigrupo regular principalmente ordenado e $x \in S$. Então*

$$(i) \quad x = xx'x \Rightarrow x' \leq x^* \qquad (x' \in S);$$

$$(ii) \quad x = xx^*x.$$

Demonstração. Seja S um semigrupo principalmente ordenado e $x \in S$.

(i) Seja $x' \in S$ tal que $x = xx'x$. Então, $x' \in \{y \in S : xyx \leq x\}$, pelo que $x' \leq x^*$;

(ii) Tendo em conta a alínea anterior, temos que

$$x = xx'x \leq xx^*x \leq x,$$

pelo que $x = xx^*x$. $\square$

Capítulo 2

O semigrupo dos endomorfismos de um c.p.o.

O objectivo deste capítulo é estudarmos o que acontece com $End\,(P)$ quando P é um conjunto parcialmente ordenado. Em particular, veremos que a classe de todos os c.p.o.'s P para os quais $End(P)$ é regular consiste precisamente em todas as anti-cadeias, todas as cadeias quase completas, todos os c.p.o.'s cujo diagrama de Hasse é um gráfico bipartido completo e os c.p.o.'s M_α, $N_{\alpha,\beta}$ e Q.

Lema 2.1. *Seja P uma anti-cadeia. Então $End(P)$ é regular.*

Demonstração. Seja P uma anti-cadeia. Então,

$$\forall a, b \in P, \quad a \leq b \Leftrightarrow a = b.$$

Sejam $f \in End(P)$ e $g : P \to P$ a correspondência definida por

$$g\,(x) = \begin{cases} a & \text{se } f^{-1}\,(x) \neq \emptyset, \text{ com } a \in f^{-1}\,(x) \text{ fixo,} \\ x & \text{se } f^{-1}\,(x) = \emptyset. \end{cases}$$

Vamos provar que $g \in End(P)$ e $fgf = f$. Obviamente que, para todo $x \in P$, existe $g(x) \in P$. Sejam $x, y \in P$ tais que $x = y$. Como f é aplicação, $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$, pelo que $g(x) = g(y)$. Logo, g é uma aplicação. Suponhamos agora que $x \leq y$. Como P é uma anti-cadeia e g é uma aplicação vem que

$$x \leq y \Leftrightarrow x = y \Rightarrow g(x) = g(y) \Leftrightarrow g(x) \leq g(y)$$

Logo, $g \in End(P)$.

Seja $x \in P$. Como $x \in f^{-1}(f(x))$, vem que $f^{-1}(f(x)) \neq \emptyset$, donde

$$\begin{aligned} x \in P \ &\Rightarrow \ f(x) \in P \\ &\Rightarrow \ g[f(x)] = b, \text{ com } b \in f^{-1}(f(x)) \text{ fixo} \\ &\Rightarrow \ f[g[f(x)]] = f(b), \text{ com } f(b) = f(x) \\ &\Rightarrow \ fgf(x) = f(x). \end{aligned}$$

Concluímos então que $fgf = f$. $\square$

Lema 2.2. *Para uma cadeia P, $End(P)$ é regular se e só se P é quase completa.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos que $End(P)$ é regular, (I, F) é uma abertura em P, α é a co-finalidade de I, $\varphi : \alpha^{\downarrow} \to I$ é um mergulho e $\psi : (\alpha + 1)^{\downarrow} \to I$ um mergulho.

Observemos que, uma vez que φ é um mergulho de $\alpha^{\downarrow}$ em I, existe uma aplicação γ que preserva a ordem de I para $\alpha^{\downarrow}$ em que, dado qualquer $x \in I$, $\gamma(x)$ é o menor elemento de $\alpha^{\downarrow}$ tal que

$$\varphi(\gamma(x)) \geq x.$$

Seja f a aplicação definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in F \\ \psi(\gamma(x)) & \text{se } x \in I. \end{cases}$$

De facto, $f \in End(P)$, pois, para $x, y \in P$ tais que $x \leq y$, temos uma das seguintes situações:

- $x, y \in F$ e
$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y);$$

- $x, y \in I$ e
$$\begin{aligned} x \leq y &\Rightarrow \gamma(x) \leq \gamma(y) && [\gamma \text{ preserva a ordem}] \\ &\Rightarrow \psi(\gamma(x)) \leq \psi(\gamma(y)) && [\psi \text{ preserva a ordem}] \\ &\Rightarrow f(x) \leq f(y); \end{aligned}$$

- $x \in I$, $y \in F$, $f(x) = \psi(\gamma(x)) \in I$ e $f(y) = y \in F$, pelo que pela definição de abertura, $f(x) \leq f(y)$.

Seja $g \in End(P)$ tal que $f = fgf$.

Queremos provar que P é quase completa, i.e., que $\psi : (\alpha + 1)^{\downarrow} \to I$ não é um mergulho em I.

Para $x \in I$, $\alpha > \gamma(x)$ e, assim, $\alpha \geq \gamma(x) + 1$. Uma vez que γ é sobrejectiva, existe $y \in I$ tal que $\gamma(y) = \gamma(x) + 1$ e, como γ preserva a ordem, $z > x$ para algum $z \in \gamma^{-1}(\gamma(y))$.

Assim, como g e ψ preservam a ordem, temos que

$$\begin{aligned} \alpha \geq \gamma(x) + 1 &\Rightarrow \psi(\alpha) \geq \psi(\gamma(x) + 1) \\ &\Rightarrow g(\psi(\alpha)) \geq g(\psi(\gamma(x) + 1)) && (*) \end{aligned}$$

Contudo,

$$g(\psi(\gamma(x)+1)) = g(\psi(\gamma(y))) = g(f(y)).$$

Mas como $fgf(y) = f(y)$, temos que

$$g(f(y)) \in f^{-1}(f(y)) = f^{-1}(\psi(\gamma(y))) = f^{-1}(\psi(\gamma(x)+1)).$$

Mas, $f^{-1}\{\psi(\gamma(x)+1)\} = \gamma^{-1}\{\gamma(x)+1\}$. De facto, uma vez que, pela definição de f,

$$f^{-1}\{\psi(\gamma(x)+1)\} = \{a \in P : f(a) \in \psi(\gamma(x)+1)\} \subseteq I$$

e

$$\gamma^{-1}\{\gamma(x)+1\} = \{a \in I : \gamma(a) \in \gamma(x)+1\},$$

temos que,

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}\{\psi(\gamma(x)+1)\} &\Leftrightarrow a \in P,\quad f(a) \in \psi(\gamma(x)+1) \\ &\Leftrightarrow a \in I,\ f(a) = \psi(\gamma(a)) \in \psi(\gamma(x)+1) \\ &\Leftrightarrow a \in I,\ \gamma(a) \in \gamma(x)+1 \qquad [\psi \text{ é injectiva}] \\ &\Leftrightarrow a \in \gamma^{-1}(\gamma(x)+1). \end{aligned}$$

Assim, $g(\psi(\gamma(x)+1)) \in \gamma^{-1}(\gamma(x)+1)$. Como g e ψ preservam a ordem e $\gamma(x)+1 > \gamma(x)$, temos que

$$g(\psi(\gamma(x)+1)) \geq g(\psi(\gamma(x))) = g(f(x)) = x$$

e, então, pela transitividade da relação $\geq$ e por $(*)$, vem que $g(\psi(\alpha)) \geq x$.

Como $g(\psi(\alpha)) \geq x$ é válido qualquer que seja $x \in I$, vem que $g(\psi(\alpha)) \notin I$. (Se $g(\psi(\alpha))$ é maior que todo o elemento de I, então $g(\psi(\alpha))$ não pode ser elemento de I senão seria o máximo, o que é absurdo pois I é co-final).

Além disso, para $z \in F$, $f(z) = z$ e como $\psi(\alpha) \in I$ e todo o elemento de I é menor que todo o elemento de F, vem que $\psi(\alpha) \leq z$ e, assim, $g(\psi(\alpha)) \leq g(z) = z$, pois $g \in End(P)$ e

$$\begin{aligned} fgf(z) = f(z) &\Rightarrow f[g(z)] = z \\ &\Rightarrow g(z) = f^{-1}(z) \\ &\Rightarrow g(z) = z, \end{aligned}$$

uma vez que, para $z \in F$, a aplicação f resume-se à identidade, e assim sendo f^{-1} também o é.

Deste modo, $g(\psi(\alpha))$ é o primeiro elemento de F, o que é absurdo porque (I, F) é uma abertura. Assim, não existe mergulho de $(\alpha+1)^{\downarrow}$ em I. O argumento dual mostra que $\left((\beta+1)^{\downarrow}\right)^{d}$ não é mergulhável em F, onde β é a co-inicialidade de F.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos agora que P é quase completo. Seja $f \in End(P)$. Temos que verificar a existência de $g \in End(P)$ para o qual $f = fgf$.

Para cada $x \in \operatorname{Im} f$, fixemos um elemento $h(x) \in f^{-1}(x)$. Definimos assim uma aplicação $h : \operatorname{Im} f \to P$ que pela demonstração da Proposição 1.2., é injectiva e isótona.

Seja

$$g(x) = \begin{cases} h(x_I) & \text{se } x_I \text{ existir} \\ h(x_F) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A aplicação g está bem definida pois, pela Proposição 1.2., temos que, para $x \in P$, ou x_I existe, ou x_F existe. Resta verificar que g preserva a ordem.

Seja $x < y$. Uma vez que h preserva a ordem e cada uma das desigualdades $x_I \leq y_I$, $x_I \leq y_F$ e $x_F \leq y_F$ é obviamente válida sempre que ambos os elementos envolvidos existam, temos que

$$x_I \leq y_I \Rightarrow h(x_I) \leq h(y_I) \Rightarrow g(x_I) \leq g(y_I),$$

$$x_I \leq y_F \Rightarrow h(x_I) \leq h(y_F) \Rightarrow g(x_I) \leq g(y_F),$$

$$x_F \leq y_F \Rightarrow h(x_F) \leq h(y_F) \Rightarrow g(x_F) \leq g(y_F),$$

Falta verificarmos que, se x_F e y_I existem, então $x_F \leq y_I$. Se existir $z \in \operatorname{Im} f$ tal que $x \leq z \leq y$, então $x_F \leq y_I$ o que implica que $h(x_F) \leq h(y_I)$, ou seja, $g(x_F) \leq g(y_I)$. Se tal z não existir, então $y_I \leq x$ e segue-se que, $x_I = y_I$, o que contraria a existência de x_F. Portanto, g preserva a ordem.

Mais ainda,

$$\begin{aligned} fgf(x) &= f[g(f(x))] \\ &= \begin{cases} f[h(f(x)_I)] & \text{se } f(x)_I \text{ existir} \\ f[h(f(x)_F)] & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x)_I & \text{se } f(x)_I \text{ existir} \\ f(x)_F & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= f(x) \qquad\qquad [\text{demonstração da Proposição 1.3.}] \end{aligned}$$

o que finaliza a demonstração. □

Como foi visto no primeiro capítulo, cada cadeia completa é quase completa, e, sendo assim, o lema anterior implica que $End(P)$ é regular sempre que P é uma cadeia completa.

Lema 2.3. *Se $P = M_\alpha$, então $End(P)$ é regular.*

Demonstração. Dado $f \in End(M_\alpha)$, definimos a aplicação $g : M_\alpha \to M_\alpha$ por

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } f^{-1}(x) = \emptyset \text{ e } x \notin \{0,1\} \\ b & \text{se } b \in f^{-1}(x) \text{ fixo e } x \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Como para todo $x \in M_\alpha$, $0 \leq x \leq 1$, e como $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ e $0 \leq g(x) \leq 1$, temos que g preserva a ordem.

Vejamos agora que $f = fgf$. Seja $x \in M_\alpha$. Se $f(x) \notin \{0,1\}$, então, $f[g(f(x))] = f(b)$, com $b \in f^{-1}(f(x))$, i. e., $fgf(x) = f(x)$.

Se $f(x) = 0$, então

$$f(0) \leq f(x) = 0, \text{ pelo que } f(0) = 0$$

e, portanto,

$$f[g(f(x))] = f(0) = 0 = f(x).$$

Se $f(x) = 1$, então

$$1 = f(x) \leq f(1), \text{ pelo que } f(1) = 1$$

e, portanto,

$$f[g(f(x))] = f(1) = 1 = f(x).$$

Logo, $fgf(x) = f(x)$, donde concluímos que $End(M_\alpha)$ é regular. $\square$

Lema 2.4. *Se P é um c.p.o. bipartido completo, então $End(P)$ é regular.*

Demonstração. Sejam H_0 o conjunto dos elementos minimais de P, e H_1 o conjunto dos elementos maximais de P. Seja $f \in End(P)$.

Se $f(H_i) \subseteq H_i$, para $i \in \{0,1\}$, definimos a aplicação $g : P \to P$ por

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in P \setminus \operatorname{Im} f \\ a & \text{em que } a \text{ é fixo em } f^{-1}(x) \end{cases}$$

Como

$$x \in P \setminus \operatorname{Im} f \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \emptyset,$$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } f^{-1}(x) = \emptyset \\ a & \text{em que } a \text{ é fixo em } f^{-1}(x) \end{cases}.$$

A aplicação g é isótona. De facto, para $x, y \in P$ com $x \leq y$, temos um dos seguintes casos:

- $f^{-1}(x) = \emptyset$ e $f^{-1}(y) = \emptyset$. Então,

$$x \leq y \Leftrightarrow g(x) \leq g(y)$$

- $f^{-1}(x) \neq \emptyset$ e $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Sejam $g(x) = a$, com $a \in f^{-1}(x)$ e $g(y) = b$, com $b \in f^{-1}(y)$. Como

$$\begin{aligned} a \parallel b &\Rightarrow a, b \in H_0 \quad \text{ou} \quad a, b \in H_1 \\ &\Rightarrow x = f(a), y = f(b) \in H_0 \quad \text{ou} \quad x = f(a), y = f(b) \in H_1 \\ &\Rightarrow x \parallel y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b < a &\Rightarrow b \in H_0 \quad \text{e} \quad a \in H_1 \\ &\Rightarrow y = f(b) \in H_0 \quad \text{e} \quad x = f(a) \in H_1 \\ &\Rightarrow y < x, \end{aligned}$$

concluímos que $a \leq b$, i. e., $g(x) \leq g(y)$.

- $f^{-1}(x) = \emptyset$ e $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Sejam $g(x) = x$ e $g(y) = b$, com $b \in f^{-1}(y)$. Então

$$\begin{aligned} x \leq y &\Rightarrow x < y \\ &\Rightarrow x \in H_0 \quad \text{e} \quad f(b) = y \in H_1 \\ &\Rightarrow x \leq b \\ &\Rightarrow g(x) \leq g(y). \end{aligned}$$

- $f^{-1}(x) \neq \emptyset$ e $f^{-1}(y) = \emptyset$. Sejam $g(x) = a$, com $a \in f^{-1}(x)$ e $g(y) = y$. Então

$$\begin{aligned} x \leq y &\Rightarrow x < y \\ &\Rightarrow f(a) = x \in H_0 \quad \text{e} \quad y \in H_1 \\ &\Rightarrow a \leq y \\ &\Rightarrow g(x) \leq g(y), \end{aligned}$$

o que prova a isotonia de g. Seja $x \in P$. Uma vez que $f^{-1}(f(x)) \neq \emptyset$,

$$fgf(x) = fg[f(x)] = f(a)$$

onde a é fixo em $f^{-1}(f(x))$. Mas,

$$a \in f^{-1}(f(x)) \Rightarrow f(a) = f(x),$$

pelo que

$$fgf(x) = f(x), \quad \forall x \in P.$$

Suponhamos agora que $f(H_i) \nsubseteq H_i$, para algum $i \in \{0,1\}$. Assumimos agora, sem perda de generalidade, que existe $a \in H_0$ tal que $f(a) \in H_1$. Por um lado, $f(H_1) = \{f(a)\}$

pois, para $x \in H_1$, temos

$$x \in H_1 \Rightarrow x > a \Rightarrow f(x) \geq f(a) \Rightarrow f(x) = f(a),$$

uma vez que f preserva a ordem e $f(a) \in H_1$, que é o conjunto dos elementos maximais. Por outro lado, temos que

$$f(H_0 \backslash \{a\}) \subseteq H_0 \cup \{f(a)\}$$

uma vez que

$$\begin{aligned}
x \in H_0 \backslash \{a\} &\Rightarrow x \leq y, \quad \forall y \in H_1 \\
&\Rightarrow f(x) \leq f(y), \quad \forall y \in H_1 \\
&\Rightarrow f(x) \leq f(a) \\
&\Rightarrow f(x) < f(a) \quad \text{ou} \quad f(x) = f(a) \\
&\Rightarrow f(x) \in H_0 \quad \text{ou} \quad f(x) = f(a) \\
&\Rightarrow f(x) \in H_0 \cup \{f(a)\}.
\end{aligned}$$

Logo, $f(a) \in H_1$ é o único elemento de H_1 que é a imagem de um objecto por f, i.e., tal que $f(a) \in \operatorname{Im} f$. Portanto, $\{f(a)\} = H_1 \cap \operatorname{Im} f$.

Definimos agora a aplicação $g : P \to P$, por

$$g(x) = \begin{cases} x' & \text{se } x' \in f^{-1}(x) \text{ fixo e } x \in H_0 \cap \operatorname{Im} f \\ x & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vejamos que $g \in End(P)$ e $fgf = f$.

Sejam $x, y \in P$ tais que $x \leq y$,

(i) Se $x, y \in H_0 \cap \operatorname{Im} f$, então x e y são minimais, donde:

$$\begin{aligned} x \leq y \quad &\Rightarrow \quad x = y, \qquad\qquad [y \text{ é elemento minimal}] \\ &\Rightarrow \quad g(x) = g(y) \\ &\Rightarrow \quad g(x) \leq g(y). \end{aligned}$$

(ii) Se $x \in H_0 \cap \operatorname{Im} f$ e $y \notin H_0 \cap \operatorname{Im} f$, então $g(x) = x'$, tal que $f(x') = x$ e $g(y) = y$

$$\begin{aligned} x \leq y \quad &\Rightarrow \quad x = y \quad \text{ou} \quad x < y \\ &\Rightarrow \quad g(x) = g(y) \quad \text{ou} \quad y \in H_1 \\ &\Rightarrow \quad g(x) \leq g(y) \quad \text{ou} \quad g(y) = y \in H_1, \end{aligned}$$

pelo que, para provar o pretendido, basta verificar que $x' = g(x) \in H_0$. Suponhamos que $x' \in H_1$. Então,

$$x' \in H_1 \Rightarrow f(x') = f(a) \Rightarrow x = f(a) \Rightarrow x \in H_1 \cap \operatorname{Im} f,$$

o que é absurdo porque por hipótese $x \in H_0 \cap \operatorname{Im} f$ e $H_0 \cap H_1 = \emptyset$. Logo, $x' \notin H_1$, ou seja, $x' \in H_0$.

(iii) Se $x,\, y \notin H_0 \cap \operatorname{Im} f$, então $g(x) = x$ e $g(y) = y$, e $x \leq y \Rightarrow g(x) \leq g(y)$.

Portanto, a aplicação g preserva a ordem.

Seja $x \in P$. Então

$$fgf(x) = fg[f(x)] = f(x')$$

tal que $x' \in f^{-1}(f(x)) \neq \emptyset$, ou seja, $f(x') = f(x)$. Logo

$$fgf(x) = f(x), \forall x \in P. \quad \square$$

Lema 2.5. *Se* $P = N_{\alpha,\beta}$*, então* $End(P)$ *é regular.*

Demonstração. Seja H_0 o conjunto de todos os elementos minimais e H_1 o conjunto de todos os elementos maximais. Seja a_0 o elemento minimal de P tal que $a_0 \leq x$, para todo $x \in H_1$, e seja a_1 o elemento maximal de P tal que $a_1 \geq x$, para todo $x \in H_0$

Sejam $S_0 = H_0 \cup \{a_1\}$, $S_1 = H_1 \cup \{a_0\}$ e $f \in End(P)$. Vejamos que existe $g \in End(P)$ tal que $f = fgf$.

1^o **Caso)** Suponhamos que $f(S_0) \subseteq S_0$ e $f(S_1) \subseteq S_1$.

Então, f aplica $\{a_0, a_1\}$ em $\{a_0, a_1\}$ e como $f(a_0) \leq f(a_1)$, uma vez que $f \in End(P)$, temos uma das seguintes situações:

(i) $f(a_0) = f(a_1) = a_1$;

(ii) $f(a_0) = f(a_1) = a_0$;

(iii) $f(a_0) = a_0 < a_1 = f(a_1)$.

Estudemos cada uma delas:

(i) Suponhamos que $f(a_0) = a_1$. Então, $f(S_1) = \{a_1\}$, uma vez que

$$\begin{aligned} x \in S_1 &\Rightarrow x \in H_1 \quad \text{ou} \quad x = a_0 \\ &\Rightarrow x \geq a_0 \\ &\Rightarrow f(x) \geq f(a_0) \\ &\Rightarrow f(x) \geq a_1 \\ &\Rightarrow f(x) = a_1, \qquad [a_1 \text{ é elemento maximal}]. \end{aligned}$$

Definimos a aplicação $g : P \to P$, por

$$g(x) = \begin{cases} a_1 & \text{se } x \in H_1 \cup (H_0 \backslash \operatorname{Im} f) \\ b & \text{em que } b \text{ é fixo em } f^{-1}(x) \text{ e } x \in H_0 \cap \operatorname{Im} f \end{cases}$$

Vejamos que g preserva a ordem.

Sejam $x, y \in P$ tais que $x \leq y$.

- Se $x, y \in H_0 \cap \operatorname{Im} f$, temos que

$$\begin{aligned} x \leq y &\Rightarrow x = y \\ &\Rightarrow g(x) = g(y) \\ &\Rightarrow g(x) \leq g(y); \end{aligned}$$

- Se $x, y \in H_1 \cup (H_0 \backslash \operatorname{Im} f)$, temos que

$$g(x) = a_1 = g(y),$$

  pelo que $g(x) \leq g(y)$;

- Se $x \in H_0 \cap \operatorname{Im} f$ e $y \in H_1 \cup (H_0 \backslash \operatorname{Im} f)$, temos que $g(y) = a_1$ pelo que $g(x) \leq a_1 = g(y)$;

- Se $x \in H_1 \cup (H_0 \backslash \operatorname{Im} f)$ e $y \in H_0 \cap \operatorname{Im} f$, implicaria $x = y$, o que é impossível porque os conjuntos são complementares.

Concluímos então que $g \in End(P)$.

Provemos agora que $fgf(x) = f(x)$, para todo o $x \in P$.
Para todo $x \in P$, $f(x) = a_1$ ou $f(x) \in H_0 \cap \operatorname{Im} f$. Assim, temos duas situações:

► $f(x) = a_1 \Rightarrow g(f(x)) = a_1 \Rightarrow fgf(x) = a_1 = f(x)$

► $f(x) \in H_0 \cap \operatorname{Im} f \Rightarrow gf(x) = b$ com $f(b) = f(x) \Rightarrow fgf(x) = f(x)$.

Logo, para todo $x \in P$, $fgf(x) = f(x)$.

(ii) Seja $f(a_1) = a_0$. O argumento dual ao apresentado em (i) permite-nos concluir que $f(S_0) = \{a_0\}$

Seja $g : P \to P$, a aplicação definida por

$$g(x) = \begin{cases} a_0 & \text{se } x \in H_0 \cup (H_1 \backslash \operatorname{Im} f) \\ b & \text{em que } b \text{ é fixo em } f^{-1}(x) \text{ e } x \in H_1 \cap \operatorname{Im} f \end{cases}$$

Argumentos duais aos apresentados em i) permitem-nos concluir que g preserva a ordem e $fgf = f$.

(iii) Suponhamos, finalmente, que $f(a_0) = a_0$ e $f(a_1) = a_1$. Seja g a aplicação definida por

$$g(x) = \begin{cases} a_1 & \text{se } x = a_1 \\ a_0 & \text{se } x = a_0 \\ x & \text{se } x \in P \backslash \operatorname{Im} f \\ b & \text{em que } b \text{ é fixo em } f^{-1}(x) \text{ e } x \in \operatorname{Im} f \backslash \{a_0, a_1\} \end{cases}$$

Vejamos que $g \in End(P)$ e $fgf = f$.

Sejam $x, y \in P$ tais que $x \leq y$. Então,

$$\begin{aligned} x \leq y \;&\Rightarrow\; x = y \quad \text{ou} \quad x < y \\ &\Rightarrow\; g(x) = g(y) \quad \text{ou} \quad y = a_1 \\ &\Rightarrow\; g(x) \leq g(y) \quad \text{ou} \quad g(y) = a_1 \\ &\Rightarrow\; g(x) \leq g(y) \end{aligned}$$

i.e., g preserva a ordem.

Seja $x \in P$. Como $f(x) \in \operatorname{Im} f$, temos que

$$g[f(x)] = \begin{cases} a_1 & \text{se } f(x) = a_1 \\ a_0 & \text{se } f(x) = a_0 \\ b & \text{em que } b \text{ é fixo em } f^{-1}(f(x)) \text{ e } f(x) \in \operatorname{Im} f \backslash \{a_0, a_1\} \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
fg\left[f\left(x\right)\right] &= \begin{cases} f\left(a_1\right) & \text{se } f\left(x\right)=a_1 \\ f\left(a_0\right) & \text{se } f\left(x\right)=a_0 \\ f\left(b\right) & \text{se } f\left(b\right)=f\left(x\right), \text{ com } f\left(x\right)\notin\{a_0,a_1\} \end{cases} \\
&= \begin{cases} a_1 & \text{se } f\left(x\right)=a_1 \\ a_0 & \text{se } f\left(x\right)=a_0 \\ f\left(x\right) & \text{se } f\left(x\right)\notin\{a_0,a_1\} \end{cases} \\
&= f\left(x\right)
\end{aligned}$$

2^o Caso) Tendo em vista a dualidade patente na demonstração do 1^o caso, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $f\left(S_1\right)\nsubseteq S_1$, ou seja, existe $b\in f\left(S_1\right)$ tal que $b\notin S_1$. Mas, como $P=H_0\dot{\cup} H_1$,

$$b\notin S_1 \Leftrightarrow b\notin H_1\cup\{a_0\} \Leftrightarrow b\in H_0\backslash\{a_0\}$$

Seja $c\in S_1$ tal que $f\left(c\right)=b$. Então, $c\in H_1$ ou $c=a_0$ e $f\left(c\right)$ é minimal.

Mas,

$$c=a_0\Rightarrow f\left(a_0\right)=f\left(c\right)=b;$$

e

$$c\in H_1\Rightarrow a_0<c\Rightarrow f\left(a_0\right)\leq f\left(c\right)=b\in H_0\backslash\{a_0\}\Rightarrow f\left(a_0\right)=f\left(c\right)=b.$$

Concluímos então que $f\left(a_0\right)=b$.

Vejamos primeiro que $f\left(S_1\right)\subseteq\{b,a_1\}$. De facto, temos que

$$\begin{aligned}
x\in S_1 &\Rightarrow x\in H_1 \quad \text{ou} \quad x=a_0 \\
&\Rightarrow a_0<x \quad \text{ou} \quad x=a_0 \\
&\Rightarrow f\left(a_0\right)\leq f\left(x\right) \quad \text{ou} \quad f\left(x\right)=f\left(a_0\right) \\
&\Rightarrow b\leq f\left(x\right) \quad \text{ou} \quad f\left(x\right)=b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad f(x) = a_1 \quad \text{ou} \quad f(x) = b \\ &\Rightarrow \quad f(x) \in \{b, a_1\}. \end{aligned}$$

Consideremos agora $f(S_0)$. Temos que,

$$\begin{aligned} x \in S_0 \quad &\Rightarrow \quad x \in H_0 \quad \text{ou} \quad x = a_1 \\ &\Rightarrow \quad x < a_1 \quad \text{ou} \quad x = a_1 \\ &\Rightarrow \quad x \leq a_1 \\ &\Rightarrow \quad f(x) \leq f(a_1) \qquad\qquad [f \in End(P)]. \end{aligned}$$

Tendo em conta que $f(a_1) \in \{b, a_1\}$, vejamos cada uma das seguintes situações:

(a) Suponhamos que $f(a_1) = b$. Então $f(S_0) = \{b\}$. De facto, para $x \in S_0$ temos,

$$\begin{aligned} x \in S_0 \quad &\Rightarrow \quad f(x) \leq b \\ &\Rightarrow \quad f(x) = b \quad [b \in H_0 \backslash \{a_0\} \text{ é elemento minimal}]. \end{aligned}$$

Se f é constante, fixamos $g = f$. Caso contrário, definimos a aplicação g por

$$g(x) = \begin{cases} a_0 & \text{se } x \neq a_1 \\ y & \text{com } y \text{ fixo em } f^{-1}(a_1) \text{ se } x = a_1. \end{cases}$$

Assim, para $x, y \in P$ temos que

$$\begin{aligned} x \leq y \quad &\Rightarrow \quad x = y \quad \text{ou} \quad x < y \\ &\Rightarrow \quad g(x) = g(y) \quad \text{ou} \quad (y = a_1 \text{ e } x \neq a_1) \\ &\Rightarrow \quad g(x) \leq g(y) \quad \text{ou} \quad g(y) = g(a_1) = c, \text{ com, } f(c) = a_1 \end{aligned}$$

Por outro lado, $c \notin S_0 = H_0 \cup \{a_1\}$, porque $f(S_0) = \{b\}$ e $f(c) = a_1 \neq b$. Logo,

$c \in H_1 \backslash \{a_1\}$ e

$$x \neq a_1 \Rightarrow g(x) = a_0 \leq c = g(y)$$

Portanto, g preserva a ordem.

Vejamos agora que $fgf(x) = f(x)$, para todo $x \in P$.

- Para $x \in H_0$ temos, $f(x) = b$ porque $H_0 \subseteq S_0$ e $f(S_0) = \{b\}$, donde,

$$fgf(x) = fg[f(x)] = f[g(b)] = f(a_0) = b = f(x).$$

- Para $x \in H_1$ temos, ou $x = a_1$ ou $x \neq a_1$.

  Se $x = a_1$, então $f(a_1) = b$, por hipótese, e

$$fgf(x) = fg[f(a_1)] = f[g(b)] = f(a_0) = b = f(a_1) = f(x).$$

  Se $x \neq a_1$, então ou $f(x) = a_1$ ou $f(x) \neq a_1$.

Para $f(x) = a_1$, temos

$$g[f(x)] = g(a_1) \Rightarrow fg[f(x)] = fg(a_1) = f(y) = a_1 = f(x).$$

Para $f(x) \neq a_1$, temos

$$g[f(x)] = a_0 \Rightarrow fg[f(x)] = f(a_0) = b = f(x)$$

porque $f(S_1) \subseteq \{b, a_1\}$, $x \in H_1 \subseteq S_1$ e $f(x) \neq a_1$, pelo que $f(x) = b$.

(b) Suponhamos que $f(a_1) = a_1$. Então $f(S_0) \subseteq S_0$. De facto, para $x \in S_0$ temos

$$\begin{aligned} x \in S_0 &\Rightarrow f(x) \leq a_1 \\ &\Rightarrow f(x) \in H_0 \quad \text{ou} \quad f(x) = a_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \in S_0.$$

Seja $g : P \rightarrow P$ a aplicação definida por

$$g(x) = \begin{cases} a_1 & \text{se } x \in H_1 \\ x & \text{se } x \in S_0 \backslash \operatorname{Im} f \\ c & \text{com } c \in H_0 \cap f^{-1}(x). \end{cases}$$

Prova-se que $g \in End(P)$ e $fgf(x) = f(x)$, para todo $x \in P$. Na verdade, para $x, y \in P$, vem que

$$\begin{aligned} x \leq y \quad & \Rightarrow \quad x = y \quad \text{ou} \quad x < y \\ & \Rightarrow \quad g(x) = g(y) \quad \text{ou} \quad (x \in H_0 \text{ e } y = a_1) \\ & \Rightarrow \quad g(x) \leq g(y) \quad \text{ou} \quad g(y) = a_1. \end{aligned}$$

Mas, $x \in H_0$ donde, pela definição de g,

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in S_0 \backslash \operatorname{Im} f \\ c & \text{com } c \in H_0 \cap f^{-1}(x). \end{cases}$$

- Se $g(x) = x$ então, $x < a_1 = g(y)$, ou seja, $g(x) \leq g(y)$.
- Se $g(x) = c$, com $c \in H_0 \cap f^{-1}(x)$ então, $c < a_1 = g(y)$, ou seja, $g(x) \leq g(y)$. Logo g preserva a ordem.

Vejamos agora que $fgf(x) = f(x)$, para todo $x \in P$. Seja $x \in P$. Então $x \in H_0$ ou $x \in H_1$. Por um lado,

$$\begin{aligned} x \in H_0 \quad & \Rightarrow \quad f(x) \in S_0 \quad \text{e} \quad f(x) \in \operatorname{Im} f \\ & \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) \in H_0 \cap \operatorname{Im} f \\ f(x) = a_1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g\left[f\left(x\right)\right] = c \\ g\left[f\left(x\right)\right] = a_1 \end{cases} \quad \text{com } f\left(c\right) = f\left(x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f\left[g\left(f\left(x\right)\right)\right] = f\left(c\right) = f\left(x\right) \\ f\left[g\left(f\left(x\right)\right)\right] = f\left(a_1\right) = a_1 = f\left(x\right). \end{cases}$$

Por outro lado,

$$x \in H_1 \quad \Rightarrow f\left(x\right) = b \quad \text{ou} \quad f\left(x\right) = a_1, \text{ porque } f\left(S_1\right) \subseteq \left\{b, a_1\right\}.$$

Mas,

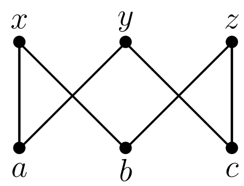
- Se $f\left(x\right) = a_1$, então $g\left[f\left(x\right)\right] = g\left(a_1\right) = a_1$, o que implica que $f\left[g\left(f\left(x\right)\right)\right] = f\left(a_1\right) = a_1 = f\left(x\right)$.

- Se $f\left(x\right) = b$, então $g\left[f\left(x\right)\right] = g\left(b\right) = y$ com $f\left(y\right) = b$, o que determina que $f\left[g\left(f\left(x\right)\right)\right] = f\left(g\left(b\right)\right) = f\left(y\right) = b = f\left(x\right)$.

  Logo, $fgf\left(x\right) = f\left(x\right)$, para todo $x \in P$. □

Lema 2.6. *$End\left(Q\right)$ é regular.*

Demonstração. Seja $f \in End\left(Q\right)$ e sejam $H_0 = \{a, b, c\}$ e $H_1 = \{x, y, z\}$ os conjuntos de todos os minimais e o conjunto de todos os maximais onde $x = a \vee b$, $y = a \vee c$ e $z = b \vee c$.



Consideremos primeiro o caso em que $f\left(H_i\right) \subseteq H_i$ para $i \in \{0, 1\}$.

(i) Suponhamos que $\left|f\left(H_i\right)\right| < 3$ para $i \in \{0, 1\}$, ou seja, f não é injectiva. Então $\left|f\left(H_i\right)\right| = 1$ ou $\left|f\left(H_i\right)\right| = 2$.

Se $f^2(H_i) = f(H_i)$ para $i \in \{0,1\}$ então a restrição de f a $f(H_i)$ ou é constante ou é uma transposição. De facto, se $|f(H_i)| = 1$, então $f\mid_{f(H_i)} = id$ e se $|f(H_i)| = 2$, então $f\mid_{f(H_i)} = id$ ou $f\mid_{f(H_i)}$ é uma transposição.

Logo, $f^2\mid_{f(H_i)} = id\mid_{f(H_i)}$, i. e., para todo $x \in H_i$, $f^3(x) = f(x)$, pelo que f é regular.

Assumamos, sem perda de generalidade, que $f^2(H_0) \neq f(H_0)$, onde $f(c) = b$ e $f(b) = f(a) = a$.

- Para $|f(H_1)| = 1$ definimos a aplicação $g : Q \to Q$ por

$$g(x) = \begin{cases} b & \text{se } x = a \\ c & \text{se } x \in \{b,c\} \\ z & \text{se } x \in H_1. \end{cases}$$

  Vejamos que $g \in End(Q)$.

Sejam $\alpha, \beta \in Q$. Então,

$$\begin{aligned} \alpha \leq \beta \ &\Rightarrow\ \alpha < \beta \quad \text{ou} \quad \alpha = \beta \\ &\Rightarrow\ (\alpha,\beta) \in \{(a,x),(a,y),(b,x),(b,z),(c,y),(c,z)\} \quad \text{ou} \quad \alpha = \beta. \end{aligned}$$

Assim, se $\alpha < \beta$, temos que

$$\begin{aligned} \alpha &= a \ \text{ e } \ \beta = x \Rightarrow g(\alpha) = b < z = g(\beta) \\ \alpha &= a \ \text{ e } \ \beta = y \Rightarrow g(\alpha) = b < z = g(\beta) \\ \alpha &= b \ \text{ e } \ \beta = x \Rightarrow g(\alpha) = c < z = g(\beta) \\ \alpha &= b \ \text{ e } \ \beta = z \Rightarrow g(\alpha) = c < z = g(\beta) \\ \alpha &= c \ \text{ e } \ \beta = y \Rightarrow g(\alpha) = c < z = g(\beta) \\ \alpha &= c \ \text{ e } \ \beta = z \Rightarrow g(\alpha) = c < z = g(\beta) \end{aligned}$$

donde concluímos que $g(\alpha) < g(\beta)$. Como $\alpha = \beta$ implica que $g(\alpha) \leq g(\beta)$, depreendemos que g preserva a ordem.

Vejamos agora que $fgf = f$.

Como $|f(H_1)| = 1$, temos que $f(x) = f(y) = f(z) = x$.

Seja $\alpha \in Q$. Então,

$$\begin{aligned}
\alpha &= a \Rightarrow fgf(a) = fg(a) = f(b) = a = f(a) \\
\alpha &= b \Rightarrow fgf(b) = fg(a) = f(b) \\
\alpha &= c \Rightarrow fgf(c) = fg(b) = f(c) \\
\alpha &= x \Rightarrow fgf(x) = fg(x) = f(z) = f(x) \\
\alpha &= y \Rightarrow fgf(y) = fg(x) = f(z) = f(y) \\
\alpha &= z \Rightarrow fgf(z) = fg(x) = f(z) .
\end{aligned}$$

- Para $|f(H_1)| = 2$, temos que $f(y) = f(z) = x$ e $f(x) = y$. De facto,

$$\begin{aligned}
a \vee c = y &\Rightarrow a \leq y \quad \text{e} \quad c \leq y \\
&\Rightarrow f(a) \leq f(y) \quad \text{e} \quad f(c) \leq f(y) \\
&\Rightarrow a \leq f(y) \quad \text{e} \quad b \leq f(y) \\
&\Rightarrow f(y) = x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b \vee c = z &\Rightarrow b \leq z \quad \text{e} \quad c \leq z \\
&\Rightarrow f(b) \leq f(z) \quad \text{e} \quad f(c) \leq f(z) \\
&\Rightarrow a \leq f(z) \quad \text{e} \quad b \leq f(z) \\
&\Rightarrow f(z) = x
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
a \vee b = x \quad &\Rightarrow \quad a \leq x \quad \text{e} \quad b \leq x \\
&\Rightarrow \quad f(a) \leq f(x) \quad \text{e} \quad f(b) \leq f(x) \\
&\Rightarrow \quad a \leq f(x) \quad \text{e} \quad a \leq f(x) \\
&\Rightarrow \quad a \leq f(x) \\
&\Rightarrow \quad f(x) = y.
\end{aligned}
$$

Neste caso, definimos a aplicação $g : Q \to Q$ por

$$
g = \begin{pmatrix} a & b & c & x & y & z \\ a & c & b & y & x & z \end{pmatrix}.
$$

Vejamos que $g \in End(Q)$ e $fgf = f$.

Sejam $\alpha, \beta \in Q$, tais que $\alpha \leq \beta$

$$
\begin{aligned}
\alpha \leq \beta \quad &\Rightarrow \quad \alpha < \beta \quad \text{ou} \quad \alpha = \beta \\
&\Rightarrow \quad (\alpha, \beta) \in \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, z), (c, y), (c, z)\} \quad \text{ou} \quad \alpha = \beta.
\end{aligned}
$$

Considerando $\alpha < \beta$, temos que

$$
\begin{aligned}
\alpha &= a \quad \text{e} \quad \beta = x \Longrightarrow g(\alpha) = a < y = g(\beta) \\
\alpha &= a \quad \text{e} \quad \beta = y \Longrightarrow g(\alpha) = a < x = g(\beta) \\
\alpha &= b \quad \text{e} \quad \beta = x \Longrightarrow g(\alpha) = c < y = g(\beta) \\
\alpha &= b \quad \text{e} \quad \beta = z \Longrightarrow g(\alpha) = c < z = g(\beta) \\
\alpha &= c \quad \text{e} \quad \beta = y \Longrightarrow g(\alpha) = b < x = g(\beta) \\
\alpha &= c \quad \text{e} \quad \beta = z \Longrightarrow g(\alpha) = b < z = g(\beta)
\end{aligned}
$$

donde concluímos que $g(\alpha) < g(\beta)$. Como $\alpha = \beta$ implica que $g(\alpha) = g(\beta)$, vem que g

preserva a ordem.

Vejamos agora que $fgf = f$. Seja $\alpha \in Q$. Então,

$$\begin{aligned}
\alpha &= a \Rightarrow fgf(a) = fg(a) = f(a) \\
\alpha &= b \Rightarrow fgf(b) = fg(a) = f(a) = a = f(b) \\
\alpha &= c \Rightarrow fgf(c) = fg(b) = f(c) \\
\alpha &= x \Rightarrow fgf(x) = fg(y) = f(x) \\
\alpha &= y \Rightarrow fgf(y) = fg(x) = f(y) \\
\alpha &= z \Rightarrow fgf(z) = fg(x) = f(y) = x = f(z).
\end{aligned}$$

Logo $fgf = f$.

(ii) Suponhamos agora que $|f(H_0)| = 3$. Uma vez que cada par de minimais tem um único supremo, $f(H_1) = H_1$. De facto, se $f(H_0) = H_0$, então $f\mid_{H_0}$ é uma das seguintes aplicações

$$f_1\mid_{H_0} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad f_2\mid_{H_0} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}, \quad f_3\mid_{H_0} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix},$$
$$f_4\mid_{H_0} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}, \quad f_5\mid_{H_0} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}, \quad f_6\mid_{H_0} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

e como $f(a) \vee f(b) \leq f(x)$, $f(a) \vee f(c) \leq f(y)$ e $f(b) \vee f(c) \leq f(z)$, temos que

$$f_1\mid_{H_1} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}, \quad f_2\mid_{H_1} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & z & y \end{pmatrix}, \quad f_3\mid_{H_1} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{pmatrix},$$
$$f_4\mid_{H_1} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & y & x \end{pmatrix}, \quad f_5\mid_{H_1} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & z \end{pmatrix}, \quad f_6\mid_{H_1} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

Portanto, f é uma bijecção que preserva a ordem e, portanto, f^{-1} preserva a ordem.

Consideremos agora o caso que $f(H_i) \nsubseteq H_i$ para algum $i \in \{0,1\}$. Assumamos, sem perda de generalidade, que $f(a) \in H_1$, ou seja, que $f(H_0) \cap H_1 \neq \emptyset$. Então,

$$\begin{cases} a < x \\ a < y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a) \leq f(x) \\ f(a) \leq f(y) \end{cases} \Rightarrow f(x) = f(y) = f(a).$$

1º Caso) Suponhamos que $f(a) > a$. Então $f(a) = x$ ou $f(a) = y$. Suponhamos, novamente sem perda de generalidade, que $f(a) = x$.

Vejamos que $f(b) \in \{a, b, x\}$.

$$a \vee b = x \Rightarrow \begin{cases} a \leq x \\ b \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a) \leq f(x) \\ f(b) \leq f(x) \end{cases} \Rightarrow f(a) \vee f(b) \leq f(x).$$

Mas, $f(x) = f(a) = x$, donde $x \vee f(b) = x$, ou seja, $f(b) \in \{a, b, x\}$.

(i) Seja $f(b) = x$. Então,

$$\begin{aligned} b \vee c = z &\Rightarrow f(b \vee c) = f(z) \\ &\Rightarrow f(b) \vee f(c) \leq f(z) \\ &\Rightarrow x \vee f(c) \leq f(z) \\ &\Rightarrow x \leq f(z) \\ &\Rightarrow x = f(z) \quad [x \text{ é elemento maximal}]. \end{aligned}$$

Logo, $f(x) = f(y) = f(z) = x$, ou seja, $f(H_1) = \{x\}$ e $f(c) \in \{a, b, x\}$, uma vez que

$$x \vee f(c) \leq f(z) \Leftrightarrow x \vee f(c) \leq x \Leftrightarrow f(c) \leq x.$$

Assim, definimos a aplicação $g : Q \to Q$ por $g(H_0) = \{c\}$ e $g(H_1) = \{z\}$. Como $c \leq z$, temos que $g \in End(Q)$.

Provemos agora que $fgf = f$.

Se $\alpha \in H_1$, então

$$fgf(\alpha) = fg[f(\alpha)] = f[g(x)] = f(z) = x = f(\alpha).$$

Se $\alpha \in H_0$, então $\alpha \in \{a, b, c\}$. Mas,

$$\begin{aligned}
\alpha &= a \Longrightarrow fgf(\alpha) = fg[f(a)] = fg(x) = f(z) = x = f(a) = f(\alpha) \\
\alpha &= b \Longrightarrow fgf(\alpha) = fg[f(b)] = fg(x) = f(z) = x = f(b) = f(\alpha).
\end{aligned}$$

Para $\alpha = c$ temos que ou $f(\alpha) = a$ ou $f(\alpha) = b$ ou $f(\alpha) = x$. Como

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= a \Longrightarrow fgf(\alpha) = fg(a) = f(c) = f(\alpha) \\
f(\alpha) &= b \Longrightarrow fgf(\alpha) = fg(b) = f(c) = f(\alpha) \\
f(\alpha) &= x \Longrightarrow fgf(\alpha) = fg(x) = f(z) = x = f(\alpha),
\end{aligned}$$

podemos concluir que f é regular.

(ii) Suponhamos que $f(b) = a$. Uma vez que $z \geq b$ e $f \in End(Q)$, vem que $f(z) \geq f(b)$, ou seja, $f(z) \geq a$, donde $f(z) \in \{a, x, y\}$.

Seja $f(z) = a$. Então,

$$\begin{aligned}
c \leq z &\Rightarrow f(c) \leq f(z) \Rightarrow f(c) \leq a \\
&\Rightarrow f(c) = a \quad [a \text{ é elemento minimal}].
\end{aligned}$$

Assim, definimos a aplicação $g : Q \to Q$ por $g(x) = y$ e $g(Q \setminus \{x\}) = \{c\}$. Como $c \leq y$, vem que $g \in End(Q)$.

Vejamos agora que $fgf = f$. Como

$$\alpha = a \Longrightarrow fgf(\alpha) = fg[f(a)] = fg(x) = f(y) = x = f(a) = f(\alpha)$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= b \Longrightarrow fgf(\alpha) = fg[f(b)] = fg(a) = f(c) = a = f(b) = f(\alpha) \\
\alpha &= c \Longrightarrow fgf(\alpha) = fg[f(c)] = fg(a) = f(c) = f(\alpha) \\
\alpha &= x \Longrightarrow fgf(\alpha) = fg[f(x)] = fg(x) = f(y) = x = f(x) = f(\alpha) \\
\alpha &= y \Longrightarrow fgf(\alpha) = fg[f(y)] = fg(x) = f(y) = f(\alpha) \\
\alpha &= z \Longrightarrow fgf(\alpha) = fg[f(z)] = fg(a) = f(c) = a = f(z) = f(\alpha),
\end{aligned}$$

vem que $fgf(\alpha) = f(\alpha)$, para todo $\alpha \in Q$.

Continuando a assumir que $f(b) = a$, suponhamos agora que $f(z) = x$. Assim,

$$\begin{aligned}
c \vee z = z &\Rightarrow f(c \vee z) = f(z) \\
&\Rightarrow f(c) \vee f(z) \leq f(z) \\
&\Rightarrow f(c) \vee x \leq x \\
&\Rightarrow f(c) \leq x \\
&\Rightarrow f(c) \in \{a, b, x\}.
\end{aligned}$$

Neste caso, definimos a aplicação $g : Q \to Q$ por $g(H_1) = \{z\}$, $g(a) = b$ e $g(H_0 \setminus \{a\}) = \{c\}$.

Vejamos que $g \in End(Q)$. Sejam $\alpha, \beta \in Q$ tais que $\alpha \leq \beta$

$$\begin{aligned}
\alpha \leq \beta &\Rightarrow \alpha = \beta \text{ ou } \alpha < \beta \\
&\Rightarrow \alpha = \beta \text{ ou } (\alpha, \beta) \in \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, z), (c, y), (c, z)\} \\
&\Rightarrow g(\alpha) = g(\beta) \text{ ou } \left\{ \begin{array}{lcl}
(\alpha, \beta) = (a, x) \Rightarrow a < x & \text{e} & g(a) = b < z = g(x) \\
(\alpha, \beta) = (a, y) \Rightarrow a < y & \text{e} & g(a) = b < z = g(y) \\
(\alpha, \beta) = (b, x) \Rightarrow b < x & \text{e} & g(b) = c < z = g(x) \\
(\alpha, \beta) = (b, z) \Rightarrow b < z & \text{e} & g(b) = c < z = g(z) \\
(\alpha, \beta) = (c, y) \Rightarrow c < y & \text{e} & g(c) = c < z = g(y) \\
(\alpha, \beta) = (c, z) \Rightarrow c < z & \text{e} & g(c) = c < z = g(z)
\end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad g(\alpha) = g(\beta) \text{ ou } \begin{cases} (\alpha,\beta) = (a,x) \Rightarrow a < x & \text{e} \quad g(a) \leq g(x) \\ (\alpha,\beta) = (a,y) \Rightarrow a < y & \text{e} \quad g(a) \leq g(y) \\ (\alpha,\beta) = (b,x) \Rightarrow b < x & \text{e} \quad g(b) \leq g(x) \\ (\alpha,\beta) = (b,z) \Rightarrow b < z & \text{e} \quad g(b) \leq g(z) \\ (\alpha,\beta) = (c,y) \Rightarrow c < y & \text{e} \quad g(c) \leq g(y) \\ (\alpha,\beta) = (c,z) \Rightarrow c < z & \text{e} \quad g(c) \leq g(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad g(\alpha) \leq g(\beta).$$

Vejamos agora que $fgf = f$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\alpha = a \Rightarrow fgf(\alpha) &= fg[f(a)] = fg(x) = f(z) = x = f(a) = f(\alpha) \\
\alpha = b \Rightarrow fgf(\alpha) &= fg[f(b)] = fg(a) = f(b) = f(\alpha) \\
\alpha = c \Rightarrow fgf(\alpha) &= fg[f(c)] = \begin{cases} fg(a) & \text{se } f(c) = a \\ fg(b) & \text{se } f(c) = b \\ fg(x) & \text{se } f(c) = x \end{cases} = \begin{cases} f(b) & \text{se } f(c) = a \\ f(c) & \text{se } f(c) = b \\ f(z) & \text{se } f(c) = x \end{cases} \\
&= \begin{cases} a & \text{se } f(c) = a \\ f(c) & \text{se } f(c) = b \\ x & \text{se } f(c) = x \end{cases} = f(c) = f(\alpha) \\
\alpha = x \Rightarrow fgf(\alpha) &= fg[f(x)] = fg(x) = f(z) = x = f(x) = f(\alpha) \\
\alpha = y \Rightarrow fgf(\alpha) &= fg[f(y)] = fg(x) = f(z) = x = f(y) = f(\alpha) \\
\alpha = z \Rightarrow fgf(\alpha) &= fg[f(z)] = fg(x) = f(z) = f(\alpha).
\end{aligned}$$

Logo, $fgf(\alpha) = f(\alpha)$, para todo $\alpha \in Q$.

Continuando a assumir que $f(b) = a$, consideremos finalmente a possibilidade de $f(z) = y$. Assim,

$$\begin{aligned}
b \vee c = z \quad &\Rightarrow \quad f(b \vee c) = f(z) \\
&\Rightarrow \quad f(b) \vee f(c) \leq f(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ a \vee f(c) \leq y \\
&\Rightarrow \ f(c) \leq y \\
&\Rightarrow \ f(c) \in \{a, c, y\}.
\end{aligned}$$

Vejamos que $f(c)$ não pode ser c nem y. De facto, se $f(c) = c$, então

$$\begin{aligned}
a \vee c = y \ &\Rightarrow \ f(a \vee c) = f(y) \\
&\Rightarrow \ f(a) \vee f(c) \leq f(y) \\
&\Rightarrow \ x \vee c \leq x \\
&\Rightarrow \ c \leq x,
\end{aligned}$$

o que é absurdo. Por outro lado, se $f(c) = y$, teríamos que

$$\begin{aligned}
a \vee c = y \ &\Rightarrow \ f(a \vee c) = f(y) \\
&\Rightarrow \ f(a) \vee f(c) \leq f(y) \\
&\Rightarrow \ x \vee y \leq x \\
&\Rightarrow \ y \leq x,
\end{aligned}$$

o que é absurdo. Logo, $f(c) = a$.

Definimos assim, a aplicação $g : Q \rightarrow Q$ por $g(x) = y$, $g(H_1 \setminus \{x\}) = \{z\}$ e $g(H_0) = \{c\}$. A aplicação $g \in End(Q)$ e é regular. De facto, para $\alpha, \beta \in Q$ temos que

$$\begin{aligned}
\alpha \leq \beta \ &\Rightarrow \ \alpha = \beta \text{ ou } \alpha < \beta \\
&\Rightarrow \ g(\alpha) = g(\beta) \text{ ou } g(\alpha) = c < y = g(\beta) \text{ ou } g(\alpha) = c < z = g(\beta) \\
&\Rightarrow \ g(\alpha) \leq g(\beta)
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\alpha &= a \Longrightarrow fgf(\alpha) = fg[f(a)] = fg(x) = f(y) = x = f(a) = f(\alpha) \\
\alpha &= b \Longrightarrow fgf(\alpha) = fg[f(b)] = fg(a) = f(c) = a = f(b) = f(\alpha) \\
\alpha &= c \Longrightarrow fgf(\alpha) = fg[f(c)] = fg(a) = f(c) = f(\alpha) \\
\alpha &= x \Longrightarrow fgf(\alpha) = fg[f(x)] = fg(x) = f(y) = x = f(x) = f(\alpha) \\
\alpha &= y \Longrightarrow fgf(\alpha) = fg[f(y)] = fg(x) = f(y) = f(\alpha) \\
\alpha &= z \Longrightarrow fgf(\alpha) = fg[f(z)] = fg(y) = f(z) = f(\alpha),
\end{aligned}
$$

o que prova que $fgf = f$.

(iii) Consideremos finalmente o caso $f(b) = b$.

Seja h o automorfismo em Q definido por

$$h = \begin{pmatrix} a & b & c & x & y & z \\ b & a & c & x & z & y \end{pmatrix}.$$

Então,

$$hf(a) = h(x) = x \text{ e } hf(b) = h(b) = a.$$

Aplicando (ii) a hf, temos que hf é regular, i. e., existe uma aplicação $g' \in End(Q)$ tal que

$$(hf)\, g'(hf) = hf.$$

Assim, considerando $g = g'h$, e uma vez que h é um automorfismo, temos que para $\alpha, \beta \in Q$, tais que $\alpha \leq \beta$

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow h(\alpha) \leq h(\beta) \Rightarrow g'(h(\alpha)) \leq g'(h(\beta)) \Rightarrow g'h(\alpha) \leq g'h(\beta) \Leftrightarrow g(\alpha) \leq g(\beta)$$

ou seja, $g \in End(Q)$, e

$$(hf)\, g'(hf) = hf \quad \Leftrightarrow \quad (hf)\, gf = hf$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad h\left[fgf\right] = h\left(f\right) \\
&\Rightarrow \quad fgf = f \quad \left[h \text{ é injectiva}\right],
\end{aligned}
$$

o que conclui a demonstração para o 1^{o} *Caso*.

2º Caso) Suponhamos que $f(a) = z$. Então como $f \in End(Q)$ e $a \vee x = x$, temos que

$$
\begin{aligned}
f(a \vee x) = f(x) \quad &\Rightarrow \quad f(a) \vee f(x) \leq f(x) \\
&\Rightarrow \quad z \vee f(x) \leq f(x) \\
&\Rightarrow \quad z \leq f(x) \\
&\Rightarrow \quad f(x) = z, \qquad \left[z \text{ é elemento maximal}\right].
\end{aligned}
$$

Do mesmo modo,

$$
\begin{aligned}
a \vee y = y \quad &\Rightarrow \quad f(a \vee y) = f(y) \\
&\Rightarrow \quad f(a) \vee f(y) \leq f(y) \\
&\Rightarrow \quad z \vee f(y) \leq f(y) \\
&\Rightarrow \quad z \leq f(y) \\
&\Rightarrow \quad f(y) = z, \quad \left[z \text{ é elemento maximal}\right].
\end{aligned}
$$

Logo, $f(x) = f(y) = z$.

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
a \vee b = x \quad &\Rightarrow \quad f(a \vee b) = f(x) \\
&\Rightarrow \quad f(a) \vee f(b) \leq f(x) \\
&\Rightarrow \quad z \vee f(b) \leq z \\
&\Rightarrow \quad f(b) \leq z \\
&\Rightarrow \quad f(b) \in \{b, c, z\}
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned} a \vee c = y &\Rightarrow f(a \vee c) = f(y) \\ &\Rightarrow f(a) \vee f(c) \leq f(y) \\ &\Rightarrow z \vee f(c) \leq z \\ &\Rightarrow f(c) \leq z \\ &\Rightarrow f(c) \in \{b, c, z\}. \end{aligned}$$

Para $f(b) = z$ ou $f(c) = z$, o 1^o caso pode ser aplicado a b ou c respectivamente. Assumamos então que $\{f(b), f(c)\} \subseteq \{b, c\}$.

- Se $\{f(b), f(c)\} = \{b, c\}$, então $f(b) = b$ e $f(c) = c$, ou $f(b) = c$ e $f(c) = b$, Vejamos que ambas as hipóteses implicam que $f(z) = z$ e $f^3 = f$. De facto, para $f(b) = b$ e $f(c) = c$, temos que

$$\begin{aligned} b \vee c = z &\Rightarrow f(b \vee c) = f(z) \\ &\Rightarrow f(b) \vee f(c) \leq f(z) \\ &\Rightarrow b \vee c \leq f(z) \\ &\Rightarrow z \leq f(z) \\ &\Rightarrow f(z) = z \qquad [z \text{ é um elemento maximal}]. \end{aligned}$$

Analogamente para $f(b) = c$ e $f(c) = b$, temos que

$$\begin{aligned} b \vee c = z &\Rightarrow f(b \vee c) = f(z) \\ &\Rightarrow f(b) \vee f(c) \leq f(z) \\ &\Rightarrow c \vee b \leq f(z) \\ &\Rightarrow z \leq f(z) \\ &\Rightarrow f(z) = z \qquad [z \text{ é um elemento maximal}]. \end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
f^3(a) &= f^2[f(a)] = f^2(z) = f[f(z)] = f(z) = z = f(a)\,, \\
f^3(b) &= f^2[f(b)] = \begin{cases} f^2(c) & \text{se } f(b) = c \\ f^2(b) & \text{se } f(b) = b \end{cases} \\
&= \begin{cases} f[f(c)] & \text{se } f(b) = c \\ f[f(b)] & \text{se } f(b) = b \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(b) & \text{se } f(b) = c \\ f(b) & \text{se } f(b) = b \end{cases} \\
&= f(b)\,, \\
f^3(c) &= f^2[f(c)] = \begin{cases} f^2(b) & \text{se } f(c) = b \\ f^2(c) & \text{se } f(c) = c \end{cases} \\
&= \begin{cases} f[f(b)] & \text{se } f(c) = b \\ f[f(c)] & \text{se } f(c) = c \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(c) & \text{se } f(c) = b \\ f(c) & \text{se } f(c) = c \end{cases} \\
&= f(c)\,, \\
f^3(x) &= f^2[f(x)] = f^2(z) = f[f(z)] = f(z) = z = f(x)\,, \\
f^3(y) &= f^2[f(y)] = f^2(z) = f[f(z)] = f(z) = z = f(y)\,, \\
f^3(z) &= f^2[f(z)] = f^2(z) = f[f(z)] = f(z)\,.
\end{aligned}
$$

Portanto, $f^3 = f$.

- Se $\{f(b), f(c)\} \neq \{b, c\}$, temos que $f(b) = f(c) = b$ ou $f(b) = f(c) = c$. Assumamos, sem perda de generalidade que $f(b) = f(c) = b$.

Então,

$$c \vee z = z \;\Rightarrow\; f(c) \vee f(z) \leq f(z)$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\ b \vee f(z) \leq f(z)\\&\Rightarrow\ b \leq f(z)\\&\Rightarrow\ f(z) \in \{b, x, z\}.\end{aligned}$$

O caso $f(z) = b$ é dual do 1^o caso, pelo que, apenas nos basta provar para $f(z) \in \{x, z\}$.

Seja $f(z) = x$. Então $f(a) = f(x) = f(y) = z,\ f(z) = x$ e $f(b) = f(c) = b$ e

$$\begin{aligned}
f^3(a) &= f^2[f(a)] = f^2(z) = f[f(z)] = f(x) = z = f(a)\\
f^3(b) &= f^2[f(b)] = f^2(b) = f[f(b)] = f(b)\\
f^3(c) &= f^2[f(c)] = f^2(b) = f[f(b)] = f(b) = b = f(c)\\
f^3(x) &= f^2[f(x)] = f^2(z) = f[f(z)] = f(x)\\
f^3(y) &= f^2[f(y)] = f^2(z) = f[f(z)] = f(x) = z = f(y)\\
f^3(z) &= f^2[f(z)] = f^2(x) = f[f(x)] = f(z),
\end{aligned}$$

ou seja, $f^3 = f$.

Seja $f(z) = z$. Então $f(a) = f(x) = f(y) = f(z) = z$ e $f(b) = f(c) = b$ e

$$\begin{aligned}
f^3(a) &= f^2[f(a)] = f^2(z) = f[f(z)] = f(z) = z = f(a)\\
f^3(b) &= f^2[f(b)] = f^2(b) = f[f(b)] = f(b)\\
f^3(c) &= f^2[f(c)] = f^2(b) = f[f(b)] = f(b) = b = f(c)\\
f^3(x) &= f^2[f(x)] = f^2(z) = f[f(z)] = f(z) = z = f(x)\\
f^3(y) &= f^2[f(y)] = f^2(z) = f[f(z)] = f(z) = z = f(y)\\
f^3(z) &= f^2[f(z)] = f^2(z) = f[f(z)] = f(z),
\end{aligned}$$

donde, $f^3 = f$. $\square$

De seguida apresentamos duas proposições que são necessárias para a demonstração do teorema fundamental deste capítulo.

Proposição 2.7. *Seja P um c.p.o. e $End\,(P)$ um monóide regular. Se a altura de P exceder 1, então cada par de elementos de P tem supremo e ínfimo.*

Demonstração. Suponhamos que a altura de P excede 1. Vejamos que cada par de elementos de P tem supremo e ínfimo.

Consideremos $a, b, c \in P$ com $a < b < c$ e suponhamos que u e v são elementos de P que não têm supremos comuns.

Uma vez que $u^{\uparrow}$ e $v^{\uparrow}$ não se intersectam, podemos definir a aplicação $f : P \to P$ por

$$f\,(x) = \begin{cases} c & \text{se } x \in u^{\uparrow} \\ b & \text{se } x \in v^{\uparrow} \\ a & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A aplicação f preserva a ordem. De facto, para $x, y \in P$ tais que $x \leq y$, e uma vez que

$$x \in u^{\uparrow} \Rightarrow u \leq x \leq y \Rightarrow y \in u^{\uparrow}$$

e

$$x \in v^{\uparrow} \Rightarrow v \leq x \leq y \Rightarrow y \in v^{\uparrow},$$

temos que

$$f\,(x) \;=\; \begin{cases} c & \text{se } x \in u^{\uparrow} \\ b & \text{se } x \in v^{\uparrow} \\ a & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \begin{cases} c & \text{se } y \in u^{\uparrow} \\ b & \text{se } y \in v^{\uparrow} \\ a & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= f(y).
\end{aligned}$$

Então, para qualquer aplicação $g : P \to P$ que satisfaça $f = fgf$, temos que $g(c) \in u^{\uparrow}$ e $g(b) \in v^{\uparrow}$. De facto,

$$\begin{aligned}
x \in u^{\uparrow} &\Rightarrow f(x) = c \\
&\Rightarrow fgf(x) = c \\
&\Rightarrow fg(c) = c \\
&\Rightarrow g(c) \in u^{\uparrow}
\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
x \in v^{\uparrow} &\Rightarrow f(x) = b \\
&\Rightarrow fgf(x) = b \\
&\Rightarrow fg(b) = b \\
&\Rightarrow g(b) \in v^{\uparrow}.
\end{aligned}$$

Mas, sendo assim, g não pode preservar a ordem, pois $b < c$ e $g(b)$ e $g(c)$ não estão relacionados, o que contraria a regularidade de $End(P)$. Portanto cada par de elementos de P tem supremo. Dualmente se verifica que cada par de elementos de P tem ínfimo. $\square$

Proposição 2.8. *Seja P um c.p.o. e $End(P)$ um monóide regular. Se P contém elementos $u, \omega_0, \omega_1, \omega_2, v$ tais que $u < \omega_i < v$, para $i < 3$ e $\omega_0 < \omega_1$, então $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$ é uma cadeia.*

Demonstração. Seja P um c.p.o. com elementos $u, \omega_0, \omega_1, \omega_2, v$ tais que $u < \omega_i < v$, para $i < 3$ e $\omega_0 < \omega_1$.

Se $\omega_2 \parallel \omega_1$ define-se a aplicação $f : P \to P$ por

$$f(x) = \begin{cases} u & \text{se } x < \omega_1 \text{ ou } x < \omega_2 \\ \omega_0 & \text{se } x = \omega_1 \\ \omega_1 & \text{se } x = \omega_2 \\ v & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vejamos que $f \in End(P)$. De facto, para $x, y \in P$ com $x < y$, temos uma das seguintes situações:

(i) $x > \omega_1$: Neste caso, $y > \omega_1$, e portanto $f(x) = v = f(y)$.

(ii) $x = \omega_1$: Neste caso, $y > \omega_1$, e portanto $f(x) = \omega_0 < v = f(y)$.

(iii) $x < \omega_1$: Neste caso, $f(x) = u$, pelo que $f(x) \leq f(y)$ qualquer que seja $f(y)$.

(iv) $x \parallel \omega_1$: Neste caso, há quatro subcasos a considerar:

(1) Se $x < \omega_2$ então $f(x) = u$ e portanto $f(x) \leq f(y)$ qualquer que seja $f(y)$.

(2) Se $x > \omega_2$ então $y > \omega_2$ pelo que $f(x) = v = f(y)$.

(3) Se $x = \omega_2$ então $y > \omega_2$ donde $f(x) = \omega_1 < v = f(y)$.

(4) Se $x \parallel \omega_2$ então $y \nleq \omega_1$ e $y \nleq \omega_2$ pelo que $f(x) = v = f(y)$;

o que nos permite concluir a isotonia de f.

Assim, qualquer aplicação $g : P \to P$ que satisfaça $fgf = f$ deverá satisfazer $g(\omega_0) = \omega_1$ e $g(\omega_1) = \omega_2$, uma vez que

$$fgf(\omega_1) = f(\omega_1) \Leftrightarrow fg(\omega_0) = \omega_0 \Leftrightarrow g(\omega_0) = \omega_1$$

e

$$fgf\,(\omega_2) = f\,(\omega_2) \Leftrightarrow fg\,(\omega_1) = \omega_1 \Leftrightarrow g\,(\omega_1) = \omega_2.$$

Deste modo, concluímos que g não preserva a ordem, pois $\omega_0 < \omega_1$ por hipótese e $g\,(\omega_0) = \omega_1 \parallel \omega_2 = g\,(\omega_1)$, o que contraria a regularidade de $End\,(P)$. Logo, ω_1 e ω_2 são comparáveis. Analogamente se verifica que ω_2 e ω_0 são comparáveis, o que nos permite concluir que $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$ é uma cadeia. $\square$

Nos seis lemas anteriormente apresentados vimos alguns exemplos de c.p.o.'s P para os quais $End\,(P)$ é regular. O teorema seguinte exclui a existência de qualquer outro c.p.o. nestas condições.

Teorema 2.9. *Para um c.p.o. P o monóide $End\,(P)$ é regular se e só se P é uma cadeia quase completa, uma anti-cadeia, um c.p.o. bipartido completo, ou um dos c.p.o. M_α, $N_{\alpha,\beta}$, ou Q.*

Demonstração.

($\Leftarrow$) Se P é um dos c.p.o. mencionados, então, de acordo com os lemas anteriormente apresentados, $End\,(P)$ é regular.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $End\,(P)$ é regular e que P não é descrito como no teorema.

Observemos primeiro que P é conexo. De facto, se P não é conexo, escolhemos uma componente de ordem A (que existe, porque P não é uma anti-cadeia) com $|A| > 1$, e uma componente de ordem B distinta de A. Fixando $u, v \in A$ com $u < v$, definimos a aplicação $f \in End\,(P)$ por

$$f\,(x) = \begin{cases} v & \text{se } x \in B \\ u & \text{se } x \notin B \end{cases}.$$

Assim, dada qualquer aplicação $g : P \rightarrow P$, satisfazendo $fgf = f$, temos que

$$u \in A \Rightarrow u \notin B \Rightarrow u \in P \setminus B \Rightarrow f(u) = u$$

e

$$\begin{aligned} fgf(u) = f(u) &\Leftrightarrow fg[f(u)] = u \\ &\Leftrightarrow fg(u) = u \\ &\Leftrightarrow f[g(u)] = u \neq v \\ &\Leftrightarrow g(u) \notin B \end{aligned}$$

Por outro lado, para $x \in B$, temos que

$$\begin{aligned} fgf(x) = f(x) &\Leftrightarrow fg[f(x)] = v \\ &\Leftrightarrow fg(v) = v \\ &\Leftrightarrow f[g(v)] = v \\ &\Leftrightarrow g(v) \in B \end{aligned}$$

Como $u < v$ e $g(u)$ e $g(v)$ não estão relacionados, concluímos que g não preserva a ordem, o que contraria a regularidade de $End(P)$. Portanto P é conexo.

Suponhamos que a altura de P excede 1. Pelo Lema 2.2., podemos assumir que P não é uma cadeia, i. e., que existem $x, y \in P$ tais que $x \parallel y$. Se P contém uma cadeia de quatro elementos C, então pela Proposição 2.7. e porque $x \in P$, podemos concluir que existe ínfimo e supremo de $C \cup \{x\}$. Por outro lado, a Proposição 2.8. permite-nos concluir que existe uma cadeia de quatro elementos D do qual x é um elemento. Analogamente, e repetindo o argumento, existe supremo e ínfimo de $D \cup \{y\}$ e, pela Proposição 2.8. temos que x é comparável a y, o que contraria a nossa hipótese. Portanto, P não contém uma cadeia de quatro elementos.

Digamos, por suposição, que P contém uma cadeia de três elementos $a < b < c$. Então, pela Proposição 2.7., a e c são respectivamente o mínimo e o máximo de P e, pela Proposição 2.8., P é isomorfo a M_μ para algum μ, o que contraria a nossa hipótese. Logo a altura de P é 1.

Observemos de seguida que P não contém subconjuntos parcialmente ordenados bipartidos completos com dois elementos maximais e dois elementos minimais. Suponhamos então que P contém tal subconjunto parcialmente ordenado com elementos minimais u_0, v_0 e elementos maximais u_1, v_1. Se P contiver elementos incomparáveis a_0, a_1 com a_0 elemento minimal e a_1 elemento maximal, então a aplicação $f : P \to P$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} u_0 & \text{se } x = a_0 \\ u_1 & \text{se } x = a_1 \\ v_0 & \text{se } x \neq a_0 \text{ e } x \text{ é elemento minimal} \\ v_1 & \text{se } x \neq a_1 \text{ e } x \text{ é elemento maximal} \end{cases}$$

preserva a ordem. De facto, para $x, y \in P$ com $x < y$, temos que x é elemento minimal e

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} u_0 & \text{se } x = a_0 \\ v_0 & \text{se } x \neq a_0 \end{cases} \\ &\leq f(y), \quad \forall f(y) \qquad [u_0 \text{ e } v_0 \text{ é elemento minimal}]. \end{aligned}$$

Mais ainda, a aplicação $g : P \to P$ que satisfaça $fgf = f$ terá de satisfazer $g(u_i) = a_i$ para $i \in \{0, 1\}$, pois

$$fgf(a_0) = f(a_0) \Leftrightarrow fg(u_0) = u_0 \Leftrightarrow g(u_0) = a_0$$

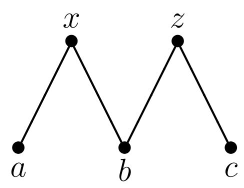
e

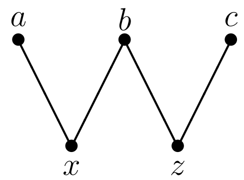
$$fgf(a_1) = f(a_1) \Leftrightarrow fg(u_1) = u_1 \Leftrightarrow g(u_1) = a_1$$

Assim, estamos em condições de concluir que g não preserva a ordem, pois $u_0 < u_1$

e $g(u_0) = a_0 \parallel a_1 = g(u_1)$, o que contraria a regularidade de $End(P)$. Logo, cada elemento minimal de P deverá ser comparável com cada elemento maximal, i. e., P é um c.p.o. bipartido completo, o que contradiz a nossa hipótese de trabalho.

Mais ainda, existem dois c.p.o.'s que precisam ser excluídos como subconjuntos parcialmente ordenados de P. Um é o c.p.o. $M = \{a, b, c, x, z\}$ com $a < x$, $b < x$, $b < z$, $c < z$ e nenhuma outra ordem, e o outro c.p.o. é o dual de M, que designamos por W.





Se M for um subconjunto parcialmente ordenado de P, então a aplicação $f : P \to P$ definida por

$$f(\alpha) = \begin{cases} b & \text{se } \alpha = a \\ c & \text{se } \alpha = c \\ z & \text{caso contrário} \end{cases}$$

preserva a ordem. De facto, para $\alpha, \beta \in P$ tais que $\alpha < \beta$, temos que

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \begin{cases} b & \text{se } \alpha = a \\ c & \text{se } \alpha = c \\ z & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &\leq z = f(\beta). \end{aligned}$$

Assim, qualquer aplicação $g \in End(P)$ que satisfaça $fgf = f$, deverá satisfazer

$$fgf(a) = f(a) \Leftrightarrow fg(b) = b \Leftrightarrow g(b) = a$$

e

$$fgf\left(c\right)=f\left(c\right)\Leftrightarrow fg\left(c\right)=c\Leftrightarrow g\left(c\right)=c$$

pelo que, $b<z$ e $c<z$ implicará que $g\left(z\right)$ é o supremo de a e c.

Uma vez que já vimos que P não contém um c.p.o. bipartido completo com dois elementos maximais e dois elementos minimais, concluímos que a e c têm um único supremo y. Assim, o subconjunto parcialmente ordenado $M\cup\{y\}$ é isomorfo a Q.

Como por hipótese $P\neq Q$, temos que existe um elemento $\alpha\in P\backslash\left(M\cup\{y\}\right)$ e, como P é conexo, vem que α pode ser escolhido como sendo comparável com um elemento de Q. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\alpha>c$. Assim, definimos a aplicação $f:P\rightarrow P$ por

$$f\left(n\right)=\begin{cases}\alpha & \text{se } n=x\\ z & \text{se } n=z\\ y & \text{se } n=y\\ c & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

A aplicação f preserva a ordem, pois para $m,n\in P$ com $m<n$ temos que m é elemento minimal e n é elemento maximal, pelo que $f\left(m\right)=c$ e $f\left(n\right)\in\{\alpha,z,y,c\}$.

Logo, $f\left(m\right)\leq f\left(n\right)$.

Mas, para uma aplicação $g\in End\left(P\right)$ que satisfaça $fgf=f$, temos que

$$fgf\left(z\right)=f\left(z\right)\Leftrightarrow fg\left(z\right)=z\Leftrightarrow g\left(z\right)=z,$$

$$fgf\left(y\right)=f\left(y\right)\Leftrightarrow fg\left(y\right)=y\Leftrightarrow g\left(y\right)=y$$

e

$$fgf\left(x\right)=f\left(x\right)\Leftrightarrow fg\left(\alpha\right)=\alpha\Leftrightarrow g\left(\alpha\right)=x.$$

Por um lado,

$$c\ <\ \alpha\Rightarrow g\left(c\right)\leq g\left(\alpha\right)=x$$

$$\begin{aligned} c &< y \Rightarrow g(c) \leq g(y) = y \\ c &< z \Rightarrow g(c) \leq g(z) = z, \end{aligned}$$

pelo que $g(c)$ é o ínfimo para $\{x, y, z\}$.

Por outro lado, como P não contém um c.p.o. bipartido completo com dois elementos minimais e dois elementos maximais, temos que $g(c)$ é o único ínfimo para x e z, e também é o único ínfimo para y e z. Logo $b = c$, o que é absurdo.

Portanto, concluímos que M não é um subconjunto parcialmente ordenado de P e, por um argumento dual, W também não é um subconjunto parcialmente ordenado de P.

Assim, uma vez que P é conexo, de altura 1, e não contém qualquer um dos três c.p.o.'s anteriormente mencionados, concluímos que P só pode ser um c.p.o. bipartido completo ou $N_{\alpha,\beta}$, o que prova o teorema. $\square$

Capítulo 3

O semigrupo ordenado dos endomorfismos de um c.p.o.

O objectivo deste capítulo é determinarmos os conjuntos ordenados P para os quais o semigrupo ordenado $End(P)$ é regular e principalmente ordenado no sentido em que para cada $f \in End\,(P)$, existe

$$f^* = máx\,\{g \in End\,(P) : fgf \leq f\}\,.$$

Como vimos no primeiro capítulo, dado $f \in End\,(P)$, se f^* existe, então $ff^*f = f$, pelo que f^* é a maior pré-inversa de f.

O teorema que se segue prova que o único c.p.o tal que o semigrupo ordenado dos endomorfismos é regular e principalmente ordenado é o dual de uma cadeia bem ordenada.

Teorema 3.1. *O semigrupo ordenado $End\,(P)$ é regular e principalmente ordenado se e só se P é o dual de uma cadeia bem ordenada.*

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $End\,(P)$ é regular e principalmente ordenado. Então, pelo teorema 2.9., P deve ser uma cadeia quase completa, ou uma anticadeia, ou um conjunto ordenado bipartido completo $K_{\alpha,\beta}$, ou um dos c.p.o. M_α, $N_{\alpha,\beta}$, ou Q. Suponhamos, de modo a obter uma contradição, que P não é uma cadeia. Se P é uma anticadeia ou M_α, ou $K_{\alpha,\beta}$, então, para $a, b \in P$ com $a \parallel b$, a aplicação $f_{a,b} : P \to P$ definida por

$$f_{a,b}\,(x) = \begin{cases} b & \text{se } x = a \\ x & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é isótona e idempotente. De facto, sejam $x, y \in P$ tais que $x \leq y$. Então $x = y$ ou $x < y$. Consideremos $x < y$. Para $x = a$, temos que $y \neq b$, uma vez que $a \parallel b$, donde $b < y$ e

$$f_{a,b}\,(x) = f_{a,b}\,(a) = b < y = f_{a,b}\,(y)\,.$$

Para $x \neq a$ e $y \neq a$,

$$x < y \Rightarrow f_{a,b}\,(x) = x < y = f_{a,b}\,(y)\,.$$

Para $x \neq a$ e $y = a$, vem que $f_{a,b}\,(x) = x$ e $f_{a,b}\,(y) = b$, pelo que falta verificar que $x < b$ em M_α ou em $K_{\alpha,\beta}$:

Para M_α, temos que $a \parallel b$, ou seja, a e b são átomos, donde a condição $x < y$ implica que $x = 0$, o que por sua vez implica que $x < b$.

Para $K_{\alpha,\beta}$, a condição $x < y$ implica que x é elemento minimal e que $y = a$ é elemento maximal, bem como b, já que $a \parallel b$. Então $x < b$, o que conclui a prova que $f_{a,b}$ é isótona.

Vejamos agora que $f_{a,b}$ é idempotente, ou seja, que $f^2_{a,b}\,(x) = f_{a,b}\,(x)$, para todo $x \in P$. Se $x = a$ então

$$f^2_{a,b}\,(a) = f_{a,b}\,[f_{a,b}\,(a)] = f_{a,b}\,(b) = b = f_{a,b}\,(a)\,.$$

Se $x \neq a$ então

$$f^2_{a,b}\,(x) = f_{a,b}\,[f_{a,b}\,(x)] = f_{a,b}\,(x)\,.$$

Assim, $f_{a,b}$ é pré-inversa de si mesma.

Por outro lado,considerando agora $f_{b,a}$, temos que $f_{b,a}$ é obviamente idempotente e é pré-inversa de $f_{a,b}$, pois:

- se $x = a$, então
$$f_{a,b}f_{b,a}f_{a,b}\left(a\right) = f_{a,b}f_{b,a}\left(b\right) = f_{a,b}\left(a\right);$$

- se $x = b$, então
$$f_{a,b}f_{b,a}f_{a,b}\left(b\right) = f_{a,b}f_{b,a}\left(b\right) = f_{a,b}\left(a\right) = b = f_{a,b}\left(b\right);$$

- se $x \neq a$ e $x \neq b$, então
$$f_{a,b}f_{b,a}f_{a,b}\left(x\right) = f_{a,b}f_{b,a}\left(x\right) = f_{a,b}\left(x\right).$$

Consequentemente, $f_{b,a} \leq f^{*}_{a,b}$ e $f_{a,b} \leq f^{*}_{a,b}$, pois, pela Proposição 1.5., $f^{*}_{a,b}$ é a maior pré-inversa de $f_{a,b}$.

Assim, por um lado, temos que

$$\begin{aligned} f_{a,b}f^{*}_{a,b}f_{a,b}\left(b\right) = f_{a,b}\left(b\right) &\Leftrightarrow f_{a,b}f^{*}_{a,b}\left[f_{a,b}\left(b\right)\right] = b \\ &\Leftrightarrow f_{a,b}\left(f^{*}_{a,b}\left(b\right)\right) = b \\ &\Rightarrow f^{*}_{a,b}\left(b\right) \in \{a, b\} \end{aligned}$$

e por outro lado, temos que $f^{*}_{a,b}\left(b\right) \geq f_{a,b}\left(b\right)$ e $f^{*}_{a,b}\left(b\right) \geq f_{b,a}\left(b\right)$, ou seja, $f^{*}_{a,b}\left(b\right) \geq b$ e $f^{*}_{a,b}\left(b\right) \geq a$. Logo, obtemos que $a \geq b$ ou $b \geq a$, consoante $f^{*}_{a,b}\left(b\right)$ é igual a a ou a b, o que é absurdo pois $a \parallel b$. Portanto P não é uma anticadeia, nem M_{α} nem $K_{\alpha,\beta}$.

Suponhamos agora que P é $N_{\alpha,\beta}$ com $\beta \geq 2$ uma vez que $N_{\alpha,1} = K_{\alpha,1}$.

Sejam β_0 o elemento maximal maior que todos os elementos minimais, α_0 o elemento minimal menor que todos os elementos maximais e β_1 um elemento maximal distinto de

β_0. Consideremos a aplicação f_{β_1,β_0} definida por

$$\begin{array}{rcl} f_{\beta_1,\beta_0} : N_{\alpha,\beta} & \rightarrow & N_{\alpha,\beta} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \beta_0 & \text{se } x = \beta_1 \\ x & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{array}$$

Vejamos que $f_{\beta_1,\beta_0} \in End\,(N_{\alpha,\beta})$. Para $x, y \in End\,(N_{\alpha,\beta})$ tais que $x \leq y$, temos que:

Se $x = y$ então $f_{\beta_1,\beta_0}\,(x) = f_{\beta_1,\beta_0}\,(y)$. Se $x \neq y$ então temos de considerar as seguintes três hipóteses:

(i) $\quad y = \beta_1$, o que implica que $x = \alpha_0$ e

$$f_{\beta_1,\beta_0}\,(x) = f_{\beta_1,\beta_0}\,(\alpha_0) = \alpha_0 < \beta_0 = f_{\beta_1,\beta_0}\,(\beta_1) = f_{\beta_1,\beta_0}\,(y)\,;$$

(ii) $\quad y = \beta_0$, o que implica que x é um elemento minimal qualquer e

$$f_{\beta_1,\beta_0}\,(x) = x < \beta_0 = f_{\beta_1,\beta_0}\,(\beta_0) = f_{\beta_1,\beta_0}\,(y)\,;$$

(iii) $\quad y \neq \beta_1$ e $y \neq \beta_0$, o que implica que $x = \alpha_0$ e

$$f_{\beta_1,\beta_0}\,(x) = f_{\beta_1,\beta_0}\,(\alpha_0) = \alpha_0 < y = f_{\beta_1,\beta_0}\,(y)\,.$$

Portanto, f_{β_1,β_0} preserva a ordem. Mais ainda, f_{β_1,β_0} é obviamente idempotente, pelo que concluímos que é uma pré-inversa de si mesma.

Consideremos a aplicação $id_{N_{\alpha,\beta}}$. Vejamos que ela também é uma pré-inversa de f_{β_1,β_0}. De facto,

$$f_{\beta_1,\beta_0}\left[id_{N_{\alpha,\beta}}\left(f_{\beta_1,\beta_0}\,(x)\right)\right] = f^2_{\beta_1,\beta_0}\,(x) = f_{\beta_1,\beta_0}\,(x)$$

e como $f_{\beta_1,\beta_0} \leq f^*_{\beta_1,\beta_0}$ e $id_{N_{\alpha,\beta}} \leq f^*_{\beta_1,\beta_0}$, obtemos que

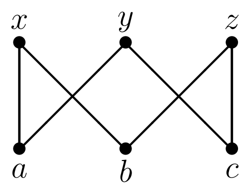
$$f_{\beta_1,\beta_0}\,(\beta_1) \leq f^*_{\beta_1,\beta_0}\,(\beta_1) \Leftrightarrow \beta_0 \leq f^*_{\beta_1,\beta_0}\,(\beta_1)$$

e

$$id_{N_{\alpha,\beta}}(\beta_1) \leq f^*_{\beta_1,\beta_0}(\beta_1) \Leftrightarrow \beta_1 \leq f^*_{\beta_1,\beta_0}(\beta_1)$$

o que é absurdo pois β_0 e β_1 são elementos maximais distintos. O absurdo resultou de supormos que $P = N_{\alpha,\beta}$. Portanto P não pode ser $N_{\alpha,\beta}$.

Suponhamos, finalmente, que $P = Q$ onde Q é a coroa



Definimos a aplicação $f : P \to P$ por

$$f(\alpha) = \begin{cases} y & \text{se } \alpha = x \\ c & \text{se } \alpha = b \\ \alpha & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sejam $\alpha, \beta \in P$ tais que $\alpha \leq \beta$.

$$\begin{aligned} \alpha \leq \beta &\Rightarrow \alpha < \beta \quad \text{ou} \quad \alpha = \beta \\ &\Rightarrow (\alpha, \beta) \in \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, z), (c, y), (c, z)\} \quad \text{ou} \quad \alpha = \beta. \end{aligned}$$

Considerando $\alpha < \beta$, temos que

$$\begin{aligned} \alpha &= a \text{ e } \beta = x \Longrightarrow f(\alpha) = f(a) = a < y = f(x) = f(\beta) \\ \alpha &= a \text{ e } \beta = y \Longrightarrow f(\alpha) = f(a) = a < y = f(y) = f(\beta) \\ \alpha &= b \text{ e } \beta = x \Longrightarrow f(\alpha) = f(b) = c < y = f(x) = f(\beta) \\ \alpha &= b \text{ e } \beta = z \Longrightarrow f(\alpha) = f(b) = c < z = f(z) = f(\beta) \\ \alpha &= c \text{ e } \beta = y \Longrightarrow f(\alpha) = f(c) = c < y = f(y) = f(\beta) \\ \alpha &= c \text{ e } \beta = z \Longrightarrow f(\alpha) = f(c) = c < z = f(z) = f(\beta), \end{aligned}$$

donde concluímos que $f(\alpha) < f(\beta)$. Por outro lado, $\alpha = \beta$ implica que $f(\alpha) = f(\beta)$, pelo que $f \in End(P)$.

Dado que

$$
\begin{aligned}
f^2(\alpha) = f[f(\alpha)] &= \begin{cases} y & \text{se } f(\alpha) = x \\ c & \text{se } f(\alpha) = b \\ f(\alpha) & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} y & \text{se } \alpha = x \\ c & \text{se } \alpha = b \\ \alpha & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= f(\alpha)
\end{aligned}
$$

temos que f é idempotente, donde f e id_P são pré-inversas de f. Assim,

$$f^*(x) \geq f(x) \text{ e } f^*(x) \geq id_P(x) \Leftrightarrow f^*(x) \geq y \text{ e } f^*(x) \geq x,$$

o que é absurdo porque x e y são elementos maximais não comparáveis. Portanto, P não pode ser Q, donde concluímos que P tem de ser uma cadeia.

Definimos, neste caso, para cada $y \in P$, a aplicação ψ_y por

$$\psi_y(x) = \begin{cases} y & \text{se } x \geq y \\ x & \text{se } x < y. \end{cases}$$

Para cada $x, z \in P$ tais que $x \leq z$, temos que

$$\psi_y(x) = \begin{cases} y & \text{se } x \geq y \\ x & \text{se } x < y \end{cases} \leq \begin{cases} y & \text{se } z \geq y \\ z & \text{se } z < y \end{cases} = \psi_y(z)$$

i. e., $\psi_y \in End(P)$.

Definimos também, para $y, z \in P$ com $y \leq z$, a aplicação $\vartheta_{y,z} : P \to P$ por

$$\vartheta_{y,z}(x) = \begin{cases} z & \text{se } x \in [y,z] \\ x & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vejamos que $\vartheta_{y,z}$ é isótona. De facto, para $a, b \in P$ tais que $a \leq b$, temos quatro situações possíveis:

(i) $a, b \in [y,z]$. Neste caso,

$$\vartheta_{y,z}(a) = z = \vartheta_{y,z}(b);$$

(ii) $a, b \notin [y,z]$. Neste caso,

$$\vartheta_{y,z}(a) = a \leq b = \vartheta_{y,z}(b);$$

(iii) $a \notin [y,z]$ e $b \in [y,z]$. Neste caso,

$$\vartheta_{y,z}(a) = a \leq b \leq z = \vartheta_{y,z}(b);$$

(iv) $a \in [y,z]$ e $b \notin [y,z]$. Neste caso, $z \leq b$, pelo que

$$\vartheta_{y,z}(a) = z \leq b = \vartheta_{y,z}(b).$$

Por outro lado, se $x \geq y$, então

$$\psi_y \vartheta_{y,z} \psi_y(x) = \psi_y \vartheta_{y,z}(y) = \psi_y(z) = y = \psi_y(x)$$

ao passo que, se $x < y$, então

$$\psi_y \vartheta_{y,z} \psi_y(x) = \psi_y \vartheta_{y,z}(x) = \psi_y(x)$$

donde concluímos que $\psi_y \vartheta_{y,z} \psi_y = \psi_y$. Segue-se que, para todo $z \geq y$, $\vartheta_{y,z} \leq \psi_y^*$ e por conseguinte, $z = \vartheta_{y,z}(y) \leq \psi_y^*(y)$. Assim, concluímos que P tem elemento máximo, nomeadamente $\psi_y^*(y)$ para cada $y \in P$.

Consideremos agora C uma cadeia com elemento mínimo em P. De modo a obter uma contradição, suponhamos que C é infinita.

Uma vez que P tem elemento máximo, o conjunto $\bar{C}$ dos maximais de C em P é não vazio. Assim, para cada $d \in C$, sejam $P_d = \left\{ y \in P : y \geq d \ , \ y \notin \bar{C} \right\}$ e a aplicação $\varphi_d : P \to P$ definida por

$$\varphi_d(x) = \begin{cases} d & \text{se } x \in P_d \\ x & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vejamos que $\varphi_d \in End(P)$. Sejam $x, y \in P$ tais que $x \leq y$.

Para $x \notin P_d$ e $y \notin P_d$ temos que

$$\varphi_d(x) = x \leq y = \varphi_d(y).$$

Para $x \in P_d$ e $y \in P_d$ temos que

$$\varphi_d(x) = d = \varphi_d(y).$$

Para $x \notin P_d$ e $y \in P_d$ temos que

$$\varphi_d(x) = x \leq d = \varphi_d(y),$$

uma vez que $x \notin P_d$ equivale a $x \leq d$ ou $x \in \bar{C}$, e $x \in \bar{C}$ implica $x > y$, o que contradiz a hipótese de trabalho.

Para $x \in P_d$ e $y \notin P_d$ temos que

$$\varphi_d(x) = d \leq x \leq y = \varphi_d(y).$$

Podemos concluir agora que φ_d é isótona.

Suponhamos agora que $z \in P_d$. Observemos que se $x \in P_d$ então $\varphi_d(x) = d$ e $\vartheta_{d,z}(d) = z$, pelo que

$$\varphi_d \vartheta_{d,z} \varphi_d(x) = \varphi_d \vartheta_{d,z}(d) = \varphi_d(z) = d = \varphi_d(x)$$

ao passo que, se $x \notin P_d$, então $\varphi_d(x) = x$ e $\vartheta_{d,z}(x) = x$, pelo que

$$\varphi_d \vartheta_{d,z} \varphi_d(x) = \varphi_d \vartheta_{d,z}(x) = \varphi_d(x)$$

Logo, $\varphi_d \vartheta_{d,z} \varphi_d = \varphi_d$, donde, para $z \in P_d$, temos que $\vartheta_{d,z}$ é uma pré-inversa de φ_d. Como φ_d^* é a maior pré-inversa de φ_d, temos que $\vartheta_{d,z} \leq \varphi_d^*$ e, por conseguinte, $z = \vartheta_{d,z}(d) \leq \varphi_d^*(d)$. Logo,

$$\forall d \in C, \quad d \leq \varphi_d^*(d).$$

Portanto, $\varphi_d^*(d)$ é um majorante de C e por isso $\varphi_d^*(d) \in \bar{C}$. Por outro lado, para todo $a \in P_d$, $\varphi_d(a) = d$ e $\varphi_d \varphi_d^* \varphi_d = \varphi_d$ pois φ_d^* é a maior pré-inversa de φ_d, pelo que

$$\varphi_d \varphi_d^*(d) = \varphi_d \varphi_d^* \varphi_d(a) = \varphi_d(a) = d.$$

Por definição de φ_d, concluímos que $\varphi_d^*(d) \in P_d$, o que é absurdo pois $\varphi_d^*(d) \in \bar{C}$. Logo, C não pode ser infinito.

Assim, todas as cadeias com elemento mínimo em P são finitas, o que implica que cada subconjunto não vazio de P tem elemento máximo, ou seja, P é dual de uma cadeia bem ordenada.

($\Leftarrow$) Suponhamos, reciprocamente, que P é o dual de uma cadeia bem ordenada. Então qualquer subconjunto não vazio de P tem máximo, o que implica que não existem aberturas de P. Logo P é quase completo, donde, pelo Lema 2.2, $End(P)$ é regular.

Consideremos $f \in End(P)$. Para cada $x \in P$ tal que $x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f \neq \emptyset$ definimos

$$f^{+}(x) = \max\{y \in P : f(y) \leq x\}.$$

De facto, a função f^{+} está bem definida, uma vez que

$$\begin{aligned} y \in x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f &\Rightarrow \exists a \in P : f(a) = y \leq x \\ &\Rightarrow \{z \in P : f(z) \leq x\} \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists \max\{z \in P : f(z) \leq x\} \in P, \end{aligned}$$

por hipótese.

Para cada $x \in P$, os conjuntos $\{y \in P : f(y) \leq f(x)\}$ e $\{y \in P : f(y) = f(x)\}$ são obviamente não vazios. Sejam então

$$a = \max\{y \in P : f(y) \leq f(x)\}\, eb = \max\{y \in P : f(y) = f(x)\}.$$

Por um lado, temos que

$$a = \max\{y \in P : f(y) \leq f(x)\} \Rightarrow a \in P \text{ e } f(a) \leq f(x)$$

e, como $x \in \{y \in P : f(y) \leq f(x)\}$, vem que, $x \leq a$, e portanto, $f(x) \leq f(a)$, uma vez que $f \in End(P)$. Então, $f(a) = f(x)$. Assim, $a \in P$ e $f(a) = f(x)$, i.e., $a \in \{y \in P : f(y) = f(x)\}$ e, consequentemente,

$$a \leq b = \max\{y \in P : f(y) = f(x)\}.$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} b = \max\{y \in P : f(y) = f(x)\} &\Rightarrow b \in P \text{ e } f(b) = f(x) \\ &\Rightarrow b \in P \text{ e } f(b) \leq f(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad b \in \{y \in P : f(y) \leq f(x)\}$$
$$\Rightarrow \quad b \leq a = \max\{y \in P : f(y) \leq f(x)\}.$$

Logo $a = b$, pelo que

$$f^+ f(x) = \max\{y \in P : f(y) \leq f(x)\} = a = b.$$

Assim,

$$(\forall x \in P) \qquad f f^+ f(x) = f\left[f^+ f(x)\right] = f(a) = f(b) = f(x).$$

Mais ainda, se para cada $x \in \operatorname{Im} f$ escolhermos e fixarmos um elemento $h(x) \in f^{-1}\{x\}$, então, a aplicação $h : \operatorname{Im} f \to P$ assim definida é isótona e injectiva. De facto, para cada $x \in \operatorname{Im} f$, existe $p \in P$ tal que $f(p) = x$, ou seja,

$$f^{-1}\{x\} = \{p \in P : f(p) = x\} \neq \emptyset,$$

pelo que podemos fixar um e um só elemento de $f^{-1}\{x\}$, x_0, definindo a aplicação

$$\begin{array}{rcl} h : \operatorname{Im} f & \to & P \\ x & \mapsto & x_0 \quad \text{tal que } f(x_0) = x. \end{array}$$

Vejamos que h é isótona e injectiva:

Sejam $x, y \in \operatorname{Im} f$ tais que $x \leq y$. Sejam $x_0 = h(x)$ e $y_0 = h(y)$ (i.e., $f(x_0) = x$ e $f(y_0) = y$). Suponhamos que $x_0 \nleq y_0$. Então, $y_0 < x_0$ porque P, sendo o dual de uma cadeia bem ordenada, é uma cadeia. Como $f \in End(P)$, vem que $f(y_0) \leq f(x_0)$, ou seja, $y \leq x$, pelo que $x = y$.

Assim, $h(x) = h(y)$, i.e., $y_0 = x_0$, o que contraria a nossa hipótese de trabalho. Logo, $x_0 \leq y_0$, ou seja, $h(x) \leq h(y)$.

Sejam $x, y \in \operatorname{Im} f$ tais que $h(x) = h(y)$. Como

$$\begin{aligned} h(x) = h(y) &\Leftrightarrow x_0 = y_0 \\ &\Rightarrow f(x_0) = f(y_0) && \text{[porque } f \text{ é aplicação]} \\ &\Rightarrow x = y && \text{[por definição de } h\text{]}, \end{aligned}$$

concluímos que h é injectiva.

Seja $g : P \to P$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} h(x_I) & \text{se } x_I \text{ existir} \\ h(x_F) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, g é a pré-inversa isótona de f. De facto, pela Proposição 1.2, para cada $x \in P$, ou x_I existe ou x_F existe. Mais ainda, existindo, $x_I \in \operatorname{Im} f$ e $x_F \in \operatorname{Im} f$, temos que $h(x_I)$ e $h(x_F)$ estão definidos e

$$\begin{aligned} x = y \in P &\Rightarrow \begin{cases} x_I = y_I & \text{se } x_I \text{ existir} \\ x_F = y_F & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} h(x_I) = h(y_I) & \text{se } x_I \text{ existir} \\ h(x_F) = h(y_F) & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad \text{[porque } h \text{ é aplicação]} \\ &\Rightarrow g(x) = g(y) \end{aligned}$$

ou seja, g está bem definida.

Sejam $x, y \in P$ tais que $x \leq y$. Então:

(i) se x_I e y_I existem, como $x_I = \max\left(x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f\right)$, $y_I = \max\left(y^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f\right)$ e $x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f \subseteq y^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f$, então $x_I \leq y_I$ e uma vez que h é isótona, $h(x_I) \leq h(y_I)$, o que equivale a dizer que $g(x) \leq g(y)$.

(ii) se x_I e y_I não existem, então x_F e y_F existem e estamos perante a situação dual de (i). Assim, $x_F = \min\left(x^{\uparrow} \cap \operatorname{Im} f\right)$, $y_F = \min\left(y^{\uparrow} \cap \operatorname{Im} f\right)$ e $y^{\uparrow} \cap \operatorname{Im} f \subseteq x^{\uparrow} \cap \operatorname{Im} f$, pelo que $x_F \leq y_F$ e $h(x_F) \leq h(y_F)$, ou seja, $g(x) \leq g(y)$.

(iii) se x_I existe e y_I não existe, então y_F existe e

$$\begin{aligned} x \leq y &\Rightarrow \max\left(x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f\right) \leq y \text{ e } y \leq \min\left(y^{\uparrow} \cap \operatorname{Im} f\right) \\ &\Rightarrow x_I \leq y_F \\ &\Rightarrow h(x_I) \leq h(y_F) \\ &\Leftrightarrow g(x) \leq g(y) \end{aligned}$$

(iv) se x_I não existe e y_I existe, então x_F existe e $x_F = \min\left(x^{\uparrow} \cap \operatorname{Im} f\right)$. Se $y_I < x$, então

$$\begin{aligned} y_I \in x^{\downarrow} \text{ e } \ y_I \in \operatorname{Im} f &\Rightarrow y_I \in x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f \\ &\Rightarrow x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f \neq \emptyset, \end{aligned}$$

pelo que x_I existe, uma vez que P é o dual de uma cadeia bem ordenada, o que contraria a nossa hipótese. Logo, $y_I \not< x$, ou seja, $x \leq y_I$. Assim, $y_I \in x^{\uparrow} \cap \operatorname{Im} f$, pelo que $x_F = \min\left(x^{\uparrow} \cap \operatorname{Im} f\right) \leq y_I$ e

$$h(x_F) \leq h(y_I) \Leftrightarrow g(x) \leq g(y).$$

Estamos então em condições de concluir que a aplicação $g \in End(P)$.

Vejamos finalmente que g é pré-inversa de f, i.e., $fgf = f$. Pela Proposição 1.3, sendo P o dual de uma cadeia bem ordenada, então $f(x)_I$ existe sempre e

$$f(x)_I = f(x),$$

pelo que

$$fgf(x) = f(h(f(x)_I)) = f(x)_I = f(x).$$

Estamos então em condições de provar que $End(P)$ é principalmente ordenado.

Uma vez que P é o dual de uma cadeia bem ordenada e

$$f^{+}(x) = \max\{y \in P : f(y) \leq x\}$$

podemos, para cada $x \in \operatorname{Im} f$, escolher $h(x) = f^{+}(x)$ e obtermos uma nova aplicação $f^{*} : P \to P$ definida por

$$f^{*}(x) = \begin{cases} f^{+}(x_F) & \text{se } x_F \text{ existir} \\ f^{+}(x_I) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

que preserva a ordem e é a maior pré-inversa de f. Na verdade, dizer que $h(x) = f^{+}(x)$ equivale a mostrar que, para cada $x \in \operatorname{Im} f$, $f^{+}(x) \in f^{-1}\{x\}$, ou seja,

$$\begin{aligned} f^{+}(x) = z \quad &\Rightarrow \quad z = \max\{y \in P : f(y) \leq x\} \\ &\Rightarrow \quad f(z) = x \\ &\Rightarrow \quad f\left(f^{+}(x)\right) = x \\ &\Rightarrow \quad f^{+}(x) \in f^{-1}\{x\}. \end{aligned}$$

A aplicação f^{*} está portanto bem definida e para $x, y \in P$ tais que $x \leq y$ temos que:

(1) se x_F e y_F existem,

$$\begin{aligned} x \leq y \quad &\Rightarrow \quad x_F \leq y_F \\ &\Rightarrow \quad f^{+}(x_F) \leq f^{+}(y_F) \qquad \left[\, f^{+} \text{ é isótona}\right] \\ &\Leftrightarrow \quad f^{*}(x) \leq f^{*}(y) \end{aligned}$$

(2) se x_F e y_F não existem, então x_I e y_I existem e

$$\begin{aligned} x \leq y \quad &\Rightarrow \quad x_I \leq y_I \\ &\Rightarrow \quad f^{+}(x_I) \leq f^{+}(y_I) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad f^*(x) \leq f^*(y)$$

(3) se x_F não existe e y_F existe, então x_I existe e

$$\begin{aligned} x \leq y & \Rightarrow x_I \leq y_F \\ & \Rightarrow f^+(x_I) \leq f^+(y_F) \\ & \Leftrightarrow f^*(x) \leq f^*(y) \end{aligned}$$

(4) se x_F existe e y_F não existe, então y_I existe e

$$\begin{aligned} x \leq y & \Rightarrow x_F \leq y_I \\ & \Rightarrow f^+(x_F) \leq f^+(y_I) \\ & \Leftrightarrow f^*(x) \leq f^*(y) \end{aligned}$$

pelo que, a aplicação $f^* \in End(P)$.

Vejamos agora que f^* é a maior pré-inversa de f, isto é, $ff^*f = f$ e se $k \in End(P)$ é tal que $fkf \leq f$ então $k \leq f^*$.

De facto, para $x \in P$,

$$\begin{aligned} ff^*f(x) &= ff^*(f(x)) \\ &= \begin{cases} ff^+\left(f(x)_F\right) & \text{se } f(x)_F \text{ existir} \\ ff^+\left(f(x)_I\right) & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= ff^+(f(x)) & \text{[pela proposição 1.3.]} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

e, se $x_I = \max\left(x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f\right)$ existe, então

$$\begin{aligned} f(y) \leq x & \Leftrightarrow f(y) \in x^{\downarrow} \\ & \Leftrightarrow f(y) \in x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \ f(y) \leq \max\left(x^{\downarrow} \cap \operatorname{Im} f\right) \\ &\Leftrightarrow \ f(y) \leq x_I, \end{aligned}$$

pelo que

$$f^{+}(x_I) = \max\{y \in P : f(y) \leq x_I\} = \max\{y \in P : f(y) \leq x\} = f^{+}(x).$$

Assim, para cada $x \in P$,

$$\begin{aligned} fkf(x) \leq f(x) \ &\Rightarrow \ f(kf(x)) \leq f(x) \\ &\Rightarrow \ kf(x) \in \{a \in P : f(a) \leq f(x)\} \\ &\Rightarrow \ kf(x) \leq \max\{a \in P : f(a) \leq f(x)\} \\ &\Rightarrow \ kf(x) \leq f^{+}(f(x)). \end{aligned}$$

Há dois casos a considerar:

(a) x_F existe.

Neste caso, como $x_F \in \operatorname{Im} f$, temos que $x_F = f(z)$ para algum $z \in P$ e

$$\begin{aligned} x \leq x_F \ &\Rightarrow \ k(x) \leq k(x_F) \\ &\Rightarrow \ k(x) \leq kf(z) \leq f^{+}f(z) \\ &\Rightarrow \ k(x) \leq f^{+}(x_F) \\ &\Rightarrow \ k(x) \leq f^{*}(x) \end{aligned}$$

pelo que f^* é a maior pré-inversa de f.

(b) x_F não existe. Consideremos aqui também dois subcasos:

(b_1) x_F não existe porque $x^{\uparrow} \cap \operatorname{Im} f = \emptyset$, ou seja, não existe $a \in P$ tal que $f(a) \geq x$. Denotando por 1 o elemento máximo de P, temos que

$$x^{\uparrow} \cap \operatorname{Im} f = \emptyset \ \Rightarrow \ \nexists a \in P : f(a) \geq x$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \; f(1) \ngeq x \\
&\Rightarrow \; f(1) < x \\
&\Rightarrow \; 1 \in \{a \in P : f(a) \leq x\} \\
&\Rightarrow \; 1 = f^{+}(x)
\end{aligned}
$$

e

$$k(x) \leq 1 = f^{+}(x) = f^{+}(x_I) = f^{*}(x)$$

donde concluímos que f^{*} é a maior pré-inversa de f.

(b_2) $x^{\uparrow} \cap \operatorname{Im} f \neq \emptyset$, e x_F não existe porque não existe $\min\left(x^{\uparrow} \cap \operatorname{Im} f\right)$. Neste caso, $x \leq \bigwedge \{f(y) : f(y) \geq x\}$. Repare-se que $\bigwedge \{f(y) : f(y) \geq x\}$ existe, pois sendo P o dual de uma cadeia bem ordenada, a junção de um elemento mínimo, transforma-a numa cadeia completa.

Mais ainda, se x_F não existe, então existe $x_I \in \operatorname{Im} f$ e $x_I \leq \bigwedge \{f(y) : f(y) \geq x\}$. Logo, existe $f^{+}\left(\bigwedge \{f(y) : f(y) \geq x\}\right)$.

Por outro lado, de

$$
\begin{aligned}
z \leq f^{+}\left(\bigwedge \{f(y) : f(y) \geq x\}\right) \;&\Leftrightarrow\; f(z) \leq \bigwedge \{f(y) : f(y) \geq x\} \\
&\Leftrightarrow\; z \leq \bigwedge \left\{f^{+}f(y) : f(y) \geq x\right\}
\end{aligned}
$$

concluímos que

$$f^{+}\left(\bigwedge \{f(y) : f(y) \geq x\}\right) = \bigwedge \left\{f^{+}f(y) : f(y) \geq x\right\}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
k(x) &\leq k\left(\bigwedge \{f(y) : f(y) \geq x\}\right) \quad \left[\text{porque } k \in End(P) \text{ e } x \leq \bigwedge \{f(y) : f(y) \geq x\}\right] \\
&\leq \bigwedge \{kf(y) : f(y) \geq x\} \\
&\leq \bigwedge \left\{f^{+}f(y) : f(y) \geq x\right\}
\end{aligned}
$$

$$= \quad f^{+}\left(\bigwedge\{f(y) : f(y) \geq x\}\right).$$

Mais ainda, se $f(z) \leq \bigwedge\{f(y) : f(y) \geq x\}$, temos necessariamente que $f(z) \leq x$. De facto, se $f(z) > x$, $x_F = \min\left(x^{\uparrow} \cap \operatorname{Im} f\right)$ existiria, o que contradiz a nossa hipótese.

Logo,

$$f^{+}\left(\bigwedge\{f(y) : f(y) \geq x\}\right) = f^{+}(x) = f^{+}(x_I) = f^{*}(x).$$

Portanto, $k(x) \leq f^{*}(x)$.

Acabámos de provar que em qualquer dos dois casos $k(x) \leq f^{*}(x)$, pelo que $k \leq f^{*}$. Consequentemente, $End(P)$ é principalmente ordenado. $\square$

Convém salientar que, ao contrário dos casos em que P é uma anti-cadeia, N_α ou $K_{\alpha,\beta}$, neste caso não faz sentido considerar a aplicação f_{β_0,β_1}, definida por

$$f_{\beta_0,\beta_1}(x) = \begin{cases} \beta_1 & \text{se } x = \beta_0 \\ x & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

pois esta não é isótona. De facto, supondo que f_{β_0,β_1} preserva a ordem e, considerando o caso de $x < y$ com $y = \beta_0$, temos que x pode ser um elemento minimal qualquer e

$$x = f_{\beta_0,\beta_1}(x) < f_{\beta_0,\beta_1}(y) = f_{\beta_0,\beta_1}(\beta_0) = \beta_1,$$

ou seja, $x < \beta_1$ qualquer que seja x, o que é absurdo pois $\beta_1 \neq \beta_0$ e β_0 é o único elemento maximal maior que todos os elementos minimais. O absurdo resultou de supormos que $f_{\beta_0,\beta_1} \in End(N_{\alpha,\beta})$. Logo, $f_{\beta_0,\beta_1} \notin End(N_{\alpha,\beta})$.

Bibliografia

[1] Adams, M. E. e Gould, Matthew - “Posets whose monoids of order-preserving maps are regular”, Order, 6, 1989, 195-201.

[2] Blyth, T. S. - “On the endomorphism semigroup of an ordered set”, Glasgow Math. J., 37, 1995, 173-178.

[3] Clifford, A. H. e Preston, G. B. - “The algebraic theory of semigroups”, Vol 1, Amer, Mathematical Society, Providence, 1961.

[4] Davey, B. A. e Priestley, H. A. - “Introduction to lattices and order”, Cambridge Mathematical Textbooks, 1990.

[5] Hrbacek, K. e Jech, T. - “Introduction to set theory”, Pure and Applied Mathematics, Second Edition.

[6] Pinto, G.A. - “Semigrupos regulares principalmente ordenados”, Lisboa, 1992.