Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria Manuela Ferreira da Costa

A utilização de materiais manipuláveis e GeoGebra no ensino e aprendizagem do tema Lugares Geométricos numa turma do 9º ano

janeiro de 2017

A utilização de materiais manipuláveis e GeoGebra no ensino e aprendizagem do tema Lugares Geométricos numa turma do 9º ano
Maria Manuela Ferreira da Costa
UMinho|2017

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria Manuela Ferreira da Costa

A utilização de materiais manipuláveis e GeoGebra no ensino e aprendizagem do tema Lugares Geométricos numa turma do 9º ano

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho realizado sob a orientação do
Doutor José António Fernandes

janeiro de 2017

DECLARAÇÃO

Nome: Maria Manuela Ferreira da Costa

Endereço eletrónico: manuela.costa@hotmail.com

Telefone: 961863326

Número do Bilhete de Identidade: 14253907

Título do Relatório:

A utilização de materiais manipuláveis e GeoGebra no ensino e aprendizagem do tema Lugares Geométricos numa turma do 9º ano

Supervisor:

Doutor José António Fernandes

Ano de conclusão: 2017

Mestrado em Ensino de Matemática no 3° Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário.

Universidade do Minho, 31 de janeiro de 2017

Assinatura

AGRADECIMENTOS

O relatório que agora se apresenta resulta de um longo percurso, no qual participaram algumas pessoas às quais quero prestar o meu profundo agradecimento.

Ao meu orientador, Professor Doutor José António Fernandes, pela dedicação, interesse e disponibilidade na orientação deste estudo, pelo esclarecimento das dúvidas que foram surgindo e pelas sugestões para as colmatar, bem como pela amizade com que me orientou.

Ao meu orientador, Mestre Paulo Ferreira Correia, por ter-se sempre mostrado interessado na realização deste estudo, bem como por todas as suas ideias e sugestões que tornaram este estudo mais rico.

À Carla, a minha colega de estágio, por todo o companheirismo, por todas as sugestões e apoio, acima de tudo, por ter partilhado comigo esta magnífica experiência.

Aos alunos da turma em estudo, pela forma simpática com que me acolheram e pela abertura a novas experiências nas suas aulas de Matemática.

Aos professores e aos assistentes operacionais da escola onde decorreu o estudo que sempre estiveram disponíveis a ajudar.

Aos meus pais e à minha irmã, sem os quais esta experiência não teria sido possível. Agradeço o apoio e encorajamento demonstrados e por fazerem de mim a pessoa em que hoje me tornei.

À Marta, por me ter sempre ajudado quer na preparação dos materiais, quer no apoio que sempre me deu, fazendo-me acreditar sempre que eu era capaz.

À Catarina e à Margarida pela ajuda nas traduções.

Aos meus amigos, pela compreensão das minhas ausências, pelos momentos de descontração proporcionados e pela amizade que me sustenta nas horas difíceis.

A todos o meu sincero obrigada.

A UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS E GEOGEBRA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DO TEMA LUGARES GEOMÉTRICOS NUMA TURMA DO 9°ANO

Maria Manuela Ferreira da Costa
Mestrado em Ensino de Matemática no 3° ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário
Universidade do Minho, 2017

RESUMO

O relatório que aqui se apresenta trata de uma investigação de uma intervenção de ensino centrada na compreensão da influência que os materiais manipuláveis e o GeoGebra podem ter na apropriação dos conteúdos do tema Lugares Geométricos, do nono ano de escolaridade. Neste sentido, o estudo desenvolveu-se em torno dos três objetivos seguintes: 1. Diagnosticar as aprendizagens anteriores dos alunos sobre os conceitos de circunferência, mediatriz e bissetriz; 2. Identificar as dificuldades dos alunos na determinação de Lugares Geométricos e 3. Avaliar em que medida os materiais manipuláveis e o GeoGebra contribuíram para os alunos ultrapassarem as suas dificuldades.

Limitar o ensino da Geometria, em particular dos Lugares Geométricos, ao uso do material de desenho e material de escrita faz com que esses conceitos geométricos sejam confundidos com as suas construções, não destacando certas propriedades que podem ser salientadas pelo uso de outros materiais didáticos. Dar aos alunos uma experiência de ensino diversificada, levando-os a pensar nos conceitos geométricos como objetos matemáticos, com propriedades, é dar sentido a esses mesmos conceitos. Os materiais manipuláveis e os *software* proporcionam aos alunos essas experiências diversificadas e dão oportunidade a estes de poder observar, manipular, conjeturar e testar. Os materiais, aliados a tarefas desafiantes e motivadoras, levam a que o aluno se transforme em agente ativo da sua aprendizagem, despertando o espirito investigativo e aumentando os níveis de motivação.

Assim, nesta investigação procura-se primeiro determinar as dificuldades dos alunos na determinação dos Lugares Geométricos e, por fim, verificar se o uso de materiais levou os alunos a ultrapassar as dificuldades. No que diz respeito às estratégias de investigação e avaliação da ação, recorreu-se à analise do teste diagnóstico, das tarefas realizadas pelos alunos durante a intervenção, das gravações de aulas, da ficha por partes e do questionário final.

Os resultados obtidos sugerem que os alunos, inicialmente, não reconheciam os Lugares Geométricos dadas as suas propriedades, revelando dificuldades no uso de escalas e na manipulação dos materiais didáticos. Após a intervenção, a maioria dos alunos revelou saber determinar os lugares geométricos dadas as suas propriedades, mesmo quando envolviam escalas.

Palavras-chave: lugares geométricos; materiais manipuláveis; GeoGebra; 9.º ano.

THE USE OF MATHEMATICAL MANIPULATIVES AND GEOGEBRA IN THE TEACHING AND LEARNING OF GEOMETRY PLACES TOPIC ON A 9TH GRADE CLASS

Maria Manuela Ferreira da Costa
Master in Mathematics Teaching to the 3rd Cycle of Basic School and Secondary School
University of Minho, 2017

ABSTRACT

The presented report is about an investigation concerning a teaching intervention focused on the understanding of the weight that mathematical manipulatives and GeoGebra may have in the appropriation of the contents of the Geometry Places topic on the 9th grade. The study developed around three main objectives: 1st Diagnose what students know about the concepts of circumference, bisector and perpendicular bisector; 2nd Identify why is determining Geometric Places difficult for students; 3rd Evaluate in which way mathematical manipulatives and GeoGebra have helped students overcome their difficulties.

To confine the geometry teaching, in particular of Geometry Places, to the use of drawing and writing materials makes geometric concepts to be confused with their constructions. Furthermore, these old approach do not highlight certain proprieties, contrary to other didactic materials. To give to the students a diversified experience and making them think in geometric concepts such as mathematic objects with proprieties means giving sense to these concepts. The manipulable materials and software provide to the students diversified experiences and give them the chance to watch, manipulate, conjecture and test. Materials associated to challenging tasks make the students proactive in their leaning process, developing their skills in investigation and improving their motivation.

That being said, this investigation aims at first to determine why is settling Geometry Places difficult for students, and then, see if the use of the referred materials helped students overcome their difficulties. Regarding the strategies related to the investigation and evaluation of this objective, we analyzed some diagnostic tests, tasks done by the students during the intervention, lesson records, specific questions and final inquiry.

The results we got suggest that initially, the students didn´t recognize the Geometry Places given their specific properties, reveling some difficulties in the use of scales and handling the learning tools. After this intervention, the majority of them revealed to know how to properly determine those geometrical places according to their specific properties, even using scales.

Keywords: geometry places topic; mathematical manipulatives; GeoGebra; 9th grade.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentado o tema sobre o qual se desenvolve este estudo, bem como a sua pertinência, finalidades e objetivos a atingir. Por fim, é realizada uma breve descrição da estrutura do relatório para que se possa entender como este está organizado.

1.1. Tema, pertinência, finalidade e objetivos

Desde a antiguidade, em que a Matemática se tornou importante, o homem recorreu à ajuda de materiais concretos para o auxiliar nas atividades matemáticas. Segundo Vale (1999), o uso de materiais manipuláveis no ensino de Matemática remonta ao aparecimento do sistema de numeração indo-árabe na Europa. Desde então, a utilização de materiais manipuláveis tem sido recomendada por vários pedagogos e pelos programas oficiais de Matemática de todos os níveis de escolaridade.

Por outro lado, a utilização das novas tecnologias na sala de aula tem contribuído para uma reestruturação do método tradicional de ensino. Neste trabalho recorrer-se-á ao GeoGebra, que é um *software* livre criado por Markus Hohenwarter, no âmbito do projeto da sua dissertação de mestrado, e de que foi lançada a sua primeira versão em 2001 (Andrade, 2012). Segundo o sítio oficial, o "GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, folhas de cálculo, gráficos, estatística e cálculo, tudo numa aplicação fácil de utilizar". Entre outras vantagens, esta aplicação permite apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si (Nascimento, 2012). Devido às suas potencialidades, rapidamente ganhou popularidade no ensino e aprendizagem da Matemática em todo o mundo.

Na realidade de ensino que vivemos, voltada na maioria das vezes para a execução de algoritmos e memorização de fórmulas referentes a conteúdos de Geometria, a utilização de atividades de âmbito exploratório e investigativo com o uso de materiais didáticos no ensino de Geometria pode ter espaço amplo de aplicação no campo educacional (Pereira, 2011). Pereira (2011) afirma que estes materiais "devem ser alvos de uma reflexão mais aprofundada no sentido de comprovar a sua aceitação no ensino e o nível de aprendizagem favorecido por tal abordagem" (p. 3).

A utilização de Materiais Manipuláveis e do GeoGebra no ensino e aprendizagem do tema Lugares Geométricos numa turma do 9.º ano foi o tema escolhido para desenvolver no Projeto de Intervenção Pedagógica Supervisionada. O tema Lugares Geométricos, envolvendo pontos notáveis de triângulos, é um subtema do domínio matemático Geometria e Medida, do 9.º ano do atual Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação e Ciência, 2013). Neste tema recordam-se os conceitos de mediatriz, bissetriz e circunferência, agora como lugares geométricos, e define-se e constrói-se o incentro, o circuncentro, o ortocentro e o baricentro de um triângulo, incluindo as suas propriedades.

É do conhecimento geral que os alunos revelam grandes dificuldades na disciplina de Matemática, tendo-se constatado que muitos alunos do ensino básico apresentam dificuldades na aquisição de conhecimentos ligados à Geometria (Carneiro, 2005). O fato de alguns tópicos da Geometria apresentarem um elevado grau de abstração, que muitas vezes os estudantes não conseguem superar, salienta a necessidade de se estabelecerem alternativas de estudo aceitáveis para os alunos (Pereira, 2011). Assim, existe uma necessidade de concretizar os conhecimentos da Geometria para que depois consigam construir as suas abstrações. A este propósito, o Ministério da Educação numa das suas publicações, em 2011, tendo em vista o estudo do tema Geometria e Medida, afirma que:

> À medida que os alunos classificam, criam, desenham, modelam, traçam, medem ou constroem, a sua capacidade de visualização das relações geométricas desenvolve-se. Em simultâneo, estão a aprender a raciocinar e a formular, testar e justificar conjeturas sobre essas relações. (Ministério da Educação, 2011, p. 20)

Assim, tendo em conta a importância do uso de materiais e de tecnologias no ensino da Matemática e sabendo que os alunos portugueses revelam dificuldades no domínio matemático Geometria e Medida, estabeleci os três seguintes objetivos de investigação para o projeto:

1. Diagnosticar as aprendizagens anteriores dos alunos sobre os conceitos de circunferência, mediatriz e bissetriz.

2. Identificar as dificuldades dos alunos na determinação de Lugares Geométricos.

3. Avaliar em que medida os materiais manipuláveis e o GeoGebra contribuíram para os alunos ultrapassarem as suas dificuldades.

1.2. Estrutura do Relatório

O relatório de estágio, que aqui se apresenta, contempla cinco capítulos subdivididos em vários subcapítulos.

No capítulo I, Introdução, apresenta-se o tema de estudo, a sua pertinência à luz do ensino e aprendizagem da Matemática, as suas finalidades e os objetivos que o orientaram.

No capítulo II, Enquadramento Teórico, justifica-se a relevância da investigação, à luz da literatura existente. Primeiramente, analisa-se a história e a importância da Matemática e da Geometria na formação do individuo. De seguida, discute-se qual o impacto dos materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem. Neste subcapítulo é analisado, em particular, o material de desenho e o origami, pois são uns dos materiais que foram centrais no estudo realizado. Por fim, focam-se as potencialidades do computador ao serviço da educação e as suas implicações no ensino da Geometria, abordando em particular o *software* GeoGebra.

No capítulo III, Enquadramento Contextual, dá-se a conhecer o contexto onde foi implementado o estudo e apresenta-se o plano geral da intervenção, onde se dá a conhecer as metodologias de ensino e aprendizagem e as estratégias de investigação e avaliação da ação.

No capítulo IV, Intervenção de Ensino, divide-se em quatro secções, e nele apresentam-se os resultados recolhidos durante os três momentos da intervenção, o antes, o durante e o após, de modo a dar resposta aos objetivos delineados para o projeto. Para tal, são analisadas as produções escritas dos alunos, os diálogos ocorridos durante a intervenção, as gravações das aulas de intervenção e os instrumentos de avaliação.

Por fim, no capítulo IV, Conclusões, Implicações, Recomendações e Limitações, procura-se responder aos objetivos delineados para este estudo e ainda são abordadas algumas implicações deste estudo para o ensino e aprendizagem. Por último, são apresentadas algumas recomendações de futuros estudos que emergem do presente trabalho.

CAPÍTULO II

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

De modo a encontrar referências, tomar posições e encontrar caminhos para a realização do projeto, foi determinante recorrer à literatura já existente. Assim, este capítulo pretende dar a conhecer alguma da literatura que orientou o meu projeto e que considero essencial consultar para quem pretenda lecionar os lugares geométricos.

Deste modo, começo por analisar um pouco da história da Matemática e da Geometria e a sua importância para a formação do aluno. De seguida, debruço-me sobre os materiais manipuláveis analisando qual o seu impacto no processo de ensino e aprendizagem. Ainda neste subcapítulo analiso, em particular, o material de desenho e o origami. Por fim, irei centrar-me sobre as potencialidades do computador ao serviço da educação e as suas implicações no ensino da Geometria, abordando em particular o *software* GeoGebra.

2.1. O Ensino e a aprendizagem da Geometria: os lugares geométricos

Etimologicamente, “matemática” deriva da palavra grega “matemathike”, em que “máthema” significa compreensão, explicação, ciência, conhecimento, aprendizagem e “thike” significa arte, ou seja, a Matemática é a arte ou a técnica de explicar, de conhecer, de entender (Dicionário Etimológico). Na Grécia Antiga a Matemática englobava os conteúdos que havia para ensinar, já que o termo Matemática significava, na sua raiz, aquilo que podia ser ensinado, embora o que nessa altura se ensinasse não fosse o que hoje se entende por Matemática (Marques, 2008).

A Matemática é, desde sempre, parte do currículo escolar e sempre ocupou, ao longo dos tempos, um lugar de relevo no currículo. Esta disciplina escolar assumiu-se como uma ciência que lida com objetos e relações abstratas, e, para além disso, é uma linguagem que nos permite elaborar uma representação e compreensão desse mundo, e ainda, um instrumento que proporciona formas de agir sobre ele para resolver problemas que se nos deparam e de prever e controlar os resultados da ação que realizamos (Ministério da Educação, 2007).

Segundo o Programa de Matemática do Ensino Básico, de 2007, a Matemática constituiu-se como domínio autónomo de estudo dos números e operações, das formas geométricas, das estruturas e regularidades, da variação do acaso e da incerteza, onde a resolução e formulação de problemas, a formulação e teste de conjeturas, a generalização e a demonstração, e a elaboração e refinamento de modelos são algumas das suas dimensões principais. Aspetos como a abstração, a formalização, a argumentação lógica e o raciocínio demonstrativo têm nela um lugar de relevo, sobretudo na fase final de organização, sistematização e conclusões. Contudo, no seu desenvolvimento criativo, a atividade matemática convoca recursos e capacidades cognitivas diversas, como o raciocínio plausível, a imaginação e a intuição, necessárias à produção de conhecimento matemático (Ministério da Educação, 2007). A Matemática constitui um património cultural da humanidade e um modo de pensar, sendo a sua apropriação um direito de todos. Em consequência, as crianças e jovens devem ter a possibilidade de contatar com as ideias e os métodos fundamentais da Matemática, apreciando o seu valor e a sua natureza e desenvolver a capacidade de usar a Matemática para analisar e resolver situações-problema, para raciocinar e para comunicar (Ministério da Educação, 2001).

A Matemática foi-se desenvolvendo ao longos dos tempos quer por estímulos internos, resolvendo problemas próprios, quer também por solicitações externas, resolvendo problemas que durante diversos períodos da história se foram colocando por outras ciências. Estes estímulos externos foram um motor de desenvolvimento da própria Matemática e fez dela uma ciência com grande reconhecimento. Hoje está presente em todos os ramos da ciência e tecnologia, em diversos campos da arte, em muitas profissões e setores da atividade de todos os dias.

Desde modo, talvez mais do que nunca, se pede às escolas uma formação sólida em Matemática, a qual deve

> contribuir para o desenvolvimento pessoal do aluno, deve proporcionar a formação matemática necessária a outras disciplinas e ao prosseguimento dos estudos — em outras áreas e na própria Matemática — e deve contribuir, também, para sua plena realização na participação e desempenho sociais e na aprendizagem ao longo da vida. (Ministério da Educação, 2007, p. 3)

O programa curricular de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico esta é dividido em cinco grandes domínios, que são: Números e Operações; Geometria e Medida; Funções, Sequências e Sucessões; Álgebra; Organização e Tratamento de Dados (Ministério da Educação e Ciência, 2013).

A Geometria, assim como a Matemática, foi inventada há muitos anos atrás impulsionada pelas necessidades das sociedades. Boyer afirmou que Heródoto e Aristóteles propunham a sua origem na civilização egípcia, mas eles próprios acreditavam que a Geometria possuía raízes mais antigas (Monteiro, De Camargo, Enes & Pretto, 2012).

A Geometria e a Medida são domínios do Currículo de Matemática fundamentais para o dia-a-dia dos cidadãos, contudo, a escola não tem dado a devida atenção nem explorado a sua enorme potencialidade.

> A geometria é normalmente deixada para os finais dos anos lectivos e tratada a partir das definições, dando pouco espaço à acção dos alunos na compreensão dos conceitos geométricos. A medida reduz-se, tradicionalmente, à aplicação de fórmulas e realização de cálculos. (Breda, Serrazina, Menezes, Sousa & Oliveira, 2011, p. 7)

Este ensino traduz a Geometria apenas através de modelos prontos, sem proporcionar aos alunos um momento em que eles construam conhecimento (Monteiro et al., 2012). Esta situação pode ter tido origem na década de 60, altura em que o ensino da Matemática foi fortemente influenciado pelo Movimento das Matemáticas Modernas, o qual

> relegou para segundo plano esta temática em favor de outros assuntos, de que se destacaram a teoria de conjuntos, a álgebra abstracta e a lógica. A matemática passou a ser vista e apresentada aos alunos numa perspectiva estrutural. (Fernandes, 2006, p. 3)

Desde cedo, o Movimento das Matemáticas Modernas foi alvo de críticas a nível internacional por várias personalidades (Gonçalves, 2007), tendo sido abandonado por alguns países. Nos Estados Unidos, nos anos 70, tais críticas cristalizaram-se no chamado Movimento *Back to Basics* e incidiram mais sobre ensino primário, as quais

> assentavam sobretudo no excessivo uso do simbolismo, na ausência de ligação com o Mundo Real, na relevância dada à Teoria dos Conjuntos na Matemática Elementar e na visão abstrata e rigorosa que ocultava a verdadeira essência da Matemática. (Gonçalves, 2007, pp. 144-145)

Após este período, que levou quase ao desaparecimento da Geometria no currículo de Matemática, esta voltou a ganhar espaço e visibilidade no nosso país com a reforma curricular de Matemática dos anos 90, embora tenha mantido pouca expressão no nível curricular em ação, isto é, na sala de aula, dadas as experiências escolares dos professores da altura, marcadas pela recessão da Geometria (Rodrigues & Bernardo, 2011).

Atualmente, as orientações curriculares atribuem um lugar de destaque à Geometria, sublinhando a importância do desenvolvimento da visualização e do raciocínio espacial, enquanto propósito principal do ensino da Geometria (Rodrigues & Bernardo, 2011).

A Geometria apresenta-se como um domínio propício para que os alunos desenvolvam a capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender, objetivos fundamentais do ensino da

Matemática (Pavanello, 2004). Este domínio oferece condições para que níveis sucessivos de abstrações possam ser alcançados (Pavanello, 2004).

> O ensino de geometria pode contribuir também pra a formação do aluno favorecendo, como aponta Wheeler (1981, p. 352), "um tipo particular de pensamento – buscando novas situações, sendo sensível aos seus impactos visuais e interrogando sobre eles". Ela permite o desenvolvimento da "arte da especulação" traduzida na questão "o que aconteceria se...", que expressa o estilo hipotético-dedutivo do pensamento geométrico. (Pavanello, 2004, p. 4)

Segundo o NCTM (2007), os conteúdos geométricos mostram-se bastante úteis nas representações e nas resoluções de problemas, constituindo um contexto natural para o desenvolvimento das capacidades de raciocínio e argumentação. "As crianças estão melhor preparadas para todas as tarefas escolares quando adquirem instrumentos de pensamento e competências geométricas e espaciais" (Breda et al., 2011, p.13). Permite ainda estabelecer conexões entre os diferentes domínios da Matemática, auxiliando na compreensão de gráficos, frações, áreas e até na leitura de mapas. A Geometria acompanha as crianças ao longo do seu crescimento, estando presente no seu quotidiano, na arte, na arquitetura, no design, entre outros (Esteves, 2010).

O subtópico escolhido para trabalhar com os alunos foi Lugares Geométricos, nos quais se incluíam também os Pontos Notáveis do Triângulo. Hoje, entende-se por Lugar Geométrico um conjunto de pontos do plano ou do espaço com uma certa propriedade. Oliveira e Araujo (2012), num artigo sobre o tema afirmam que este representa um conteúdo evitado em livros de Geometria, ainda que constitua um tema que pode enriquecer o seu estudo. "Entender as propriedades geométricas que estão atreladas a uma determinada figura e como elas se relacionam, pode possibilitar um entendimento de conceitos geométricos..." (Oliveira & Araujo, 2012, p. 211).

Embora ainda hoje se questione qual deverá ser o currículo de Geometria, não havendo um comummente aceite, ao contrário de domínios como a Aritmética, as opções metodológicas parecem reunir um maior consenso. Matos e Serrazina (1996) afirmam que existem fortes linhas de concordância de que a Geometria escolar passa por um reforço da intuição espacial com recurso à utilização de computadores e por manipulação de figuras elementares, com a consequente investigação de algumas das suas propriedades. Acrescentam ainda que

> A indução e a dedução lógica como meios privilegiados de aprendizagem da Geometria estão a decrescer de importância e aparecem outras estratégias centradas

> na experimentação, no trabalho de grupo e na negociação social de significado dos termos e propriedades geométricas. (Matos & Serrazina, 1996, p. 265)

Monteiro et al. (2012) afirmam que "A geometria permite o uso de muitas metodologias para o seu ensino, seja através do uso de tecnologias, de que o Software Geogebra é um exemplo, ou também o uso de jogos, oficinas com materiais manipuláveis, entre outros" (p. 1).

Gomes e Vergnaud realizaram um estudo sobre a resolução de problemas geométricos usando dois tipos de materiais, o material de desenho e *software* de Geometria Dinâmica, e concluíram que o ensino da Geometria não se deve limitar a um único recurso, já que com cada recurso se podem explorar diferentes propriedades dos mesmos conceitos matemáticos, quebrando assim com o mito de que os *software* vieram para substituir os recursos anteriormente utilizados (Esteves, 2010). Assim, defende-se uma metodologia com recurso a diversos materiais de modo a que os alunos possam ter a oportunidade de analisar uma vasta gama de propriedades que caracterizam os conceitos geométricos.

Deste modo, na minha intervenção pedagógica decidi aliar o uso de materiais manipuláveis com a utilização de um *software* de Geometria Dinâmica, o GeoGebra, podendo assim proporcionar aos alunos experiências de ensino diversificadas, explorar as potencialidades de cada recurso e explorar propriedades variadas dos Lugares Geométricos. Nas secções seguintes analisaram-se as potencialidades que cada recurso nos pode oferecer.

2.2. Os Materiais Manipuláveis

Dada a importância da Matemática em geral e da Geometria em particular, vista na secção anterior, e dado o insucesso dos alunos face à disciplina que se verifica ao longo dos anos, torna-se fundamental repensar as práticas utilizadas nas aulas e tentar aproximá-las o mais possível dos alunos.

A utilização de materiais manipuláveis em sala de aula pode ser, desde que devidamente conduzida pelo professor, uma forma de facilitar a aprendizagem dos alunos. "Estes materiais podem tornar as aulas de matemática mais dinâmicas e compreensíveis, uma vez que permitem a aproximação da teoria matemática da constatação na prática, por meio da ação manipulativa" (Rodrigues & Gazire, 2012, p. 188).

Segundo Reys (1971), os materiais manipuláveis são "objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia" (citado em Matos & Serrazina, 1996, p. 193). Assim, “Os materiais manipuláveis apelam aos vários sentidos e são caracterizados por um envolvimento físico dos alunos numa situação de aprendizagem ativa” (Matos & Serrazina, 1996, p. 193).

Vale (1999) também caracteriza o material manipulável como sendo todo “o material concreto, de uso comum ou educacional, que permita, durante uma situação de aprendizagem, apelar para os vários sentidos dos alunos, devendo ser manipulados, e que se caracterizam pelo envolvimento activo dos alunos, por exemplo o ábaco, geoplano, folhas de papel, etc.” (p.291).

Os materiais manipuláveis são o exemplo de um tipo de recurso, entre outros, que pode ser usado no ensino. A esse conjunto de recursos chamamos material didático. Graells (2000) distingue recurso educativo de material didático. Assim, ele afirma que quase tudo o que pode ser utilizado para facilitar a aprendizagem, se for utilizado num contexto de formação específica, pode ser considerado um recurso educativo. Isto é, os recursos educativos são todos os materiais que são usados de modo a facilitar o processo de ensino-aprendizagem. Já o material didático considera serem os materiais criados especificamente para facilitar a aprendizagem. Deste modo, para este autor, um material didático pode ser um recurso educativo, mas o contrário já não acontece.

Para Graells (2000) os materiais didáticos podem classificar-se em três grandes grupos, cada um dos quais inclui diversos subgrupos.

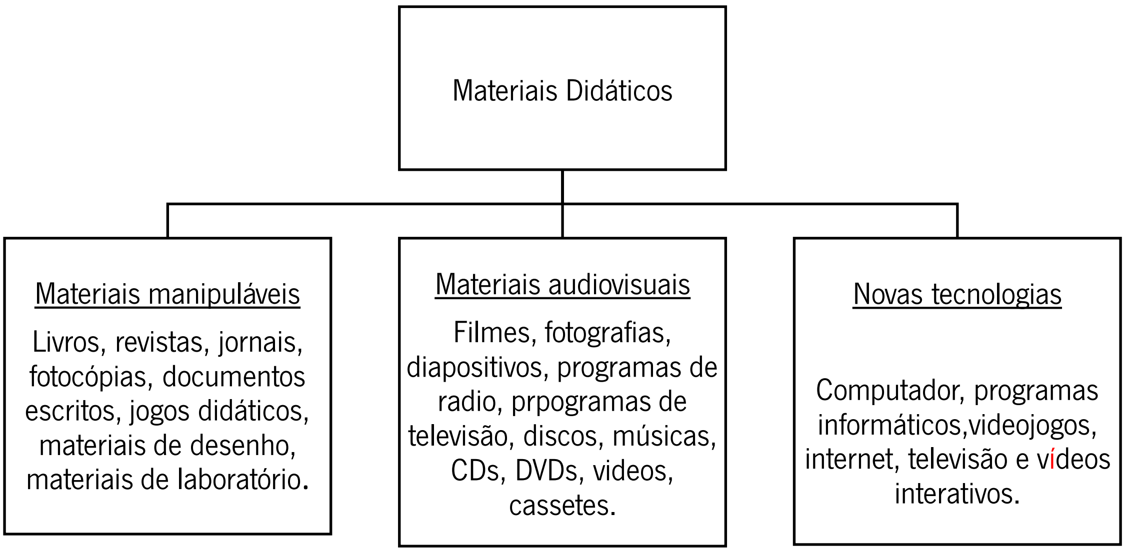


Figura 1. Tipos de materiais didáticos adaptado de Graells (2000).

Assim, Graells (2000) divide os materiais didáticos em materiais manipuláveis, materiais audiovisuais e novas tecnologias. Dos materiais manipuláveis fazem parte os impressos, os materiais de desenho, os jogos e os materiais de laboratório, isto é, materiais que desde sempre estiveram ligados ao ensino-aprendizagem e que apelam à manipulação e ao toque. Dos materiais audiovisuais, como o próprio nome indica, fazem parte todos os audiovisuais que podem ser usados no ensino, como filmes, vídeos, músicas, diapositivos, entre outros. Já nas novas tecnologias temos os materiais que recentemente foram desenvolvidos para auxiliar a aprendizagem dos alunos e que vieram marcar uma nova era no ensino, dos quais fazem parte o computador, a internet e os *software*. Na minha intervenção utilizei os materiais manipuláveis, dos quais fazem parte o material de desenho, e um *software* de geometria dinâmica.

Segundo Botas (2008), a utilização de materiais didáticos na sala de aula é defendida por diversos autores.

> A importância dos materiais didácticos é fortemente veiculada por diversos autores que salientam que os professores não podem apenas recorrer a apresentações no quadro preto para o ensino da matemática. O poder desta área de conhecimento desenvolve-se nos alunos através da descoberta, do entendimento ou consolidação de conceitos através do auxílio de diversos materiais (calculadoras, computadores, materiais manipulativos, entre outros). (Botas, 2008, p. 34)

Nesta linha, também Lorenzato (2006) afirma que muitos pedagogos, nos últimos séculos, evidenciaram a importância do apoio visual ou visual-tátil como facilitador da aprendizagem. Comenius foi o primeiro a enfatizar a relevância da manipulação de materiais na Educação com sugestões sobre a construção de modelos para ensinar Geometria e, após este, outros pedagogos passaram a utilizar estes recursos, como Locke (1632-1704), Rousseau (1712-1778), Pestalozzi (1746-1827), Froebel (1782-1852), Claparède (1873-1940) e Montessori (1870-1952) (Ferreira, Sanches, Cardoso & Vecchi, 2010). Também da teoria de Piaget resulta que o uso de materiais concretos deve ser o ponto de partida para ensinar Matemática, sendo o uso desses materiais a primeira etapa da exploração dos conceitos matemáticos abstratos (Ferreira et al., 2010).

Entre as vantagens da utilização de materiais manipuláveis, Leite (2008, p. 20) refere que tal "promove a ampliação da autonomia dos educandos, pois lhes torna possível discorrer, discutir, questionar, reverberar sobre ideias concernentes ao assunto em pauta; organizar hipóteses e procedimentos para enfrentar novas situações para formar um ser humano crítico e atuante na sociedade".

Estudos comparativos entre o ensino tradicional e o ensino recorrendo à utilização de materiais, citados em Botas (2008), concluíram que a utilização de materiais manipuláveis produziu maiores rendimentos em todas as idades, bem como em todos os anos de escolaridade.

Adicionalmente, quando utilizados durante períodos mais longos, os materiais tornaram-se mais eficazes.

Num estudo realizado por Pires (1995), também os alunos reconheceram vantagens na utilização de materiais manipuláveis:

> relativamente à utilização de materiais manipulativos na aprendizagem matemática, os participantes consideraram que essa utilização: (a) proporcionou aprendizagens mais significativas e mais próximas da realidade; (b) favoreceu a comunicação e partilha dos raciocínios e processos desenvolvidos; e (c) permitiu o desenvolvimento de atitudes mais positivas em relação aos outros e a si próprios, estimulando o trabalho em grupo e a autoconfiança. (p. 3)

Outros estudos mais recentes destacaram que o uso de materiais em sala de aula possibilita ao aluno a experimentação, identificação de propriedades geométricas, classificação, seleção e movimentação de possíveis peças do material e apropriação de vocabulário específico relacionado com as formas geométricas elementares (Pereira, 2011). A partir dos Materiais Manipuláveis torna-se possível observar, manipular e explorar objetos reais ou próximos do real, possibilitando a construção e reconstrução, além de proporcionar a formação de conceitos geométricos (Pereira, 2011).

A organização internacional National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), interessada no ensino e na aprendizagem da Matemática, através das suas publicações tem tentado influenciar a renovação do ensino da Matemática por todo o mundo, sendo notórias as diversas recomendações quanto à utilização dos materiais. Por exemplo, as Normas Profissionais para o Ensino da Matemática (NCTM, 1994) acentuam a ideia de que os professores devem valorizar e encorajar a utilização de vários instrumentos e que devem desencorajar o ensino da Matemática associado apenas ao papel e lápis, realçando o uso de uma variedade de instrumentos como a calculadora, computadores e modelos concretos.

> Quer trabalhando individualmente, quer trabalhando em pequeno grupo ou com toda a turma, os alunos devem encontrar, desenvolver e usar ideias matemáticas e aptidões no contexto de problemas ou situações autênticas. Ao fazer isto, devem desenvolver a capacidade de usar uma variedade de recursos e ferramentas, como calculadoras e computadores e modelos concretos, figurativos e metafóricos. (NCTM, 1994, pp. 21-22)

A manipulação dos materiais didáticos torna-se pertinente pois segundo Rodrigues e Fernandes (1995),

> num mundo em evolução cada vez mais rápida, é preciso que os alunos investiguem, questionem, construam conhecimentos, utilizem os novos meios tecnológicos

> disponíveis e, sobretudo, ganhem autonomia no seu processo de aprendizagem adquirindo, assim, a capacidade de resposta às situações novas que irão encontrar no futuro. (citado em Gomes, 2006, p. 60)

Matos e Serrazina (1996) recomendam que os materiais manipuláveis devem ser utilizados várias vezes e não só na primeira abordagem aos conceitos; defendem que os alunos devem ter tempo para trabalhar com esses materiais e ainda que os materiais devem estar sempre disponíveis, para que estes possam recorrer a eles sempre que sentirem necessidade, respeitando desta forma o ritmo e individualidade de cada um.

Para que o potencial dos materiais manipuláveis seja devidamente aproveitado, estes devem ser utilizados pelos alunos em vez de serem apenas manipulados pelo professor. Isto mesmo é defendido por Matos e Serrazina (1996, p. 197) ao afirmarem: "Não é o mesmo utilizar um material como instrumento de comunicação do professor que explica manipulando objectos que só ele manipula, ou serem os alunos a manipulá-los, interpretando as suas características, resolvendo problemas com a sua ajuda e formulando novos problemas".

Botas (2008) sublinha que "qualquer material deve ser usado de forma cuidadosa, uma vez que a utilização dos materiais por si só não é sinónimo ou garantia de uma aprendizagem significativa" (p. 35). Do mesmo modo, Matos e Serrazina (1996, p. 196) afirmam que "certos materiais são selecionados para as actividades de sala de aula porque eles têm implícitas relações que os adultos acreditam serem especialmente importantes. Contudo, não há nenhuma garantia que os alunos vejam as mesmas relações nos materiais que nós vemos". Assim, "o professor desempenha aqui um papel de extrema importância, no sentido em que será o responsável na determinação do momento e da razão do uso de um determinado material" (Botas, 2008, p.35). Portanto, podemos concluir que o mais importante não é o material em si, mas a experiência significativa que esse deve proporcionar ao aluno (Botas, 2008).

Não basta que estes materiais sejam de qualidade para garantir que o processo de manipulação constitua uma oportunidade real de aprendizagem e construção de conhecimento matemático. O professor deve, durante esse processo, proporcionar momentos de discussão onde orienta os alunos, por forma a conduzir a atenção deles para as relações de interesse. Segundo Rodrigues e Gazire (2012, p. 187), "o professor deverá atuar como um mediador na construção do conhecimento matemático, orientando o aluno a realizar uma ação reflexiva sobre o material didático manipulável durante a atividade experimental".

A aprendizagem é uma atividade construtiva que os próprios alunos têm de executar, logo a tarefa do educador não pode ser fornecer conhecimento, mas pelo contrário, fornecer aos alunos oportunidades e incentivos para que eles próprios o construam (Lopes, 2010). O uso de materiais manipuláveis no ensino da Geometria permite que o aluno construa os seus conceitos através da manipulação. Essa construção pode ser chamada de processo de internalização, ou seja, "construção de um conhecimento de fora pra dentro, e que quando internalizado, torna-se "apreendido" pelo aluno de forma a utilizar esse conhecimento como se fosse produzido por ele" (Monteiro et al., 2012, pp. 1-2).

2.2.1. O Material de Desenho

No início, o Homem utilizava partes do seu próprio corpo, como o pé, o palmo ou o polegar, para poder comparar medidas; contudo, como estes meios eram pouco rigorosos, eles passaram a ser menos usados e criou-se, anos mais tarde, a medida-padrão metro (Lima, 2012). A Geometria tem estado sempre presente ao longo da História do Homem e a régua, o compasso e o esquadro estão tão presentes na história que é difícil datar o seu aparecimento.

O ensino do desenho geométrico é parte integrante dos conteúdos do domínio de Geometria e Medida. Para o concretizar, os alunos aprendem a utilizar os materiais de desenho desde muito cedo. Na Matemática os materiais de desenho que os alunos utilizam são, principalmente, a régua graduada, o esquadro, o transferidor e o compasso. "Lima (1991) considera os desenhos das figuras geométricas parte importantíssima para a compreensão, a fixação e a imaginação criativa. Ele acha fundamental que o estudante por si só desenhe a figura, procurando caminhos, imaginando construções, pesquisando interconexões, forçando o raciocínio e exercitando a mente" (Oliveira, 2008, p. 3).

Oliveira (2008) defende, ainda, que o ensino do desenho promove as capacidades de planear, projetar e abstrair, "estabelecendo assim uma relação contínua entre a percepção visual e o raciocínio espacial" (p.4). O desenho geométrico exige do aluno rigor, precisão, clareza e limpeza.

Os materiais de desenho tornam-se ferramentas essenciais no estudo da Geometria pois possibilitam o desenho geométrico. Motivado pela obrigatoriedade do desenho geométrico nos currículos nacionais, estes materiais constituem ferramentas obrigatórias na aula de Geometria e nos exames nacionais do 9.º ano. A este respeito, Breda et al. afirmam que "Na aprendizagem da Matemática e, em particular na geometria, devem ser usados diversos recursos, tais como, régua, esquadro, compasso e transferidor e outros materiais manipuláveis" (p. 17).

2.2.2. O Origami

A procura de materiais que no dia a dia nos garantam êxito faz com que desenvolvamos novas estratégias de ensino e que exploremos novos recursos. Nesta procura, surge a necessidade de trabalhar com materiais versáteis e próximos do aluno. São inúmeros os recursos que podemos encontrar à nossa volta e com aplicações várias. Um desses recursos, com provas dadas do seu potencial como recurso didático, é o papel e a arte de o dobrar, o origami.

Segundo Braz (2013), a origem da palavra origami provém do japonês e é composta por duas partes: a primeira, "Ori", deriva do desenho de uma mão e significa dobrar; a segunda, "Kami", deriva do desenho da seda e significa papel e Deus, o que é uma indicação da importância do papel para os japoneses. Ao juntar as duas partes, pronunciamos origami. Assim, o origami é a arte japonesa de dobrar papel.

A história do origami está ligada diretamente à história do papel e, apesar de o Japão ser considerado o berço do origami, refere-se também que ele pode ter surgido na China, onde a história do papel é mais antiga. Segundo Braz (2013), apesar de na China a invenção do papel ter acontecido por volta de 105 d. C, o império chinês manteve segredo sobre as técnicas de fabricação do papel durante séculos para poder exportá-lo a preços altos. Apenas no século VI a técnica para fabricar papel chegou ao Japão, onde o origami se desenvolveu. Na Europa, a técnica chegou por volta do século XII.

Hoje o origami é dividido em dois tipos: o origami tradicional, que utiliza apenas uma peça quadrada de papel e não envolve o uso de cortes nem colagem; e o origami modular, que se baseia na construção de módulos ou unidades, na qual se dobram várias peças independentes transformando-as em módulos, que possuem aberturas que serão unidas entre si (Braz, 2013).

O uso do origami como material didático está a tornar-se cada vez mais conhecido no ensino da Geometria. Como indica Silva (2013):

> Esse instrumento pedagógico é bastante interessante, tendo em vista que, se aplicado no processo de ensino aprendizagem, direcionado ao estudo de conceitos geométricos, além de seu carácter lúdico, pode estabelecer uma relação entre teoria e prática, na qual os alunos, através da visualização de formas presentes no *Origami*, compreendem conceitos geométricos da Geometria Plana numa perspectiva contextualizada, lúdica e prazerosa. (p. 33)

O papel, como material didático manipulativo, proporciona um maior envolvimento do aluno nas tarefas a realizar, já que a manipulação constitui um modo de dar sentido ao conhecimento matemático, e para além disso, o aluno adquire uma perceção mais dinâmica das ideias (Grupo

Pi, 2003). O uso do origami na sala de aula enfatiza a importância do lúdico na construção, comparação, estabelecimento de relações e visualizações, desempenhando um papel primordial na perceção espacial (Silva, 2013).

Algumas vantagens deste recurso em relação a outros são a permanente disponibilidade no momento em que se decide usar em sala de aula e no estudo em casa do aluno; trata-se recurso económico e suficiente para todos os alunos, permitindo também a manipulação individual; o conhecimento do manuseamento do recurso por parte do professor e dos alunos mesmo antes de estudar Matemática com eles; exige dos alunos concentração, cuidado e limpeza no manuseamento do recurso; é sempre possível analisar matematicamente cada passo pois fica sempre marcado; uma construção pode ser útil em vários estudos matemáticos e experiências investigativas por parte dos alunos.

No entanto, como material manipulável que é, o seu uso não é válido por si só. Em todos os casos é importante que o professor assuma uma postura de orientador da aprendizagem, mantendo uma intenção didática durante toda a atividade, colocando questões e incentivando os alunos a discutirem entre si e registarem as suas conclusões (Silva, 2013).

O origami, como material concreto e manipulável, permite ao aluno aprender fazendo, sendo caracterizado pelo envolvimento físico dos alunos numa situação de aprendizagem ativa, através do sentir, tocar, manipular e movimentar, o que permite ao aluno experimentar a sensação de descoberta (Silva, 2013).

2.3. GeoGebra

O termo *software* de geometria dinâmica é utilizado para designar programas interativos que permitem a criação e manipulação de figuras geométricas a partir das suas propriedades (Santos, 2011). Estes *software* têm recebido atualmente maior atenção e questionamento pois são os mais novos instrumentos didáticos inseridos na sala de aula.

Segundo Matos e Serrazina (1996), houve durante as décadas de 1980 e 1990 um aumento da disponibilidade de meios tecnológicos nas escolas e a implementação de alguns projetos (por exemplo, o Projeto Minerva), sensibilizou e entusiasmou muitos professores para a utilização de ferramentas tecnológicas em sala de aula. Segundo Ponte (1995, p. 3), “As experiências realizadas com o computador mostraram que este pode levar ao estabelecimento duma nova relação professor-aluno, marcada por uma maior proximidade, interacção e colaboração”.

Hoje, os computadores, a internet, as aplicações e os telemóveis são ferramentas comuns. O facto de as pessoas em geral, inclusive os alunos, assimilarem tão rapidamente as inovações tecnológicas "exige que, ao mesmo tempo, a educação também acelere no sentido de tornar o ensino mais atraente ao aluno de maneira a estimular a aprendizagem. E o que podemos perceber é que a própria tecnologia pode ser uma ferramenta eficaz no alcance desta meta" (Silva, 2013, p. 38).

Nos últimos programas de Matemática do ensino básico (Ministério da Educação, 2007; Ministério da Educação e Ciência, 2013) é recomendado o uso das tecnologias como instrumentos e metodologias de ensino. No Programa de Matemática do Ensino Básico de Matemática de 2007 diz-se que:

> Ao longo de todos os ciclos, os alunos devem usar calculadoras e computadores na realização de cálculos complexos, na representação de informação e na representação de objectos geométricos. O seu uso é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações, casos em que os cálculos e os procedimentos de rotina não constituem objectivo prioritário de aprendizagem, e a atenção se deve centrar nas condições da situação, nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados. (p. 9)

Na brochura de apoio ao programa de 2007, no domínio de Geometria e Medida é dedicada uma subsecção ao "papel das tecnologias" na secção da abordagem didática, onde pode ler-se que:

> As ferramentas tecnológicas permitem o acesso a modelos visuais poderosos, a que os alunos, em especial os mais novos, não teriam acesso tão facilmente. Deste modo, a tecnologia enriquece a extensão e a qualidade das investigações em geometria, ao fornecer um meio de visualizar noções geométricas sobre diferentes perspectivas. Ao trabalhar com programas de geometria dinâmica, a aprendizagem dos alunos é auxiliada pela resposta que a tecnologia pode proporcionar. (Breda et al., 2011, p. 21)

Neste documento acrescenta-se que com um *software* de geometria dinâmica os alunos podem "investigar as propriedades das figuras, desenvolver o conceito de "figura" atendendo às relações subjacentes e não às particulares de um desenho especifico", "explorar relações e formular e testar conjecturas" (p. 21). Os *software* permitem assim alargar experiências, procedendo a abstrações e generalizações das suas experiências.

Já Ponte (1995) indica que a utilização de novas tecnologias permite trazer ao ensino e aprendizagem de Matemática várias vantagens, designadamente:

> Um reforço do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem dos mais variados problemas; uma atenção redobrada às capacidades intelectuais de ordem mais elevada, que se situam para além do cálculo e da simples compreensão de conceitos e relações matemáticas; uma demonstração prática da possibilidade de envolver os alunos em actividade matemática intensa e significativa, favorecendo o desenvolvimento de atitudes positivas em relação a esta disciplina e uma visão muito mais completa da sua verdadeira natureza. (Ponte, 1995, p. 2)

Baldissera (2011, p.8) acrescenta ainda que, "Por meio dos softwares educacionais de modelagem e/ou simulação, os alunos são estimulados a explorar ideias e conceitos geométricos, antes impossíveis de se construir com lápis e papel, proporcionando-lhes condições para descobrir e estabelecer relações geométricas".

Para além de ser importante, na utilização dos programas de geometria dinâmica, tirar vantagem das suas potencialidades relacionadas com o conteúdo matemático, designadamente as poderosas possibilidades de visualização, experimentação, recolha de evidência, análise e formulação de conjeturas, deve-se igualmente tirar partido das suas potencialidades interativas e da motivação que gera nos alunos para desenvolverem capacidades de persistência, comunicação, argumentação e descoberta (Fernandes, 2006).

Entre as ferramentas tecnológicas que permitem a manipulação virtual encontra-se o GeoGebra. Esta ferramenta, criada por Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburg na Áustria, é um *software* gratuito de geometria dinâmica e está preparado para o ensino e aprendizagem de Matemática desde o nível básico ao universitário. Este *software* pode ser utilizado em ambiente de sala de aula e reúne Geometria, Álgebra, Cálculo e Estatística.

Como nos diz Silva (2013), este *software* "admite construir vários objetos como pontos, vetores, segmentos, retas, secções cónicas, gráficos de funções e curvas parametrizadas, os quais podem, depois, ser modificados dinamicamente" (p. 39). Este *software* permite ainda inserir equações e coordenadas digitando-se diretamente na sua caixa de entrada. Apresenta três janelas diferentes: janela gráfica, janela algébrica ou numérica e a folha de cálculo, permitindo apresentar os objetos matemáticos nas três diferentes representações (Silva, 2013).

Borba, Silva e Gadanidis (2014) afirmam que, desde o lançamento do GeoGebra, professores e pesquisadores têm demonstrado interesse didático-pedagógico e académico em relação ao uso do GeoGebra no ensino e aprendizagem da Matemática. Este *software* permite explorar, conjeturar e investigar conteúdos na construção do conhecimento matemático. Para além de ser totalmente gratuito, o GeoGebra é de fácil utilização, sendo muito intuitivo, e está totalmente em português, características que fazem dele uma boa opção para *software* de geometria dinâmica.

Numa pesquisa realizada por Lopes e Souza (2011), estes autores apontam que o GeoGebra tem as seguintes vantagens no estudo de Geometria:

> Permite a exploração visual das figuras construídas, o que não é possível com as figuras estáticas feitas com régua e compasso; Facilidade do aluno em construir as figuras com o recurso do software; Permite que os dados sejam alterados graficamente, mantendo as características da construção (Geometria Dinâmica); Aumenta o poder de argumentação do aluno através do processo de arrastar as figuras pela tela do computador, fazendo os sucessivos testes. (p.8)

Embora o uso de *software* de geometria dinâmica tenha inúmeras vantagens, devemos, no entanto, ter cuidados na sua utilização. Através da visualização os alunos são levados facilmente a acreditar em certos resultados, apenas baseados no que veem. Contudo, sabemos que em vários casos os computadores podem levar-nos a conclusões falsas, fruto das suas limitações. Aqui, mais uma vez, o professor tem um papel fundamental no sentido de desfazer estes erros e ajudar os alunos a manterem um espírito crítico relativamente aos resultados apresentados.

Assim, os materiais didáticos são ferramentas valiosas no processo de ensino e aprendizagem, estimulando a experimentação e investigação por parte dos alunos e ainda aumentando os níveis de motivação. Contudo, nenhum deles poderá funcionar sem a mediação do professor.

Os materiais manipuláveis e a tecnologia podem, assim, auxiliar os alunos na construção dos seus conhecimentos, servindo como meio de ligação entre o aluno e o conhecimento no momento em que este está em construção.

CAPÍTULO III

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL

Neste capítulo do relatório tratarei de enquadrar o contexto onde se desenvolveu o presente projeto e apresentar o plano geral de intervenção. Num projeto de investigação é fundamental darmos a conhecer qual foi o contexto onde este foi aplicado pois toda a problematização tem de ser feita à luz de um contexto, adaptando e adequando o projeto a esse contexto e ainda, se possível, contribuindo para a melhoria da prática. Assim, começarei por caracterizar a escola e a turma onde foi aplicado o estudo e de seguida apresentarei o plano geral de intervenção do projeto.

3.1. Caracterização da Escola

A cidade de Barcelos, pertencente ao distrito de Braga, é uma cidade ímpar no nosso país. Detentora de referências de identidade nacional e regional, como é o caso do Galo de Barcelos, a Feira Semanal, a artista Rosa Ramalho e o artesanato, é uma paragem obrigatória para quem procura reviver as tradições do Minho. A indústria têxtil é um dos principais empregadores desta região, empregando quase metade da população ativa, embora o calçado, a agricultura, a cerâmica e o turismo tenham um peso importante na empregabilidade no concelho (Sítio da Câmara de Barcelos). Conhecida pelos seus trabalhos manuais de olaria, figurado, cerâmica tradicional, de bordados e tecelagem, Barcelos assume-se com orgulho como a capital do artesanato. É neste concelho que está inserida a escola e os alunos alvos deste estudo.

A escola, onde foi desenvolvido este estudo, é uma escola secundária/3 do concelho de Barcelos, com um significativo património cultural. Criada a 25 de agosto de 1966, por despacho ministerial, como Liceu de Barcelos, funcionava como Secção Mista do Liceu Sá de Miranda, de Braga (Sítio da escola). Atualmente está incluída num Mega Agrupamento do qual é sede e que foi criado a 4 de julho de 2012. O Mega Agrupamento é constituído por cinco escolas de ensino pré-escolar e 1.º ciclo, uma escola com apenas 1.º ciclo, uma escola com 2.º e 3.º ciclo e a escola secundária com 3.º ciclo.

Nos últimos dados a que se tem acesso, em 2014/2015 o agrupamento era frequentado por 2407 alunos, dos quais 146 na educação pré-escolar, 450 no 1.º ciclo do ensino básico, 216 no 2.º ciclo do ensino básico, 553 no 3.º ciclo do ensino básico, 40 dos cursos vocacionais e 1002 do ensino secundário. Destes últimos, 743 eram dos cursos cientifico-humanístico e 259 dos cursos profissionais (IGEC [Inspeção Geral da Educação e Ciência], 2015).

A educação e o ensino eram assegurados por 222 docentes, sendo 84,2% pertencentes aos quadros. A experiência profissional é significativa, já que 91,9% lecionam há 10 ou mais anos. O pessoal não docente é formado por 105 profissionais, dos quais 53,3% têm 10 ou mais anos de serviço (IGEC, 2015).

Segundo o Projeto Educativo da escola, todo o trabalho desenvolvido neste agrupamento é pensado com vista a promover os níveis de sucesso de cada ciclo e os resultados dos exames nacionais, em todas as disciplinas e em todos os níveis de ensino. Pretendem minimizar o número de ocorrências de natureza disciplinar e aumentar o número de utilizadores das Bibliotecas Escolares, o número de atividades com a participação dos Pais e Encarregados de Educação e ainda o número de alunos e de turmas envolvidas em projetos. Pretendem ainda diminuir para valores próximos de zero a taxa de abandono escolar e integrar os alunos, com necessidades educativas especiais ou sobredotados, de populações imigradas ou nómadas, de minorias linguísticas, étnicas ou culturais (AEB [Agrupamento de Escolas de Barcelos], 2014).

A oferta educativa da escola onde decorreu o estágio vai desde o 3.º ciclo do Ensino Básico até ao Ensino Secundário, oferecendo todos os cursos de cientifico-humanístico e alguns cursos profissionais no ensino secundário (Técnico de Eletrónica, Automação e Computadores; Técnico de Apoio à Gestão Desportiva; Técnico de Apoio à Infância; Técnico de Gestão de Equipamentos Informáticos; Técnico de Desenho Digital 3D; Técnico de Auxiliar de Saúde).

Esta escola trabalha para que as atividades desenvolvidas privilegiem diversas áreas, entre as quais a melhoria das aprendizagens e dos resultados escolares dos alunos, a promoção das literacias, da educação cívica, da inclusão, da educação ambiental, da educação para a saúde, da educação física e desportiva, da educação artística, da interação entre a escola e a comunidade (AEB, 2014).

Para isso, desenvolve diversos projetos entre os quais destaco os projetos com a finalidade de combater as dificuldades de aprendizagem dos alunos: MatXYZ, PortABC e SpeakUP, apoiando as disciplinas de Matemática, português e inglês, respetivamente. Desenvolve também outros projetos com forte solidez tais como: Revista Amanhecer, Rede dos Pequenos Cientistas, Museu de Ciências Naturais, Clube Europeu, Arboreto de Barcelos, Espaço +, Academia do Rio e Desporto Escolar.

Em relação à estrutura física da escola, esta foi recentemente requalificada. É de tipologia T 36, constituída por um Bloco Central, três Blocos destinados a atividades letivas e, ainda, um pavilhão Gimnodesportivo. O Bloco Central inclui os Serviços de Administração Escolar, a sala de convívio dos alunos, o bufete, a cantina, o gabinete de Psicologia e Orientação, as salas de atendimento de Encarregados de Educação, o gabinete dos Diretores de Turma e a sala de reuniões, a sala dos professores e a papelaria. Nos restantes blocos situam-se as salas destinadas a atividades letivas.

O edifício e a área circundante estão bem cuidados. Nas zonas exteriores há espaços verdes que estão organizados segundo sistemas de diferenciação climática e ecológica em cinco pólos distintos: Atlântico, Termo-Atlântico, Oro-Atlântico, Mediterrâneo e Ibério. A organização dos espaços circundantes é fruto do trabalho desenvolvido pela equipa do Projeto "Arboreto de Barcelos", que visa criar áreas naturais que funcionem como espaços de educação ambiental e como laboratório vivo.

No ano letivo 2014/2015 a escola foi alvo de avaliação externa onde obteve a classificação de Muito Bom a todos os níveis avaliados (Resultados, Prestação do Serviço Educativo, Liderança e Gestão) (IGEC, 2015).

Saliento o bom ambiente vivido diariamente na escola, onde a simpatia e amabilidade é uma constante. Desde o primeiro dia na escola fui sempre muito bem-recebida, sentindo-me sempre como parte de uma família. Existe entre os professores uma prática de companheirismo e entreajuda, com partilha de materiais e elaboração de materiais entre professores da mesma disciplina. Relativamente às condições, esta é uma escola bem equipada e no espaço dedicado ao nosso grupo disciplinar existe um grande leque de manuais escolares, organizados por anos, e alguns materiais que podem ser usados livremente.

O querer ser e fazer melhor é uma prática que encontrei nesta escola, que me inspirou inúmeras vezes durante o estágio em momentos de maior cansaço e que espero encontrar no futuro nas escolas onde vier a lecionar.

3.2. Caracterização da Turma

Para podermos concretizar qualquer tipo de projeto temos, inicialmente, de conhecer o público alvo, neste caso a turma. Este estudo foi realizado no ano letivo 2015/2016, numa turma do 9.º ano de escolaridade que pertence à escola anteriormente caracterizada. Esta turma era constituída por 22 alunos (A_1, A_2, ..., A_{22}), dos quais 11 eram raparigas e 11 eram rapazes, com uma média de idades de 14,3 anos, o que constitui a idade normal dos alunos deste ano de escolaridade. Nesta turma existiam sete alunos repetentes, dos quais quatro estavam a repetir o 9.º ano e três repetiram anos anteriores.

A turma tinha dois alunos com Necessidades Educativas que já tinham sido diagnosticadas antes da entrada no 3.º ciclo. Estes alunos participavam na aula de Matemática da mesma forma que os restantes alunos, tendo apenas como diferenciação mais tempo para a realização das provas de avaliação e direito a que lhes lessem as provas.

Relativamente às disciplinas preferidas, metade dos alunos prefere Educação Física, seguindo-se a disciplina de Espanhol e em terceiro lugar surge a de Inglês, não havendo nenhum aluno a preferir a de Matemática. Já relativamente à disciplina de que menos gostam, 50% dos alunos elegeram a disciplina de Matemática, seguindo-se a disciplina de História com 25% e, finalmente, a disciplina de Educação Visual com 10%. Os alunos dizem ainda que o que mais apreciam num professor é a simpatia, a sua capacidade para ser divertido e ser capaz de lecionar os conteúdos de forma atrativa.

Foi possível constatar, ao longo do ano, que esta turma apresentava graves lacunas de anos anteriores, tendo imensas dificuldades em domínios como Álgebra e Números e Operações. Assim, foi necessário definir diversas estratégias para os ajudar a superar essas dificuldades.

O desempenho da turma no final do ano letivo sofreu uma ligeira melhoria em relação ao 1.º período, manteve-se, no entanto, negativo nos três períodos, como é possível observar na Tabela 1.

Tabela 1 – Desempenho dos alunos ao longo do ano letivo

1.º Período		**2.º Período**		**3.º Período**	
Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
2.7	1.12	2.7	1.08	2.8	1.07

Relativamente às notas do ano anterior, doze dos vinte e dois alunos transitaram com nível negativo à disciplina de Matemática e sete com nível três. Durante este ano letivo alguns alunos foram progredindo e superando as lacunas que traziam dos anos anteriores, aumentando a sua motivação e afeição pela Matemática. No exame nacional os alunos obtiveram uma média superior à média nacional e da escola, ficando em 51, 2%.

3.3. Plano Geral de Intervenção

Neste subcapítulo são apresentadas a Metodologia de Ensino e Aprendizagem e as Estratégias de Investigação e Avaliação da Ação da intervenção de ensino.

3.3.1. Metodologias de Ensino e Aprendizagem

Na minha intervenção salientam-se três metodologias distintas: a diversidade do tipo de tarefas, o trabalho de grupo e as discussões no grupo turma, todas estas metodologias aliadas a um ensino do tipo exploratório. Para Ponte (2005), a característica principal deste tipo de ensino é que o professor não procura explicar tudo, mas sim deixar uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem, passando da atividade "ensino" para uma mais complexa que é o "ensino-aprendizagem". Este tipo de ensino dá enfase às tarefas de exploração e investigação e às discussões professor-alunos.

De seguida explorarei com maior pormenor as diferentes metodologias.

Diversidade do tipo de tarefas

As tarefas propostas aos alunos são um elemento fundamental na caracterização do currículo, pois elas determinam em grande medida as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos (Ponte, 2005). Por isso, elas devem ser cuidadosamente selecionadas e tratadas para que os alunos se possam envolver em atividades matemáticas ricas e produtivas.

> Os objetivos educacionais definidos e as experiências de aprendizagem a desenvolver na sala de aula surgem em contexto de um ensino para todos, o que implica proporcionar aos alunos experiências diversificadas e adequadas a uma formação matemática que permita a aquisição de conhecimentos, o desenvolvimento de capacidades e aptidões e de atitudes e valores. (Conceição & Fernandes, 2009, p. 190)

As tarefas matemáticas podem ser de diversos tipos, umas mais abertas e outras mais fechadas, umas mais desafiantes e outras de desafio mais reduzido, umas de curta duração e outras de longa duração, umas em contexto de realidade ou de semi-realidade e outras em contexto de Matemática pura (Ponte, 2005). Exemplos de tipos de tarefas bem conhecidos são os exercícios, os problemas, as investigações e os projetos.

Ao longo da minha intervenção tentei escolher tarefas que promovessem o desenvolvimento da compreensão dos conceitos e dos processos e que estimulassem a capacidade de resolução de problemas e de comunicação matemática. "As boas propostas de actividades são aquelas que não separam o pensamento matemático dos conceitos matemáticos ou aptidões, que despertam a curiosidade dos alunos e que convidam a especular e a prosseguir com a intuição" (NCTM, 1994, p. 27).

Ainda procurei diversificar o tipo de tarefas a propor aos alunos, pois vários documentos de orientação curricular, como o Relatório de Matemática 2001 (APM, 1998) ou as Normas Profissionais para o Ensino da Matemática (NCTM, 1994), recomendam que o professor diversifique, na medida do possível, as tarefas a propor aos alunos. Ponte (2005) fala-nos que a diversificação de tarefas é necessária pois cada tipo de tarefa desempenha o seu papel na aprendizagem.

> Na selecção das tarefas, os professores também devem determinar os aspetos que pretendem realçar, a forma de organizar e orientar os alunos, as questões que desafiam o desenvolvimento de diversos níveis de competência e como apoiar sem eliminar o desafio cognitivo. (Conceição & Fernandes, 2009)

O professor deve, assim, contemplar diversos tipos de tarefa e momentos próprios para exploração, reflexão e discussão, criando oportunidades que favoreçam a aprendizagem dos alunos (Ponte, 2005).

Trabalho de grupo

Desde o início do ano letivo, os alunos da turma, onde foi feita a intervenção de ensino, trabalhavam em grupos de 3 a 4 elementos. Esta é uma prática que o professor-orientador tem adotado já há alguns anos e acredita que traz vantagens a vários níveis, designadamente ao nível da discussão, da partilha e da interajuda (Correia & Fernandes, 2009).

Os alunos organizaram-se segundo as suas preferências, mas com duas limitações: os grupos teriam de ser mistos e no mesmo grupo teria de haver alunos de vários níveis de desempenho. Aquando da minha intervenção, os alunos estavam agrupados como se apresenta na Tabela 2.

Tabela 2 – Constituição dos grupos de trabalho

Grupo	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
Elementos do Grupo	A_2 A_3 A_5 A_{13}	A_4 A_{14} A_{16}	A_1 A_{10} A_{15} A_{20}	A_6 A_{11} A_{18}	A_{12} A_{17} A_{21} A_{22}	A_7 A_8 A_9 A_{19}

Matos e Serrazina (1996) indicam que esta metodologia de trabalho tem sido proposta em muitas das atuais renovações curriculares, e acrescentam que "o trabalho de grupo pode ajudar a promover mais reflexão, mais discussão entre os alunos e mais actividades de resolução de problemas", referindo que esta metodologia traz efeitos positivos "na compreensão de conceitos, na comunicação e na motivação dos alunos" (Matos & Serrazina, 1996, p. 149).

Esta forma de organização dos alunos permite uma maior partilha entre os alunos e entre os grupos e o professor, uma maior socialização e, inclusive, aproxima-os das exigências que certamente os esperam no futuro.

> as interações, com uma menor carga de formalidade, são essenciais para estimular a descoberta e a crítica assim como a elaboração de sínteses pessoais de significados (...) A investigação mostra que as interações aluno-aluno (...) são potencialmente mais ricas do que numa aula de resolução de exercícios. (Martinho & Ponte, 2005, p. 3)

Martinho e Ponte (2005) explicam que, com esta metodologia, os alunos sentem-se mais confortáveis a manifestar as suas ideias e ao "falarem e ouvirem os colegas, clarificam significados e a construção pessoal do conhecimento, ao ser combinado com o dos outros, torna-se útil" (Martinho & Ponte, 2005, p.3). Já Silva (1998) acrescenta que o trabalho de grupo enriquece a aprendizagem criando conflitos cognitivos que eles devem resolver, expondo os alunos a um pensamento de "qualidade mais elevada".

Dada a importância reconhecida a esta metodologia de trabalho em sala de aula, considerei fundamental adotá-la na minha intervenção de ensino. Deste modo, os alunos ao longo do ano letivo aprenderam a partilhar e trabalhar em grupo, notando-se em alguns alunos uma ligeira competição, o que fazia aumentar o ritmo de trabalho.

Discussões no grupo turma

A comunicação na sala de aula tem adquirido cada vez mais importância, já que constitui um processo social onde os intervenientes interagem trocando informações e influenciando-se mutuamente (Martinho & Ponte, 2005). Estabelecer, na sala de aula, um ambiente de diálogo, dando a palavra aos alunos, transforma os alunos de meros espetadores em atores da ação da aula. Investigações levadas a cabo nos últimos anos defendem que os professores devem promover a discussão no grupo turma como metodologia do ensino da Matemática. Esta metodologia de trabalho desenvolve aspetos fundamentais no ensino-aprendizagem da Matemática como, por exemplo, a comunicação matemática, a reflexão, a questionação, a criticidade e a motivação. Assim, a aprendizagem não resulta diretamente de ouvir o professor, mas sim de uma reflexão por parte do aluno da discussão na turma.

Em relação ao que nos diz a bibliografia, Silva (1998) diz que "os alunos devem ter a oportunidade de explicar e justificar seu pensamento, ouvir e tentar compreender as explicações de outros, questionando-os e desafiando-os, caso discordem ou não os entendam" (p.136). Matos e Serrazina (1996) alertam que "Sabemos da investigação que os alunos aprendem e retêm mais se estão activamente envolvidos no processo de aprendizagem em vez de serem receptores passivos da informação" (p. 172).

Na minha intervenção tentei promover sempre estas discussões, quer na correção das tarefas, quer na introdução de novos conteúdos. Estas revelaram-se fundamentais na clarificação de conceitos, na clarificação de processos, na enunciação e exploração de conjeturas, na exploração de resoluções alternativas, na avaliação de aprendizagens e na avaliação da minha própria intervenção.

A grande dificuldade residiu na gestão deste diálogo, onde os alunos, por vezes, falam ao mesmo tempo, interrompem os colegas ou no caso oposto têm dificuldade em pronunciar-se perante os colegas. Cabe ao professor gerir todo este processo, dando oportunidades a que todos os alunos deem o seu contributo.

3.3.2. Estratégias de Investigação e Avaliação da Ação

Para avaliar a intervenção foram utilizadas várias estratégias de recolha da informação, como o teste diagnóstico, a gravação das aulas em vídeo, a recolha de tarefas realizadas pelos alunos durante a intervenção, a ficha por partes e o questionário.

Teste diagnóstico

O teste diagnóstico, aplicado sensivelmente duas semanas antes da intervenção, procurava responder ao primeiro objetivo do projeto, que pretendia diagnosticar as aprendizagens anteriores dos alunos sobre os conceitos de circunferência, mediatriz e bissetriz. Este pode ser consultado no Anexo III.

Este teste, constituído por sete perguntas, explorava domínios como o desenho de ângulos, representações de pontos e distâncias, desenho da mediatriz de um segmento de reta e da bissetriz de um ângulo dadas as suas propriedades e questionava os alunos quando à sua experiência com o GeoGebra. Deste modo, este teste forneceu informações para a tomada de decisões acerca da intervenção de ensino.

Tarefas realizadas pelos alunos durante a intervenção

Durante a intervenção, em todas as aulas, foram propostas diversas tarefas aos alunos onde eles exploraram os diferentes tópicos lecionados. Foi-lhes pedido que escrevessem todos os raciocínios, processos e construções nas fichas e que não apagassem as linhas auxiliares. As fichas foram recolhidas, fotocopiadas e posteriormente entregues aos alunos.

Com esta recolha foi possível analisar erros, estratégias, métodos e dificuldades dos alunos, que se tornaram fundamentais na concretização do segundo e terceiro objetivos da investigação.

Gravação de aulas

Para poder registar discussões no grupo-turma, estratégias dos alunos, resoluções das tarefas, reações às tarefas mais desafiantes, dificuldades e interações, houve necessidade de gravar as aulas em vídeo. Assim, foi necessário obter a autorização para gravação por parte do diretor da escola e dos encarregados de educação, o que foi feito através de um pedido de autorização ao diretor (Anexo I) e outro aos encarregados de educação (Anexo II). Todos concederam a sua autorização.

Ficha por partes

No panorama atual, a avaliação é feita essencialmente através de testes sumativos e "é o andaime que suporta todo o edifício escolar, sobretudo no campo da comprovação e hierarquização da aprendizagem (Pacheco, 1998, p. 119).

O método de avaliação, por período, do professor-orientador assenta em dois momentos de avaliação distintos. O primeiro é composto por dois testes de avaliação sumativa que incide em todos os conteúdos estudados até então. Cada teste tinha duração de 90 minutos. O segundo é composto por duas fichas, chamadas fichas por partes, que incide apenas num conteúdo programático por ficha, sendo cotadas, cada uma, até 50% e com peso total igual a um teste de avaliação sumativa. Cada ficha tinha duração de 45 minutos.

Assim, pareceu-nos melhor avaliar os conhecimentos dos alunos através de uma ficha por partes, constando apenas de questões sobre o tema dos lugares geométricos permitindo assim ter um melhor levantamento dos dados.

Esta ficha era constituída por sete questões, algumas com alíneas (Anexo VI), de diversos tipos, desde questões de escolha múltipla, questões fechadas, uma questão de descrição, questões de construção e problemas usando as propriedades estudadas.

Questionário

Segundo Chagas (2000), um questionário é apenas um conjunto de questões, com o objetivo de gerar os dados necessários à elaboração de um projeto. Afirma ainda que nem todos os projetos de pesquisa utilizam este instrumento de coleta, mas o questionário é muito importante na pesquisa científica, especialmente nas ciências sociais.

Para compreender de que forma os materiais manipuláveis e o GeoGebra tinham ajudado os alunos a ultrapassar as suas dificuldades na determinação de Lugares Geométricos, bem como perceber de que forma os alunos encararam a utilização dos materiais e o GeoGebra em sala de aula e ainda quanto isso os motivou, elaborei um questionário que apliquei três semanas após o final da minha intervenção e que pode ser consultado no Anexo VII.

Este questionário era dividido em três partes: a primeira referia-se a alguns dados pessoais dos alunos, a segunda era constituída por vinte e uma perguntas fechadas e a terceira por cinco perguntas abertas.

Relativamente aos dados pessoais, os alunos eram apenas questionados quanto à idade, ao sexo e às classificações obtidas no final do 8.º ano e no final dos dois primeiros períodos do 9.º ano de forma a poder traçar um perfil do aluno na análise do questionário. Não era pedido a identificação do aluno pois como Tuckman (2000) salienta podemos obter resultados mais fiáveis com o questionário quando este é respondido de forma anónima, garantindo, maior honestidade e liberdade de resposta por parte dos intervenientes. Na segunda parte eram questionados quanto ao grau de concordância sobre afirmações que exploravam aspetos sobre a motivação, aprendizagem com o uso dos diferentes materiais e vontade em usar os materiais em outros temas de Matemática. Na última parte pedia-se aos alunos que enumerassem vantagens e desvantagens do uso destes materiais no tema Lugares Geométricos e indicassem qual o material que mais gostaram de usar.

CAPÍTULO IV

INTERVENÇÃO DE ENSINO

Este capitulo, dividido em três secções, apresenta os resultados recolhidos durante os três momentos de intervenção, o antes, o durante e o após, de modo a dar resposta aos objetivos delineados para o projeto. Inicialmente começa-se por analisar o teste diagnóstico, de modo a apresentar os conhecimentos que os alunos detinham antes da intervenção. De seguida analisa-se os episódios mais relevantes das aulas com enfase no projeto, tendo em conta o material utilizado. Por fim são apresentados os resultados obtidos na ficha por partes e no questionário relativo ao tema em estudo.

4.1. Avaliação diagnóstica

Para responder ao primeiro objetivo do projeto, em que se pretende diagnosticar as aprendizagens anteriores dos alunos sobre os conceitos de circunferência, mediatriz e bissetriz, realizei um teste de diagnóstico. Este foi realizado no dia 11 de fevereiro, sensivelmente duas semanas antes da minha intervenção de ensino.

Para a realização deste teste diagnostico, os alunos tinham apenas a indicação que teriam de se fazer acompanhar de uma régua, um compasso e um transferidor. Contudo, durante o teste, houve a necessidade de se fazer circular o material pois alguns alunos apresentaram-se na aula sem o material necessário.

No teste diagnóstico incluíram-se questões sobre como desenhar ângulos dadas as amplitudes, desenhar um triângulo dadas as medidas dos lados, representar pontos e distâncias, desenhar a mediatriz de um segmento de reta e a bissetriz de um ângulo e ainda umas questões sobre a utilização do GeoGebra.

Seguidamente, apresentam-se os resultados do teste, classificando as respostas em corretas, parcialmente corretas e incorretas.

4.1.1. Desenhar ângulos

Nesta secção analisarei a primeira questão do teste diagnóstico, que consistia em desenhar diferentes ângulos: um ângulo agudo, um ângulo reto e um ângulo obtuso.

1. Desenha cada um dos seguintes ângulos:		
a) $45°$	**b)** $90°$	**c)** $270°$

Nesta questão pretende-se avaliar em que medida os alunos são capazes de desenhar corretamente o ângulo pedido. A escolha destes valores das amplitudes dos ângulos permitia facilmente desenhá-los sem recorrer ao transferidor, o que podia vir a ser um aspeto interessante aquando da análise das resoluções dos alunos. Na Tabela 3 encontram-se os resultados obtidos nesta questão.

Tabela 3 – Frequências dos tipos de resposta à questão 1

Item	Resposta			Não responde
	Correta	Parcialmente correta	Incorreta	
1a) 45°	15	0	7	0
1b) 90°	20	2	0	0
1c) 270°	16	0	2	4

Por análise da tabela e tendo em conta que o universo é constituído por 22 alunos podemos observar que o ângulo agudo foi aquele onde houve menos respostas corretas. Neste caso todos os alunos responderam, mas 7 das respostas estavam incorretas, verificando-se dois tipos de erros: um erro, cometido por cinco alunos, consistiu em desenhar um ângulo agudo de amplitude maior do que $45°$ (com amplitudes de $52°$ e $57°$) ou menor do que 45° ($31°$, $32°$ e $33°$); o outro, cometido por dois alunos, resultou de assinalar o ângulo suplementar ao ângulo de $45°$, como podemos ver na Figura 2.

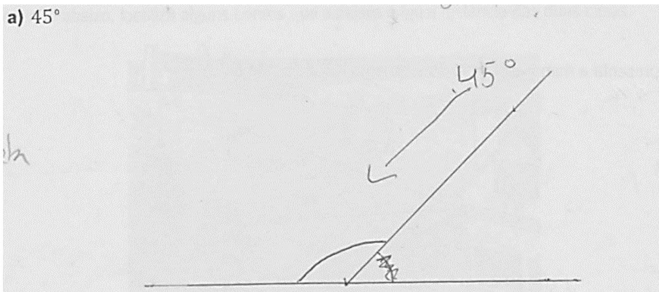


Figura 2. Resolução do aluno A_{11} à alínea a) da questão 1.

No que toca à alínea b), por análise da tabela, podemos observar que mais alunos foram capazes de desenhar um ângulo reto e duas respostas foram consideradas parcialmente corretas, pois os alunos apresentaram desenhos pouco precisos. Estes resultados revelam que os alunos estão familiarizados com a noção de ângulo reto, conseguindo desenhá-lo.

Relativamente à alínea c), tratando-se de ângulo de amplitude $270°$, que não se pode desenhar diretamente com o transferidor, tal como acontecia com os ângulos das alíneas anteriores, esperava-se que se tornasse mais desafiante para os alunos. Por análise da tabela, podemos observar que houve quatro alunos que não responderam, havendo menos respostas incorretas e mais respostas corretas do que na alínea a). As duas respostas consideradas incorretas são a de um aluno que apresenta um ângulo de $90°$ e de outro aluno que apresenta a resposta da Figura 3.

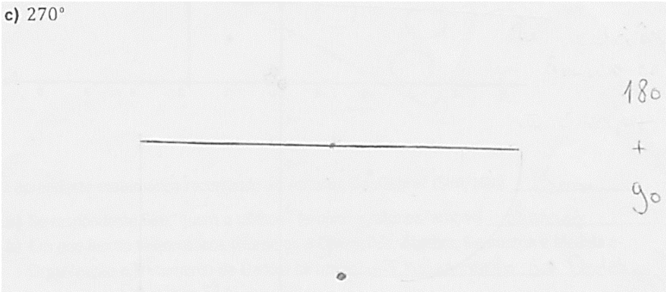


Figura 3. Resolução do aluno A_{17} à alínea c) da questão 1.

Em síntese, podemos notar que, em todas as alíneas, mais de metade dos alunos responde corretamente; apenas na alínea c) há alunos que não respondem à questão e, contrariamente ao que seria de esperar, é no ângulo agudo que os alunos têm maior dificuldade na determinação do ângulo. Esta dificuldade pode dever-se à maior dificuldade no uso do transferidor, observando qual é a marca que representa o valor $45°$ pois ele não está explicito no transferidor, ao contrário do valor $90°$. No caso de c) os alunos determinaram o ângulo fazendo $180° + 90°$. Na alínea a) os dois alunos que desenharam o ângulo suplementar do ângulo pedido mostram as dificuldades que os alunos no final do 3.º ciclo ainda revelam no desenho de ângulos.

4.1.2. Desenhar um triângulo dados os lados

Nesta segunda secção analisa-se a segunda questão do teste diagnóstico, que consistia em desenhar um triângulo dadas as medidas dos lados. Com esta questão pretende-se avaliar em que medida os alunos são capazes de usar o material de desenho para construir um triângulo.

2. Desenha o triângulo [ABC] cujos lados medem $2cm$, $3cm$ e $4cm$.

Escolhi estes valores por duas razões: não pretendia que o triângulo a desenhar fosse um triângulo retângulo, pois facilmente os alunos transportariam as medidas com régua e transferidor, e valores suficientemente pequenos para que os alunos tivessem espaço suficiente para desenhar o triângulo na posição que entendessem. Na Tabela 4 apresentam-se os resultados obtidos.

Tabela 4 – Frequência dos tipos de resposta à questão 2

Item	Resposta			Não responde
	Correta	Parcialmente correta	Incorreta	
2.	6	13	2	1

Analisando a tabela, podemos verificar que para mais de metade dos alunos a sua resposta foi considerada parcialmente correta, o que correspondeu às construções do triângulo por tentativa e erro pois este método não garante a resposta correta para quaisquer valores dos lados do triângulo.

As seis respostas consideradas corretas envolviam a construção de um triângulo transportando as medidas com o compasso. Já nas respostas incorretas, os dois alunos representaram um triângulo retângulo (Figura 4).

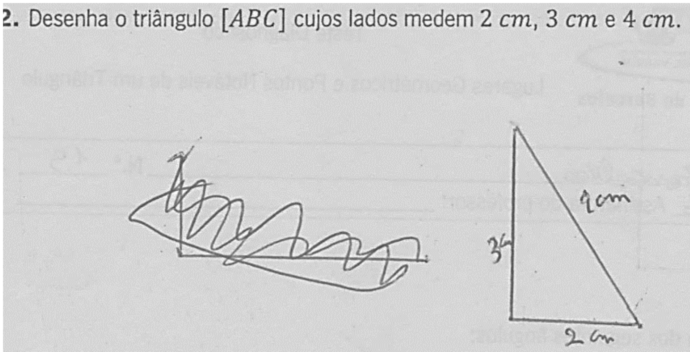


Figura 4. Resolução do aluno A_{18} à questão 2.

De entre as respostas parcialmente corretas, há duas em que se percebe que, numa primeira tentativa, os alunos traçaram um ângulo reto.

4.1.3. Representar pontos e distâncias

Nesta secção analisam-se as questões 3 e 4. Na questão 3 é apresentado um ângulo bissetado em que o ponto A é o vértice, B e C são pontos dos lados do ângulo e D um ponto da bissetriz. Pedia-se que os alunos representassem a menor distância do ponto D ao segmento $[AB]$. Na questão 4 era dado um referencial cartesiano e as coordenadas de dois pontos, pedindo-se a representação desses e outros pontos.

3. Representa a menor distância do ponto D ao segmento $[AB]$.

4. Considera o referencial cartesiano que se segue e os pontos $A(3,3)$ e $B(-2,0)$. Representa no referencial anterior.

a) O ponto A **b)** O ponto B **c)** Os pontos que estão a menos de uma unidade de A.

d) Relativamente ao ponto B, os pontos que estão simultaneamente a mais de uma unidade e a menos de duas unidades.

Com a questão 3 pretende-se avaliar em que medida os alunos sabem representar a distância de um ponto a uma reta e na questão 4 pretende-se avaliar se os alunos são capazes de representar pontos e lugares geométricos envolvendo círculos.

Tabela 5 – Frequências dos tipos de resposta às questões 3 e 4

Itens	Resposta			Não responde
	Correta	Parcialmente correta	Incorreta	
3	2	0	11	9
4a)	21	0	1	0
4b)	17	0	4	1
4c)	0	1	13	8
4d)	0	1	7	14

Analisando as respostas da questão 3 e comparando com as frequências das respostas das outras questões, podemos concluir que esta questão foi uma das questões mais difíceis para os alunos, sendo que 9 alunos não responderam e 11 responderam incorretamente.

De entre as respostas incorretas, a resposta mais frequente dada por 6 dos 11 alunos foi a de traçar um segmento de reta que une o ponto D ao ponto B, como se pode observar na Figura 5.

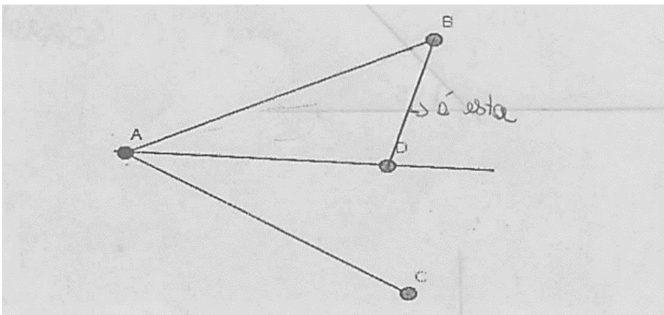


Figura 5. Resolução do aluno A_5 à questão 3.

De entre as respostas incorretas, salientam-se ainda duas respostas onde era traçado um segmento reta perpendicular à semirreta $\dot{A}D$, até intersetar o segmento $[AB]$.

No que toca às duas respostas corretas, em uma delas o aluno faz questão de representar o ângulo reto envolvido na construção.

Na questão 4, as alíneas a) e b) foram relativamente simples para os alunos, contudo nas restantes o mesmo já não se verificou. Na alínea a) apenas houve uma resposta errada, em que um aluno apresenta a seguinte resposta:

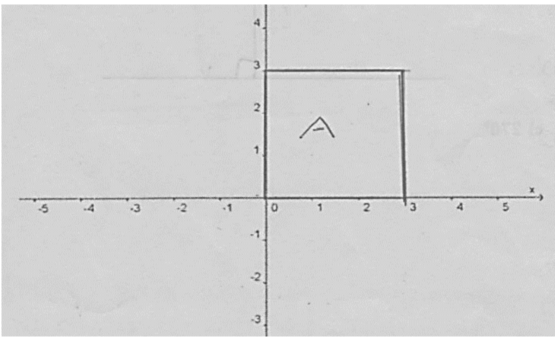


Figura 6. Resolução do aluno A_{11} à alínea a) da questão 4.

Pela Figura 6, o aluno parece representar um quadrado, embora esta resposta possa gerar a dúvida de se tratar de um quadrado ou uma forma própria de representar o ponto A, tendo a letra "A" ficado um pouco mais a baixo.

Na alínea b) as dificuldades já se fizeram sentir, obtendo-se uma não resposta e quatro respostas incorretas. Em três dessas respostas incorretas, os alunos marcaram o ponto de coordenadas $(0, -2)$, invertendo assim as coordenadas de B, e uma aluna coloca o ponto B na origem do referencial (Figura 7). O primeiro erro é mais comum, fruto da troca da abcissa e da ordenada; o segundo erro, localizar B na origem, é um erro não tão comum.

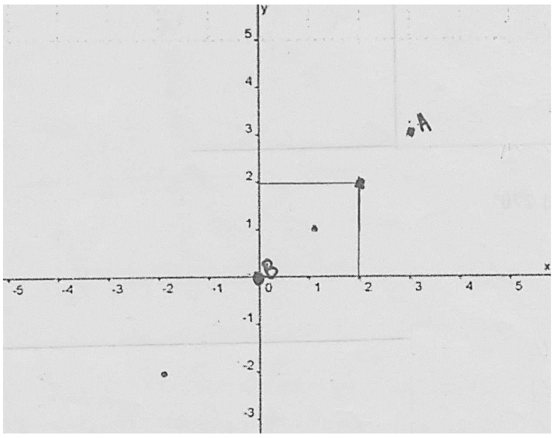


Figura 7. Resolução do aluno A_{17} à alínea b) da questão 4.

Nas alíneas c) e d) os alunos revelaram grandes dificuldades. Em qualquer das alíneas não houve uma única resposta correta, existindo apenas uma resposta parcialmente correta, dada pelo mesmo aluno e que pode ser observada na Figura 8.

Nesta resposta podemos observar que o aluno compreendeu as propriedades implícitas, contudo, recorrendo a um ponteado, não desenhou com exatidão o círculo nem a coroa circular.

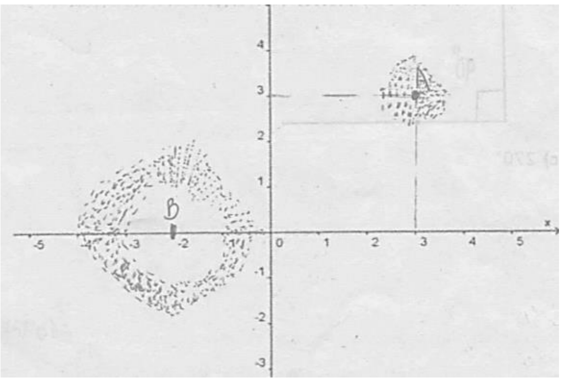


Figura 8. Resolução do aluno A_3 às alíneas c) e d) da questão 4.

No que toca às respostas incorretas, a grande maioria dos alunos (11) responde à alínea c) com o ponto de coordenadas $(2,2)$ e outro aluno responde com os pontos de coordenadas $(3,2)$ e $(2,3)$. Por fim, oito dos alunos não respondem.

Na alínea d) não se verificou melhoria em relação à alínea anterior. Oito dos alunos responderam incorretamente e a tendência foi a de marcarem um ou dois pontos na folha. Podemos observar na Figura 7 que o aluno, marcando o ponto B na origem, marca como resposta à alínea d) os pontos de coordenadas $(1,1)$ e $(-2,-2)$. Outro aluno, respondendo corretamente à alínea b), assinala como resposta à alínea d) os pontos $(-1,0)$ e $(-4,0)$. As restantes respostas incorretas seguem esta tendência de marcar um ou dois pontos no referencial, sem se verificar nenhum padrão repetitivo.

Assim, podemos concluir que os alunos tiveram dificuldades na determinação dos lugares geométricos, não compreendendo a noção de distância.

4.1.4. Desenhar a mediatriz de um segmento de reta e a bissetriz de um ângulo

Agora, analisam-se as questões 5 e 6 do teste. Na questão 5 apresenta-se a situação problema: dados dois pontos, pedia-se para localizar alguns pontos que estivessem à mesma distância dos dois pontos dados. Já na questão 6 era apresentada uma figura, representando uma fatia de piza, e era pedido aos alunos que dividissem essa fatia em duas partes iguais.

5. O Pedro e o Filipe brincam todas as tardes no campo que existe junto das suas casas. Depois da brincadeira, Pedro e Filipe despedem-se num ponto que esteja a igual distância de cada uma das suas casas. Cada dia descobrem um novo ponto nestas condições. Recorrendo ao desenho abaixo, localiza alguns pontos que estejam a igual distância das duas casas.

(ver figura em Anexo III)

6. O Pedro e o Filipe foram comer piza. No final restou uma fatia e decidiram dividi-la entre os dois. Na figura seguinte encontra-se a representação dessa fatia de pizza. Divide-a em duas partes iguais.

(ver figura em Anexo III)

Com a questão 5 pretende-se avaliar se os alunos são capazes de determinar pontos equidistantes de dois pontos dados e que métodos utilizam para os determinar. Já na questão 6 pretende-se avaliar se os alunos são capazes de bissetar um ângulo e que métodos utilizam para o fazer.

Tabela 6 – Frequências dos tipos de respostas às questões 5 e 6

Itens	Resposta			Não responde
	Correta	Parcialmente correta	Incorreta	
5				2
Localiza um ponto	3	0	2	
Localiza mais do que um ponto	7	3	5	
6	16	0	3	3

Na questão 5 alguns alunos localizaram apenas um ponto, outros localizaram dois, três ou quatro pontos e ainda houve um grupo de alunos que traçaram a mediatriz do segmento de reta que une as duas casas.

Cinco dos alunos da turma responderam à questão localizando apenas um ponto, como pode ser observado na Tabela 6, dos quais três alunos assinalam um ponto que efetivamente se encontra a igual distância das casas. Nessas três respostas corretas, todos localizam o ponto médio do segmento de reta em questão, não apresentando nenhum tipo de construção nem cálculo. Durante a prova, observando este tipo de resposta em um dos alunos, pedi a esse aluno que me explicasse, por escrito, como tinha determinado esse ponto, tendo referido: "Eu medi a distância entre o ponto A e o ponto B e marquei o meio".

Os restantes dois alunos, que igualmente apresentaram apenas um ponto, assinalaram-no incorretamente, em um dos casos ainda algo próximo da mediatriz do segmento de reta, resposta que pode ter sido obtida pelo método de tentativa-erro.

Analisando agora as respostas dos alunos que assinalaram mais do que um ponto, obtivemos sete respostas corretas, três respostas parcialmente corretas e cinco respostas incorretas.

Foram apresentadas quatro respostas corretas, em que foi traçada a mediatriz do segmento de reta, ficando bem explícito que os alunos compreendiam que os pontos pedidos eram pontos da mediatriz, pois registaram, por escrito, os pontos sobre a mediatriz. Dois desses alunos traçaram ainda o segmento de reta $[AB]$, mas apenas um indicou o ponto médio.

Outras duas respostas consideradas corretas podem ser observadas na Figura 9.

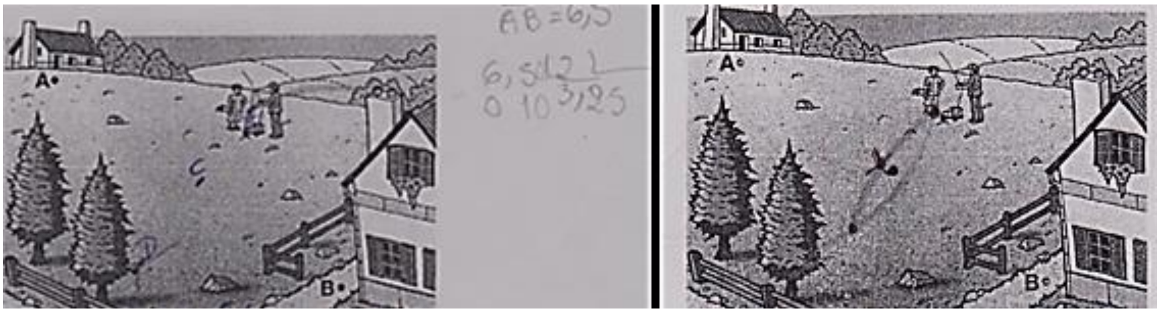


Figura 9. Resoluções dos alunos A_3 e A_{14} à questão 5.

Estes alunos começaram por determinar o ponto médio do segmento $[AB]$, e, posteriormente, com auxilio do compasso, determinaram os pontos de interseção das circunferências com o mesmo raio e centros nos pontos A e B. Contudo, não é claro o motivo pelo qual os alunos não traçaram a mediatriz do segmento de reta, concluindo a construção.

Finalmente, na outra resolução correta o aluno determina inicialmente o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, e, posteriormente, com ajuda do esquadro, determina um segundo ponto. Esta resolução assume-se como um pouco intuitiva, considerando que, no raciocínio do aluno, não esteve presente a noção de mediatriz.

Nas três resoluções parcialmente corretas observa-se a determinação correta de um ou dois pontos e incorreta de um outro ponto. Nessas três resoluções determina-se sempre o ponto médio do segmento. Numa dessas resoluções o aluno determina corretamente o ponto médio e traça uma circunferência com centro no ponto médio e assinala outro ponto pertencente à circunferência, mas que não se encontra à mesma distância das casas. Nas restantes duas resoluções transmite-se a ideia de resolução por tentativa e erro após a determinação do ponto médio.

Em quatro das cinco respostas incorretas, os alunos parecem colocar pontos para cada um dos meninos, isto é, o aluno coloca dois pontos, um ponto para cada menino se despedir, de modo a ficar a igual distância da sua casa, como se pode observar na Figura 10.

Na resolução do aluno A_{18} pode ler-se na imagem onde tem apenas um ponto "duas pessoas no mesmo [ponto]" e onde tem dois pontos "cada ponto é uma pessoa". Este aluno explica ao lado: "Medi com a régua de A até B o que me deu $7\ cm$, para ser igual cada ponto tem que ser $3{,}5\ cm$ de cada um". Para além deste raciocínio estar errado, o aluno revela não ser capaz de utilizar corretamente a régua pois a distância de A e B é inferior a $7\ cm$.

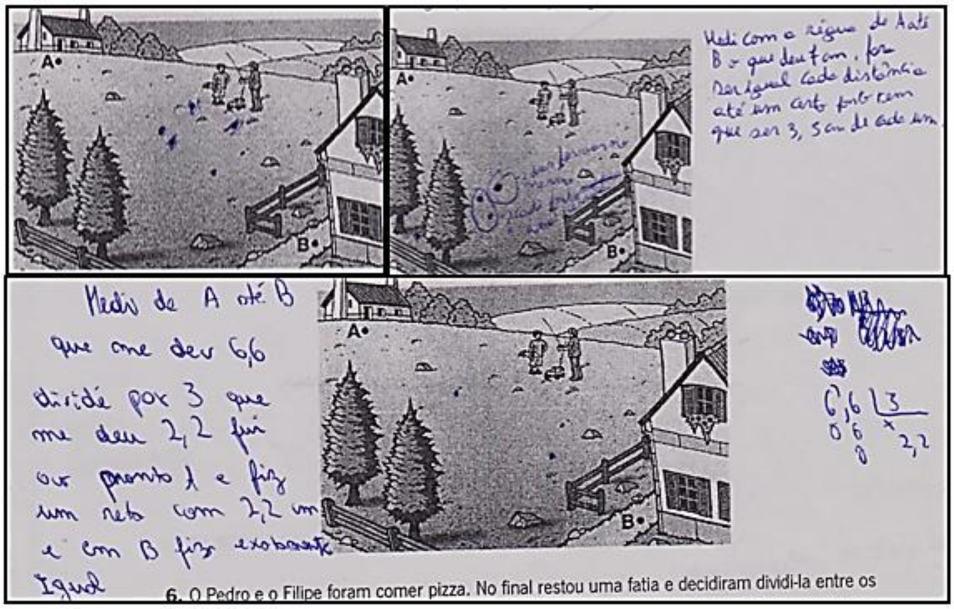


Figura 10. Resoluções dos alunos A_6 , A_{18} e A_{22} à questão 5.

Na resolução do aluno A_{22} o raciocínio parece ser o mesmo, mas a resolução foi diferente. Este aluno determinou o comprimento do segmento de reta $[AB]$ e dividiu-o por três, obtendo dois pontos que assinalou como resposta. Deste modo, o aluno coloca os meninos à mesma distância das suas respetivas casas e à mesma distância entre si.

Desta análise podemos concluir que dos alunos que responderam à questão, 55% assinala o ponto médio como resposta ou uma das respostas, os alunos tendencialmente utilizam a régua quando se trata de distâncias e a maioria dos alunos teve dificuldade em compreender que se tratava da mediatriz, embora seja um conceito já estudado no 2.º ciclo.

Analisando a questão 6, podemos notar que esta obteve significativamente mais respostas corretas que a questão anterior. Das dezasseis respostas corretas, em catorze podemos observar três tipos de resoluções. A resolução mais usada, efetuada por seis alunos, consistiu no desenho da bissetriz do ângulo. Cinco alunos optaram por determinar a amplitude do ângulo em causa e dividi-lo por dois. Três alunos determinaram o comprimento do segmento de reta que une as extremidades do ângulo, determinaram o ponto médio e uniram o vértice a esse ponto prolongando esse segmento. Esta resolução foi considerada correta pois os segmentos que formavam o ângulo eram iguais, contudo se assim não fosse estas resoluções estariam erradas. Por último, dois alunos apresentam a divisão correta do ângulo, contudo não é possível perceber que tipo de método usaram para resolver a questão.

Comparando com a questão anterior, podemos sublinhar que três dos quatro alunos que desenharam a mediatriz também desenham a bissetriz; o aluno A_3 desenhou a bissetriz e o aluno

A_{14} optou por dividir o segmento de reta que une as extremidades do ângulo (ver as suas resoluções da questão 5 na Figura 9), e, ainda, os três alunos que erraram esta questão erraram também a questão 5.

4.1.5. Uso do GeoGebra

Para finalizar o teste, os alunos foram questionados sobre o seu conhecimento do *software* GeoGebra, com o objetivo de compreender se já o tinham utilizado, e se sim, em que temas.

7. Já aprendeste matemática recorrendo ao *software* GeoGebra? (Sim/Não) **a)** Se respondeste Sim, quem o utilizou? (professor/alunos/ambos) **b)** Em que temas matemáticos (Números e Operações; Álgebra; Geometria e Medida; Organização e Tratamento de Dados) foi usado?

Da análise das respostas dos alunos, vinte indicaram que já tinham aprendido Matemática com recurso ao GeoGebra. Desses vinte, apenas um aluno afirmou tê-lo usado, enquanto os restantes dezanove referiram que quem o utilizou foi apenas o professor. Relativamente aos temas em que o GeoGebra foi utilizado, os alunos indicaram que foi essencialmente na Geometria, mas também alguns alunos indicaram na Álgebra, nomeadamente na representação de gráficos, e no tema de Organização e Tratamento de Dados.

Deste modo, verifica-se que os alunos conheciam o *software* e algumas das suas potencialidades, mas não sabiam usá-lo, o que foi tido em consideração aquando da preparação e implementação do projeto.

4.2. O uso dos materiais e a observação das dificuldades

Nesta secção analisam-se os episódios mais relevantes das aulas com ênfase no projeto, tendo em conta os vários materiais didáticos utilizados. A intervenção decorreu durante oito aulas consecutivas, nas quais foi aplicada uma ficha por partes sobre os conteúdos anteriores entre a quarta e a quinta aulas.

Durante as aulas foram sendo aplicados os vários materiais, os quais estavam sempre disponíveis aos alunos, excetuando o GeoGebra que apenas estava disponível no meu computador, que era projetado e servia como instrumento de correção dos exercícios propostos no quadro. Esta secção está dividida em quatro subsecções, uma por cada material didático utilizado, e nela apresenta-se o que foi sendo observado com cada material ao longo da intervenção.

Para que se possa compreender melhor todo o trajeto realizado durante a intervenção de ensino, organiza-se na Tabela 7 o resumo da intervenção, contemplando os conteúdos, as atividades e os materiais das respetivas aulas.

Tabela 7 – Organização da intervenção de ensino centrada no projeto

Aula	Conteúdo	Atividades	Materiais
1ª aula 45 minutos	- Introdução aos Lugares Geométricos. - Circunferência, círculo e coroa circular.	Determinação da área de evacuação num mapa, dados o raio real e a escala.	Material de desenho, corda, cartolina com mapa, GeoGebra.
2ª aula 90 minutos	- Mediatriz de um segmento de reta.	Estudo da mediatriz com recurso a origami. Exercícios de consolidação.	Papel, material de desenho, GeoGebra.
3ª aula 45 minutos	- Bissetriz de um ângulo convexo.	Exploração de um problema envolvendo as propriedades da bissetriz.	Material de desenho, GeoGebra.
4ª aula 90 minutos	- Resolução de exercícios sobre Lugares Geométricos.	Resolução de exercícios sobre lugares geométricos. Caça ao tesouro pela escola envolvendo lugares geométricos.	Material de desenho, GeoGebra, mapas do tesouro, pistas, tesouro.
5ª aula 90 minutos	- Circuncentro. - Incentro. - Ortocentro.	Exploração de problemas envolvendo as propriedades do circuncentro, incentro e ortocentro de um triângulo.	Material de desenho, papel e GeoGebra.
6ª aula 45 minutos	- Resolução de problemas envolvendo o circuncentro, incentro e ortocentro.	Resolução de tarefas envolvendo circuncentro, incentro e ortocentro.	Material de desenho, GeoGebra.
7ª aula 90 minutos	- Baricentro.	Estudo do baricentro e de casos particulares dos pontos notáveis de triângulos no GeoGebra.	Computadores com GeoGebra.
8ª aula 45 minutos	- Resolução de problemas envolvendo pontos notáveis de um triângulo.	Resolução de tarefas envolvendo pontos notáveis de um triângulo.	Material de desenho.

4.2.1. A corda

Como se pode observar pela tabela 7, a corda foi o primeiro material a ser utilizado pelos alunos, acompanhado do material de desenho, este último apenas com papel auxiliar. Esta aula tinha como objetivo introduzir o tema dos Lugares Geométricos e conhecer a circunferência, o círculo e a coroa circular como Lugares Geométricos. Para tal, os alunos organizaram-se, como habitualmente, em grupos de trabalho de 3 a 4 elementos, e tinham à sua disposição o material de escrita, o material de desenho, uma corda e uma tesoura.

A cada grupo foi ainda fornecido, em cartolina, um mapa com a respetiva escala gráfica de 3,5 cm para 5 km, como podemos observar na Figura 11, e foi distribuída por cada aluno, a seguinte questão:

1. Dias depois do maior terremoto e tsunami que assolou o Japão a 11 de março de 2011, a central nuclear de Fukushima Daiichi sofreu várias explosões. Os níveis de radiação ao redor da central superaram oito vezes o limite de segurança, forçando a evacuação da população a 20 km ao redor da central.

O mapa que te foi fornecido é uma representação da zona ao redor da central.

1.1. A cidade Tamura foi evacuada? Porquê?
1.2. Traça no mapa a área de evacuação.
1.3. Por precaução, o governo do Japão definiu uma zona restrita que estaria pronta a evacuar caso a situação piorasse. Essa zona foi delimitada a 30 km da central. Traça no mapa a zona restrita.

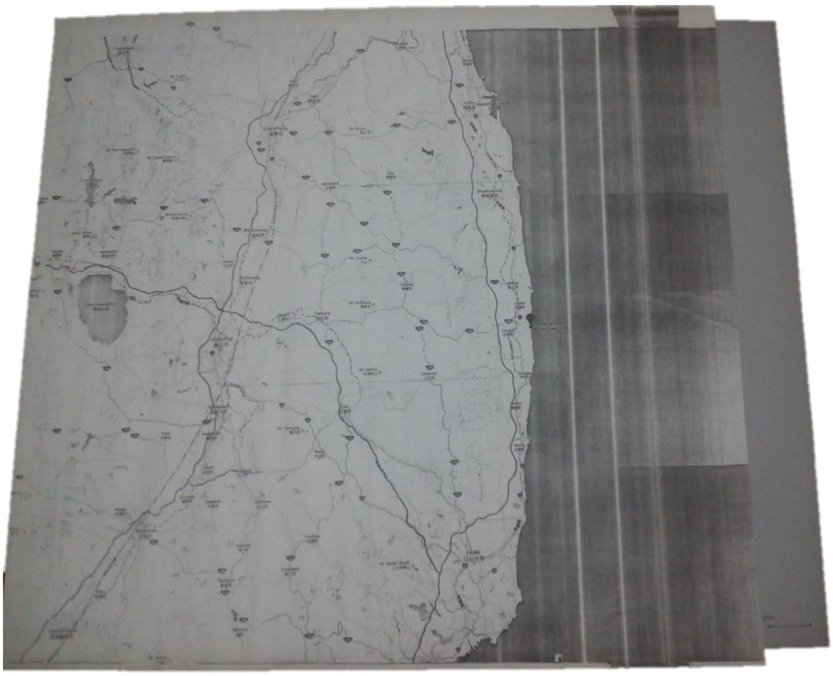


Figura 11. Mapa fornecido aos alunos para a realização da tarefa com a corda.

Não foi dada qualquer indicação nem feita qualquer introdução do tema aos alunos, apenas foi distribuído o material e pediu-se que resolvessem a questão em grupo. Não foi dada, também, qualquer indicação aos alunos de qual deveria ser o material a usar.

Com este exercício pretendia-se que os alunos determinassem o círculo e a coroa circular através das propriedades, compreendendo assim as propriedades que os definem. Para isso, o problema dava-lhes um ponto fixo que era a central nuclear e um raio, a medida que permitia definir a área a evacuar. Existia ainda uma escala que devia ser respeitada.

A primeira alínea era bastante acessível. Nela pedia-se que os alunos concluíssem se a cidade de Tamura tinha sido evacuada e porquê. De uma forma geral, todos os grupos resolveram esta alínea sem dificuldade, contudo, não se verificou apenas uma estratégia de resolução.

Os grupos G_1, G_4 e G_6 utilizaram a corda fornecida para responder à alínea. Sendo a escala do mapa uma escala gráfica, que fazia corresponder 3,5 cm a 5 km, então a estratégia desses grupos consistiu em medir a corda pela escala gráfica, sendo que a medida teria de ser quatro vezes a escala, pois a área de evacuação era de 20 km. Assim, os alunos justificaram que, como não conseguiam chegar a Tamura com a medida determinada na corda, esta cidade estaria a mais de 20km, logo não tinha sido evacuada.

Já os alunos do grupo G_3, apesar de terem tentado algo com a corda, resolveram a alínea utilizando o compasso. A estratégia foi muito semelhante à utilizada com a corda, contudo este grupo uniu com a corda a central nuclear e a cidade de Tamura e com o compasso, com a abertura na medida da escala, traçaram ao longo da corda quatro segmentos de reta determinando no mapa a medida correspondente aos 20 km. Como observaram que não tinham chegado a Tamura, concluíram que a cidade não foi evacuada. Para se compreender melhor esta estratégia, encontra-se na Figura 12 uma fotografia dos alunos a resolverem a alínea.

Figura 12. Resolução do grupo G_3 à alínea 1.1.

O grupo G_5 optou por uma resolução mais algébrica. Começou por determinar a medida da escala e de seguida mediu a distância entre a central nuclear e a cidade em análise. Depois aplicando uma regra de três simples, que se pode observar na Figura 13, verificou que a cidade se encontra a aproximadamente 26 km da central nuclear, logo ela não foi evacuada.

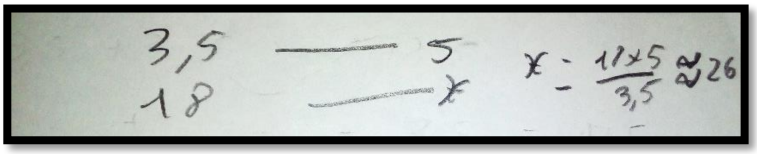


Figura 13. Estratégia de resolução do grupo G_5 para a alínea 1.1.

Por último, o grupo G_2 calculou a abertura do compasso para o raio de evacuação e verificou que a cidade de Tamura ficava a mais de 20 km.

Assim, todos os grupos responderam corretamente à primeira alínea, embora em algumas justificações transparece a ideia que apenas seria evacuada se estivesse a 20 km da central.

Tabela 8 – Material usado e justificações à alínea 1.1 por grupo

Grupo	Material usado	Justificação
G_1	Corda	"não porque apenas as cidades com 20 km da central foram evacuadas porque se situa a mais km. "
G_2	Régua e compasso	"não pois não está a 20 km."
G_3	Corda e compasso	"não foi evacuada porque esta a mais de 20 km"
G_4	Corda	"não porque não esta a 20 km"
G_5	Régua	"não foi evacuada porque está aproximadamente 26 km."
G_6	Corda	"não porque a cidade esta a mais de 20 km"

Como podemos observar na Tabela 8, os grupos G_2 e G_4 respondem que Tamura não foi evacuada por não se encontrar a 20 km da central. Isto faz-nos questionar sobre se os alunos tomaram como área evacuada apenas a zona que se encontrava a 20 km da central em vez de considerarem também a área que se encontrava a menos de 20 km. Para desfazer esta dúvida podemos analisar a alínea seguinte. Quanto aos restantes grupos, eles referem que a cidade se encontrava a mais de 20 km da central e por essa razão não teria sido evacuada.

Na alínea seguinte pedia-se que os alunos traçassem no mapa a área de evacuação. Esta alínea apelava aos conhecimentos das propriedades do círculo, em que os alunos tinham um ponto fixo, a central, e teriam de traçar a área que se encontrava a 20 km ou menos da central.

A única dificuldade que foi levantada pelos grupos nesta alínea foi na determinação da abertura do compasso. Na alínea anterior alguns grupos usaram a corda para "fugir" à determinação da escala (ver Tabela 8). Esses mesmos grupos voltaram a utilizar a corda para a determinação da escala. Como por exemplo, os grupos G_1, G_4 e G_6 cortaram a corda com o comprimento de 4 vezes a escala (4 x 5 km=20 km) e, com essa medida, abriram o compasso e traçaram a área que se encontrava a 20 km. Já os restantes grupos procederam à determinação da abertura do compasso através de cálculos. Todos os grupos traçaram o arco da circunferência com o compasso. Se observarmos, na Tabela 9 a comparação do material que cada grupo usou nas duas alíneas, poderemos concluir que os grupos mantiveram a escolha do material em ambas as alíneas, já que na primeira alínea esse material já os tinha ajudado na determinação da escala.

Tabela 9 – Material usado pelos grupos para responder às alíneas 1.1 e 1.2

Grupo	**Material usado em 1.1.**	**Material usado em 1.2.**
G_1	Corda	Corda e compasso
G_2	Régua e compasso	Régua e compasso
G_3	Corda e compasso	Régua e compasso
G_4	Corda	Corda e compasso
G_5	Régua	Régua e compasso
G_6	Corda	Corda e compasso

Todos os grupos traçaram o arco de circunferência de centro na central, mas os grupos G_1 e G_6 apresentaram um raio do arco de circunferência 2,3 cm e 1,1 cm maior, respetivamente, do que o correto. Este erro pode estar associado à utilização da corda para determinar a abertura do compasso.

A última alínea foi onde os alunos sentiram mais dificuldades. Esta indicava-lhes que tinha sido definida uma nova zona, zona de precaução, e que estava delimitada a 30 km da central.

Ao calcularem a abertura do compasso, os alunos iriam verificar que a abertura máxima do compasso não seria suficiente para traçar o limite desta área. Este era o ponto chave desta atividade. Para resolver esta alínea os alunos não poderiam utilizar o compasso, então teriam de encontram uma alternativa para a resolver. A razão pela qual eu optei pela apresentação desta atividade foi porque acredito que quando não temos o material ou as regras com as quais fomos formatados a fazer, somos forçados a pensar em alternativas para resolvermos aquilo que pretendemos, de forma a solucionar o problema que temos em mãos. Pretendia, assim, que os alunos refletissem sobre as propriedades da circunferência, do círculo e da coroa circular, de forma a que, sem o uso do compasso, pudessem resolver a última alínea.

Todos os grupos sentiram dificuldades ao abordar esta alínea. Tomemos como exemplo o diálogo registado no grupo G_3:

A_{20} – Oh professora, nós precisamos de uma régua maior!
Professora – Precisas de uma régua maior?
A_{20} – Eu acho que sim.
Professora – Porque?
A_{20} – Porque é 5 e falta...
A_{10} – E falta ainda 30 km... Oh é mais 15, é mais 15.
A_{20} – Não.
A_{10} – Então quanto é que é 15...
A_{20} – É 3,5 cada.
A_{10} – 3,5 mais 3,5 dá... mais 3,5 dá...
A_{20} – 11,5.
A_{10} – Achas que é isso?!

A_{20} – 3,5 vezes 3.
A_{10} – 10,5.
A_{20} – Não é assim...não é isto...
A_{10} – Se ali é 20 km, é mais 15 pra frente... mais 10!
A_{20} – Não...
Professora – O que é que tu achas A_1? O que é que está aqui marcado?
A_1 – A área de evacuação.
Professora – Sim, o que é que foi evacuado?
A_{20} – Isto que está dentro da linha.
Professora – Mas vocês aí só têm marcado a linha.
A_{10} – Ah! Temos de riscar aqui.
Professora – Pronto, agora a área restrita é delimitada a 30 km da central. Pensem como podem fazer para a marcar.

Durante a aula, quando escutei este diálogo não tinha compreendido que os alunos já tinham testado traçar a área com o compasso e estavam à procura de alternativas, entendi que não tinham compreendido aquilo que tinham de traçar. Passado uns minutos voltei ao grupo deles e desenvolveu-se o seguinte diálogo.

A_{10} – Oh professora, eu não estou a perceber isto: "a zona delimitada a 30 km"...
A_{20} – Tem de ser assim, a zona delimitada à volta. (apontando para o mapa como se desenhasse raios da circunferência).
Professora – Desde onde A_{20}?
A_{20} – Desde a central.
Professora – Pronto...
A_{10} – Mas é que o nosso compasso não dá, não chega.
Professora – Vocês não acham que eu pensei nisso?
(Alguns segundos a pensar)
A_{20} – É com a corda!

Após os alunos compreenderem que poderiam usar a corda, todos foram capazes de delimitar a zona restrita. Contudo, tanto na alínea 1.2 como na alínea 1.3 apenas o grupo G_3 assinalou a zona interior, possivelmente devido ao diálogo que tivemos. Os restantes grupos apenas traçaram os dois arcos. No momento de síntese da atividade, quando foram expostas as seis cartolinas, ocorreu o seguinte diálogo:

Professora – (Apontando para o arco de centro na central e raio correspondente a 20 km) Este ponto está a que distância da central?
Vários alunos – A 20.
Professora – E este? E este? E este? (Apontando para vários pontos do mesmo arco)
Vários alunos – 20... 20 ... 20.
Professora – E este? (apontando para um ponto do arco de centro na central e raio correspondente a 30 km)
Vários alunos – 30.

Professora – E este? (apontando para um ponto pertencente ao interior da área de evacuação)
Vários alunos – A menos de 20.
Professora – O que é que eu fazia? Evacuava apenas o que estava a 20 km?
Vários alunos – Não!
A_3 – Não, e o que estava dentro.
A_{20} – E o que estava a menos.
A_6 – No máximo a 20 km.
A_3 – Até 20 km.

Neste momento os alunos compreenderam que deveriam ter assinalado a parte interior das áreas. De seguida procedemos à identificação dos lugares geométricos e os alunos conseguiram, eles próprios, definir a circunferência e o círculo, mostrando terem bem presentes as propriedades que os definem.

A corda trouxe para a atividade pouco rigor aquando do desenho dos lugares geométricos, contudo penso que foi bastante útil para que os alunos refletissem sobre as propriedades do círculo e da circunferência. É claro que não seria viável continuar com o uso da corda para a determinação da circunferência, mas como consequência da teoria de Piaget, o uso de materiais concretos deve ser o ponto de partida para ensinar Matemática, sendo usados como primeira etapa da exploração dos conceitos matemáticos (Ferreira, et al., 2010).

As dificuldades identificadas nesta atividade, de determinação dos lugares geométricos pedidos, relacionaram-se com a utilização da escala, ficando a impressão que os alunos não saberiam trabalhar com aquele tipo de escala. Apesar disso, houve vários grupos a arranjar estratégias para contornar o problema. Outra dificuldade observada foi na identificação do círculo, com a maioria dos grupos a assinalar como área a evacuar os arcos de raios 20 e 30 km, respetivamente. Penso também que as palavras "ao redor da central" foram determinantes para que nenhum grupo tivesse dúvidas a que "família" de lugares geométricos remetiam as questões.

4.2.2. O origami

Seguindo a tabela 7, podemos verificar que o papel, aliado à técnica origami, foi o segundo material a ser utilizado pelos alunos. Esta aula tinha como principal objetivo conhecer e definir a mediatriz de um segmento de reta, mas também se pretendia explorar propriedades geométricas essenciais ao domínio do conceito de mediatriz. Para isso, escolhi a técnica origami pois é uma maneira excecional de adicionar um elemento de experiência ativa a uma turma (Olson, 1989), fazendo-os transpor para o papel algo que conhecem de uma forma mais formal e dando-lhes a oportunidade de manipular esses objetos formais com as mãos. Formar retas dobrando vincos numa folha de papel é uma maneira interessante de descobrir e demonstrar relações e uma vez verificado por dobragem de papel, o trabalho formal posterior não parecerá tão estranho (Olson, 1989).

Assim, os alunos organizados de forma habitual, em grupos de trabalho de 3 a 4 elementos, tiveram à sua disposição seis folhas A6 coloridas, fornecidas por mim, e o material de escrita, sendo-lhes indicado que apenas necessitariam de uma caneta. Como pretendia recolher as folhas para posterior análise, estas já lhes foram entregues com o nome deles e a tarefa a que deviam responder. Foi entregue a cada aluno o guião da atividade que pode ser consultado no Anexo IV.

Este guião era constituído por seis tarefas, uma por cada objeto em estudo, e cada tarefa correspondia a uma folha. As tarefas começavam pelo estudo do ponto, de seguida, o estudo da reta, na tarefa 3 estudavam a perpendicular de uma reta, e de seguida as retas paralelas. Antes de finalizar os alunos estudavam o simétrico de um ponto em relação a uma reta e por fim a mediatriz. Esta atividade foi realizada de forma construtiva, onde os alunos progressivamente iam estudando propriedades presentes na mediatriz, em que, em geral, o conceito estudado na tarefa anterior era necessário para a tarefa seguinte.

Antes de propor aos alunos a realização da atividade decidi fazer uma pequena referência à técnica que iriam trabalhar. Tratou-se de umas considerações breves, indicando aos alunos qual era a técnica, a origem e dando exemplos de figuras que todos conhecemos do origami. Os alunos mostraram-se desde logo bastante entusiasmados e curiosos com a atividade.

Contudo, perante a retirada dos materiais de desenho e medição, os alunos ficaram bloqueados. Observa-se no inicio da atividade que os alunos têm as folhas nas mãos, mas não tentam fazer nada com elas e ouve-se "Eu tenho medo de estragar a folha". Porém, após um aluno ter conseguido resolver a atividade, todos os outros começaram a explorar a sua folha. A primeira questão era apresentada da seguinte forma:

<u>Tarefa 1: Obtenção de pontos</u>
a) Marca um ponto na folha de papel dobrando-a.
b) Explica como fizeste.
c) Podes fazê-lo com qualquer tipo de dobragem?

Com esta tarefa pretendia-se que os alunos refletissem sobre de que maneira é que dobrando a folha poderiam marcar um ponto. Assim, esperava-se que os alunos fizessem duas dobras na folha de modo a que as dobras se intersetassem. Deste modo, aplicariam a propriedade geométrica que duas restas concorrentes se intersetam exatamente num ponto.

Figura 14. Dobragens a efetuar na Tarefa 1.

O primeiro grupo a chegar à solução foi o grupo G_2, através do aluno A_{14}. Este aluno agarrou a folha num ponto e vincou um pouco, aí percebeu que a solução era dada pela interseção de dobras. Observemos a sua resolução na Figura 15.

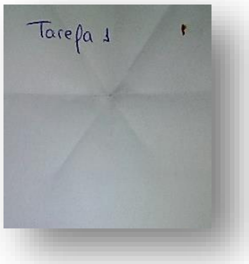


Figura 15. Dobragens efetuadas pelo aluno A_{14} para responder à Tarefa 1.

Na Figura 15 podem observar-se várias dobras na folha de papel que coincidem todas num ponto. Na sua explicação, o aluno escreveu: "Dobrei 2 vezes de forma diferente e o que coincide é o ponto". Também na tentativa de "agarrar" um ponto, o aluno A_{16} explicou o seu procedimento da seguinte forma: "Prestes a dobrar a folha em duas partes calquei com o dedo um pouco dessa dobra e depois fiz a mesma coisa e no mesmo sítio, só [que] com a dobra na vertical". Houve também um conjunto de oito alunos que dobraram a folha em quatro partes iguais. Todos os alunos conseguiram fazer a dobragem encontrando o ponto pretendido.

Assim, a dobragem na Tarefa 1 não ofereceu muito desafio aos alunos, tendo a dificuldade inicial resultado da adaptação à atividade proposta. Porém, a alínea c), da Tarefa 1, levantou bastantes dúvidas. Acredito que essa dificuldade provenha da resistência (perfeitamente natural) dos alunos, ao não observarem a geometria que se encontra "por de trás" das dobras e dos vincos. O que estava verdadeiramente a ser questionado na alínea c) era se num plano quaisquer duas retas se intersetavam num ponto. A resposta era não, contudo isso gerou alguma discussão entre os alunos. A maioria dos alunos respondeu afirmativamente, indicando que com qualquer tipo de dobragem podiam definir um ponto. Analisemos o diálogo ocorrido no momento de síntese desta tarefa:

Professora – Como é que vocês obtiveram o ponto? A_{14}, como é que obtiveste o ponto?
A_{14} – O ponto? Dobrando muitas vezes isto (apontando para a zona onde estava o ponto).
Professora – Era preciso dobrar muitas vezes?
A_3 – Não, bastava duas vezes.
A_{14} – Basta duas vezes, mas eu quando fiz dobrei muitas. (Este aluno dobrou quatro vezes)
Professora – Porque bastava duas vezes, A_3?
A_3 – Para ter uma vertical e uma horizontal e encontrarmos um ponto.
Professora – É necessário traçar uma vertical e uma horizontal?
A_3 – Sim.
Professora – Vou fazer duas dobras. (traço duas retas muito próximas, mas concorrentes).
A_3 – Ah! Não, não, não precisa ser perpendicular.
Professora – O que representa cada dobragem que vocês fazem?
A_{22} – Um ponto.
Professora – Cada dobragem.
A_{17} e A_{14} – Uma reta.
(...)
Professora – Qual é a propriedade que temos nesta tarefa?
A_3 – Que duas retas, quando se cruzam, formam um ponto.
Professora – Muito bem! Era isso que estava por de trás da tarefa. E agora... podemos fazer isto com qualquer tipo de dobragem?
Vários alunos – Sim.
Professora – Então eu vou fazer duas dobragens (fiz dobragens paralelas). Encontrei um ponto?
Vários alunos – não.

Ao observarem a minha dobragem com dobras paralelas, os alunos compreenderam a distinção entre as posições relativas das retas e que, para que obtenhamos um ponto, as retas têm de ser concorrentes. Na Tarefa 2 continuamos o estudo das retas.

Tarefa 2: A reta
a) Encontra a reta que passa pelos pontos dados A e B dobrando o papel.
b) Consegues encontrar mais alguma reta?
c) Assinala o segmento de reta $[AB]$.
d) Indica quais as semirretas que podes assinalar nesta reta com os dois pontos dados.

Com esta tarefa pretendia-se que os alunos compreendessem que por dois pontos passa uma única reta, observando eles que não existe mais nenhuma. Pretendia-se também que os alunos recordassem os conceitos de reta, segmente de reta e semirreta. Assim, esperava-se que os alunos fizessem uma dobra que passasse pelos dois pontos dados como podemos observar na Figura 16.

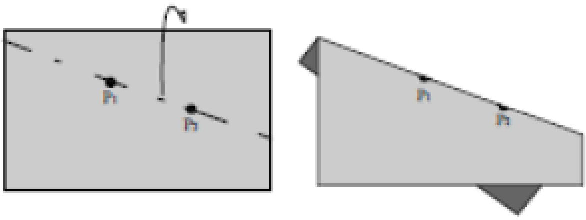


Figura 16. Dobragem a efetuar na Tarefa 2.

Esta dobragem não oferecia muita dificuldade aos alunos, pelo que todos os alunos a fizeram facilmente. Quando na alínea b) se perguntou aos alunos se conseguiriam encontrar mais alguma reta que passasse por A e B, todos responderam que não, o que seria de esperar pois, pelo papel, rapidamente se conseguiria chegar a essa conclusão. Na alínea c), onde se pedia para assinalar o segmento de reta $[AB]$, todos os elementos do grupo G_4 responderam assinalando a reta AB e ainda o aluno A_{15} não respondeu, enquanto os restantes alunos assinalaram corretamente o segmento de reta $[AB]$. Mas, foi na última alínea onde houve mais dúvidas. Durante a realização da tarefa seguiu-se o seguinte dialogo:

> A_{20} – Oh professora, tem de passar pelos dois pontos?
> Professora – Em qual? Na dois?
> A_{20} – Sim, elas têm de passar pelos dois pontos?
> Professora – Tens de indicar quais as semirretas que podes assinalar nessa reta com esses dois pontos.
> A_{20} – Mas que passe pelos dois pontos, ou que comece num e ir por ali fora?
> Professora – O que precisas para ter uma semirreta? E depois vês quantas semirretas podes assinalar nessa reta, com esses pontos.
> A_{14} – Infinitas.
> A_{17} – É duas.
> A_3 – É duas, é duas semirretas.
> A_{20} – Então são duas semirretas que tenho de assinalar... Como assim?
> A_3 – Uma semirreta tem princípio e não tem fim, então é uma a começar no A e outra a começar no B.
> A_{20} – Mas...
> A_3 – Tu precisas de dois pontos para a semirreta.

A dúvida do aluno A_{20} era que como uma semirreta tem princípio, mas não tem fim, ele a partir do ponto A poderia ter a semirreta à esquerda e à direta de A, contudo o que ele não refletiu foi que, para poder definir uma semirreta ele precisa de dois pontos, assim teria apenas as semirretas $\dot{A}B$ e $\dot{B}A$.

O grupo G_2 respondeu que esta alínea dizendo que poderiam assinalar infinitas semirretas. Possivelmente este grupo não teve em conta a parte da questão que lhes pedia para indicar quais as semirretas que podiam assinalar na reta com os dois pontos dados, respondendo quantas semirretas se podem assinalar em uma reta.

Em geral, até esta tarefa os alunos não manifestaram grandes dificuldades na realização da atividade, contudo a partir da tarefa 3 os alunos revelaram maiores dificuldades.

Tarefa 3: Traçar a perpendicular a uma reta

a) Por dobragem de papel, constrói duas retas perpendiculares que não sejam paralelas às margens do papel.

b) Explica como o conseguiste.

c) Assinala um ponto no papel, que não pertença à reta, e traça uma reta perpendicular à primeira reta que passe por esse ponto dobrando o papel.

Esta dobragem é, possivelmente, das dobragens que, no quotidiano, mais fazemos no papel. Por exemplo, quando pretendemos dobrar uma folha em quatro partes iguais. Assim, com esta tarefa pretendia-se que os alunos refletissem de que forma poderiam determinar a perpendicular de uma reta. Para isso bastaria em primeiro lugar fazer uma dobra para definir uma reta e depois voltar a dobrar no outro sentido fazendo coincidir a dobra. A propriedade que está por de trás desta tarefa é que se dividir ao meio um ângulo raso obtenho um ângulo reto.

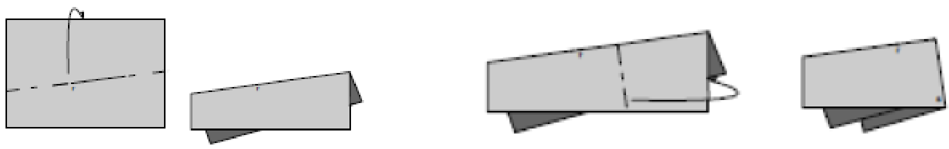


Figura 17. Dobragens a efetuar da Tarefa 3 a).

Esta tarefa gerou muitas dúvidas iniciais. Foi a primeira tarefa onde os alunos (8 alunos) me pediram para lhes facultar outra folha pois a primeira já estava confusa. Alguns alunos, apesar do que era exigido, tentaram fazer as dobragens paralelas às margens da folha ou utilizando material de desenho, sendo-lhes pedido para tentarem de outra forma. A maioria dos alunos respondeu traçando duas diagonais. Apenas o grupo G_4 encontrou as retas perpendiculares, não sendo estas paralelas às margens nem as diagonais.

Nesta tarefa, pela primeira vez, obtive dobragens erradas provenientes de quatro alunos. Três dessas quatro respostas erradas parece que resultaram da pouca precisão ao fazer a dobra, não havendo o cuidado de vincar corretamente. Porém, uma dessas respostas provém do não conhecimento correto do conceito perpendicular pois o aluno parece dobrar duas retas concorrentes não perpendiculares e na sua explicação do procedimento escreve: "Basta meter as retas inclinadas pois sempre irão bater nas margens".

O objetivo da última alínea era preparar os alunos para a tarefa seguinte, onde poderiam observar que duas retas perpendiculares a uma reta são paralelas entre si. Assim, os alunos que erraram a primeira alínea também erraram a segunda alínea, observando-se muita falta de precisão. Os alunos que resolveram a alínea a) sem recorrer às diagonais, resolveram corretamente a alínea c). Dos catorze alunos que resolveram a alínea a) utilizando as diagonais obtivemos duas situações distintas: nove alunos observando a dobragem conseguiram compreender como deveriam obter a segunda e cinco alunos não conseguiram obter esta terceira reta, apresentando no papel apenas tentativas de dobragens.

<u>Tarefa 4: Construção de retas paralelas</u>

a) Assinala um ponto e uma reta que não seja paralela a nenhuma margem. A partir da reta constrói outra que seja paralela e passe pelo ponto marcado.

b) Explica como fizeste.

Com esta tarefa pretendia-se que os alunos refletissem de que forma conseguiriam obter duas retas paralelas sem o uso de qualquer material. A propriedade que se encontrava por de trás desta tarefa era que se duas retas têm a mesma perpendicular, então essas retas são paralelas. Esta foi sem dúvida a tarefa mais difícil para os alunos, embora para a resolver teríamos apenas de repetir os passos da tarefa 3, isto é, fazíamos uma dobra e marcávamos um ponto, determinávamos a reta perpendicular e, por fim, determinávamos a perpendicular de uma das retas a passar nesse ponto.

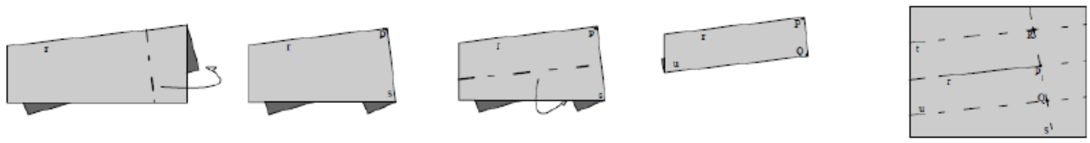


Figura 18. Dobragens a efetuar na Tarefa 4.

Contudo, os alunos revelaram grandes dificuldades nesta tarefa, havendo apenas cinco construções corretas, fruto de bastante reflexão e várias tentativas. Os restantes alunos apresentam tentativas, e alguns tentaram recorrer ao material de desenho ou às margens do papel. A maioria tentou por tentativa e erro vincar duas retas que pudessem parecer paralelas. Durante a aula, foram vários os pedidos de novas folhas para recomeçar a tarefa e foi-se ouvindo: "Professora, não sei" ou "não consigo". A maioria dos alunos ficou bloqueado nesta tarefa a tentar ou a refletir e foram várias as solicitações de ajuda, o que foi gerando algum ruido na sala. Para ultrapassar a situação convidei os alunos a avançarem para a tarefa seguinte, voltando a esta tarefa se tivessem tempo.

<u>Tarefa 5: Simétrico de um ponto em relação a uma reta</u>

a) Marca um ponto e uma reta que não contenha esse ponto. Encontra o simétrico desse ponto em relação à reta traçada.

b) Explica como fizeste.

Com esta tarefa pretendia-se que os alunos recordassem o conceito de simétrico de um ponto em relação a uma reta, conceito essencial para a compreensão das propriedades da mediatriz. As propriedades que estavam por trás desta tarefa eram que a distância do ponto à reta é igual à distância do seu simétrico à mesma reta, sendo a distância determinada na perpendicular. Para isso, os alunos apenas tinham de marcar na folha uma reta e um ponto, traçar a perpendicular à reta que passe nesse ponto e dobrando pela reta marcada encontrar o ponto que se encontra à mesma distância que o primeiro.

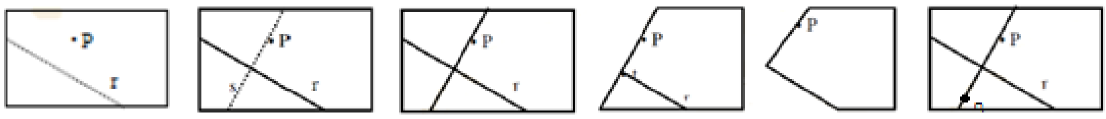


Figura 19. Dobragens a efetuar na Tarefa 5.

Devido aos alunos terem ficado bastante bloqueados na Tarefa 4, poucos conseguiram resolver esta tarefa, passando, a meu pedido, a resolverem primeiro a tarefa 6, para que pudéssemos ter uma discussão mais rica no momento de síntese e na definição de mediatriz como lugar geométrico. No entanto, dos vinte e um alunos que realizaram esta atividade, oito ainda conseguiram resolver esta tarefa.

Das oito resoluções, seis foram resolvidas corretamente e duas de forma incorreta. Das corretas, quatro foram resolvidas como esquematiza a Figura 19 e duas foram resolvidas com recurso apenas à reta e ao ponto, dobrando o papel pela reta e procurando onde o ponto marcado "cai" do outro lado da reta. Apesar de ser resolvida com pouca exatidão, considerei correta esta resolução pois acarreta satisfatoriamente o conceito de simétrico.

Já as duas respostas incorretas pertencem a dois alunos do mesmo grupo que revelaram não compreender o que estava a ser pedido, ou não reconheceram o conceito de simétrico de um ponto em relação a uma reta, já que um desses alunos apresenta duas retas perpendiculares, um ponto na interseção e outro numa das retas e explica o seu procedimento do seguinte modo: "Dobrando a folha em duas retas e marcando dois pontos". Já o outro aluno apresenta duas retas paralelas, uma traçada a caneta e outra obtida através de dobragem, ainda um ponto na reta dobrada e explica o seu procedimento: "Fiz paralelas e depois só tive de meter o ponto no sitio correto". Estas resoluções podem ser observadas na Figura 20.

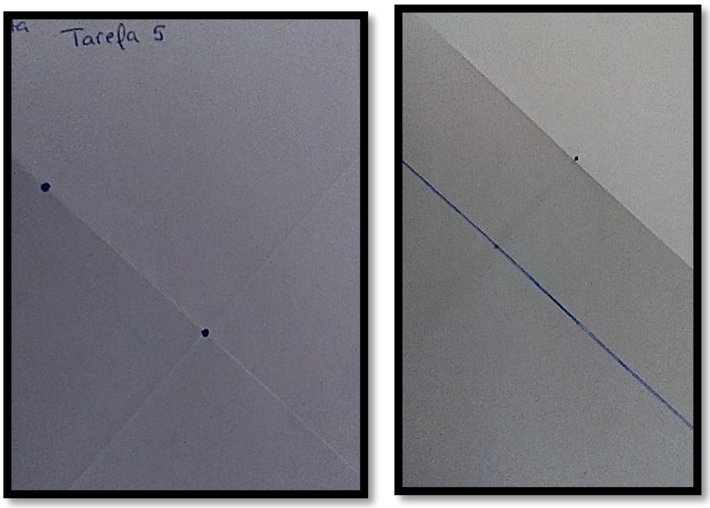


Figura 20. Dobragens dos alunos A_4 (à esquerda) e A_{16} (à direita) para responder à Tarefa 5.

Tarefa 6: Mediatriz de um segmento de reta
a) Marca na folha de papel dois pontos.
b) Encontra a mediatriz do segmento de reta que une esses dois pontos.
c) Encontra o ponto médio.
d) Explica como realizaste a tarefa e porque seguiste esses passos.

Esta tarefa era o culminar de toda a atividade, onde eram aplicadas as dobragens e os conceitos estudados nas tarefas anteriores. Com esta tarefa pretendia-se que os alunos explorassem o conceito de mediatriz de um segmento de reta, conteúdo central de toda a atividade. As propriedades que estavam por trás desta tarefa eram que a mediatriz é perpendicular ao segmento de reta, a mediatriz contém o ponto médio, um extremo é simétrico do outro em relação à mediatriz e todos os pontos da mediatriz estão à mesma distância dos extremos do segmento de reta. Para isso, os alunos tinham de inicialmente marcar dois pontos na folha, determinar a reta que passa por esses pontos e por último fazer coincidir esses pontos, garantindo assim que a dobra é perpendicular e está à mesma distância de ambos os pontos.

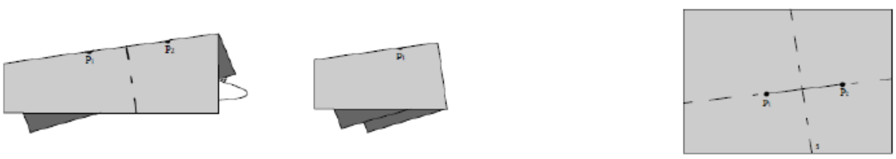


Figura 21. Dobragens a efetuar na Tarefa 6.

A grande maioria dos alunos resolveu a tarefa como está exemplificado na Figura 21, notando-se em algumas resoluções algumas tentativas, mas a resposta correta está bem explícita. Houve ainda um grupo de quatro alunos que procuraram fazer coincidir os pontos sem dobrar a reta que os contém. A desvantagem de usar este método, nesta alínea, resulta da dificuldade de determinação, pois se dobramos a folha deixamos de ver os pontos. Na figura 22 podemos observar as duas resoluções distintas.

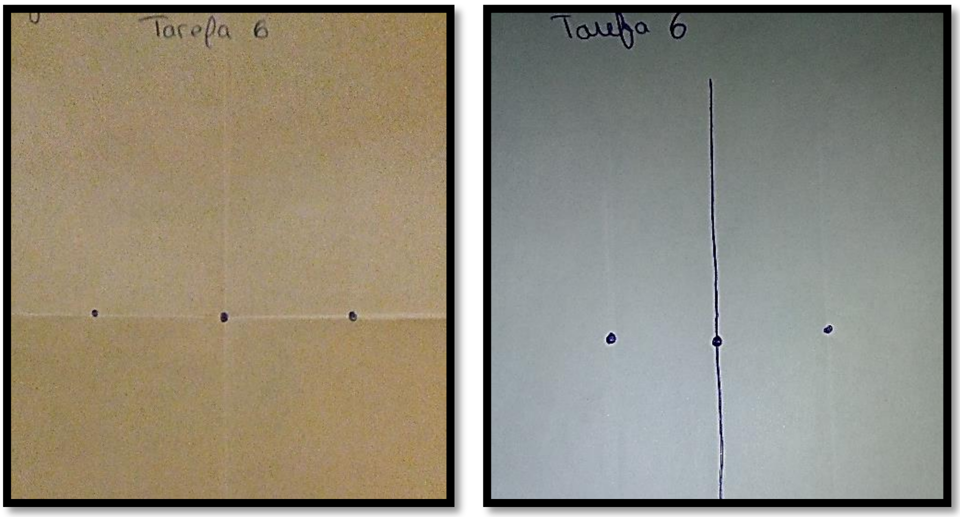


Figura 22. Dobragens dos alunos A_3 (à esquerda) e A_{17} (à direita) para a responder à Tarefa 6.

Na determinação do ponto médio dos quatro alunos que não traçaram o segmento de reta que contém os pontos, dois marcaram um ponto médio e os dois restantes não responderam. Esses pontos médios foram determinados por tentativa. Dos restantes alunos que resolveram a tarefa, apenas quatro não marcaram o ponto médio. Dois alunos não resolveram esta tarefa.

A construção da mediatriz já tinha sido estudada pelos alunos, mas a análise das suas propriedades é estudada pela primeira vez no 9.º ano. Isto é claro no seguinte diálogo de dois alunos durante a resolução desta tarefa:

A_{18} – Encontra a mediatriz. O que quer dizer?
A_{14} – Já fiz.
A_{18} – O que é a mediatriz?
A_{14} – Lembraste quando tinhas dois pontos e pegavas no compasso e abrias e traçavas… e traçavas… (fazendo o gesto como se estivesse a usar o compasso)

No momento de síntese, quando questionei os alunos sobre quais as propriedades da mediatriz, a primeira propriedade identificada foi que a mediatriz é perpendicular ao segmento de reta. De seguida, o aluno A_3 afirmou que todos os pontos da mediatriz se encontravam à mesma distância dos extremos do segmento de reta.

O origami proporcionou uma atividade completamente diferente, pois ao não disporem dos materiais de desenho os alunos foram obrigados a refletir sobre as propriedades dos objetos que pretendiam construir. Considerei esta atividade importante uma vez que esta unidade apela à identificação das propriedades dos lugares geométricos para que se possam descrever interseções e reuniões de lugares geométricos.

Não considero que um aluno saiba o que é a mediatriz quando responde que a mediatriz é quando tem "dois pontos e pegavas no compasso e abrias e traçavas... e traçavas...". Assim como a corda, o origami não deve ser o material exclusivo, é importante que os alunos determinem a mediatriz com o material de desenho, sendo até obrigatório pelo programa em vigor. Contudo acredito nas potencialidades que esta atividade trouxe aos alunos. O origami até pode parecer uma atividade infantil, mas, pelo contrário, exige muita maturidade, silêncio e concentração e é adaptável a várias idades. Esta atividade funcionará melhor quanto melhor os alunos estiverem adaptados a ela, já que na semana seguinte pedi aos alunos a dobragem das alturas de um triângulo e os alunos conseguiram ser mais autónomos do que nesta primeira experiência.

As dificuldades identificadas nesta atividade de determinação dos lugares geométricos verificaram-se na identificação de uma semirreta, na determinação de duas retas perpendiculares e duas retas paralelas, na determinação do simétrico de um ponto em relação a uma reta e em reconhecer a mediatriz como perpendicular ao segmento de reta. Assim, esta atividade foi importante para adquirir estes conceitos base, essenciais para a compreensão da mediatriz.

4.2.3. O material de desenho

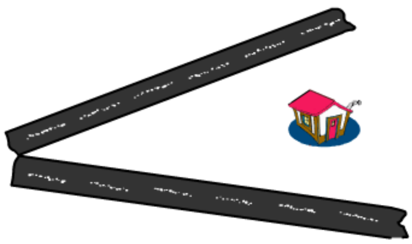
O material de desenho foi utilizado em todas as aulas lecionadas, nomeadamente na resolução de exercícios de consolidação. No entanto, em determinadas tarefas, estes materiais didáticos assumiram maior importância, em particular aquando da introdução e consolidação de conceitos. Assim, de seguida, apresenta-se a análise da tarefa de introdução da bissetriz.

Ao longo das aulas, além da construção de figuras geométricas através do material de desenho, continuou-se a dar ênfase às propriedades e à descrição das figuras assim construídas.

Na terceira aula da intervenção pedagógica explorou-se a noção de bissetriz de um ângulo convexo utilizando o material de desenho. Esta aula tinha como objetivos estudar a bissetriz de um ângulo convexo e ainda estudar algumas das suas propriedades. Para isso, decidiu-se usar o material de desenho pois o uso deste facilitaria o estudo das propriedades em questão.

Assim, os alunos organizaram-se como habitualmente, no seu respetivo grupo, e a aula iniciou-se apresentando aos alunos o seguinte problema:

O Francisco, que é arquiteto, está a trabalhar sobre um projeto de uma casa num lote de terreno entre duas estradas, como mostra a figura, e pretende, por questões estéticas e de funcionalidade, que a sua distância a essas estradas seja a mesma. Onde pode o Francisco desenhar a casa?



Com esta tarefa pretendia-se que os alunos refletissem sobre qual é o conjunto de pontos que se encontra à mesma distância das estradas e, posteriormente, sobre a forma de conseguiriam construir esse lugar geométrico. Não foi dada qualquer outra indicação aos alunos na apresentação da tarefa, nem sequer sobre qual deveria ser o material a usar. Esperava-se que os alunos identificassem que o lugar geométrico de que se trata é a bissetriz.

Alguns alunos mediram a distância da casa, representada na imagem, às estradas e verificaram que era a mesma. Deste modo, pensaram já ter encontrado a solução do problema pois já tinham um local para construir a casa. Contudo, quando apresentavam essa resposta, eles eram questionados sobre se aquele seria o único sítio para a construir. Rapidamente compreendiam que não era o único. De seguida verificou-se o seguinte diálogo:

A_6 – Oh professora, eu acho que é a mediatriz.
Professora – Será que é a mediatriz? Será que conseguimos desenhar aí a mediatriz?
A_{14} – Eu acho que dá! Eu já fiz.

O aluno A_{14} escolheu um ponto qualquer de cada estrada e determinou a mediatriz do segmento de reta que unia esses dois pontos. Enquanto isso, alguns alunos tentavam resolver esta alínea com recurso ao transferidor. Porém nem todos os alunos revelaram manipular corretamente o transferidor, como podemos ver na Figura 23. Nesta figura observa-se um erro de manipulação de transferidor, que foi cometido outras vezes durante o início da intervenção e que conduz a resultados completamente incorretos, já que a origem do transferidor se encontra no centro do ângulo. Felizmente houve outros alunos que manipularam corretamente o transferidor, determinaram a amplitude do ângulo e dividiram-na por dois. Esta estratégia também esteve muito presente no teste diagnóstico.

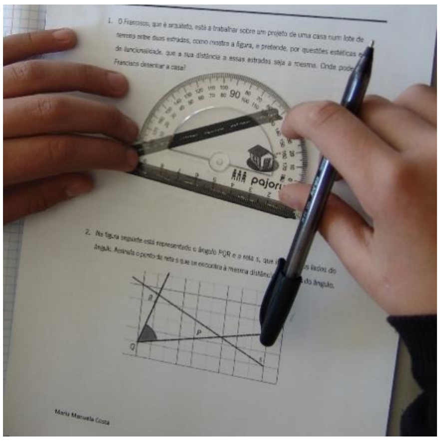


Figura 23. Manipulação do transferidor pelo aluno A_{13}.

No momento de síntese, ocorreu o diálogo seguinte, que mostra que os alunos reconheceram a bissetriz e algumas das suas propriedades.

A_{14} – Obtemos uma semirreta.
Professora – Exatamente, uma semirreta.
A_{14} – E a casa pode estar em todos os pontos dessa semirreta.
Professora – Certo! Obtém-se uma semirreta assim (projetando a correção do exercício). Como se designa então esta semirreta?
A_{20} – Bissetriz.
A_{14} – Bissetriz do ângulo.
Professora – E o que vocês sabem? O que vocês conhecem sobre a bissetriz?
A_{3} – Que divide o ângulo em duas partes iguais.
A_{21} – Divide o ângulo em dois.
Professora – Eu consigo dividir o ângulo em dois assim (traço uma semirreta muito próxima de uma das semirretas suporte do ângulo).
A_{21} – Divide o ângulo em duas partes iguais.
Professora – Exatamente! O que sabemos mais?
A_{17} – Simétrico.
A_{3} – Todos os pontos que estão contidos na bissetriz estão à mesma distância tanto de um lado do ângulo como do outro.
(...)
Professora - Mais? Há ainda outra coisa...
A_{17} – Simétrico, dá para fazer!
Professora - O simétrico, como assim o simétrico? Explica.
A_{17} – Se nós dobrássemos agora a folha ia dar.
Professora – Fizeste por dobragem?
A_{17} – Não, se não estragava a folha.

Neste diálogo reconhecem-se dois aspetos curiosos. O primeiro é que os alunos conseguiram analisar todas as propriedades da bissetriz, estando nesta fase muito atentos a estes aspetos. Penso que para além de já ser a terceira aula a explorarem-se propriedades, os alunos nunca tinham sido questionados sobre as propriedades da bissetriz, por isso acredito que a atividade do origami os tenha ajudado bastante a desenvolver esta destreza. O segundo é que mesmo não estando numa atividade de origami, o aluno conseguiu imaginar que por dobragem pudesse verificar a propriedade.

Após a síntese, pedi aos alunos para considerarem a casa que estava na figura e determinassem a distância da casa às estradas. Após a resolução dos alunos nos seus lugares, escolhi um aluno e pedi que fosse resolver ao quadro, mais precisamente na projeção. O aluno dirigiu-se ao quadro com uma régua e fez o que pode ser observado na Figura 24.

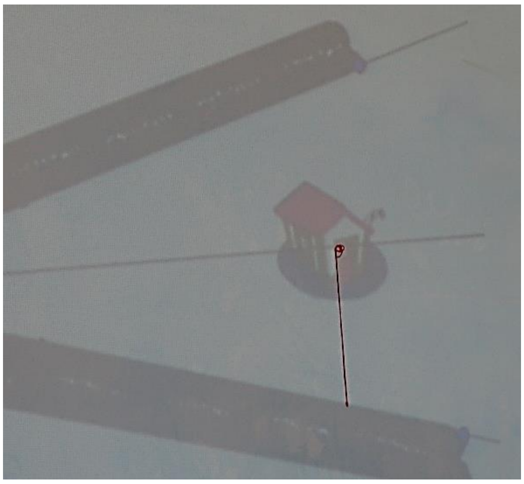


Figura 24. Resolução no quadro da determinação da distância do aluno A_{15}.

Este foi um erro que também esteve presente no teste diagnóstico e que foi cometido por dois alunos, além de que, nesta questão, quase metade dos alunos não respondeu. Esta questão do teste diagnóstico pode ser analisada na subsecção 4.1.3. Após este aluno ter concluído a sua resolução no quadro, questionei os alunos sobre se estaria correta essa resolução. Um deles, após uma breve reflexão, afirmou:

> A_{20} – Não, a distância é sempre medido em perpen.... Em reta (desenhando com as mãos uma reta vertical).
> Professora – Como assim em reta? Anda ao quadro representar.

O aluno foi ao quadro com uma régua e com um transferidor, procurou no transferidor a amplitude $90°$ e traçou o segmento de reta. Deste modo, o que este aluno acrescentou à resposta do colega foi que deveríamos garantir que o segmento de reta era perpendicular à bissetriz.

Assim, face ao erro deste aluno, questionei novamente os alunos sobre se alguém teria outra ideia. Os alunos A_5 e A_3 indicaram que haveria uma "distância menor", tendo o aluno A_3 traçado a perpendicular à estrada que passa na casa, como pode ser observado na Figura 25, e o aluno A_5 explicou que com o compasso poderíamos verificar que o segmento de reta que traçaram é menor, sendo que a distância teria se ser determinada traçando a perpendicular à estrada. Após isto, alguns alunos afirmaram que também exploraram esta tarefa usando o compasso.

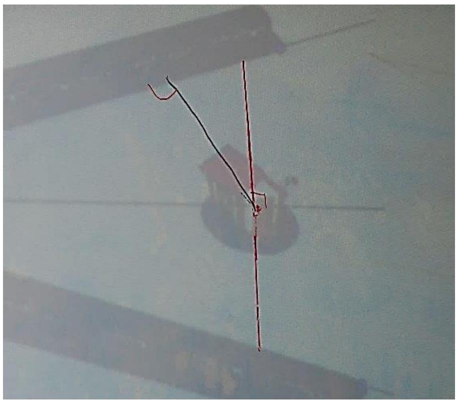


Figura 25. Resoluções dos alunos A_3, A_{15} e A_{20}.

Para verificar estas conclusões tinha preparado, no GeoGebra, a atividade com as duas respostas, onde se poderia manipular o segmento de reta em torno da perpendicular e os alunos podiam verificar a veracidade das conclusões que tínhamos obtido. De seguida, os alunos provaram através da igualdade dos triângulos retângulos definidos por um ponto P da bissetriz do ângulo, pelos pontos de interseção dos lados do ângulo com as perpendiculares conduzidas pelo ponto da bissetriz, R e S, e pelo vértice V do ângulo (Figura 26) que $\overline{PR} = \overline{PS}$, o que equivale a dizer que o ponto P é equidistante dos lados do ângulo.

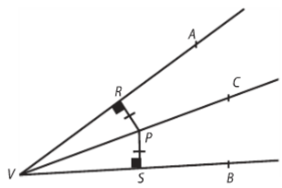


Figura 26. Ângulo usado na demonstração da igualdade dos triângulos $[VPR]$ e $[VPS]$.

O material de desenho tem potencialidades várias, quer na determinação de lugares geométricos, quer no estudo e verificação de conjeturas. Embora os alunos estejam bastante familiarizados com este material, uma vez que trabalham com ele desde o primeiro ano de ensino, ainda se verificam muitos erros e dificuldades na sua manipulação, desde o pouco rigor no seu uso até ao não conhecimento. Outro aspeto que fui observando durante as aulas com o uso dos materiais de desenho, é que várias vezes os alunos se esqueciam do compasso, do transferidor ou a régua estava partida, e com muita frequência os compassos encontravam-se soltos, donde, ainda que o aluno determinasse corretamente a abertura, quando fosse a traçar, o compasso já não teria a medida pretendida. Para este problema fui, ao longo da intervenção, chamando a atenção para a importância de terem o material e em boas condições

As dificuldades identificadas nesta tarefa referem-se ao mau uso dos materiais de desenho. Embora sendo de esperar que no 9.º ano o seu uso já não fosse um desafio, verificou-se que eles revelaram dificuldades, sobretudo, no uso do transferidor e na determinação de distâncias num ângulo.

4.2.4. O GeoGebra

O GeoGebra é um poderoso *software* de geometria dinâmica que, para além de gratuito, é muito intuitivo e fácil de usar. Permite, entre outras coisas, a manipulação de objetos geométricos e possibilitando aos alunos testar e conjeturar. Por isto, é um excelente recurso para, em sala de aula, os alunos realizarem atividades investigativas ou estudos de conceitos, orientados por um guião, como foi o caso do estudo do baricentro na sétima aula.

Como se verificou no teste diagnóstico, embora nunca tivessem trabalhado com o GeoGebra, os alunos reconheciam-lhe vantagens no estudo de vários domínios da Matemática a partir da manipulação do professor. Assim, de modo a familiarizar os alunos com o *software*, com vista à realização desta tarefa, fui manipulando o GeoGebra em todas as aulas, usando-o para efetuar as construções e explicando todos os comandos usados. Adicionalmente, também fui convidando alunos a fazerem as correções dos exercícios no GeoGebra que estava projetado no quadro.

Com esta aula pretendia-se que os alunos compreendessem o que é o baricentro de um triângulo e estudassem as suas propriedades. Para tal, elaborei um guião que os alunos exploraram no *software* (Anexo V). Preparei ainda o estudo de alguns casos particulares de pontos notáveis de triângulos. O uso desta ferramenta proporcionou aos alunos uma aplicação prática para testar o conhecimento matemático, com a qual podem verificar a construção feita a partir da ação e reflexão, permitindo uma visão mais dinâmica e interessante da geometria (Silva, 2013).

Para a realização da tarefa foram disponibilizados, pela escola, onze computadores, tendo sido distribuídos dois por cada grupo de quatro alunos e um por cada grupo de três alunos.

A aula começou com uma pequena introdução ao *software*, recordando-se algumas indicações iniciais. Para facilitar a utilização do *software* aos alunos forneci-lhes um mapa das várias ferramentas nele pré-definidas, que se pode observar na Figura 27.

Figura 27. Mapa de Ferramentas do GeoGebra disponibilizado aos alunos.

Depois de proposta a tarefa, apresentada abaixo, no início verificaram-se algumas dúvidas, mas rapidamente os alunos se adaptaram ao *software* e as dúvidas passaram a referir-se ao conteúdo. Afinal, não podemos perder de vista que estamos a lidar com uma geração com grande apetência pelas tecnologias.

1. Executem o *software* GeoGebra.
2. Construam um triângulo à vossa escolha.
3. Determinem o ponto médio de dois lados do triângulo.
4. Façam passar por esses pontos médios uma reta. Que relação terá esta reta com o lado do triângulo que não foi bissetado? Utilizem, se quiserem, o GeoGebra para testar a vossa conjetura.

As duas primeiras questões do guião constituíam a base de todo o trabalho. Todos os grupos de trabalho utilizaram a ferramenta "Polígono" para construir o triângulo. As duas questões seguintes tinham como objetivo estudar a propriedade que nos diz que a reta que passa pelos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralela ao terceiro lado. Pedi, então, que os alunos provassem esse paralelismo, tendo todos os grupos concluído que as retas eram paralelas, mas nem todos os grupos provaram que o eram.

Dois grupos tentaram provar que as retas eram paralelas fazendo passar por um dos pontos médios uma reta paralela ao outro lado do triângulo e como viam que as retas coincidiam, concluíram que eram paralelas. Tendo alertado que este método não serviria para provar que as retas são paralelas, vários grupos fizeram passar uma perpendicular ao lado não bissetado e determinaram a amplitude do ângulo que essa perpendicular faz com a reta que passa pelos pontos médios; tendo obtido o valor $90°$, concluíam que eram paralelas. Os alunos que recorreram a este processo utilizaram a propriedade estudada na atividade do Origami, na tarefa 4. Houve ainda outro método de prova, em que um par fez passar pelo lado não bissetado igualmente uma reta, de seguida determinaram os ângulos correspondestes das retas e como verificaram que são iguais, concluíram que as retas são paralelas. Esta resolução pode ser observada na Figura 28.

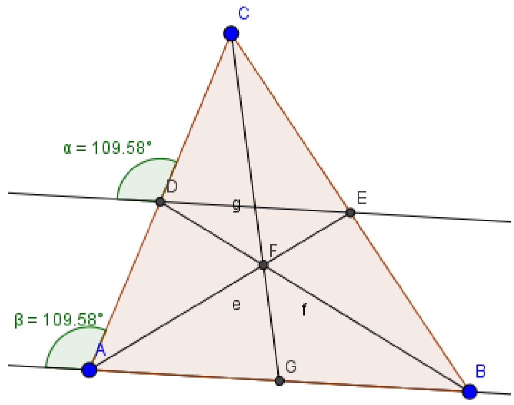


Figura 28. Demonstração do paralelismo das retas pelos alunos A_2 e A_{13}.

5. Tracem as medianas do triângulo, isto é, unam com um segmento de reta os vértices aos pontos médios dos lados opostos. O que observam?
6. Tracem a terceira mediana. Marquem o ponto de interseção das três medianas. Foi necessária a terceira mediana para determinar esse ponto?

Nas questões 5 e 6 pretendia.se que os alunos observassem que as medianas se intersetam num ponto e que não é necessário traçar a terceira mediana para determinar esse ponto. Nestas questões também eram definidos a mediana e o baricentro (ver Anexo V). A propriedade analisada era que as medianas de um triângulo se intersetam num ponto.

Estas questões não constituíram um grande desafio para os alunos, já que apenas um par não indicou que as medianas se intersetam num ponto, respondendo que "divide o triângulo a meio". Penso que estes alunos se referiam a que cada uma das medianas divide o triângulo em dois triângulos equivalentes, propriedade esta que seria analisada na questão 10. Na questão 6 todos os alunos responderam que não seria necessário traçar a terceira mediana. Estas questões apelavam apenas à construção e à observação do que fora construído, sendo as dúvidas levantadas pelos alunos relativas ao que eram as medianas pois os alunos não liam a questão 5 até ao fim.

7. Meçam a distância desse ponto aos vértices do triângulo e aos pontos médios. O que se observa?
8. Para cada mediana, existe uma relação entre as distâncias determinadas em 7. De que relação se trata?
9. Movam os vértices do triângulo alterando a sua forma. A relação identificada em 8 mantem-se?

Nestas questões pretendia-se que os alunos analisassem as distâncias do baricentro aos vértices e aos pontos médios e observassem que as distâncias são menores aos pontos médios do que aos vértices. Na questão seguinte pretendia-se saber, para cada mediana, que relação seria essa, ou seja, pretendia-se que os alunos observassem que, em cada mediana, a distância do vértice ao baricentro é o dobro da distância do baricentro ao ponto médio. Na questão 9 pretendia-se que os alunos observassem que essa relação se mantem seja qual for o triângulo. Assim, a propriedade analisada era que o baricentro dista do vértice $\frac{2}{3}$ do comprimento de cada mediana.

Nestas questões os alunos tiveram dificuldade em distinguir o que era pedido na questão 7 e na questão 8, havendo apenas três grupos que responderam de forma diferente nessas duas questões. Desses três grupos, dois apresentaram as distâncias e um deles ainda reforçou a ideia que as medidas eram todas diferentes, o outro grupo respondeu que três desses segmentos de reta têm medidas inferiores aos outros segmentos de reta.

Na questão 8 todos os grupos chegaram à relação correta, apesar de alguns grupos terem necessitado de alguma orientação, nomeadamente no que toca às distâncias que deviam comparar. Assim, decidi interromper a aula e fazer um ponto de situação: desenhei um triângulo e as respetivas medianas, determinei o ponto de interseção e questionei os alunos sobre a designação dos segmentos de reta e do ponto de interseção. Por fim, expliquei quais seriam as distâncias que deviam comparar. Deste modo, os alunos responderam corretamente, verificando-se respostas do tipo: "A distância do baricentro aos vértices é o dobro da distância aos pontos médios" ou como A_8 e A_9 responderam "Os segmentos DG, EG e FG são metade dos segmentos AG, BG e CG". A construção destes alunos pode ver-se na Figura 29.

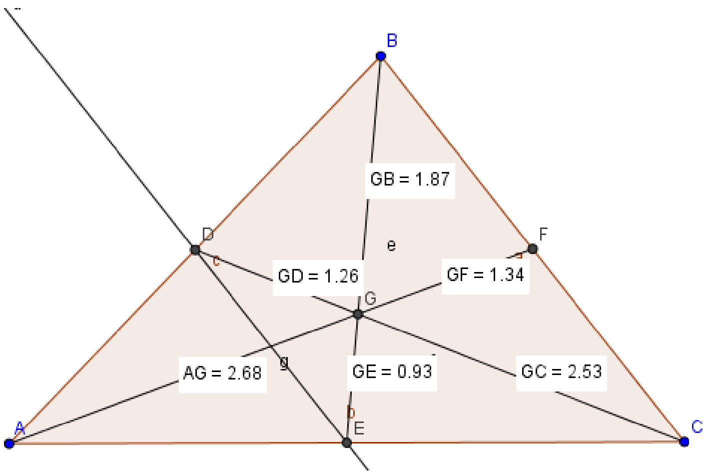


Figura 29. Construção dos alunos A_8 e A_9 na atividade do baricentro.

Na questão 9 todos os alunos responderam que esta relação se mantém. Este grupo de questões trabalhavam uma propriedade importante do baricentro e penso que os alunos, graças às potencialidades do GeoGebra, conseguiram compreendê-la sem grandes dificuldades. A possibilidade de poderem alterar o triângulo é muito importante para que alunos identifiquem os invariantes.

10. Reparem que cada mediana divide o triângulo em dois triângulos. Existe uma relação entre as áreas desses triângulos? Porquê?

Nesta questão pretendia-se que os alunos observassem que uma mediana divide o triângulo em dois triângulos com áreas iguais, isto é, equivalentes. Para isso, os alunos deviam observar que estes têm o mesmo comprimento da base, já que o ponto médio divide a base do lado do triângulo inicial em dois segmentos de reta iguais, e a altura seria a mesma pois em ambos os triângulos as bases pertencem ao mesmo lado do triângulo inicial.

Todos os grupos concluíram que as áreas dos triângulos eram iguais, mas apenas três grupos apresentaram justificação. Talvez alguns grupos não tenham compreendido que era necessário apresentar uma justificação pois responderam "sim, porque tem a mesma área". Dos três grupos que justificaram, dois indicaram que as áreas eram iguais porque "a mediana divide o triângulo a meio", e o outro referiu que são iguais porque "a b e a h são iguais".

De seguida, os alunos determinaram os pontos notáveis de triângulos isósceles, equiláteros e retângulos isósceles, que lhes foram facultados. Assim, puderam praticar as construções dos pontos notáveis e estudar casos particulares dos pontos notáveis de triângulos.

Em síntese, o GeoGebra trouxe muitas vantagens no estudo do baricentro, nomeadamente pelo facto de serem os próprios alunos a observarem e determinarem as propriedades do baricentro e pela possibilidade de manipularem os triângulos observando que as propriedades se mantêm para um grande número de triângulos. Por outro lado, os alunos mostraram-se bastante motivados e a inexperiência no uso do GeoGebra não foi um entrave, pois os alunos rapidamente se adaptaram ao *software*.

Relativamente às dificuldades observadas, uma resultou do pouco cuidado dos alunos na leitura das questões, questionando o professor sobre aspetos que estavam explícitos nos enunciados das próprias questões. Outro aspeto observado durante a realização da tarefa foi que os alunos omitiram as justificações das suas conclusões.

4.3. A avaliação da intervenção

Para o segundo e terceiro objetivos do projeto, em que se pretende identificar as dificuldades dos alunos na determinação de Lugares Geométricos e avaliar em que medida os materiais manipuláveis e o GeoGebra contribuíram para os alunos ultrapassarem as suas dificuldades, os alunos responderam a uma ficha de avaliação e a um questionário, cujos resultados são apresentados a seguir.

4.3.1. Ficha de avaliação

Esta ficha, denominada ficha por partes, incluía-se no modelo avaliativo estabelecido pelo orientador, com metade do peso de um teste e a duração de 45 minutos. Estas fichas incidem sobre um conteúdo específico ou uma unidade, não sendo globais como os testes de avaliação. Assim, nesta ficha avaliaram-se apenas os conteúdos que lecionei.

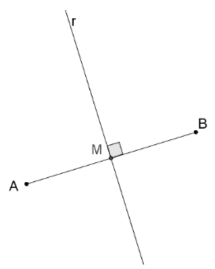
Esta ficha foi realizada no dia 17 de março, uma semana após o final da minha intervenção e nela estiveram presentes vinte e um alunos uma vez que um dos alunos se encontrava doente no dia que foi feita a prova. Para a realização desta ficha, que pode ser consultada no Anexo VI, os alunos fizeram-se acompanhar do material de desenho, nomeadamente régua, transferidor e compasso. De seguida procederei à análise das várias questões da ficha.

Mediatriz

Nesta secção analisarei a questão 1 da ficha por partes, a qual tinha duas alíneas e explorava o conceito de mediatriz de um segmento de reta.

1. Considera a figura ao lado onde $\overline{AM} = \overline{MB}$ e $r \perp AB$.

1.1. Qual é o nome da reta r relativamente ao segmento de reta $[AB]$?



1.2. Seja P um ponto da reta r. Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(A) $\overline{PM} = \overline{PA}$ **(B)** $\overline{PA} = \overline{PB}$ **(C)** $\overline{PM} = \overline{PB}$ **(D)** $\overline{PB} = \overline{MB}$

A mediatriz de um segmento de reta foi o conteúdo central da atividade do origami, onde explorámos as propriedades deste lugar geométrico. Nesta questão, na primeira alínea era exigido o reconhecimento do lugar geométrico dadas as suas propriedades, tratando-se de uma pergunta fechada, onde apenas a resposta “mediatriz” ou “mediatriz do segmento de reta $[AB]$” seria considerada correta, não havendo lugar para respostas parcialmente corretas. Na segunda alínea questionava-se sobre uma propriedade da mediatriz, devendo os alunos selecionar a opção correta de um grupo de quatro. Esta questão também era uma questão fechada que e exigia alguma abstração, já que o ponto P não fazia parte da imagem. Na Tabela 10 apresentam-se os resultados obtidos na questão 1.

Tabela 10 – Frequências dos tipos de resposta à questão 1

Item	Resposta			Não responde
	Correta	Parcialmente correta	Incorreta	
1.1	16	0	2	3
1.2	20	0	1	0

Como podemos observar pela Tabela 10, houve mais alunos a responderem corretamente à alínea 1.2, onde era necessário alguma abstração e conhecimento das propriedades da mediatriz, do que na alínea 1.1, onde teriam de reconhecer o lugar geométrico representado.

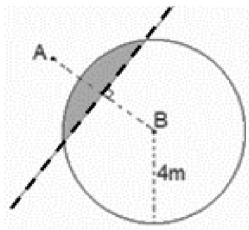
Os dois alunos que erraram a questão 1.1 responderam que a reta r é a reta perpendicular. Esta observação é realmente verdadeira, mas essa informação já era dada no enunciado de duas formas, quer no texto da questão, quer na própria imagem. Dos dois alunos que erraram a alínea 1.1, um respondeu corretamente à alínea seguinte e o outro voltou a errar, escolhendo a opção (C). Dos três alunos que não responderam à alínea 1.1, todos respondem corretamente à alínea 1.2. Assim, podemos concluir que os alunos revelaram dominar satisfatoriamente a propriedade da mediatriz em questão.

Descrever Lugares Geométricos

Nesta secção analisam-se as respostas dos alunos à segunda questão da ficha por partes, onde pedia aos alunos para descrever um lugar geométrico.

2. Descreve o lugar geométrico assinalado a sombreado na figura, sabendo que na figura estão representadas:

- a reta r, que é a mediatriz do segmento de reta $[AB]$;
- a circunferência de centro no ponto B e raio $4m$.



A descrição de lugares geométricos foi um dos aspetos que foi trabalhado nas aulas de resolução de exercícios, cuja descrição era estabelecida a partir da interseção ou disjunção das propriedades dos lugares geométricos estudados. Assim, os alunos deviam responder que este é o lugar geométrico dos pontos do plano que se encontram a uma distância igual ou inferior a $4m$

de B e que estão mais próximos de A do que de B, ou de outra forma equivalente. A ausência de algum destes aspetos era alvo de penalização.

Tabela 11 – Frequências dos tipos de resposta à questão 2

Item	Resposta			Não responde
	Correta	Parcialmente correta	Incorreta	
2.	0	11	2	8

Como podemos observar pela Tabela 11, esta tarefa revelou-se bastante difícil já que nenhum aluno apresentou uma resposta correta, cerca de metade dos alunos respondeu parcialmente correto e quase a restante metade não respondeu à questão.

Os dois alunos que responderam incorretamente, responderam "circunferência circunscrita" e "circuncentro", o que revela que os alunos não entenderam o que lhes estava a ser pedido nem dominam os conceitos de circunferência circunscrita e circuncentro.

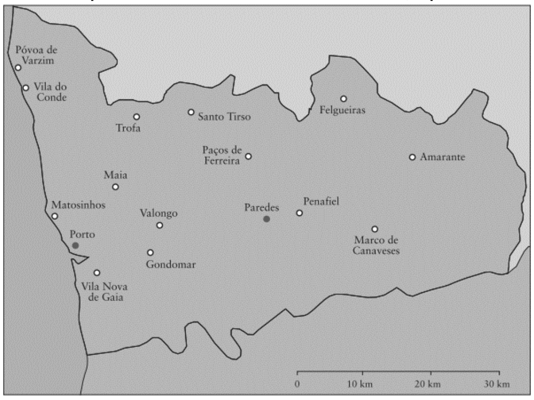
Respostas parcialmente corretas foram consideradas as que identificavam pelo menos um dos elementos constituintes do lugar geométrico, mas não os indicando todos, ou quando indicados todos, estes não eram traduzidos em linguagem correta. Ao analisar estas respostas notou-se pouco rigor no uso da terminologia adequada, como acontece com a resposta do aluno A_3: "É o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a uma distância igual ou menor a $4m$, sendo que a menor tem de ser antes da mediatriz (lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes aos extremos do segmento de reta $[AB]$". Esta foi a resposta melhor cotada, tendo sido a única que incluiu todos os aspetos do lugar geométrico, embora usando uma terminologia não adequada em relação à indicação do semiplano mais próximo de A do que de B. Ainda das restantes dez respostas parcialmente corretas, três alunos indicaram apenas os pontos mais próximos de A do que de B, três alunos indicaram apenas os pontos pertencentes à circunferência de centro em B e raio $4m$ mais próximos de A do que de B e quatro alunos indicaram os pontos mais próximos de A do que de B e/ou o círculo de centro B e raio $4m$, sendo que destes alunos três apenas indicam como resposta o interior da circunferência e apenas um acrescenta: "É o lugar geométrico que pertence ao círculo mais próximo do ponto A". Nesta resposta continua-se a notar muita falta de rigor, não indicando elementos-chave da resposta, como identificar o círculo ou indicar o referencial para a maior proximidade dos pontos de A do que de B.

Como pudemos observar, nesta questão os alunos tiveram bastantes dificuldades em satisfazer todos os requisitos exigidos e uma grande parte dos alunos não apresentou qualquer resposta, o que revela que este é um tópico onde os alunos ainda atingiram um nível pouco satisfatório, embora seis dos onze alunos que responderam conseguiram mais de metade da cotação.

Construção do Lugar Geométrico

Nesta secção analisa-se a terceira questão da ficha por partes, onde era pedido aos alunos a construção de um lugar geométrico. Esta tarefa foi adaptada do exame nacional de 2009, 1ª chamada, e consideraram-se os mesmos critérios de correção.

3. O mapa da figura seguinte representa o distrito do Porto, que o Rui vai visitar com os pais.



O Rui e os seus pais vão visitar o Porto e Paredes. Para tal pretendem ficar alojados num local que se situe a menos de vinte quilómetros de Paredes e que seja mais próximo do Porto do que de Paredes. Sombreia a caneta a porção do mapa relativa à zona onde o Rui e os seus pais deverão ficar alojados.
Utiliza material de desenho e de medição para resolveres o problema.
Nota: Se traçares linhas auxiliares, não as apagues.

A construção de lugares geométricos foi um dos aspetos bastante trabalhado nas aulas de resolução de exercícios principalmente, mas também após a introdução dos conceitos. Porém, construir um lugar geométrico é, dadas as suas propriedades, identificar o lugar pedido, donde este tipo de tarefa acaba por englobar todo o estudo realizado. É interessante observar que o lugar geométrico que os alunos deveriam construir nesta questão é muito semelhante ao lugar geométrico que deveriam ter descrito na questão anterior. A única diferença é que nesta questão os alunos não deveriam considerar a circunferência, apenas se consideraria os pontos que estão a menos de $20\ km$. Na Tabela 12 estão registados os resultados obtidos na questão 3.

Tabela 12 – Frequências dos tipos de resposta à questão 3

Item	Resposta			Não responde
	Correta	Parcialmente correta	Incorreta	
3.	10	7	3	1

Como podemos verificar pela Tabela 12, nesta alínea obtiveram-se, significativamente, melhores resultados do que a alínea anterior, com sensivelmente metade dos alunos a responder corretamente e apenas um aluno a não apresentar resposta à questão.

Relativamente às respostas consideradas parcialmente corretas, duas foram consideradas assim por esses alunos, para além do lugar geométrico correto, considerarem também como resposta a zona a exatamente $20km$ de Paredes, quando no problema apenas pretendemos a menos de $20km$. Curiosamente, esses mesmos alunos não consideraram os pontos que se encontravam à mesma distância do Porto e de Paredes, como pode ser observado na Figura 30.

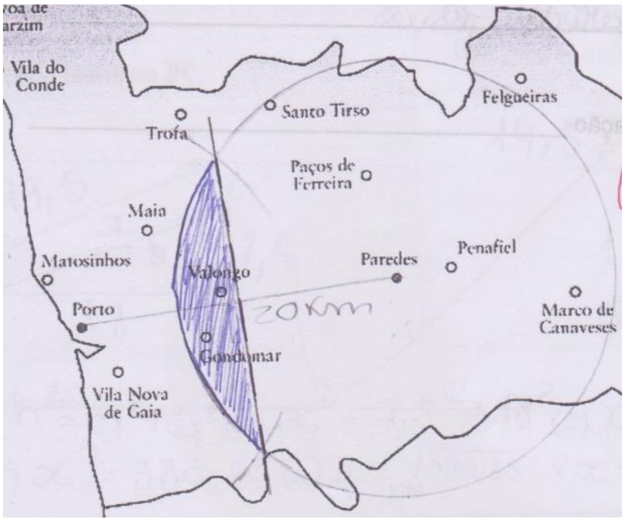


Figura 30. Resolução do aluno A_3 à questão 3.

Outra resposta considerada parcialmente correta foi dada por o aluno A_{18}, cuja resposta pode ser observada na Figura 31.

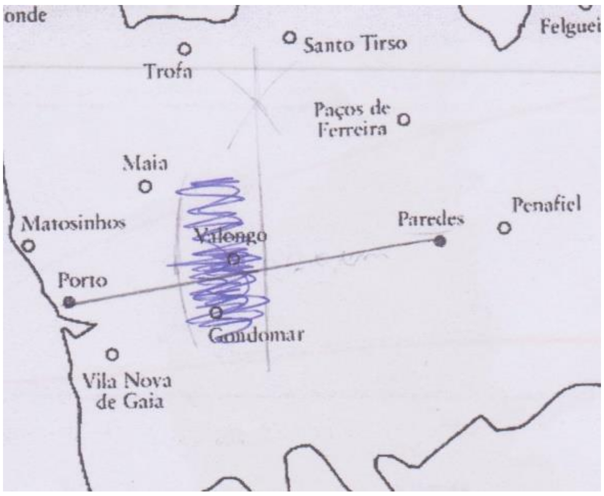


Figura 31. Resolução do aluno A_{18} à questão 3.

Como se pode ver pela Figura 31, este aluno determinou corretamente a mediatriz, porém começou a desenhar a circunferência representativa dos $20\ km$ a partir de Paredes, mas não a concluiu, e sombreou apenas a zona onde traçou o arco de circunferência.

Houve também três alunos que determinaram a circunferência e a mediatriz e depois assinalaram toda a área compreendida a menos de $20km$ de Paredes e do Porto como podemos observar na Figura 32.

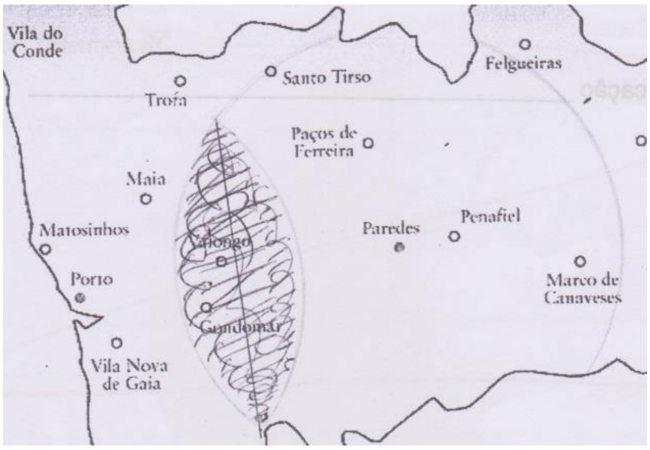


Figura 32. Resolução do aluno A_8 à questão 3.

Ainda dentro das respostas parcialmente corretas, houve um aluno que trocou completamente as cidades, considerando o Porto como centro da circunferência e os pontos mais próximos de Penafiel, dando como resposta o lugar geométrico dos pontos do plano que se encontravam a menos de $20\ km$ do Porto e mais próximos de Penafiel do que do Porto. Este aluno foi um dos alunos que revelou ao longo da intervenção também falta de atenção na leitura das questões.

Relativamente às três respostas incorretas, houve dois alunos que responderam assinalando a cidade de Valongo (que respeitas as condições, mas não é a única) e um aluno que assinalou a área compreendida entre duas circunferências de raio não correto. Nas duas respostas que assinalaram a cidade de Valongo, nota-se uma tentativa de desenhar uma circunferência, contudo o seu raio não esta correto. Estes três alunos e o aluno que não respondeu também não apresentaram resposta à questão 2.

Relativamente ao uso da escala, apenas os alunos que responderam incorretamente e o aluno que não respondeu revelaram não ter conseguido usar a escala, os restantes alunos determinaram corretamente o raio da circunferência a traçar, o que revela um grande progresso relativamente ao início da intervenção. Ainda pudemos verificar que o aluno que na questão 2 identificou o lugar geométrico como circunferência circunscrita respondeu corretamente à questão 3.

Em síntese, nesta questão é visível a progresso que os alunos tiveram durante a intervenção, já que na questão 5 do teste diagnóstico, onde apenas era pedida a mediatriz do segmento de reta, através das propriedades e sem envolver escalas, apenas quatro alunos traçaram a mediatriz. Além disso, mesmo nas questões parcialmente corretas, desta questão, é visível que os lugares geométricos a determinar estão presentes.

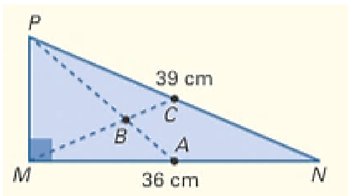
Definição de Pontos Notáveis de um Triângulo

Nesta secção analisam-se as questões 4, 5 e 7.1 da ficha por partes, onde era exigido aos alunos a definição e reconhecimento dos pontos notáveis de um triângulo. As questões 4 e 5 eram questões de escolha múltipla, com as mesmas opções de resposta, e nelas procurava-se verificar se os alunos dominavam a definição dos termos em questão. Já a questão 7.1 fazia parte de um grupo de três questões, sendo que nesta se pedia aos alunos que reconhecessem o baricentro do triângulo. Em todas estas questões não havia lugar a respostas parcialmente corretas. As questões são apresentadas de seguida.

4. O ortocentro de um triângulo é o ponto de interseção das
(A) mediatrizes dos lados do triângulo.
(B) medianas do triângulo.
(C) retas-suporte das três alturas do triângulo.
(D) bissetrizes dos ângulos internos do triangulo.

5. A circunferência circunscrita a um triângulo tem centro no ponto de interseção das
(A) mediatrizes dos lados do triângulo.
(B) medianas do triângulo.
(C) retas-suporte das três alturas do triângulo.
(D) bissetrizes dos ângulos internos do triangulo.

7. Na figura, o triângulo $[MNP]$ é retângulo em M.
O ponto A é o ponto médio de $[MN]$ e o ponto C é o ponto médio de $[NP]$.
O ponto B é o ponto de interseção de PA com MC.
Sabemos ainda que $\overline{MN} = 36\ cm$ e $\overline{NP} = 39\ cm$.



7.1 Como se designa o ponto B?

Reconhecer o nome dos pontos notáveis de um triângulo é muito importante pois isso é um requerido para saber como se determinam. Os pontos notáveis de um triângulo eram conteúdos completamente novos para os alunos, em cuja exploração foram aplicados os vários materiais didáticos. Assim, pretendia-se que os alunos reconhecessem que o ortocentro é o ponto de interseção das retas-suporte das três alturas do triângulo, que a circunferência circunscrita tem por centro o ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo e que o ponto B era o baricentro, já que era o ponto de interseção das medianas do triângulo. Observemos na Tabela 13 as frequências dos diferentes tipos de resposta dos alunos nas questões 4, 5 e 7.1.

Tabela 13 – Frequências dos tipos de resposta às questões 4, 5 e 7.1

Item	Resposta			Não responde
	Correta	Parcialmente correta	Incorreta	
4.	15	0	6	0
5.	15	0	6	0
7.1	15	0	5	1

Analisando a Tabela 13 parece haver uma estabilidade entre os domínios dos conceitos, já que em todas as alíneas há quinze respostas corretas. Analisando as respostas, verificámos que doze alunos responderam corretamente nos três itens e três alunos erraram apenas um deles, sendo que cada aluno errou um item diferente. Temos ainda um aluno que apenas respondeu corretamente à questão 7.1 e outro que respondeu corretamente às questões 4 e 5 e não responde à questão 7.1. Por fim, temos um grupo de quatro alunos que erra todos estes itens.

No que toca às respostas incorretas dos alunos nos itens, não conseguimos tirar nenhuma conclusão, já que no item 4 três alunos escolheram a resposta (A), um a resposta (B) e dois a resposta (D). No item 5 não houve tanta dispersão das respostas, tendo dois alunos escolhido a resposta (B) e quatro a resposta (D). Já no item 7.1, um aluno respondeu que se tratava do ponto de interseção, dois alunos responderam que o ponto B era o ponto de interseção das bissetrizes, o incentro e, finalmente, dois alunos responderam que aquele ponto seria o ortocentro. Os alunos que disseram que B era o ortocentro também erraram o item 4, onde se pedia a definição do ortocentro. Porém, no item 4, um selecionou a opção (A) e outro a (D).

Concluímos através das respostas dos alunos que eles dominam satisfatoriamente os conceitos e, comparativamente com o item 1.1, onde se pedia para reconhecer a mediatriz, apenas se obteve mais uma resposta correta.

Localização de Pontos Notáveis de um Triângulo

Nesta secção analisarei a sexta questão da ficha por partes, onde era apresentado um problema com que todos já nos deparamos, que é partir um prato, e era pedido aos alunos a reconstrução desse prato.

6. O Filipe partiu um prato circular, estando uma das partes representadas na figura abaixo. Com régua e compasso reconstrói a fronteira do prato inteiro.

Esta questão diz respeito à localização de um ponto notável de um triângulo, o circuncentro. Trata-se de uma tarefa especialmente desafiante, já que não era explicitada nenhuma propriedade estudada. Assim, era necessário que os alunos refletissem de que forma poderiam encontrar o centro para completar a circunferência. O conteúdo que estaria aqui a ser pedido seria a determinação do circuncentro, onde os alunos teriam de escolher três pontos distintos da parte da circunferência dada, definir o triângulo correspondente a esses pontos, determinar o circuncentro do triângulo e desenhar a circunferência circunscrita. Porém, bastaria a determinação das mediatrizes de dois quaisquer segmentos de reta com extremos na fronteira conhecida do prato para encontrar o circuncentro. Na Tabela 14 encontram-se registados os resultados obtidos na questão 6.

Tabela 14 – Frequências dos tipos de resposta à questão 6

Item	Resposta			Não responde
	Correta	Parcialmente correta	Incorreta	
6.	7	7	5	2

Analisando a Tabela 14, podemos ver que em relação à questão 3, onde também era pedida a construção de um lugar geométrico, esta obteve piores resultados, o que poderá dever-se a um maior grau de exigência.

Das cinco respostas consideradas incorretas, em quatro os alunos tentaram encontrar o centro por tentativa e erro, não apresentando qualquer construção, apenas o desenho da fronteira e em alguns casos visivelmente deformada. O outro aluno uniu dois pontos do prato, traçou a mediatriz e considerou o centro do prato o ponto médio do segmento determinado. Nesta resolução é visível que o arco desenhado pelo aluno não completa o prato.

Nas respostas parcialmente corretas as estratégias são bastante parecidas. A maioria dos alunos procurou um diâmetro medindo a circunferência e verificando onde obtinham a maior medida e posteriormente traçaram uma mediatriz. Esta estratégia podemos incluí-la na categoria de tentativa erro, já que os alunos procuraram encontrar o diâmetro por tentativas de aproximação.

Observamos uma outra estratégia que consistia, como na estratégia anterior, em procurar um diâmetro. Agora, em vez de traçar a mediatriz, os alunos determinaram a medida do diâmetro e dividiram por dois, encontrando assim o centro. Esta estratégia é semelhante à anterior, apenas se diferenciando no modo como foi obtido o centro. Houve ainda um aluno que traçou duas tangentes ao prato, formando um ângulo, determinou a bissetriz, e a partir dessa bissetriz procurou o centro por tentativa e erro. Assim, todas estas estratégias se socorrem da tentativa e erro, o que não garante a exatidão da resposta.

No que toca às respostas corretas, foram observadas quatro estratégias diferentes. A estratégia mais usada foi a de desenhar duas mediatrizes e fazer corresponder a sua interseção ao centro. Numa outra estratégia, adotada por um aluno, ele recorreu à régua e ao esquadro para traçar uma tangente ao prato e a sua respetiva perpendicular. Assim, o aluno determinou com exatidão o diâmetro do prato e depois traçou a sua mediatriz.

Outra estratégia, usada por um aluno, foi de traçar duas tangentes ao prato, que formam um certo ângulo, e determinar a sua bissetriz. Após isso, o aluno desenhou uma mediatriz e encontrou o centro. Depois de completar o prato, o aluno completou o triângulo que já tinha iniciado com duas as tangentes e mostrou que todas as bissetrizes se intersetavam naquele ponto, o incentro do triângulo (Figura 33).

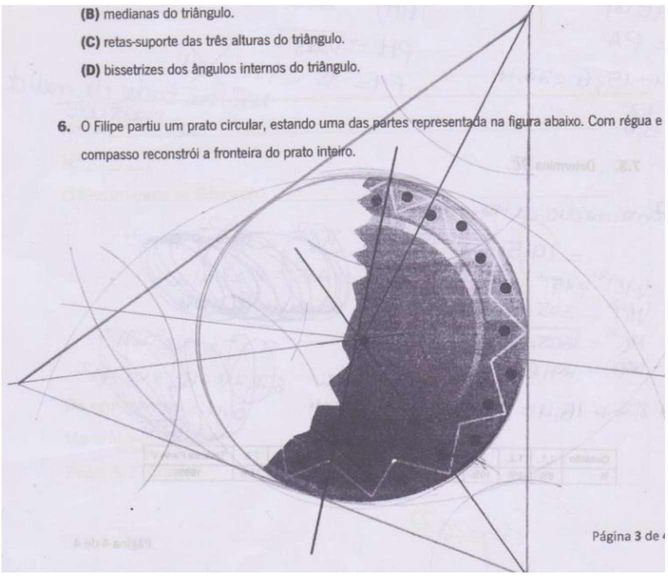


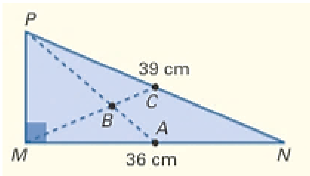
Figura 33. Resolução do aluno A_{10} à questão 6.

Apenas um aluno optou pela resolução que era esperada, a determinação do circuncentro. Esta foi a questão que maior reflexão exigia aos alunos, mas o facto de apenas dois alunos não terem respondido à questão é revelador da confiança que os alunos têm na sua capacidade de construção de lugares geométricos, pois mesmo não sabendo, tentaram encontrar estratégias para resolver o problema, o que é notório no caso dos alunos com respostas parcialmente corretas.

Relações do Baricentro de um Triângulo

Nesta secção analisam-se as questões 7.2 e 7.3 da ficha por partes, onde era apresentado um triângulo e era pedida a determinação de algumas medidas através do uso de propriedades já estudadas.

7. Na figura, o triângulo $[MNP]$ é retângulo em M.
O ponto A é o ponto médio de $[MN]$ e o ponto C é o ponto médio de $[NP]$.
O ponto B é o ponto de interseção de PA com MC.
Sabemos ainda que $\overline{MN} = 36\ cm$ e $\overline{NP} = 39\ cm$.



7.2. Mostra que $\overline{AC} = 7,5\ cm$.

7.3. Determina $\overline{BC}$.

Nestas duas alíneas era apresentada uma tarefa de aplicação das propriedades do baricentro. O baricentro foi estudado pelos alunos numa atividade exploratória com o GeoGebra, analisando as propriedades que nestas alíneas são exploradas. Na questão 7.2 os alunos tinham verificado, com ajuda do GeoGebra, que $[AC]$ e $[MP]$ são paralelas e ainda verificaram que $\overline{MP} = 2\overline{AC}$. Na questão 7.3 os alunos também tinham observado e verificado que, para cada mediana, a distância do vértice ao baricentro é $\frac{2}{3}$ da respetiva mediana. Na Tabela 15 apresentam-se os resultados obtidos nas questões 7.2 e 7.3.

Tabela 15 – Frequências dos tipos de resposta às questões 7.2 e 7.3

Item	Resposta			Não responde
	Correta	Parcialmente correta	Incorreta	
7.2	11	3	1	6
7.3	5	3	2	11

Como podemos observar pela Tabela 15, metade dos alunos respondeu corretamente à questão 7.2, havendo apenas uma resposta incorreta. Já na questão 7.3 a maioria dos alunos não respondeu à questão.

O aluno que respondeu erradamente à questão 7.2 também não identificou o ponto B como baricentro na questão 7.1. Assim, seria de esperar que ele não reconhecesse nem aplicasse as propriedades do baricentro, quer em 7.2 quer em 7.3. A resolução do aluno consistiu na realização em cálculos fortuitos de modo a obter o valor $7{,}5$.

Nas três resoluções parcialmente corretas todos os alunos responderam corretamente em 7.1 e todos aplicaram uma das propriedades do baricentro, o que mostra que apesar de não terem resolvido corretamente a questão até ao fim, estes alunos mostraram conhecer as propriedades. O que levou estes alunos a não terem as respostas corretas foram erros na determinação do comprimento desconhecido do cateto, na aplicação do Teorema de Pitágoras ou terem mesmo desistido da resolução, como podemos observar na Figura 34 (a corretor estão escondidas indicações dadas pela professora na correção).

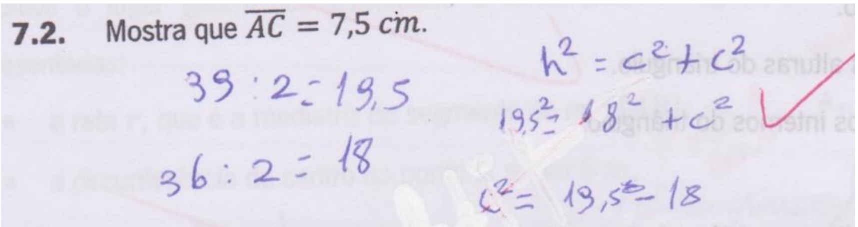


Figura 34. Resolução do aluno A_{18} à questão 7.2.

Este aluno deixou a resolução incompleta e não respondeu na questão seguinte, dando ideia de que desistiu do teste.

Nas onze respostas consideradas corretas, são apresentados três tipos de resoluções. A resolução mais usada foi a de considerar $\overline{AN} = 18$ e $\overline{CN} = 19{,}5$, já que A e C são pontos médios e, por conseguinte, a reta que passa por eles é paralela a MP, donde $[ACN]$ é um triângulo retângulo e pode ser usado o Teorema de Pitágoras. Outra resolução, usada por três alunos, foi determinar $\overline{PM}$ e posteriormente, como $[AC]$ é paralelo a $[PM]$ e $\overline{PM} = 2\overline{AC}$, determinaram $\overline{AC}$ dividindo $\overline{PM}$ por dois. Na última resolução considerada correta, o aluno indicou que $[PMN]$ e $[CAN]$ são triângulos semelhantes e por conseguinte $\overline{PM}$ está em relação com $\overline{CA}$. Assim, determinou $\overline{PM}$ através do Teorema de Pitágoras e seguidamente determinou $\overline{AC}$ pela razão de semelhança.

Na questão 7.3 a maioria dos alunos não apresentou resposta, sendo que um aluno desenhou na folha o triângulo $[MAC]$, identificou corretamente as medidas de $\overline{MA}$ e $\overline{AC}$, considerou a incógnita $\overline{MC}$ e depois riscou e não apresentou qualquer resposta. Nas respostas consideradas incorretas observa-se que os alunos aplicaram erradamente a propriedade, aplicando-a a outro segmento que não o devido.

Nas respostas parcialmente corretas observou-se que os alunos souberam aplicar as propriedades, porém não determinaram ou determinaram erradamente $\overline{MC}$, como podemos observar pela Figura 35 (o que se vê a corretor esconde indicações dadas pela professora na correção do exercício). Nas respostas corretas todos os alunos determinaram $\overline{MC}$ aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[MAC]$ e referindo explicitamente que $\overline{BC} = \frac{1}{3}\overline{MC}$. Os seis alunos que não responderam a 7.2 também não responderam a 7.3.

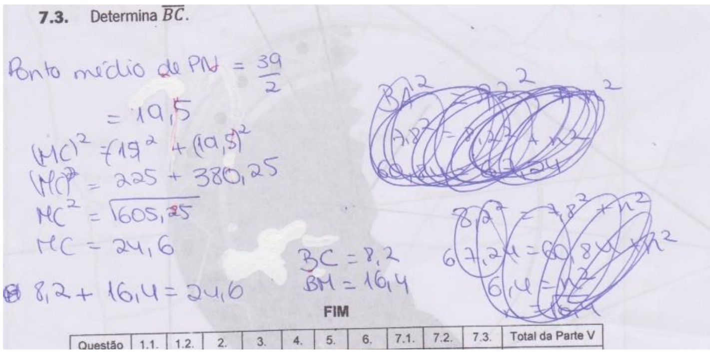


Figura 35. Resolução do aluno A_{10} à questão 7.3.

Nestas duas alíneas é explícito o cansaço dos alunos, já que, antes de resolverem esta ficha, os alunos já tinham realizado um teste de Matemática nos noventa minutos anteriores, tendo havido apenas quinze minutos de intervalo ente o teste e a ficha por partes. Assim, com tal ritmo de trabalho é natural que os alunos não tenham revelado todo o seu potencial na alínea 7.3, até porque, em minha opinião, esta questão era mais simples do que a alínea anterior.

Mesmo com as dificuldades observadas, faço uma avaliação positiva destes resultados, sendo bastante claro o progresso que os alunos tiveram durante a intervenção, revelando, ao longo desta ficha, saberem e serem capazes de usar as propriedades dos lugares geométricos.

De sublinhar que esta ficha foi um dos momentos de avaliação onde os alunos obtiveram melhor média, só ultrapassada pela ficha sobre Probabilidades. Além disso, foi também a melhor nota em momentos de avaliação para quatro alunos, o que me deixa bastante orgulhosa.

4.3.2. Análise do questionário

Para me ajudar a compreender de que forma os materiais didáticos ajudaram os alunos a ultrapassar as suas dificuldades na determinação dos Lugares Geométricos, bem como compreender de que forma os alunos encararam a utilização desses materiais em sala de aula e o quanto isso os motivou, elaborei um questionário que apliquei três semanas após o final da minha intervenção.

Este questionário, que pode ser consultado no Anexo VII, era totalmente anónimo e compreendia três partes distintas: uma primeira parte onde os alunos inseriam alguns dados pessoais, como idade, sexo e notas obtidas nos três períodos anteriores; uma segunda parte onde constavam vinte e uma afirmações em que os alunos indicavam o seu grau de concordância numa escala de 1 a 5, sendo 1 discordar totalmente e 5 concordar totalmente; uma terceira parte onde constavam quatro questões de resposta livre.

Para a análise das respostas do questionário organizaram-se as afirmações por assuntos e em tabelas, determinando em percentagens os graus de concordância. Para simplificar a compreensão, agruparam-se os níveis 1 e 2, discordo totalmente e discordo parcialmente, passando a representá-los por DP/DT e agruparam-se os níveis 4 e 5, concordo parcialmente e concordo totalmente, passando a representá-los por CP/CT. Em algumas afirmações houve alunos que não responderam, motivados possivelmente por não terem estado presentes na respetiva aula. Embora essa opção de respostas não apareça na tabela, ela faz parte do meu espaço amostral. Os itens de resposta aberta foram tipificados e agrupados igualmente numa tabela, acompanhado das percentagens.

Perceção geral do tema e da metodologia

Os itens 1, 2 ,18, 19, 20 e 21 do questionário tinham um carácter mais global e pretendiam aferir se os alunos gostaram do tema e da metodologia de trabalho adotada nas aulas.

Tabela 16 – Percentagens dos tipos de respostas aos itens 1, 2, 18, 19, 20 e 21

Item	DP/DT	NO	CP/CT
1. Gostei de estudar o tema Lugares Geométricos.	0	13,6	81,8
2. Sinto-me mais motivado para aprender matemática quando uso materiais diversificados.	0	9,1	90,9
18. A metodologia de trabalho adotada (trabalho de grupo, tarefas de exploração, utilização do origami, do material de desenho e do computador com o GeoGebra,...) motivou-me para aprender.	9,1	13,6	77,3
19. O trabalho de grupo contribuiu para a discussão de ideias.	13,6	22,7	63,6
20. Trabalhar com os materiais (origami, material de desenho e GeoGebra) nas aulas de Lugares Geométricos traz vantagens.	0	4,5	90,9
21. Trabalhar com os materiais (origami, material de desenho e GeoGebra) nas aulas de Lugares Geométricos traz desvantagens.	81,8	4,5	13,6

Como podemos observar pela Tabela 16, a grande maioria dos alunos respondeu que gostaram de estudar o tema Lugares Geométricos e 90,9% dizem-se sentir motivados quando aprendem Matemática com o uso de materiais diversificados. Nestas duas afirmações nenhum aluno discordou, apresentando-se pequenas percentagens de não opinião.

No que toca à metodologia, a grande maioria (77,3%) afirma que a metodologia de trabalho adotada o motivou para aprender, porém menos alunos concordam que o trabalho de grupo tenha contribuído para a discussão de ideias, havendo nesta afirmação 22,7% de alunos que não têm opinião e 13,6% (3 alunos) a discordarem.

Já relativamente às vantagens e desvantagens do uso dos materiais didáticos, 90,9% dos alunos afirma existirem vantagens, não havendo nenhum aluno a discordar, e 81,8% dos alunos afirmaram não existirem desvantagens.

Da análise desta tabela transparece a ideia de que os alunos gostaram do tema e de usar os materiais, reconhecendo-lhes vantagens no seu uso em sala de aula.

Dificuldades na manipulação dos materiais de desenho

Nos itens de 3 a 8 do questionário eram apresentadas algumas afirmações acerca das dificuldades na manipulação da régua, do compasso e do transferidor, antes e depois da intervenção. Os resultados são apresentados na Tabela 17, onde se comparando as respostas sobre se os alunos afirmaram sentir dificuldades no início da intervenção e depois da intervenção na manipulação de cada material.

Tabela 17 – Percentagens dos tipos de respostas aos itens 3, 4, 5, 6, 7 e 8

Item	DP/DT	NO	CP/CT
3.No início do estudo deste tema tinha muita dificuldade em manipular a régua.	86,4	4,5	9,1
4.No início do estudo deste tema tinha muita dificuldade em manipular o compasso.	81,8	9,1	9,1
5.No início do estudo deste tema tinha muita dificuldade em manipular o transferidor.	90,9	9,1	0
6.Continuo a ter dificuldade em manipular a régua.	100	0	0
7.Continuo a ter dificuldade em manipular o compasso.	90,9	9,1	0
8.Continuo a ter dificuldade em manipular o transferidor.	100	0	0

Por análise da tabela podemos verificar que 9,1% dos alunos afirmam que tinham dificuldades na manipulação da régua no início da intervenção, porém, depois da intervenção nenhum aluno afirma ter essas dificuldades, sendo que todos os alunos discordam da afirmação de ainda sentir dificuldades na manipulação da régua.

No que toca ao compasso, os resultados são parecidos, sendo que 9,1% dos alunos afirmam que tinham dificuldades na manipulação do compasso no início da intervenção e nenhum aluno afirma sentir dificuldades depois da intervenção. Dos dois alunos (9,1%) que tinham dificuldades no início, um indica já não ter essas dificuldades e outro continua sem opinião. Finalmente, dos dois alunos que não tinham opinião sobre as dificuldades no início da intervenção, um indica não ter dificuldades depois da intervenção e outro mantém-se sem opinião.

Relativamente ao transferidor, nenhum aluno afirmou sentir dificuldades na manipulação do transferidor, quer no início da intervenção, quer depois. No entanto, 9,1% refere não ter opinião relativamente às suas dificuldades no início da intervenção.

Houve apenas um aluno que indicou sentir dificuldades quer no uso da régua quer do compasso no início da intervenção. Relativamente às respostas dadas no início e no fim intervenção, fica-se com a sensação de que os alunos optaram pelo nível de não opinião quando pretendiam indicar que não concordavam nem discordavam, ficando assim no meio termo.

De uma maneira geral, os alunos mostraram-se muito otimistas em relação às dificuldades na manipulação do material de desenho ao afirmarem que a intervenção os ajudou a superar as dificuldades que tinham no início da mesma. Embora este otimismo possa ser natural, já que os materiais de desenho acompanham os alunos desde cedo, ficamos com a dúvida se foram as tarefas que os ajudaram a superar as dificuldades, e isso mesmo era questionado no item 9 do questionário.

Por análise da tabela, observamos que 68,2% dos alunos afirma que as tarefas resolvidas nas aulas permitiram ganhar destreza na manipulação dos materiais, sendo que 13,6% discorda e 18,2% não tem opinião. Dos alunos que discordam ou não têm opinião relativamente a esta afirmação, todos responderam também não ter dificuldades na manipulação dos materiais quer no início, quer depois da intervenção. Assim, podemos concluir que todos os alunos que indicaram ter ultrapassado as dificuldades, afirmam que as tarefas os ajudaram a superar essas dificuldades.

A tarefa com a corda

Nos itens 10 e 11 pretendia-se aferir qual a opinião dos alunos relativamente à aula onde foi usada a corda, percebendo se os alunos consideraram ser importante a tarefa para a sua aprendizagem e se gostaram da aula.

Tabela 19 – Percentagens dos tipos de resposta aos itens 10 e 11

Item	DP/DT	NO	CP/CT
10. A utilização da corda foi importante para a aprendizagem dos conceitos de círculo, circunferência e coroa circular.	0	9,1	86,4
11. Gostei da aula em que foi usada a corda.	0	0	95,5

Por análise da tabela podemos observar que nenhum aluno discorda da afirmação de que a corda tenha sido importante para a aprendizagem da circunferência, do círculo e da coroa circular. Também todos os alunos afirmam terem gostado da aula.

As tarefas com o origami

Nos itens 12, 13 e 16 pretendia saber qual a opinião dos alunos relativamente às atividades realizadas com o origami, averiguando se os alunos consideraram que essas atividades foram importantes para a sua aprendizagem, se gostaram de como decorreu as aulas e se gostariam de no futuro voltar a resolver tarefas com o uso do origami.

Tabela 20 – Percentagens dos tipos de resposta aos itens 12, 13 e 16

Item	DP/DT	NO	CP/CT
12. O origami foi importante para aprendizagem dos conceitos de mediatriz, bissetriz e alturas.	4,5	4,5	90,9
13. Gostei das aulas em que foi utilizado o origami.	9,1	9,1	81,8
16. Gostava, no futuro, de resolver mais tarefas com recurso ao origami.	13,6	40,9	45,5

Analisando a tabela podemos observar que 90,9% dos alunos acharam importante o origami na aprendizagem dos conceitos mediatriz, bissetriz e alturas, sendo que um aluno não manifesta opinião e um aluno discorda que o origami tenha sido importante nessa aprendizagem. No que toca às aulas, 81,8% indicam que gostaram das aulas onde foi usado o origami, havendo 9,1% que não tem opinião e apenas 9,1% que discorda, ficando assim a ideia de que os alunos apreciaram a forma como decorreram as aulas e as atividades que realizaram. Embora quase metade dos alunos gostaria de no futuro voltar a resolver tarefas com o uso do origami, 40,9% indica não ter opinião. Desta análise podemos concluir que os alunos gostaram de resolver tarefas com o uso do origami e reconhecem-lhe benefícios na aprendizagem, existindo, no entanto, um grupo significativo de alunos que não tem opinião relativamente a gostarem de voltar a resolver tarefas com o uso do origami.

A tarefa com o GeoGebra

Os itens 14, 15 e 17 do questionário pretendiam apurar qual o grau de concordância dos alunos relativamente às atividades realizadas com o GeoGebra, averiguando se os alunos consideraram que essas atividades foram importantes para a sua aprendizagem, se gostaram de como decorreu a aula e se gostariam de no futuro voltar a resolver tarefas com o uso do GeoGebra.

Tabela 21 – Percentagens dos tipos de resposta aos itens 14, 15 e 17

Item	DP/DT	NO	CP/CT
14. O uso do GeoGebra foi importante para aprendizagem dos pontos notáveis de um triângulo.	4,5	18,2	77,3
15. Gostei das aulas em que foi usado o GeoGebra.	9,1	13,6	77,3
17. Gostava, no futuro, de resolver mais tarefas com recurso ao GeoGebra.	9,1	27,3	63,6

Como podemos ver pelas percentagens da tabela, 77,3% dos alunos consideraram que o GeoGebra foi importante na aprendizagem dos conceitos de pontos notáveis do triângulo e apenas um aluno considerou não ter sido importante. No que toca à aula onde foi usado o GeoGebra, 77,3% dos alunos afirmou ter gostado da aula e apenas 9,1% não gostou dessa aula. Já sobre se gostariam de no futuro resolver mais tarefas com o uso do GeoGebra, 63,6% dos alunos concorda e apenas 9% indica não ter essa preferência.

Comparando as respostas dadas pelos alunos, verifica-se que eles reconheceram mais importância ao uso do origami na aprendizagem e de seguida à corda, porém foi a aula em que foi usada a corda aquela que os alunos mais gostaram. Já quando se questionam os alunos sobre qual o material que gostavam de voltar a usar nas aulas, verifica-se que mais alunos escolheram o GeoGebra do que o origami.

Numa apreciação global, a maioria dos alunos revela ter gostado do tema, de ter gostado de usar os materiais, de ter gostado das aulas onde foram usados os materiais e da metodologia usada nas aulas. Reconhecem ainda as vantagens do uso dos materiais nas suas aprendizagens e afirmam terem-nos ajudado a ultrapassar as suas dificuldades.

Do item 22 ao item 25 eram apresentadas aos alunos uma serie de questões de resposta aberta onde eram questionados sobre as vantagens e desvantagens que tinham encontrado no uso dos materiais e qual foi o material de que tinham gostado mais. Por fim, era deixado um espaço para que os alunos pudessem escrever qualquer comentário acerca das aulas de Lugares Geométricos. Os dados foram tipificados e são apresentados de seguida.

Vantagens e Desvantagens

No item 22 os alunos enumeraram vantagens que encontraram no uso dos diferentes materiais didáticos, que podemos observar na Tabela 22.

Tabela 22 – Percentagem de alunos nas vantagens por eles consideradas no uso dos materiais

Vantagens	Percentagens de alunos
Acarretam maior motivação e mais participação nas aulas	40,9
Melhora as aprendizagens	31,8
Torna as aulas mais interessantes e práticas	27,3
Acelera a compreensão	22,7
Aprendem de forma divertida	18,2
Os alunos podem manipular	18,2
Melhor aprendizagem em grupo	13,6

Por análise da tabela podemos concluir que quase metade dos alunos indica como vantagem do uso dos materiais a motivação que sentem e a oportunidade que lhes é dada para participar na aula. Um grande grupo também afirma que os materiais melhoram a aprendizagem e tornam as aulas mais interessantes e práticas. Houve também um grupo de alunos que realçaram o facto de sentiram que as aulas são mais divertidas com materiais e que os materiais promovem a aprendizagem em grupo.

No item 23 os alunos eram questionados acerca das desvantagens que encontraram no uso dos materiais. Essas respostas podem ser observadas na Tabela 23.

Tabela 23 – Percentagem de alunos nas desvantagens por eles consideradas no uso dos materiais

Desvantagens	Percentagens de alunos
Não tem desvantagens	59,1
Geram barulho devido ao trabalho em grupo	27,3
Desvantagens para o professor: os materiais são caros e difíceis de transportar	13,6

A maioria dos alunos afirma não existirem ou não terem sentido desvantagens no uso dos materiais, enquanto 27,3% afirma que as aulas com materiais geram algum barulho em sala de aula devido à necessidade da partilha de resultados, o que na minha opinião, desde que moderado, é um barulho positivo, de trabalho e partilha. Houve ainda um grupo de 13,6% que, surpreendentemente, afirma que a única desvantagem era para o professor, uma vez que os materiais são caros e difíceis de transportar.

Material com o qual gostou mais de trabalhar

No item 24 os alunos eram questionados sobre qual era o material que mais tinham gostado de usar e porquê. Na Tabela 24 podemos observar as respostas dos alunos.

Tabela 24 – Percentagem de alunos segundo os materiais que mais gostaram de usar e as razões indicadas

Material	Percentagem de alunos	Razões
Corda	40,9%	A tarefa era motivadora.
		Ajudou a compreender os conteúdos.
		A aula foi divertida.
Origami	40,9%	É muito interessante.
		Foi uma aula prática.
		Ajuda a compreender os conteúdos.
GeoGebra	31,8%	Gostei do material
		Ajuda na compreensão dos conteúdos
		Ajuda na observação
		É interessante
Material de desenho	13,6%	É mais fácil de usar
		Gosto de determinar os Lugares Geométricos

Podemos observar que a corda e o origami foram os materiais que os alunos mais gostaram de usar, afirmando que foram interessantes e ajudaram na compreensão dos conteúdos. Nas respostas, os alunos realçaram ter gostado da tarefa com o uso da corda pois a corda tinha-os ajudado a resolver o problema e sem ela tal não era possível. Os alunos também realçaram outra atividade realizada por eles no final de uma aula de resolução de exercícios, onde lhes forneci um mapa da escola e umas pistas com as propriedades dos lugares geométricos. Nessa atividade eles deviam descodificar qual seria o lugar geométrico, traçá-lo no mapa e descobrir onde se escondia o tesouro; no intervalo, deviam dirigir-se lá, onde encontrariam um saco de guloseimas à sua espera. Os alunos afirmaram ter gostado desta atividade pois sentiram uma motivação extra e competitividade.

Por último, no que toca ao item 25, onde os alunos poderiam deixar comentários, a maioria dos alunos aproveitou para dizer que gostaram muitas das aulas e que gostariam de voltar a usar os materiais. Disseram ainda que sentiram que os materiais tornaram o tema mais fácil e que os motivou bastante. Houve ainda alunos que aproveitaram para agradecer à professora a forma como conduziu as aulas.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES, IMPLICAÇÕES, RECOMENDAÇÕES E LIMITAÇÕES

Este capítulo está dividido em três secções. Na primeira secção são apresentadas e discutidas as principais conclusões do estudo, tendo por orientação os objetivos do estudo. Na segunda secção são apresentadas algumas implicações no âmbito da Educação Matemática. Por fim, na terceira secção, sugerem-se algumas recomendações que poderão ser consideradas em futuras investigações semelhantes e indicam-se as limitações sentidas no estudo.

5.1. Conclusões

Nesta secção apresentam-se e discutem-se os principais resultados obtidos no estudo, tendo por referência cada um dos objetivos definidos. Assim, organizam-se as conclusões segundo cada objetivo definido de modo a procurar dar-lhe resposta.

5.1.1. Diagnosticar as aprendizagens anteriores dos alunos sobre os conceitos de circunferência, mediatriz e bissetriz

Para responder a este objetivo foi distribuído aos alunos um teste diagnóstico aplicado antes do início da intervenção. Deste modo, as conclusões que aqui se apresentam são baseadas na análise desse mesmo teste.

Uma das primeiras dificuldades verificadas no teste diagnóstico foi a dificuldade que os alunos revelaram em desenhar um ângulo agudo de $45°$, onde alguns determinaram o ângulo suplementar e outros traçaram amplitudes bastante diferentes das pedidas, nomeadamente de $31°$ a $33°$ e de $52°$ e $57°$. Este erro pode estar associado à má manipulação do transferidor por parte dos alunos. Porém, se esta for a razão, os alunos não têm consciência disso, já que nos questionários nenhum aluno revelou ter dificuldades na manipulação do transferidor no início da intervenção. No que toca a desenhar ângulos retos apenas foi revelada pouca precisão pelos alunos, pois alguns ângulos variavam 1 a 2 graus dos $90°$. Já no ângulo obtuso os alunos revelaram pouca confiança em responder, talvez por se tratar de um ângulo que é menos habitual desenhar nas aulas de Matemática. Porém, apesar de quatro alunos não terem respondido à questão, houve apenas duas respostas erradas, uma por ser desenhado um ângulo reto e outra por não ter concluído a construção.

Outra dificuldade muito presente no teste diagnóstico foi na determinação da distância entre um ponto e um segmento de reta, que apenas dois alunos determinaram corretamente. Nesta questão do teste diagnóstico metade dos alunos errou, sendo o erro mais frequente unir o ponto ao extremo do segmento de reta mais próximo.

A determinação da bissetriz de um ângulo não originou grandes dificuldades já que a grande maioria dos alunos o fez corretamente. A resolução mais usada consistiu em, partindo do desenho dado do ângulo (a fatia de piza), determinar a amplitude do ângulo, dividi-o por dois e traçar a semirreta correspondentes à bissetriz a partir da amplitude obtida.

Na representação das coordenadas de pontos num referencial ainda houve alunos que não o souberam fazer, essencialmente quando esses pontos pertencem a um dos eixos coordenados. Nessa mesma questão quando eram pedidas representações de lugares geométricos, como os pontos que estão a menos de uma unidade de A ou os pontos que estão simultaneamente a mais de uma unidade e a menos de duas unidades de B, nenhum aluno foi capaz de reconhecer que se tratava do círculo de centro A e raio 1 e da coroa circular de centro B e raio entre 1 e 2, respetivamente.

Relativamente à mediatriz, em que era pedido aos alunos que determinassem alguns pontos que estivessem à mesma distância de dois pontos dados, apenas quatro alunos o fizeram corretamente e alguns alunos determinaram apenas o ponto médio. Algumas respostas incorretas revelam a influência que as figuras têm nos alunos, aspeto que também observei durante as aulas. Nesta questão pudemos verificar que 55% dos alunos assinala o ponto médio como única resposta ou uma das respostas e os alunos tendencialmente utilizam a régua quando se trata de distâncias.

Em conclusão, como pudemos verificar no teste diagnóstico, os alunos partiram com muitas dificuldades para a intervenção pedagógica, o que foi tido em conta na sua implementação. Esta pré-avaliação foi de grande importância para a própria preparação da intervenção, já que na revisão da literatura existente não consegui encontrar nenhum documento onde se referissem as dificuldades dos alunos neste tema, o que poderá ser um indício da pouca importância que lhe tem sido dada.

5.1.2. Identificar as dificuldades dos alunos na determinação de Lugares Geométricos

Durante a intervenção de ensino foi possível observar e registar algumas das dificuldades dos alunos na determinação dos lugares geométricos, quer nas aulas de exploração dos conteúdos quer na de avaliação.

A Geometria apresenta-se como um domínio propício para que os alunos desenvolvam a capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender, objetivos fundamentais do ensino da Matemática (Pavanello, 2004). Os lugares geométricos são ainda um tema pouco explorado em sala de aula, sendo muitas vezes abordado com o desenho de umas mediatrizes e bissetrizes, sem estudar as suas propriedades: "Entender as propriedades geométricas que estão atreladas a uma determinada figura e como elas se relacionam, pode possibilitar um entendimento de conceitos geométricos…" (Oliveira & Araujo, 2012, p.211).

Nesta unidade, a escala é um elemento muito importante. Os problemas vêm muitas vezes associados a situações da vida real onde se pretende determinar, em mapas, zonas que ficam a um determinado raio real, o que implica que os alunos tenham de saber utilizar a escala. Porém, ao longo da intervenção, foi visível a dificuldade que os alunos sentiram em trabalhar com a escala gráfica, tentando arranjar estratégias para não ter de a interpretar. Quando na aula de resolução de exercícios os alunos se depararam com uma escala numérica, também foram vários os que questionaram sobre o que a escala significava.

Foi ainda visível durante o início da intervenção, na determinação da área de evacuação do problema da central, que apenas um grupo determinou o círculo de centro na central nuclear, enquanto os restantes apenas traçaram o arco de circunferência. O mesmo se verificou para a coroa circular, o que revela que os alunos não identificaram a zona pretendida a partir das propriedades dadas, assumindo sempre que se trata de uma circunferência. Porém, na ficha de avaliação nenhum aluno cometeu esse erro, já que todos os alunos que resolveram a questão assinalaram a parte interior da zona pedida.

Os pontos, as retas e os planos são entidades base da Geometria. Dominar estes conceitos é essencial para que se possa entender qualquer conteúdo deste tema. Ora, isso foi tido em conta na atividade do origami. Nessa atividade observeram-se algumas lacunas nessas noções base, nomeadamente na identificação de semirretas, na determinação de duas retas perpendiculares e de duas retas paralelas e na determinação do simétrico de um ponto em relação a uma reta.

Ao longo das aulas de intervenção também observei, várias vezes, o mau uso dos materiais de desenho, como foi mostrado na secção 4.2.3 com o transferidor. Esse aspeto prejudicava fortemente os alunos nas construções geométricas, já que por mais que se consiga identificar o lugar geométrico a desenhar, o uso do material é que determina a construção. Por vezes, a pouca precisão das construções provinha do mau estado dos próprios materiais dos alunos, onde era frequente os compassos alterarem a sua abertura durante o seu uso.

Um aspeto que foi analisado no teste diagnóstico e explorado também nas aulas foi a determinação da distância num ângulo, mais precisamente, entre um ponto da bissetriz e um lado desse ângulo. Analogamente ao que aconteceu no diagnóstico, na aula a maioria dos alunos errou na determinação dessa distância, tendo desenhado o segmento de reta perpendicular à reta que contém o ponto.

Na avaliação, a dificuldade que mais se destacou foi na descrição do lugar geométrico, onde nenhum aluno apresentou uma resposta correta e a maioria dos alunos que respondeu não referiu pelo menos uma das propriedades contidas na figura. Já nas construções os alunos revelaram um grande progresso relativamente aos resultados do teste diagnóstico.

5.1.3. Avaliar em que medida os materiais manipuláveis e o GeoGebra contribuíram para os alunos ultrapassarem as suas dificuldades

A utilização de materiais manipuláveis em sala de aula pode ser, desde que devidamente conduzida pelo professor, uma forma de facilitar a aprendizagem dos alunos. "Estes materiais podem tornar as aulas de matemática mais dinâmicas e compreensíveis, uma vez que permitem a aproximação da teoria matemática da constatação na prática, por meio da ação manipulativa" (Rodrigues & Gazire, 2012, p. 188).

Estudos comparativos entre o ensino tradicional e o ensino recorrendo à utilização de materiais, citados em Botas (2008), concluíram que a utilização de materiais manipuláveis produziu maiores rendimentos em todas as idades, bem como em todos os anos de escolaridade. Assim, desde o início da preparação da intervenção pedagógica esperava-se que a utilização destes materiais ajudaria os alunos a ultrapassarem as dificuldades.

A corda trouxe para a atividade pouco rigor aquando do desenho dos lugares geométricos, contudo penso que foi bastante útil para que os alunos refletissem sobre as propriedades do círculo e da circunferência. É claro que não seria viável continuar com o uso da corda para a determinação da circunferência, mas como consequência da teoria de Piaget, o uso de materiais concretos deve ser o ponto de partida para ensinar, devendo ser usados como primeira etapa da exploração dos conceitos matemáticos (Ferreira, et al., 2010).

Na ficha por partes é visível a progressão que os alunos tiveram relativamente ao círculo e à circunferência, já que no teste diagnóstico nenhum aluno foi capaz de identificar o círculo e a coroa circular. O mesmo foi visível na utilização da escala, pois quase todos os alunos utilizaram adequadamente a escala.

No questionário, pudemos observar que nenhum aluno discordou da afirmação de que a corda foi importante para a aprendizagem da circunferência, do círculo e da coroa circular e todos os alunos afirmaram ter gostado da aula.

O origami proporcionou uma atividade completamente diferente pois, ao não disporem dos materiais de desenho, os alunos foram obrigados a refletir sobre as propriedades dos objetos que pretendiam construir. Considerou-se esta atividade importante uma vez que nesta unidade apela-se à identificação das propriedades dos lugares geométricos para que se possam descrever interseções e reuniões de lugares geométricos. Durante esta atividade os alunos puderam recordar e explorar propriedades geométricas que se revelaram importantes para o estudo da mediatriz.

Na ficha de por partes foi também visível a progressão dos alunos no conhecimento das propriedades da mediatriz, já que no teste diagnóstico apenas quatro alunos foram capazes de identificar a mediatriz através das suas propriedades

Já no questionário pudemos observar quase todos os alunos (90,9%) acharam importante o origami na aprendizagem dos conceitos mediatriz, bissetriz e alturas. A grande maioria dos alunos da turma diz ter gostado das aulas em que foi usado o origami.

O GeoGebra trouxe muitas vantagens no estudo do baricentro, nomeadamente pelo facto de terem sido os próprios alunos a observarem e determinarem as propriedades do baricentro e pela possibilidade de manipularem os triângulos, o que lhes permitiu observar a invariância das propriedades para um grande número de triângulos. Por outro lado, os alunos mostraram-se bastante motivados e a inexperiência no uso do GeoGebra não foi um entrave, pois os alunos rapidamente se adaptaram ao *software*.

Na ficha por partes os alunos revelaram reconhecer o baricentro e conhecerem as suas propriedades, já que mesmo quando não sabiam resolver o problema, fizeram questão de escrever a propriedade que deveriam usar.

O questionário mostrou-nos que grande parte dos alunos (77,3%) considerou que o GeoGebra foi importante na aprendizagem dos conceitos de pontos notáveis do triângulo e também indicam terem gostado da respetiva aula.

No geral, quase todos os alunos (90,9%) disseram no questionário sentir-se motivados quando aprendem Matemática com o uso de materiais diversificados e a grande maioria (77,3%) afirmou que a metodologia usada os motivou para aprender. Já relativamente às vantagens e desvantagens do uso de materiais, quase todos os alunos (90,9%) afirmaram existir vantagens e também quase todos os alunos (81,8%) afirmaram não existir desvantagens.

Em suma, assim como no estudo realizado por Pires (1995), também neste os alunos reconheceram vantagens da utilização dos materiais didáticos. Tal como em Pires (1995) observou-se que os materiais proporcionaram aprendizagens mais significativas e mais próximas da realidade, favoreceu a comunicação e partilha de raciocínios e permitiu o desenvolvimento de atitudes mais positivas em relação à Matemática, estimulando o trabalho de grupo e a autoconfiança.

5.2. Implicações e recomendações para o ensino e aprendizagem

Deste estudo resultam várias implicações para o ensino e aprendizagem da Geometria, em geral, e dos lugares geométricos, em particular, com recurso a materiais manipuláveis e ao GeoGebra, que se expõem de seguida.

Ao longo deste estudo identificaram-se as dificuldades dos alunos relativamente aos lugares geométricos e analisou-se em que medida os materiais didáticos podem ajudá-los na superação dessas dificuldades. Foram reveladas as estratégias usadas ao longo das aulas com cada material e as dificuldades que os alunos foram manifestando, quer nos conteúdos quer na utilização dos próprios materiais. Os alunos foram unânimes ao referirem que os materiais trouxeram vantagens para ultrapassar as suas dificuldades, e enquanto apenas alguns, muito poucos, referiram que o uso dos materiais acarretava também desvantagens, nomeadamente no ruído que se gera na sala.

Ao longo da intervenção pedagógica o ruído foi o aspeto que me deixou mais desconfortável na metodologia que estava a usar. Porém, cedo percebi que esse ruído era incontornável se pretendia que os alunos trabalhassem em grupo e partilhassem as suas conclusões. Compreendi que esse ruído e o silêncio fazem parte de uma aula e não podemos querer que os alunos partilhem ideias, apoiem colegas e comuniquem Matemática sem que ocorra um certo nível de ruído. Compreendi que a procura permanente desse silêncio torna os alunos mais egoístas e competitivos.

Os alunos afirmaram ainda que os materiais os ajudaram a ultrapassar as dificuldades e a sentirem-se mais motivados quando os utilizavam. Observei também que os alunos se sentiram mais motivados quando realizaram tarefas em grupo, o que aconteceu quando havia um único mapa para o grupo explorar ou quando tinham um mapa da caça ao tesouro para encontrar o tesouro, do que quando, embora estando organizados em grupo, realizavam as tarefas individualmente. Nestas tarefas os alunos eram efetivamente obrigados a ajudarem-se para atingir o objetivo pretendido comum.

Aquando da preparação de uma atividade com um material novo para os alunos, o professor deve refletir sobre quais as dificuldades que podem surgir durante a atividade e procurar minimizar os efeitos negativos da adaptação ao novo material, pois quando usamos um material, pretendemos tirar o máximo de vantagens possíveis. Também é referido em estudos citados em Botas (2008) que quanto melhor os alunos estiverem adaptados a um material, mais partido podem tirar da sua utilização.

Também se pretende sublinhar neste estudo que não podemos submeter os alunos apenas a um formato de trabalho, devemos proporcionar ao aluno experiências diversificadas, pois como os alunos são diferentes, também os seus processos de aprendizagem são diferentes, permitindo, deste modo, apoiar todos os alunos.

Os momentos de síntese são da maior importância quando se usa um material didático, já que os materiais não apresentam diretamente as propriedades matemáticas, é necessário que o professor transponha o conhecimento adquirido informalmente no material para o conhecimento formal da Matemática. Dificilmente este trabalho pode ser realizado pelos alunos pois, frequentemente, o aluno não consegue "ver a Matemática" no material que usa. Neste sentido, nunca o professor deixa de ser importante em todo este processo.

Espera-se que tudo o aqui é relatado se tenha tornado útil para o melhoramento das práticas de ensino e aprendizagem de Matemática. A nível pessoal, esta experiência enriqueceu-me bastante, tendo podido trabalhar com um material que não tinha utilizado no ensino da Matemática, o origami, e permitiu-me experienciar como todos os materiais se podem completar, proporcionando ao aluno uma experiência de ensino à sua medida, rejeitando métodos tradicionais que se verificou já não serem aplicáveis no ensino e aos alunos que temos hoje na escola. Espero poder continuar a desenvolver o conhecimento sobre novas metodologias e estratégias que mostrem ao aluno uma Matemática mais atual, prática, divertida e útil.

5.3. Limitações e recomendações para estudos futuros

Ao longo deste estudo, a maior limitação encontrada foi a escassa literatura existente sobre o ensino e aprendizagem do tema lugares geométricos, sendo que a existente explora pequenas partes do tema, relatando a utilização de alguns materiais, mas não referindo de que forma esses materiais poderão ter ajudado os alunos a ultrapassar as suas dificuldades. Também não foi possível encontrar nenhum estudo que determinasse quais as dificuldades que os alunos apresentam na determinação dos lugares geométricos utilizando os materiais de desenho, nem que dificuldades os alunos revelam na análise das propriedades dos lugares geométricos. Este aspeto impossibilitou-me de poder comparar os meus resultados com esses possíveis estudos ou mesmo preparar-me melhor para as possíveis dificuldades que poderiam surgir.

Assim, esta será a minha primeira recomendação para estudos futuros, estudar mais o tema de lugares geométricos, analisar de que forma os alunos conseguem reconhecer as propriedades dos lugares geométricos utilizando apenas o material de desenho.

Outra questão pertinente seria que este mesmo estudo seja alargado para um contexto de intervenção mais amplo. Podiam comparar-se se turmas com melhor aptidão algébrica terão também melhor aptidão no estudo deste tema com a utilização destes materiais.

Seria interessante também realizar este estudo em vários níveis de ensino, comparando que faixas etárias têm maior aptidão para manipular cada material, o que ajudaria a compreender quais os materiais que estão mais indicados para cada faixa etária.

Como neste estudo foram utilizados três tipos de materiais, seria interessante realizar um estudo onde apenas se aplicasse um material a cada turma para comparar os resultados entre as várias turnas, podendo assim averiguar-se quais os aspetos matemático-didáticos mais desenvolvidos por cada material.

BIBLIOGRAFIA

Abreu, A. C. F. (2013). *O ensino e a aprendizagem de Geometria com recurso a materiais manipuláveis: uma experiência com alunos do 9º ano de escolaridade*. Relatório de Estágio, Universidade do Minho, Braga.

Agrupamento de Escolas de Barcelos (2014). *Projeto Educativo*. Barcelos: Autor.

Andrade, R. A. (2012). *GeoGebra: Uma Ferramenta computacional para o ensino de Geometria no ensino fundamental 2*. Monografia, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, Brasil.

Associação de Professores de Matemática (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: Autor.

Baldissera, A. (2011). *A geometria trabalhada a partir da construção de figuras e sólidos geométricos*. Santa Terezinha de Itaipu – Pr: Secretaria de Estado da Educação.

Bedra, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H & Oliveira, P. (2011). *Geometria e Medida no Ensino Básico*. Lisboa: Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Borba, M. C., Silva, R. S. R. & Gadanis, G. (2014). *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica Editores.

Botas, D. O. S. (2008). *A utilização dos materiais didácticos nas aulas de Matemática – Um estudo no 1º ciclo*. Dissertação de mestrado, Universidade Aberta, Lisboa.

Braz, L. H. C. (2013). *Uma Abordagem Didática da Geometria dos Pontos Notáveis de Triângulos Utilizando Origami*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Lavras, Lavras, Brasil.

Carneiro, C. P. P. (2005). *O Contributo da Linguagem Logo no ensino e aprendizagem da Geometria*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Chagas, A. T. R. (2000). O questionário na pesquisa científica. *Administração OnLine*, São Paulo, 1(1).

Conceição, M. A. & Fernandes, J. A. (2009). Implementação de tarefas matemáticas na sala de aula por uma futura professora. In J. A. Fernandes, M. H. Martinho & F. Viseu (Orgs.), *Atas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 190-201). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Correia, P. F. & Fernandes, J. A. (2009). Processos de resolução de problemas de Combinatória por alunos do 9.º ano de escolaridade. In J. A. Fernandes, M. H. Martinho & F. Viseu (Orgs.), *Atas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 339-353). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Dicionário etimológico. Disponível em: http://www.dicionarioetimologico.com.br/(29/01/2017).

Esteves, A. S. A. (2010). *Resolução de problemas no tema Lugares Geométricos: O papel dos recursos na actividade matemática dos alunos*. Relatório de Estágio, Lisboa: Universidade de Lisboa, Lisboa.

Fernandes, J. A. (2006). *Tecnologias no Ensino da Matemática: Aplicação de um Programa de Geometria Dinâmica no Estudo da Geometria*. Braga: Centro de Formação Prof. Agostinho Manuel da Silva.

Ferreira, C. C., Sanches, D. G. R., Cardoso, F. A. R. & Vecchi, T. P. B. (2010). O uso de materiais manipuláveis em aulas de matemática. In *II Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia*. Paraná: Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Gomes, I. M. R. (2006). *As Tecnologias e o Ensino/Aprendizagem da Matemática. O contributo do programa Geometer's Sketchpad na aquisição de competências ao nível da Geometria nos alunos do nono ano do ensino básico*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Gonçalves, F. M. B. (2007). *O Movimento da Matemática Moderna. Concepções, Dinâmicas e Repercussões*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto.

Graells, P. M. (2000). *Los medios didácticos*. Univerditat Autònoma de Barcelona. Disponível em: http://peremarques.pangea.org/medios.htm (29/01/2017).

Grupo Pi. (2003). *Geometría Plana con Papel*. Granada: Universidad de Granada. Disponível em: https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12005/ClezioLemesdeOliveira.pdf (29/01/2017).

Inspeção Geral da Educação e Ciência (2015). *Relatório de Avaliação Externa do Agrupamento de Escola de Barcelos*. Lisboa: Autor.

Leite, J. M. (2008). *Materiais Manipuláveis para o Ensino e aprendizagem De Geometria Espacial*. Acessível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1664-8.pdf. (29/01/2017)

Lima, A. M. (2012). *Instrumentos e Materiais de Desenho Geométrico*. Acessível em: http://artes-real.blogspot.pt/2012/01/geometria.html (29/01/2017)

Lopes, M. M. & Souza, J. G. O (2011). A Implantação do Software GeoGebra nas Aulas de Geometria no Ensino Fundamental II. In *III Encontro Regional em Educação Matemática (III EREM)*, Rio Grande do Norte, 1 a 3 de outubro.

Lopes, V. (2010). *A Utilização de Materiais Didácticos no Ensino da Matemática ao nível do Ensino Secundário de Timor-Leste*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga.

Lorenzato, S. (Org.) (2006). *O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores*. Campinas, SP: Autores Associados.

Marques, R. M. A. (2008). *Matemática e Língua Portuguesa: Laços para o sucesso*? Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Martinho, M. H., & Ponte, J. P. (2005). Comunicação na sala de aula de Matemática: Práticas e reflexão de uma professora de Matemática. In *Atas do XVI SIEM* (pp. 273 – 293), Évora.

Matos, J. M. & Serrazina, M. L. (1996). *Didática da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico- Competências Essenciais*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

Monteiro, F., De Camargo, T., Enes, I. & Pretto, V. (2012). A Geometria e as múltiplas metodologias de Ensino. In *XVII Seminário Interinstitucional de Ensino, Pesquisa e Extensão*.

Nascimento, E. G. A. (2012). Avaliação do uso do Software GeoGebra no ensino de Geometria: Reflexão da prática na escola. In *Actas da Conferencia Latinoamericana de GeoGebra*, Uruguai.

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Oliveira, C. L. (2008). *Importância do desenho geométrico*. Brasília: Universidade Católica de Brasília.

Oliveira, G. P. & Araujo, P. B. (2012). Uma abordagem para o ensino de lugares geométricos com o GeoGebra. *Revemat*, 7(2), 209-222.

Olson, A. T. (1989). *Mathematics through Paper Folding*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pacheco, J. A. (1998). Avaliação da aprendizagem. In L. Almeida & J. Tavares (Orgs.), *Conhecer, aprender e avaliar* (pp. 111-132). Porto: Porto Editora.

Pavanello, R. M. (2004). Por que ensinar /aprender geometria? In *Anais do VII Encontro Paulista de Educação Matemática*. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Pereira, J. S. (2011). Materiais Manipuláveis na Aprendizagem de Geometria. In *Anais do XV Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*. Acessível em:http://editorarealize.com.br/revistas/ebrapem/trabalhos/Materiais%20Manipul%E1veis%20na%20Aprendizagem%20de%20Geometria.pdf (29/01/2017)

Pires, M. V. (1995*). Os conceitos de perímetro e área em alunos do 6.º ano: Concepções e processos de resolução de problemas (colecção TESES)*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de matemática. *Educação e Matemática*, n.º 34, 2-7.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Rodrigues, F. C. & Gazire, E. S. (2012). Reflexões Sobre Uso de Material Didático Manipulável no Ensino de Matemática:Da ação experimental à reflexão. *Revemat*, 7(2),187-196.

Rodrigues, M. & Bernardo, M. (2011). Ensino e Aprendizagem da Matemática. In A. Henriques, C. Nunes, A. Silvestre, H. Jacinto, H. Pinto, A. Caseiro & J. P. Ponte (Orgs.), *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Santos, R. C. R. (2011). *O Uso de Programas Computacionais e Materiais Manipuláveis no Processo de Ensino e Aprendizagem da Geometria Plana e Espacial de Alunos do Ensino Técnico em Agropecuária do Colégio Agrícola de Floriano-PI.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Silva, K. M. (2013). *Investigações Geométricas por Alunos sobre os Pontos Notáveis do Triângulo Apoiadas pelo Origami, Instrumentos de Desenho e o GeoGebra*. Monografia. Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande.

Silva, M. R. G. (1998). Considerações sobre o trabalho em grupo na aula de Matemática. *Mimesis*, 19(2), 135-145.

Sítio Câmara de Barcelos. Disponível em: http://www.cm-barcelos.pt/ (29/01/2017).

Sítio da escola. Disponível em: http://www.esbarcelos.pt/ (29/01/2017).

Tuckman, B. W. (2000). *Manual de Investigação em Educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Vale, I. (1999). Materiais manipuláveis na sala de aula: o que se diz, o que se faz. In Comissão Organizadora (Eds.), *Actas do ProfMat99*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

ANEXO I

Pedido de Autorização ao Diretor da Escola

Exmo. Senhor Diretor do

_____________________ de Barcelos

No âmbito do curso de Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário, da Universidade do Minho, nós, Carla Miranda e Maria Manuela Costa, professoras estagiárias de Matemática desta Escola, encontrámo-nos a elaborar um relatório de estágio, intitulado "Aprender e ensinar volumes e áreas de superfícies de sólidos numa turma do 9.º ano recorrendo à manipulação de sólidos" e "A utilização de materiais manipuláveis e GeoGebra no ensino e aprendizagem do tema Lugares Geométricos numa turma do 9º ano", respetivamente.

O relatório de estágio pressupõe um projeto de intervenção pedagógica supervisionada em Educação Matemática. Este projeto orienta-se no sentido de definir temas, objetivos e estratégias de ação, que decorram da observação e análise das práticas de ensino e aprendizagem na área de docência e contribuam para a compreensão e melhoria dessas práticas. Nesse sentido, há necessidade de efetuar uma recolha de dados que, nestes estudos, impõe gravações audiovisuais de algumas aulas de Matemática.

De forma a viabilizar este estudo, solicitamos a V. Exa. autorização para realizar as gravações nas aulas de Matemática na turma C do 9º ano.

Quer no processo de recolha de dados, quer no relatório de estágio, comprometemo-nos a garantir o anonimato em relação à identidade dos alunos da turma e ainda a solicitar a autorização aos Encarregados de Educação.

Desde já agradecemos a sua atenção.

Com os melhores cumprimentos,

3 de fevereiro de 2016

As professoras estagiárias

____

(Carla Alexandra do Vale Miranda)

____

(Maria Manuela Ferreira da Costa)

Autorização

_____ de _______________ de 2016

O Director do _____

____

(Jorge Manuel Vaz Saleiro)

ANEXO II

Pedido de Autorização aos Encarregados de Educação

Barcelos, 20 de janeiro de 2016

Ex.[mo(a)] Sr.[(a)] Encarregado(a) de Educação

Maria Manuela Ferreira da Costa, enquanto professora estagiária da Escola ___________ de Barcelos, vai desenvolver na turma C, do 9.º ano, em colaboração com o Professor Paulo Ferreira Correia, um projeto de utilização de materiais manipuláveis e ferramentas computacionais, nomeadamente o programa de geometria dinâmica GeoGebra, no ensino e aprendizagem do tema Lugares Geométricos.

O projeto insere-se no âmbito de uma investigação individual, que culminará no meu Relatório de Estágio de Mestrado, que se realiza na Universidade do Minho e tem como objetivos: diagnosticar as aprendizagens anteriores dos alunos sobre esta temática; identificar as dificuldades dos alunos na determinação de Lugares Geométricos e avaliar em que medida os materiais manipuláveis e o GeoGebra contribuem para os alunos ultrapassarem as suas dificuldades.

Ora, para tornar possível esse estudo, necessito recolher dados dos alunos da turma a que pertence o seu educando, mais concretamente através de gravações em vídeo das aulas sobre o tema em questão. Para tal, depois de obtida a necessária autorização do Diretor da Escola, venho também solicitar-lhe que autorize o seu educando a participar nessa recolha de dados.

Pela minha parte, enquanto única pessoa com acesso aos dados, comprometo-me a utilizar os dados recolhidos apenas para os propósitos do estudo e garantir sempre a confidencialidade dos alunos.

Agradecendo, desde já, a colaboração de V. Ex.[a], solicito que assine a declaração em baixo, devendo depois destacá-la e devolvê-la através do seu educando.

Com os melhores cumprimentos,

____

(Maria Manuela Ferreira da Costa)

Declaro que autorizo o(a) meu(inha) educando(a) ___________________________ a participar na recolha de dados conduzida pela Dra. Maria Manuela Ferreira da Costa no âmbito do seu Relatório de Estágio de Mestrado.

Barcelos, _____ / _____ / _______

Assinatura

____

ANEXO III

Teste Diagnóstico

Logotipo da Escola

Teste Diagnóstico

Lugares Geométricos e Pontos Notáveis de um

Nome: ____ N.º ________
Data: _____/_____/_____ Assinatura do professor: ______________________________

1. Desenha cada um dos seguintes ângulos:

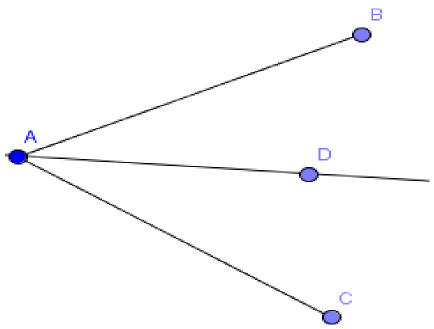
a) $45°$

b) $90°$

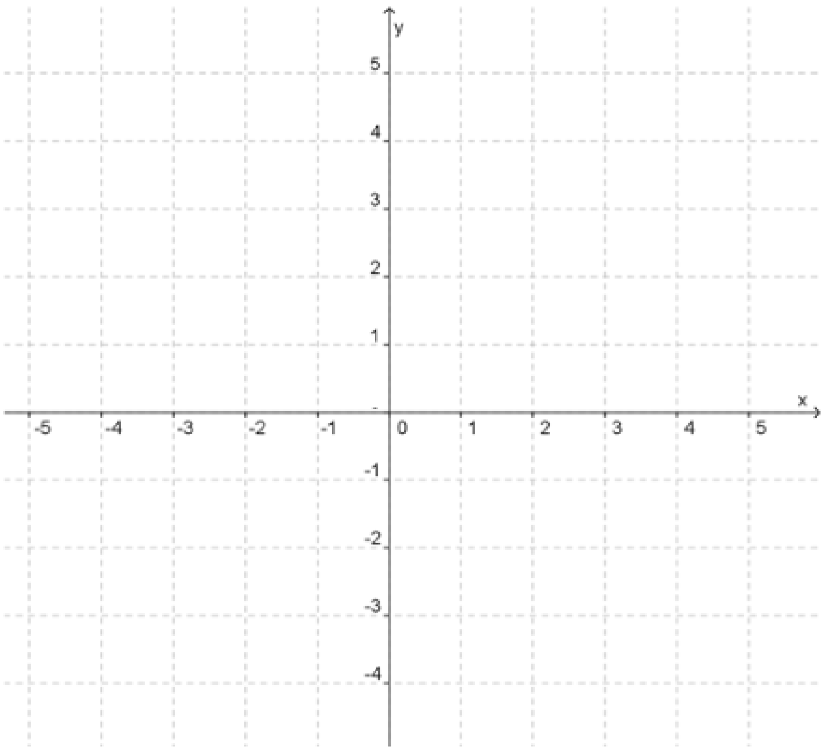
c) $270°$

2. Desenha o triângulo $[ABC]$ cujos lados medem $2\ cm$, $3\ cm$ e $4\ cm$.

3. Representa a menor distância do ponto D ao segmento $[AB]$.



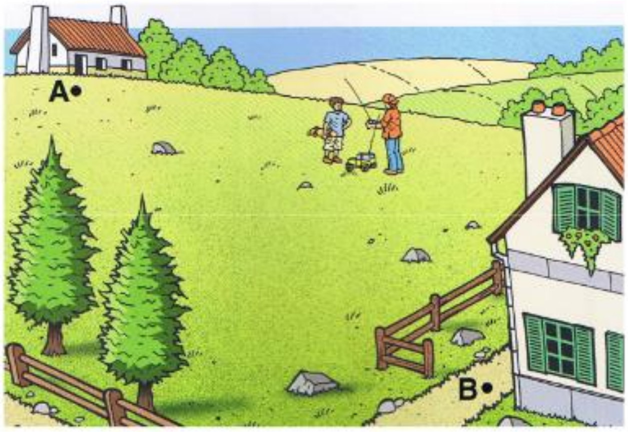
4. Considera o referencial cartesiano que se segue e os pontos $A(3,3)$ e $B(-2,0)$.



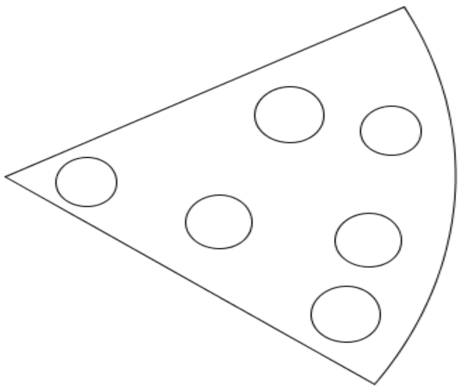
Representa no referencial anterior:

- Os pontos A e B;
- Os pontos que estão a menos de uma unidade de A;
- Relativamente ao ponto B, os pontos que estão simultaneamente a mais de uma unidade e a menos de duas unidades.

5. O Pedro e o Filipe brincam todas as tardes no campo que existe junto das suas casas. Depois da brincadeira, Pedro e Filipe despedem-se num ponto que esteja a igual distância de cada uma das suas casas. Cada dia descobrem um novo ponto nestas condições. Recorrendo ao desenho abaixo, localiza alguns pontos que estejam a igual distância das duas casas.



6. O Pedro e o Filipe foram comer pizza. No final restou uma fatia e decidiram dividi-la entre os dois. Na figura seguinte encontra-se a representação dessa fatia de pizza. Divide-a em duas partes iguais.



7. Já aprendeste matemática recorrendo ao *software* GeoGebra? (Sim/Não) _______________

a) Se respondeste Sim, quem o utilizou? (professor/alunos/ambos) __________________

b) Em que temas matemáticos (Números e Operações, Álgebra; Geometria e Medida e Organização e Tratamento de Dados) foi usado? ______________________________

____

ANEXO IV

Ficha de Exploração do Origami

"Todo origami começa quando pomos as mãos em movimento. Há uma grande diferença entre conhecer alguma coisa através da mente e conhecer a mesma coisa através do tato."
Anónimo

Em grupo, e utilizando as folhas de papel que te foram dadas, resolve as seguintes tarefas.

Tarefa 1: Obtenção de pontos

a) Marca um ponto na folha de papel dobrando-a.

b) Explica como o fizeste.

____

____

c) Podes fazê-lo com qualquer tipo de dobragem?

____

Tarefa 2: A reta

a) Encontra a reta que passa pelos pontos dados A e B dobrando o papel.

b) Consegues encontrar mais alguma reta?

____

c) Assinala o segmento de reta $[AB]$.

d) Indica quais as semirretas podes assinalar nesta reta com os dois pontos dados.

Tarefa 3: Traçar a perpendicular a uma reta

a) Por dobragem de papel, constrói duas retas perpendiculares que não sejam paralelas às margens do papel.

b) Explica como o conseguiste.

____

____

c) Assinala um ponto no papel, que não pertença à reta, e traça uma reta perpendicular à primeira reta que passe por esse ponto dobrando o papel.

Tarefa 4: Construção de retas paralelas

a) Assinala um ponto e uma reta que não seja paralela a nenhuma margem. A partir da reta constrói outra que seja paralela e passe pelo ponto marcado.
b) Explica como o fizeste.

____

____

Tarefa 5: Simétrico de um ponto em relação a uma reta

a) Marca um ponto e uma reta que não contenha esse ponto. Encontra o simétrico desse ponto em relação à reta traçada.
b) Explica como o fizeste.

____

____

Tarefa 6: Mediatriz de um segmento de reta

a) Marca na folha de papel dois pontos.
b) Encontra a mediatriz do segmento de reta que une esses dois pontos.
c) Encontra o ponto médio.
d) Explica como realizaste a tarefa e porque seguiste esses passos.

____

____

____

ANEXO V

Ficha de Exploração com o GeoGebra

Logotipo da Escola

Atividade I: Medianas e Baricentro

Roteiro de execução da atividade:

1. Executem o *software* GeoGebra.
2. Construam um triângulo à vossa escolha.
3. Determinem o ponto médio de dois lados do triângulo.
4. Façam passar por esses pontos médios uma reta. Que relação terá esta reta com o lado do triângulo que não foi bissetado? Utilizem, se quiserem, o GeoGebra para provar a vossa conjetura.

    ____

    ____

    ____

5. Tracem as medianas do triângulo, isto é, unam com um segmento de reta os vértices aos pontos médios dos lados opostos. O que observam?

    ____

6. Tracem a terceira mediana. Marquem o ponto de interseção das três medianas. Foi necessária a terceira mediana para determinar esse ponto?____

O ponto de interseção das medianas de um triângulo chama-se Baricentro.

7. Meçam a distância desse ponto aos vértices do triângulo e aos pontos médios. O que observam?____

    ____

    ____

8. Para cada mediana, existe uma relação entre as distâncias determinadas em 7. De que relação se trata?

    ____

9. Movam os vértices do triângulo alterando a sua forma. A relação identificada em 8 mantém-se?
10. Reparem que cada mediana divide o triângulo dado em dois triângulos. Existe uma relação entre as áreas desses triângulos? Porquê?

    ____

Atividade II: Triângulo Isósceles

Roteiro de execução da atividade:

1. Abram o ficheiro com o nome "Atividade II" do *software* GeoGebra.
2. Determinem os quatro pontos notáveis de triângulos (circuncentro, incentro, ortocentro e baricentro)no triângulo do ficheiro.
3. O que observam?

____

____

____

Atividade III: Triângulo Equilátero

Roteiro de execução da atividade:

1. Abram o ficheiro com o nome "Atividade III" do *software* GeoGebra.
2. Determinem os quatro pontos notáveis de triângulos (circuncentro, incentro, ortocentro e baricentro) no triângulo do ficheiro.
3. O que observam?

____

____

____

Atividade IV: Triângulo Retângulo Isósceles

Roteiro de execução da atividade:

1. Abram o ficheiro com o nome "Atividade IV" do *software* GeoGebra.
2. Determinem os quatro pontos notáveis de triângulos (circuncentro, incentro, ortocentro e baricentro) no triângulo do ficheiro.
3. O que observam?

____

____

____

ANEXO VI

Ficha por Partes

Logotipo da Escola

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

FICHA DE AVALIAÇÃO POR PARTES

PARTE V

Matemática

Duração da Ficha de Avaliação: 45 minutos | 17.03.2016

9.º C

Nome:____

N.º________

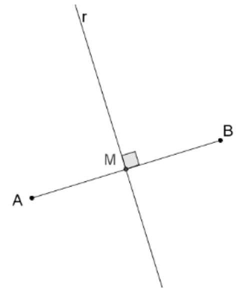
O Encarregado de Educação _____________________________________

Os professores,

Maria Manuela Costa

Paulo A. F. Correia

1. Considera a figura ao lado onde $\overline{AM} = \overline{MB}$ e $r \perp AB$.



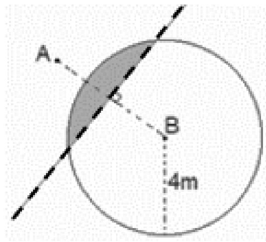
1.1. Qual é o nome da reta r relativamente ao segmento de reta $[AB]$?

1.2. Seja P um ponto da reta r. Qual das seguintes proposições é verdadeira?

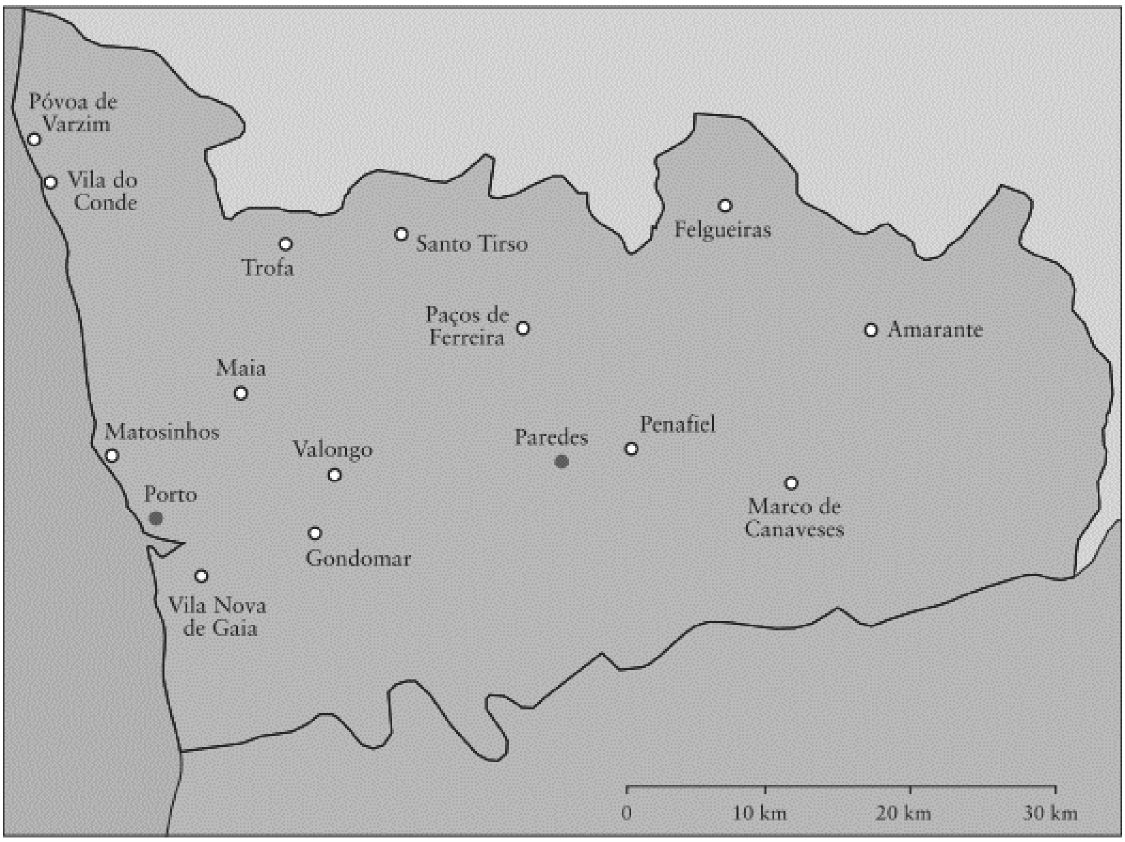
(A) $\overline{PM} = \overline{PA}$ **(B)** $\overline{PA} = \overline{PB}$ **(C)** $\overline{PM} = \overline{PB}$ **(D)** $\overline{PB} = \overline{MB}$

2. Descreve o lugar geométrico assinalado a sombreado na figura, sabendo que na figura estão representadas:

- a reta r, que é a mediatriz do segmento de reta $[AB]$;
- a circunferência de centro no ponto B e raio $4\ m$.



3. O mapa da figura seguinte representa o distrito do Porto, que o Rui vai visitar com os pais.



O Rui e os seus pais vão visitar o Porto e Paredes. Para tal pretendem ficar alojados num local que se situe a menos de vinte quilómetros de Paredes e que seja mais próximo do Porto do que de Paredes. Sombreia a caneta a porção do mapa relativa à zona onde o Rui e os seus pais deverão ficar alojados.

Utiliza material de desenho e de medição para resolveres o problema.

Nota: Se traçares linhas auxiliares, não as apagues.

4. O ortocentro de um triângulo é o ponto de interseção das

(A) mediatrizes dos lados do triângulo.

(B) medianas do triângulo.

(C) retas-suporte das três alturas do triângulo.

(D) bissetrizes dos ângulos internos do triângulo.

5. A circunferência circunscrita a um triângulo tem centro no ponto de interseção das

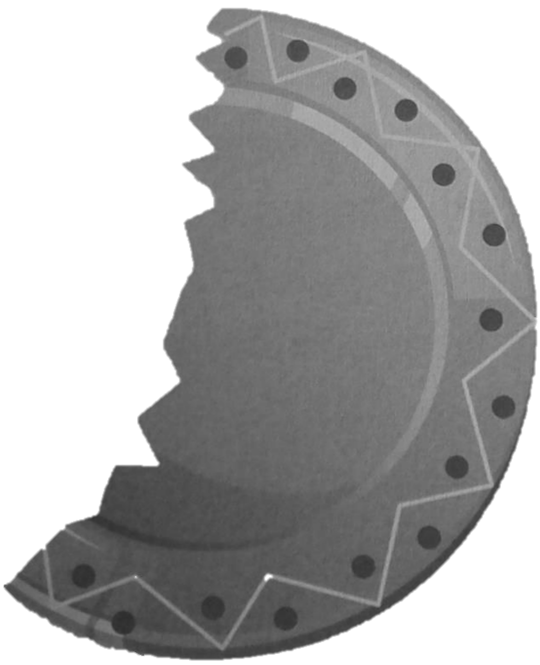
(A) mediatrizes dos lados do triângulo.

(B) medianas do triângulo.

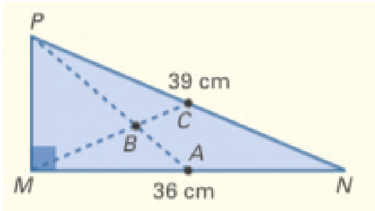
(C) retas-suporte das três alturas do triângulo.

(D) bissetrizes dos ângulos internos do triângulo.

6. O Filipe partiu um prato circular, estando uma das partes representada na figura abaixo. Com régua e compasso reconstrói a fronteira do prato inteiro.



7. Na figura, o triângulo $[MNP]$ é retângulo em M.



O ponto A é o ponto médio de $[MN]$ e o ponto C é o ponto médio de $[NP]$.

O ponto B é o ponto de interseção de PA com MC.

Sabemos ainda que $\overline{MN} = 36\ cm$ e $\overline{NP} = 39\ cm$.

7.1. Como se designa o ponto B?

7.2. Mostra que $\overline{AC} = 7{,}5\ cm$.

7.3. Determina $\overline{BC}$.

FIM

Questão	1.1.	1.2.	2.	3.	4.	5.	6.	7.1.	7.2.	7.3.	Total da Parte V
%	8%	8%	10%	12%	8%	8%	14%	8%	12%	12%	**100%**

ANEXO VII

Questionário

Estimado(a) aluno(a)

Este questionário, a que venho pedir-te que respondas, tem por objetivo conhecer a tua opinião sobre a forma como decorreram as aulas do tema Lugares Geométricos.

As tuas respostas são da maior importância para o estudo que me encontro a realizar, o qual tem por meta última a melhoria das práticas de ensino de professores de matemática. Por esta razão, é necessário que leias com muita atenção e respondas a todas as questões com sinceridade e empenho.

Finalmente, enquanto pessoa com acesso aos dados, eu comprometo-me a não os usar a não ser para o uso exclusivo deste estudo, garantindo sempre o teu anonimato.

Obrigada pela colaboração,

Manuela Costa

Parte A: Dados pessoais

1. Idade: ___________
2. Sexo: ☐ Masculino ☐ Feminino
3. Classificação que obtiveste no final do 8º ano: ___________
4. Classificação que obtiveste no final do 1.º período do 9º ano: ___________
5. Classificação que obtiveste no final do 2.º período do 9º ano:___________

Parte B: Apreciação das aulas de Lugares Geométricos

As afirmações que se seguem referem-se às aulas do tema Lugares Geométricos. De seguida, estão expressas algumas ideias e atitudes acerca do tema e dos diferentes materiais que utilizaste durante essas aulas. Para cada afirmação, assinala com um X o grau de concordância que lhe atribuis, considerando que todas as opções de resposta utilizam a seguinte escala:

Discordo totalmente	Discordo parcialmente	Não tenho opinião	Concordo parcialmente	Concordo totalmente
1	2	3	4	5

1. Gostei de estudar o tema Lugares Geométricos.	1 2 3 4 5
2. Sinto-me mais motivado para aprender matemática quando uso materiais diversificados.	1 2 3 4 5
3. No início do estudo deste tema tinha muita dificuldade em manipular a régua.	1 2 3 4 5
4. No início do estudo deste tema tinha muita dificuldade em manipular o compasso.	1 2 3 4 5
5. No início do estudo deste tema tinha muita dificuldade em manipular o transferidor.	1 2 3 4 5
6. Continuo a ter dificuldade em manipular a régua.	1 2 3 4 5
7. Continuo a ter dificuldade em manipular o compasso.	1 2 3 4 5
8. Continuo a ter dificuldade em manipular o transferidor.	1 2 3 4 5
9. As tarefas que resolvi nas aulas permitiram-me ganhar destreza na manipulação da régua, do compasso e do transferidor.	1 2 3 4 5
10. A utilização da corda foi importante para a aprendizagem dos conceitos de círculo, circunferência e coroa circular.	1 2 3 4 5
11. Gostei da aula em que foi usada a corda.	1 2 3 4 5
12. O origami foi importante para a aprendizagem dos conceitos de mediatriz, bissetriz e alturas.	1 2 3 4 5
13. Gostei das aulas em que foi utilizado o origami.	1 2 3 4 5
14. O uso do GeoGebra foi importante para a aprendizagem dos pontos notáveis de um triângulo.	1 2 3 4 5
15. Gostei das aulas em que foi usado o GeoGebra.	1 2 3 4 5
16. Gostava, no futuro, de resolver mais tarefas com recurso ao origami.	1 2 3 4 5
17. Gostava, no futuro, de resolver mais tarefas com recurso ao GeoGebra.	1 2 3 4 5
18. A metodologia de trabalho adotada (trabalho de grupo, tarefas de exploração, utilização do origami, do material de desenho e do computador com o GeoGebra,...) motivou-me para aprender.	1 2 3 4 5
19. O trabalho de grupo contribuiu para a discussão de ideias.	1 2 3 4 5
20. Trabalhar com os materiais (origami, material de desenho e GeoGebra) nas aulas de Lugares Geométricos traz vantagens.	1 2 3 4 5
21. Trabalhar com os materiais (origami, material de desenho e GeoGebra) nas aulas de Lugares Geométricos traz desvantagens.	1 2 3 4 5

De seguida são apresentadas algumas questões. Peço-te que respondas com sinceridade e empenho.

22. Enumera as vantagens que encontraste no uso dos materiais (origami, material de desenho e GeoGebra) nas aulas de Lugares Geométricos.

23. Enumera as desvantagens que encontraste no uso dos materiais (origami, material de desenho e GeoGebra) nas aulas de Lugares Geométricos.

24. Que materiais mais gostaste de usar nas aulas de Lugares Geométricos. Porquê?

25. Utiliza o espaço que se segue para escreveres qualquer comentário que consideres importante sobre as aulas de Lugares Geométricos.

Obrigada pela colaboração