ATAS DO XXVII SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Editores
Maria Helena Martinho
Rosa Antónia Tomás Ferreira
Isabel Vale
Henrique Guimarães

APM
Associação de Professores de Matemática

Porto 2016

Ficha técnica

Título
Atas do XXVII Seminário de investigação em educação matemática

Editores
Maria Helena Martinho
Rosa Antónia Tomás Ferreira
Isabel Vale
Henrique Guimarães

Capa
Catarina Barbosa

ISBN
978-972-8768-63-8

Associação de Professores de Matemática

Porto, julho 2016

Índice

Introdução

O XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática (SIEM), organizado pelo Grupo de Trabalho de Investigação (GTI) da Associação de Professores de Matemática, decorreu nos dias 1 e 2 de abril de 2016, na Escola Artística Soares dos Reis, no Porto. O SIEM tem como principal missão promover um espaço de divulgação, partilha e discussão de ideias e de trabalhos, desenvolvidos ou em curso, do âmbito da investigação em Educação Matemática. Tal como tem sido hábito nos últimos anos, e uma vez que o SIEM pretende também continuar a fortalecer uma ligação forte entre a investigação e o ensino da Matemática, o programa deste seminário contemplou partes comuns com o programa do ProfMat 2016 (Encontro Nacional de Professores de Matemática), além de sessões dinamizadas por professores e investigadores.

O programa do SIEM incluiu a apresentação e discussão de comunicações submetidas pelos participantes (orais e em poster), organizadas por simpósio temáticos. Estas comunicações passaram por um processo de revisão científica por pares, processo este que se tem vindo a implementar com vista à melhoria da qualidade dos trabalhos apresentados. O SIEM incluiu também sessões plenárias convidadas, conferências e pain, para além de um espaço dedicado ao trabalho desenvolvido no seio do GTI.

A primeira conferência plenária proferida por João Pedro da Ponte, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, intitulou-se "O que nos diz a investigação em Didática da Matemática?". Na sua intervenção, João Pedro da Ponte abordou alguns contributos da Didática da Matemática, como campo recente de investigação para projetos e investigações nacionais, focando, em particular, as práticas profissionais dos professores de Matemática e os seus processos de formação e desenvolvimento profissional. Mequè Edo, da Faculdade de Ciências da Educação da Universidade Autónoma de Barcelona, proferiu a segunda conferência plenária: "A Educação Matemática de hoje pensando em amanhã". Nesta conferência, a investigadora, tomando como ponto de partida as competências exigidas aos cidadãos do século XXI, discutiu formas de promover a autonomia e o envolvimento dos alunos nas suas aprendizagens matemáticas, sobretudo ao nível dos primeiros anos. A terceira conferência plenária, sob o título "Criatividade e Ensino Superior: Do olhar atual dos alunos até desafios futuros", foi proferida por Maria de Fátima Morais, do Instituto de Educação da Universidade do Minho, focando-se na temática da criatividade no ensino superior. Na sua intervenção, a investigadora debruçou-se sobre as perceções dos alunos do ensino superior sobre o conceito e o valor da criatividade, bem como sobre a presença da criatividade nas práticas docentes que vivenciam nos seus cursos, realçando a necessidade de maior atenção a esta temática na investigação em Educação Matemática.

Este ano, o espaço GTI foi dedicado à partilha de alguns trabalhos inseridos no seu 5^o ciclo de estudos, sob a temática da planificação e condução de discussões coletivas como elementos relevantes da prática dos professores de Matemática. Com a moderação de Hélia Pinto, coordenadora do GTI, intervieram neste espaço Nádia Ferreira, Renata Carvalho e Raquel Santos.

O painel plenário, moderado por Ana Paula Canavarro (Departamento de Pedagogia e Educação da Universidade de Évora), foi subordinado ao tema "Do currículo prescrito ao currículo aprendido: Papel e importância do professor". Participaram neste momento do programa do SIEM Adelina Precatado (Escola Secundária de Camões, Lisboa), Domingos Fernandes (Instituto de Educação da Universidade de Lisboa), Joana Brocardo (Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal) e Maria do Céu Roldão (Faculdade de Educação e Psicologia da Universidade Católica Portuguesa, Porto). Foram aceites vinte e oito comunicações orais, organizadas em oito simpósios por afinidades temáticas: 1) História do ensino e epistemologia; 2) Desafios na sala de aula; 3) Ensino e aprendizagem da álgebra; 4) Comunicação no ensino e aprendizagem; 5) Questões de aprendizagem; 6) Contextos não formais de aprendizagem; 7) Ensino e aprendizagem dos números; e 8) Conhecimento e praticas do professor. O SIEM contou ainda com onze pósteres que foram exibidos durante a realização de todo o evento, tendo também um espaço temporal consagrado à interação entre os respetivos autores e os participantes no encontro. O XXVII SIEM contou com a participação de cerca de uma centena de pessoas com uma assinalável presença de investigadores estrangeiros, principalmente brasileiros.

Porto, julho de 2016

A Comssão Organizadora

Maria Helena Martinho
Rosa Antónia Tomás Ferreira
Isabel Vale
Henrique Guimarães

Conferências Plenárias

O que nos diz a Investigação em Didática da Matemática?

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, *jpponte@ie.ulisboa.pt*

Resumo. *A investigação em Didática da Matemática é um campo científico relativamente recente, que se apoia em teorias e metodologias de outros campos das ciências sociais e humanas, mas com os seus problemas próprios, que resultam do seu objeto de estudo – o ensino-aprendizagem da Matemática e a formação dos respetivos professores. As suas questões assumem em cada país especificidades próprias, mas muitos conceitos e modelos desenvolvidos internacionalmente têm grande relevância para Portugal. Esta conferência revisita contributos fundamentais da investigação neste campo, cruzando ideias de autores internacionais com projetos e realizações portuguesas. Abordo também o modo como estes contributos influenciam no nosso país as práticas profissionais dos professores e os seus processos de formação e desenvolvimento profissional. Finalmente, procuro discutir o modo como pode evoluir a relação entre a investigação e o ensino, para que os professores se sintam mais capacitados na sua atividade profissional e, em conjunto com os investigadores (muitos dos quais são também professores ou formadores de professores) tenham mais condições para gerar conhecimento relevante e robusto para a melhoria do ensino da Matemática para todos os alunos.*

Palavras-chave: *didática da matemática; currículo; tarefas; abordagem exploratória; desenvolvimento profissional.*

Abstract. *Research in Didactics of Mathematics is a relatively new scientific field, based on theories and methodologies of other fields of social and human sciences, but with its own problems, as a result of its object of study – the teaching and learning of mathematics and the education of their teachers. In each country its questions take on a specific nature, but many concepts and models developed internationally have great relevance for Portugal. This conference revisits fundamental contributions of research for this field, crossing ideas of international authors with projects and achievements from Portugal. I also discuss how these contributions influenced the professional practices of teachers in our country and their education and professional development processes. Finally, I seek to discuss how the relationship between research and teaching may evolve, so that teachers feel more empowered in their professional activity and, together with researchers (many of whom are also teachers or teacher educators) have more conditions to generate relevant and robust knowledge for the improvement of the teaching of mathematics for all students.*

Keywords: *didactics of mathematics; curriculum; tasks; inquiry-based approach; professional development.*

Introdução

Esta conferência pretende dar a conhecer os contributos da investigação em Didática da Matemática[1]. Apresento, e não poderia ser de outro modo, um ponto de vista pessoal e subjetivo. Procuro dar uma panorâmica geral do que se faz em Didática da Matemática, com referência a trabalhos realizados noutros países e em Portugal, centrando-me em aspetos que considero particularmente relevantes. Procuro mostrar que muito já foi feito, mas muito mais está ainda por fazer – e para isso será necessário o concurso de novas gerações de investigadores, para quem eu espero que esta conferência possa constituir um fator de estímulo. Começo com uma apresentação geral da Didática da Matemática como campo de investigação, após o que abordo as questões curriculares, as questões relativas à aprendizagem dos alunos e ao conhecimento, práticas e desenvolvimento profissional do professor. Por fim, proponho-me abordar o modo como pode evoluir a relação entre a investigação e o ensino de modo que os resultados alcançados possam ser mobilizados da forma mais produtiva possível, ao serviço da melhoria da aprendizagens e da formação dos professores.

O que é a investigação em Didática da Matemática?

Embora desde há muito existam trabalhos e reflexões sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, como campo de investigação, a Didática da Matemática apenas emergiu no final do século XX. Como acontece com todo o campo de investigação, os seus congressos e publicações científicas constituem elementos identitários centrais. O Quadro 1 dá-nos um panorama das áreas de investigação presentemente mais ativas a nível europeu, tal como se evidenciam nos grupos de trabalho do CERME (*European Congress of Research in Mathematics Education*). Estão assinaladas as áreas (10 de um total de 20) onde considero existir uma atividade mais intensa em Portugal, em grupos de investigação ativos em várias Universidade e Escolas Superiores de Educação. Verificamos que a maior parte dos estudos se centram na aprendizagem de temas/tópicos curriculares específicos e também na diversidade dos alunos e dos fatores (sociais e afetivos) que influenciam esta aprendizagem. Uma atenção também muito significativa é dada ao conhecimento e identidade profissional dos professores, suas práticas e processos de desenvolvimento profissional.

Quadro 1. Grandes temáticas e áreas específicas de investigação em Didática da Matemática.

Grandes temáticas	Grupos de trabalho (TSG) do CERME (2015)
Aprendizagem de temas curriculares e capacidades transversais	1. Arithmetic and number systems 2. Algebraic thinking 3. Geometrical thinking 4. Probability and statistics education 5. Argumentation and proof 6. Applications and modelling
Diversidade dos alunos e fatores que influenciam a aprendizagem	7. Mathematical potential, creativity and talent 8. Affect and mathematical thinking 9. Mathematics and language 10. Diversity and mathematics education: Social, cultural and political challenges 11. Early years mathematics 12. University mathematics education
Questões curriculares, incluindo o uso de tecnologias	13. History in Mathematics Education 14. Teaching mathematics with resources and technology 15. Student's learning mathematics with resources and technology
Formação de professores, identidade e prática docente	16. Mathematics teacher education and professional development 17. Mathematics teacher and classroom practices 18. Mathematics teacher knowledge, beliefs and identity
Questões epistemológicas e teóricas	19. Comparative studies in mathematics education 20. Theoretical perspectives and approaches in mathematics education research

Questões curriculares

Os programas (ou currículos)[2] de Matemática têm estado em permanente evolução (Almeida & Matos, 2014). Em grande medida, a Didática da Matemática como campo científico nasce de um importante movimento curricular, o movimento da Matemática Moderna dos anos de 1960-1970, cuja base era um conjunto de ideias interessantes (valorizar os aspetos estruturais da Matemática, bem como o seu caráter unificado), mas também algumas ideias muitíssimo problemáticas (a ênfase na abstração e no simbolismo). Ultrapassado o entusiasmo inicial, os professores universitários e de outros níveis de ensino envolvidos neste movimento começaram a perceber que era precisa uma abordagem metodológica diferente, onde, além da "intuição pedagógica" e das "boas ideias", existisse igualmente um processo de trabalho científico – a formulação de questões suscetíveis de estudo empírico, a formulação de planos de investigação rigorosos e sistemáticos, uma análise de dados aprofundada e cuidadosa e a divulgação dos trabalhos realizados em revistas científicas sujeitas a um sistema de revisão por pares. Assim nasceram aquelas que são hoje as revistas mais prestigiadas deste campo, o *Educational Studies in Mathematics*, fundada por Hans Freudenthal em

1968, e o *Journal for Research in Mathematics Education*, fundado em 1970 pelo NCTM, sendo seu primeiro editor David Johnson.

Ao falarmos de currículos e programas temos necessariamente de distinguir entre diversos níveis: o currículo oficial (o programa), o currículo disponibilizado nos manuais e outros materiais, o currículo interpretado pelos professores, o currículo implementado na sala de aula, o currículo aprendido pelos alunos e o currículo avaliado. Existe sempre alguma relação entre estes níveis, mas muitas vezes verificam-se fenómenos de grande divergência que é interessante estudar. Têm existido muitos trabalhos de investigação sobre questões curriculares relativas à disciplina de Matemática (passados em revista, por exemplo, em Stein, Remillard & Smith, 2007). Existe hoje um consenso geral que não há um currículo definitivamente melhor do que todos os outros – um currículo é sempre um documento de compromisso, em que se procura melhorar em relação aos documentos existentes, tendo em vista especificar de forma mais precisa as aprendizagens visadas para os alunos e as orientações importantes para os professores (e outros atores educativos). O currículo adequado para cada país é necessariamente local, evolui no tempo e varia com a sua história e as suas tradições. Nos países que trabalham melhor em termos curriculares, os currículos são revistos periodicamente, na base de processos de avaliação. Muitas vezes, os currículos são modificados "por partes" (por exemplo, o tema de Estatística no 1.º ciclo ou o tema de Geometria no 3.º ciclo).

Os documentos curriculares que conhecemos melhor são o NCTM (2000), a que se seguiu o NCTM (2006) e o NCTM (2009). Mas também existem documentos de natureza curricular muito interessantes na Austrália e em muitos outros países. Mais do que gerar um "currículo ótimo", que não existe, o que se tem aprendido diz respeito sobretudo ao modo de elaborar e aperfeiçoar "currículos razoáveis", e isso envolve não só um trabalho de desenvolvimento de novos programas e de novos materiais curriculares mas também a sua avaliação e experimentação.

Em Portugal temos dois momentos marcantes em termos de desenvolvimento curricular. Um deles é o projeto MAT_{789}, dirigido por Paulo Abrantes (1994), onde se enfatizava o trabalho de grupo, o trabalho de projeto e a relação da Matemática com a realidade. O outro momento é a elaboração e disseminação do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ministério da Educação, 2007) onde foi possível incluir muitas ideias e resultados de investigação em campos importantes como a aprendizagem dos Números e operações (tendo por base a perspetiva de sentido de número de McIntosh, Reys & Reys, 1992), da Álgebra (com base na noção de raciocínio algébrico de Carpenter, Franke & Levi, 2003; Kaput, 2008), da Geometria (com base nas noções de sentido espacial e visualização de Clements, 2003; Battista, 2007), da Estatística (com base nas noções de literacia e organização e tratamento de dados de Franklin et al., 2005), bem como relativamente ao desenvolvimento de capacidades transversais (NCTM, 2000) com relevo para a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemáticos.

Tarefas

Dentro da grande variedade de questões estudadas pela Didática da Matemática sobre a aprendizagem dos alunos destacarei em primeiro lugar o papel das tarefas, dada a importância que têm merecido não só no plano internacional mas também entre nós, nomeadamente no trabalho realizado por dois projetos de grande alcance, o *Projeto Sentido de Número* (ver Brocardo, Serrazina & Rocha, 2008) e o *Projeto P3M Práticas Profissionais do Professor de Matemática* (ver Ponte, 2014).

A grande importância que as tarefas assumem na aprendizagem tem a ver com a atividade que estas tarefas podem originar. Na verdade, o que os alunos aprendem na aula de Matemática resulta principalmente da atividade que realizam e da reflexão que efetuam sobre essa atividade (Christiansen & Walther, 1986). Por isso, é fundamental escolher tarefas apropriadas, que possam servir de base a uma atividade matemática rica e multifacetada por parte dos alunos, bem como encontrar oportunidades para reflexão sobre o trabalho realizado. A introdução da noção de "tarefa" no vocabulário profissional dos professores de Matemática representa um contributo fundamental da investigação em Didática da Matemática. Ainda não há muitos anos falava-se em "exercícios" e ocasionalmente em "problemas". As tarefas incluem os exercícios e os problemas mas compreendem igualmente outras situações que podem servir de ponto de partida para a aprendizagem. A noção de tarefa esteve no centro do encontro *ICMI Study 22*, dedicado a este tema, realizado em 2013 em Oxford[3].

Existem dois centros de investigação internacionais onde o trabalho em torno das tarefas assume grande expressão. Um deles é o Instituto Freudenthal, da Universidade de Utreque, Holanda, e o outro o Centre for Research in Mathematics Education[4], da Universidade de Nottingham, no Reino Unido. Neste centro devemos destacar o trabalho de Swan (2014) que distingue tarefas com diferentes finalidades, nomeadamente (i) Desenvolver conhecimentos factuais e fluência de cálculo; (ii)

Desenvolver compreensão conceptual; (iii) Desenvolver competência estratégica; e (iv) Desenvolver competência crítica[5]. Pelo seu lado, a "Educação Matemática Realista", corrente desenvolvida no Instituto Freudenthal, propõe a ideia de "modelação emergente" (Gravemeijer, 2005). Nesta perspetiva, a atividade do aluno passa por níveis crescentes de sofisticação, de um raciocínio situacional, para um raciocínio referencial, geral e, finalmente, formal. Esta perspetiva sugere que as tarefas devem ser desenhadas de modo a promover a passagem dos alunos do nível onde se situam para o nível seguinte. A ideia que tarefas cuidadosamente concebidas, acessíveis aos alunos mas ao mesmo tempo suscetíveis de promover a sua aprendizagem de novos conceitos e procedimentos, tem servido de base a diversas investigações realizadas em Portugal, nomeadamente pelo *Projeto Sentido de Número*, já referido e com materiais publicados pela APM.

Muitos autores têm procurado estabelecer classificações que permitam perceber as caraterísticas de diversos tipos de tarefa. Assim Pólya (1945) distinguia entre "problema" e "exercício", Stein e Smith (1991) distinguem entre tarefas de elevado e reduzido nível de exigência cognitiva. Ponte (2005) argumenta que as tarefas devem assumir uma natureza diversificada, incluindo exercícios, problemas, investigações e explorações. Os exercícios, de nível de desafio reduzido, visam sobretudo a consolidação de conhecimentos enquanto os problemas, de nível de desafio elevado, visam a aplicação criativa dos conhecimentos que o aluno já possui. Pelo seu lado, as explorações visam sobretudo a construção de novos conceitos e as investigações visam tanto o desenvolvimento de novos conceitos como o uso criativo de conceitos já conhecidos. Cabe ao professor selecionar as tarefas de acordo com os objetivos definidos para cada aula, tendo em atenção a sua adequação aos alunos a que se destinam.

O raciocínio, entendido como o processo de fazer inferências, ou seja, o processo de partir de informação dada para chegar a novas conclusões, é um aspeto fundamental da aprendizagem da Matemática. Diversos modelos têm vindo a ser propostos tendo em vista perceber em termos mais precisos como se pode apoiar o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Um deles é o modelo onde se relaciona o raciocínio com a representação e a significação e onde se destacam dois elementos fundamentais do raciocínio: generalizar (essencial no raciocínio indutivo e abdutivo) e justificar (essencial no raciocínio dedutivo) (Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012, ver a figura 1).

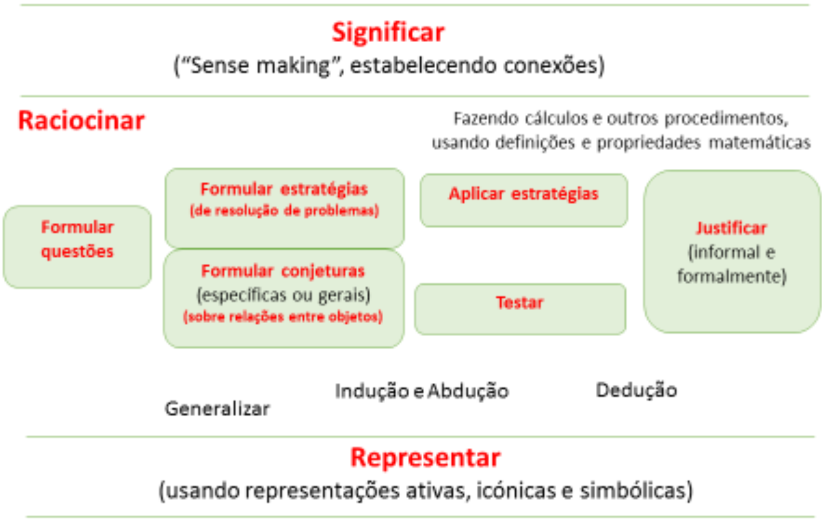


Figura 1. Modelo do raciocínio matemático (adaptado de Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012).

Assim, por exemplo, a tarefa da figura 2 constitui um problema cuja resolução requer a formulação de uma estratégia. Na verdade, como na maioria dos problemas, várias estratégias são possíveis. A mais natural, para a maioria dos alunos, é, num primeiro passo, usar a informação dada para reconstruir a unidade e depois, num segundo passo, determinar as frações sucessivamente pedidas dessa unidade. Os alunos raramente se defrontam com tarefas deste tipo – usualmente a unidade é logo dada à partida. Daí o caráter pouco habitual desta tarefa e o facto de ser necessário raciocínio para a resolver. Os alunos têm que saber que informação é dada, que informação é pedida e que objetivo intermédio permite chegar à solução. A resolução desta tarefa depende da compreensão essencial do papel da unidade de referência quando trabalhamos com números racionais. É de notar que, para além de apelar ao raciocínio, esta tarefa permite reforçar a compreensão da importância decisiva de ter sempre presente a unidade de referência. Quando, num estudo de aula, a apresentámos a um grupo de professoras do 5.º ano, elas consideraram de imediato que esta tarefa estava fora do alcance dos seus alunos. A realização da tarefa nas suas aulas mostrou que foram bastantes os alunos que a conseguiram resolver e que foram muito produtivos os momentos de discussão coletiva que se seguiram à sua realização.

A figura seguinte representa $3/4$ de uma tira de papel.

Representa agora, $1/2$,; $2/3$, $4/3$ e $3/2$ dessa tira. Explica o teu raciocínio.

Figura 2. Tarefa que requer a reconstrução da unidade (adaptado de Ponte, Quaresma, Mata-Pereira & Baptista, 2015).

Abordagem exploratória

Outro aspeto de grande importância, agora relativamente à prática de ensino, diz respeito à abordagem exploratória. O projeto P3M, já referido, permitiu identificar as potencialidades desta abordagem para o ensino-aprendizagem da Matemática. Trata-se de uma perspetiva o que encontrarmos em muitos países, com diferentes cambiantes e designações. Em inglês, por exemplo, fala-se muito em "*inquiry-based mathematics teaching*" (Artigue & Blomhøj, 2013) ou "*discovery learning*". A "*Realistic Mathematics Education*" dos holandeses do Instituto Freudenthal insere-se também nesta perspetiva, tal como, de resto o NCTM (2000). Rigorosamente falando, podemos encontrar sempre diferenças de significado de termo para termo e de autor para autor, mas, na prática todos eles designam uma abordagem onde os alunos trabalham em tarefas onde têm de construir as suas próprias estratégias de resolução, usando com flexibilidade diversas representações matemáticas. Enquanto na sala de aula habitual o professor ensina primeiro procedimentos e algoritmos, mostrando exemplos, e propõe depois exercícios para praticar, na abordagem exploratória o professor propõe aos alunos um trabalho que os leva a reconstruir conceitos, representações e procedimentos matemáticos. Para isso, promove frequentes momentos de negociação de significados, argumentação e discussão coletiva. Deste modo, procura levar os alunos a desenvolver o seu raciocínio e também a sua compreensão da Matemática bem como a capacidade de a usar nas mais diversas situações. Na abordagem exploratória valoriza-se a construção de conceitos, o uso de representações, a modelação de situações, e também o uso de definições e propriedades dos objetos matemáticos para chegar a conclusões. No trabalho na sala de aula, isto significa que continua a dar-se atenção aos aspetos computacionais mas dá-se igualmente uma grande atenção aos aspetos conceptuais.

A abordagem exploratória é marcada pela natureza das tarefas propostas, que devem ser escolhidas de modo a promover novas aprendizagens. Mas esta abordagem é igualmente marcada pelas formas de trabalhar e pelo tipo de comunicação que tem lugar na sala de aula. Assim, na realização destas tarefas podem usar-se diferentes modos de trabalho. Uma possibilidade é o modo coletivo, em que o professor interage com todos os alunos. Outra é o trabalho em grupo e a pares, tendo em vista proporcionar aos alunos um ambiente estimulante de diálogo e partilha. Deste modo, os alunos podem participar em dois níveis do discurso da aula – o coletivo e o privado, que desenvolvem com os seus colegas (Ponte & Santos, 1998). Pode também usar-se o trabalho individual, procurando desenvolver a capacidade de concentração e de reflexão do aluno.

As aulas de cunho exploratório estruturam-se usualmente segundo três fases (Ponte, 2005): (i) apresentação da tarefa e o modo como os alunos a interpretam (em coletivo); (ii) desenvolvimento do trabalho pelos alunos (em grupos, pares ou individual); e (iii) discussão e síntese final (de novo em coletivo). Esta última fase é muito importante pois é a ocasião mais propícia para que sejam expostas conexões e desenvolvidos significados (Bishop & Goffree, 1986), permitindo aos alunos relacionar vários temas, mostrando como as ideias matemáticas são interligadas. Além disso, os momentos de discussão coletiva constituem oportunidades para negociação de significados matemáticos e para construção de novo conhecimento. A aprendizagem com compreensão poderá ainda ser aperfeiçoada através das interações na turma, à medida que os alunos sugerem ideias e conjeturas matemáticas, aprendem a avaliar o seu próprio raciocínio e o dos colegas, e desenvolvem capacidades de raciocínio matemático. Como tal, cada tarefa culmina em regra num momento de discussão coletiva, como forma de refletir, discutir ideias, processos e conclusões (NCTM, 2000).

A comunicação em sala de aula marca de modo decisivo as oportunidades de aprendizagem dos alunos. Esta comunicação é unívoca, quando é dominada pelo professor, ou dialógica, quando a contribuição dos alunos é valorizada (Ponte, 2005). É ao professor que cabe definir os padrões de comunicação, propor as tarefas a realizar e estabelecer os modos de trabalho na sala de aula, mas tem de o fazer em permanente negociação, por vezes bem difícil, com os alunos. É de notar que o professor pode assumir em exclusivo o papel de autoridade matemática ou partilhá-lo com os alunos, procurando estimular a sua capacidade de raciocínio e argumentação. Um aspeto muito importante do trabalho do professor é o modo como procura ajudar de forma discreta os alunos a apropriar-se da linguagem matemática correta, usando sobretudo processos de "redizer", isto é, reformulando as afirmações dos alunos numa linguagem progressivamente mais correta. Os fenómenos da comunicação marcam de modo fundamental o trabalho que se realiza em sala se aula, sendo hoje já muito significativo o conhecimento produzido sobre padrões e estilos de comunicação e sobre formas de questionamento, como mostra de resto a excelente revisão de literatura de Menezes, Tomás-Ferreira, Martinho e Guerreiro (2014).

Um dos momentos mais importantes do trabalho da sala de aula são as discussões coletivas. Nestas discussões, os alunos apresentam as suas resoluções das tarefas e intervêm sobre as estratégias uns dos outros. Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), como seu "modelo das cinco práticas" (antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões) mostram como o professor pode preparar estas discussões de modo a torná-las produtivas. Wood (1999) mostra como um elemento importante destas discussões é a capacidade de explorar desacordos entre os alunos e Sherin (2002) indica a necessidade de estabelecer um equilíbrio entre a participação dos alunos e a exploração de ideias matemáticas importantes. No nosso país, bastante atenção tem sido dada ultimamente a esta faceta do trabalho do professor, com relevo para o modelo das ações do professor (Ponte, Mata-Pereira & Quaresma 2013) que evidencia as potencialidades de colocar desafios aos alunos, bem como a necessidade, muitas vezes, conduzir os momentos de discussão numa lógica de guiar, ou mesmo de informar os alunos.

O recente livro do NCTM (2014), que em breve será publicado pela APM numa versão portuguesa, retoma estes aspetos do trabalho do professor, afirmando igualmente a sua importância decisiva (Quadro 2).

Quadro 2. Aspetos da prática docente valorizados pelo NCTM (2014).

1. Estabelecer objetivos matemáticos para focar a aprendizagem
2. Conduzir a realização de tarefas que promovam raciocínio r resolução de problemas
3. Usar e estabelecer conexões entre representações matemáticas
4. Promover um discurso matemático com significado
5. Colocar questões pertinentes
6. Desenvolver fluência na realização de procedimentos com base na compreensão conceptual
7. Apoiar o esforço produtivo dos alunos na aprendizagem da Matemática
8. Suscitar e usar evidência do pensamento dos alunos.

A grande maioria destes aspetos têm estado presentes na investigação realizada em Portugal, mas o NCTM discute de modo muito bem conseguido a relação entre eles, além de chamar a atenção para questões a que muitas vezes não damos a necessária atenção como sejam o estabelecer objetivos matemáticos para focar a aprendizagem ou o apoiar o esforço produtivo (*productive struggle*) dos alunos na aprendizagem da Matemática.

Formação e desenvolvimento profissional do professor

Muito tem sido estudado sobre a formação e o desenvolvimento profissional do professor. É hoje consensual que a mudança social, a evolução da escola e as mudanças curriculares e tecnológicas requerem da parte do professor uma disponibilidade permanente para formação e desenvolvimento profissional. Esta formação envolve diversos domínios entre os quais a Didática da sua disciplina. Como refiro num trabalho recente (Ponte, 2014), a formação tem condições ótimas para se realizar quando existe sintonia entre os atores chave que intervêm no ensino da Matemática: (i) os professores, (ii) os investigadores e formadores de professores, e (iii) os decisores políticos. Conseguir essa sintonia não é fácil, mas já aconteceu no passado, nomeadamente com o programa nacional de formação contínua de professores (Serrazina, 2013).

Uma forma de desenvolvimento profissional que temos vindo a usar com assinalável sucesso são os "estudos de aula"[6] (Ponte, Quaresma, Mata-Pereira & Baptista, 2015). Trata-se de um processo de trabalho que decorre dentro do ambiente escolar e onde os professores desempenham um papel central. De alguma maneira, um estudo de aula reproduz a lógica de um processo de investigação realizado no contexto da prática profissional dos professores. Assim, começa por identificar um problema relevante relativo à aprendizagem dos alunos. De seguida, os participantes planeiam uma aula, tendo em atenção as orientações curriculares e os resultados de investigação sobre esse problema. Preveem possíveis dificuldades dos alunos, antecipam questões que podem surgir na aula, definem uma estratégia de ensino, concebem tarefas para a aula e preparam instrumentos para a observação. A aula é então lecionada por um dos professores e os restantes observam e tiram notas dando especial atenção à aprendizagem dos alunos. Na verdade, no estudo de aula, o que está no foco das atenções é a aprendizagem dos alunos, não o desempenho do professor. Na sequência, os professores analisam e refletem sobre o que observaram na aula. Esta análise pode levar à reformulação total ou parcial do plano de aula. Muitas vezes, a aula reformulada é lecionada novamente por outro professor a outra turma, em ciclos sucessivos (Lewis, Perry & Hurd, 2009; Murata, 2011).

Ao participar em estudos de aula, os professores podem aprender questões importantes em relação aos conteúdos que ensinam, às orientações curriculares, aos processos de raciocínio e dificuldades dos alunos e à dinâmica da sala de aula. Os estudos de aula são desenvolvidos em ambientes colaborativos, permitindo aos professores partilhar ideias uns com os outros e apoiar-se mutuamente. Desta forma, os estudos de aula constituem um contexto não só para refletir, mas também para promover o sentimento de confiança, fundamental no desenvolvimento profissional. Na verdade, na nossa experiência, concluímos que o estudo de aula, conjugando momentos de trabalho estruturado e de trabalho exploratório dos professores e conjugando o conhecimento proveniente da investigação com o conhecimento experiencial dos professores, representa um contexto promissor para o seu desenvolvimento profissional sobre questões relacionadas com tarefas e processos de raciocínio no ensino-aprendizagem da Matemática (Ponte, Quaresma, Mata-Pereira & Baptista, 2015).

A concluir

Muito mais se poderia falar ainda do alcance da Didática da Matemática, nomeadamente no campo das metodologias de investigação, sendo de destacar o uso crescente de metodologias muito sofisticadas como é a investigação baseada em design (IBD). Terá de ficar para outra oportunidade. Na verdade, a Didática da Matemática constitui um campo de trabalho multifacetado, onde devemos incluir não só o trabalho científico, feito prioritariamente nas universidades e centros de investigação, mas também o trabalho de natureza profissional, empreendido por todos aqueles que ensinam Matemática num dado nível de ensino (pré-escolar, básico, secundário, superior). A Didática da Matemática tem ainda uma vertente formativa, tanto no que respeita à formação inicial como à formação contínua. Constitui portanto um campo científico, mas também um campo profissional e um campo de formação, sendo necessário destacar as dimensões comunicativas, associativas e colaborativas em que diversos atores interagem uns com os outros por via do seu trabalho conjunto, dos seus encontros e discussões (como as que ocorrem no ProfMat e no SIEM), e das suas leituras e reflexões (como as que emergem da leitura das revistas *Quadrante* e *Educação e Matemática*).

Referi atrás a importância da sintonia entre os diversos atores, professores, investigadores e formadores de professores e decisores políticos. Um primeiro passo pode ser dado através do reforço do trabalho conjunto de professores, investigadores e formadores, promovendo projetos de investigação, empreendendo projetos de desenvolvimento curricular e de intervenção visando a melhoria das aprendizagens e realizando atividades de formação exemplares, como os estudos de aula.

São grandes os desafios que se colocam hoje em dia à Didática da Matemática: (i) encontrar formas de corresponder às necessidades de aprendizagem de públicos escolares muito diversos, no quadro de condições sociais adversas, que apresentam uma imagem distorcida desta disciplina tendo em vista reforçar o seu papel seletivo; (ii) compreender os processos de desenvolvimento profissional do professor e construir dispositivos de formação capazes de proporcionar aprendizagens profissionais com efeitos reais nas práticas educativas; e (iii) reforçar a sua identidade como campo científico com um objeto próprio estudado através de metodologias rigorosas e capaz de encontrar formas apropriadas de disponibilizar os conhecimentos produzidos a todo o tecido educativo e social. O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ministério da Educação, 2007) e o *Programa de Formação Contínua em Matemática* (Serrazina, 2013) são bons exemplos do potencial da investigação para influenciar a prática docente e a aprendizagem dos alunos. Espero que muitos mais momentos de forte sintonia entre os diversos atores venham a surgir e, principalmente, que mais do que momentos isolados, passem a ser a regra no funcionamento do nosso sistema educativo.

Notas

[1] Uso este termo por ser o que melhor corresponde à tradição portuguesa (e europeia), que designa por “Didática Específica” o estudo dos problemas do ensino e da aprendizagem de um determinado campo do conhecimento. No Brasil usa-se preferencialmente o termo “Educação Matemática”, diretamente inspirado no inglês “*Mathematics Education*”.
[2] Em Portugal o documento de referência curricular tende a designar-se “programa” (a exceção é o *Currículo nacional* de 2001). Nos países de língua inglesa, documentos idênticos, quando detalhados, designam-se por “*curriculum*” e, quando sintéticos, por “*syllabus*”.
[3] Atas disponíveis na internet: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054.
[4] Inicialmente conhecido como “Shell Centre for Mathematical Education”.
[5] Este autor realizou uma conferência plenária no EIEM de 2014 em Sesimbra, podendo conhecer-se o seu trabalho através das atas do encontro em http://www.spiem.pt/publicacoes/arquivo/.
[6] Em inglês, “*lesson studies*”.

Referências

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do projecto MAT$_{789}$* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Almeida, A. J., & Matos, J. M. (2014). A Matemática nos programas do ensino não-superior (1835-1974). Lisboa: APM.

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education, 45*, 797–810.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 843-909). Greenwich, CT: Information Age.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Shifter (Eds.), *A research companion to Principles and standards for school mathematics* (pp. 151-178). Reston, VA: NCTM.

Brocardo, J., & Serrazina, L., & Rocha (Eds.), (2008). *Desenvolvendo o sentido do número: Perspectivas e exigências curriculares*. Lisboa: Escolar Editora.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, CT: Heinemann.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report*. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge.

Lewis, C. C., Perry, R. R., & Hurd, J. (2009). Improving mathematics instruction through lesson study: A theoretical model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(4), 263-283.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8 e 44.

Menezes, L., Tomás-Ferreira, R., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 139-168). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. (disponível on-line)

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education: Learning together* (pp. 1-12). New York, NY: Springer.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2006). *Curriculum focal points for prekindergarden to grade 8 mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: NCTM.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (Ed.) (2014). *Práticas profissionais dos professores de Matemática*. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. (disponível on-line)

Ponte, J. P. (2014). Formação do professor de Matemática: Perspetivas atuais. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 351-368). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. (disponível on-line)

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa, 7*(2), 355-377.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, 22*(2), 55-81.

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2015). Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. *Quadrante, 24*(2), 11-134.

Ponte, J. P., & Santos, L. (1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante, 7*(1), 3-33.

Serrazina, L. (2013). O programa de formação contínua em Matemática para professores do 1.º ciclo e a melhoria do ensino da Matemática *Da Investigação às Práticas, 3*(2), 75-97.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in the mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 205-233.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313-340.

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Greenwich, CT: Information Age.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Swan, M. (2014). Designing tasks and lessons that develop conceptual understanding, strategic competence and critical awareness. In J. Brocardo, A. M. Boavida, C. Delgado, E. Santos, F. Mendes, J. Duarte, M. Baía & M. Figueiredo (Eds.), *Tarefas matemáticas: Livro de Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 9-28). Lisboa: SPIEM.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 171-191.

El juego como actividad conductora de los primeros aprendizajes matemáticos

Mequè Edo Basté
Universitat Autònoma de Barcelona, *Meque.Edo@uab.cat*

Resumen. *En el desarrollo infantil, siempre y cuando las necesidades básicas estén bien atendidas, aparecen de forma natural tres grandes categorías de juego que tienen relación e influyen en el desarrollo del pensamiento matemático, estas son: Juego exploratorio, Juego simbólico, Juego de reglas. En este capítulo se describen estos juegos a la vez que se analiza la conexión de cada uno con posibles aprendizajes matemáticos en las primeras edades.*

Palabras-clave: *juego exploratorio; juego simbólico; juego de reglas; educación matemática; educación infantil.*

Abstract. *In child development, whenever basic needs are met, three large categories of games emerge in a natural way. Such categories – exploratory games, symbolic games, and games of rules – are related to the development of mathematical thinking and influence that development. In this paper, I describe these games while I analyse the connections of each one of them with potential mathematical learning in the early years.*

Keywords: *exploratory games; symbolic games; games of rules; mathematics education; early childhood education.*

El juego y la matemática

Entiendo el juego como una actividad voluntaria caracterizada por unas reglas públicas y por algunos grados de libertad de elección de los actores involucrados. El juego provoca atención, reto, placer, satisfacción... es decir: emoción.

Piaget (1962) describe el juego como una actividad especialmente poderosa que fomenta la vida social y la actividad constructiva del niño. Él nos habla de tres grandes tipos de juego que nos sirven para hacer un recorrido cronológico a lo largo de la primera infancia, al mismo tiempo que analizamos las relaciones de cada una de ellos con las matemáticas. Piaget nos habla de:

- El juego sensoriomotriz. Aparece en el estadio sensoriomotor. El niño repite movimientos que le resultan placenteros y a partir de ellos aprende nuevos movimientos.

Movimientos que le permiten manipular de manera exploratoria los objetos para irlos conociendo. Juego característico de los 0 a los 2 años.

- El juego simbólico. Aparece en el estadio preoperacional. Supone la asimilación de aquello real a su propio yo, permite evocar objetos y fenómenos no presentes. La realidad es transformada según sus deseos. Juego característico de los 2 a los 6 años.
- Juego de reglas. Aparece en el estadio de operaciones concretas. Desarrolla las relaciones sociales. Juego organizado, en equipos, aparece la competición pero también control de la espontaneidad y la sumisión a las reglas. Juego característico de los 6 años en adelante.

Partiendo de este referente, en este capítulo entiendo que en el desarrollo infantil, siempre y cuando las necesidades básicas estén bien atendidas, aparece de forma natural tres grandes categorías de juego que tienen relación e influyen en el desarrollo del pensamiento matemático, estas categorías son:

- Juego exploratorio
- Juego simbólico
- Juego de reglas

¿A qué me refiero cuando hablo de matemáticas vinculadas a juego?

Muchos juegos se realizan al aire libre y con un despliegue motor muy importante. Estos juegos son los que ayudan a los niños a comprender y a apropiar-se del **espacio tridimensional** que los rodea, es decir, a construir las primeras intuiciones geométricas (Edo 2000). Hay también otros juegos que influyen en la construcción de las primeras nociones geométricas como, juegos con tableros donde debes ubicarte y hacer recorridos, juegos de construcciones en el espacio y en el plano, los puzles y rompecabezas, etc.

En muchos juegos intervienen números y cantidades que se deberan comparar para determinar quien tiene más y quien tiene menos, o ¿cómo lo hacemos para tener igual? etc. A menudo también en los juegos nos preguntamos ¿quién ha ganado? y ¿Por qué? características que ayudan a desarrollar el **sentido numérico** (Way, 2011).

En muchos juegos de mesa con cartas, con dados, con tableros y en todos los juegos de puntería hace falta sumar las puntuaciones parciales para determinar quién ha ganado. Es muy evidente la relación entre este tipo de juegos y el desarrollo del **cálculo mental** (Edo, 2003).

En los juegos colectivos, especialmente los reglados hay un orden temporal, quien comienza, quien es el segundo, el tercero... ¿Qué es necesario hacer primero, y a continuación? Las secuencias ordenadas de acciones, la espera y el turno de tirada por ejemplo son claves para desarrollar el **sentido temporal.**

Los juegos tienen unas reglas propias a las que nos sometemos voluntariamente, y muy a menudo tienen un reto o unos objetivos que se quieren conseguir, los cuales hacen que el jugador despliegue un tipo de razonamiento lógico al rededor de preguntas como: ¿Qué puedo hacer para conseguir el objetivo antes que nadie? Este tipo de **razonamiento lógico** en el que se contemplan diferentes opciones y se escoge en función de la probabilidad y del azar son "las estrategias favorecedoras" y nos conectan con la **Resolución de problemas matemáticos** (Edo, Deulofeu y Badillo 2007).

Estos, y otros, contenidos matemáticos que irán apareciendo a lo largo del artículo nos confirman porque el juego es fundamental para el conocimiento matemático.

Juego Exploratorio

Des de muy pequeños los niños, de manera libre y espontánea, observan, manipulan, exploran y experimentan con los objetos que tienen cerca y este interés se expresa mediante la propia acción (Weissmann, 1999).

El juego exploratorio puede entenderse como el conjunto de comportamientos que permiten obtener información sobre los objetos con los que los niños interactúan. La actividad espontánea de exploración se desencadena a partir de estímulos exteriores al sujeto y aparecen en ausencia de necesidades biológicas primarias (Coll, 1978). La actividad que se despliega durante el juego exploratorio no es caótica o azarosa, habitualmente la acción del niño persigue alguna finalidad, aun que el objetivo puede aparecer durante el transcurso de la manipulación y, hasta cambiar durante el proceso. Esta manipulación y exploración permite al niño obtener información de los objetos y así conocerlos mejor.

Por tanto, el juego exploratorio es aquel que permite al niño aprender aquello que tiene aquí y ahora, se centra en interrogantes como:

- ¿Qué es esto?

- ¿Cómo es esto?
- ¿Qué puedo hacer con esto?

La primera situación didáctica vinculada a contenidos matemáticos, bien documentada y con un amplío recorrido escolar es el cesto de los tesoros.

La profesora Goldschmied, especialista en el aprendizaje en las primeras edades y en la formación de maestros, desarrolló la formulación y sistematización de las actividades educativas de descubrimiento dirigidas a niños y niñas de cero a tres años. No se trata solamente de establecer una metodología didáctica, sino de sistematizar un tipo de juego aprovechando la actividad espontánea de los niños (Goldschmied, 1986).

El cesto de los tesoros, según Majem y Òdena (2007), es una actividad de exploración orientada a los niños de 6 a 10/12 meses. Se trata de un conjunto especial de objetos y materiales, que podemos encontrar o confeccionar. La selección de los mismos es la clave del éxito de la actividad, el propósito de esta selección es potenciar los sentidos de los pequeños: tacto (forma, peso, temperatura, textura, etc.); olor y sabor (diversidad y variedad de aromas y sabores); sonido (percusión, ficción, crujido, ausencia de sonido, etc.); vista (color, volumen, magnitud, luminosidad, brillantez, etc.). Otros tipis de materiales de plástico y de colores primarios no darían al niño referencias tan precisas de superficie, peso, temperatura, forma, color, olor, sonido, consistencia, etc. por tanto, no ofrecerían las mismas oportunidades de reconoces diversidad de cantidades, limitado así las posibilidades de establecer relaciones.

El juego heurístico es la continuación natural del cesto de los tesoros, creado y documentado por la misma autora. El juego heurístico es una actividad destinada especialmente, a niños en su segundo año de vida, ya que es en esta edad cuando la movilidad se convierte en la más amplia conquista, pasando a ser el eje central de la actividad. Según Goldschmied (1986) esta actividad contribuye a estructurar el pensamiento, el lenguaje, el dominio del espacio y a establecer relaciones lógicas como, comprender las consecuencias de las propias acciones.

En Majem y Òdena (2007), se puede encontrar todo lo necesario para llevar a cabo esta actividad. La sesión de juego heurístico siempre consta de dos partes. La primera se centra en la exploración y combinación de objetos y la segunda, tan importante como la primera, se basa en la recogida, agrupación y clasificación de los objetos.

Algunas de las acciones típicas que hacen los niños y niñas durante la primera parte, de exploración y combinación de materiales son:

Llenar y vaciar, abrir y cerrar, agrupar y separar; colgar y descolgar; tapar y destapar; añadir y quitar. Alinear, apilar, deslizar, empujar, presionar, girar, oscilar, encajar, acoplar, aparear, estirar, prensar y comprar, entre otras.

Combinando los diferentes materiales, por ejemplo, que:

- Algunos objetos caben dentro de otros, y otros no.
- Según como se coloquen, se aguantan o se caen.
- Unos son más grandes o más pequeños que otros.
- Algunos ruedan y otros se mantienen quietos.
- Algunos encajan bien, otros no.
- Hay objetos que su apariencia se modifica dependiendo de cómo los toques.
- Algunos resultan agradables y otros desagradables, etc.

Mientras juegan los niños y las niñas van tomando consciencia de las características y propiedades de los objetos (formas, superficies, longitud, volumen, peso –masa-, material, textura, etc.) de las leyes de la naturaleza (gravedad, equilibrio…).

En esta actividad se utilizan una serie de objetos pequeños y numerosos, también algunos botes o cajas que se usan como contenedor y también cilindros con los dos extremos abiertos. En todas las sesiones que he presenciado hay algunos niños que se dedican a colocar objetos pequeños dentro de estos recipientes (experimentando su capacidad), de repente los objetos no están, "desaparecen" de la vista y reaparecen de forma diferente según el tipo de contenedor que estén usando. Están aprendiendo que un recipiente abierto por una sola cara o por ambas produce resultados diferentes y requieren acciones diferentes para recuperar su contenido. En estas edades se observan innumerables repeticiones de una misma acción; estas están encaminadas a comprender la consecuencia de la propia acción y a poder anticipar (mentalmente) lo que sucederá si esta acción se realiza (Edo, 2012).

El juego exploratorio, pues, es una actividad característica de los primeros años de la vida, pero reaparece con cada material nuevo que se ofrece a los niños durante toda la educación infantil – y de mayores también- ya sea en actividades como las bandejas de experimentación, las transformaciones de espacios, los rincones de construcciones, etc.

Para que este juego se dé es necesario ofrecer un entorno y unas condiciones adecuadas. A continuación se expondrán algunas recomendaciones didácticas para acompañar mejor a los alumnos en este juego exploratorio que aparece de forma natural en educación infantil.

La importancia de la exploración libre

Cuando ofrecemos un nuevo material la primera propuesta ha de ser, siempre, la exploración libre. Si se quiere acompañar con aluna consigna concreta tiene que ser lo más abierta posible, como por ejemplo: *¿Qué es esto? ¿Cómo es esto? ¿Qué podéis hacer con esto?*

Esta propuesta abre todas las posibilidades, permite a los niños actuar libremente si ninguna presión por tener que conseguir nada en concreto, despierta su imaginación y creatividad, permite que unos "se inspiren" en las producciones de los otros, no hay temor al fracaso porqué no hay error y los descubrimientos y conocimientos que se aparecen son éxitos personales.

Hay evidencias científicas que avalan esta recomendación. En el año 1976 Jerome S. Bruner y dos colaboradores realizaron una investigación donde estudiaron el papel del juego en la resolución de problemas con niños de 3-5 años de edad. El experimento consistía en proponer un reto a 180 alumnos. El reto consistía en llegar a coger un objeto que había encima de una mesa, pero que estaba lejos de la silla donde se sentaban los alumnos, y estos no se podían levantar. Dejaron sobre la mesa también, palos, ganchos, cuerdas, etc. y establecieron tres grupos de niños. Los primeros los dejaron jugar con el material, un buen rato sin ninguna instrucción. Al segundo grupo se le hizo una demostración de cómo se podían combinar estos elementos y los niños del tercer grupo les propusieron la tarea directamente sin poder manipular nada. Resultados: los niños del primer grupo resolvieron mucho mejor la tarea (llegar al objeto si levantar-se de la silla) que los niños de los otros dos grupos. Los investigadores vieron que los niños que han realizado un juego exploratorio libre con los palos y ganchos, sin sentirse condicionados por ninguna demanda muestran que: tienen menos tendencia a abandonar, menos frustración, se plantean hipótesis más viables y no temen al error. Entre sus conclusiones dicen "el juego reduce la presión de éxito y el fracaso. Nuestros jugadores, menos estresados, van a poder proceder con menos frustración y menos miedo al fracaso" (Sylva, Bruner y Genova, 1976, p. 256)

¿En la escuela podemos ayudar a evolucionar este juego?

Si el juego es libre y es voluntario ¿qué papel tenemos los maestros? ¿Les ofrecemos buenos materiales y dejamos que hagan? Bien, esta es una buena opción pero ¿en la escuela podemos ayudar de alguna manera a los alumnos a avanzar en su aprendizaje y en su desarrollo? ¿Como educadores podemos añadir elementos a su juego para ayudar a los alumnos a avanzar si perturbar la acción creativa y espontánea?

Aspectos como el cambio de agrupación, la buena selección de materiales, las preguntas o condiciones iniciales y la representación son ejemplos de elementos metodológicos que pueden ayudar a esta evolución.

Cambio de Agrupación

Si bien la exploración inicial no ha de ser nada pautada, en un determinado momento se puede pedir a los alumnos que hagan una construcción conjunta con algún compañero, o entre todos los alumnos de una mesa, es decir, el cambio de agrupación crea un nuevo escenario que comporta nuevos retos, y en este caso, se fomenta el trabajo cooperativo.

Figuras 1a y 1b. Se empieza por un juego exploratorio individual para pasar más adelante a una propuesta de hacer una construcción conjunta con un compañero o con todos los de la mesa.

Si nos fijamos en la imagen 1b vernos que hay una hoja de papel encima de la cual se ha pedido que se haga una construcción conjunta entre dos compañeros. Esta situación hace que los dos alumnos deban hablar, ponerse de acuerdo, argumentar, convencer al otro, es decir, tengan que compartir. En esta situación es muy habitual oír expresiones de los niños donde aparecen los términos matemáticos que están aprendiendo, por ejemplo: “Pásame el cuadrado azul”, “¿Cerramos la parte de arriba con triángulos?” etc.

Buena selección del material y las preguntas iniciales

En el siguiente ejemplo hay una buena selección de materiales. Queremos ayudar a los alumnos a reflexionar sobre los conceptos: caras planas y caras curvas de los objetos, por lo tanto las piezas que se ofrecen son todas con unas formas bien seleccionadas. Forma de cubo, de cilindro y de esfera. Nada más.

Preguntas iniciales: antes de empezar a jugar se pide: ¿Irán bien todas las piezas para construir torres? Los niños pueden hacer sus hipótesis, antes de tocar el material. Después los dejamos “jugar”, es decir, permitimos que exploren y hagan lo que quieran con las piezas.

Figura 2. Construyendo torres.

Cuando acaban podemos hacer una puesta en común y una síntesis de lo que hemos descubierto. Fácilmente los niños y las niñas de cuatro años llegan a conclusiones como: los cubos van bien para apilar, los pongas como los pongas, ya que tienen todas las caras planas. Los cilindros no se aguanta si los pones por la cara curva pero sí, si los apoyas encima del círculo, porque es plano. Y las esferas no se aguantan casi nunca porque solo tienen una única cara y es toda curva.

Selección de materiales, juego colectivo y representación en el papel

Respecto a los materiales, el juego exploratorio puede ser con piezas de diferentes medidas. Los objetos tan o más grandes que los propios alumnos crean unas exploraciones y descubiertas fantásticas.

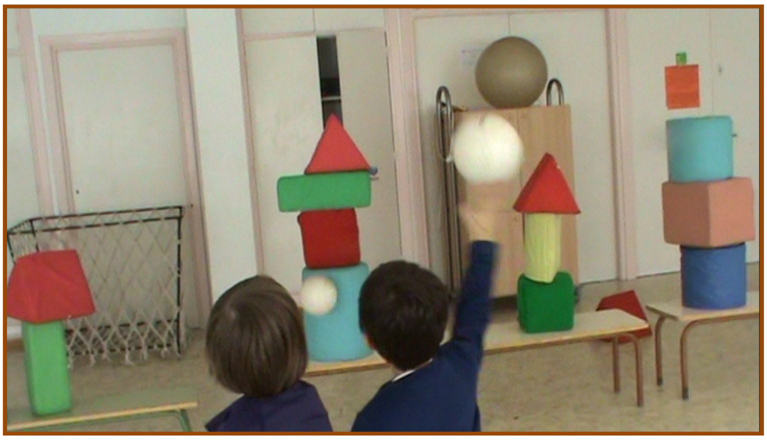


Figura 3a. Construir torres con materiales tan o más grandes que los niños.

En este caso las piezas de espuma grandes sirven para recordar conceptos de forma tridimensional, de figuras planas, etc. Pero también para desplegar un juego de puntería. Se trata de hacer torres que se aguanten y con pelotas de diferentes medidas utilizadas como proyectiles nos preguntemos: ¿es mejor apuntar a la parte de arriba, del medio o de abajo de la torre? ¿Me va mejor la pelota grande, mediana o pequeña a mí?

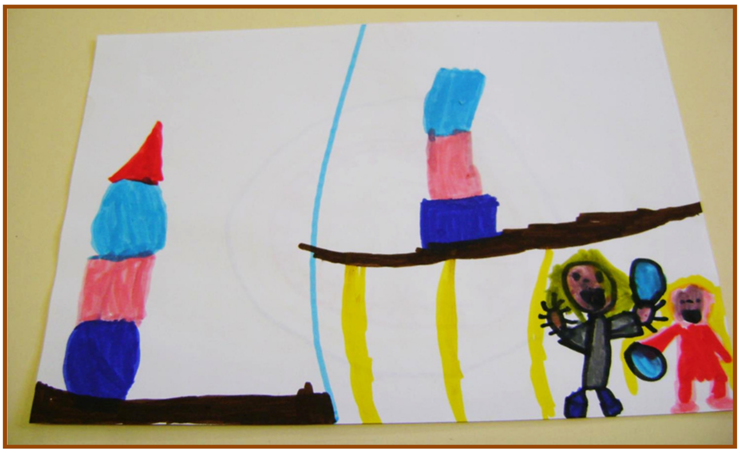


Figura 3b. Representar lo que se ha vivido, un gran paso haci a la abstración.

Podemos acabar pidiendo que "expliquen" como quieran, en una hoja en blanco, lo que han hecho hoy. Esta representación de la experiencia vivida es un gran paso para la abstracción. El alumno se fija en las formas, posiciones, cantidades, colores y otros aspectos cuantitativos y cualitativos para representar lo más significativo de cada objeto, y además, a menudo escoge representar el momento que emocionalmente es más relevante para él de la experiencia que ha vivido.

El juego simbólico

Es el juego que aparece cuando las personas y a los objetos se les asignan características y propiedades diferentes a las de la realidad. Se centra en cuestiones como:

- Ara esto es como un…
- Yo hago como si fuera…

Es una actividad característica de los dos a los siete años, aproximadamente. Se centra en la representación y simulación de vivencias experimentadas, observadas o inventadas. Los niños generan una acción que cabalga entre la fantasía y la realidad. Este juego desarrolla la creatividad, la imaginación, promueve la autonomía y la socialización. Para Piaget (1961) este es el "juego" por excelencia donde el niño no solo asimila la realidad sino que la incorpora para poderla revivir, dominarla o compensarla. El juego simbólico según Abad, y Ruiz de Velasco (2011) es una experiencia vital de la infancia que posibilita transformar, crear otros mundos, vivir otras vidas, jugar a ser otros, y así aprender a pensar como los otros, a sentir como los otros y, en definitiva a saber que existen maneras de pensar y sentir diferentes a la propia.

Para Van Oers (1996), siguiendo a Vigotski, el juego simbólico es la actividad conductora del aprendizaje de los niños de tres a ocho años. Este investigador realiza una serie de estudios sobre las oportunidades de aprendizaje y de de enseñanza que se dan en situaciones de juego simbólico. El 1996 Van Oers publica unos resultados centrados en la estimulación del pensamiento matemático en las actividades de juego de los niños. En su estudio, basado en la observación sistemática, intenta descubrir cuando se producen oportunidades de aprendizaje durante una actividad de juego simbólico, en el marco escolar, que puedan ser consideradas válidas para el aumento del pensamiento matemático de los alumnos de 4 a 8 años. Para este estudio analizan 8 sesiones de juego simbólico registradas, de una duración de 25-30 minutos cada una, desarrollada en pequeños grupos en el rincón de juego simbólico de la "zapatería" en la escuela. Van Oers y colaboradores se preguntan si se puede estimular el pensamiento matemático en un contexto de juego. Durante las sesiones la maestra observaba el juego de los alumnos y a veces les preguntaba qué hacían de manera que esta verbalización los ayudaba a describir y hacer consciente aquello que hacían por puro placer. Había también una consigna clave de investigación. Cuando algún niño describía su acción y en ella aparecía algún referente matemático, el adulto les pedía: ¿Estás seguro? Cuestión que llevaba a los niños a reflexionar, argumentar y justificar sobre los símbolos (orales y escritos) que utilizaba y las acciones que realizaba.

Los resultados muestran que se producen muchas oportunidades para enseñar matemáticas, si el maestro sabe utilizarlas, y que los niños pueden reflexionar explícitamente sobre la relación entre los símbolos y sus significados dentro del marco de la actividad de juego. Van Oers (1996) dice:

por tanto, me permito concluir que la actividad de juego simbólico, en el marco escolar, puede ser una situación de enseñanza y aprendizaje para el incremento del pensamiento matemático de los niños, a condición que el maestro se capaz de utilizar adecuadamente las oportunidades de enseñanza. (p. 73)

¿Como ayudamos a evoluciona matemáticamente este juego?

Entendemos que este juego ha de ser una actividad "libre", es decir, nada o poco condicionada por el adulto. Nuestro reto es ayudar a los niños a aumentar la capacidad de pensamiento matemático sin perturbar la acción creativa y espontánea de su juego. ¿Qué podemos hacer?

La participación del adulto

Una posibilidad es que el adulto, una vez ha observado atentamente el juego simbólico que despliegan libremente sus alumnos se ofrezca a participar como un actor más de esta actividad.

A menudo, he visto una maestra haciendo de vendedora de la tienda del rincón donde los niños van a "comprar". La ventaja de esta situación es que la vendedora no pide exactamente lo mismo a todos. A unos les pregunta "cuantos" plátanos quiere; a otros "cuanto" cuesta todo; y a los más avanzados se les pide, por ejemplo, qué cambio les tiene que devolver; es decir, la maestra puede ajustar el discurso y las demandas en función del interlocutor y que todo siga siendo un juego. Crear zonas de desarrollo próximo e intervenir en ellas ajustando la ayuda psicológica en función de con quien se interactúa, es una herramienta fundamental del maestro de educación infantil (Onrubia, 1994). Es interesante que la siguiente sesión del juego la maestra no tome este rol y observe si los niños que hacen de vendedores piden cuestiones similares a las que ella pidió en el pasado.

Otros elementos que pueden ayudarnos

Como se muestra Edo y Masoliver (2008) en el rincón de la tienda los maestros pueden…

1. Implicar a los mismos alumnos en la creación del rincón de juego. Escoger entre todos qué rincón queremos montar (necesidad de hacer votaciones, cálculos, análisis de datos para tomar decisiones, etc.)

2. Pedir como nos imaginamos el rincón y qué necesitamos para construirlo, cuestiones que conducen a la necesidad de evocar, imaginar, relacionar. También aparece la necesidad de observar y analizar la realidad para poder hacer listas de objetos que necesitamos, ordenar las acciones que tenemos que hacer, es decir, necesidad de temporalizar.

3. Escoger el nombre, poner precios, preparar el material, etc. Un montón de acciones organizativas que requieren de contenidos matemáticos, tales como: hablar de cantidades, tiempo, medidas, espacio, orden, agrupaciones, clasificaciones, etc.

4. Observar con detalle mientras los niños juegan libremente. Este hecho es clave, ya que solo des de los conocimientos previos de los alumnos podemos hacer propuestas que planteen retos ajustados, interesantes y alcanzables para ellos.

Figura 4. Juego simbólico la tienda de la classe.

5. Podemos variar las pequeñas consignas iniciales, por ejemplo: El primer día no hay ninguna consigna, en otro momento podemos decir: Hoy todo el mundo tendrá exactamente 5 euros para ir a comprar. Más adelante podemos decir: hoy tienes 5 euros cada uno e ir a comparar de dos en dos, de tres en tres, o hacer lista conjunta antes de la compra, etc.

6. Otra acción que puede influir son las sesiones intermedias – entre una sesión de juego simbólico y la siguiente- con contenidos matemáticos específicos, como: hacer una sesión de descubrimiento del funcionamiento de la calculadora (real) y después dejarla en el rincón de a tienda.

Figura 5a. Sesión guiada de descubrimiento de la calculadora.

Figura 5b. Representación en hoja en blanco, consigna: ¿Qué has aprendido hoy?

7. Otra posible sesión a hacer con pequeños grupos, entre sesiones de juego, puede ser la de descomponer cinco euros con diferentes combinaciones de monedas.

Figura 6. ¿De qué maneras podemos hacer 5 euros? Trabajo en pequeño grupo.

8. La representación gráfica de la compra en una hoja en blanco. De vez en cuanto, se puede pedir que "expliquen" en una hoja en blanco "como ha ido la compra de hoy". Esta consigna: "explica" es suficientemente abierta para que los niños utilicen los lenguajes que quieran de aquellos que están aprendiendo. Cuando nos piden: ¿pero como? ¿Qué tengo que hacer? La respuesta del adulto es: como quieras, con dibujos, números, palabras, lo que quieras tú para que los otros te entiendan.

Figura. 7. Representaciones del juego en la tienda: explica la compra de hoy.

De esta manera podemos observar donde pone el acento cada niño, qué es lo que más le ha llamado la atención de su actividad, y damos opción a que se expresen gráficamente usando dibujos, números, palabras o frases a voluntad.

Como síntesis diría que durante el juego simbólico es mejor que el adulto intervenga poco. Aunque sabemos que los diálogos y reflexiones sobre lo que el niño ha hecho, la representación en el papel y las sesiones intermedias pueden incrementar efectivamente el pensamiento matemático presente en el juego.

Juegos de reglas

Actividad en la que las acciones y elecciones de los participantes están regidas por una reglas públicas, libremente aceptadas y donde o hay algún objetivo a conseguir. Se centra en cuestiones como:

- *¿Qué puedo hacer para conseguir el objetivo?*
- *¿Qué puedo hacer para que el otro no lo consiga antes que yo?*

Este tipo de juego toma una gran importancia a partir de los seis años, aun que se puede introducir mucho antes y genera un interés que puede durar toda la vida.

Es una actividad que lleva implícita la socialización y la competición. La socialización es imprescindible ya que todos los jugadores deben aceptar ceñirse a las normas del juego, de otra forma, la actividad no funciona. La competición también le es propia porqué la mayor parte de estos juegos hay quien gana y quien no es el ganador.

En los juegos de reglas relacionados con las matemáticas distinguimos dos grandes grupos:

- Los juegos motores
- Los juegos de mesa

El juego motor es el juego reglado inicial

Una buena manera de entrar en el mundo del juego reglado con los alumnos de tres a seis años es a través del juego motor; los juegos tradicionales y populares son garantía de éxito. Se trata de aquellos juegos motores, reglados, que no requieren de materiales complicados que tienen una larga historia en nuestra cultura. Juegos como: uno, dos, tres, pica la pared; tierra, mar y aire; el pañuelo; la rayuela; los bolos; hacer paquetes; el juego de las sillas musicales; las chapas; los cuatro esquinas; romper el hilo; etc.

Cuando vemos que los alumnos, libremente, escogen jugar a uno de estos juegos podemos estar seguros que el tiempo invertido en enseñárselo ha sido útil. Más allá de la riqueza de tener conocimiento de juegos colectivos para compartir y disfrutar con los compañeros también encontramos contenidos matemáticos implicados, por ejemplo en el juego *Un dos tres, pollito inglés*, se trabajan nociones como: delante, detrás, los numerales, en marcha y quietos, lejos y cerca, etc. *El juego del pañuelo*: los números, una cantidad inicial que se va reduciendo, comparación de cantidades, el espacio cerca y lejos, etc. *En la rayuela:* la serie numérica, el orden, delante y detrás, subir y bajar, etc. *Hacer paquetes*: relación entre número y cantidad y composición y descomposición de cantidades. *Las cuatro esquinas*: línea recta, vértice, diagonales, centro de la figura, cuadrilátero, etc. *Las sillas musicales*: "tantos como, menos uno", etc.

Figura 8. Uno, dos, tres, pollito inglés y las sillas musicales.

Los juegos populares y también los de puntería crean un contexto muy adecuado para pedir, que representen gráficamente la actividad. Damos la página en blanco y pedimos: explica qué ha pasado, muy fácilmente aparecerán números y cantidades para reflejar lo esencial de lo que se ha vivido.

Figura 9. Juego de punteria y representación de la actividad

Los juegos de mesa, matemática en estado puro

Enseñar un juego de mesa en educación infantil requiere tiempo y dedicación, no es una tarea sencilla pero es una gran inversión. Un buen juego para iniciarse es el “memori”, que consiste en: se destapan dos cartas y si hacen pareja me las llevo y sino las vuelvo a dejar en el mismo sitio donde estaban. Aprender a esperar el turno, a jugar correctamente cuando te toca, estar atento a qué saca el otro, y saber determinar quién ha ganado son grandes aprendizajes para estas edades.

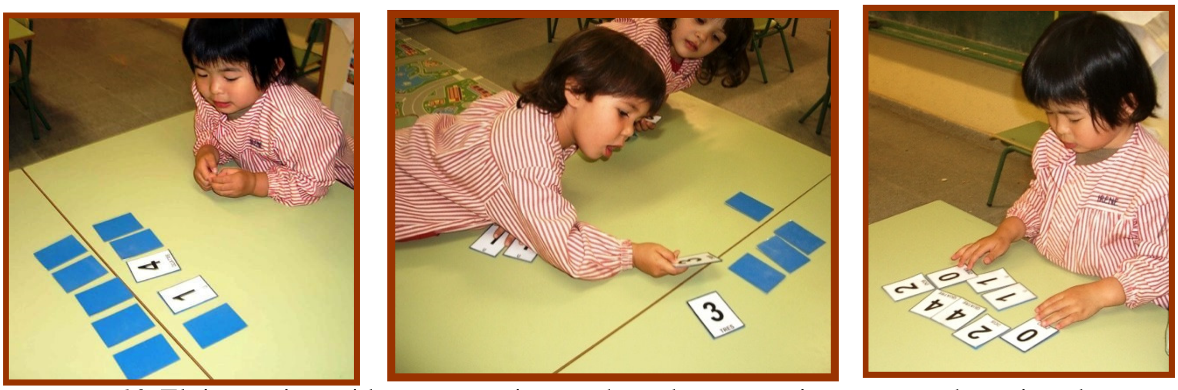


Figura 10. El tiempo invertido a enseñar juegos de reglas se convierte en grandes exitos de aprendizaje de los niños.

Podemos involucrar a las familias, pidiendo que los niños que se lleven juegos a casa y que sean los responsables de explicar-los al resto de familiares. Jugar juntos crea lazos y vínculos especiales.

Los juegos de mesa crean un marco ideal para que los alumnos aprendan a escuchar, negociar y a autoregularse. En los juegos de reglas los niños aprenden a ceñirse a unas normas voluntariamente. La regla vence porque es el impulso más fuerte. (Vigotski, 1988). Aparece la autorregulación más allá del deseo inmediato y todo esto simultaneo al aumento de la capacidad de razonar matemáticamente. Es evidente que existe una gran cantidad de juegos de mesa que contienen contenidos matemáticos importantes; números, cantidades y pequeños cálculos que ampliaran el sentido numérico de nuestros alumnos ya que en este contexto los usan con significado.

Hacemos un pequeño análisis del juego *Los tres dados*: en este juego cada jugador (mejor, cada pareja de niños que hagan equipo) tienen un juego de cartas del 1 al 10 o al 12 que ordenan delante suyo. Quien tiene el turno lanza tres dados y gira boca abajo sólo una de sus cartas, la que quiera, escogiendo: la puntuación que ha salido en un dado, la suma de los dos dados o la suma de tres dados. Gana quien antes las ha girado todas. (Edo, 2003).

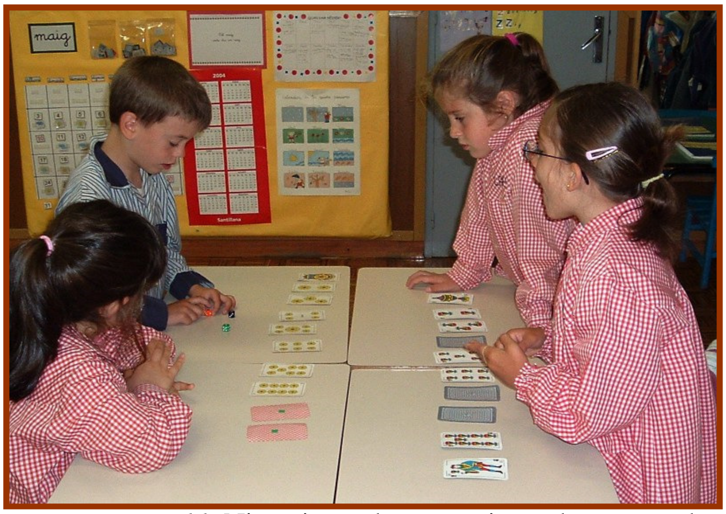


Figura 11. Niños jugando, en equipos, dos contra dos, al juego: los tres dados.

Suponemos que le han salido estas cantidades (11b) ¿qué números podrá girar? El 2, el 3, el 4, el 5, el 6, el 7 y el 9. Una gran cantidad de combinaciones se pueden hacer en cada tirada. Pero lo mejor de este juego es que, además de los cálculos hay también una parte de estrategia, es decir, una manera de razonar y de tomar decisiones que favorezcan la posibilidad de ganar.

Cuando los niños empiezan a jugar (como calcular es cansado) giran cartas con la puntuación directa de un dado (el 2, el 3, el 5, etc.), hasta que unas partidas más adelante se dan cuenta que las cartas que les quedan para girar son las que tienen la puntuaciones más altas (10, 9…) y comienzan a actuar en consecuencia. Este tipo de racionamiento es el propio de la resolución de problemas.

Por lo tanto será necesario prestar atención a la hora de escoger los juegos. Los hay que dependen del todo del azar, como la oca y otros en que las decisiones del jugador influyen de alguna manera en la evolución de la partida. Estos últimos son los que se puede descubrir alguna estrategia favorecedora, como sería el caso del dómino. (Edo et al. 2007).

En infantil tienen sentido los dos tipos de juegos, pero en primaria los juegos de azar puro divierten menos y los de estrategia hacen razonar más.

Hay muchos juegos de mesa que tienen contenidos de números, donde se requiere reconocer las cantidades y contar, como la oca, el parchís, el dómino y el reloj, etc. También hay muchos donde es necesario hacer cálculos (Edo, 2003) y también hay que trabajan el sentido espacial como el tres en ralla y el mismo dómino.

Para concluir podemos decir que el juego de mesa, cuando es escogido por los niños ayuda a aprender contenidos matemáticos, desarrolla la capacidad de atención, de concentración, de coordinación, de negociación, de cooperación, al mismo tiempo que genera emoción y diversión.

Figura 12. Niñas en el taller de juego matemàtico. Han escogido ellas mimas el juego que quieren jugar y con quien quieren estar. Se las ve absolutamente implicadas, atentas y concentradas haciendo lo que quieren hacer. Estan constryendo el concepto de número y ampliando su sentido numérico.

Figura. 13. Niños de infantil jugando al dominó. Intentan controlar 12 cantidades a la vez. Buscan recursos propios como agrupar cantidades iguales, realizar dos grupos de fichas, etc. Atentos, conectados e implicados mental y emocionalmente a lo que están haciendo.

Referencias bibliográficas

Abad, J., & Ruiz de Velasco, A. (2011). *El juego simbólico*. Barcelona: Graó

Coll, C. (1978). La significación psicopedagógica de las actividades espontáneas de exploración. *Anuario de psicología, 18*, 91-112.

Edo, M. (2000). Mundo Matemático. Formas en el espacio. In M. Antón & B. Moll, (Eds.), *Educación infantil. Orientación y recursos (0-6 años)* (pp. 301-409). Barcelona: Praxis

Edo, M. (2003). Taller de juegos y matemáticas. Documentación para el taller. Desarrollo curricular. Estrategias e instrumentos. In C. Tomás, M. Casas (Eds.), *Educación Primaria. Orientaciones y Recursos* (pp. 1-59). Barcelona: Praxis.

Edo, M. (2012). Ahí empieza todo. Las matemáticas de cero a tres años. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 80*, 71-84

Edo, M., Deulofeu, J., & Badillo, E. (2007). Juego y matemáticas: Un taller para el desarrollo de estrategias en la escuela. In M.I. Berenguer, et al. (Eds.), *Actas XIII JAEM*. Granada: Publicaciones FESPM

Edo, M., & Masoliver, C. (2008). Una tienda en clase. Creación y análisis de un contexto para aprendizajes matemáticos. *UNO-Revista de Didáctica de las Matemáticas, 47*, 20-36

Goldschmied, E. (1986). El joc heurístic. Una activitat del segon any de vida. *Infància, 33*, 11-15.

Majem, T., & Òdena, P. (2007*). Descubrir jugando*. Barcelona: Octaedro.

Onrubia, J. (1994). Enseñar: crear Zonas de Desarrollo Próximo e intervenir en ellas. In C. Coll, et al. (Eds.) *El constructivismo en el aula* (pp. 101-124). Barcelona: Graó

Piaget, J. (1961). *La formación del símbolo en el niño*. México: F.C.E

Piaget, J. (1962). *Play, dreams and imitation in childhood*. Nova York: Norton.

Sylva, K., Bruner G.S., & Genova, P. (1976). The role of Play in the Problem-Solving of children 3-5 Years Old. In J.S. Bruner, A Jolly & K Sylva (Eds.), *Play its role in development and evolution* (pp. 244-257). Gread Britain: Penguin Books

Van Oers, B. (1996). Are you sure? The promotion of mathematical thinking in the play activities of young children. *European Early Childhood Education Research Journal, 4*(1), 71-89.

Vigotski, L.S. (1988). El paper del joc en el desenvolupament de l'infant. A I. Vila y R. Colomina, (comp.) *Pensament y llenguatge* (pp. 111-288). Barcelona: Eumo

Way, J. (2011). *Number Sense Series: Developing Early Number Sense*. Enriching mathematics. Consultado mayo 2015 a: http://nrich.maths.org/2477

Weissmann, H. (1999). El juego exploratorio en la educación infantil. In *El joc a 0-6 anys. IV Jornades d'innovació en l'etapa d'educació infantil* (pp. 151-159. Barcelona: ICE-UAB

Criatividade e Ensino Superior: do olhar atual dos alunos até desafios futuros

Maria de Fátima Morais
Instituto de Educação da Universidade do Minho, *famorais@ie.uminho.pt*

Resumo: *A resolução criativa de problemas é essencial face aos desafios de rapidez, imprevisibilidade e constantes alterações que a atualidade coloca a todos os contextos. Coerentemente, o apelo à criatividade no Ensino Superior, tem sido reforçado, visto a universidade preparar profissionais altamente especializados em qualquer área do conhecimento. Escutar os alunos sobre este tópico é uma das preocupações internacionalmente manifestada. Porém, no contexto português, a investigação sobre criatividade em contexto educativo não é ainda frequente, sendo quase inexistente face ao Ensino Superior. Nesta conferência, apresenta-se um estudo a partir de 582 alunos universitários, frequentando as áreas de Ciências e Tecnologias, Artes e Humanidades e Ciências Sociais e Humanas. Apresentam-se resultados sobre a perceção dos alunos face à presença de criatividade nas práticas docentes de que são alvo e sobre a conceituação e valorização de criatividade. Tais dados são abordados em função da área curricular. Diferenças significativas foram encontradas, tomando estas particular relevância, no contexto da conferência, quando implicam Ciências e Tecnologias (área que inclui formações em matemática). Os resultados são questionados no sentido de potencialidades e de preocupações que podem traduzir para práticas educativas e de futuras investigações que os aprofunde.*

Palavras-chave: *criatividade; ensino superior.*

Abstract: *The creative solution of problems is essential to face the challenges of quickness, unpredictability, and constant changes that we nowadays face in all contexts. In coherence, the call for creativity in higher education has been reinforced, since the university prepares highly specialized professionals in all areas of knowledge. To listen to students about this topic is one among several internationally shared concerns. However, in the Portuguese context, research about creativity in the educational context is still not common, and it is almost inexistent at the higher education level. In this conference, I will present a study involving 582 higher education students, enrolled in Science and Technologies, Arts and Humanities, and Social Sciences. I will present some results about students' perceptions about the presence of elements of creativity in the practices of their teachers and about the concept and value of creativity. The data will be approached according to each curricular area that was considered. Significant differences were found, with particular relevance when Sciences and Technologies are concerned (the area which includes majors in mathematics). The results are questioned taking into account the*

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 45–46

potentialities and concerns that may enlighten educational practices and future research.

Keywords: *creativity; higher education.*

Simpósios Temáticos

História do ensino e epistemologia

Da crítica dos fundamentos da matemática à busca de um maior rigor no ensino: Uma reflexão por via dos estagiários do Liceu Normal de Pedro Nunes (1956-1969)

Teresa Maria Monteiro
Instituto Politécnico de Beja, *teresamaria.monteiro@gmail.com*

Resumo. *"A História é uma velhota que se repete sem cessar" refere Eça de Queirós no seu livro "Cartas de Inglaterra". O conhecimento da nossa história interessará hoje e sempre para o conhecimento do homem, como interessará o conhecimento da história da educação matemática. Não só por parecer repetir-se, como escreveu Eça de Queirós, como por auxiliar a perceber melhor o presente e contribuir para uma construção sustentada do futuro. Sabendo que a cultura escolar (Frago, 2001/2007; Julia, 2001) não muda por decreto, queremos saber pormenores das aulas de Matemática e da formação de professores no então designado Liceu Normal de Pedro Nunes. Ao olharmos para a história da historiografia, cedo nos apercebemos que as regras para escrever a história têm vindo a alterar-se com o tempo (Burke, 1992; Dosse, 2001) e que nem sequer há uma forma única para o fazer (Chartier, 1994). Sabemos, isso sim, que existe a necessidade do estudo da história das disciplinas escolares (Chervel, 1990). Em meados dos anos 50 do século XX começa a refletir-se no ensino liceal da Matemática a crítica dos fundamentos da ciência matemática que apelava a um maior formalismo e rigor lógico. Como se começou por lidar com este formalismo no ensino liceal? Como se fez a axiomatização da matemática na respetiva disciplina? Qual a importância da lógica? Para responder a estas questões procurámos e analisámos fontes primárias, os trabalhos dos estagiários entre 1956 e 1969.*

Palavras-chave: *história da educação matemática; lógica; formalismo; axiomáticas; ensino liceal.*

Abstract. *"History is an old lady that is repeated incessantly" refers Eça de Queiroz in his book "Letters from England". The knowledge of our history will interest today and forever for the knowledge of the man, as will interest the knowledge of the history of mathematics education. Not only because it seems to repeat itself, as Eça de Queirós wrote, as helping to better understand the present and contribute to sustainable construction of the future. Knowing that school culture (Frago, 2001/2007; Julia, 2001) does not change by decree, we would like to gain more detailed knowledge of how Mathematics was taught and the way teachers were trained at the - then called - Liceu Normal de Pedro Nunes. If we look at the history of historiography, we realize that its rules have changed over time (Burke, 1992; Dosse, 2001) and that there is not even just one way of doing it (Chartier, 1994). What we know is that there is, in fact, the need to study the history of school subjects (Chervel, 1990). In the mid-50s of the twentieth century begins to be reflected in secondary school teaching of mathematics*

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 49–62

criticism of the foundations of mathematical science calling for greater formality and logical rigor. How we started dealing with this formalism in secondary education? How was axiomatization of mathematics done in their discipline? How important is the logic? To answer these questions, we looked for and analyzed primary sources, the work of the trainees between 1956 and 1969.

Keywords: *history of mathematics education; logics; formalism; axiomatic; high school teaching.*

Introdução

O estudo que norteia este artigo trata a formação de professores no Liceu Normal de Pedro Nunes (LNPN) ao tempo do chamado *Movimento da Matemática Moderna* (Moon, 1986). Fundada em 1906, a atual Escola Secundária de Pedro Nunes teve a designação de LNPN no período em estudo. Neste período, o liceu teve dois reitores, que eram professores de Matemática: Francisco Dias Agudo, de 1956 a 1967, e Jaime Furtado Leote, de 1967 a 1972. Depois de terem encerrado os estágios pedagógicos nesta Escola, em 1947, estes reabrem em 1956, quando Dias Agudo fica, então, seu reitor. Em 1969, é publicada nova legislação sobre a formação pedagógica dos professores do ensino liceal que, entre outras, reduz de dois para um ano o estágio pedagógico dos professores do ensino liceal. Justificámos, assim, o período do nosso estudo.

O *Movimento*, com origem na Europa e que se estendeu ao continente americano, decorreu no período de meados dos anos 50 a meados dos anos 70 do século XX (Matos, 2006). Assim, o início deste *Movimento* coincide com a reabertura dos estágios pedagógicos no LNPN, em 1956. No entanto, em Portugal, este movimento começa a fazer sentir-se sobretudo após a nomeação, por Galvão Telles, em Julho de 1963, de uma comissão de revisão do programa do 3.º e último ciclo liceal presidida por José Sebastião e Silva (1914-1972) e da qual também faziam parte Jaime Furtado Leote (metodólogo do LNPN), Manuel Augusto da Silva (metodólogo do Liceu Normal D. João III, Coimbra) e António Augusto Lopes (metodólogo do Liceu Normal D. Manuel II, Porto) (Matos, 1989). Esta comissão, que se manteve em atividade pelo menos até 1965, elaborou um programa experimental: com alterações na forma de apresentar os conteúdos matemáticos aos alunos, novas relações estabelecidas entre esses conteúdos e introdução de novos temas para a disciplina de Matemática.

Sebastião e Silva, Furtado Leote, Gonçalves Calado e Silva Paulo são algumas das personalidades que participaram no *Movimento* português.

Figura 1. Sebastião e Silva, Furtado Leote, Gonçalves Calado e Silva Paulo.

Gonçalves Calado e Furtado Leote, ambos professores do LNPN, participaram ativamente na preparação de novos programas de Matemática, onde se insere a chamada álgebra moderna e estruturas algébricas, bem como na didática da matemática e formação de professores (Monteiro, 2011). No ano lectivo de 1963/1964 dá-se início à experiência pedagógica do ensino da matemática moderna em Portugal em três liceus, um no Porto, outro em Coimbra e no LNPN em Lisboa. Justificámos, assim, a escolha do Liceu em estudo.

A metodologia que utilizamos neste trabalho é a do método histórico. Ao olharmos para a história da historiografia, cedo nos apercebemos que, primeiro, as regras para escrever a história têm vindo a alterar-se com o tempo (Burke, 1992; Dosse, 2001) e que, segundo, nem sequer há uma forma única para o fazer (Chartier, 1994). Atendendo à atualidade e ao facto de serem amplamente citados nos trabalhos sobre história da educação matemática e mesmo em trabalhos de história da disciplina de História, vamos deixar-nos guiar pelo pensamento de Roger Chartier (1945-) e outros autores como sejam: Marc Bloch (1886-1944), Michel de Certeau (1925-1986), Paul Ricœur (1913-2005), Julio Aróstegui (1939-2013), Jacques Le Goff (1924-2014), François Dosse (1950-), etc. Lemos ainda sobre o pensamento de historiadores que empregam as ferramentas metodológicas, do modo de produzir história, à história da disciplina escolar de História e à história da educação. Referimo-nos, por exemplo, a Raquel Pereira Henriques e a Clarice Nunes, respetivamente. Por último, aprendemos também com os trabalhos em história da educação matemática, nomeadamente os de Wagner Rodrigues Valente e de José Manuel Matos, só para citar alguns autores.

A tarefa do historiador será escrever a história com recurso às fontes de que se socorre. Que fontes podem ser utilizadas numa investigação em história da educação? Não havendo um caminho único a ser percorrido, as fontes podem ser: impressas ou não, como os discursos ministeriais, as circulares, os pareceres, os programas escolares, os relatórios, os projetos de reforma, os artigos, os manuais/livros didáticos, as polémicas críticas, os planos de estudo, os debates de comissões especializadas, legislação, planos de aula, atas, cadernos de aula de alunos e professores, bem como depoimentos de ex-alunos e ex-professores, ou mesmo fotografias da época (Júnior, 2010; Nunes, 1996).

Sabendo que a cultura escolar (Frago, 2001/2007; Julia, 2001) não muda por decreto, o objetivo deste artigo é conhecer pormenores das aulas de Matemática e da formação de professores no LNPN, entre 1956 e 1969, sobre os reflexos no ensino liceal da crítica dos fundamentos da ciência matemática. Esta crítica trouxe, entre outros, maior formalismo e rigor lógico, bem como as axiomáticas para a disciplina.

Da crítica dos fundamentos da matemática à busca do maior rigor lógico

A sociedade traz novos desafios para a matemática e para o ensino da Matemática, nomeadamente no período em estudo, o que implica mudanças em conteúdos e em formas de abordar o seu ensino. Disto tinham consciência e informação os estagiários do LNPN:

> Podemos citar as palavras de M. Servais: "O uso das matemáticas invade cada vez mais as técnicas e as ciências que se querem mais exactas. O problema do ensino eficaz das matemáticas acessíveis se põe hoje com uma acuidade sem precedentes." (...) Em conferências proferidas em muitos países e organizadas pela O. E. C. E. apontou-se a necessidade de renovar inteiramente as estruturas, o simbolismo, o conteúdo e o espírito da Matemática (Pais, 1963, p. 107).

As ciências querem-se mais exatas, como acabámos de ler, e em particular a ciência matemática. De facto, nas últimas décadas do século XIX, surgem alguns paradoxos que levam a questionar algumas bases onde assentam ideias matemáticas. "Por exemplo: a imprecisão do desenvolvimento do Cálculo pelo método dos infinitésimos; a insuficiência de axiomas da Geometria euclidiana, a necessidade de estabelecer uma teoria dos números; as antinomias encontradas na teoria dos conjuntos (Nogueira, 1960, p. 35)". "Muitos concorreram para o desmoronamento do edifício até aí construído, apoiado na crença de que a Matemática era uma ciência exacta, da qual, não era possível duvidar-se. Os Fundamentos da Álgebra e da Geometria, foram abalados (Viegas, 1960, pp. 2-3)". A visão dos matemáticos perante a matemática mudou e havia uma necessidade constante de " "purificar" a matemática" duma certa base experimental (M. A. Santos, 1967, p. 9). Em reação a esta necessidade introduz-se mais formalismo e procura-se maior rigor na matemática.

Esta crise foi comummente designada por crítica dos fundamentos e desenvolveu-se em três principais linhas de pensamento: *logicismo, formalismo* e *intuicionismo* (ou *construtivismo*). Russel (1872-1970) e Whitehead (1861-1947) são representantes do *logicismo* e a obra *Principia Mathematica* é um excelente produto desta linha de pensamento.

> Bertrand Russel, que apresentou alguns paradoxos, formulou a sua crítica e procurou maneira dos evitar. Se o mal residia em certa espécie de círculo vicioso, propôs-se ele eliminá-lo com a sua teoria dos "tipos". Com Whitehead utilizou e aperfeiçoou a lógica simbólica. Mas, o que para nós interessa resumi-lo-emos assim: a escola logicista (que tem as suas origens em Frege) considera a Matemática como um ramo da Lógica (Nogueira, 1960, p. 35).

Hilbert (1862-1943), Frege (1848-1925) que é considerado um filósofo da lógica comparável a Aristóteles e autor da teoria da quantificação (Kenny, 1999) e Zermelo (1871-1953) são representantes do *formalismo* e o sistema de axiomas de Zermelo para a teoria dos conjuntos que evita os paradoxos de Cantor (1845-1918) e de Russel é um produto desta linha de pensamento. "Os principais ensaios de "axiomatização" devem-se a Hilbert para a Geometria e a Peano para a Aritmética (M A. Santos, 1967, p. 10)". De facto, Giuseppe Peano lançou, em 1889, a obra em latim de nome *Arithmetices principia, nova methodo exposita* e Richard Dedekind lançou, em 1888, o ensaio "Was sind und was sollen die Zahlen?"

> Note-se porém, que o sistema de axiomas atribuído a Peano tinha sido dois anos antes enunciado por Dedekind no ensaio "Was sind and was sollen die Zahlein?" (...) Os axiomas publicados por Peano na "Aritmeces principis novo método exposita" tinham [o fim] (...) de fazerem depender a construção da Aritmética de um número mínimo de termos primitivos. E é neste sentido que o nome de Peano, ficou associado aquela axiomática (Viegas, 1960, p. 7).

ARITHMETICES PRINCIPIA

NOVA METHODO EXPOSITA

A

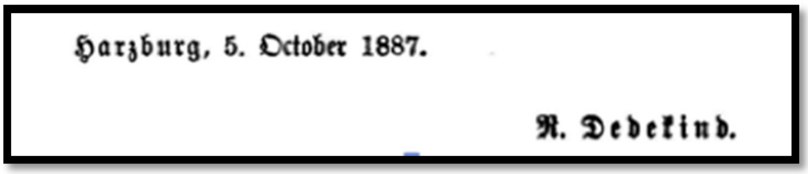
IOSEPH PEANO

in R. Academia militari professore
Analysin infinitorum in R. Taurinensi Athenaeo docente.

AUGUSTAE TAURINORUM
EDIDERUNT FRATRES BOCCA
REGIS BIBLIOPOLAE

ROMAE — Via del Corso, 216-217.
FLORENTIAE — Via Cerretani, 8.
1889

Figura 2. Capa da obra de Peano de 1889.



Harzburg, 5. October 1887.

R. Dedekind.

Figura 3. Prefácio da edição de 1893 do ensaio de 1888 de Dedekind.

Esta estagiária, bem informada, remata o problema da crítica dos fundamentos e "o aparecimento de numerosas antinomias, todas elas referentes à teoria das classes" referindo que "Apresentaram soluções para esta nova crise Russel e Whitehead, Hilbert, Brouwer e Gödel (Viegas, 1960, pp. 8-11)". Brouwer (1821-1966) é um representante do *intuicionismo* (ou *construtivismo*) onde é rejeitado o princípio do terceiro excluído e as demonstrações não construtivas da existência de entes matemáticos.

> E que tentaram os "neo-intuicionistas", por exemplo? Uma lógica nova, sem o princípio do terceiro excluído e evidentemente muito mais. (...) Brouwer chega mesmo a pretender que as noções matemáticas "têm a sua origem em duas formas activas da vontade de viver, uma primária, a "intuição", e a outra posterior, a "abstração"." (Nogueira, 1960, p. 36).

O intuicionismo surge em "oposição à escola axiomática (...) e nega a possibilidade de uma completa axiomatização" da matemática (M. A. Santos, 1967, pp. 10-11).

Como lidar com o formalismo no ensino liceal?

Da crítica dos fundamentos para o excesso formalização? Como lidar com esse formalismo no ensino liceal? Vejamos que palavras encontramos sobre este assunto nos textos dos estagiários do LNPN.

> Uma das consequências da crítica dos fundamentos, empreendida no século XIX, foi a tendência, em todos os ramos da matemática, para a formalização. A matemática liberta-se dos conceitos que lhes deram origem, e passa a preocupar-se, exclusivamente com as leis, com as estruturas. (...) Os teoremas não têm (...) uma validade absoluta; são válidos, apenas, relativamente ao conjunto de axiomas do sistema (Vieira, 1960, p. 7).

A estagiária continua a sua exposição afirmando que a "matemática torna-se, assim, no dizer de Sir Bertrand Russel, a ciência onde nunca se sabe de que se fala, nem se o que se diz é verdadeiro" (Vieira, 1960, p. 7).

Jean Piaget (1896-1980), Caleb Gattegno (1911-1988) e Gustave Choquet (1915-2006) são outros autores citados nos trabalhos dos estagiários, mas agora no contexto do ensino da matemática. Estes autores são citados como referências de alerta para os perigos do formalismo e do começar pela axiomatização: "Gattegno declara-se absolutamente contrário a um ensino que, partindo de premissas fornecidas, obrigue o jovem a percorrer vias préviamente traçadas. (...) [A] criança [deve] estruturar o seu pensamento e acumular factos que organizados a leva então ao método axiomático" (Domingues, 1960, p. 16). Outra estagiária, citando também Gattegno, escreve que o método axiomático é um luxo e uma necessidade de comunicação:

> obter tudo por via dedutiva, é um luxo que a Ciência só se permite depois de acumular uma grande quantidade de factos. Deixamos isso para um exame introspectivo tardio na carreira escolar (...) não vemos razões para pedir aos nossos alunos uma forma rígida, antes que o conteúdo seja uma verdadeira tomada de consciência que eles queiram comunicar (Lima, 1958, p. 60).

Na mesma linha do pensamento que defende que não se deve começar por apresentar axiomáticas previamente definidas aos alunos, mas que se deve levá-los a despertar para a sua necessidade, uma outra estagiária refere, sem citar autores, que a ordem didática deve seguir o mesmo sentido da evolução histórica do pensamento matemático:

> o modo mais eficaz para que o aluno penetre na rede de proposições características de uma ciência dedutiva não é apresentá-la já elaborada, mas convidá-lo à sua elaboração. (...) O método postulacional aparecer-lhe-á como condição necessária e não imposta, como resultado duma experiência, seguindo (...) na ordem didáctica a evolução histórica do pensamento matemático (Rodrigues, 1961, p. 10).

Citando Piaget, p. 33 da obra *L´enseignement des mathématiques* de 1955, outra estagiária do ano anterior escreve:

> o fim do ensino das matemática é sempre o de atingir o rigor lógico assim como a compreensão dum formalismo suficiente, mas só a psicologia está em estado de fornecer aos pedagogos os dados sobre a maneira pela qual este rigor e formalismo serão obtidos mais seguramente. (...) Na realidade, se o edifício das matemáticas repousa sobre "estruturas" que correspondem às estruturas da inteligência, é sobre a organização progressiva destas estruturas operatórias que é preciso fundamentar a didáctica matemática (Nogueira, 1960, p. 40).

Ainda uma outra estagiária do mesmo ano da anterior cita Piaget, p. 32 da obra *L´enseignement des mathématiques* de 1955, para alertar

> Contra os perigos de um formalismo iniciado cedo demais, avisa-nos Piaget: "Nada prova que, pondo o formalismo à partida, o encontremos à chegada (...) e os estragos de um pseudo-formalismo ou formalismo que fique verbal, porque muito precoce, mostram, pelo contrário, os perigos de um formalismo que ignore as leis de desenvolvimento mental" (Vieira, 1960, p. 12).

Choquet também é citado, mas só no âmbito do ensino da Geometria.

Axiomáticas e axiomatização na disciplina de Matemática

Várias tentativas foram feitas para a axiomatização da matemática no âmbito do ensino liceal. O que entender por axiomatização? "É um alargar do número de verdades primitivas. O aluno tem que dispor de mais verdades que ele aceita sem demonstrar, porque as sente, porque as aceitou intuitivamente e relativamente às quais não vê necessidade de demonstração" (Bento, 1964, pp. 135-136). Esta afirmação da estagiária assenta no pensamento de Willy Servais (1913-1979), o qual cita:

> Levanta-se agora o problema de saber se aos nossos alunos do liceu (13-16 anos) será lícito apresentar uma cadeia lógica que assente num reduzido número de proposições (...) é absolutamente impossível construir, nesta idade, uma teoria que assente num tão reduzido número de "regras do jogo". Diz Servais: 'Eu não gosto de ouvir falar numa axiomática se se trata de propor ao aluno, como um texto revelado, um sistema de axiomas feito. Prefiro que se faça um pouco de axiomatização'. (Bento, 1964, p. 135)

Três anos antes, outra estagiária também referia as tentativas que têm sido feitas "no sentido de construir uma axiomática acessível a estudantes do ensino médio. Cito como exemplos a apresentada por Severi em 'Elementos de Geometria' e por Puig Adam na 'Geometria Racional'" (Rodrigues, 1961, p. 14). Mas esta estagiária coloca o foco do problema no professor:

> o problema não é essencialmente um problema de compêndio, mas didáctico. É um problema para ser vivido por cada professor no âmbito da sua aula, para ser resolvido na presença viva da turma. O penetrar mais ou menos fundo nestes domínios (...) só o professor pode decidir [tendo de ter] bem presente todas as exigências requeridas para a questão ser rigorosamente tratada. (Rodrigues, 1961, p. 14)

Um erro a evitar perante o aluno é que não o podemos afastar "da observação do concreto, de sua experiência passada e exigirmos que, a partir de um reduzido número de proposições independentes obtenha todo um conjunto de teoremas e corolários" (Rodrigues, 1961, p. 9). De qualquer forma, o caminho encontrado para a introdução das axiomáticas no ensino liceal da Matemática é o mesmo, quer pela M. Rodrigues, quer pela M. Bento, é o caminho da axiomatização, mesmo que se perda a independência dos axiomas, já que a compatibilidade não se pode perder, uma vez que não pode haver lugar a contradições. A primeira continua escrevendo que o abandonar da preocupação da independência dos axiomas, não quer dizer abandonar o rigor lógico na demonstração nem abandonar o definir com precisão e clareza.

Lógica e sua importância

Desde os primeiros anos dos estágios do nosso estudo é referida a importância da introdução da lógica com vista ao bem raciocinar dos alunos: "Não devemos esquecer também a lógica simbólica, pelo auxílio que ela nos pode dar, se quisermos habituar efectivamente os alunos a um modo de pensamento correcto" (Vieira, 1960, p.12). Já nesta altura é referida a imprecisão de sugestões apresentadas ao professor, dando-lhe "grande liberdade (...) para experimentar, para adaptar, tendo em conta o nível mental dos alunos. Uma exigência se impõe, no entanto, com bastante nitidez: a premente necessidade de uma actualização do professor de matemática" (Vieira, 1960, p.12). Ou seja, o professor começa por ter uma grande margem de manobra para explorar o seu ensino ao mesmo tempo que se verifica uma grande falta de formação desses professores.

Distinta do estudo do raciocínio ou da estrutura lógica da argumentação feita pelos filósofos da antiguidade, nomeadamente Aristóteles, a lógica matemática ou lógica simbólica surge em meados do século XIX e é consequência da crítica dos fundamentos da matemática, da axiomatização desta e do apelo e necessidade de maior rigor lógico. Assim também o refere uma estagiária: "Outra consequência desta corrente de axiomatização (...) é a exigência dum maior rigor lógico, objectivo alcançado pelo emprego dos símbolos lógicos que permitem uma maior precisão de linguagem" (M A. Santos, 1967, p. 10) e outra estagiária: "Outra consequência importante da crítica dos fundamentos foi o aparecimento da lógica simbólica, criada no intuito de estabelecer com mais segurança os fundamentos da matemática (...) e desempenha um papel importantíssimo na clarificação do raciocínio matemático" (Vieira, 1960, p. 7). Quando o raciocínio dedutivo e a intuição não conseguem dar resposta a novos problemas, surge a necessidade de reexaminar as "técnicas de dedução" e aposta-se na lógica simbólica "destinada a estabelecer uma correlação íntima e perfeita entre o raciocínio e o meio de expressão" (Martins, 1962, pp. 53-54).

Outra estagiária cita Sebastião e Silva sobre a importância da linguagem da lógica simbólica:

> [seria] de grande interesse que o aluno liceal se habituasse a traduzir, na linguagem da lógica simbólica, proposições (...), assim como problemas (...) a matemática é essencialmente uma linguagem de tipo especial, que como qualquer idioma estrangeiro, se adquire, usando-a e fazendo traduções, assim como retroversões

e refere a boa aceitação dos alunos na utilização de símbolos:

> Não nos parece que os alunos ofereçam muita resistência ao simbolismo: são eles mesmos a pedir símbolos. Perguntam por exemplo: 'como havemos de indicar que duas recas, *r* e *t*, se encontram?' E chegam a achar engraçado marcar três pontinho, em triângulo, em vez de 'portanto' (Nogueira, 1960, p. 38. Referência da citação, no original, "Palestra" n.º 6 (1959) - p. 51).

Até meados dos anos 60 do século XX, a importância da lógica é referida pelos estagiários apenas na vertente de linguagem com utilização de símbolos, não desvendando de onde vem o aumento de rigor ao fazer uso dela. Talvez porque o próprio professor também precisava de tempo de consciencialização e de estudo sobre este assunto:

> Parece-nos, porém, indispensável que o professor tome bem consciência da necessidade de se dedicar, ele próprio, a esse estudo. Daí resultará, certamente, que a própria lógica simbólica se irá, pouco a pouco, desvendando ao aluno, embora indirectamente: por um símbolo que o professor utilizou, porque lhe pareceu mais sugestivo; por uma demonstração, ou um enunciado, que se tornou mais perfeito e mais claro. (Vieira, 1960, p. 12a)

Na verdade, só agora os próprios professores começam a ter formação nesta área do conhecimento matemático. Sebastião e Silva realiza no ano letivo de 1958/59 um curso para professores de Matemática sobre lógica simbólica no Liceu Normal Pedro Nunes: "Disse o Professor Doutor Sebastião e Silva numas lições, que fez no nosso liceu há 6 anos que os professores de Matemática deviam ensinar lógica nos liceus, tão necessária é a aprendizagem daquela ciência. Felizmente já alguns professores têm essa felicidade" (Marques, 1965, p. 9). Parte destas lições foram publicadas na revista *Palestra*, n.º 6, ocupando as páginas do número 3 ao número 65, no ano de 1959. Como escreve uma outra estagiária, o estudo desta "nova lógica — a lógica matemática ou lógica simbólica (...) a sua finalidade é descobrir e formular, com clareza e rigor, as leis do pensamento" (Martins, 1962, p. 53). No texto da sua conferência pedagógica, de 1962, Gomes dedica várias páginas à apresentação de tabelas de verdade (às quais chama tabuadas) das operações lógicas de negação, conjunção, disjunção, implicação e suas propriedades, algumas delas demonstradas à custa de tabelas de verdade. A colega de estágio afirma que os próprios alunos já começavam a sentir vantagens no uso desta simbologia e que "as demonstrações tornam-se mais claras e concisas" (Dias, 1962, p. 27), sem esclarecer a razão. No seu trabalho, esta estagiária expõe sobre tautologias, contradições, leis de De Morgan, funções proposicionais, quantificadores, entre outros.

Só a partir de meados dos anos 60 começam a aparecer exemplos concretos da vantagem do uso da lógica. Uma estagiária prova, com recurso a tabela de verdade, o quanto faz sentido a demonstração por conversão, diz ela:

> Recordemos, por exemplo, as demonstrações pela regra da conversão que os alunos utilizam no 2.º ciclo. A ideia que os alunos têm destas demonstrações pode ter sido apenas motivada por alguns exemplos. Mas agora, por uma

> simples tabela de verdade, pode demonstrar-se a equivalência das implicações (H => T) e (~T => ~H) (Ribeiro, 1966, pp. 7-8).

Um outro estagiário exemplifica e esclarece: "O emprego na ocasião devida de palavras chave, como não – e – ou – algum – todos – existe – etc., deve merecer um cuidado muito especial pois tem grande interesse na boa compreensão de muitas situações. Essas palavras chave merecem símbolos especiais" (Valente, 1965, pp. 6-7, sublinhados no original). Outros exemplos apresentados são "dissecar um teorema em proposições elementares da forma A = > B" ou "Os termos ambíguos são esclarecidos ou eliminados. (...) a palavra "Um" pode, segundo os casos, precisar-se dizendo: Um, pelo menos; Um, quando muito; ou Um e um só" (Rua, 1966, p. 15).

Neste ano, uma outra estagiária relata como foi introduzida a lógica na sua turma:

> Inicialmente apresentamos os assuntos a estudar com exemplos concretos do mundo real. A generalização e a abstracção virão a seguir quase espontâneamente. (...) começamos o nosso programa por um estudo de Lógica em termos de proposições e em termos de condições. Depois deste capítulo, os alunos ficam esclarecidos sobre o rigor dos métodos de demostração, já usados no 2.º ciclo, mas sem possibilidade de serem compreendidos completamente. Não nos interessa demonstrar muitos teoremas; interessa-nos especialmente fazer compreender os métodos e o rigor usados. (Leitão, 1966, pp. 10-11)

Até aqui: "A lógica referida é a Lógica Matemática que é no fundo uma álgebra de proposições e de condições que toma como axiomas os princípios da não contradição e do terceiro excluído da lógica bivalente de Aristóteles" (Marques, 1965, p. 9). E até aqui só são referidas as vantagens da sua utilização. Mas esta lógica tem as suas limitações, que só aparecem referidas, em 1967, por meio de duas estagiárias: "os dois princípios fundamentais da lógica bivalente: o princípio de não contradição e o princípio do 3.º excluído, não têm uma rigidez absoluta (...) A todo o momento fazemos afirmações que são aproximadamente verdadeiras, sem que o sejam rigorosamente" (M. I. Santos, 1967, p. 14). A outra estagiária refere: "Analisando a proposição "Faro está próximo de Lisboa" vemos que é verdadeira para alguém que vive no Brasil, mas é falsa, para quem gosta das praias algarvias, e vive em Lisboa. O que acontece é que a proposição não é verdadeira nem falsa" (M. A. Santos, 1967, p. 25). No entanto, diz a estagiária, os alunos das turmas experimentais estudaram lógica matemática, aprenderam com facilidade e gostaram. Para justificar esta afirmação, refere que nos "seis períodos (3 do 6.º ano e 3 do 7º ano) é em geral a [nota] do 1.º período do 6.º ano — época em que estudam a lógica — a mais elevada" (M. A. Santos, 1967, p. 25).

Considerações Finais

No período em estudo a sociedades trouxe novos desafios para a matemática e para o seu ensino. Encontrámos vários registos dessa mudança nos trabalhos dos estagiários do Liceu Normal de Pedro Nunes. Nesta análise, observámos reflexões coletivas sobre a crítica dos fundamentos da matemática e ecos no ensino da Matemática liceal. Vimos que a aparente necessidade de maior formalismo no ensino foi acompanhada de uma grande preocupação por parte de vários atores do sistema educativo para não a desadequar do seu público alvo, os alunos. Apareceu a sugestão de manter tão próximo quanto possível a ordem didática da evolução histórica do pensamento matemático. Foi tido como aceitável a perda da independência dos axiomas adotados, sobrepondo-se a pedagogia ao desejo da cientificidade. Deram-se exemplos para mostrar que a introdução da lógica no ensino liceal pode ajudar a aperfeiçoar o raciocínio e a sua forma de expressão. E se é claro que houve mudanças, também é claro que houve muitas dúvidas na forma de as implementar e que os próprios professores/estagiários estavam a aprender assuntos ao mesmo tempo que tinham de lidar com eles dentro da sala de aula. Mesmo assim, foi feito um balanço positivo por quem viveu estas reformas e escreveu estes textos.

Referências bibliográficas

Bento, M. (1964). Como Orientar o Estudo da Geometria Sintética Elementar, à Margem dos Actuais Programas, nos Ensinos Pré-Liceal e Liceal?. *Palestra*, n.º 20, pp. 126-140.

Burke, P. (1992). A revolução francesa da historiografia: A Escola dos Annales (1929-1989). São Paulo: UNESP.

Chartier, R. (1994). A história hoje: dúvidas, desafios, propostas. *Estudos Históricos*, vol. 7, n.º 13, pp. 97-113.

Chervel, A. (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação*, n.º 2, pp. 177-229.

Frago, A. V. (2001/2007). *Sistemas educativos, culturas escolares e reformas*. Mangualde: Edições Pedago, Lda.

Dias, M. (1962). *Linha de Rumo do Aprendizado da Matemática Elementar: o Trabalho de Equipa, o Modelo, os Princípios de Lógica Matemática e de Álgebra dos Conjuntos*. Retirado do arquivo do LNPN (Não catalogado).

Domingues, M. (1960). *Influência da Crítica dos Fundamentos e do Material Moderno de Ensino na Estruturação e Aprendizagem da Matemática Elementar*. Retirado do arquivo do LNPN (Não catalogado).

Dosse, F. (2001). *História à prova do tempo: Da história em migalhas ao resgate do sentido*. São Paulo: UNESP.

Gomes, A. (1962). *Linha de Rumo do Aprendizado da Matemática Elementar: o Trabalho de Equipa, o Modelo, os Princípios de Lógica Matemática e de Álgebra dos Conjuntos*. Retirado do arquivo do LNPN (Não catalogado).

Julia, D. (2001). A Cultura Escolar como Objecto Histórico. *Revista Brasileira de História da Educação, Jan./Jun.*(1), pp. 9-43.

Kenny, A. (1999). *História Concisa da Filosofia Ocidental*. Lisboa: Temas & Debates.

Leitão, M. (1966). *Algumas considerações sobre o 6.º ano de Matemática das turmas experimentais: conteúdos, métodos de ensino, relacionação com outras disciplinas do curriculum escolar, influência na formação humana do aluno.* Retirado do arquivo do LNPN (Não catalogado).

Lima, I. (1958). O Ensino da Matemática Elementar: Finalidade, Conteúdo e Didática. *Palestra,* n.º 3*,* pp. 58-74.

Marques, J. (1965). *Intersecção da Matemática Moderna com a Álgebra elementar, exemplificada com situações sugeridas pelo programa do 2o ciclo e pelo programa experimental do 3.º ciclo.* Retirado do arquivo do LNPN (Não catalogado).

Martins, M. (1962). Linha de Rumo do Aprendizado da Matemática Elementar: o Trabalho de Equipa, o Modelo, os Princípios de Lógica Matemática e de Álgebra dos Conjuntos. *Palestra*, n.º 15, pp. 48-71.

Matos, J. M. (1989). *Cronologia recente do ensino da Matemática*. Lisboa: APM.

Matos, J. M. (2006). História do Ensino da Matemática em Portugal: constituição de um campo de investigação. *Revista Diálogo Educacional*, vol. 6, n.º 18, pp. 11-18.

Monteiro, T. M. (2011). *Notas sobre a formação de professores no Liceu Normal de Pedro Nunes (1957-1971).* Artigo apresentado no XI Congresso SPCE, Guarda.

Moon, B. (1986). *The "New Maths" curriculum controversy. An internacional story*. Londres: Falmer Press.

Nogueira, M. (1960). Influência da Crítica dos Fundamentos e do Material Moderno de Ensino na Estruturação e Aprendizagem da Matemática Elementar. *Palestra*, n.º 12, pp. 32-53.

Pais, M. (1963). A estrutura actual da aritmética e da geometria no grau secundário elementar. a) A articulação com o grau primário. b) A intersecção com a matemática moderna. c) Os métodos de ensino. *Palestra*, n.º 17, pp. 107-125.

Ribeiro, M. (1966). *Algumas considerações sobre o 6.º ano de Matemática das turmas experimentais: conteúdos, métodos de ensino, relacionação com outras disciplinas do curriculum escolar, influência na formação humana do aluno.* Retirado do arquivo do LNPN (Não catalogado).

Rodrigues, M. (1961). *A Didática Actual da Matemática no 2.º Ciclo Liceal: Preocupação de Rigor Lógico; Movimento e Percepção.* Retirado do arquivo do LNPN (Não catalogado).

Rua, M. (1966). *Algumas considerações sobre o 6.º ano de Matemática das turmas experimentais: conteúdos, métodos de ensino, relacionação com outras disciplinas do curriculum escolar, influência na formação humana do aluno*. Retirado do arquivo do LNPN (Não catalogado).

Santos, M. A. (1967). *O 7.º ano de matemática das turmas experimentais: alguns conteúdos e respectivas didácticas. Contribuição deste programa para uma nova estrutura da geometria liceal.* Retirado do arquivo do LNPN (Não catalogado).

Santos, M. I. (1967). *O 7.º ano de matemática das turmas experimentais: alguns conteúdos e respectivas didácticas. Contribuição deste programa para uma nova estrutura da geometria liceal.* Retirado do arquivo do LNPN (Não catalogado).

Valente, A. (1965). *Intersecção da Matemática Moderna com a Álgebra elementar, exemplificada com situações sugeridas pelo programa do 2o ciclo e pelo programa experimental do 3.º ciclo.* Retirado do arquivo do LNPN (Não catalogado).

Viegas, M. (1960). *Influência da Crítica dos Fundamentos e do Material Moderno de Ensino na Estruturação e Aprendizagem da Matemática Elementar*. Retirado do arquivo do LNPN (Não catalogado).

Vieira, L. (1960). *Influência da Crítica dos Fundamentos e do Material Moderno de Ensino na Estruturação e Aprendizagem da Matemática Elementar*. Retirado do arquivo do LNPN (Não catalogado).

A utilidade do cálculo diferencial/integral na construção e estudo de modelos em contexto escolar

Catarina Lucas[1], Josep Gascón[2], Cecilio Fonseca[3], José Casas[4]

[1]Instituto Politécnico do Porto (ESE-IPP, ESTSP-IPP), *catarinalucas.mail@gmail.com*
[2]Universitat Autònoma de Barcelona, *gascon@mat.uab.cat*
[3]Universidad de Vigo, *cfonseca@uvigo.es*
[4]Universidad de Vigo, *jmcasas@uvigo.es*

Resumo. *Este trabalho foi desenvolvido segundo a teoria antropológica do didático (TAD) e apresenta uma proposta de uma razão de ser distinta da razão habitualmente atribuída ao estudo do cálculo diferencial e integral no âmbito de atividades de modelação funcional no início do ensino universitário português. Tal proposta foi materializada mediante a construção de um modelo epistemológico de referência que utiliza a modelação como um instrumento para articular e dar sentido ao estudo do cálculo diferencial e integral (com funções de uma única variável). Este modelo serviu de base para desenhar e experimentar diferentes percursos de estudo e investigação com estudantes do primeiro ano da licenciatura de Medicina Nuclear.*

Palavras-chave: *modelo epistemológico de referência; modelação; cálculo diferencial e integral; teoria antropológica do didático (TAD).*

Abstract. *This work was carried out according to the anthropological theory of the didactic (ATD) and presents a proposal for a different reason from the reason usually given to the study of differential and integral calculus in the context of functional modelling activities at the beginning of the Portuguese university. This proposal was materialized through the construction of a reference epistemological model that uses modelling as a tool to articulate and give meaning to the study of differential and integral calculus (with functions of a single variable). This model was the basis for design and experiment several study and research paths with students in the first year of the degree of Nuclear Medicine.*

Keywords: *reference epistemological model; integral and differential calculus; modelling; anthropological theory of the didactical (TAD).*

A Teoria Antropológica do Didático

Situamo-nos no marco da *Teoria Antropológica do Didático* (TAD) que foi iniciada pelo investigador francês Yves Chevallard nos anos 80 do século XX. Nesta teoria o objeto primário de investigação reside na análise da atividade matemática escolar com as suas relações humanas enquadradas numa determinada instituição[1] ou instituições.

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 63–76

Assim, em vez de formular os problemas didáticos em termos do que fazer para que uma determinada noção, atividade ou problemática possa ser ensinada ou assimilada de forma mais eficaz, e de procurar estratégias para superar as dificuldades que surgem no processo de ensino-aprendizagem, a TAD investiga:

- As *condições* que permitem, facilitam ou favorecem o desenvolvimento de determinadas atividades didático-matemáticas numa dada instituição;
- As *restrições* que dificultam, entorpeçam ou, inclusivamente, impedem que se pratique essas atividades.

Por outras palavras, com a TAD pretendemos descobrir quais são os obstáculos ou imposições (como, por exemplo: o tempo de aula, o número de alunos ou a extensão dos programas, a estrutura e dinâmica da matemática escolar) que teremos que ultrapassar para *fazer viver* as atividades didáticas numa determinada instituição. Este tipo de pesquisa e reflexão *a priori* poderá permitir que o trabalho árduo da construção sucessiva de novas, criativas, motivadoras e cativantes atividades didático-matemáticas seja útil, possível e realizável em sala de aula e que não seja apenas um trabalho utópico.

Em termos gerais, podemos afirmar que em qualquer problema didático intervêm, pelo menos, três componentes fundamentais:

1. Uma *instituição* didática onde se formula o problema em questão (por exemplo: o sistema de ensino universitário);
2. Um *conteúdo* matemático específico (por exemplo: a atividade matemática relativa ao estudo do cálculo diferencial elementar);
3. Uma organização didática do *processo de estudo* relativo ao conteúdo matemático (que deverá materializar-se num conjunto de dispositivos didáticos e de gestos de estudo).

> Lo didáctico deja de ser exclusivo del proceso de enseñanza-aprendizaje para referirse a cualquiera de los aspectos del proceso de estudio. La didáctica de las matemáticas se convierte, en definitiva, en la ciencia del estudio y de la ayuda al estudio de las matemáticas. (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997, p.76)

Nos últimos anos têm surgido diversas investigações, teses e projetos desenvolvidos no âmbito desta teoria, em particular, salientamos as teses mais recentes de Barquero (2009), de Ruiz-Munzón (2010) e de Serrano (2013) por terem uma íntima relação com a investigação que se desenvolve neste estudo.

A noção de praxeologia matemática

Com o objetivo de modelar a atividade matemática, em meados dos anos 90, Chevallard introduziu a noção de *praxeologia* ou *organização matemática* (PM ou OM) que atualmente representa um dos pontos-chave da Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1996, 1999, 2002a e 2002b). Uma praxeologia (*praxis*+*logos*) permite considerar em simultâneo e, atribuindo-lhes uma importância equivalente, tanto a dimensão teórica como a dimensão prática do saber. Assim, considera-se a praxeologia como a unidade mínima que pode descrever a atividade matemática traduzida em duas vertentes que devem coexistir de forma indissociável e articulável:

- A *praxis* (a *prática* ou o "*saber fazer*") engloba as *tarefas* propostas e as *técnicas* utilizadas para as resolver;
- O *logos* (a *teoria* ou o "*saber*") envolve os discursos que descrevem, explicam e justificam as técnicas usadas. Esses discursos designam-se por *tecnologias* que, por sua vez, são descritas e justificadas pelas *teorias*.

Resumindo, uma praxeologia é um sistema formado por quatro componentes, divididas em dois blocos, como sugere a tabela seguinte:

Tabela 1.
Componentes de uma praxeologia ou organização matemática

Componentes	**Bloco**	
Tarefa	Prático-técnico	Saber fazer
Técnica		
Tecnologia	Tecnológico-teórico	Saber
Teoria		

Habitualmente uma instituição reconhece apenas, em relação a um certo tipo de tarefa, uma técnica privilegiada, e exclui outras técnicas alternativas que podem existir noutras instituições. Em contrapartida, uma técnica deverá surgir, numa determinada instituição, como um procedimento percetível e cuja utilidade esteja bem justificada por alguma tecnologia. Ou seja, se a presença de uma técnica não for realmente imprescindível numa instituição, então não fará qualquer sentido a sua existência ou permanência na mesma.

Uma tecnologia associada a uma técnica deverá ser constituída pelas proposições que descrevem o seu alcance, a sua relação com as outras técnicas, as possíveis generalizações e as causas das suas limitações que conduzem um processo de criação de novas técnicas. O que significa que uma tecnologia deverá ser a resposta a um amplo conjunto de questões relativas à funcionalidade e eficácia de uma técnica. Para justificar a utilização dessas mesmas tecnologias, que permitem mostrar a razão de ser de uma certa técnica numa instituição, teremos de recorrer à designada teoria. Assim sendo, defendemos que é essencial a existência desta ligação entre as quatro componentes de uma praxeologia matemática, para que o bloco prático-técnico não viva isolado do bloco tecnológico-teórico ou do "discurso racional" que possa mostrar a pertinência de trabalhar com um certo tipo de tarefas.

O fenómeno didático da rigidez e atomização das praxeologias matemáticas

Postulamos que, uma grande parte das praxeologias matemáticas (PM) que são habitualmente estudadas no ensino secundário e universitário perdeu a sua *razão de ser* (ou seja, desapareceram dessa instituição escolar as questões às quais ditas PM poderiam vir a dar resposta) e, consequentemente, o seu estudo na citada instituição deixou de fazer *sentido*. Mais recentemente, têm emergido investigações, apoiadas na TAD, cujo principal objetivo reside em criar possíveis *razões de ser* das PM, de tal forma que seja exequível responder a certas questões, como por exemplo: Que razões históricas motivaram a construção de uma determinada PM? Que problemas a PM vem resolver que as PMs estudadas anteriormente não permitiam?

Como possível resposta ao problema de *desarticulação,* Gascón (2004) propôs a integração das razões de ser das praxeologias matemáticas nos programas oficiais sob a forma de questões geratrizes do processo de estudo das PMs, em vez de surgirem como meros *elementos decorativos*.

A tese de Fonseca (2004) revela a atomização das organizações matemáticas e a rigidez no tipo de tarefas e técnicas que os estudantes utilizam no sistema de ensino espanhol, mostrando a ausência escolar do *questionamento tecnológico* das técnicas matemáticas, ou seja, a ausência institucional de uma análise do custo, da fiabilidade e do domínio de validade das diferentes técnicas úteis para executar uma tarefa, que poderia permitir flexibilizar a atividade matemática escolar (Fonseca, 2004; Bosch, Fonseca & Gascón, 2004).

Alguns anos mais tarde, em 2010, e com a finalidade de avaliar a rigidez e a atomização das praxeologias matemáticas escolares no ensino secundário e universitário ibérico foram definidas conjeturas à luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD) e estudada empiricamente a veracidade dessas hipóteses nos sistemas educativos português e espanhol. Esse estudo empírico consistiu na aplicação de um questionário constituído quer por tarefas habituais, quer por tarefas menos usuais às duas amostras de estudantes. A análise e a avaliação dos resultados permitiram concluir, por um lado, que existe um fenómeno didático que se manifesta na elevada fragmentação das tarefas que habitualmente são propostas aos estudantes, falta de conexão entre os conteúdos, inexistência de questionamento e de justificação das técnicas utilizadas (Lucas, 2010; Lucas, Fonseca, Gascón & Casas, 2014). Por outro lado, as citadas investigações pretendem suportar empiricamente que a rigidez e a atomização das matemáticas escolares constituem um *fenómeno didático de caráter institucional* (e não pessoal), relativamente independente das características pessoais dos sujeitos do processo didático (alunos e professores) e, até mesmo, das culturas pedagógicas nas quais eles estão imersos. As conclusões deste estudo sugerem a necessidade de que sejam as próprias instituições educacionais a reconstruir e a completar as praxeologias matemáticas, permitindo assim flexibilizar e integrar as praxeologias estudadas nos diferentes níveis de ensino.

Da necessidade de flexibilidade às atividades de modelação

O fenómeno da rigidez e as suas diferentes manifestações têm sido estudados por diferentes teorias didáticas segundo uma abordagem cognitiva, utilizando a noção de atividade matemática *flexível*, autónoma e aberta (em oposição a *rígida*, dirigida e rotineira). No âmbito destas abordagens, a origem do problema reside na constatação das *dificuldades*, *contradições*, *confusões*, *obstáculos cognitivos* e, em geral, *fenómenos* que aparecem na transição do *Elementary Mathematical Thinking* (EMT) ao *Advanced Mathematical Thinking* (AMT). No início da década de 90, do século passado, alguns estudos revelaram que essa transição não poderia ser explicada exclusivamente por dificuldades na *aprendizagem formal de conceitos* matemáticos, mas que se deveria enfatizar especialmente o *novo tipo de raciocínio matemático* associado. A noção de *pensamento matemático flexível* pode ser descrita a partir de noções mais primitivas que Tall (1996) tomou originalmente de Piaget (1972) e de trabalhos que interpretam a obra deste, como os de Dubinsky (1991) e Sfard (1991).

Relativamente a este problema, Silva, Veloso, Porfírio e Abrantes (1999) referiram que a aprendizagem da Matemática deveria incluir oportunidades para os alunos se envolverem em momentos genuínos de atividade matemática. Salientaram que as investigações matemáticas deveriam merecer um lugar de destaque, uma vez que: por um lado permitem a formulação de conjeturas, a avaliação da sua plausibilidade e a escolha dos testes adequados para a sua validação ou rejeição; e, por outro lado, permitem procurar argumentos que demonstrem as conjeturas que resistiram a sucessivos testes e levantar novas questões para investigar. Assim, propuseram a criação de um contexto de aula propício ao diálogo, em que o professor lança boas questões para trabalho prático com informação mínima e em que, após alguma discussão, os alunos partem para formas de trabalho de tipo exploratório, formulação de problemas, investigações ou pequenos projetos que o professor acompanha e incentiva, assumindo, num momento posterior, a coordenação da sistematização do trabalho desenvolvido e/ou da formalização de aspetos matemáticos inerentes. Os referidos autores realçaram também que a visão tradicional de uma *matemática rígida,* na qual as definições têm um carácter absoluto, aparece oposta àquela que as tarefas de investigação, se aceites com as suas características próprias, podem veicular.

De acordo com João Pedro da Ponte e João Filipe Matos, consideramos (e mostraremos que esta afirmação se pode sustentar empiricamente) que muitas das dificuldades que apresentam os alunos para trabalhar com *tarefas de investigação* e, em particular, para levantar questões pertinentes no desenvolvimento de tais tarefas, provêm do caráter formal da Matemática escolar e da forma como esta está organizada, pois "[...] ensinam-se 'respostas' sem dar a mínima importância às 'questões' que as originam ou à forma como foram alcançadas" (Ponte & Matos, 1996, p. 123). Para estes autores, a forma como os alunos concebem as *representações* e *notações matemáticas* adequadas às situações ou fenómenos que lhes são apresentados é um elemento fundamental para a realização de investigações. Muitas vezes, os alunos manifestam ter dificuldade em conceber alguma representação, não concebem as mais adequadas, ou *saltitam* entre diferentes representações, o que lhes cria sérias dificuldades na realização das tarefas propostas.

No mesmo sentido, Artigue (1998) considerou que a *flexibilidade* na utilização de *diversos registros de representações* (gráficos, simbólicos, linguagem natural, gestual, etc.), bem como, a *flexibilidade* na articulação sistemática de *diferentes interpretações do mesmo objeto matemático* são condições essenciais para desenvolver uma atividade matemática genuína. As instituições educativas deveriam ter, sob a sua responsabilidade, o trabalho de possibilitar e capacitar a articulação de vários registros de representação e as diferentes interpretações dos objetos matemáticos, uma vez que, quando esta articulação é deixada para o trabalho privado do aluno, as possibilidades de insucesso são elevadas. Em particular, Artigue afirmou, segundo Tall (1996), que a tecnologia da informação, se usada adequadamente, pode desempenhar um papel decisivo no desenvolvimento de articulações flexíveis e no equilíbrio entre registros algébricos e gráficos.

No entanto, ressalta-se que ao existir, paralelamente à flexibilidade a nível das tarefas propostas, a integração de um questionamento tecnológico na atividade matemática, as próprias técnicas podem ser tomadas como objeto de estudo, os problemas matemáticos podem utilizar-se como um *meio* para colocar em causa a *economia, a eficácia, a fiabilidade* e o *âmbito de aplicação* das técnicas matemáticas.

Habitualmente, o ensino da Matemática e, em particular, o ensino do Cálculo Diferencial e Integral surge primeiramente com uma apresentação teórica descritiva por parte do professor à qual se segue uma sequência de inúmeras tarefas isoladas e pontuais. Esta pontualidade ao nível das tarefas conduz à aquisição de conhecimentos pontuais por parte dos estudantes, uma vez que, a resolução destas tarefas consiste basicamente em aplicar uma técnica predeterminada (para um certo tipo de problemas) e em que raramente é questionada a necessidade de justificar a sua utilização ou de descobrir o seu domínio de validade. Para resolver este problema, a TAD sugere a introdução de um trabalho prolongado de *modelação* de *situações matemáticas* ou *extra-matemáticas* capazes de gerar o desenvolvimento de novas técnicas pelos estudantes na atividade matemática escolar (Lucas, 2015).

No entanto, o fenómeno da rigidez e consequente atomização das PM escolares descrito anteriormente tem como principal consequência a escassa presença da atividade de modelação matemática nas diferentes instituições escolares e, mais ainda, no ensino universitário.

Dada a importância de ensinar as matemáticas como ferramenta de modelação, tal como tem sido destacado por inúmeras pesquisas em educação matemática (Kaiser, Blomhøj & Sriraman, 2006; Blum, Galbraith, Henn & Niss, 2008), é essencial descrever claramente as condições necessárias para que este tipo de atividade matemática possa viver com normalidade numa determinada instituição, assim como, as restrições que atualmente a tornam difícil e até mesmo a impedem.

Percursos de estudo e investigação

Com base na análise de tais restrições e como resposta a este problema de grande alcance, que poderíamos designar por *problema didático da difusão escolar da modelação matemática*, pesquisas recentes no âmbito da TAD propuseram a utilização de um novo dispositivo didático, os *percursos de estudo e investigação (PEI)* (Chevallard, 2005) para introduzir em sala de aula os processos de modelação. Considera-se que um PEI vem gerado pelo estudo de uma questão viva com um forte poder gerador, capaz de levantar um grande número de *questões derivadas*. O estudo destas questões conduz à construção, pela comunidade do estudo, das *respostas provisórias* que irão demarcar o mapa dos possíveis percursos e os seus limites. Os PEI recuperam assim, a verdadeira relação entre perguntas e respostas (dando prioridade às questões) que está na origem da construção de todo o conhecimento científico.

De entre as funções dos PEI relacionadas com a implantação das condições necessárias para que a modelação matemática possa viver normalmente nas instituições escolares, destacamos as seguintes: (a) os PEI possibilitam que o processo de estudo tenha uma certa continuidade no tempo e rompa com a *atomização* das questões matemáticas, e (b) os PEI situam o *questionamento tecnológico* como um motor do processo de estudo ao provocar a necessidade de reestruturar, modificar, corrigir e interpretar os modelos estudados mediante a progressiva ampliação das hipóteses sobre o sistema e a correlativa construção de outros modelos mais amplos e complexos.

Por tudo isto, os PEI constituem um dispositivo didático eficaz para começar a superar o fenómeno da *rigidez* e a *atomização* da matemática escolar, instaurando assim as condições mínimas para viabilizar a modelação matemática.

Criação de um modelo epistemológico de referência

Definição de cálculo diferencial elementar

Dada a grande amplitude do estudo do Cálculo Diferencial, surgiu a necessidade de focar a presente investigação numa das suas partes. Para tal focagem, em Lucas (2015) considerou-se um recorte do extenso domínio do Cálculo tomando apenas o estudo das derivadas, primitivas e integrais de funções que dependem de uma única variável, ou seja, o Cálculo estudado no ensino secundário e, habitualmente, no primeiro trimestre/semestre dos cursos universitários que envolvem uma componente matemática. Este recorte do âmbito de estudo foi designado por *cálculo diferencial elementar (CDE)*.

Assim, em particular, na experiência de ensino levada a cabo em Lucas (2015) tomou-se como exemplo e ponto de partida o programa oficial de Biomatemática habitualmente utilizado numa Unidade Curricular do 1.º ano da Licenciatura de Medicina Nuclear do ensino superior português:

Tabela 2.
Programa de Biomatemática em Ciências Biomédicas e das Radiações I 2013/2014

0. Biomatemática e Medicina Nuclear
1. Revisões de Conceitos
2. Derivadas para funções de uma variável
2.1 Derivada de uma função e diferenciabilidade
2.2 Derivadas de ordem superior
2.3 Regras de derivação
2.4 Teoremas sobre o valor médio
2.5 Aplicações sobre derivadas
3 Cálculo Integral
3.1 Primitivação e Integração
3.2 Métodos de Primitivação (Primitivas Imediatas; Método por Partes e por Substituição)
3.3 Integral definido
3.4 Propriedades do integral definido
3.5 Aplicações dos integrais

Para aplicar uma nova metodologia didática que envolvesse e articulasse atividades de *modelação funcional* e que, desse modo, permitisse efetuar um estudo mais rico e amplo do cálculo diferencial elementar, surgiu a necessidade de introduzir algumas noções relacionadas com a modelação e um certo tipo de linguagem menos habitual para os estudantes. Por exemplo, surgiu a necessidade de utilizar os seguintes termos: caracterização de um sistema; eleição de variáveis; construção de um modelo funcional (função que descreve um sistema); questionamento tecnológico (comparação de técnicas, eleição da mais económica); interpretação dos resultados no contexto do sistema; ampliação da atividade matemática; etc.

Definição de modelação funcional

Um processo de modelação funcional pode ser caracterizado por *quatro estados*:

- 1.º estado - todo o processo de estudo parte necessariamente de um conjunto de questões problemáticas sobre um sistema inicial não muito precisas mas suficientemente ricas para gerar questões derivadas capazes de guiar o processo de estudo por diferentes percursos. Por exemplo: *Como poderemos prever o desenvolvimento de uma epidemia?* A delimitação ou «construção do sistema» consiste na eleição de certos aspetos do mesmo que se simbolizam mediante *variáveis* e que, postulamos, são as pertinentes para construir um modelo funcional útil para responder às questões (por exemplo, considerar a variável independente como o tempo). Neste primeiro estado formulam-se as primeiras hipóteses sobre o sistema relativas a alguns aspetos das relações entre as variáveis elegidas para construir o modelo funcional;

- 2.º estado – caracterização dos dados em *contínuos* (relações entre variáveis representadas por uma condição sobre os dados ou por uma descrição verbal dessa relação) ou em dados *discretos* (condições sobre a variação dos dados). Mediante a relação deduzida passa-se à *construção do modelo algébrico-funcional discreto/continuo*. Caso se encontre vários modelos possíveis para descrever o sistema *compara-se o ajuste aos dados e a capacidade preditiva dos vários modelos funcionais* construídos para *eleger o que mais se adequa ao sistema;*
- 3.º estado – o desenvolvimento do *trabalho dentro do modelo* previamente construído para responder às questões problemáticas iniciais (Q_0) apresenta diferentes aspetos como, por exemplo o *estudo da evolução do modelo*, em particular, o estudo e interpretação da monotonia e extremos, intervalos de concavidade e pontos de inflexão, zeros e sinais, assíntotas, limites, paridade, etc. No estudo do comportamento do modelo a longo prazo pode-se *interpretar a influência dos parâmetros na forma gráfica* do modelo e, consequentemente, os valores extremos e o valor para o qual o modelo se aproxima (estudo do comportamento assintótico). Por fim, é importante *interpretar os resultados do* trabalho do modelo funcional *em termos do sistema,* pois poderá acontecer que estes mesmos resultados não correspondam a valores válidos no próprio sistema.
- 4.º estado – a explicação de algumas das *novas questões problemáticas* que aparecem ao longo deste trabalho e que requerem *novas hipóteses e novas variáveis*, pelo que dão origem a um *novo sistema* e que, em definitivo, requerem de um *novo processo* de modelação funcional para ser respondidas. Pode acontecer que as novas questões problemáticas façam referência ao próprio modelo, neste caso diremos que «o modelo libertou-se do sistema inicial» e que passou a jogar o papel de um novo sistema, colocando assim de manifesto o carácter recursivo do processo de modelação matemática. Por exemplo, a

necessidade de trabalhar com famílias de funções com um ou mais parâmetros, ou seja, novos modelos funcionais (Fonseca, Gascón & Lucas, 2014).

Articulação do estudo do cálculo diferencial elementar e a atividade de modelação funcional

De forma a articular estes dois conceitos e perceber a relação entre eles, no sentido em que uma possível razão de ser do estudo do cálculo diferencial elementar no ensino universitário possa surgir no âmbito da resolução de atividades/problemas de modelação funcional, foi construído o seguinte diagrama de atividade:

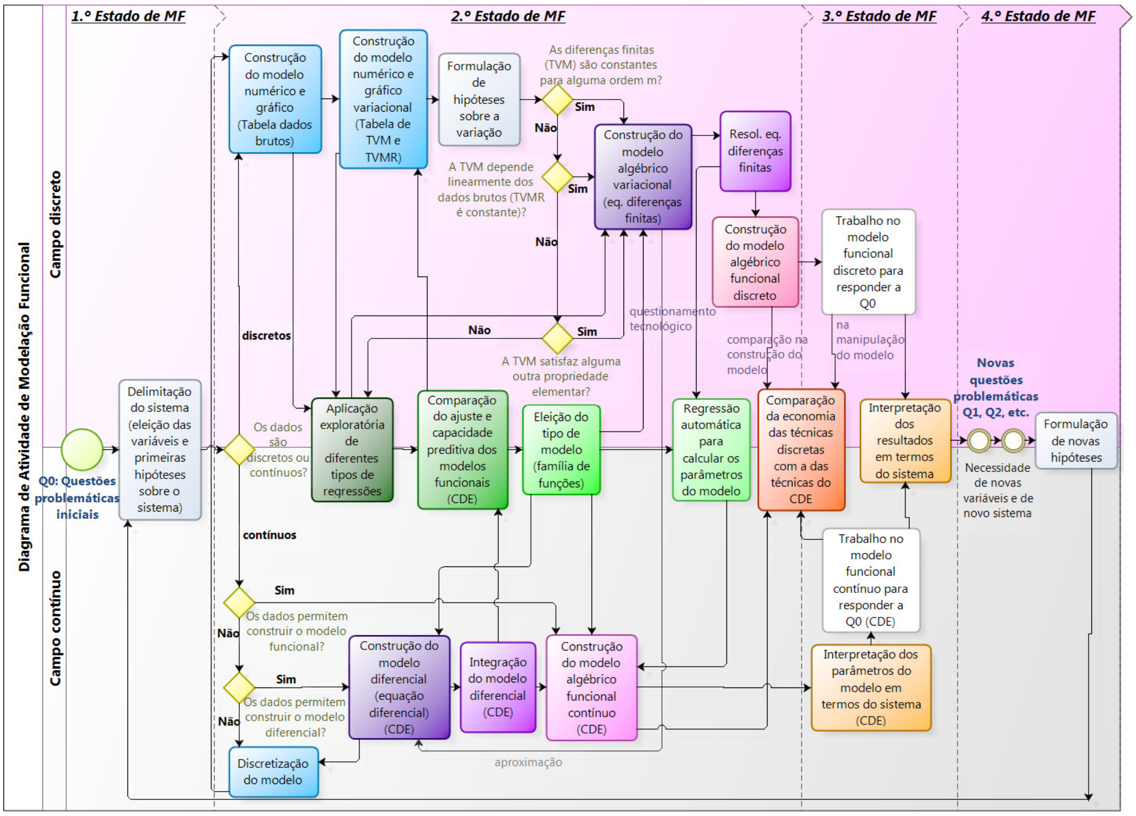


Figura 1. Diagrama de atividade de modelação funcional (Lucas, 2015).

Este *diagrama de atividade*[2] representa um mapa de possíveis atividades matemáticas que podem ser desenvolvidas de forma articulada (existe alguma dependência entre as tarefas/atividades), flexível (de acordo com os objetivos programáticos é possível usar todos os percursos ou apenas alguns) e ilimitada (no sentido de existir sempre a possibilidade de ampliar a atividade e iniciar um novo processo de modelação funcional).

Dado o vasto âmbito de aplicabilidade deste diagrama de atividade de modelação funcional, designamos por *modelo epistemológico de referência* para o estudo do

Cálculo, uma vez que, por exemplo, poderá ser utilizado para construir diferentes tipos de funções (ou mesmo sucessões) a partir do conhecimento da sua variação no ensino secundário, ou utilizado para guiar a resolução de problemas de otimização, ou mesmo, utilizado para construir e resolver equações diferenciais (por integração direta) no ensino universitário.

Conclusão

Acreditamos que mais do que o saber científico, o aluno universitário deve aprender a adaptar-se a novos desafios/tarefas que possam surgir no seu futuro profissional, a responder a questões colocadas de forma diferente da habitual, a ampliar as situações problemáticas, a questionar e a estabelecer conjeturas que lhe permitam solucionar um determinado problema proposto. Para tal, cremos que é necessário que o aluno trabalhe com uma matemática mais flexível, aberta, articulada e mais justificada do que a que vive atualmente na instituição escolar correspondente ao ensino superior.

Notas

[1] A escola primária, a escola secundária, a universidade, um domínio profissional determinado ou a sociedade em geral.

[2] O diagrama está dividido em dois grandes campos: o discreto e o contínuo. Assim, quando uma determinada atividade (ou tipo de tarefas) está situada sobre a linha equatorial significa que esta poderá

Referências Bibliográficas

Artigue, M. (1998). De la compréhension des processus d'apprentissage a la conception de processus d'enseignement, *Documenta Mathematica*. Bielefeld (Germany). Extra Volume ICM, III, p. 723-733.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas.* (Tesis doctoral). Departamento de Matemática. Universitat Autònoma de Barcelona.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W., & Niss, M. (2008). Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study. New ICMI Study Series Volume 10. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *40*(2), 337-340.

Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 24*(2-3), 205-250.

Chevallard, Y. (1996). La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique. In R. Noirfalise & M-J. Perrin-Glorian (coord.), *Actes de l'École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 83-122). Saint-Sauves d'Auvergne.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2002a). Organiser l'étude 1. Structures et fonctions. In Dorier J.-L. *et al.* (Eds.) *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2002b). Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation**.** In Dorier, J.-L. *et al.* (Eds.) *Actes de la 11[e] École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire. In C. Ducourtioux, & P. L. Hennequin (Eds.). *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire.* Publications de l'APMEP (pp. 239-263). Paris: APMEP.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje,* Barcelona: ICE/Horsori. (Existe tradução em português: *Estudar Matemáticas. O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem,* Porto Alegre, Brasil, Artmed Editora, 2001).

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In David Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking (*pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad.* (Tesis doctoral). Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo, Vigo.

Fonseca Bon, C., Gascón Pérez, J., & Oliveira Lucas, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(3), 289-318. Recuperado http://148.215.2.11/articulo.oa?id=33532494003

Gascón, J. (2004). *El problema de la articulación del currículo de matemáticas.* Curso de doctorado, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona (inédito).

Kaiser, G.; Blomhøj, M.; Sriraman, B. (2006). A brief survey of the state of mathematical modeling around the world. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 38*(3), 212-213.

Lucas, C. (2010). *Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas.* Tesina (Diploma de Estudios Avanzados: Programa Doctoral de Técnicas Matemáticas Avanzadas y sus Aplicaciones). Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo, Vigo.

Lucas, C. (2015). *Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional*. (Tesis doctoral). Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Vigo, España. http://www.atd-tad.org/documentos/una-posible-razon-de-ser-del-calculo-diferencial-elemental-en-el-ambito-de-la-modelizacion-funcional/

Lucas, C., Fonseca, C., Gascón, J., & Casas, J. (2014). Aspetos da rigidez e atomização da matemática escolar de Portugal e da Espanha: Análise de um questionário. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, *16*(1), 1-24. Recuperado http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/17932

Piaget, J. (1972). *The Principles of Genetic Epistemology*. London: Routledge and Kegan Paul.

Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interacções sociais nas investigações matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.). *Investigar para aprender matemática* (pp. 119-137). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional.* (Tesis doctoral). Departamento de Matemática. Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona.

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica.* (Tesis doctoral). Departamento de Estadística Aplicada, Universitat Ramon Llull, Barcelona.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Silva, A., Veloso, E., Porfírio, J., & Abrantes, P. (1999). O Currículo de Matemática e as Actividades de Investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Org.). *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 69-85). Lisboa: APM e Projeto MPT.

Tall, D. (1996) Functions and Calculus. In: A. J. Bishop et al. (Ed.). *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Dordrecht: Kluwer.

Entre o Maranhão e Coimbra: Histórias de vida de professores de Matemática na cidade de São Luís

Waléria de Jesus Barbosa Soares[1], *Silvia Fernanda de Mendonça Figueirôa*[2]
[1] Universidade Estadual de Campinas, *walleria_soares@hotmail.com*
[2] Universidade Estadual de Campinas, *silviamf@unicamp.br*

Resumo. *Na primeira metade do século XIX, entre os poucos professores de matemática identificados na cidade de São Luís, encontramos três que merecem ser conhecidos pela sua contribuição ao ensino de matemática. Estudantes da Universidade de Coimbra, são eles: os maranhenses Estêvão Rafael de Carvalho e Alexandre Theóphilo de Carvalho Leal; e o português Ayres de Vasconcellos Cardoso Homem. O presente texto, de abordagem histórica, objetiva apresentar as histórias de vida desses professores, pautado em Ferrarotti (2010) e Paulilo (1998). Acreditamos que descortinar tais histórias de vida nos permite redescobrir professores que viveram e contribuíram para o ensino de matemática na cidade de São Luís num período em que a instrução maranhense buscava se consolidar.*

Palavras-chave: *histórias de vida; professores; história do ensino de matemática.*

Abstract. *In the first half of the nineteenth century, among the few mathematics teachers identified in the city of São Luís, we found three that deserve to be known for their contribution to teaching math . Students at the University of Coimbra, they are: born in Maranhão, Estêvão Rafael de Carvalho and Alexandre de Carvalho Theóphilo Leal; and the Portuguese , Ayres de Vasconcellos Cardoso Homem. We aimed to present text, the historical approach, that addresses the life stories of these teachers, based on Ferrarotti (2010) and Paulilo (1998). We believe that unveiling these life stories allows us to rediscover teachers who lived and contributed to the teaching of mathematics in the city of São Luís in a period that the Maranhão statement sought to consolidate.*

Keywords: *life stories; teachers; history of mathematics teaching.*

Introdução

Ao tomarmos como marco de nossa investigação o início do século XIX, constatamos que pouco sabemos sobre quem eram os professores que contribuíram para o ensino da matemática no Maranhão, em especial, em São Luís. Porém, temos conhecimento de que seus nomes eram mais divulgados através dos livros que escreviam. Então, investigar estes professores é investigar, também, quem eram os autores.

Foi somente depois da criação da Imprensa Régia (em 1808), por volta da década de 30 dos oitocentos, com a implantação do método simultâneo de ensino no Brasil, que foi estimulada a produção de novos materiais pedagógicos e, com eles, o interesse dos professores em serem autores. Assim, foi quando o livro didático passou a ser o estruturador das disciplinas escolares que sua produção realmente cresceu, as livrarias ampliaram suas funções e iniciou-se o papel do professor como autor. No Maranhão não foi diferente:

> Na Província do Maranhão muitas obras foram produzidas pelos professores, em especial, aqueles que lecionavam no Liceu, no Instituto de Humanidades e na Sociedade Onze de Agosto, a exemplo de Sotero dos Reis, João Antonio Coqueiro, Estêvão Rafael de Carvalho, Antonio Marques Rodrigues e Antonio Rêgo, e impressos na sua maioria pelas tipografias de Belarmino de Mattos e de Frias. Professores que elaboraram seus trabalhos para serem adotados nas disciplinas que lecionavam, e que pelos resultados obtidos nas suas práticas no ensino, passam a ser adotados em outros estabelecimentos do Maranhão, como em outras localidades do país. (Castellanos, 2012, p. 285)

Tomando esse contexto, buscamos encontrar a existência de professores/autores de livros didáticos para o ensino de matemática na cidade de São Luís. O nosso passo inicial foi os arquivos da Biblioteca Pública Benedito Leite em São Luís, onde investigamos e encontramos informações sobre os livros para o ensino de matemática, publicados na cidade de São Luís. Posteriormente, recorremos ao Arquivo Público do Estado do Maranhão e ao Arquivo do Liceu Maranhense, onde investigarmos e encontramos informações sobre os professores/autores dessas obras. Em meio às nossas descobertas, chamou-nos atenção o fato de que na primeira metade do século XIX, entre os professores/autores encontrados, três estudaram na Universidade de Coimbra. O nosso trabalho se voltou para esses três professores. Recorremos então, aos arquivos desta universidade, onde investigamos e encontramos documentos que comprovaram a passagem destes alunos pelos cursos superiores da instituição.

Cada uma dessas informações foi essencial para a construção das biografias que desejávamos escrever. Desta forma, o presente trabalho objetiva apresentar as histórias de vida desses três professores/autores, a saber: os maranhenses, Estêvão Rafael de Carvalho e Alexandre Theóphilo de Carvalho Leal; e o português, Ayres de Vasconcellos Cardoso Homem.

Buscamos na pesquisa social, que se utiliza de relatos de vida, através de biografias (e também) autobiografias, construir noções e conceitos fundamentais à análise de textos que tomam a vida desses "atores da educação" como objeto:

> [...] a biografia que se torna um instrumento sociológico parece poder vir a assegurar essa mediação do ato à estrutura, de uma história individual à história social. A biografia parece implicar a construção de um sistema de relações e a possibilidade de uma teoria não formal, histórica e concreta, de ação social. (Ferrarotti, 2010, p. 35)

Existe a necessidade de compreendermos essas pessoas para entender em qual contexto se deu o ensino de matemática. A biografia se torna, assim, um documento relevante quanto à trajetória de vida de uma pessoa, incluindo nomes, locais, fotos e datas dos principais acontecimentos.

Sobre a importância da história de vida, concordamos com Paulilo (1998):

> A história de vida pode ser, desta forma, considerada instrumento privilegiado para análise e interpretação, na medida em que incorpora experiências subjetivas mescladas a contextos sociais. Ela fornece, portanto, base consistente para o entendimento do componente histórico dos fenômenos individuais, assim como para a compreensão do componente individual dos fenômenos históricos. (pp. 142-143)

As biografias contribuem, então, para nosso tipo de pesquisa, quando surgem como uma possibilidade de revelar aspectos do fenômeno educativo até então não investigados. No campo de construção de um texto biográfico, estamos envolvidos numa história de vida contida em textos, livros, poesias, documentos escolares.

Para Ferrarotti (2010, p.45), "se todo o indivíduo é a reapropriação singular do universal social e histórico que o rodeia, podemos conhecer o social a partir da especificidade irredutível de uma práxis individual". Portanto, aceitar a subjetividade e a historicidade contida nessa gama de contextos faz com que concebamos que a história de uma sociedade pode estar presente na história de vida de professores.

Acreditamos que as relações construídas durante a trajetória de vida dos sujeitos investigados estão carregadas dos conhecimentos e vivências adquiridos por eles durante sua história de vida: logo, cada um deles é um conjunto de fragmentos. Suas emoções, seus desejos, suas histórias fazem parte do seu ser sujeito em sua totalidade. Portanto, este texto biográfico tem muito a contribuir para a construção de uma metodologia que supere a dicotomia subjetivismo/objetivismo, possibilitando demonstrar que as pessoas investigadas vivem, agem e interagem nos mais variados contextos: familiar, escolar, profissional, ou outros, permitindo que os vejamos como um todo maior.

Ressaltamos que conheceremos esses “atores” do processo educativo da cidade de São Luís oitocentista a partir das relações com seus familiares, amigos e profissionais com os quais trabalharam, veremos seus esforços e sonhos com relação aos estudos, seus momentos de dor, suas produções. Percebê-los-emos em sua quase totalidade, como sujeitos constituídos de emoções, desejos, histórias; e que lutaram, amaram, sofreram e venceram.

Estêvão Rafael de Carvalho e a matemática para o comércio

Estêvão Rafael de Carvalho nasceu em Viana, interior do Maranhão. Filho de João de Carvalho Santos e Margarida Francisca de Araújo Carvalho, a data de seu batismo pode ter sido a mesma data de seu nascimento, dia 20 de janeiro de 1808.

Vindo de uma família tradicional maranhense, Estêvão foi enviado para estudar Matemática e Filosofia em Portugal. Sabemos que cursou Ciências Naturais na Universidade de Coimbra. Porém, sobre sua colação de grau, segundo Blake (1883, p.296), “quando foi chamado para receber o grão de bacharel, recusou-o, dizendo que estudava para saber e não para receber gráos”. Desta forma, não podemos afirmar com certeza se ele se bacharelou e em quais cursos, mas Morais filho (1986) o apresenta em uma de suas obras como bacharel em Matemática, catedrático do Comércio do Liceu Maranhense, poeta, jornalista, orador e político.

De volta ao Maranhão, casou-se com Olívia de Jesus Soeiro de Carvalho, com quem teve um filho, cujo nome era, também, Estêvão Carvalho. Conta-se que este era de conduta duvidosa, diferente do pai que era um homem respeitável.

Estêvão foi reconhecido principalmente por seus trabalhos como professor, jornalista e deputado – esta última função exercida entre 1834 e 1837. Foi também membro do Instituto Histórico e Geográfico Brasileiro, Inspetor do Tesouro Público Provincial e juiz ordinário, em Viana.

De posições fortes, suas propostas ao governo chegaram a causar polêmicas na Corte. Uma delas dizia respeito à separação da Igreja brasileira da Igreja romana e que o supremo sacerdócio ficasse incluído no Governo (Blake, 1883).

Sobre Estevão, escreveu Serra (1948)[1]:

> Figura muito curiosa da história política do Maranhão é, sem dúvida, a de Estevam Rafael de Carvalho. Conjugavam-se-lhe na personalidade predicados os mais chocantes. À austeridade impressionante de sua vida pública unia um temperamento irrequieto e combativo, atirando-se à luta de corpo aberto, com um desprendimento político de verdadeiro quixote... Hoje, um século depois, estudando-se-lhe a vida, não é possível ao historiador sincero fugir ao dever de proclamar-lhe as virtudes morais e cívicas, que foram maiores do que os seus mil e muitos pecadilhos de líder do povo. (Serra, 1948, p. 249)

Segundo Lopes (1954, p.85), Estêvão “era dotado de extrema facilidade para aprender línguas, traduziu o latim, o grego, o francês, o inglês, o italiano, o alemão e o castelhano e sabia algo de tupi-guarani”.

Como jornalista, teve uma carreira consolidada. Fundou o Jornal “O Bemtevi”, em 1838, que na segunda edição passou a ser chamado apenas de “Bemtevi”. Segundo Jorge (1987),

> Foi um dos jornais mais polêmicos de sua época. Era um jornal bem escrito, o que identificava a formação cultural do seu editor. Nos seus mais de três meses de atividades, deixou um rastro de inquietação, controvérsias, sendo alvo de insultos, acusações e defesas. (Jorge, 1987, p. 98)

Segundo Serra (1948, p.248), o jornal teve forte influência sobre a Balaiada[2] e “Estevam Rafael de Carvalho foi, sim, o principal responsável intelectual”. Estêvão foi ameaçado de morte por diversas vezes, pelas opiniões liberais que trazia no jornal.

Sua carreira no magistério esteve envolvida com a matemática ensinada através das aulas de Comércio. Estêvão foi o primeiro professor de Comércio do Liceu Maranhense, sendo nomeado ainda na fundação da escola, em 1838. Mas, antes disso, já tinha publicado a obra “A metafísica da Contabilidade Comercial”, em 1837, no Rio de Janeiro. No Liceu chegou a participar da realização dos exames admissionais, nos quais prezava pelo zelo da disciplina.

Estêvão faleceu muito jovem, no dia 26 de março de 1846, em São Luís. Sobre sua figura, escreveu Lopes (1954),

> No decurso de uma existência que não passou dos trinta e oito anos Estêvão Rafael havia de guardar fidelidade às inclinações manifestadas mal ainda saíra da adolescência, e persistir naquele amor ao estudo que lhe proporcionou vasto cabedal de conhecimentos em vários ramos da ciência. (Lopes, 1954, p.85)

Seja por suas palavras ou pelo desempenho de suas funções, Estêvão Rafael de Carvalho não foi esquecido. Em sua cidade natal, ele é o patrono da Cadeira Nº 10 da Academia Vianense de Letras, fundada em 2002.

Alexandre Theóphilo de Carvalho Leal e as diversas funções na educação

Alexandre Theóphilo de Carvalho Leal nasceu no Maranhão, talvez em 1822 ou 1823. Era filho de Ricardo Henriques Leal e Dona Inez Raimunda de Carvalho, e neto do coronel Antonio Henriques Leal e D. Anna Rosa de Carvalho.

Enviado a Portugal, no ano de 1841 já estava matriculado no curso de Ciências Matemáticas pela Universidade de Coimbra, tornando-se posteriormente bacharel. Também foi bacharel em Ciências Sociais e Jurídicas (Blake, 1883). De volta ao Maranhão, casou-se com D. Maria Luiza Leal Valle. Entre seus filhos estavam o Dr. Domingos Teófilo de Carvalho Leal, que exerceu importante papel na passagem do Império para República no Amazonas, e D. Lourença Theóphila Valle Leal.

Alexandre ficou conhecido por várias funções: professor, pedagogo, economista e político. Mas se tem um papel que realmente o destacava era o de melhor amigo e confidente de Antonio Gonçalves Dias[3]. Quando o pai do poeta faleceu e a madrasta de Gonçalves Dias não teve como mantê-lo em Portugal, foram Alexandre e alguns amigos que custearam suas despesas. Ainda, Gonçalves Dias, quando esteve no exílio, dedicou-lhe seu livro de poesias "Últimos Cantos", publicado em 1851.

Em 1845, Alexandre Teóphilo foi sócio da "Sociedade Philomática Maranhense", que se ocupava das discussões sobre ciências, artes e letras. Em 1846 presidiu a "Associação Literária Maranhense", fundada por alguns estudantes do Liceu Maranhense, em 1844.

Em 10 de junho de 1847, entrou em exercício como inspetor do Tesouro Público Provincial.

Alexandre tinha muitos contatos no interior do Maranhão. Na região do Alto-Mearim, foi proprietário de engenhos. Em 1849, o Jornal "A Epocha" noticiou que ele havia sido candidato a deputado pelo "Collegio de Caxias". Ainda nesse ano foi criada a "Revista Universal Maranhense", que em seu primeiro volume tinha-o como colaborador.

A carreira no magistério desenvolveu-se principalmente no Liceu Maranhense, onde ocupou o cargo como o terceiro diretor da instituição. Em 1859, esteve envolvido com a criação da “Escola do Cutim”, destinada a meninos pobres e desvalidos, cujo objetivo era melhorar o estado da lavoura por meio da educação profissional, substituindo os métodos tradicionais do lavrar, plantar e colher pelo método aratório[4].

Em 1857, Pedro Nunes Leal criou o “Instituto de Humanidades”, estabelecimento de ensino privado frequentado pela elite ludovicense[5]. Como Borralho (2010) observou, as mesmas pessoas circulavam pelas mesmas instâncias de consagração cultural. Para esse empreendimento, Alexandre fez parte de uma Comissão Diretora que estabeleceu as diretrizes para admitir os educandos, além de organizar o funcionamento da instituição, requisitar junto ao governo os recursos humanos e financeiros, adquirir equipamentos e máquinas e comprar e preparar o terreno. Alexandre esteve presente, ainda, na organização das práticas e saberes necessários às aulas de primeiras letras dos meninos, que contavam com conhecimentos específicos de geometria, além de topografia, mecânica, desenho aplicado às artes, dentre outros.

Ainda como professor de matemática em São Luís, oferecia aulas particulares de geometria em sua residência, que eram noticiadas em jornais da cidade. Segundo Sousa e Pais (2008), o livro “Arithmetica” de Alexandre Theóphilo de Carvalho Leal foi adotado no Estado do Amazonas, no século XIX.

De acordo com o jornal “A Flecha”, Alexandre Theóphilo de Carvalho Leal teria falecido em março de 1879, informação confirmada através de Blake (1883).

O português Ayres de Vasconcellos Cardoso Homem em solo ludovicense

Ayres de Vasconcellos nasceu em Portugal, em Oliveira do Conde. Foi batizado no dia 12 de junho de 1819. Filho de João Homem Cardoso Leitão de Meneses e de Dona Antonia Rita Coelho de Mendonça, seus avós paternos eram José Homem Cardoso Leitão de Meneses e Dona Bernardina Nunes Coelho; e seus avós maternos eram Gonsalo dos Santos e Jeronima Tavares Correa de Britto.

Ayres formou-se em Direito pela Universidade de Coimbra, em 1842. Mas, também frequentou a Faculdade de Filosofia, no mesmo período em que Gonçalves Dias e Alexandre Theóphilo de Carvalho Leal.

De acordo com a Revista Universal Lisbonense (1844), foi premiado na Universidade de Coimbra, com o prêmio “Francisco de Salles Gomes Cardoso”, quando então fazia o 1º ano do curso de Filosofia.

Ayres chegou a São Luís pela primeira vez em 30 de abril de 1845:

> O Brigue Português Carlota Amelie saiu de Lisboa, perfazendo uma viagem de 25 dias até chegar aqui na data citada. Sob o comando do capitão Manuel Joaquim dos Santos, a equipe era formada de 13 pessoas, consignatário João da R. Santos. Neste brigue tivemos os seguintes passageiros: João Paes de Vasconcelos, Francisco Alves, José dos Santos Tavares, Domingos José Soares, Jacob Toncedo, Antonio Marques de Souza Bello e Ayres de Vasconcellos Cardoso Homem. (Publicador Maranhense, 1845)

Nesse mesmo ano foi colaborador do Jornal de "Instrução e Recreio", que trazia artigos sobre o ensino ou métodos e sistematizações de estudo. Também foi nomeado professor de Filosofia Racional no Liceu Maranhense.

Em 1846, Ayres foi membro da "Associação Literária Maranhense", presidida por Alexandre Theóphilo de Carvalho Leal. Também publicou, em São Luís, o livro "Primeiras Noções de Arithmetica", que era indicado para o ensino primário e que também foi dedicado a Alexandre Leal. Ainda neste ano partiu para Portugal, de onde só retornou a São Luís no ano seguinte. Segundo Mello (2004), chegou no dia 14 de novembro vindo num brigue português chamado Laia, originário de Lisboa, após enfrentar 33 dias de viagem.

Em 1848, Ayres desempenhou relevante papel para as tipografias. De acordo com Frias (1866, p. 6), ele "introduziu o novo sistema de dar tinta com cilindros de madeira forrados de pele, isto é, com cilindros iguais aos com que queriam tirar prova na Temperança por lhe ignorarem a verdadeira serventia".

Sobre sua formação em Matemática, não encontramos registro em universidades. Porém, em algumas publicações do Brasil, como no dicionário de Cézar Marques, aparece referência a ele como bacharel em matemática. Segundo Marques (1970, p. 64), "para substituir as balas foram introduzidos os cilindros manuais vulgarmente chamados de "rolos" pelo bacharel em Matemática Ayres de Vasconcellos Cardoso Homem, autor de vários compêndios muito estimados para uso das escolas".

Não sabemos quando Ayres retornou a Portugal, porém por meio de documentos do Instituto de Coimbra em Portugal, temos conhecimento de que ele faleceu no ano de 1888, no Hospital do Porto.

Considerações finais

Utilizar o método biográfico para conhecer os professores que trabalhavam com a matemática na cidade de São Luís oitocentista permite-nos tomar como objeto de estudo indivíduos e suas vidas. Em cada uma das histórias encontramos laços de amizade, vontade de estudar e a busca pelo sonho profissional que tinha envolvimento com a matemática.

Suas contribuições para o ensino de matemática se encontram envolvidas em suas produções ou funções ocupadas. Enquanto o maranhense Estêvão escreveu o primeiro livro de contabilidade impresso no Brasil, “A metafísica da Contabilidade Comercial”, de 1837, destinado às aulas de Comércio em São Luís, o português Ayres escreveu o mais antigo livro de aritmética, “Primeiras Noções de Arithmetica”, publicado no Maranhão, a que temos notícias. Sobre Alexandre, não podemos esquecer que se tornou o primeiro matemático diretor do Liceu Maranhense, além de ter publicado sua obra “Arithmetica”, cuja data não temos conhecimento.

Estudantes de Coimbra, numa época em que os maranhenses iam concretizar seus estudos superiores em solos portugueses, facilitados devido ao acesso e à distância entre São Luís e Portugal, acreditamos que os seus conhecimentos lá adquiridos influenciaram em suas atividades, ou como professores ou como autores. Estêvão Rafael de Carvalho estudou em uma época anterior aos demais. Mas sobre Ayres de Vasconcellos e Alexandre Theóphilo supomos que existiu uma relação de amizade. Eles provavelmente se conheceram e se aproximaram na universidade. Inclusive no período em que estudavam, moravam em ruas que se cruzavam em Coimbra. Através dessa relação Ayres pode ter recebido um convite de Alexandre para ir a São Luís. Suposição reforçada pela dedicatória do livro de Ayres a Alexandre, chamando-o de “amigo”, sem esquecer que o livro de Ayres foi aprovado pela Congregação do Liceu Maranhense, enquanto Alexandre era o diretor da instituição.

Enfim, descortinar um pouco das histórias de vidas aqui apresentadas nos permitiu redescobrir professores que viveram e contribuíram para o ensino de matemática na cidade de São Luís no período oitocentista. Seja como professores de matemática, seja como autores de livros didáticos, esses homens fizeram parte da história do ensino num período em que a instrução maranhense buscava se consolidar.

Notas

[1] Em todo o livro de Serra (1948), o nome de Estêvão é escrito “Estevam”. Optamos por Estêvão, tal como está nos documentos dos demais arquivos investigados.
[2] Revolta popular ocorrida no Maranhão entre os anos de 1838 e 1841, ocasionada pela insatisfação da população pobre da Província contra o monopólio político de um grupo de fazendeiros da região que usavam a força e violência para atingirem seus objetivos políticos e econômicos.
[3] Maranhense (1823 – 1864), nasceu em Caxias. Foi poeta, advogado, jornalista, etnógrafo e teatrólogo. Famoso por ter escrito a "Canção do Exílio" (um dos poemas mais conhecidos da literatura brasileira). Foi um dos expoentes do romantismo brasileiro.
[4] Este método substituía a mão de obra do homem pela força do animal na lavoura.
[5] Relativo à cidade de São Luís, capital do Maranhão. Mas no século XVII já estava em circulação outra forma (mais popular): “são-luisense”. Ambas são consideradas corretas

Referências bibliográficas

Blake, A. V. A. S. (1883). *Diccionario Bibliographico Brazileiro*. Rio de Janeiro: Imprensa Nacional.

Borralho, J. H. de P. (2010). Instituições, leitores e leituras sobre o Maranhão em meados do século XIX. In.: C. A. Castro, *Leitura, impressos e cultura escolar*. São Luís: EDUFA.

Castellanos, S. L. V. (2012). *O livro escolar no Maranhão Império: produção, circulação e prescrições.* (Tese de Doutorado). Universidade Estadual Paulista, São Paulo, Brasil.

Ferrarotti, F. (2010). Sobre a autonomia do método biográfico. In: Nóvoa, A; Finger, M. (Org.). *O método (auto)biográfico e a formação*. Natal, RN: EDUFRN; São Paulo: Paulus.

Frias, J. M. C. de. (1866). *Memória sobre a tipografia maranhense*. São Luís: Frias.

Jorge, S. (1987). *Os primeiros passos da imprensa no Maranhão*. São Luís: PPPG/EDUFMA.

Jornal A Flecha (1879). São Luís, Brasil.

Jornal O Publicador Maranhense (1845). São Luís, Brasil.

Lopes, A. (1954). *História da imprensa no Maranhão*. São Luís: ACMA.

Marques, C. A. (1970). *Dicionário histórico, geográfico da província do Maranhão*. Rio de Janeiro: Fon-Fon e Seleta.

Mello, L. de. (2004). *Cronologia das Artes Plásticas no Maranhão*. São Luís: Lithograf.

Morais Filho, N. (1986). *Estevão Rafael de Carvalho*. São Luís: [s.n.].

Paulilo, M. A. S. (1998). A Pesquisa Qualitativa e a história de vida. *Serviço Social em Revista*, 2(1), 1-153.

Revista Universal Lisbonense (1844). Lisboa, Portugal.

Serra, A. (1948). *A Balaiada.* Rio de Janeiro: Editora Bedeschi.

Souza, T. L. L., & Pais, L. C. (2008). Elementos Históricos da Educação Matemática no Contexto Amazonense (1850 a 1950). *Anais do XII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática*. São Paulo.

Questões de aprendizagem

Intuición sobre el azar: Análisis de una experiencia aleatoria con alumnos de Educación Primaria

María M. Gea[1], *José A. Fernandes*[2], *Carmen Batanero*[3], *Antonio J. Benavides*[4]
[1]Universidad de Granada, *mmgea@ugr.es*
[2]Universidad de Minho, *jfernandes@ie.uminho.pt*
[3]Universidad de Granada, *batanero@ugr.es*
[4]Universidad de Granada, *bena_92_17@hotmail.com*

Resumen. *El estudio del azar y la probabilidad forman parte del currículo de matemáticas en España desde la etapa de Educación primaria (6-12 años), siendo clave para la formación de los estudiantes la capacidad de hacer estimaciones sencillas basadas en la experiencia de situaciones aleatorias. En este texto se describe una experiencia de aula sobre el azar, llevada a cabo con alumnos de tercer ciclo de Educación Primaria (10-11 años). El propósito de la enseñanza es enfrentar al alumno a una experiencia aleatoria sencilla, como es el lanzamiento de una moneda, con la que puede desarrollar su razonamiento probabilístico, a la vez que evaluar su intuición sobre el azar mediante diversas preguntas guiadas que conforman un cuestionario diseñado para la propia experiencia. Los resultados obtenidos muestran dificultades de los alumnos en el desempeño de ideas sobre el azar e intuiciones erróneas sobre el tema, principalmente al inventar una secuenciación aleatoria de resultados del lanzamiento de una moneda.*

Palabras clave: *azar; intuición; Educación Primaria; secuencia de enseñanza.*

Abstract. *The study of chance and probability takes part of the mathematics curriculum in Spain from the stage of primary education (6-12 years), being key issue in the students' training the ability to make simple estimates based on the experience of random situations. In this text a classroom experience on chance aimed at students in the third cycle of primary education (10-11 years) is described. The purpose of this experience is to confront the student to a single random experience, as is the toss of a coin, with which to develop their probabilistic reasoning, while assessing their intuition about chance through various guided questions that make a questionnaire designed for this experience. The results show students' difficulties in carrying out ideas about chance and erroneous intuitions about this topic, mainly when they propose a possible random sequencing of results by the toss of a coin.*

Keywords: *chance; intuition; Primary Education; sequence of teaching.*

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 89–102

Introducción

La enseñanza de la estadística y probabilidad se ha incorporado a los programas educativos de la mayoría de los países desarrollados (MECD, 2014; Ministério da Educação, 2007; Ministério da Educação e Ciência, 2013; NCTM, 2000), dando respuesta a la necesidad de desarrollar en todo ciudadano lo que se conoce como cultura estadística.

En este sentido, una adecuada intuición sobre el azar contribuye al desarrollo de la cultura estadística en el ser humano, que en su día a día se enfrenta a muchas situaciones en las que debe tomar decisiones en ambiente de incertidumbre. Creencias como números favoritos, preferencias por un color o expresiones como "tentar a la suerte", son ejemplos de ideas erróneas que nada tienen que ver con una adecuada intuición sobre el azar (Batanero, 2013).

Diversos investigadores manifiestan la importancia de introducir nociones probabilísticas desde los primeros años de escolaridad (Godino, Batanero, & Cañizares, 1991; Borovcnik & Peard, 1996; Batanero, 2013), que faciliten a nuestros estudiantes la adquisición progresiva de otros conceptos más complejos. Como indica Fischbein (1975), la poca visibilidad que el azar posee en la enseñanza de la matemática responde a muchas de las dificultades que manifiestan los estudiantes, que poseen una visión muy determinista del mundo.

La enseñanza del azar y la probabilidad comienza en España en la Educación primaria (6-12 años), incluyendo como contenidos en esta etapa educativa el estudio del carácter aleatorio de algunas experiencias sencillas y la iniciación intuitiva al cálculo de probabilidades. De este modo, el alumno debe ser capaz de razonar sobre diferentes experimentos sencillos, hacer estimaciones y valorar sus estrategias comprobando sus resultados. Para aplicar de manera integrada todos estos conocimientos, la normativa recomienda desempeñar una metodología práctica.

En este trabajo abordamos el estudio de las intuiciones sobre el azar de un grupo de estudiantes de quinto curso de Educación Primaria, desde una perspectiva reflexiva según la investigación educativa sobre el tema. Se trata de una investigación experimental basada en una experiencia de aula, que responde a las directrices curriculares descritas anteriormente y los avances que la investigación educativa ha aportado sobre estos conceptos. En lo que sigue analizamos los fundamentos de nuestro estudio, explicamos la metodología llevada a cabo, describimos los resultados obtenidos y finalizamos con algunas conclusiones e implicaciones para la enseñanza.

Fundamentación

Marco teórico

Nuestro trabajo se fundamenta en el marco teórico del Enfoque ontosemiótico (EOS) (Godino & Batanero, 1994; Godino, Batanero, & Font, 2007) que considera la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas un equilibrio entre la dualidad personal e institucional que posee el significado de un objeto matemático. Se considera *objeto matemático* a toda entidad que interviene en una tarea, ya sea la tipología de problemas que dan significado al objeto, el lenguaje con el que se trabaja (notaciones, términos, etc.), los conceptos que se vinculan al mismo, los diferentes procedimientos que se llevan a cabo, las reglas (propiedades o proposiciones) que se formulan o los argumentos y demostraciones que se utilizan.

El estudiante mostrará una adecuada intuición sobre el azar en la medida en que se haya apropiado del significado institucional (en nuestro caso la escuela primaria) de este objeto matemático. El EOS establece que la comprensión de un objeto matemático es progresiva y que no puede ser observada directamente, pero su práctica personal (significado personal) será la que permita investigar y observar sí estas intuiciones son adecuadas en la medida en que se aproximen al significado marcado por la institución (significado institucional). Por lo tanto, la evaluación de las intuiciones sería el estudio de la correspondencia entre los significados personales e institucionales mediante las prácticas que el estudiante realiza (Godino, Batanero, & Font, 2007).

Antecedentes

La investigación sobre el razonamiento del ser humano en ambiente de incertidumbre ha ocupado un lugar destacado en el campo de la psicología, en concreto, en su desempeño en situaciones en las que interviene el azar (Kahneman, Slovic, & Tversky, 1982; Konold, 1989, 1995). Los resultados más destacados se refieren al uso de heurísticas que el sujeto utiliza para reducir o limitar la información procedente de la situación a la que se enfrenta (Batanero, 2001). Savard (2014) presenta una clasificación de todas ellas, junto a los autores que se han interesado por su análisis. Destacamos una de estas heurísticas que la autora denomina “resultado próximo” en que se considera que el resultado de la siguiente experiencia mantiene la tendencia de resultados obtenidos, o por el contrario, se piensa que el siguiente resultado cambia la tendencia de la secuencia (conocido como la *falacia del jugador*).

La epistemología del concepto de azar ha explicado algunas dificultades asociadas a su desempeño, pues algunos sujetos muestran concepciones que corresponden a las diferentes etapas por las que el concepto ha evolucionado hasta la formalización axiomática de Kolmogorov que actualmente conocemos (Batanero, Henry, & Parzysz, 2005). En su origen, el azar se correspondía con la ausencia de causa que motivaba un suceso, por lo que si un hecho no obedecía a una causa o ley conocida era calificado como aleatorio. Esta concepción se mantuvo hasta la Edad Media, donde la teoría de juegos tuvo un desarrollo considerable con los conceptos de equiprobabilidad e independencia. Llegados a este punto, la evolución en el significado de la aleatoriedad implica la diferenciación de dos conceptos que hasta el momento se consideraron equivalentes y no lo son: el patrón de la secuencia de resultados producida en un experimento y el proceso de generación, conocido como experiencia aleatoria (Batanero & Serrano, 1995; Batanero, 2001).

Las heurísticas y el análisis epistemológico del concepto de azar orientan al profesor en la enseñanza y aprendizaje del azar pero, como indica Batanero (2013), una experiencia aleatoria es compleja en sí misma, a diferencia de una experiencia determinista. El azar es un proceso *no reversible*, es decir, si lanzamos una moneda y obtenemos cara, no podemos volver al inicio del experimento y repetirlo de nuevo (bajo las mismas condiciones iniciales) garantizando obtener el mismo resultado. Por contra, si un alumno dispone de dos caramelos y añade tres caramelos, podrá separar (restar) a la cantidad total (cinco caramelos) tres caramelos y obtener la cantidad inicial, pudiendo repetir el proceso cuantas veces quiera para analizar la situación de aprendizaje.

En la investigación educativa, Piaget e Inhelder (1951) recomiendan que la enseñanza y aprendizaje del azar debiera posponerse a una etapa avanzada de desarrollo del estudiante (11 a 15 años). Fischbein (1975), por su parte, concede gran importancia a la intuición sobre el azar y trata de demostrar que antes de los 7 años los estudiantes son capaces de distinguir fenómenos aleatorios y deterministas. Según el autor, la enseñanza tiene un efecto positivo en la construcción de las intuiciones sobre el azar, que el estudiante va forjando a medida que se enfrenta a prácticas adecuadas.

Pfannkuch y Ziedins (2014) discuten diferentes enfoques de enseñanza de la probabilidad y destacan la modelización como mejor propuesta. Los autores manifiestan la importancia de que los estudiantes descubran los modelos de probabilidad a través de la reflexión pues: “la idea de una probabilidad y su estimación está por consiguiente íntimamente ligada a una secuencia de experiencias, un proceso observado en un período determinado y la ley de los grandes números” (Pfannkuch & Ziedins, 2014, p. 110). Eichler y Vogel (2014) se centran en la modelización y diferencian tres situaciones en las que hacer uso de la simulación para la enseñanza de la probabilidad: 1) explorar modelos existentes, 2) descubrir un modelo desconocido, y 3) generar datos de un modelo. En el este trabajo nos interesamos por la primera opción, puesto que la simulación permite analizar la realidad de un experimento concreto, como es el lanzamiento de una moneda, conectando el mundo teórico de la probabilidad y el mundo empírico de los datos (Eichler & Vogel, 2014).

Los estudios sobre el desempeño de los estudiantes sobre el azar muestran diversas dificultades y errores, uno de ellos muy curioso que se asocia al término “predecir” un resultado. Como indica Savard (2014), al pedir a los estudiantes que propongan un resultado, como por ejemplo en el lanzamiento de la moneda, muchos estudiantes consideran el hecho de predecir como el de asegurar que ocurra con seguridad dicho resultado.

Green (1983, 1991) analiza el modelo aleatorio más simple posible (sucesión de experiencias Bernoulli) según diferentes tareas dirigidas a estudiantes. En una tarea pide predecir las secuencias de resultados de lanzar 50 veces una moneda equilibrada. Los estudiantes muestran la fuerza de la equiprobabilidad en los patrones que proponen, poca variabilidad aleatoria en las secuencias propuestas, y la falacia del jugador. La apreciación de la aleatoriedad resulta igualmente insatisfactoria en otras tareas similares, como en la que se pide elegir entre dos patrones de 150 lanzamientos de una moneda aquella que consideren aleatoria. En otros estudios podemos encontrar resultados similares con estudiantes de secundaria (e. g., Batanero & Serrano, 1999).

Falk, Falk y Levin (1980) llevaron a cabo un estudio con escolares de entre 4 y 11 años de edad mediante el uso de ruletas. En el análisis de sus respuestas, fueron pocos los estudiantes que mantuvieron su patrón de respuesta a lo largo de las cuestiones formuladas, dando muestra de una incoherencia sistemática. Algunas de las respuestas indicadas por los estudiantes se basan en principios irrelevantes como, por ejemplo, la opción más próxima al lugar ocupado por el puntero de la ruleta según un color pretendido; la opción situada a su lado izquierdo por ser zurdo; la opción más bonita; el color del club de fútbol preferido; etc.

Metodología

Se diseña una secuencia de enseñanza basada en un experimento aleatorio (el lanzamiento de una moneda), con la intención de evaluar las intuiciones sobre el azar en una muestra de estudiantes de quinto curso de Educación primaria (10 a 11 años). La enseñanza también permitirá desarrollar estas intuiciones en los estudiantes, ya que se hace uso de conceptos previos (variable estadística, distribución unidimensional, resúmenes estadísticos, etc.) y representaciones gráficas (diagrama de puntos y de barras) que ellos mismos utilizarán para analizar los resultados y mostrar la adecuación de sus respuestas. Este es un aspecto innovador de la enseñanza, ya que propiciará que los estudiantes valoren su formación en cuanto al azar.

El primer paso en el diseño fue fundamentar el significado de referencia del azar, basándonos en la documentación curricular, el marco teórico y los antecedentes de investigación, todos ellos descritos anteriormente. Nos basamos en una tarea propuesta por Green (1991), reduciendo a diez los lanzamientos de la moneda para adaptar el tiempo de nuestra enseñanza a dos sesiones de 50 minutos cada una. En la primera sesión, los estudiantes predicen resultados, contestan a preguntas sobre la certeza de obtener un resultado concreto y proponen un patrón de resultados aleatorios del experimento. En la segunda sesión, se lanza realmente la moneda diez veces y se pide al alumno interpretar los resultados obtenidos (los suyos junto a los de los compañeros), así como relacionarlos con los propuestos en la sesión anterior (los suyos junto a los de los compañeros). En ambas sesiones los alumnos respondieron individualmente a las preguntas del cuestionario y posteriormente ponían en común sus respuestas.

La intuición sobre el azar es un constructo inobservable (León & Montero, 2002), por lo que la observación participante del profesor en el aula se acompaña de una hoja de respuestas o cuestionario que el alumno cumplimenta a medida que desarrolla la enseñanza. Los resultados del estudio se han obtenido de las respuestas de 24 estudiantes (17 niños y 7 niñas) de un colegio de Granada, con una formación pobre en estadística y probabilidad según su profesora.

El análisis de los resultados es esencialmente cualitativo y exploratorio, tratando de compensar el tamaño limitado de muestra con un profundo análisis de contenido de las mismas (Weber, 1985), que permite realizar inferencias a través de la identificación sistemática y objetiva de las características específicas de un texto (Ghiglione & Matalón, 1989). Los resultados del análisis se describen a continuación, siguiendo el transcurso de la secuencia de enseñanza e informando de los aspectos más característicos de su evolución, según la observación del profesor.

Resultados y discusión

Comenzamos la primera sesión de enseñanza preguntando si alguna vez habían lanzado una moneda y observado su resultado, donde la mayoría contestaron que sí. Pedimos que la lanzasen una vez la moneda en clase para experimentar el resultado (primera pregunta del cuestionario: C1.1) y que anotasen sus resultado. Los alumnos pudieron observar que no todos obtuvieron igual resultado. A continuación, cada uno contestó a las primeras cuatro preguntas del cuestionario, que describimos a continuación:

> C1.2. Si lanzas de nuevo la moneda, ¿obtendrás otra vez el mismo resultado? ¿Por qué?

Esperamos que el alumno conteste que es posible obtener el mismo o distinto resultado, pues el experimento no tiene memoria de lo ocurrido. Encontramos muchas respuestas incorrectas de los alumnos que muestran una concepción causal de la aleatoriedad en los estudiantes (Batanero & Serrano, 1995). En mayor medida se refieren a la suerte: "Sí, porque puede ser que alguna vez tengas suerte y te salga lo mismo dos veces" (PFC); al desconocimiento de las causa que produce los resultados: "No, porque a mí nunca me salen dos seguidas iguales" (PLFP); o a la necesidad de ocurrir un mismo resultado por el hecho de tratarse de una experiencia aleatoria: "Sí, porque si la tiro igual que antes saldrá lo mismo" (CGM).

> C1.3. ¿Sabes cuántos resultados diferentes podemos obtener cuando lanzamos la moneda? ¿Por qué?

En esta categoría encontramos siete alumnos que dieron la posibilidad de caer de canto en la mesa. Sus respuestas se han categorizado como parcialmente correctas pues en este caso la moneda rodaría y finalmente caería de cara o de cruz. En general los restantes alumnos contestaron correctamente.

> C1.4. ¿Crees que antes de lanzar una moneda podrías decir, con seguridad, cuál será el resultado que obtendrás? ¿Por qué?

Se espera que los alumnos indiquen que no se puede, con seguridad, adivinar el resultado de un lanzamiento. Utilizamos los términos "decir" y "con seguridad" para eliminar la confusión descrita por Savard (2014) en el significado que algunos estudiantes atribuyen al término predicción. Esta pregunta difiere de la C1.2, pues no pretendemos que se conteste según un resultado previo obtenido.

La mayoría de los alumnos contestan correctamente, aunque algunos se aventuran a indicar probabilidades en sus respuestas y los valores que aportan son todos erróneos. Estas respuestas se han categorizado como parcialmente correctas ya que indican que no es posible saber con seguridad el resultado de un lanzamiento, pero acompañan su respuesta con porcentajes de ocurrencia incorrectos: 0%, 10%, 55%, 65% y 75%, todos distintos del 50% que es el correcto. Estos resultados, aunque mejores que los obtenidos en la cuestión C1.2, son preocupantes porque los alumnos muestran dificultades al asignar la probabilidad como grado de ocurrencia a sucesos equiprobables, a pesar de que los alumnos perciben la aleatoriedad del experimento.

En la tabla 1 se resumen los resultados de las primeras preguntas del cuestionario donde podemos observar que los alumnos tienen bien asimiladas las preguntas C1.3 y C1.4, siendo totalmente contrarios los resultados en la pregunta C1.2, donde sólo poco más de la mitad de la clase ha contestado correctamente.

Tabla 1.

Respuestas (y porcentajes) a preguntas del cuestionario 1

Pregunta	Correcta	Incorrecta	Parcialmente correcta	Total de alumnos
C1.2	13(54,2)	11(45,8)		24(100)
C1.3	16(66,6)	1(4,2)	7(29,2)	24(100)
C1.4	17(70,8)	1(4,2)	6(25)	24(100)

> C1.5. ¿Crees que podemos escribir los resultados de los 10 lanzamientos de la moneda (sin lanzarla realmente, sino como tú pienses que saldrían) de forma que otras personas piensen que has lanzado la moneda de verdad? ¿Por qué?

Todos los estudiantes respondieron afirmativamente a esta cuestión y a continuación rellenaron una tabla en el cuestionario donde proponían el patrón de los 10 lanzamientos. La clase finalizó con una puesta en común de los resultados proporcionados por los alumnos, según el total de caras y cruces de los patrones propuestos. Se pidió a los alumnos representar la distribución de caras en papel, donde algunos representaron el diagrama de puntos y otros el de barras, y comentaron en gran grupo las características de la distribución representada. No hubo ninguna duda puesto que todos los patrones propuestos respondían a secuencias cortas de caras y cruces y frecuencias equilibradas.

La siguiente sesión comenzó con el lanzamiento real de la moneda diez veces consecutivas y a continuación los alumnos compararon sus resultados. Como en el día anterior, representaron la distribución del número de caras y la compararon con la del día anterior. Observaron que la distribución de la secuencia real era menos simétrica que en la secuencia simulada así como la representatividad de la moda en una y otra distribución (Figura 1). Se pidió a los alumnos contar la racha (secuencia de resultados de igual tipo: o caras o cruces) más larga en las secuencias de resultados obtenidos y mostraron interés por representar también la variable longitud de la racha más larga (mayor número de resultados iguales obtenidos en los sucesivos lanzamientos), aunque la falta de tiempo hizo que sólo la representase el profesor en la pizarra, como se muestra en la figura 2. Los alumnos observaron que en la secuencia de resultados reales las rachas tenían una longitud más variable de las que ellos habían considerado.

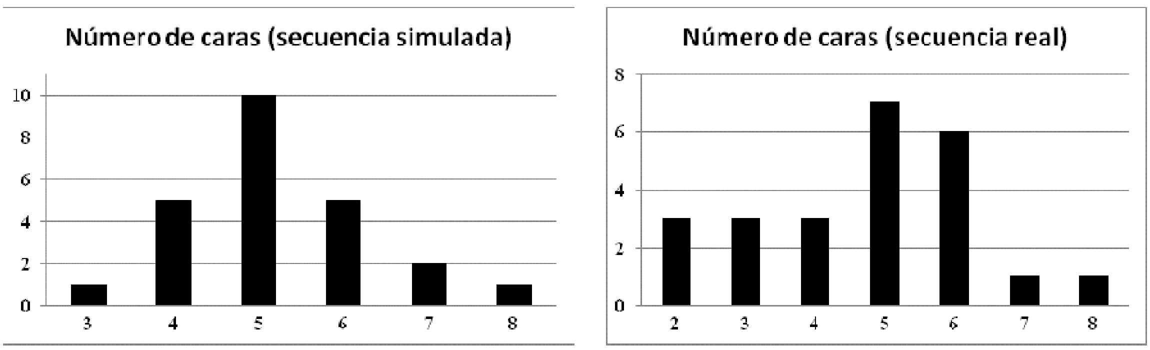


Figura 1. Representación de la variable "número de caras" según la experiencia.

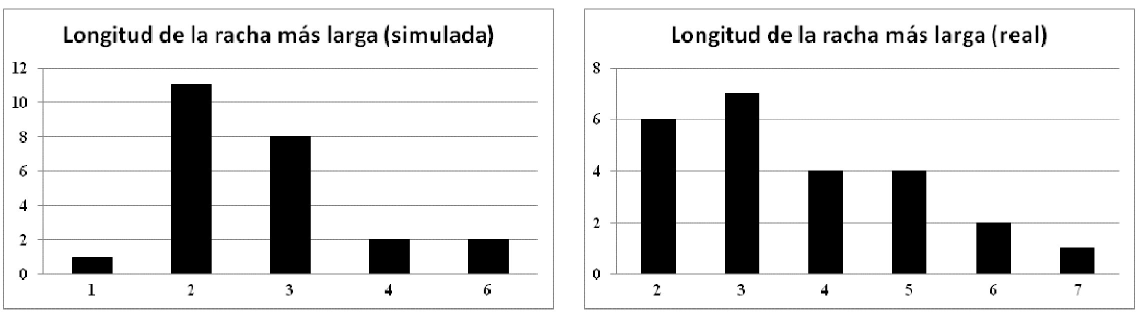


Figura 2. Representación de la variable "longitud de la racha más larga" según la experiencia.

Tras la interpretación de los gráficos que se muestran en la figura 1 y 2, los alumnos contestaron a las preguntas del cuestionario que describimos a continuación.

> C2.1. ¿Podríamos distinguir si una secuencia de lanzamientos de una moneda es aleatoria o es inventada, por ejemplo, como la que te inventaste ayer? ¿Por qué?

Esperamos que los alumnos indiquen que en la secuencia simulada las rachas son cortas mientras que en la secuencia real son más largas. También esperamos que los estudiantes perciban que en la secuencia real la proporción de caras y cruces no tiene por qué ser equilibrada (asociarse al valor 0,5). Los alumnos mostraron dificultad en responder a la pregunta y en su mayoría respondieron que no pueden distinguir si una secuencia es simulada o real. Otras respuestas se categorizaron como respuestas parcialmente correctas pues muestran un razonamiento aleatorio adecuado y no responden con precisión: "Sí, porque puede ser cara o cruz" (SMR); o bien porque no presentan error a pesar de no contestar completamente a lo que se pide: "Sí, porque han salido totalmente diferentes porque ayer nos lo inventamos y hoy no porque teníamos una moneda" (PLFP).

> C2.2. a) ¿Tenemos que obtener exactamente 5 caras y 5 cruces para que una secuencia de 10 lanzamientos de una moneda sea aleatoria? b) ¿Podríamos obtener 1 caras y 9 cruces? c) ¿y 2 caras y 8 cruces? ¿y 8 caras y 2 cruces? ¿Por qué?

Esperamos que los alumnos contesten que no tiene por qué obtenerse 5 caras y 5 cruces en la secuencia real (cuestión C2.2a), pudiendo encontrar 1 cara y 9 cruces (cuestión C2.2b), 2 caras y 8 cruces o bien 8 caras y 2 cruces (cuestión C2.2c). Los alumnos salvo uno contestan todos correctamente a la primera pregunta (C2.2a), indicando que no tenemos que encontrar 5 caras y 5 cruces en la secuencia real. Sólo un alumno responde que, en general, se puede obtener lo que sea. Los alumnos muestran más dificultad al valorar las otras posibilidades de ocurrencia (preguntas C2.2b y C2.2c) pues contestan de modo impreciso, no dando las razones de su respuesta: "No porque no te puede salir solo una cara; No porque no te puede salir solo dos caras; No porque no te pueden salir solo dos cruces" (AAC).

> C2.3. Después de todos los gráficos que has construido, contesta razonadamente a la siguiente pregunta: ¿Tiene tu clase buena intuición para adivinar una secuencia aleatoria de 10 lanzamientos de una moneda? ¿Por qué?

Esta pregunta completa a las anteriores pues se pide que el alumno reflexione sobre los gráficos construidos y la experiencia desarrollada. Esperamos que indiquen que no han tenido buena intuición, según las rachas cortas y el equilibrio entre las frecuencias de resultados que proponían en sus secuencias simuladas.

Los alumnos, en general, responden de modo incorrecto pues son imprecisos y no se basan en los gráficos construidos, generalmente se refieren a la suerte como muestran estos ejemplos: "No, porque no es muy fácil saber lo que vas a sacar" (JAR); "Sí, porque algunos tienen suerte y algunos no" (NFS). Consideramos respuestas parcialmente correctas cuando se basan en las gráficas elaboradas aunque con imprecisiones en su interpretación, como por ejemplo: "No, porque casi todos pusieron 5 y esta vez salieron casi la mitad de 5" (JFJH).

En la tabla 2 se resumen los resultados de las respuestas, donde podemos observar el alto porcentaje de error de las preguntas C2.1 y C2.3, donde los estudiantes muestran dificultad en argumentar o justificar si una secuencia es simulada o real, siendo fácil para los estudiantes razonar sobre ejemplos concretos como los que fundamentan las cuestiones C2.2a, C2.2b y C2.2c. Resultados similares se encontraron en la investigación de Green (1983), en la que se pide predecir resultados en una secuencia de 50 lanzamientos.

La formulación de argumentaciones adecuadas puede promoverse enfrentando al estudiante a una amplia tipología de problemas, impregnados de una riqueza de representaciones, donde los conceptos se vinculen con diferentes procedimientos y propiedades, que promuevan la argumentación (Godino, Batanero, & Font, 2007).

Tabla 2.

Respuestas (y porcentajes) a preguntas del cuestionario 2

Pregunta	Correcta	Incorrecta	Parcialemnte correcta	Total de alumnos
C2.1	3(12,5)	13(54,2)	8(33,3)	24(100)
C2.2a	23(95,8)		1(4,2)	24(100)
C2.2b	20(83,3)	4(16,7)		24(100)
C2.2c	20(83,3)	4(16,7)		24(100)
C2.3	3(12,5)	15(62,5)	6 (25)	24(100)

El cuestionario finaliza con una pregunta donde se pedía a los alumnos escribir lo que habían aprendido. Las respuestas se resumen en la tabla 3, donde se observa la valoración positiva de la experiencia, generalmente porque consideran el experimento aleatorio importante (37,3%) y porque reconocen que no es fácil disponer de una intuición adecuada ante situaciones de azar (29,2%).

Tabla 3.

Categorías de respuestas (y porcentajes) del alumno según su aprendizaje en la experiencia

Respuestas de los alumnos al interés de la práctica	Frecuencia
No es fácil adivinar; La intuición algunas veces acierta	7(29,2)
Da igual aleatorio o inventado	1(4,2)
Pensar más rápido	1(4,2)
Tener probabilidades en el azar	1(4,2)
Obtener información	1(4,2)
Monedas importantes	9(37,3)
Lo que hemos hecho es interesante	2(8,3)
La suerte para lanzar	2(8,3)

Reflexión final

Este trabajo describe los resultados de una secuencia de enseñanza diseñada para evaluar y desarrollar la intuición sobre el azar en alumnos de Educación primaria, basada en la experiencia aleatoria del lanzamiento de una moneda. Diversas preguntas dirigen las dos sesiones que conforman la secuencia de enseñanza, que los alumnos van respondiendo en un cuestionario diseñado específicamente para cada sesión.

Los alumnos estuvieron motivados en clase y valoran la importancia de este tipo de experiencias aleatorias, donde un alto porcentaje de participantes reconoce la dificultad de adivinar resultados que puedan obtenerse en una secuencia simulada. Como indica Batanero (2013), los niños en las primeras edades aprenden a través de la propia experiencia, y estas prácticas dan al niño no sólo conocimientos técnicos sino también estratégicos por lo que son de gran utilidad para su formación. La experiencia diseñada parte de los conocimientos del estudiante, observándose, como en investigaciones precedentes (e.g., Falk, Falk, & Levin, 1980), que razonamientos de los estudiantes basados en principios irrelevantes, influenciados por sus creencias en la evaluación del azar, nada tienen que ver con la adecuada adquisición del concepto de azar (Batanero, 2013).

Los resultados obtenidos en esta investigación informan del significado personal que los estudiantes poseen sobre el azar, al evaluar sus intuiciones sobre este concepto en una situación práctica. La experiencia permite al profesor medir la correspondencia de este significado personal con el significado institucional pretendido (Godino, Batanero, &

Font, 2007), e informan de dificultades y errores que muestran nuestros estudiantes en el desempeño de este concepto, como por ejemplo, la heurística del resultado próximo o falacia del jugador (Savard, 2014) que se manifiesta en nuestro estudio, donde el estudiante considera que el resultado de la siguiente experiencia cambia la tendencia de los resultados obtenidos. Por otra parte, se describe una secuencia de enseñanza que puede ser implementada en cualquier nivel inicial de introducción al azar y la probabilidad. En este sentido, la revisión de investigaciones que se presenta en este trabajo también ayudará al profesor en la comprensión del razonamiento probabilístico de sus estudiantes. Por ejemplo, Green (1983) observa la tendencia de sus estudiantes en indicar rachas cortas en las secuencias simuladas, resultado que se manifiesta en nuestro estudio.

Este trabajo puede ser completado con otras experiencias relacionadas, como por ejemplo, con el uso de la tecnología a través de applets, que reforzarán los contenidos trabajados en clase a la vez que permitirán a los estudiantes avanzar en su aprendizaje. Como sugieren Eichler y Vogel (2014), el uso de la simulación en el aula permite explorar modelos existentes a través de experimentos concretos, en nuestro caso el lanzamiento de una moneda.

Agradecimientos

Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación? In J. A. Fernandes, F. Viseu, M. H. Martinho & P. F. Correia (Eds.), *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 9-21). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Batanero, C., & Serrano, L. (1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *UNO*, *5*, 15-28.

Batanero, C., & Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(5), 558-567.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The Nature of Chance and Probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Borovcnik, M., & Peard, R (1996). Probability. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.). *International handbook in mathematics education* (pp. 239-288). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Eichler, A., & Vogel, M. (2014). Three approaches for modelling situations with randomness. In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking. Presenting plural perspectives* (pp. 75-99). Berlin, Heidelberg: Springer.

Falk, R., Falk, R., & Levin, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics*, *11*, 181-204.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Ghiglione, R., & Matalón, B. (1989). *Las encuestas sociológicas*. México: Trillas.

Godino, J. D., & Batanero, C (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Cañizares, M. J. (1991). *Azar y Probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D. Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Green, D. R. (1983) A Survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D. R Grey, P. Holmes, V. Barnett & G. M. Constable (Eds), *Proceedings of the ICOTS 1* (Vol. 2, pp. 766-783). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

Green, D. R (1991) *A longitudinal study of pupil's probability concepts*. Loughborough, UK: University of Loughborough.

Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, *6*, 59-98.

Konold, C. (1995). Confessions of a coin flipper and would-be instructor. *The American Statistician*, *49*(2), 203-209.

León, O. G., & Montero, I. (2002). *Métodos de investigación*. Madrid: Mc Graw Hill.

MECD. (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Autor

Ministério da Educação (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa de matemática para o ensino básico*. Lisboa: Autor.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Pfannkuch, M., & Ziedins, I. (2014). A modelling perspective on probability. In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking. Presenting plural perspectives* (pp. 101-116). Berlin, Heidelberg: Springer.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Savard, A. (2014). Developing probabilistic Thinking: What about people's conceptions?. In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking. Presenting plural perspectives* (pp. 283-298). Berlin, Heidelberg: Springer.

Weber, R. P. (1985). *Basic content analysis*. Londres: Sage.

Estilos de Aprendizagem na Disciplina de Matemática em Alunos Portugueses do 10.º ano – estudo piloto

Miguel Figueiredo[1], Henrique Manuel Guimarães[2]
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, [1]*mafigueiredo@campus.ul.pt*, [2]*hmguimaraes@ie.ulisboa.pt*

Resumo. *Este estudo insere-se num projeto de investigação em desenvolvimento no âmbito do doutoramento em Educação, na especialidade da Didática da Matemática. São apresentados os elementos principais do quadro teórico do projeto, a metodologia, o instrumento de recolha de dados e os resultados de uma aplicação desse instrumento no âmbito de um estudo-piloto com uma amostra de 108 alunos. O objetivo do estudo consiste na identificação dos estilos de aprendizagem na disciplina de Matemática A e das componentes que os formam, em estudantes portugueses do 10.º ano, e da relação desses estilos com o desempenho escolar nessa disciplina. As componentes a considerar na composição de cada estilo de aprendizagem são as seguintes: estratégias de processamento, estratégias de regulação da aprendizagem, orientações motivacionais e crenças sobre a aprendizagem, de acordo com o modelo de regulação dos processos de aprendizagem proposto por Vermunt e Van Rijswijk (1988). O estudo, de natureza quantitativa, incidiu sobre uma amostra de alunos do 10.º ano, aos quais foi submetido um questionário baseado no ILS (Inventory of Learning Styles) de Vermunt (1998), mas adaptado para alunos do ensino secundário e para a aprendizagem da matemática. Os dados serão tratados através de análise correlacional, nomeadamente análise fatorial. Os resultados do estudo-piloto apontam para a confirmação de dois dos estilos de aprendizagem definidos por Vermunt e para a pertinência da sua caracterização em função das quatro componentes do modelo de regulação dos processos de aprendizagem, acima referido. Foram também observadas as tendências, por parte dos alunos cujo estilo é orientado para o significado, para um maior sucesso na aprendizagem da matemática e para uma maior consciência dos respetivos resultados.*

Palavras-chave: *estilos de aprendizagem; matemática; 10.º ano.*

Abstract. *This document presents a research project, developed in the frame of a doctorate program in Didatics of Mathematics, explaining the core elements of its theoretical framework and some preliminary results of a pilot study that used a sample of 108 students. The research aims at to identify the 10th grade Poruguese students learning styles for Matemática A, as well as its components, and to relate these styles to their performance in mathematics. The components to be considered in the assembling of each learning style are the following: processing strategies, regulation strategies, motivational orientations and beliefs about learning, according to the model of learning processes regulation proposed by Vermunt and Van Rijswijk (1988). The study is of a quantitative nature and focused on a sample of 10th* *grade pupils who answered a questionnaire based on Vermunt's (1998) ILS (Inventory of Learning Styles), adapted to secondary school pupils and to mathematics learning. The obtained data will be subjected to correlation analysis, namely factorial analysis. The results of the pilot study point out to the confirmation of two of the learning styles defined by Vermunt and to the pertinence of their description through the above mentioned four components of the learning processes regulation model. We´ve also observed that those pupils that show a meaning oriented learning style tend to be more successful in mathematics learning and also more aware to their learning results.*

Keywords: *learning styles; mathematics; 10th grade.*

Introdução

Tendo em conta o interesse em aprofundar o conhecimento sobre as diferentes formas como os alunos aprendem matemática, o objetivo da investigação em curso consiste na identificação dos estilos de aprendizagem na disciplina de Matemática A e das componentes que os formam, em estudantes portugueses do 10.º ano, bem como a relação desses estilos com o desempenho escolar nessa disciplina. O modelo a aplicar será o modelo construtivista de Vermunt (Vermunt & Van Rijswijk, 1988; Vermunt, 1996, 1998, 2005). Os autores analisaram outros modelos, nomeadamente da autoria de Kolb (Kolb, 1984; Kolb & Kolb, 2005), Felder e Silverman (1988) e Honey e Mumford (1992), optando pelo modelo de Vermunt devido à forma como integra os diferentes conceitos ligados à aprendizagem e à fiabilidade do questionário construído com base no modelo.

O referido modelo é composto por quatro componentes, conforme a figura 1.

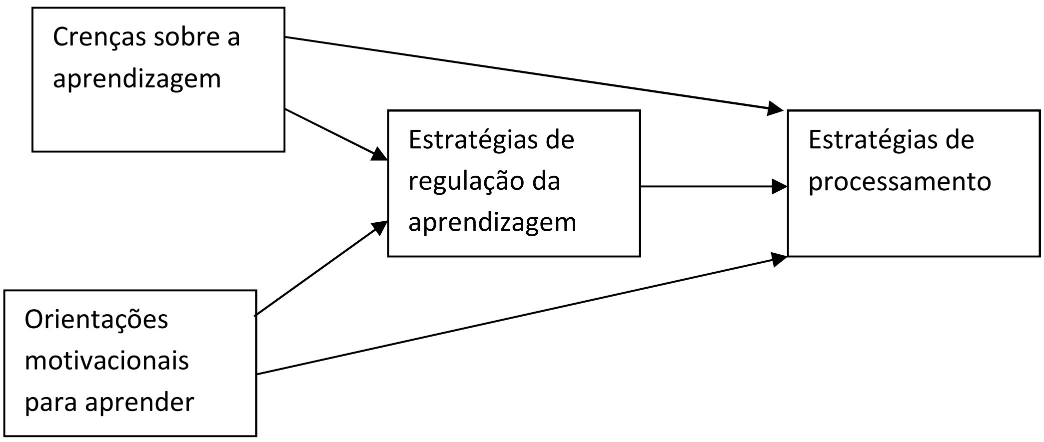


Figura 1. Modelo da regulação dos processos de aprendizagem construtiva (Vermunt, 1998).

As formas como estas componentes se agrupam entre si definem os quatro estilos de aprendizagem (Vermunt & Van Rijswijk, 1988; Vermunt, 1996, 1998, 2005): orientação para a reprodução, orientação para o significado, orientação para a aplicação e não-orientado. Um exemplo de caracterização destes quatro estilos, consistente com os resultados de Vermunt e Van Rijswik (1988), poderá ser observado no quadro 1 (página 7). Havendo poucos trabalhos desenvolvidos em Portugal nesta temática e considerando o interesse em conhecer quais os estilos de aprendizagem dos alunos portugueses e como se estruturam ao nível das suas componentes, após a transição do ensino básico para o secundário, as questões do estudo são as seguintes:

Q1 – Que crenças sobre a aprendizagem da matemática são predominantes em estudantes portugueses do 10.º ano?

Q2 – Quais são as orientações motivacionais para o estudo da matemática em estudantes portugueses do 10.º ano?

Q3 – De que forma se processa a regulação da aprendizagem da matemática por estudantes portugueses do 10.º ano?

Q4 – Quais são as estratégias de processamento cognitivo desenvolvidas por estudantes portugueses do 10.º ano na disciplina de Matemática?

Q5 – Que estilos de aprendizagem no âmbito da matemática estão mais presentes em estudantes do 10.º ano?

Q6 – Que correlações existem entre o desempenho matemático e os estilos de aprendizagem encontrados ou entre o desempenho matemático e cada uma das quatro componentes do modelo de Vermunt, em estudantes portugueses do 10.º ano?

Quadro conceptual

Os estilos de aprendizagem, numa perspetiva socioconstrutivista (Goldin, 1989), que tomamos como paradigma, são evolutivos, estando a sua evolução dependente de fatores pessoais e de fatores contextuais. Apesar de o presente estudo não ser do tipo longitudinal e portanto se limitar a uma observação sincrónica dos estilos de aprendizagem, propõe-se um quadro conceptual onde surgem variáveis que, mesmo não sendo medidas no presente estudo, são consideradas no quadro por condicionarem as quatro componentes que definem o estilo de aprendizagem, conforme está esquematizado na figura 2. Desta forma, pretende-se contextualizar as questões do estudo, bem como deixar pistas para futuros estudos sobre a forma como os fatores que compõem os estilos de aprendizagem podem evoluir de acordo com diversas variáveis pessoais ou contextuais.

Crenças sobre a aprendizagem e orientações motivacionais

- Construção do conhecimento – a aprendizagem é tida como uma edificação do conhecimento, num processo em que o novo conhecimento se alicerça nos conhecimentos já aprendidos;

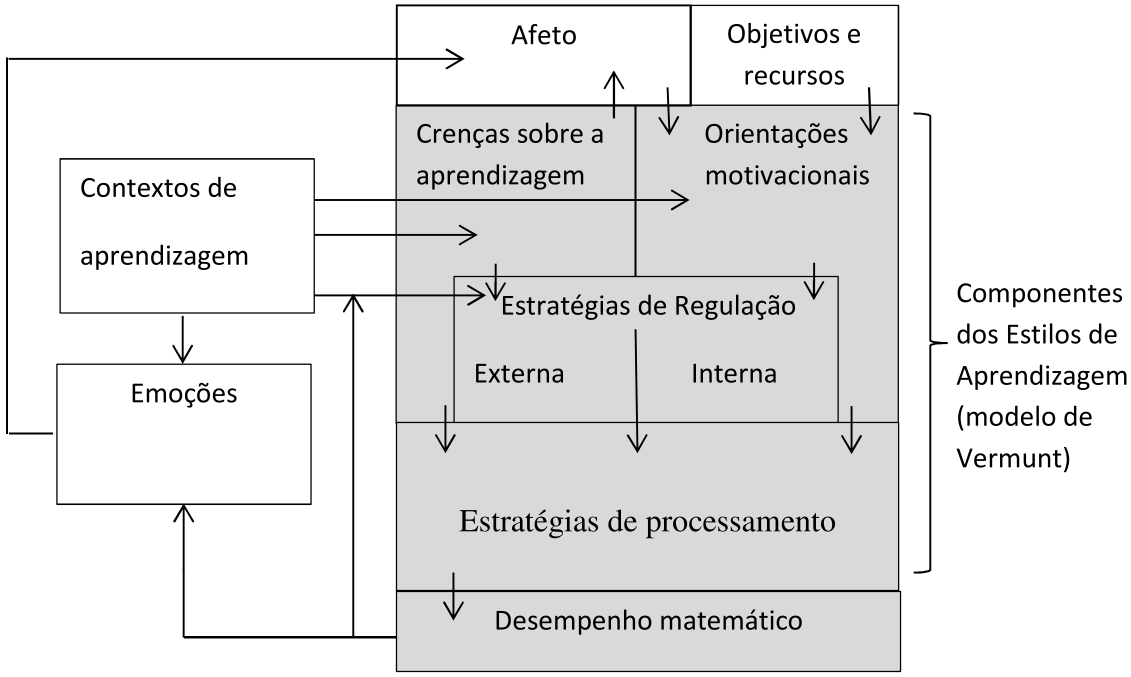


Figura 2. Quadro conceptual do estudo, com as variáveis a medir assinaladas a cinzento (esquema global de nossa autoria, contendo o modelo de Vermunt).

- Uso do conhecimento – a aprendizagem é vista como a aquisição de conhecimento utilizável, por via da concretização ou da personalização, numa base de utilidade pessoal;

- Ensino estimulante – a aprendizagem decorre de um ensino que estimula o uso pelos estudantes de actividades de processamento dos conteúdos matemáticos e de regulação da forma de estudar;

- Aprendizagem cooperante – é valorizada a realização de atividades de aprendizagem em grupos de alunos.

No que se refere a orientações motivacionais, é reconhecido que a motivação dos alunos depende das suas necessidades e objetivos (Hannula, 2006) e poderemos indicar como exemplo dessa ligação a pesquisa realizada por Hoyles (1982), na qual a investigadora observa que há alunos que estudam matemática desejosos de a descobrir, outros que a tomam como um desafio às suas capacidades, outros apenas desejosos de obter soluções corretas e outros apenas preocupados com as avaliações. Tais observações estão refletidas no modelo que está inserido no quadro conceptual da figura 2, o qual considera os seguintes tipos de orientação motivacional:

- Orientação para a certificação – a motivação do aluno para estudar consiste em ter as avaliações necessárias para a obtenção de um grau académico ou de um diploma;

- Orientação para autodiagnóstico – o aluno estuda para mostrar a si próprio e aos outros que é capaz de atingir os objetivos curriculares;

- Orientação vocacional – o aluno estuda para obter aptidões profissionais que lhe permitam obter determinado tipo de emprego;

- Interesse pessoal – o aluno estuda por gostar e ser curioso em relação às matérias em estudo e para se sentir enriquecido pessoalmente.

- Orientação ambivalente – o aluno não tem uma atitude clara em relação às suas opções curriculares e sente-se inseguro quanto às suas capacidades.

Estratégias de regulação da aprendizagem e estratégias de processamento cognitivo

No modelo de Estilos de Aprendizagem a utilizar (Vermunt & Van Rijswijk, 1988; Vermunt, 1996, 1998, 2005), as estratégias de regulação dividem-se em três categorias:

- Regulação externa – o aluno deixa que o seu próprio processo de aprendizagem seja regulado por fonte externa como, por exemplo, o professor.

- Regulação interna – também designada por auto-regulação, na qual o aluno define as suas próprias estratégias de processamento, e actua estabelecendo objetivos, planeando, monitorizando, corrigindo, avaliando e refletindo.

- Falta de regulação – não se trata propriamente de uma estratégia de regulação, mas sim da ausência de qualquer tipo de regulação, pelo que o aluno não sabe o que fazer para aprender.

Em relação ao processamento cognitivo, Vermunt (1998), na segunda versão do seu ILS (*Inventory of Learning Styles*), considera três categorias de estratégias:

- Processamento profundo - caracterizado por operações cognitivas de relacionamento e estruturação de objetos ou conceitos, bem como de apreciação crítica.

- Processamento sequencial – assente na memorização e na análise elementar passo-a-passo.

- Processamento concreto – focado nas matérias de utilidade prática, relaciona os respetivos conteúdos com as suas próprias experiências.

Estilos de aprendizagem

Uma das definições mais utilizadas de "estilo de aprendizagem" é a que foi elaborada em 1979 nos EUA pela *NASSP (National Association of Secondary School Principals)*:

> Estilo de aprendizagem é o conjunto de características dos domínios cognitivo, afectivo e fisiológico que funcionam como indicadores relativamente estáveis de como um aluno percepciona o ambiente de aprendizagem, como interage com ele e como lhe responde. (Keefe, 2001, p. 140)

O modelo que serve de base ao presente estudo, como referimos, assenta numa perspetiva construtivista (Vermunt & Van Rijswijk, 1988; Vermunt, 1996, 1998, 2005) e define os estilos de aprendizagem recorrendo a quatro componentes da aprendizagem: estratégias de processamento cognitivo, estratégias de regulação, perspectivas dos estudantes quanto à aprendizagem e orientações motivacionais. É a forma como estas componentes se agrupam que define cada um dos estilos de aprendizagem (Quadro 1). Num dos poucos estudos em que foi aplicado o ILS (*Inventory of Learning Styles*) de Vermunt no ensinosecundário, De Maeyer e Van Petegem (2003) levaram a cabo, na Bélgica, uma pesquisa na qual verificaram a validade do seguinte quadro analítico, como ferramenta de avaliação dos efeitos de um método didático.

Também no ensino secundário, mas neste caso na sua variante profissional, (Slaats, Lodewijks, & van der Sanden, 1999) utilizaram o modelo de Vermunt e detectaram diferenças significativas nos estilos de aprendizagem das diferentes áreas vocacionais, nomeadamente uma maior incidência do estilo orientado para a reprodução nos cursos da área comercial. Em Portugal, um estudo sobre os estilos de aprendizagem no ensino superior (Rocha & Ventura, 2011) também obteve resultados consistentes com o modelo de Vermunt, numa amostra não-aleatória composta maioritariamente por alunos da Universidade Católica Portuguesa. Também neste estudo, o estilo orientado para a reprodução sobressai nos cursos da área de Gestão.

Quadro 1.

Os estilos de aprendizagem e as respetivas componentes numa aplicação do modelo de Vermunt (Fonte: De Maeyer & Van Petegem, 2003)

ESTILO DE APRENDIZAGEM / COMPONENTES	ORIENTADO PARA O SIGNIFICADO	ORIENTADO PARA A REPRODUÇÃO	ORIENTADO PARA A APLICAÇÃO	NÃO-ORIENTADO
ESTRATÉGIAS DE PROCESSAMENTO COGNITIVO	Processamentos relacionais e críticos	Memorização e análise	Concretização e aplicação	Não especificáveis
ESTRATÉGIAS DE REGULAÇÃO DA APRENDIZAGEM	Auto-regulação	Regulação externa	Mista (interna e externa)	Sem regulação
ORIENTAÇÕES MOTIVACIONAIS	Interesse pessoal	Certificação e realização de provas de avaliação	Ocupacional/laboral	Ambivalente
CRENÇAS SOBRE A APRENDIZAGEM	Construção do conhecimento	Absorção do conhecimento	Aplicação de conhecimentos	Ensino estimulado e trabalho de grupo

Opções metodológicas

Tendo em conta o objectivo e as questões de investigação estabelecidas, nomeadamente no que respeita à relação dos estilos de aprendizagem com as componentes do modelo de Vermunt e com o desempenho escolar, optou-se por um estudo quantitativo de análise correlacional, sendo a população-alvo constituída pelos alunos de Portugal continental, de ambos os sexos, do 10.º ano, cujo programa curricular contém a disciplina de Matemática A. A escolha desta população-alvo reside no interesse em observar estudantes que se encontram perante um salto qualitativo de ciclo de estudos da matemática e que tenham já uma presumível capacidade de interpretar devidamente as questões.

O estudo piloto incidiu sobre uma amostra de 108 alunos, em seis turmas de diferentes escolas. O número de alunos da amostra não foi um ponto de partida, mas sim o resultado do processo a seguir descrito, com o intuito de incluir neste estudo-piloto pelo menos uma escola de cada uma das três grandes regiões administrativas escolares, mantendo a respetiva proporcionalidade. Pela aplicação do método proporcional de Hondt, obtiveram-se três escolas da região Norte, duas escolas da região de Lisboa e Vale do Tejo e uma escola da região Centro. A segunda etapa da amostragem foi o sorteio aleatório das escolas, a partir da listagem de escolas secundárias públicas com ensino regular, por região. Por indisponibilidade de colaboração da escola selecionada da região Centro e de uma das escolas de Lisboa e Vale do Tejo, e tendo em conta as limitações de tempo para o estudo-piloto, foram selecionadas duas novas escolas, de forma não-aleatória, por conveniência de contactos pessoais. A seleção da turma por escola foi efetuada de acordo com a conveniência de horário para o acompanhamento pessoal do preenchimento dos questionários pelo investigador, de forma a garantir a homogeneidade de processos na recolha dos dados nas diferentes escolas.

O instrumento de recolha de dados aplicado foi o questionário baseado no ILS (*Inventory of Learning Styles*) de Vermunt (1994), por nós adaptado para a aprendizagem da matemática por alunos do ensino secundário. Esta adaptação usa os mesmos conjuntos de escalas e subescalas do questionário original, mas as questões foram concebidas para serem facilmente entendidas por alunos do ensino secundário e para focarem especificamente a aprendizagem da matemática. O questionário contém também duas questões: uma questão sobre a nota final obtida no 9.º ano nesta disciplina e outra relativa à auto-avaliação do seu desempenho matemático corrente na disciplina. Estas duas variáveis foram analisadas separadamente, dado que não faria sentido integrá-las numa só variável de avaliação. Tendo em conta o público-alvo do questionário, procurou-se uma solução de compromisso entre fiabilidade e dimensão, limitando-o a 20 escalas ou subescalas, cada uma com 4 questões, de acordo com o quadro 2.

A recolha de dados do estudo-piloto ocorreu na segunda quinzena de maio e na primeira semana de junho de 2015. O instrumento de análise estatística aplicado aos dados foi o *software* SPSS, tendo sido efetuada análise correlacional, nomeadamente fatorial, e testes de igualdade de médias, para além de estatísticas descritivas.

Quadro 2.

Escalas e subescalas do questionário

Componente:	**Escala:**	**Subescala**
Estratégias de Processamento (EP)	Processamento Profundo (PP)	Relacionar e Estruturar (RE)
		Processamento Crítico (PCR)
	Processamento Sequencial (PS)	Memorizar e Recapitular (MR)
		Analisar (A)
	Processamento Concretizante (PC)	
Estratégias de Regulação (ER)	Regulação interna (RI)	Processos e Resultados da Aprendizagem (PRA)
		Conteúdos da Aprendizagem (CA)
	Regulação Externa (RE)	Processos de Aprendizagem (PA)
		Resultados da Aprendizagem (RA)
	Falta de Regulação (FR)	
Orientações Motivacionais (OM)	Interesse Pessoal (IP)	
	Orientação para Certificação (OC)	
	Orientação para Autoteste (OAu)	
	Orientação Vocacional (OV)	
	Orientação Ambivalente (OAm)	
Crenças sobre a Aprendizagem (CA)	Aquisição de Conhecimento (TC)	
	Construção do Conhecimento (CC)	
	Uso do Conhecimento (UC)	
	Educação Estimulante (EE)	
	Aprendizagem cooperante (AC)	

Para melhor compreensão, apresentamos de seguida dois exemplos das questões produzidas para o questionário, referentes às escalas EP/PP/RE e ER/RE/PA:

Perante um problema matemático, tento perceber como se relacionam os diversos dados do problema, antes de o começar a resolver. Nunca ☐ Algumas vezes ☐ Muitas vezes ☐ Sempre ☐
Quando é apresentado um exercício ou um problema matemático para resolver em aula, espero primeiro que os meus colegas ou o professor mostrem como se faz. Nunca ☐ Algumas vezes ☐ Muitas vezes ☐ Sempre ☐

Figura 3. Exemplos de questões produzidas para o questionário.

Resultados preliminares do estudo-piloto

A fiabilidade interna das escalas aplicadas foi determinada através do cálculo do parâmetro alfa de Cronbach (Cronbach, 1951). Duas das escalas não puderam ser consideradas suficientemente fiáveis: "processamento concretizante" (alfa = 0,461) e "crença sobre a aprendizagem com aquisição de conhecimento" (alfa = 0,483). Todas as outras escalas apresentaram uma fiabilidade aceitável, mas não elevada, com valores de alfa situados entre 0,518 e 0,794. No conjunto das dezasseis escalas, seis apresentaram um valor de alfa superior a 0,7. Ainda no que respeita à validação interna das escalas, foram observados os seguintes parâmetros:

- valor máximo de assimetria = 1,537 (limite máximo aceitável = 3);
- valor máximo de curtose = 2,078 (limite máximo aceitável = 7).

Note-se que, apesar de o método de amostragem pretendido ser quasi-aleatório, a substituição de duas escolas na amostra impede a extrapolação dos resultados para a população. Em todo o caso, o principal objetivo do estudo-piloto era o de detetar e de prevenir, tanto quanto possível, os problemas que possam surgir no próximo estudo, mais alargado, que incidirá sobre uma amostra superior a 500 alunos e abrangerá a totalidade das regiões administrativas escolares de Portugal continental.

Para avaliação da qualidade da análise fatorial foram efetuados previamente os testes de Bartlett e KMO (Kaiser-Mayer-Olkin), com resultados aceitáveis, mas o valor do teste KMO ficou apenas ligeiramente acima do valor de aceitação de 0,5. Desta forma, não foi possível convergir para um pequeno conjunto de fatores com valores próprios superiores a 1, conforme seria desejável. O primeiro fator explica 17% da variância dos dados, o segundo explica 8% e o terceiro apenas explica 5%. No seu conjunto, os três fatores não explicam mais de 30% de variância acumulada. Mesmo assim, foi possível detetar alguma correspondência entre a caracterização destes fatores e os estilos de aprendizagem descritos no enquadramento teórico deste estudo, por via da correlação entre os estilos de aprendizagem resultantes da análise fatorial e as questões que compõem as diferentes escalas do questionário.

O primeiro fator aponta para o estilo orientado para o significado, fortemente associado a uma atitude positiva face à matemática. Destacam-se as seguintes correlações, positivas e significativas, entre este fator e as seguintes variáveis, entendendo por variável o significado de cada questão expressa no questionário (o valor da correlação linear de Pearson é apresentado entre parêntesis):

- Gosto pela aprendizagem da matemática (0,70) – escala: Orientações motivacionais / Interesse pessoal;

- Escolha própria da forma de estudar matemática (0,60) – Estratégias de regulação / Regulação interna;

- Procura de relações matemáticas (0,57) – Estratégias de processamento / Processamento profundo;

- Compreender o significado dos cálculos (0,53) – Crenças sobre a aprendizagem / Construção do conhecimento.

Este mesmo fator apesenta correlações negativas e significativas com as variáveis das escalas “Estratégias de regulação / Falta de regulação” e “Orientações motivacionais / Ambivalentes”. Em valor absoluto, quase todas estas correlações são superiores a 0,50. Desta forma, podemos explicar o estilo de aprendizagem orientado para o significado como caracterizado pela auto-regulação da aprendizagem, pelo uso de estratégias de processamento cognitivo profundo, pela motivação derivada do interesse pessoal pela matemática e pela perspetiva da aprendizagem da matemática como uma construção do conhecimento.

O segundo fator, apesar de explicar apenas 8% da variância, apresenta-se relacionado com o estilo de aprendizagem orientado para a reprodução. As principais variáveis correlacionadas com este fator são as seguintes:

- Dificuldade de lidar com questões diferentes das previamente colocadas pelo professor (0,50) – Estratégias de regulação / Regulação externa;

- Importância de memorizar definições (0,55) – Crenças sobre a aprendizagem / Aquisição de conhecimento;

- Necessidade de aprender matemática por causa das avaliações em outras disciplinas (0,42) – Orientações motivacionais / Orientação para a certificação.

A consistência destas correlações com as variáveis das escalas mencionadas não é tão evidente como para o primeiro fator analisado, mas nota-se uma tendência para as características do estilo de aprendizagem orientado para a reprodução: processamento sequencial, regulação externa, crença na aprendizagem como uma aquisição de conhecimento e motivação pela necessidade de certificação. Também surgem correlações significativas deste fator com as crenças sobre a educação estimulante e com a falta de regulação e, apesar de não se terem registado correlações positivas com a motivação ambivalente, não é notória uma distinção clara, por via deste fator, entre o estilo de orientação para a reprodução e o estilo sem orientação, havendo no entanto uma maior proximidade com o primeiro.

O terceiro fator não evidencia uma relação com o modelo usado, parecendo refletir uma situação em que o aluno não gosta de matemática, mas é auto-regulado. Este fator apresenta algumas correlações positivas com as variáveis da escala de regulação interna, bem como correlações fracas, mas significativas, com as motivações de orientação vocacional e de autoteste. Tal parece refletir uma atitude que poderia ser expressa como: “Eu não estou interessado na matemática, mas consigo lidar com essa disciplina”. Apresentam-se de seguida alguns exemplos de correlações obtidas com este fator:

- Adaptação do método de estudo às matérias (0,45) – Estratégias de regulação / regulação interna;

- Verificação do que aprendeu, antes de um teste escrito (0,45) - Estratégias de regulação / regulação interna;

- Gosto por sentir a matemática como um desafio (-0,41) – Orientações Motivacionais / orientação para o autoteste;

- Expetativa de usar a matemática no futuro profissional (-0,41) – Orientações motivacionais / orientação vocacional.

É interessante observar no quadro 3 os resultados das correlações entre os dois primeiros fatores obtidos por via da análise fatorial e as respostas às questões relacionadas com a avaliação. Podemos concluir que, em certa medida (correlação baixa, mas significativa), os alunos que apresentam um estilo de aprendizagem orientado para o significado tendem a obter melhores resultados na avaliação da aprendizagem da matemática, contrariamente ao que sucede com os alunos cujo estilo é orientado para a reprodução. Além disso, enquanto os valores das correlações entre cada um dos fatores e a avaliação pela escola são simétricos, tal não sucede nas correlações destes fatores com a auto-avaliação. Este resultado mostra que os alunos que apresentam um estilo orientado para o significado são muito mais conscientes dos resultados da sua aprendizagem da matemática ($r = 0,731$) do que os alunos de estilo orientado para a reprodução ($r = -0,198$, com um nível de significância inferior a 0,05). Esta observação é consistente com a caracterização do estilo de orientação para o significado pela regulação interna dos resultados da aprendizagem.

Quadro 3.

Correlação linear (Pearson) entre os dois primeiros fatores obtidos com a análise factorial e as respostas às questões sobre a avaliação

r = Correlação (Pearson) s = Signif. (2-tailed)	Avaliação escolar (no final do 9.º ano)	Auto-avaliação corrente
Factor 1 (Estilo orientado para o significado)	r = 0.422 s = 0.000	r = 0.731 s = 0.000
Factor 2 (Estilo orientado para a reprodução)	r = -0.403 s = 0.000	r = -0.198 s = 0.047

Tomando cada um dos fatores encontrado na análise factorial como uma nova variável, não foram encontradas diferenças significativas entre as respetivas médias por escola, para um nível de significância de 0,05, usando o teste Oneway-Anova. No entanto, com o mesmo teste aplicado às variáveis relacionadas com a avaliação, foram detetadas diferenças significativas entre as escolas para a variável de avaliação escolar, mas não para a de auto-avaliação. No conjunto das componentes que definem os estilos de aprendizagem, apenas a que respeita às orientações motivacionais revelou um número considerável de variáveis (50%) com diferenças significativas entre escolas, provavelmente devido às diferenças socioculturais nos contextos de aprendizagem dos respetivos alunos.

Conclusões do estudo-piloto

Em síntese, o estudo-piloto mostrou que o estilo orientado para o significado, fortemente associado a uma afetividade positiva para com a matemática, é aquele que surge melhor definido pelas características das suas componentes, com base na variabilidade dos dados obtidos. Tais características são a auto-regulação da aprendizagem, o uso de estratégias de processamento profundo, a motivação gerada pelo interesse pessoal e a perspetiva da aprendizagem da matemática como construção do conhecimento. Embora de forma menos evidente, os dados revelam também o estilo de aprendizagem orientado para a reprodução, o qual assenta em estratégias de processamento sequencial, na regulação externa, na perspetiva da aprendizagem como aquisição de conhecimento e na motivação para aprender induzida pela necessidade de certificação. Contudo, os dois fatores associados a estes estilos apenas explicam a variância de uma quarta parte da amostra e os outros dois estilos de aprendizagem do modelo não foram identificados no estudo-piloto. Outro resultado obtido foi a tendência observada de os alunos com o estilo de aprendizagem orientado para o significado terem melhores avaliações e maior consciência dos resultados da aprendizagem que os alunos de estilo orientado para a reprodução. Foi também observado que embora não tendo encontrado diferenças entre as escolas da amostra quanto à auto-avaliação dos alunos, foram evidenciadas diferenças nas notas finais obtidas no 9.º ano, na disciplina de Matemática.

Evolução do estudo

Ainda aguns meses antes da recolha de dados do estudo-piloto, solicitei a alguns investigadores de diversas Universidades e Institutos Superiores, tanto portugueses como estrangeiros, uma apreciação de validação externa do questionário, apesar de o mesmo ser uma versão adaptada de um questionário já largamente aplicado. O propósito da validação externa foi o de assegurar que as questões colocadas são pertinentes face ao respetivo objetivo ou seja, que contribuem para obter uma medida da atitude ou do comportamento em questão. Inerente a este propósito, está naturalmente a recolha de críticas e sugestões relativas ao questionário. Obtive duas apreciações, as quais no entanto não chegaram a tempo de melhorar o questionário do estudo-piloto, mas foram já consideradas no questionário do estudo mais alargado do projeto, o qual está já na fase de recolha de dados.

A nova versão do questionário alterou substancialmente a versão anterior, com base em três vetores de modificação: a incorporação da maior parte das sugestões provenientes da validação externa, a análise estatística fina para identificação das questões que afetaram a fiabilidade das escalas, conduzindo à respetiva reformulação e a adenda de vinte novas questões, de modo a que nenhuma escala ou subescala ficasse com menos de cinco questões. Pretende-se desta forma melhorar a fiabilidade das escalas e obter resultados mais significativos. Conforme verificado nos preenchimentos do questionário já efetuados, o aumento do número total de questões não teve efeito significativo no tempo de preenchimento, devido à alteração simultânea do respetivo grafismo, que o tornou não só mais atrativo, como também mais fácil de preencher. Entretanto, foi selecionada a amostra mais alargada do estudo, a qual se pretende mais representativa da população de alunos do 10.º ano com Matemática A, abrangendo todas as regiões administrativas escolares de Portugal continental. Tal implicou a seleção de 28 escolas, dado que se pretende uma turma por escola, conduzindo a uma amostra superior a 500 alunos, se tivermos em conta o número médio de alunos por turma obtido no estudo-piloto. O método de amostragem foi idêntico ao do estudo piloto, tendo sido selecionadas onze escolas da região Norte, seis escolas da região Centro, oito escolas da região de Lisboa e vale do Tejo, duas escolas da região do Alentejo e uma escola da região do Algarve. Tencionamos ter as recolhas concluídas até ao final do segundo período de aulas.

Relativamente ao contexto de aplicação dos questionários, há que assinalar um elemento que poderá ter alguma influência nos resultados. O programa de Matemática A dos alunos da amostra atualmente em sondagem é já o da última revisão curricular (MEC, 2014), sendo também a primeira vez que a maioria dos professores leciona um programa cujas opções didáticas e pedagógicas são substancialmente diferentes das que estavam subjacentes ao programa anterior (MEC, 2001), com toda a perturbação que tal pode causar no processo de aprendizagem. Assim sendo, a análise dos resultados do estudo será efetuada apenas com base nos dados atualmente em recolha, sem comparação ou confluência como os resultados do estudo-piloto.

Referências bibliográficas

Cronbach, L. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, *16*(3), 297-334.

De Maeyer, S., & Van Petegem, P. (2008). *How an instrument for measuring learning styles can be used to evaluate an innovative policy*. University of Antwerp, Antwerp, Belgium.

Felder, R., & Silverman, L. (1988). Learning styles and teaching styles in engineering education. *Engineering Education*, *78*, 674-681.

Goldin, G. (1989). Constructivist epistemology and discovery learning in mathematics. *Proceedings of PME 13* (vol. 2, pp. 15-22). Paris, France: PME.

Hannula, M. S. (2006). Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics*, *63*, 165-178.

Honey, P., & Mumford, A. (1992). *The manual of learning styles*, 3rd Ed. Maidenhead, U.K.

Hoyles, C. (1982). The pupil's view of mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, *13*, 349-372.

Keefe, J. (2001). Assessment of learning style variables: The NASSP task force model. *Theory into Practice*, *24*, 138-144.

Kolb, A., & Kolb, D. (2005). *The Kolb learning style inventory – Version 3.1 – 2005 Technical specifications*. Boston, U.S.A and London, U.K.: Hay Group.

Kolb, D. (1984). *Experiential learning: Experience as the source of learning and development*. Englewood Cliffs, NJ, U.S.A.: Prentice-Hall.

MEC (2001). *Matemática A, 10.º ano.* Lisboa. MEC-DES.

MEC (2014). *Programa e metas curriculares: Matemática A, Ensino Secundário.* Lisboa: ME-DGE.

Rocha, M., & Ventura, M. (2011). *Vermunt's* learning styles: Searching for Portuguese college students' functioning. *Revista de Estilos de Aprendizaje*, *8*, 46-66.

Slaats, A. Lodewijks, H., & Van der Sanden, J. (1999). Learning styles in secondary vocational education: Disciplinary differences. *Learning and Instruction*, *9*, 475-492.

Vermunt, J., & Van Rijswijk, F. (1988). Analysis and development of students' skill in selfregulated learning. *Higher Education*, *17*, 647-682.

Vermunt J. (1994). *Scoring key for the inventory of learning styles (ILS) in higher education – 120 item version*. Department of Educational Psychology, Tilburg University, The Nederlands.

Vermunt, J. (1996). Metacognitive, cognitive and affective aspects of learning styles and strategies: A phenomenographic analysis. *Higher Education*, *31*, 25-50.

Vermunt, J. (1998). The regulation of constructive learning processes. *British Journal of Educational Psychology*, *68*, 149-171.

Vermunt, J. (2005). Relations between student learning patterns and personal and contextual factors and academic performance. *Higher Education*, *49*, 205-234.

Perspetivas dos alunos sobre o erro como estratégia de aprendizagem

Paula Maria Barros[1], *José António Fernandes*[2], *Cláudia Mendes Araújo*[3]
[1]ESTiG, Instituto Politécnico de Bragança, *pbarros@ipb.pt*
[2]CIED, Universidade do Minho, *jfernandes@ie.uminho.pt*
[3]Centro de Matemática, Universidade do Minho, *clmendes@math.uminho.pt*

Resumo. *No presente texto apresenta-se parte de um estudo que se realizou com alunos de engenharia do ensino superior politécnico no âmbito da unidade curricular Álgebra Linear e Geometria Analítica. Mais especificamente, analisa-se, do ponto de vista dos alunos participantes, o contributo para a sua aprendizagem de uma estratégia de ensino que envolveu tarefas que pretendiam promover a reflexão e discussão sobre os erros e as dificuldades no domínio da álgebra linear. De acordo com as opiniões dos alunos, constata-se que a resolução de tarefas em que tinham de analisar as resoluções realizadas por outros alunos, a discussão em grande grupo e o processo de revisão/reformulação dos trabalhos tiveram, em termos gerais, efeitos positivos para a sua aprendizagem.*

Palavras-chave: *erros; aprendizagem; álgebra linear; ensino superior.*

Abstract. *In this paper we present part of a study that was conducted with engineering students that attended the course of Linear Algebra and Analytical Geometry. More specifically, it is analyzed, from students' point of view, the contribution of a teaching strategy which involved tasks intended to promote reflection and discussion about the mistakes and difficulties in the field of linear algebra to their learning. According to the students' opinions, the resolution of tasks where they had to analyze the resolutions made by other students, the discussion in large group and the process of review/redesign of the work had, in general, positive effects for their learning.*

Keywords: *errors; learning; linear algebra; higher education.*

Introdução

A importância de investigações sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra Linear resulta do facto dela se encontrar subjacente a quase todos os domínios da matemática e até mesmo de outras áreas, como as Ciências da Computação, a Engenharia e a Física. Consequentemente, torna-se imprescindível que aqueles que pretendam trabalhar com as ciências que utilizam a matemática, tanto como objeto de seu estudo quanto como instrumento, tenham domínio sobre os seus principais conceitos (Coimbra, 2008; Machado, 2004).

No entanto, verifica-se que a Álgebra Linear é uma fonte de dificuldades para muitos alunos do ensino superior (Barros, Araújo, & Fernandes, 2012; Barros, Fernandes, & Araújo, 2013; Coimbra, 2008; Celestino, 2000; Dorier, 2000). Como afirmam Dorier, Robert, e Sierpinska (2000), “há um amplo consenso em afirmar que tanto o ensino como a aprendizagem da álgebra linear são difíceis” (p. 273). Corroborando esta afirmação, Gueudet-Chartier (2004) refere que “é um facto bem conhecido que os estudantes consideram este assunto difícil” (p. 491) e Hillel (2000) diz até que “o ensino da álgebra a um nível universitário é quase universalmente considerado como uma experiência frustrante para professores e estudantes” (p. 191).

Coloca-se, então, a questão de como promover um ensino da Álgebra Linear que, para além de manter os alunos motivados, permita que estes desenvolvam as competências consideradas essenciais para um bom desempenho no presente e no futuro, sempre que precisarem de recorrer a esses conhecimentos. Como alegam Ramos, Delgado, Afonso, Cruchinho, Pereira, Sapeta e Ramos (2013), “para além do professor do ensino superior dever continuar a preocupar-se com o domínio científico dos conteúdos a trabalhar com os seus estudantes, também deve passar a dar atenção ao que se passa ao nível do ambiente de aprendizagem relativo às unidades curriculares que ministra” (p. 117).

Tendo como cenário esta preocupação e tendo em atenção que a reflexão e discussão sobre os erros pode ser um ponto de partida para os estudantes participarem ativamente na sua superação (Pochulu, 2004; Socas, Camacho, & Palarea, 1989), efetuou-se um estudo (última etapa de uma investigação mais ampla), envolvendo estudantes do ensino superior politécnico, com o intuito de responder, entre outras, à seguinte questão de investigação: Qual o impacto de um ensino centrado na exploração dos erros e dificuldades sobre a aprendizagem dos estudantes em Álgebra Linear?

Neste contexto, realizou-se uma experiência em sala de aula que, para além de outros objetivos, visou a utilização do erro numa perspetiva construtivista utilizando-o como estratégia de ensino (Pinto, 2008; Borasi, 1996). Dentro desta perspetiva, propuseram-se aos alunos tarefas que levassem à discussão de erros e dificuldades já evidenciadas noutras etapas da investigação (ver Barros et. al, 2012, 2013). Assim, neste texto apresenta-se o contributo que esta experiência teve para a aprendizagem dos alunos do ponto de vista dos próprios participantes, particularmente no que diz respeito às estratégias mais diretamente ligadas à reflexão e discussão sobre os erros.

A importância do erro para o ensino e a aprendizagem

Godino, Batanero e Font (2003) consideram que:

> todas as teorias sobre o ensino-aprendizagem de matemática coincidem na necessidade de identificar os erros dos alunos no processo de aprendizagem, determinar as suas causas e organizar o ensino tendo em conta essa informação. O professor deve ser sensível às ideias prévias dos alunos e utilizar as técnicas do conflito cognitivo para conseguir o progresso na aprendizagem. (p. 69)

No entanto, como referem Quinzá-Torroja, Escalona e Macías (2004), focando o ensino tradicional no contexto universitário, nos primeiros anos da universidade os erros detetam-se principalmente nos exames e remedeiam-se mandando os alunos ao exame seguinte. Alertam ainda para o facto de que a ajuda para superar um erro, que consiste em contrapor o argumento errado do aluno com a verdade institucional, e exigir a sua imediata substituição sem nenhuma outra justificação, é inadequada.

No mesmo sentido, Pochulu (2004) considera que a simples correção sistemática dos erros não favorece a sua eliminação, advogando que se devem usar estratégias em sala de aula que propiciem a discussão dos erros. Na sua opinião, "dar lugar ao erro na aula é trabalhá-lo, descobrindo as hipóteses falsas que levaram a produzi-lo, buscando os caminhos possíveis até redescobrir os conceitos válidos e matematicamente aceites, comparando versões corretas com errôneas, etc." (p. 12). Assim, o autor defende que os erros devem ser descobertos pelos alunos a partir de um debate com o professor, sendo esta uma forma de participarem ativamente no processo de superação dos próprios erros.

Também Cury (2004) considera que é possível fazer uso da análise de erros em quaisquer circunstâncias, desde que sejam respeitadas as seguintes premissas básicas: devolver ao aluno a análise feita e discutir com ele os resultados; planear estratégias para trabalhar com conteúdos em que há maior incidência de erros, propondo questões que envolvam o interesse dos alunos; aproveitar recursos disponíveis (jogos, material concreto, computadores) para retomar os conteúdos de formas variadas; para cada questão proposta ou tarefa solicitada, fazer uma análise crítica dos erros que surgem no grupo de alunos para aproveitar todas as oportunidades de os fazer pensar sobre o seu próprio pensamento.

Ramos e Curi (2014) referem ser imprescindível criar novas estratégias didáticas para a superação das dificuldades e correção dos erros. Para tal, estes autores recomendam que, depois de analisar minuciosamente a produção escrita do aluno para detetar e identificar os erros cometidos, o professor utilize recursos didáticos intervindo junto ao aluno para que este identifique e seja capaz de corrigir o próprio erro.

Engler, Gregorini, Müller, Vrancken e Hecklein (2004) consideram que, como no processo de construção do conhecimento matemático aparecem sistematicamente erros, o processo de ensino e aprendizagem deverá incluir critérios de diagnóstico, correção e superação mediante atividades que promovam o exercício da crítica sobre as próprias produções. O docente deve fazer com que o aluno enfrente a contradição proveniente do erro e logre eliminar os seus falsos conceitos para que estes não voltem a aparecer. Este processo gera na aula discussões e debates que são de um grande valor para o aluno aprender a partir das suas próprias interações.

Para Funes, Macias e Jiménez (2002), a maioria das vezes, não se faz um uso adequado da informação que os erros trazem acerca do conhecimento dos alunos. Tendo em atenção que alguns conhecimentos prévios podem funcionar como um obstáculo para a aquisição de novo conhecimento, estes autores consideram que é preciso que o processo de construção do conhecimento inclua o diagnóstico e a superação dos erros, devendo o ensino partir de uma conceção do conhecimento que considere o erro como parte constitutiva deste. Uma vez detetados e categorizados os erros, é interessante focar-se no seu estudo para usá-los em benefício da aprendizagem significativa dos alunos. Consideram também que os erros podem ser úteis como motivação, valorizados como tentativas criativas para gerar situações de metacognição onde os alunos analisem os seus próprios processos de aprendizagem. Assim, com base num seminário realizado com 20 professores de diferentes níveis de ensino e de distintos países, que constou da leitura de textos e deteção de erros a partir da seleção de provas de avaliação de alunos de diferentes idades e da discussão sobre as ações em contexto de ensino para superação dos erros analisados e as suas causas, os autores elaboraram as seguintes reflexões que emergiram dessa experiência, tendo em vista a melhoria da prática docente: considerar o currículo um espaço para indagar sobre a gestão da simbologia específica da temática tratada; realizar a devolução aos alunos dos trabalhos com erros e gerar discussões de grupo sobre o assunto; propor situações onde seja possível detetar e diagnosticar dificuldades que conduzem ao erro; estimular entre os alunos o trabalho cooperativo, aberto ao diálogo e à crítica; agrupar os alunos segundo as categorias dos erros que se manifestem, para promoção da consciencialização e reflexão; aplicar estímulos e jogos didáticos que ajudem a superar os erros muito arreigados nos alunos e favorecer reuniões entre docentes para procurar e analisar estratégias que favoreçam a verdadeira aprendizagem.

Metodologia

No estudo realizado optou-se por uma metodologia em que se articularam os métodos quantitativos e qualitativos de acordo com os dados que se pretendiam recolher. Como afirma Günter (2006), "enquanto participante do processo de construção de conhecimento, idealmente, o pesquisador não deveria escolher entre um método ou outro, mas utilizar as várias abordagens, qualitativas e quantitativas que se adequam à sua questão de pesquisa" (p. 207).

A experiência realizada envolveu 28 alunos (Ai, com $1 \leq i \leq 28$) que estavam a frequentar a unidade curricular Álgebra Linear e Geometria Analítica, num curso de engenharia do Ensino Superior Politécnico, que integra o 1.º ano do plano de estudos. Os alunos eram maioritariamente do sexo feminino (78,6%) e tinham idades compreendidas entre os 18 e os 25 anos, sendo as mais frequentes 21 (21,4%) e 22 anos (21,4%). Todos os alunos tinham entrado no ensino superior através de concursos especiais, sendo titulares de um diploma de especialização tecnológica (CET de nível 5). Os alunos ingressaram no curso em três anos letivos distintos, tendo apenas 10 (35,7%) entrado no ano letivo em que se realizou a experiência de ensino. Assim, mais de metade da turma (64,3%) não estava a frequentar a unidade curricular pela primeira vez.

Nas aulas em que as tarefas foram aplicadas, adotou-se uma metodologia de trabalho em pequeno grupo com posterior discussão em grande grupo, podendo os alunos recorrer ao *software Microsoft Mathematics,* sempre que considerassem adequado. Em termos gerais, propôs-se aos estudantes a resolução de tarefas que levassem à discussão dos erros e das dificuldades, como por exemplo, colocar questões em que estivessem em causa conceitos/procedimentos geradores de erros/dificuldades ou explorar "resoluções" de estudantes de modo a promover a discussão acerca da sua correção e análise dos erros cometidos (Figura 1).

1. Considere a afirmação: Se $A(BA^T)$ está definida e B é uma matriz quadrada então A é uma matriz quadrada.

De seguida apresentam-se as respostas de alguns alunos quando analisaram a veracidade da afirmação dada. Diga, justificando, se concorda ou não com os raciocínios apresentados.

Resposta da Florbela:

$A(BA^T) = AB + \underline{AA^T} = AB + I$

I é sempre quadrada.

Então A é uma matriz quadrada.

A afirmação é verdadeira.

Resposta da Maria:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$BA^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A(BA^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 10 & 60 \end{bmatrix}$$

A afirmação é verdadeira.

Resposta da Luisa:

A afirmação é verdadeira, pois caso que A não seja matriz quadrada $m \neq n$, então:

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $A \cdot (BA^T) = A \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \right)$ que é impossível de calcular.

Para que $(B \times A^T)$ seja possível é necessário que A seja uma matriz quadrada.

Figura 1. Exemplo de uma tarefa que envolve a análise de resoluções.

Sempre que o debate referente a tarefas efetuadas numa aula passasse para a semana seguinte, a professora colocava pequenas notas no trabalho alertando para aspetos que teriam de repensar ou reformular e enviava a sua digitalização para o correio eletrónico dos alunos. Desta forma, o que os alunos tinham feito estava mais presente aquando do debate e tinham algum tempo para repensar algumas das suas respostas. Após o debate em grande grupo, os alunos podiam ainda corrigir o trabalho efetuado e reformular o que considerassem adequado.

Para além de se terem recolhido os documentos produzidos pelos alunos aquando da resolução das tarefas, pediu-se-lhes para avaliarem a experiência através da aplicação de um questionário e realizaram-se entrevistas a todos os alunos para complementar esses dados. Estas efetuaram-se após os estudantes já terem sido avaliados à unidade curricular e tiveram uma duração variável, de 50min a 1h40min, pois, embora se seguisse um guião, permitiu-se que cada entrevistado percorresse caminhos distintos dos escolhidos por outros. As entrevistas foram áudio-gravadas e posteriormente transcritas.

Na análise de dados do questionário foram utilizadas técnicas de estatística descritiva, nomeadamente o cálculo de frequências organizadas em tabelas como forma de estruturar e sintetizar a informação. No caso das entrevistas semiestruturadas, na sua análise, seguiram-se essencialmente as categorias previamente definidas no questionário, recorrendo-se às respostas dos alunos para justificar/complementar a informação antes obtida através do questionário.

Apresentação e análise dos resultados

Durante as aulas, os alunos resolveram tarefas em que tinham de analisar as resoluções realizadas por outros alunos sobre os mesmos conteúdos. No questionário, manifestando-se sobre o contributo dessas tarefas para a sua aprendizagem, quase todos os alunos afirmaram concordar ou concordar totalmente com as afirmações consideradas (Tabela 1), à exceção da última afirmação, em que 32,1% dos alunos considerou ter tido mais dificuldades em responder às questões.

Nas entrevistas, os alunos que concordaram ter tido mais dificuldades em responder às questões, explicaram que tiveram dificuldades em identificar a resposta correta, por vezes, devido a não terem presentes os conceitos envolvidos:

> Em parte até têm a sua lógica e são interessantes. Agora a mim custa-me compreendê-las. Olhar para aquilo e dizer por onde é que lhe vou pegar. Esses conceitos [envolvidos na questão] uma pessoa também não os tem presentes e depois acho que ainda se torna mais complicado. (A10)

Tabela 1.

Contributos das tarefas de grupo em que tinham de analisar as resoluções realizadas por outros alunos

Analisar resoluções permitiu	% de estudantes			
	DT	D	C	CT
Aprender a questionar a validade das resoluções	–	7,1	75,0	17,9
Desenvolver a capacidade de distinguir argumentos válidos de não válidos	–	3,6	82,1	14,3
Reconhecer erros que costumo cometer	–	3,6	82,1	14,3
Debater, com os meus colegas, alguns erros que também costumo cometer	–	7,1	78,6	14,3
Refletir sobre a solidez dos meus conhecimentos	–	7,1	89,3	3,6
Clarificar alguns conceitos/procedimentos	–	10,7	82,1	7,1
Ter mais dificuldade em responder às questões	17,9	50,0	32,1	–

Nota: DT – Discordo totalmente; D – Discordo; C – Concordo; CT – Concordo totalmente.

A forma como organizaram o trabalho em grupo, em alguns casos, fez com que também não houvesse propriamente um debate de erros com os colegas: "Nas aulas, como estávamos em grupo, cada um fazia a sua pergunta e depois acabávamos por juntar tudo. Não havia: 'olha deves fazer assim ou se calhar se fizesses assim…'" (A12).

Nas entrevistas, falando sobre as vantagens deste tipo de tarefas, houve estudantes que referiram que este género de questões lhes agradaram porque tinham um ponto de partida por onde começar a resolução, porque os envolviam mais na tarefa, fazendo-os estudar os conceitos/procedimentos aprendidos e ajudava-os a evitar determinado tipo de erros:

> Estas eram interessantes. Eu conseguia perceber o que estava mal e o que estava bem. Porque tinha respostas, tinha exemplos e conseguia. Mas também tínhamos de saber muitos conceitos, tínhamos que perceber os conceitos. Isto fazia com que estudássemos, que voltássemos atrás para ver a definição, o conceito, para ver o que realmente está mal. (A2)

Em algumas aulas houve debate em grande grupo, tendo os alunos sido confrontados com as diferentes resoluções que apresentaram para as tarefas propostas. Expressando a sua opinião sobre esse confronto, quase todos os alunos concordaram ou concordaram totalmente com as doze afirmações consideradas para a avaliação desse processo (Tabela 2).

Nas entrevistas, falando livremente sobre este processo, alguns alunos esclareceram porque é que consideram vantajoso, focando alguns dos aspetos já referenciados na tabela anterior. Assim, há alunos que comentam a vantagem do confronto lhes permitir conhecer diferentes formas de responder às questões ou identificar/corrigir erros:

> Sim, foi vantajoso, porque havia várias maneiras de responder às questões. Então, sabíamos que a nossa estava certa mas a de outros colegas também estava. Então ajudava-nos a ter outras maneiras de fazer exercícios. Agora, quando estava mal, apercebíamo-nos logo que era a nossa [resolução] que estava ali. Isso já era para nós vermos que não fizemos correto. (A14)

Tabela 2.

Contributos da discussão sobre as diferentes resoluções das tarefas

A discussão contribuiu para	% de estudantes			
	DT	D	C	CT
Conhecer outras formas de responder às questões	–	–	82,1	17,9
Identificar os erros que cometi	–	10,7	71,4	17,9
Desenvolver a capacidade de distinguir argumentos válidos de não válidos	–	7,1	82,1	10,7
Aprender a questionar a validade das resoluções	_	3,6	89,3	7,1
Perceber a importância de utilizar os nossos próprios erros como meio de aprendizagem	–	3,6	78,6	17,9
Aprender a refletir melhor sobre as minhas respostas	–	3,6	89,3	7,1
Clarificar alguns conceitos/procedimentos	–	3,6	85,7	10,7
Melhorar a minha capacidade de argumentar	–	3,6	85,7	10,7
Melhorar a minha capacidade de comunicar matematicamente	–	3,6	89,3	7,1
Ultrapassar algumas das minhas dificuldades	–	3,6	85,7	10,7
Participar ativamente nas aulas	–	14,3	71,4	14,3
Aumentar a confiança nas minhas resoluções	–	7,1	78,6	14,3

DT – Discordo totalmente; D – Discordo; C – Concordo; CT – Concordo totalmente.

Há também quem foque o aspeto desse confronto "obrigar" a uma participação mais ativa nas aulas ou constituir uma mais-valia para desenvolver a capacidade de argumentação: "Como aparecia ali o nosso nome, e se alguém tivesse alguma dúvida, nós tínhamos que nos defender e mostrar como é que fizemos aquilo. E isso obrigava-nos a participar de forma ativa, a discutir e argumentar" (A1).

Há, ainda, quem foque o aspeto motivacional pelo facto de acertarem na resposta ou mesmo considerando o erro como um incentivo para melhorarem o seu desempenho:

> Quando fazíamos certo, ficávamos todas felizes, é um ganho saber que nem todos conseguiam resolver e nós tivemos esse privilégio. Quando estava errado, ficávamos desanimadas. (…) Mas ajudou, porque assim podíamos ver onde é que tínhamos errado e corrigir e dizer: 'Para a próxima não vai ser assim, vamos conseguir'. (A18)

Terem faltado a algumas aulas, não terem participado ativamente nas discussões do grupo, em que se resolveram as tarefas, ou terem dificuldade em entender os conteúdos foram razões apresentadas para não desenvolveram algumas das competências que se pretendia alcançar com a discussão em grande grupo. Por exemplo, os alunos A24 e A23, explicando porque é que discordam que o confronto lhes permitiu identificar os erros que cometeram ou participar ativamente nas aulas, comentam: "Se eu não vinha às aulas e não participava, também não me sentia segura para dar a minha opinião sobre aquele exercício" (A24); "Às vezes era um trabalho em que não tinha assim tanto domínio sobre a matéria. Se a professora me perguntasse, já não sabia muito bem o que é que havia de responder" (A23).

O receio de errar fez com que uma aluna discordasse que o confronto lhe permitiu participar ativamente nas aulas:

> Prefiro estar calada do que dizer barbaridades. Às vezes não respondia e era mesmo a resposta que eu pensava. Outras vezes, quando dizia alguma coisa estava mal. Então é melhor estar calada. Se não tenho a certeza, hesito um bocado e fico calada. (A17)

As resoluções dos trabalhos foram objeto de apreciação por parte da professora, sendo, por vezes, devolvidas com sugestões para reformular ou completar as respostas. A maior parte dos alunos concordou ou concordou totalmente com as afirmações que estabelecem uma apreciação favorável deste processo (Tabela 3). Porém, é de realçar que 28,6% dos alunos consideraram que a reformulação era um trabalho acrescido, pelo que nem sempre realizaram as correções solicitadas.

Tabela 3.

Contributos do processo de revisão/reformulação das resoluções dos trabalhos

O processo de reformulação	% de estudantes			
	DT	D	C	CT
Permitiu-me obter um feedback importante sobre o trabalho realizado	–	–	67,9	28,5
Ajudou-me a identificar os erros cometidos	–	–	71,4	25,0
Permitiu-me tomar consciência das minhas dificuldades	–	3,6	64,3	28,5
Fez-me rever alguns conceitos que ainda não tinha compreendido	–	10,7	67,9	17,8
Contribuiu para eu ultrapassar algumas dificuldades	–	7,1	64,3	25,0
Contribuiu para que estivesse mais atento às discussões em grande grupo realizadas na aula, pois podia reformular o que entreguei	–	10,7	67,9	17,8
Era um trabalho acrescido pelo que nem sempre realizei as correções solicitadas	32,1	35,7	28,6	–

DT – Discordo totalmente; D – Discordo; C – Concordo; CT – Concordo totalmente.

Referindo-se nas entrevistas a este aspeto, alguns alunos alegaram que não se empenhavam no estudo, que havia falta de predisposição dos elementos do grupo para se juntarem ou falta de tempo: "Não fazíamos por causa da preguiça. Não nos apetecia fazer, porque há tempo para tudo, que é mesmo assim. (…) Nós é que 'deixamos para amanhã'. É a preguiça, falta de vontade" (A17); "A desvantagem era mesmo só quando tivéssemos que nos juntar em grupo para fazer alguma coisa, de resto não vejo desvantagens" (A22); "Havia alturas que tinha mais coisas para fazer. E quando foi perto das frequências, da entrega de relatórios. Essas coisas às vezes acontecem porque fica sempre alguma coisa para trás" (A10).

Há também alunos que dizem não ter feito todas as reformulações dos trabalhos, não porque considerassem um trabalho acrescido, mas porque tinham dificuldade em coordenar o grupo para se encontrarem: "Muitas vezes, eu e a A3 marcamos um encontro para fazer isso e depois fica muito difícil, porque ela não aparece" (A25).

Nas entrevistas, comentando as vantagens da reformulação dos trabalhos, os alunos referiram-se ao feedback sobre a correção das suas resoluções, à possibilidade de corrigir o erro, aprender com essa correção, evitar a repetição do erro e terem um incentivo para o estudo:

> É muito importante porque vemos onde estão os erros, corrigimos e, tantas vezes insistimos, que até já entra. (…) E permite-nos também ter uma ideia daquilo que fizemos. E rever e estudar, porque, ao fim e ao cabo, estudamos outra vez. (A26)

Mesmo os alunos que não fizeram todas as reformulações dos trabalhos pensam que o processo tem vantagens para a sua aprendizagem, pois consideram que o feedback dado era importante: "Esse trabalho também nos ajudou a ver que erramos. Nós pensávamos que estava bem. Acho que desta forma nos ensina a pensar e a saber onde é que fizemos o erro" (A10).

Conclusões

De acordo com as opiniões dos estudantes, constata-se que a resolução de tarefas em que tinham de analisar as resoluções realizados por outros alunos, a discussão em grande grupo e o processo de revisão/reformulação dos trabalhos teve, em termos gerais, efeitos positivos para a sua aprendizagem. Para além de considerarem que a sua participação nas aulas foi mais ativa, é de realçar que mais de 85% dos alunos concorda ou concorda totalmente que conseguiu clarificar alguns conceitos/procedimentos, desenvolver a capacidade de distinguir argumentos válidos de não válidos, aprender a questionar a validade das resoluções e ultrapassar algumas dificuldades. Tendo ainda a estratégia seguida permitido que os alunos tomassem consciência das suas dificuldades e se apercebessem da incorreção de alguns procedimentos que também costumavam utilizar. Ganhos que confirmam as indicações de Pochulu (2004), Cury (2004) e Engler et al. (2004) sobre a importância da utilização de estratégias que conduzam os alunos a participar ativamente na superação dos seus erros.

No entanto houve condicionantes que poderão ter afetado ou impedido que, em algumas situações, as estratégias seguidas não contribuíssem de maneira significativa para uma progressão na aprendizagem. Um aspeto que sobressai está ligado a aspetos de organização do grupo, como a falta de coordenação dos alunos para se juntarem fora da aula para finalizarem as tarefas, realizarem as reformulações dos trabalhos ou distribuírem as questões a resolver pelos elementos do grupo, levando a que nem sempre todos contribuíssem para a discussão na fase inicial da resolução. De modo similar, Zerr e Zerr (2011), descrevendo um estudo em que os alunos reviam criticamente provas de matemática realizadas pelos pares, com posterior reformulação pelos autores, alertam que a resposta à tarefa em tempo útil e o esforço que os alunos estão dispostos a dispensar para a realizar são fatores que podem comprometer o processo.

Referências bibliográficas

Barros, P. M., Araújo, C. M., & Fernandes, J. A. (2013). Raciocínios de estudantes do ensino superior na resolução de tarefas sobre matrizes. In J. A. Fernandes, M. H. Martinho, J. Tinoco & F. Viseu (Orgs.), *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 295-308). Braga: Associação de Professores de Matemática.

Barros, P. M., Fernandes, J. A., & Araújo, C. M (2012). Raciocínios desenvolvidos na verificação das soluções de sistemas de equações lineares. In H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre & C. Nunes (Ogs.), *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp.333-347). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction – a focus on errors*. Estados Unidos da America: Ablex Publishing Corporation.

Celestino, M. R. (2000). *Ensino-aprendizagem da álgebra linear: as pesquisas brasileiras na década de 90*. (Dissertação de mestrado). Pontíficia Universidade Católica de S. Paulo, S. Paulo.

Coimbra, J. L. (2008). *Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem da álgebra linear*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Pará, Pará.

Cury, H. N. (2004). Análise de erros em educação matemática. *Veritati Salvador*, *3*(4), 95-107.

Dorier, J.-L. (Ed.) (2000). *On the teaching of linear algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J.-L., Robert, A., & Sierpinska, A. (2000). Conclusion. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 273-276). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S., & Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Revista Premisa*, *6*(23), 23-32.

Funes, B. A., Macías, A. M., & Jiménez, A. M. (2002). Los errores como objeto de estudio. In C. R. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (vol. 15, pp. 289-294). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Matemáticas y su Didáctica para Maestros — Manual para el Estudiante.* Acedido em julho 29, 2011, em http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/.

Gueudet-Chartier, G. (2004). Should we teach linear algebra through geometry? *Linear Algebra and its Applications*, *379*, 491-501.

Günter, H. (2006). Esta é a questão? *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, *22*(2), 201-210.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 191-207). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Machado, S. D. (2004). Educação matemática no ensino superior. In *Mesa redonda: "Educação Matemática no ensino superior", Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 34-46). Pernambuco: Universidade Federal de Pernambuco.

Pochulu, M. D. (2004). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matematica en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*, *35*(4). Acedido em julho 29, 2011, em http://www.rieoei.org/deloslectores/849Pochulu.pdf.

Pinto, N. B. (2008). Erro: Uma estratégia para a diferenciação do ensino. In M. André (Org.), *Pedagogia das diferenças na sala de aula* (pp.47-79). São Paulo: Papirus.

Quinzá-Torroja, J. M. S., Escalona, A. S., & Macías, J. A. S. (2004). Los errores como motivacion para la enseñanza y la aprendizaje de las matemáticas. In *XII Jornadas de ASEPUMA*. Asociación Española de Profesores Universitarios de Matematicas aplicadas a la Economia y la Empresa. Acedido em fevereiro 7, 2016, em http://www.um.es/asepuma04/.

Ramos, A., Delgado, F., Afonso, P., Cruchinho, A., Pereira, P., Sapeta, P. & Ramos, G. (2013). Implementação de novas práticas pedagógicas no ensino superior. *Revista Portuguesa de Educação*, *26*(1), 115-141.

Ramos, M. L. P. D. & Curi, E. (2014). O uso do erro como estratégia didática: uma nova perspetiva na reconstrução do conhecimento. *Perspectivas da Educação Matemática*, *7*(13), 84-102.

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M., & Hernández, J. (1989). *Iniciacion al álgebra*. Espanha: Editorial Sintesis.

Zerr, J. M., & Zerr, R. J. (2011). Learning from their mistakes: Using students' incorrect proofs as a pedagogical tool. *PRIMUS*, *21*(6), 530-544.

Desempenho de alunos de Engenharia em testes de hipóteses: o caso dos erros tipo I e tipo II

Gabriela Gonçalves[1], *José António Fernandes*[2], *Maria Manuel Nascimento*[3]
[1] Instituto Superior de Engenharia do Porto, *gmc@isep.ipp.pt*
[2] Universidade do Minho, *jfernandes@ie.uminho.pt*
[3] Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, *mmsn@utad.pt*

Resumo. *Neste trabalho analisamos o desempenho em testes de hipóteses de 223 alunos da Licenciatura de Engenharia Informática do Instituto Superior de Engenharia do Porto, no ano letivo 2012-2013. Para tal, esses alunos responderam a um questionário sobre o tema, do qual analisamos neste texto três questões que versam a interpretação dos erros tipo I e tipo II. Os resultados mostram que os alunos, em geral, têm dificuldades nas questões colocadas neste tema de testes de hipóteses, principalmente em expressarem o seu raciocínio estatístico através da justificação escrita das respostas*.

Palavras-chave: *aprendizagem da estatística; inferência estatística; testes de hipóteses; ensino superior*.

Abstract. *This study analyses the performance in hypothesis testing of 223 students of Bachelor of Computer Engineering of the School of Engineering of Porto, in the academic year 2012-2013. To this end, these students answered a questionnaire on the subject, which we analyse in this paper three questions that deal with the interpretation of the type I and type II errors. The results show that students generally have difficulty in questions of this hypothesis testing theme, mainly in expressing their statistical reasoning through the written explanation of the answers*.

Keywords: *statistics learning; statistical inference; hypotheses testing; higher education.*

Introdução

Durante as últimas décadas, o ensino da estatística tem sido integrado nas escolas e nas universidades, não só pelo seu caráter instrumental, mas também pela importância do raciocínio estatístico para lidar com a informação e a tomada de decisões.

As tecnologias têm hoje uma maior utilização nos campos da Engenharia, e o raciocínio e as metodologias da Estatística assumem-se, cada vez mais, como ferramentas de suporte para o trabalho e a investigação em engenharia. As revistas e publicações desta área estão repletas de informação estatística, tornando-se uma área imprescindível no currículo de um engenheiro. Segundo Olivo (2008), um engenheiro, na sua vida profissional, irá deparar-se com a análise de dados e a realização de inferências estatísticas.

No caso dos testes de hipóteses, existe investigação a nível internacional, mas em Portugal é uma área ainda pouco trabalhada em termos de investigação. Por outro lado, apesar da sua relevância, é um tema em que os alunos apresentam muitas dificuldades na compreensão dos conceitos envolvidos (Rodríguez, 2006; Vallecillos, 1996; Vera, Díaz, & Batanero, 2011).

Para Batanero (2001), os testes de hipóteses, embora tenham um campo de aplicação muito amplo, constitui um tema pouco compreendido, envolvendo muitos mal-entendidos em estatística. Os muitos conceitos implicados, como sejam: hipótese nula e alternativa, erros tipo I e II, probabilidades destes erros, resultados significativos e não significativos, população e amostra, parâmetro e estimador e distribuição da população e da amostra, estão na origem das interpretações erradas daqueles que recorrem aos testes de hipóteses.

Tais dificuldades justificam a investigação nesta temática, concretamente nos erros tipo I e II, uma vez que o estudo destes tópicos está pouco presente na literatura. Assim, neste trabalho temos como objetivo avaliar o desempenho e a interpretação dos erros tipo I e II de um grupo de alunos do curso de Engenharia Informática, depois de terem estudado o tema na unidade curricular (UC) de Matemática Computacional (MATCP).

Referencial teórico

Estatística nos cursos de Engenharia

O ensino da Estatística nas várias áreas do ensino superior pode ser apresentado aos alunos como uma ferramenta de análise de dados, para que eles a conheçam, saibam para que serve e tomem consciência da necessidade de a usar nos trabalhos que envolvam análise de dados. O aluno deverá perceber a importância do conhecimento das ferramentas básicas de organização e análise de dados para o exercício da sua futura atividade profissional.

Nos cursos de Engenharia a UC de Estatística pode ter um desenvolvimento maior, pois estes alunos têm uma boa formação em matemática. Ara e Musetti (2001) referem que o ensino da Estatística a partir da fundamentação matemática dos conceitos envolvidos não tem despertado o interesse esperado nos alunos. Os investigadores acham que essa falta de interesse pela UC se deve, entre outros, ao facto de que a Estatística estuda fenómenos aleatórios com os quais o aluno do curso de engenharia, em geral, não está familiarizado. Um engenheiro está mais habituado a analisar aspetos determinísticos dos fenómenos, o que dificulta inclusive a sua compreensão da função desempenhada pela Estatística na análise desses fenómenos. Tal é confirmado pelo questionamento dos alunos sobre a necessidade da Estatística para a sua futura profissão, fazendo perguntas do tipo: "Por que devo estudar isso?"; "Para que seve?"; "Qual a aplicação na Engenharia?"

Investigações prévias sobre testes de hipóteses

As dificuldades que os alunos demonstram na compreensão dos testes de hipóteses têm sido objeto de diversos trabalhos de investigação. Nas pesquisas realizadas sobre dificuldades e erros na compreensão dos testes de hipóteses, destacamos algumas.

De acordo com Batanero (2001), os testes de hipóteses, apesar de possuírem um campo específico de aplicação, são a área da inferência estatística onde a aprendizagem gera mais incompreensões e confusões, tanto para estudantes, como para investigadores.

Também Sotos, Vanhoof, Noortgate e Onghena (2007) referem que as ideias de inferência são especialmente sensíveis a interpretações erradas e os estudantes adotam-nas com frequência pelo facto de a inferência requerer a compreensão e a conexão de muitos conceitos abstratos, como o de distribuições amostrais, nível de significância, valor de prova, entre outros. Além disso, os autores salientam o facto de a estatística inferencial ser um tópico decisivo para o desenvolvimento das pesquisas em todas as áreas das ciências.

Vallecillos e Batanero (1997) realizaram um estudo sobre as dificuldades de compreensão de estudantes universitários em alguns conceitos-chave dos testes de hipóteses, tais como: nível de significância; hipótese nula e alternativa; parâmetro estatístico e a interpretação (lógica) de um teste de hipóteses. Para tal, entrevistaram sete estudantes universitários do 2.º ano do curso de Medicina, tendo-lhes sido pedida também a resolução de dois problemas de testes de hipóteses. O estudo evidenciou que os alunos, embora tenham conhecimento de que a hipótese nula deve ser formulada com o objetivo de ser rejeitada, dificilmente conseguem enunciá-la de modo correto e todos eles cometeram erros que evidenciam a não compreensão no que se refere à relação entre a distribuição de probabilidade, as regiões de aceitação e de rejeição e o nível de significância.

Sotos, Vanhoof, Noorgate e Onghena (2009), no seu estudo, investigaram 144 alunos universitários de cursos introdutórios de estatística através de um questionário. O questionário teve como objetivo estudar três aspetos fundamentais que são de difícil compreensão num teste de hipóteses: definição de um teste de hipóteses; interpretação do *valor de prova* e interpretação do nível de significância. Os investigadores, além de quererem detetar os erros cometidos pelos alunos, também estudaram a confiança que eles tinham nas suas respostas erradas. Analisando os erros que os alunos cometeram, os investigadores concluíram que acreditavam que um teste de hipóteses é uma prova matemática da hipótese nula, ou que é uma prova probabilística por contradição. O erro mais comum em relação ao *valor de prova* foi considerá-lo como sendo a probabilidade de cometer um erro ao rejeitar a hipótese nula. Os erros detetados com maior frequência estão relacionados com as seguintes afirmações: o resultado do teste foi estatisticamente significativo para um nível de significância de 5%; a probabilidade de rejeitar a hipótese nula é igual a 95%; e a probabilidade da hipótese nula ser verdadeira é igual a 5%.

Sebastiani e Viali (2011) avaliaram os erros cometidos pelos alunos nas avaliações realizadas na UC de Estatística e Probabilidades, no segundo semestre de 2009, dos cursos de Engenharia de três universidades do Rio Grande do Sul. As questões dessas avaliações foram elaboradas pelos professores que lecionavam as respetivas disciplinas e na análise dos dados recolhidos foi utilizada a análise de conteúdo.

As dificuldades dos alunos, segundo os investigadores, poderão estar relacionadas com a metodologia adotada pelos professores que lecionavam as disciplinas de Estatística no ensino superior. Por um lado, o número de horas semanais para lecionar os conteúdos de estatística básica, 4 horas semanais, ou em alguns casos, apenas duas horas semanais. Por outro lado, nas soluções apresentadas, os alunos revelaram alguma destreza nos cálculos. Muitos conceitos, nomeadamente os erros de tipo I (nível de significância) e tipo II e o valor de prova parecem não ser tão relevantes quanto os aspetos relativos aos algoritmos (procedimentos matemáticos) e são, de certa forma, ignorados pelo professor. Segundo os autores, os alunos poderiam compreender melhor estes conceitos se lhes fossem fornecidos exercícios que os requeressem.

Batanero, Vera e Díaz (2012) realizaram um estudo com 224 alunos do 2.º ano da Licenciatura de Psicologia da Universidade de Huelva, que frequentavam a UC de Análise de Dados II, com o objetivo de avaliar as dificuldades dos alunos na compreensão dos testes de hipóteses. Mais especificamente, com base nas respostas dos alunos a um questionário curto (seis itens sobre testes de hipóteses), avaliaram a sua compreensão sobre diferentes conceitos relativos aos testes de hipóteses: diferença entre teste unilateral e bilateral; hipótese nula e alternativa; tipos de erros e suas probabilidades e tomada de decisão. A percentagem de alunos que deram respostas corretas em todos os itens foi superior a 50%, sendo que 84,8% souberam enunciar corretamente as hipóteses nula e alternativa. Relativamente ao erro tipo II e à potência do teste, 50,9% dos alunos responderam corretamente, enquanto 64,7% discriminaram entre os erros tipo I e II. Quanto à relação entre o nível de significância e a região crítica, a percentagem de respostas corretas foi de 64,3% e na tomada de decisão foi de 58%. Face aos resultados obtidos, os investigadores reafirmam a recomendação de Harradine, Batanero e Rossman (2011), de que o raciocínio inferencial não pode ser desenvolvido num curto espaço de tempo e que seria importante começar a introduzi-lo de forma informal desde o ensino secundário.

Metodologia

Neste texto avalia-se a compreensão de alunos do ensino superior politécnico na resolução de três questões relativas a testes de hipóteses, nas quais uma primeira parte consistia num item de escolha múltipla e numa segunda parte era pedida uma justificação para a opção escolhida antes. Para tal, estudaram-se as opções selecionadas e as justificações que os alunos deram para a escolha da sua opção, de forma a avaliarmos a sua compreensão na interpretação dos erros tipo I e tipo II.

As três questões aqui analisadas, da autoria da primeira autora, fazem parte de um questionário constituído por um total de 10 questões de escolha múltipla e dois problemas de testes de hipóteses, aplicado aos alunos do 1.º ano que frequentavam a UC de Matemática Computacional (MATCP), no ano letivo 2012-13, do curso de Engenharia Informática do Instituto Superior de Engenharia do Porto. O conceito de testes de hipóteses foi abordado de forma expositiva, numa aula teórica de duas horas, e tiveram a oportunidade de resolver exercícios e problemas para a consolidação dos conceitos utilizando papel e lápis e software R, em duas aulas teórico-práticas de duas horas cada. Dos 263 alunos que frequentavam a UC, responderam ao questionário 223, sendo 22 do sexo feminino, 201 do sexo masculino e 45 estavam a repetir a UC. Estes alunos distribuíam-se por várias turmas nas aulas teórico-práticas da UC. Nessas aulas os respetivos docentes (três docentes) aplicaram o questionário na última aula do segundo semestre (junho de 2013). Este questionário foi respondido por escrito e sem consulta imediatamente depois de os alunos terem estudado o tema de testes de hipóteses na UC e os alunos dispuseram de 90 minutos para responder, o que se revelou um tempo suficiente.

Depois de recolhidos os dados, foi feita a contagem das respostas às questões de escolha múltipla, sintetizando-se em tabelas as frequências de respostas corretas e erradas. Relativamente às razões apresentadas, para justificar a resposta escolhida nos itens de escolha múltipla, foi efetuada uma análise de conteúdo mediante o processo de comparação de respostas semelhantes entre si, obtendo-se uma categorização. As justificações apresentadas, a título de exemplificação, foram reproduzidas conforme os registos dos alunos.

Respostas e justificações dos alunos às questões propostas

Nesta secção analisam-se as respostas e justificações apresentadas pelos alunos nas três questões analisadas.

Respostas e justificações na questão 1

Questão 1. Num teste de hipóteses, quando rejeitamos H_0, sendo H_0 falsa,

a. Comete-se um Erro Tipo I.
b. Comete-se um Erro Tipo II.
c. Comete-se um Erro Tipo I e II.
d. Tomou-se a decisão correta.

Justifique a sua resposta.

Figura 1. Enunciado da questão 1.

Esta questão tem como finalidade estudar a interpretação do erro tipo I, que ocorre quando se rejeita a hipótese nula, e discriminar os erros tipo I e tipo II, permitindo comprovar se os alunos confundem estes dois tipos de erro.

Tabela 1.

Frequências (percentagens) das respostas da questão 1

Opções	Frequência (%)
a	8 (3,6%)
b	21 (9,4%)
c	22 (9,9%)
d	**166 (74,4%)**
Não resposta	6 (2,7%)
Total	223 (100)

Pela tabela 1 podemos observar que a opção mais frequente foi a d, que é a resposta correta, com 74,4% de respostas, o que mostra que os alunos foram capazes de interpretar os conceitos envolvidos. Destaca-se também a percentagem de alunos (9,9%) que não percebeu o conceito de erros tipo I e II uma vez que afirmam que num teste de hipóteses é possível obter os dois tipos de erro quando rejeitamos a hipótese nula, sendo ela falsa.

Na tabela 2 apresentam-se as categorias encontradas a partir das justificações dadas pelos alunos na questão 1.

Tabela 2.

Frequências (percentagens) das justificações na questão 1

Justificação	Frequência (%)
Se H_0 é falsa deve ser rejeitada e assim não se está a cometer qualquer erro	81 (36,3)
Erro tipo I: rejeitamos H_0 sendo H_0 verdadeira; Erro tipo II: não rejeitamos H_0 sendo H_0 falsa	34 (15,2)
Potência do teste	22 (9,9)
H_0 é a hipótese a ser rejeitada. Ao calcular o intervalo de rejeição e se H_0 está no intervalo, devemos então rejeitar H_0	8 (3,6)
Erro tipo II é obtido não rejeitando H_0 sendo H_0 falsa	7 (3,1)
Justificações sem sentido	14 (6,3)
Não justificar	57 (25,6)

Pela tabela 2 observa-se que a justificação mais frequente é a da categoria “Se H_0 é falsa deve ser rejeitada e assim não se está a cometer qualquer erro” (36,3%). Estes alunos interpretaram corretamente a questão, podendo-se concluir que perceberam que ao rejeitar a hipótese nula, sendo ela falsa, estavam a tomar a decisão correta e não cometiam nenhum erro.

Salienta-se, de seguida, a percentagem de alunos que apresenta como justificação as definições dos erros tipo I e II (15,2%). Destaca-se que, dos 34 alunos que a referiram, 23 usaram esta justificação para a escolha da opção d (correta) e 11 para justificar a escolha da opção c, que afirma a ocorrência simultânea dos erros tipo I e tipo II.

Um grupo considerável de alunos (9,9%) usou a “potência do teste” para justificar a opção escolhida, dos quais 16 usaram-na para justificar a opção correta, apresentando apenas como justificação a fórmula, e quatro para justificar a opção b, que se refere à ocorrência de um erro tipo II. Estes quatro alunos não responderam adequadamente à questão, talvez por não terem entendido o conceito de potência do teste.

Um outro grupo de alunos (3,6%), embora selecionando a opção correta (opção d), justificou a escolha dizendo que se rejeitamos a hipótese nula é porque ela se encontra no intervalo de rejeição, ou seja, estes alunos justificaram a sua opção pensando que, quando estão perante um teste de hipóteses, têm sempre que definir a região crítica e a partir daí tirar as devidas conclusões.

Uma percentagem menor de alunos (3,1%) usou como justificação para a escolha da opção b: "Erro tipo II é obtido não rejeitando H_0 sendo H_0 falsa". A análise das justificações destes alunos sugere uma interpretação errada do enunciado porque aí se afirmava que rejeitávamos a hipótese nula sendo ela falsa, e eles interpretaram o contrário, ou seja, aceitar a hipótese nula sendo ela falsa.

Nesta questão temos ainda uma percentagem (6,3%) de justificações sem sentido, em que os alunos apresentaram justificações do tipo: "pois se a hipótese nula é falsa, temos que testá-la"; por exclusão de partes, colocam apenas como justificação a região de rejeição; colocam na justificação erro tipo I e tipo II, etc.

Por fim, destacamos a considerável percentagem de alunos (25,6%) que não apresentou qualquer justificação.

Respostas e justificações na questão 2

Questão 2. Considere as duas afirmações seguintes:
I - O nível de significância de um teste de hipóteses é a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando, na realidade, ela é falsa;
II- Comete-se um erro tipo II quando aceita a hipótese nula quando, na realidade, ela é falsa.

a. Apenas a afirmação **I** é verdadeira.
b. Apenas a afirmação **II** é verdadeira.
c. Ambas as afirmações **I** e **II** são verdadeiras.
d. Ambas as afirmações **I** e **II** são falsas.

Figura 2. Enunciado da questão 2.

A questão avalia a definição dos erros tipo I e tipo II e o nível de significância. Esta questão envolve o conhecimento de muitos conceitos que os alunos têm dificuldade em distinguir e relacionar.

Tabela 3.

Frequências (percentagens) das respostas da questão 2

Opções	Frequência (%)
a	10 (4,5%)
b	**147 (65,9%)**
c	23 (10,3%)
d	32 (14,3%)
Não resposta	11 (4,9%)
Total	223 (100)

Observa-se da tabela 3 que a opção mais frequente foi a b, que é a resposta correta, com 65,9% de respostas, o que mostra que os alunos parecem conhecer a definição dos conceitos envolvidos na questão.

Na tabela 4 descrevem-se as justificações apresentadas pelos alunos nesta questão e as categorias estabelecidas.

Tabela 4.

Frequências (percentagens) das justificações da questão 2

Justificação	Frequência (%)
A afirmação I é falsa porque o nível de significância de um teste de hipóteses é a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando, na realidade, ela é verdadeira. A afirmação II é verdadeira porque no erro tipo II não é rejeitada a hipótese nula, sendo ela falsa	32 (14,3)
O nível de significância (erro tipo I) de um teste de hipóteses é a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando, na realidade, ela é verdadeira	29 (13,0)
$P(\text{Erro tipo II}) = P(\text{Não Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ Falsa})$	29 (13,0)
I – O nível de significância de um teste de hipóteses é a probabilidade de aceitar a hipótese nula quando, na realidade, ela é falsa. II – Comete-se um erro do tipo II quando se não rejeita a hipótese nula quando, na realidade, ela é falsa	12 (5,4)
O que está descrito na afirmação I é a potência do teste, estando então correta só a afirmação II, isto é, $\beta = P(\text{Erro tipo II}) = P(\text{Não Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ Falsa})$	8 (3,4)
Justificações sem sentido	23 (10,3)
Não justificar	88 (39,5)
Total	223 (100)

Na tabela 4 observamos que a percentagem mais elevada (39,5%) corresponde à categoria "Não justificar", em que os alunos não foram capazes de apresentar uma razão para a opção que selecionaram.

Um grupo menor de alunos (14,3%) apresentou justificações incluídas na categoria "A afirmação I é falsa porque o nível de significância de um teste de hipóteses é a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando, na realidade, ela é verdadeira. A afirmação II é verdadeira porque no Erro tipo II não é rejeitada a hipótese nula, sendo ela falsa", para a seleção da opção correta b, da opção c (1 aluno) e também para a opção d (5 alunos). Apesar de se ter verificado, em alguns alunos, uma disparidade entre a opção escolhida e a justificação, a maioria deles interpretou corretamente a questão ao escolher a opção correta e ao saber justificar porque escolheu essa opção.

Um outro grupo de alunos (13%) justificou, na opção correta, que "O nível de significância (erro tipo I) de um teste de hipóteses é a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando, na realidade, ela é verdadeira". Estes alunos mostram que compreenderam a questão, optando por justificar só a afirmação I, que é incorreta, e não justificar a afirmação II, que é correta. Ainda para a opção correta, um outro grupo de alunos (13%), além de ter interpretado corretamente a questão proposta, achou que devia apenas justificar que a afirmação II é verdadeira, apresentando a seguinte justificação: $P(\text{Erro tipo II}) = P(\text{Não Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ Falsa})$.

Alguns alunos (5,4%), que poderão não ter interpretado corretamente a afirmação I, selecionaram uma opção errada. Estes alunos não perceberam o conceito nível de significância, apresentando uma justificação que é cópia do texto apresentado. O mesmo aconteceu relativamente à afirmação II, podendo concluir-se que, para estes alunos, o nível de significância e o erro tipo II são a mesma coisa.

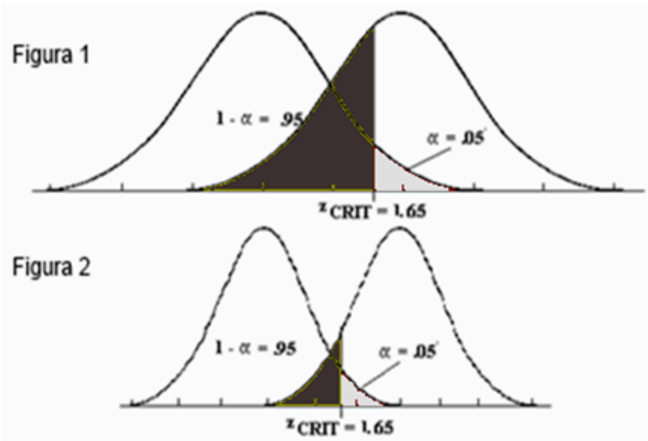
Outro pequeno grupo de alunos (3,4%) interpretou erradamente a afirmação I e corretamente a afirmação II, apresentando como justificação: "O que está descrito na afirmação I é a potência do teste, estando então só a afirmação II correta, $\beta = P(\text{Erro tipo II}) = P(\text{Não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ Falsa})$". Estes alunos mostram que não discriminam os conceitos de nível de significância e potência do teste, confundindo-os, embora justifiquem de forma correta a afirmação II dizendo tratar-se do erro tipo II.

Por fim, ainda deve ser assinalada a considerável percentagem de alunos (10,3%) que apresentam justificações que não fazem sentido.

Respostas e justificações na questão 3

Com esta questão pretende-se avaliar a definição e interpretação dos erros tipo I e II. Esta questão envolve a interpretação de figuras e o conhecimento e compreensão de muitos conceitos (erros tipo I e II, nível de confiança, desvio-padrão, média amostral, potência do teste), todos eles necessários para a interpretação das figuras.

Questão 3. Observe atentamente as duas figuras seguintes:



Da Figura 1 para a Figura 2 verifica-se uma diminuição dos erros de tipo I e tipo II. Isso deve-se a:

a. Um maior nível de confiança.
b. Uma diminuição da potência do teste.
c. Um menor desvio-padrão.
d. Uma menor média amostral.

Justifique a sua resposta.

Figura 3. Enunciado da questão 3.

Observa-se da tabela 5 que a opção mais frequente foi a c, que é a resposta correta, com 37,7% de respostas, o que mostra que estes alunos parecem compreender o significado dos conceitos envolvidos na questão.

Tabela 5.

Frequências (percentagens) das respostas da questão 3

Opções	Frequência (%)
a	76 (34,1%)
b	16 (7,2%)
c	**84 (37,7%)**
d	27 (12,1%)
Não resposta	20 (9,0%)
Total	223 (100)

Como foi dito, esta questão exige o conhecimento de muitos conceitos e apesar de bastantes alunos terem selecionado a opção correta, quando a justificaram não apresentaram uma explicação correta, como podemos constatar na Tabela 6.

Na tabela 6 observamos que a justificação menos frequente (2,7%) é a da categoria "A distribuição da figura 2 é mais estreita devido ao seu menor desvio-padrão e, portanto, verifica-se uma diminuição dos erros tipo I e tipo II". Estes alunos foram capazes de interpretar corretamente o enunciado da questão, conduzindo-os à opção correta (c), mas não souberam explicar o motivo pelo qual os erros tipo I e II diminuíram. Ainda para a opção correta, um outro grupo de alunos (4,9%) justificou a resposta referindo que "O desvio padrão é menor, logo há menos probabilidade de haver erros". Também estes alunos não apresentaram uma justificação credível.

Tabela 6.

Frequências (percentagens) das justificações da questão 3

Justificação	Frequência (%)
O que causa a diminuição do erro tipo I e tipo II é um maior nível de confiança	23 (10,3)
O desvio padrão é menor, logo há menos probabilidade de haver erros	11 (4,9)
A distribuição da Figura 2 é mais estreita devido ao seu menor desvio-padrão e, portanto, verifica-se uma diminuição dos erros tipo I e tipo II	6 (2,7)
Se houver uma redução dos erros tipo I, o nível de significância diminui. Existindo portanto maior confiança, pois é o resultado de $1-\alpha$. A confiança é tanto maior quanto menor a significância	7 (3,1)
Justificações sem sentido	64 (28,7)
Não justificar	112 (50,2)
Total	223 (100)

Destaca-se a percentagem elevada de alunos (28,7%) cujas justificações foram categorizadas em "Justificações sem sentido", das quais salientamos: "porque a curva é mais alta, porque a curva da normal 'encolhe', tornando-se mais acentuada"; "se diminuir o desvio padrão, diminui-se também a área de conflito que leva à ocorrência desses erros"; "a onda é menor por causa do desvio padrão".

Um grupo de alunos (10,3%) usou, para a opção a, a justificação: "O que causa a diminuição do erro tipo I e tipo II é um maior nível de confiança". Ora, esta justificação permite concluir que os alunos não souberam interpretar a questão usando o que estava no texto da própria opção para justificar a sua resposta.

Outro grupo de alunos (3,1%) justificou a mesma opção a dando a seguinte justificação: "Se houver uma redução dos Erros tipo I, o nível de significância diminui. Existindo portanto maior confiança, pois é o resultado de $1-\alpha$. A confiança é tanto maior quanto menor a significância". Estes alunos, como os anteriores, não entenderam a questão, e a sua justificação, além de não estar correta, não refere o erro tipo II.

Finalmente, salienta-se uma percentagem elevada de alunos (50,2%) que não apresentou qualquer justificação. As maiores dificuldades reveladas pelos alunos nesta questão podem dever-se ao facto de nas aulas teórico-práticas nunca terem sido realizados quaisquer exercícios envolvendo análise deste tipo de representações gráficas.

Conclusões

Destaca-se da análise realizada nas três questões de escolha múltipla que a opção mais frequente foi sempre a correta, com 74,4% de respostas na questão 1, 65,9% de respostas na questão 2 e 37,7% de respostas na questão 3.

Relativamente às justificações apresentadas em cada questão, constata-se que o padrão de ordem das percentagens de respostas corretas se reproduz nas justificações corretas. Verifica-se, ainda, que a categoria "Não justificar" apresenta uma elevada percentagem de alunos e, das três questões propostas, em duas delas é mesmo a maior percentagem (39,5% na questão 2 e 50,2% na questão 3). Esta situação mostra que os alunos que responderam a estas três questões do questionário não estavam suficientemente preparados neste tópico. O fraco desempenho dos alunos nos conceitos de erros tipo I e II, para além de serem conteúdos difíceis (e.g., Vallecillos, 1996; Vera et al., 2011), poderá explicar-se pelo facto de terem sido lecionados nas últimas semanas de aulas e pelo pouco tempo de preparação dos alunos.

Confirmamos também, como Sebastiani e Viali (2011) e Batanero et al. (2012), que uma percentagem considerável de alunos confunde os erros tipo I e tipo II ou evidenciam confusão sobre os seus significados, aumentando as dificuldades dos alunos no caso em que estes conceitos são apresentados em contexto gráfico.

Comparativamente com os estudos aqui revistos, no presente estudo destacam-se as categorizações apresentadas para as justificações que os alunos apresentaram para cada uma das respostas selecionadas nas três questões propostas.

Resumindo, os alunos mostraram ter dificuldades nos conteúdos erros tipo I e II, principalmente na interpretação das questões e na explicitação da forma como pensaram, isto é, a forma como raciocinaram em termos estatísticos. Donde, será importante explorar no ensino tais dificuldades (Batanero, 2001, 2013).

Referências bibliográficas

Ara, A., & Musetti, A. (2001). Avaliação de uma nova metodologia no ensino da Estatística para o curso de Engenharia. In *Anais do XXIX Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, COBENGE 2001* (pp. 245-250). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Faculdade de Engenharia.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Batanero C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. In J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea & P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 55-61). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Batanero, C., Vera, O. & Díaz, C. (2012). Dificultades de estudiantes de Psicología en la comprensión del contrate de hipótesis. *Números, 80*, 91-101.

Harradine, A., Batanero, C., & Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. In C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education* (pp. 235-246). New York: Springer.

Olivo, E. (2008). *Significado de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México*. (Tese de doutoramento) Universidad de Granada, Granada.

Rodríguez, I. (2006). Estudio teórico y experimental sobre dificuldades en la comprensión del contraste de hipóteses en estudantes universitários. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *19*, 162-168.

Sebastiani R,. & Viali, L. (2011).Teste de hipóteses: Uma análise dos erros cometidos por alunos engenharia. *Bolema*, *24* (40), 835-854.

Sotos, C., Vanhoof, S., Noortgate W., & Onghena P. (2007). Student's misconceptions of statistical of inference: a review of the empirical evidence from research on statistics education. *Educational Research Review*, *2*, 98-113.

Sotos, C., Vanhoof, S., Noortgate, W., & Onghena P. (2009). How confident are students in their misconceptions about hypothesis test? *Journal of Statistcs Education*, *17*(2).

Vallecillos, A. (1996). *Inferencia estadística y enseñanza: un análisis didáctico del contraste de hipótesis estadísticas*. Recife: Comares.

Vallecillos, A., & Batanero, C. (1997). Conceptos activados en el contraste de hipótesis estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 17*(1), 29-48.

Vera, O., Díaz, C., & Batanero, C. (2011). Dificultades en la formulación de hipótesis estadísticas por estudiantes de Psicología. *UNIÓN*, *27*, 41-61.

Desafios na sala de aula

O jogo como promotor da comunicação e aprendizagem matemática

Sílvia Lopes[1]*, Helena Rocha*[2]
[1]Escola Secundária António Gedeão, *silviamlopes.1624@gmail.com*
[2]Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa*, hcr@fct.unl.pt*

Resumo. *O jogo é geralmente apontado como uma ferramenta metodológica capaz de proporcionar aprendizagens significativas aos alunos. Neste âmbito, este estudo pretende analisar o contributo de discussões matemáticas, concretizadas no seio de um jogo envolvendo polinómios, para a consolidação de conceitos e o desenvolvimento da comunicação. Foram realizados dois estudos de caso de alunas do 10.º ano, tendo os dados sido recolhidos através da observação de sessões de trabalho e de um questionário. As conclusões alcançadas sugerem que o jogo promoveu a discussão dos conteúdos e consequentemente o desenvolvimento da linguagem matemática. Permitiu ainda colmatar dificuldades e aprofundar conceitos matemáticos.*

Palavras-chave: *jogos; aprendizagem; comunicação; matemática.*

Abstract. *Games are commonly appointed as a methodological tool capable of promoting students' effective learning. In this context, this study intends to analyze the impact of mathematical discussions developed while playing a polynomial game. Namely it intends to analyze the impact on the consolidation of mathematical concepts previously worked in the classroom and on the communications skills. Two case studies where developed involving 10th grade students. Data gathering was based on direct observation and an inquiry. The main conclusions suggest that the game encouraged the discussion about the mathematical contents and therefore promoted the development of the mathematical discourse. Besides that, it allowed a deeper apprehension of mathematical concepts, and the overcome of some difficulties.*

Keywords: *games; learning; communication; mathematics.*

Introdução

Atualmente há uma necessidade premente do professor adequar o processo de ensino-aprendizagem às caraterísticas dos seus alunos. Neste sentido, a utilização do jogo pode constituir uma estratégia adequada para o ensino-aprendizagem da matemática, quer ao nível do desenvolvimento de capacidades, quer ao nível da conceptualização matemática.

Ponte (2005) refere a importância do jogo como tarefa que pode ter importantes potencialidades para a aprendizagem, especialmente se o professor souber valorizar os aspetos matemáticos que o jogo pode envolver. Estimular a investigação e o interesse pela procura de soluções, o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático e a articulação de conhecimentos matemáticos são alguns dos possíveis benefícios da utilização de jogos (Ascoli & Brancher, 2006).

Apesar disto, e segundo Swan e Marshall (2009), os professores frequentemente recorrem ao jogo para ocupar os alunos durante algum tempo, ou ainda como recompensa ou incentivo por terem terminado antecipadamente uma tarefa ou por terem realizado um trabalho particularmente bom. Bragg (2006) acrescenta que o jogo também é utilizado como uma atividade "warm-up", ou seja, servindo de preparação para a verdadeira aprendizagem. Swan e Marshall (2009) referem ainda uma utilização de jogos para quebrar a rotina habitual e motivar os alunos. Segundo estes últimos autores, raramente os jogos são utilizados pelos professores para introduzir um conceito, promover a discussão em torno deste, como forma de enriquecimento ou até como ferramenta de diagnóstico.

Apesar das potencialidades, o recurso a jogos ao nível do ensino secundário é bastante raro. Com efeito, segundo Smole, Diniz e Ishihara (2008), a partir do 3.º ciclo, o jogo é maioritariamente encarado por professores e alunos como uma prática lúdica, que contrasta com uma disciplina séria como a matemática. Nestas circunstâncias, é pois natural questionarmo-nos quanto à influência que o uso de jogos efetivamente tem no desenvolvimento de capacidades e na aprendizagem de conteúdos matemáticos nos alunos do ensino secundário.

Este artigo tem por base um estudo mais amplo e ainda em processo de desenvolvimento, pelo que aqui apenas apresentamos uma análise preliminar com base nos primeiros dados recolhidos. Assim, centramos a nossa atenção nos momentos de discussão durante um jogo proposto a alguns alunos duma turma do 10.º ano de escolaridade, procurando analisar se a prática sucessiva dum mesmo jogo favorece a capacidade de comunicação matemática e a consolidação de conceitos matemáticos. Procuramos assim, dar respostas às seguintes questões:

1. Qual o contributo da utilização do jogo na consolidação de conceitos matemáticos?

2. De que modo, o recurso ao jogo favoreceu a comunicação matemática dos alunos?

O jogo: caraterização e categorização

Definir o que é um jogo é algo que não é tarefa fácil, em virtude da versatilidade da palavra (Smole et al., 2008). Segundo estes autores, um jogo em contexto educacional envolve dois ou mais jogadores, engloba um objetivo específico que direciona o jogo para um vencedor, e pressupõe que os alunos assumem papéis interdependentes, opostos e cooperativos. É ainda requerido que os alunos entendam a dinâmica e as regras do próprio jogo e a importância de cada um na execução das diferentes jogadas. Para além disso, é necessário que existam regras preestabelecidas (que não podem ser modificadas no decorrer do jogo) e cuja infração implique uma penalização para o jogador envolvido. Ainda assim, a alteração das regras é permitida, mas apenas na sequência de uma análise e discussão no seio do grupo. É ainda importante que o jogo permita a possibilidade de "usar estratégias, estabelecer planos, executar jogadas e avaliar a eficácia desses elementos nos resultados obtidos" (Smole et al., 2008, p. 12). Ou seja, este não deve consistir num processo mecanizado e sem significado para os jogadores.

Smole, Diniz e Cândido (2007) consideram o jogo, por um lado, como uma atividade diferenciada, por atribuir ao aluno e ao professor outras posições na relação com o saber; e, por outro lado, como uma atividade significativa por implicar o estabelecimento de planos, a execução de jogadas e a avaliação da eficácia das estratégias utilizadas.

Os parâmetros sugeridos anteriormente para a definição de jogo educativo enquadram-se na descrição de jogo matemático realizada por Heras (2014) e Selva e Camargo (2009). Heras (2014) refere que através deste tipo de jogos se pretende alcançar objetivos didáticos relacionados com a aprendizagem da matemática. Selva e Camargo (2009) reforçam esta ideia, concluindo que o jogo matemático envolve um processo, no qual o aluno necessita de conhecimentos prévios, interpretar regras e usar raciocínio matemático. O jogo matemático está assim na base de constantes desafios em que, a cada nova jogada, são abertos espaços para a elaboração de novas estratégias que desencadeiam situações-problema e que, ao serem resolvidas, permitem a evolução do pensamento abstrato para o conhecimento efetivo, construído durante a atividade desenvolvida.

A classificação ou categorização dos tipos de jogos é, segundo Smole et al. (2008), tão ou mais diversa do que os sentidos da palavra jogo. Segundo Escolano, Marcén e Morales (2009), os jogos matemáticos podem considerar-se como jogos de estratégia ou jogos de conhecimento. Contudo, os autores frisam que tal não consiste verdadeiramente numa classificação, mas sim numa qualificação, pois existem jogos que podem ser considerados de ambos os tipos.

Os jogos de conhecimento são aqueles cujos conteúdos são tópicos presentes nos currículos de matemática e cuja principal finalidade é introduzir ou trabalhar esses tópicos. São os jogos mais utilizados pelos professores, pelo facto de se enquadrarem diretamente nos conteúdos a ensinar (Escolano et al., 2009). Este tipo de jogos constitui um recurso para um ensino e uma aprendizagem mais rica, favorecendo a resolução de problemas. Tornam-se assim um ótimo veículo para que os alunos construam, adquiram e aprofundem, de modo mais desafiador, os conceitos e procedimentos a serem desenvolvidos na aprendizagem da matemática no ensino secundário (Smole et al., 2008). Corbalán (1994) afirma que com este tipo de jogos pretende atingir, consolidar ou rever certos conceitos matemáticos ou procedimentos de uma forma mais atrativa. Neste sentido, Gairín (1990) distingue três níveis de aplicação que Heras (2014) também adota: o pré-instrucional, o co-instrucional e o pós-instrucional. No nível pré-instrucional, é através do jogo que o aluno descobre o conceito ou desenvolve a justificação dum algoritmo. Deste modo, o jogo é o único veículo para a aprendizagem. No nível co-instrucional o jogo é uma entre as diferentes tarefas que o professor utiliza para o ensino. Assim, neste caso o jogo acompanha os outros recursos de aprendizagem. No nível pós-instrucional, os alunos já realizaram uma série de aprendizagens e o jogo é apenas um meio para reforçar essas aprendizagens. Ou seja, neste caso o jogo serve para consolidar a aprendizagem.

Os jogos de estratégia, segundo Escolano et al. (2009), também chamados de "jogos de pensar", requerem técnicas heurísticas semelhantes às utilizadas na resolução de problemas, existindo assim uma analogia entre as distintas formas de encontrar uma estratégia vencedora neste tipo de jogos e as técnicas heurísticas da resolução de problemas. Além disto, os autores ainda fundamentam que através da prática destes jogos, o aluno realiza tarefas fundamentais do trabalho matemático como são a recompilação de evidências, a formulação de hipóteses e a elaboração de argumentos que se apoiem nessas mesmas hipóteses. E os autores estruturam essas tarefas em três níveis de trabalho distintos: resolver casos particulares, generalizar e demonstrar.

O jogo na aprendizagem e comunicação matemática

Na opinião de Swan e Marshall (2009), os jogos são apresentados por vários autores como uma ferramenta benéfica para a aprendizagem matemática. Cody, Rule e Forsyth (2015) consideram o recurso a jogos como uma das melhores práticas, afirmando que os jogos são reconhecidos pelos alunos como matemática com mais significado. Estes autores referem que os jogos incentivam o pensamento lógico-matemático, facilitando o desenvolvimento do conhecimento matemático ao ter uma influência positiva sobre a componente afetiva em situações de aprendizagem. O jogo promove o desenvolvimento de importantes capacidades do raciocínio como a concentração, a atenção e a organização necessárias para a aprendizagem da matemática, em geral, e para a resolução de problemas, em particular (Moura & Viamonte, 2006). Note-se que o aluno não adquire conhecimento através da mera manipulação do jogo. Ao invés, as suas competências matemáticas são desenvolvidas através da reflexão sobre o ato de jogar (Gaspar, 2015). Garris, Ahlers e Driskell (2002) ainda referem que os jogos que utilizam níveis de dificuldade progressiva permitem que o aluno ganhe familiaridade e construa gradualmente capacidades em complexos ou novos ambientes de aprendizagem.

No que diz respeito à comunicação matemática, Bragg (2003), refere que uma sessão de jogo que incorpore uma discussão focada nas estratégias utilizadas pelos alunos pode constituir uma via de aprendizagem para os alunos. Os jogos não podem ser apenas vistos como uma diversão, mas também como oportunidades para os estudantes se envolverem num diálogo significativo sobre os conceitos matemáticos e as estratégias por detrás dos jogos. Strapason e Bisognin (2013) acrescentam que a escolha das jogadas e a argumentação necessárias durante a troca de informação potenciam um desenvolvimento da linguagem nos alunos. Neste sentido, Guerreiro (2011) destaca a importância do desenvolvimento da comunicação em contexto de sala de aula, referindo que esta pode ser "reduzida a um instrumento do processo de ensino-aprendizagem ou valorizada como uma competência a ser desenvolvida ao longo do processo educativo" (p. 76). O mesmo autor aponta a desvalorização da expressão oral como uma das caraterísticas do ensino tradicional, onde a intervenção do aluno se reduz às tentativas de resposta aos questionamentos orais e escritos do professor, impaciente com o tempo e o cumprimento dos programas, onde normalmente acaba por se sobrepor ao aluno hesitante ou mudo.

Segundo Smole et al. (2008), através da discussão entre pares que a prática dos jogos requer, os alunos desenvolvem o seu potencial de participação, cooperação, respeito mútuo e crítica. Ainda que os jogos geralmente envolvam a existência de um vencedor, estando inerente uma situação de competição, as suas caraterísticas estimulam simultaneamente o desenvolvimento da cooperação. É a partir da troca de perspetivas que cada aluno se vai descentrando, passando a pensar sob o ponto de vista dos seus pares e coordenando esses mesmos pontos de vista com a sua forma de pensar para procurar ganhar.

No mesmo sentido, Allen (2010) refere que a aprendizagem cooperativa pressupõe um trabalho conjunto dos alunos para alcançar um objetivo específico que, quando eficazmente estruturada, oferece uma oportunidade para explicar as suas aprendizagens, ouvir outros pontos de vista e observar uma variedade de formas de resolver um problema, dando e obtendo o apoio dos seus pares.

Costa (2011, p. 9), apoiando-se no trabalho de Macedo (2000), considera que a discussão desencadeada a partir de uma situação de jogo, mediada por um professor, vai além da experiência e "possibilita a transposição das aquisições para outros contextos". Para o autor, isto significa considerar que "as atitudes adquiridas no contexto de jogo tendem a tornar-se propriedade do aluno, podendo ser generalizadas para outros âmbitos, em especial, para as situações em sala de aula" (p. 9).

Apesar de concordar com o papel motivacional do jogo e destacar a emoção, participação e atitudes positivas, Oldfield (1991) também refere que os jogos são valiosos por fomentarem capacidades sociais, estimularem a discussão matemática e a aprendizagem de conceitos, envolvendo simbologia e desenvolvendo a compreensão e aquisição de algumas estratégias de resolução de problemas. Para além disso, o jogo desempenha um papel importante na superação das dificuldades dos alunos, pois permite ao professor atuar de forma adequada, respeitando o ritmo de cada um, e ajudando a encarar o erro de forma mais positiva e natural (Lopes et al, 1996).

Em síntese, e tal como referido por Peralta et al. (2014), Ernest (1986) propõe quatro grandes eixos que permitem categorizar a utilidade da incorporação dos jogos no ensino, que resumem todos os argumentos mencionados anteriormente: a) motivação, comportamento e atitudes do aluno; b) desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas; c) reforço de competências; d) construção de conhecimentos. Peralta et al. (2014) referem ainda que o progresso dos alunos quando utilizam jogos é, pelo menos, igual ao conseguido por aqueles que não os utilizam e que os conteúdos são aprendidos mais rapidamente.

Remmele et al. (2009) reforçam as ideias anteriores e referem que uma das maiores razões para se usar o jogo como metodologia de ensino passa pelo facto de o ato de jogar consistir numa transferência de competências, ou seja, na passagem de um quadro de referência para outro, de dentro do jogo para a realidade.

Metodologia

A presente investigação adota uma metodologia qualitativa de índole interpretativa, em linha com as ideias preconizadas por Bogdan e Biklen (1997), envolvendo a realização de estudos de caso de duas alunas, Sara e Carolina, da mesma turma do 10.º ano de uma escola da Grande Lisboa.

A recolha de dados realizou-se através de um questionário e da observação participante da investigadora em duas sessões de trabalho, onde foi aplicado o mesmo jogo. A primeira sessão realizou-se durante uma aula de 50 minutos com toda a turma. A segunda sessão estava prevista para 50 minutos, tempo extraletivo, tendo-se prolongado para 90 minutos, a pedido dos alunos. Nesta última sessão apenas participou o grupo onde se inserem as alunas envolvidas no estudo. A distância temporal entre as duas sessões foi de um mês e, durante este tempo, os alunos estudaram e aprofundaram os conteúdos envolvidos no jogo. Todas as sessões de trabalho foram vídeo gravadas e posteriormente transcritas.

O questionário realizado teve como intenção obter informação acerca da atitude e dificuldades dos alunos perante a matemática e acerca da sua familiaridade com a prática de jogos.

As alunas que participaram no estudo integram um mesmo grupo de quatro alunos, tendo sido escolhidas pelas diferentes caraterísticas comunicativas que evidenciaram nas aulas e pelo interesse que mostram relativamente à aprendizagem matemática, mas a que corresponde diferentes níveis de conhecimento.

O jogo em estudo designa-se Polygame e é um jogo de cartas que tem como objetivo combinar quatro cartas de cores diferentes (azul, cor-de-rosa, amarela e verde) com caraterísticas dum polinómio. As cartas azuis contêm a expressão algébrica do polinómio, as cor-de-rosa os zeros, as amarelas as multiplicidades dos respetivos zeros e as verdes a expressão algébrica de polinómios divisores dos polinómios das cartas azuis.

No início do jogo são distribuídas quatro cartas por jogador e colocadas outras quatro cartas na mesa. Quando os alunos não pretenderem trocar mais nenhuma das suas cartas com alguma da mesa, estas são colocadas no fundo do baralho e repostas outras quatro cartas na mesa.

Quando um jogador combina quatro cartas de cores diferentes tem de explicar aos seus oponentes quais as razões que o levam àquela combinação. As combinações têm que ser discutidas e validadas por todos, sob pena da combinação estar errada, o jogador ganhar indevidamente um ponto e, no final, as cartas não agruparem todas. A validação da combinação corresponde a um polygame. Ganha o jogador que realizar maior número de polygames.

Este é um jogo que envolve estratégia e a compreensão do conteúdo, podendo ser qualificado como jogo de conhecimento co-instrucional e de estratégia. Através deste jogo, os alunos trabalham conteúdos contidos no domínio da álgebra, em particular polinómios, fatorização, casos notáveis, divisibilidade, zeros de um polinómio e sua multiplicidade. Este jogo pode ser jogado em grupos de dois a cinco alunos.

Apresentação e análise de dados

Nesta secção apresenta-se uma síntese das respostas dadas por Carolina (C) e Sara (S) ao questionário e alguns episódios ocorridos durante as duas sessões de trabalho, sendo analisadas as intervenções das mesmas. Aos outros dois alunos pertencentes ao grupo, à professora titular da turma e à investigadora, chamaremos A1, A2, P e I, respetivamente.

Carolina

Carolina é uma aluna de 16 anos, empenhada, mas pouco participativa. É considerada uma boa aluna pela sua professora de matemática, destacando-se pela facilidade em compreender os conteúdos e em relacioná-los. Tímida, raramente coloca dúvidas perante a turma, preferindo apresentá-las individualmente à professora.

No questionário, a aluna revela gostar de matemática. Acerca dos seus hábitos de jogo, refere ter jogado apenas uma vez um jogo envolvendo conteúdos matemáticos em sala de aula, mas diz estar habituada a jogar às cartas com amigos e família. Quando questionada sobre a possibilidade de aprender matemática através do uso de jogos, aponta a motivação como principal razão para essa ser uma experiência de sucesso.

Na primeira sessão, Carolina revela dificuldades em perceber o objetivo do jogo. Como a professora está por perto, opta por lhe pedir ajuda em vez de recorrer ao apoio do grupo:

C- Eu não estou a perceber.
P- Você tem que conseguir encaixar polinómios, com os seus zeros e multiplicidades. (a professora dá atenção a outro aluno do grupo)
C- E aqui?
P- Aqui tem de ter $\sqrt{3}$ como zero.
C- Então este polinómio é divisível por este.
P- Então apanhe essa carta.
C- Posso apanhar?
P- Claro que pode!

Mais tarde, a aluna apercebe-se que os colegas estão com dificuldade em combinar as cartas, em particular as da divisibilidade. Para que o jogo avance, intervém dando um exemplo ao grupo manipulando as suas próprias cartas:

C- Imaginem que têm este polinómio aqui, $P(x) = (x-5)^3$, se guardarem a carta divisível por este polinómio, é um $(x-5)$, por exemplo… Só $(x-5)$ ou $(x-5)^2$ ou $(x-5)^3$.
S- Então e $(x+5)$ não pode ser?
C- Não… o zero é -5.
Todos- Não o zero é 5.
S- E a multiplicidade era o quê?
C- É o expoente da… a multiplicidade é isto (apontando para o expoente de um polinómio divisor).

Através da discussão, a aluna vai expressando as suas ideias, mas também reforçando o seu conhecimento. De notar que no discurso de Carolina é visível uma ausência de certos termos matemáticos, sendo frequente o uso da palavra "isto", uma lacuna possivelmente justificável por raramente se expressar oralmente nas aulas.

Na segunda sessão, a aluna sente menos dificuldade em lidar com as regras do jogo. Progressivamente, vai dando mais exemplos das suas combinações, envolvendo-se em mais discussões em torno dos conteúdos e parecendo ter uma crescente facilidade em se expressar:

C- Olha aqui o meu, eu também tenho esse (x^2-1). E eu pus estas raízes, 1 e -1, porque 1^2 dá 1, 1-1=0, e $(-1)^2$ dá 1, 1-1=0 (a aluna refere-se ao polinómio $P(x) = \left(x+\sqrt{3}\right)^4(x^2-1)$).

Em seguida, a aluna procura confirmar junto do grupo se a multiplicidade dos seus zeros é 4, 1, 1. E inicia-se uma discussão, com a investigadora a incentivar a reflexão:

S- Eu acho que sim.
I- Porquê?
S- Isso não sei explicar, não sei porque é que tem dois 1 se são só dois fatores.

C- Porque é o -1 e o 1. É como se tivesse $(x-1)(x+1)$. É um caso notável.

No final da segunda sessão, a aluna refere que com o uso do jogo aprofundou o seu conhecimento acerca de casos notáveis e consequentemente teve mais facilidade em fatorizar polinómios.

Sara

Sara é uma aluna de 15 anos extremamente trabalhadora, interessada, muito comunicativa, mas com muitas dificuldades. Por regra recorre à mecanização e repetição exaustiva dos exercícios trabalhados em aula para tentar ser bem sucedida, não se inibindo de colocar as suas dificuldades perante a turma. O seu trabalho e esforço fazem com que a sua professora de matemática a considere uma aluna média.

No questionário, afirma gostar de matemática, em particular de "cálculos", o que vai ao encontro da sua preferência por processos mecanizados.

Na primeira sessão, contenta-se com informações que lhe garantam que pode combinar certas cartas, não refletindo sobre a base teórica que sustenta as suas jogadas. Como consequência repete as mesmas perguntas em jogadas semelhantes:

S- Ok, ajudem-me lá. Tenho que encontrar uma multiplicidade três?
C- Sim! E um zero cinco.
S- Então quero este! E o divisível tem de ser (x-5)?
C- Ou $(x-5)^2$ ou $(x-5)^3$.
S- Ah! Ok ok.

Este comportamento sucessivo leva-a a apresentar argumentos inválidos aquando da justificação dos polygames realizados:

S- Então tenho este polinómio $P(x)=(x-2)(x^2-4)$. Nós temos uma raiz simples, porque… nesta parcela aqui 2-2 dá 0 e nesta parcela o 2 e o -2 podem ser aceites para dar o 0, por isso é que é uma raiz dupla na segunda parte. Então eu digo que na primeira parte é uma raiz simples, porque só o 2 é que faz com que se anule aquela parcela e na segunda parcela, só o -2 e o 2, por isso é uma raiz dupla…
C- Não estou a perceber…
I- Continua Sara.
S- Então e o polinómio é divisível por $(x-2)^2$, porque basta ter aquela parcela igual para ser divisível.
I- Então também é divisível por $(x-2)^3$?
S- Sim…
C- Não… se fosse $(x-2)^3$ era maior.
I- A multiplicidade é referente ao quê?
C e A1- Aos zeros!

Na segunda sessão, o domínio de Sara relativamente aos conteúdos parece estar a começar a evoluir. Perante o polinómio $P(x) = (x^2 + 2x + 1)(x - 3)^4$, toma como estratégia identificar o caso notável presente no primeiro fator para decompor o seu polinómio em polinómios do 1.º grau, para mais facilmente conseguir identificar as cartas a combinar:

> S- Aqui isto é… se eu fizer como este que está aqui posso fazer $(x - 1)$? Não… $(x + 1)$? Ou seja, se eu fizer este fator aqui como este, posso meter $(x + 1)$?
> A1- Sim… ao quadrado.
> S- Sim, $(x + 1)^2$! Ah, então quero esta carta (buscando uma carta verde $(x + 1)(x - 3)$).

Num outro momento, em que tem a carta azul com o polinómio $P(x) = (x - 3^2)(x + 2^3)$, e pondera a adequação da carta verde que sugere a divisibilidade por $(x - 9)(x + 8)$ e da carta cor-de-rosa com os zeros 8 e 9, começa finalmente a ganhar alguma autonomia:

> S- 3^2 é 9 e 2^3 é 8, então são fatores exatamente iguais. (referindo-se ao polinómio da sua carta verde) Logo é divisível. Neste a carta está errada (referindo-se aos zeros na carta cor-de-rosa), porque devia ser… calma eu chego lá…devia ser -8, porque -8 com 8 dá zero e pronto. E depois são duas raízes simples porque os fatores só se repetem uma vez.

Nota-se assim uma evolução em Sara, à medida que vai jogando. Na primeira sessão a aluna mostrou jogar de forma algo irrefletida, evidenciando através do seu discurso que não compreende os conceitos envolvidos no jogo. Na segunda sessão, Sara joga de forma mais ponderada e, apesar de continuar a apresentar alguns erros no seu discurso, a aluna já consegue trabalhar os polinómios em função das cartas que procura.

Conclusão

As conclusões alcançadas realçam a utilidade da prática do jogo em contexto educacional. À medida que jogam, as alunas sentem a necessidade de refletir, questionar, discutir e relacionar as suas diversas conjeturas explanadas durante o jogo.

O grupo desenvolve diálogos em torno das diversas situações do jogo e, tal como identificam Smole et al. (2008), a consolidação dos conceitos implícitos no jogo é, não só, mas também consequência das conclusões retiradas dos momentos de discussão.

As discussões são observadas principalmente após a identificação de incertezas em alguns conceitos, quer durante o decorrer das jogadas quer aquando da concretização e posterior justificação de um polygame. Deste modo, e de acordo com Swan e Marshall (2009), o jogo serviu previamente como diagnóstico para as alunas, que reconheceram algumas das suas dificuldades, dando-lhes uma visão assertiva sobre os conteúdos a aprofundar e tornando-as mediadoras da sua própria aprendizagem. De notar que jogo após jogo, as alunas mostraram maior clareza e confiança no seu discurso, apropriando-se progressivamente da linguagem matemática específica do tema.

A consolidação dos diversos conceitos que o jogo propõem também ocorre quando as alunas constroem raciocínios que resultam nas suas jogadas. Com o suceder dos jogos, as alunas começam a dominar os conteúdos, a trabalhar previamente as suas cartas e a refletir sobre quais as cartas que têm que procurar, ao contrário do que sucede inicialmente, quando escolhem as cartas da mesa de forma intuitiva.

No caso de Sara, a aluna estava habituada a resolver inúmeras vezes os mesmos exercícios, categorizando e memorizando os processos de resolução dos mesmos. Inicialmente, revela muita dificuldade em construir argumentos válidos para justificar as suas escolhas. Motivada pela necessidade do jogo requerer a discussão e justificação dos polygames realizados, a aluna vai progressivamente dando significado aos conceitos que estão subjacentes às suas jogadas e melhorando a sua argumentação matemática.

Para Carolina, a grande vantagem deste jogo reside no desenvolvimento da sua capacidade de intervir de forma efetiva. Talvez pela motivação, tal como aponta no seu questionário, a aluna rapidamente se envolve no jogo. Perante erros, dúvidas e dificuldades do grupo, a aluna constrói ao longo do tempo diálogos mais duradouros e complexos. Por outro lado, deixa de recorrer à professora aquando das suas dúvidas, preferindo falar com os seus colegas e contribuindo para a autonomia da discussão no grupo.

Podemos assim concluir que o uso do jogo promoveu momentos de discussão e troca de perspetivas em torno dos conteúdos inerentes ao próprio jogo, o que culminou num potencial desenvolvimento da comunicação matemática dos alunos relativamente ao tema dos polinómios. A consolidação de conceitos durante o jogo é consequência da reflexão dos alunos durante a combinação das suas cartas e das conclusões retiradas dos momentos de discussão ao longo do jogo.

Referências bibliográficas

Allen, J. (2010). *Action Research Project: How do math games affect student engagement and achievement?* HTH GSE PROGRAM. Acedido a 28 de dezembro de 2015, em http://jacquiallen.weebly.com/uploads/1/2/7/7/1277093/jacquis_thesis.pdf.

Ascoli, C., & Brancher, V. (2006). Jogos matemáticos: algumas reflexões sobre os processos de ensino e aprendizagem. *Jornada Educação*, UNIFRA.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1997). *Investigação Qualitativa em Educação – uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Bragg, L. (2003). Children's perspectives on mathematics and game playing. In Mathematics education research: Innovation, networking, opportunity, *Proceedings of the 26th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Geelong (vol. 1, pp. 60-167) Sydney: MERGA.

Bragg, L. (2006). Hey, I'm learning this. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *11*(4), 4-9.

Cody, K. J., Rule, A. C., & Forsyth, B. R. (2015). Mathematical game creation and play assists students in practicing newly-learned challenging concepts. *Creative Education*, *6*, 1484-1495.

Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Sintesis.

Costa, O. (2011). *O jogo didático como estratégia de aprendizagem*. Dissertação de mestrado. Lisboa: Faculdade de Ciências Sociais e Humanas da Universidade Nova de Lisboa.

Escolano, J. M. M., Marcén, A. M. O., & Morales, J. M. (2009). Empleo didáctico de juegos que se materializan mediante grafos: una experiencia. *Contextos Educativos. Revista de Educación, 12,* 137-164.

Ernest, P. (1986). Games. A rationale for their use in the teaching of mathematics in school. *Mathematics in School*, *15*(1), 2-5.

Gairín, J. M. (1990). Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas. *Educar, 17,* 105-118.

Garris, R., Ahlers, R., & Driskell, J. E. (2002). Games, motivation, and learning: A research and practice model. *Simulation & Gaming*, *33*(4), 441-467

Gaspar, I. (2015). *A influência dos jogos matemáticos na predisposição dos alunos para a matemática e na sua aprendizagem*. Relatório de Estágio, Escola Superior de Educação de Lisboa-Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Guerreiro, A. (2011). *Comunicação no ensino-aprendizagem da Matemática: Práticas no 1.º ciclo do ensino básico*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Heras, S. G. (2014). *La utilización de juegos en la enseñanza de las matemáticas*. Trabajo fin de grado, Facultad de educación-Universidad de Zaragoza, España.

Lopes, A. V., Bernardes, A., Loureiro, C., Varandas, J. M., Oliveira, M. J. C., Delgado, M. J., Bastos, R., & Graça, T. (1996). *Actividades Matemáticas na sala de aula*. Lisboa: Texto Editora.

Macedo, L. (2000). *Aprender com jogos e situações-problema*. Porto Alegre: Artes médicas

Moura, P. & Viamonte, A. (2006). *Jogos matemáticos como recurso didáctico*. Acedido a 21 de dezembro de 2015, em http://www.apm.pt/files/_CO_Moura_Viamonte_4a4de07e84113.pdf.

Oldfield, B. J. (1991). Games in the Learning of Mathematics: 1: A Classification. *Mathematics in School*, *20*(1), 41–43. Acedido a 21 de dezembro de 2015, em http://www.jstor.org/stable/30214754.

Peralta, A. G. G., Zavaleta, J. G. M., & Aguilar, M. S. (2014). La matemática nunca deja de ser un juego: investigaciones sobre los efectos del uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática*, *26*(3), 109-133.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em GTI (Eds). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Remmele, B., Seeber, G., Krämer, J., & Schmette, M. (2009). Game-Based Teaching–Dimensions of Analysis. In: *Proceedings of the 3rd European Conference on Game Based Learning* (pp 325-331). Academic Conferences Limited. Acedido a 4 de dezembro de 2015, em https://www.researchgate.net/profile/Bernd_Remmele/publication/268348200_GameBased_Teaching_Dimensions_of_Analysis/links/54745f640cf245eb436dd9d6.pdf.

Selva, K. & Camargo, M. (2009). O jogo matemático como recurso para a construção do conhecimento. In *Educação Matemática nos Anos Iniciais e Ensino Fundamental: atas do X Encontro Gaúcho de Educação Matemática*, Rio Grande do Sul. Acedido a 3 de fevereiro de 2016, em http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_4.pdf.

Smole, K. S., Diniz, M. I., Pessoa, N., & Ishihara, C. (2008). *Cadernos do Mathema: Ensino Médio: Jogos de matemática de 1.º a 3.º ano*. Porto Alegre: Artmed.

Smole, K., Diniz, M., & Cândido, P. (2007). *Cadernos do Mathema: Jogos de matemática de 1.º a 5.º ano*. Porto Alegre: Artmed.

Strapason, L., & Bisognin, E. (2013). Jogos pedagógicos para o ensino de funções no primeiro ano do Ensino Médio. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 27(46), 579-595. Acedido a 21 de dezembro de 2015, em http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2013000300016&lng=en&tlng=es.

Swan, P., & Marshall, L. (2009). *Mathematical games as a pedagogical tool*. Acedido a 10 de novembro de 2015, em http://recsam.edu.my/cosmed/cosmed09/AbstractsFullPapers2009/Abstract/Mathematics%20Parallel%20PDF/Full%20Paper/M26.pdf.

A aprendizagem das operações aritméticas com polinómios através do jogo *Tempoly*

Cândida Barros[1], *Ana Amélia Carvalho*[2]
[1]LabTE, FPCE, Universidade de Coimbra, *candida.barros@gmail.com*
[2]LabTE, FPCE, Universidade de Coimbra, *anaameliac@fpce.uc.pt*

Resumo. *Neste texto descrevemos um jogo, chamado Tempoly, desenvolvido para o sistema operativo Android, sobre as quatro operações aritméticas com polinómios. Descrevemos as várias etapas conducentes à criação do jogo. Relativamente ao jogo desenvolvido, são indicadas as suas caraterísticas, explicadas as mecânicas de jogo, e fundamentadas as opções de design que estiveram na sua génese. São também relatados os resultados de um estudo sobre a introdução do jogo na sala de aula e os benefícios na aprendizagem dos alunos sobre este tema, decorrentes da utilização do jogo.*

Palavras-chave*: aprendizagem da matemática; jogos móveis; aprendizagem móvel; operações com polinómios; Tempoly.*

Abstract. *In this text, we describe a game, named Tempoly, developed for the operating system Android, concerning the four arithmetic operations with polynomials. We describe the steps in the creation of the game. About the game developed, we describe its characteristics, explain the game mechanics, and fundament the design options that are in its genesis. We also report the results of a study about the introduction of the game in the classroom and the learning benefits that occurred by using the game.*

Keywords: *mathematics learning; mobile games; mobile learning; operations with polynomials; Tempoly.*

Introdução

As operações com polinómios, e o tema mais geral da álgebra, é um tema em que os alunos revelam bastantes dificuldades (Booth, 1984). As regras operatórias que lhe estão subjacentes (em particular a distributividade e as regras de operações com potências) são muitas vezes esquecidas ou confundidas pelos alunos. A aprendizagem destas operações requer por isso bastante dedicação por parte do aluno. Por outro lado, os videojogos são muito atraentes para os alunos e eles passam muito tempo a jogá-los. Um dos objetivos deste trabalho é o de tentar rentabilizar essa atração pelos jogos, motivando para a aprendizagem das operações com polinómios. Para esse efeito foi criado um jogo móvel, denominado *Tempoly*, sobre esta temática.

Neste texto descrevemos o jogo criado e um estudo realizado através da introdução do *Tempoly* em contexto educativo. O objetivo desse estudo foram verificar qual o efeito dessa utilização nas aprendizagens dos alunos e qual é a opinião deles sobre o jogo *Tempoly*.

Neste texto começamos por enquadrar os benefícios dos jogos, em particular dos jogos móveis, na aprendizagem. Na secção seguinte descrevemos as várias etapas conducentes à criação do jogo. Posteriormente, descrevemos o jogo e as suas características, bem como os testes de usabilidade realizados. Por fim, apresentamos o estudo realizado com uma turma do 8.º ano, no qual se analisam os resultados de aprendizagem obtidos e as reações dos alunos ao jogo *Tempoly*.

O jogo e a aprendizagem

O conceito de jogo é mais restrito do que o de brincadeira (Bishop, 1991), sendo mais formal, estando sujeito a regras e sendo menos espontâneo. Piaget (1971) afirma mesmo que "o jogo é um aspeto de qualquer atividade" (p. 189) e clarificou a sua importância na aprendizagem. Prensky (2001) defende que um jogo é composto por seis fatores essenciais, nomeadamente a existência de regras, objetivos, *feedback*, conflito, interação social e representação. É a presença de alguns destes aspetos nomeadamente a existência de objetivos e de *feedback*, o sentido de desafio e a interação social que os jogos promovem, que tornam apropriada a sua utilização em contextos educativos.

Os jogos *mobile* são aqueles destinados a dispositivos móveis, como telemóveis, *tablets*, consolas portáteis, etc. Estes jogos, embora em muitos casos se baseiem em jogos para consolas e computadores, têm características distintas. Jeong & Kim (2007) caracterizam-nos pela portabilidade (o jogador pode levar um determinado jogo consigo para qualquer lugar); pela acessibilidade (o jogador costuma transportar o telemóvel consigo no dia-a-dia); pela capacidade de ligação à rede (possibilitando a interação entre jogadores); e pela simplicidade (os telemóveis têm uma interface fácil de utilizar).

A utilização de jogos na aprendizagem pode ser benéfica tanto no aspeto de apropriação de conhecimentos como no desenvolvimento de competências. McFarlane, Sparrowhawk e Heald (2002) concluem que

> Games provide a forum in which learning arises as a result of tasks stimulated by the content of the games, knowledge is developed through the content of the game, and skills are developed as a result of playing the game (p. 4).

Também Gros (2007) considera que as propriedades educativas dos jogos podem melhorar a aprendizagem, são desafiantes, promovem a cooperação e envolvimento e a resolução de problemas.

Por outro lado, a tecnologia é hoje uma parte integrante das nossas vidas. Os jovens alunos pertencem à geração polegar (Rheingold, 2002), conseguindo enviar mensagens rapidamente sem olhar para o teclado. Muitos fazem parte de uma rede social e estão em contacto permanente com os seus familiares e amigos. Nas escolas têm quadros interativos e nas aulas não recorrem apenas a materiais tradicionais. A maioria das escolas tem um *wesbite* e uma plataforma de *elearning*, para além de blogues das turmas, o que permite aos alunos estarem em contacto permanente com a escola.

Não existe uma grande quantidade de jogos desenvolvida especificamente para utilização em contexto educativo. No entanto, existe uma classe de jogos, inicialmente denominada de *edutainment* e mais tarde integrada no que hoje se chamam *serious games*, em que o objetivo principal do jogo ultrapassa o puro entretenimento (Zyda, 2005, Kapp, 2012). Alguns destes jogos abordam conteúdos curriculares; outros pretendem sensibilizar os jogadores para questões sérias da humanidade. No entanto, não são apenas estes jogos que contêm bons princípios de aprendizagem. Gee (2003) apresenta um conjunto de 36 princípios de aprendizagem presentes nos bons videojogos. Para Gee, a utilização destes princípios poderá ajudar a transformar a aprendizagem, não apenas nos jogos, mas também na escola.

Um dos motivos pelos quais os videojogos podem contribuir para a aprendizagem é explicado através da teoria do fluxo de Csikszentmihalyi (1992). Esta teoria defende que um indivíduo, ao realizar uma determinada atividade, pode atingir um denominado estado de fluxo. Egenfeldt-Nielsen (2005) qualifica este estado com base em características tais como o sentimento de que se é capaz de terminar uma atividade, capacidade de concentração, *feedback* rápido, envolvimento profundo, sentimento de controlo, esbatimento da consciência de si mesmo e perceção alterada do tempo. Estas características estão presentes nos videojogos atuais (Abrantes & Gouveia, 2007), o que justifica a sua grande atração. O uso de videojogos, construídos de modo a promover o estado de fluxo, poderá assim ajudar a captar a atenção dos estudantes e motivar maior envolvimento e motivação na aprendizagem (Mozelius, 2014). Por outro lado, o estado de fluxo esbate-se naturalmente à medida que o jogador se torna proficiente numa dada tarefa. Por esse motivo, a utilização continuada de um jogo tem o efeito de se tornar menos motivante com o passar do tempo (Deater-Deckard et al., 2014). O *timing* de utilização do jogo é por isso um fator importante na introdução desta tecnologia educativa na sala de aula.

Etapas no desenvolvimento do jogo

O desenvolvimento do jogo iniciou-se com um survey (Babbie, 1997) aos alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico, relativo às suas preferências sobre jogos mobile. Para o efeito foi desenvolvido e validado um inquérito por questionário, que depois foi aplicado aos alunos. Este questionário incidiu sobre os hábitos de jogo dos alunos, as suas preferências sobre jogos mobile e os motivos dessas preferências. O inquérito foi aplicado a 298 alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico. Os jogos mais jogados pelos alunos foram diferentes consoante o tipo de dispositivo, conforme indicado no Quadro 1.

Quadro 1.
Jogos mais jogados pelos alunos

Laptop	Telemóvel	Consola	Tablet	Smartphone
The Sims	Grand Theft Auto	FIFA	Bad Piggies	Hill Climb Racing
Minecraft	Puzzle Bobble	Pro Evolution Soccer	FIFA	Grand Theft Auto
Pro Evolution Soccer	Bounce Tales	Grand Theft Auto	Stardolls	Jetpack Joyride
Grand Theft Auto	Where's My Water	Call of Duty	Subway Surfers	Fastball
Crossfire	Crazy Penguin Catapult	Little Big Planet	Jetpack Joyride	Fruit Ninja

O questionário pretendia também a identificar as características dos jogos mais jogados pelos alunos. As características que mais se salientaram nestes jogos foram as ligadas ao estado de fluxo (Apela a jogar várias vezes; Faz perder a noção do tempo; Envolvimento no jogo), à facilidade em jogar (Facilidade no uso dos controlos;

Facilidade em começar a jogar) e ao ser desafiante e exigir uma interação rápida. Uma análise mais detalhada dos resultados deste questionário em Barros e Carvalho (2014).

Posteriormente, realizou-se uma análise dos jogos mais jogados pelos alunos. Para este efeito, foi elaborada uma grelha de análise dos jogos, a partir do trabalho de Gee (2003), Prensky (2005, 2006), Gee (2007), Squire (2008), Zimmerman (2008), Carvalho & Gomes (2009) e Conolly et al. (2009). Pretendeu-se identificar as ações preferidas pelos jogadores, os elementos motivacionais e os princípios de aprendizagem de Gee (2003) presentes em cada jogo. A compreensão de como estes princípios de aprendizagem se evidenciavam nos jogos preferidos dos alunos foi essencial no desenvolvimento do jogo.

Depois de identificados estes princípios de aprendizagem, iniciou-se o desenvolvimento do jogo. Foi usada uma metodologia de desenvolvimento (van den Akker, 1999; Coutinho & Chaves, 2001). Partindo das ações preferidas pelos jogadores e dos elementos motivadores identificados anteriormente, foi elaborado o guião de um jogo respeitando os princípios de aprendizagem de Gee (2003). O *design* teve em conta a dimensão pedagógica e as especificidades das tecnologias móveis, para desenvolver uma atividade centrada no jogador, facilitadora do estabelecimento do estado de fluxo. Na secção seguinte descrevem-se as caraterísticas do jogo desenvolvido e explicitam-se como os princípios de aprendizagem de Gee se manifestam no jogo.

O jogo *Tempoly*

Foi criado o jogo *Tempoly*, que aborda as quatro operações aritméticas com polinómios e é dirigido a estudantes do 3.º Ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário, onde o estudo destas operações faz parte do programa oficial da disciplina de Matemática. Os níveis mais simples apenas envolvem as três primeiras operações, sendo por esse motivo adequado para alunos a partir do 8.º ano. Os níveis que envolvem a divisão de polinómios são dirigidos para alunos do Ensino Secundário. O objetivo do jogo é combinar alguns polinómios apresentados pelo jogo para tentar chegar a um determinado resultado.

O jogo tem um total de 250 desafios, de dificuldade crescente, que exigem capacidade de resolução de problemas e pensamento crítico em Matemática. O jogo foi desenvolvido para o sistema operativo *Android*, e a manipulação dos polinómios é feita através do toque. O jogador deve arrastar os polinómios e combiná-los de forma adequada na zona de trabalho (Figura 1). Todos os polinómios são de uma variável. No entanto, de cada vez que o jogador inicia um desafio, a variável poderá ser representada por uma letra diferente. Embora os níveis possam ser resolvidos em poucos movimentos (menos de 10), os testes de usabilidade, descritos na secção seguinte, mostraram que os jogadores usam frequentemente muitos movimentos (por vezes mais de 100), que correspondem a diferentes tentativas para chegar ao resultado.

Figura 1. Um dos 250 desafios do *Tempoly*.

O nome do jogo *Tempoly* resulta da junção das palavras templo e polinómio, uma vez que os elementos gráficos do jogo têm a temática de um templo. O templo tem três áreas, feitas de material diferente, nomeadamente madeira, pedra e metal. Os desafios correspondem a salas do templo e resolver um desafio corresponde a abrir uma porta. O jogador começa num nível de madeira e para passar a outro material, necessita de resolver pelo menos um desafio de cada nível do material anterior.

No menu principal, pode ser selecionado um novo perfil, verificar o *écran* das medalhas, ver um tutorial, criar um nível diferente, alterar as opções de som, ou jogar o jogo.

O tutorial descreve brevemente qual é mecânica do jogo. Não tem um caráter expositivo, no sentido em que não indica como se realizam as operações aritméticas com polinómios. A aprendizagem destas operações é feita através da experiência obtida no jogo, que começa com níveis muito simples, apenas envolvendo números.

O jogador pode optar entre jogar um dos 250 níveis, ou jogar um nível criado por outro jogador. O jogo mostra o número de jogadas feitas e quantos segundos está a demorar a completar o desafio (cf. Figura 1). Caso o jogador opte por jogar um nível que já tenha completado anteriormente, é informado também do seu melhor resultado, para que o possa tentar melhorar.

Em cada nível há muitas formas diferentes de chegar ao objetivo e o jogador pode usar qualquer uma delas. O jogador vai combinando os polinómios disponíveis da forma que quiser e o jogo vai calculando em cada momento quais os resultados das operações efetuadas. Os cálculos são apresentados ao jogador de duas formas. Por um lado, é apresentada uma animação que mostra os polinómios a serem absorvidos pelo operador, que devolve em seguida o resultado. Esta animação é acompanhada do som de uma manivela, traduzindo a ideia de que o operador é uma máquina que transforma os operandos no resultado. Por outro lado, é apresentado explicitamente o cálculo realizado (conforme a Figura 1). Os resultados destas operações podem ser usados para efetuar novos cálculos, ou podem ser guardados na zona de trabalho para serem usados posteriormente.

Nalguns casos, quando o jogador resolve um desafio, recebe uma medalha. Há um total de 20 medalhas, que premeiam diferentes aspetos do jogador, como a velocidade e a perseverança.

No modo criativo, o jogador pode criar novos níveis. Para isso, o jogador indica quais são os polinómios iniciais, definindo os seus coeficientes, e as operações que podem ser usadas. Para indicar a solução, o jogador necessita de combinar os polinómios que indicou, criando assim um novo polinómio que constituirá o objetivo do desafio.

Testes de usabilidade

Durante o desenvolvimento do jogo *Tempoly*, este foi sendo testado com alguns alunos para avaliar a sua usabilidade, nomeadamente a sua eficácia, eficiência e satisfação dos sujeitos, segundo a norma ISO 9241-11. O jogo foi testado em diversos dispositivos, com *écrans* com formato distinto e com capacidades de processamento e memória diversificados, obrigando a certos ajustes, como compressão de imagens e de som, afinações nos tamanhos de letras, de modo a tornar o aspeto do jogo agradável no maior número de dispositivos possível.

O estudo realizado à usabilidade do jogo incluiu os seguintes instrumentos de recolha de dados: um questionário de caracterização dos sujeitos, as tarefas a resolver e um questionário de satisfação (Rubin & Chisnell, 2008; Weiss, 2002).

Os testes de usabilidade foram realizados com 31 alunos portugueses. No âmbito de um projeto Erasmus+, testou-se também também o *Tempoly* com alunos finlandeses (n=28), tendo sido concebida uma versão do jogo em inglês (Quadro 2).

Quadro 2.

Participantes nos testes de usabilidade.

	3.º ciclo do Ensino Básico	Ensino Secundário
Portugal	20	11
Finlândia	16	12

Estes alunos jogaram um total de 448 desafios. As reações dos participantes foram positivas perante o jogo, sentindo-se os mesmos envolvidos na resolução dos desafios. Através da análise do tempo demorado em cada desafio e dos movimentos necessários para os resolver, foram realizados ajustes em alguns desafios, que se verificou não terem a dificuldade adequada para o nível em que se encontravam. Foram também realizadas pequenas modificações a nível gráfico, tendo presente as sugestões apresentadas pelos sujeitos.

Estudo com uma turma do 8º ano

Após a finalização do desenvolvimento do jogo *Tempoly*, este foi introduzido em contexto de sala de aula, com o objetivo de avaliar os efeitos da utilização do jogo em contexto educativo. Embora o estudo tenha objetivos mais alargados, relacionados por exemplo com a motivação dos alunos, neste texto descrevemos apenas a parte do estudo relativa às seguintes questões de investigação:

> Questão 1: "Qual é o efeito da utilização do *Tempoly* nos resultados dos alunos no tema das operações com polinómios?"
>
> Questão 2: "O que pensam os alunos do jogo *Tempoly*?"

a) Metodologia

O estudo realizado foi de tipo *quasi*-experimental (Cook & Campbell, 1979). Foram desenvolvidos e validados os instrumentos de recolha de dados, tendo-se utilizado a técnica do inquérito por questionário. Os instrumentos desenvolvidos para avaliar o efeito do jogo *Tempoly* na aprendizagem e para auscultar a opinião dos alunos sobre o mesmo foram os seguintes: testes de conhecimentos, questionário de caracterização dos sujeitos e de opinião sobre o jogo.

Para caracterizar os sujeitos desenvolveu-se um questionário de caracterização inicial que incidiu sobre os dispositivos móveis que possuem, se gostam de jogar e se gostam de Matemática. Foi desenvolvido um segundo questionário para inquirir a opinião dos alunos sobre o *Tempoly* e para ser respondido no final do estudo. Este questionário foi desenvolvido segundo diversas categorias, nomeadamente, Performance, Ambiente, Motivação, Perceções, Preferências e Atitudes, propostas por Connolly, Stansfield & Hainey (2009).

O teste de conhecimentos sobre as operações aritméticas com polinómios é composto por 10 questões de dificuldade crescente. A primeira questão contém apenas números (polinómios de grau 0), as questões 2 a 4 incidem sobre polinómios de grau 1, as questões 5 a 9 envolvem polinómios de grau 2 e a última questão incorpora um polinómio de grau 3.

A recolha de dados foi feita pela investigadora.

b) Descrição

A amostra foi constituída por 24 alunos, de uma turma do 8.º ano de escolaridade, sendo 4 do sexo masculino e 20 do sexo feminino. A maioria dos alunos (86%) costuma jogar no seu dispositivo móvel, dos quais 33% têm o sistema *Android*. Grande parte dos alunos gostam de matemática (71%).

Os alunos realizaram o questionário de caracterização inicial e o pré-teste de conhecimentos, como se pode ver na quadro 3.

Quadro 3.

Calendarização da introdução do Tempoly

Questionário inicial Pré-teste	1ª aula de jogo	2ª aula de jogo	Pós-teste	Questionário de opinião
9 dez. 2015	11 dez. 2015	14 dez. 2015	14 dez. 2015	14 dez. 2015

O jogo foi disponibilizado através da plataforma *Moodle* da escola. Foram dedicadas duas aulas à exploração do jogo. Para além destes momentos, os alunos puderam jogar o jogo nos seus dispositivos móveis, fora da sala de aula, quando assim o desejassem. Alguns alunos apenas instalaram o jogo em casa, uma vez que não tinham permissão dos pais para levar o *tablet* para a escola.

Figura 2. O primeiro dia de jogo.

Nas aulas, alguns alunos jogaram o jogo sozinhos (Figura 2), mas em geral optaram por jogar em grupo.

c) Resultados

Os resultados obtidos pelos alunos no pré-teste e pós-teste estão representados na quadro 4. As respostas dos alunos às 10 questões do pré-teste e do pós-teste foram classificadas como certas (1 ponto) ou erradas (0 pontos). Constata-se uma evolução nos resultados obtidos.

Quadro 4.

Resultados obtidos nos testes de conhecimentos.

Testes	N	Média	Desvio padrão	Mínimo	Máximo
Pré-teste	21	2,9048	0,99523	2	5
Pós-teste	21	4,2381	1,51343	2	8

Para se verificar a existência de significância estatística, realizou-se o teste de Wilcoxon, para comparar num grupo dois testes (cf. Qaudro 5).

Quadro 5.

Os resultados do teste de Wilcoxon relativo à diferença entre o pré-teste e o pós-teste.

	N	Média do rank	Soma dos ranks	Z	Significância assimptótica
Ranks negativos	1[a]	3,00	3,00	-3,277[d]	,001
Ranks positivos	14[b]	8,36	117,00		
Empates	6[c]				
Total	21				

[a]. Pós-teste<Pré-teste
[b]. Pós-teste>Pré-teste
[c]. Pós-teste=Pré-teste
[d]. Baseado nos ranks negativos

Verifica-se que há diferenças estatisticamente significativas entre o pré-teste e o pós-teste (p = ,001).

Uma vez que os alunos realizaram ambos os testes antes da introdução da unidade curricular correspondente, estes resultados indicam que a utilização do *Tempoly* contribui para a aprendizagem desta unidade curricular, mesmo sem nenhuma aula formal sobre o tema.

Embora as operações aritméticas com polinómios não tenham sido estudadas na aula durante a utilização do jogo, alguns alunos interiorizaram como estas se realizam. De seguida, apresentamos quatro exemplos dessa interiorização, evidenciando as mudanças de resposta do pré-teste para o pós-teste. Nos quadros 6 e 7 são indicadas as respostas dadas por quatro alunos (A, B, C e D) em duas das questões do pré/pós-teste.

Quadro 6.

Respostas à questão 5 do pré-teste e pós-teste

	Resposta no pré-teste	Resposta no pós-teste
Aluno A	$(k^2-2)+(k-5)=k^3-7$	$(p^2-3)+(p-7)=p^2+p-10$
Aluno B	$(k^2-2)+(k-5)=2k+(-7)=2k-7$	$(p^2-3)+(p-7)=(p^2+p)+[-3+(-7)]=$ $=p^2+p+(-10)=$ $=p^2+p-10$

A primeira das questões, apresentada no quadro 6, está relacionada com a adição de polinómios de graus diferentes. Ambos os alunos A e B somaram corretamente os termos de grau 0. No entanto, a soma dos restantes termos foi incorretamente realizada pelos alunos, tendo o aluno A somado os expoentes da variável, e o aluno B somado os coeficientes da variável, ignorando o facto de os termos em causa não serem semelhantes. No pós-teste, pelo contrário, ambos os alunos já tinham interiorizado como se somam termos de grau diferente.

A segunda das questões, apresentada no quadro 7, diz respeito ao caso notável da diferença de quadrados. Nem o aluno C nem o aluno D conheciam este caso notável e no pré-teste cometeram erros diferentes, embora ambos relacionados com uma confusão entre a adição e a multiplicação. Enquanto o aluno C "corta" os termos simétricos, o aluno D adiciona os termos com o mesmo sinal. Ambos os alunos apresentaram a resposta correta na questão análoga do pós-teste.

Quadro 7.

Respostas à questão 7 do pré-teste e pós-teste

	Resposta no pré-teste	Resposta no pós-teste
Aluno C	$(x-\cancel{7})(x+\cancel{7}) = 2x^2$	$(x-6)(x+6) = x^2 - 36$
Aluno D	$(x-7)(x+7)\ 2x - 49$	$(x-6)(x+6)\ x^2 - 36$

Relativamente ao questionário de opinião, verificámos que a experiência de utilização do *Tempoly* na sala de aula foi muito bem recebida. Os alunos referiram que a aula foi interessante (90%), que gostaram do jogo (95%) e que preferiram usar este jogo do que ter realizado outras atividades como, por exemplo, fichas de trabalho (95%).

Quanto à aprendizagem percecionada pelos alunos, estes referiram que o *Tempoly* os ajudou a aprender as operações com polinómios (81%). Esta perceção é suportada pelo teste de Wilcoxon referido anteriormente, que indicou uma diferença estatisticamente significativa nos resultados dos alunos. O jogo também serviu como motivação para o estudo da unidade que se iniciou posteriormente, tendo os alunos referido que gostariam de aprender mais sobre polinómios (62%).

Embora o jogo, pela sua natureza, tenha uma vertente lúdica, os alunos referiram que iam fazendo cálculos mentais enquanto jogavam (86%), o que mostra que, segundo os alunos, o jogo não se limita a esta vertente e insere o *Tempoly* na categoria dos *serious games* (Zyda, 2005, Kapp, 2012).

Os alunos referiram ainda que o jogo tinha uma dificuldade média (90%), que era um dos objetivos do *design*, uma vez que esta característica promove o estabelecimento do estado de fluxo, caracterizado por Csikszentmihalyi (1992).

No que diz respeito a elementos particulares do jogo, os alunos referiram que gostaram do aspeto gráfico (81%), do tema do jogo (90%) e, em menor grau, da música (59%). Relativamente a esta última característica, os alunos tiveram a oportunidade de desligá-la, mantendo os efeitos sonoros, de que gostaram mais (73%).

Conclusão

Neste texto descreveu-se o jogo *Tempoly*, sobre as quatro operações aritméticas com polinómios, que foi integrado no contexto de sala de aula. Foi realizado um estudo *quasi*-experimental cujos resultados estatisticamente significativos apontam no sentido de que a utilização do jogo promove a aprendizagem destas operações pelos alunos, mesmo antes da aprendizagem formal destas operações na sala de aula. Verificou-se também que os alunos gostaram de utilizar o jogo na sala de aula, e que gostariam de repetir a experiência noutras aulas. Neste momento está em curso um estudo mais alargado sobre a integração do jogo na sala de aula em diferentes momentos relativamente à introdução da unidade curricular sobre polinómios, incluindo também um grupo de controlo que não utilizará o jogo. Este estudo permitirá aprofundar o estudo das questões de investigação propostas, bem como averiguar se o benefício já verificado na aprendizagem ocorre independentemente do momento de introdução do jogo ou se há um momento mais propício para o fazer.

Referências bibliográficas

Abrantes, S. & Gouveia, L. (2007). Será que os jogos são eficientes para ensinar? Um estudo baseado na experiência de fluxo. In P. Dias; C. Freitas.; B. Silva; A. Osório & A. Ramos (orgs.); *Actas da IV Conferência Internacional de Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Challenges'07*, (pp 424-431). Braga: Centro de Competência da Universidade do Minho.

Babbie, E. (1997). *Survey Research Methods*. Belmont, California: Wadsworth.

Barros, C., & Carvalho, A. (2014). Os jogos mobile que os alunos mais jogam no 3.º ciclo. In L. Roque, A. Afonso, L. Pereira, R. Craveirinha (Eds.), *Actas da Videojogos'2013* (pp. 127-136). Coimbra: University of Coimbra.

Bishop, A. (1991). *Mathematical Enculturation: a cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors, a report of the strategies and errors in the secondary school project*, NFER-Nelson, London.

Carvalho, A. A., & Gomes, T. (2009). Portal de Avaliação sobre Software Educativo Multimédia e Jogos. In P. Dias & A. Osório (Orgs), *Actas da VI Conferência Internacional de Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação – Challenges 2009* (pp. 1967-1984). Braga: Centro de Competência da Universidade do Minho.

Cook, T. D., & Campbell, D. T. (1979). *Quasi-experimentation: Design and analysis issues for field settings*. Chicago, IL: Rand-McNally.

Connolly, T.; Stansfield, M., & Hainey, T. (2009). Towards the development of a gamebased learning Evaluation Framework. In T. Connolly, M. Stansfield, & L. Boyle (Eds.), *Games-based Learning Advancements for Multi-Sensory Human Computer Interfaces: Techniques and Effective Practices* (pp. 251-273). Hershey, Information Science Reference.

Coutinho, C., & Chaves, J. (2001). Desafios à investigação das TIC em Educação: as metodologias de desenvolvimento. *Desafios 2001: atas da Conferência Internacional de Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação* (pp.895-903). Braga: Centro de Competência Nónio Século XXI da Universidade do Minho.

Csikszentmihalyi, M. (1992). *Flow: The Classic work on how to achieve happiness*. New York: Harper Perennial.

Deater-Deckard, K., El Mallah, S., Chang, M., Evans, M. A., & Norton, A. (2014). Student behavioral engagement during mathematics educational video game instruction with 11-14 year olds. *International Journal of Child-Computer Interaction*, 2(3), 101-108.

Egenfeldt-Nielsen, S. (2005). *Beyond Edutainment: Exploring the Educational Potential of Computer Games*. Dissertação de Doutoramento, IT-University of Copenhagen, Copenhaga, Dinamarca.

Gee, J. P. (2003). *What Video Games Have to Teach Us about Learning and Literacy.* New York: Palgrave Macmillan.

Gee, J. P. (2007). *Good Video Games + Good Learning: Collected Essays on Video Games, Learning and Literacy.* New York: Peter Lang.

Gros, B. (2007). Digital Games in Education: The Design of Games-Based Learning Environments, *Journal of Research on Technology and Education*, *40* (1), 23-38.

Kapp, K. M. (2012). *The Gamification of Learning and Instruction: Game-based Methods and Strategies for Training and Education*, John Wiley & Sons.

Jeong, E., & Kim, D. (2007). Definitions, Key Characteristics, and Generations of Mobile Games. In Taniar, D. (Ed.), *Encyclopedia of Mobile Computing and Commerce* (pp. 185 – 189).

McFarlane, A., Sparrowhawk, A., & Heald, Y. (2002). *Report on the educational use of games*. Cambridge: Teem.

Mozelius, P. (2014). *Game Based Learning – a Way to Stimulate Intrinsic Motivation*. https://www.researchgate.net/publication/263564163_Game_Based_Learning_-_a_Way_to_Stimulate_Intrinsic_Motivation. (Acessível em 14 de fevereiro de 2016)

Piaget, J. (1971). *A formação do símbolo na criança*. Rio de Janeiro: Zahar.

Prensky, M. (2001). *Digital game-based learning*. New York: McGraw-Hill.

Prensky, M. (2005). Computer games and learning: digital game-based learning. In J. Raessens & J. Goldstein (eds), *Handbook of Computer Game Studies*, (pp. 97-122). MIT Press: Cambridge.

Prensky, M. (2006). *'Don't bother me mom – I'm learning!' How computer and video games are preparing your kids for 21st century success – and how you can help*! Minnesota: Paragon House.

Rheingold, H. (2002). *Smart Mobs: The next social revolution*. Cambridge: Perseus.

Rubin, J. & Chisnell, D. (2008). *Handbook of Usability Testing: How to Plan, Design, and Conduct Effective Tests*. Indianapolis, Ind.: Wiley Pub..

Squire, K. (2008). Open-ended video games: A model for developing learning for the interactive age. In K. Salen (Ed.), *The Ecology of Games: Connecting Youth, Games, and Learning* (pp. 167-198). Cambridge, MA: The MIT Press.

van den Akker, J. (1999). Principles and Methods of Development Research. In Jan van den Akker et al. (Eds.) *Design Approaches and Tools in Education and Training* (pp. 1-14) Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Weiss, S. (2002). *Handheld Usability*. Wiley.

Zimmerman, E. (2008). Gaming literacy: Game Design as a Model for Literacy in the Twenty-First Century. In B. Perron, & M. J. Wolf (Eds.), *The Video Game Theory Reader 2* (pp. 23-31). New York: Routledge.

Zyda, M. (2005). From visual simulation to virtual reality to games. *Computer*, *38*(9), 25-32.

Identificar propriedades em quadriláteros – um caminho para a classificação inclusiva

Maria Paula Pereira Rodrigues[1], *Lurdes Serrazina*[2]
[1]Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, *mariapaular@campus.ul.pt*
[2]Escola Superior de Educação de Lisboa, UIDEF, Universidade de Lisboa, *lurdess@eselx.ipl.pt*

Resumo *Este artigo integra-se numa investigação mais ampla realizada no âmbito de um doutoramento e tem como objetivo identificar os conhecimentos que alunos do 3º ano de escolaridade revelam quando estabelecem relações entre propriedades de quadriláteros, dando a conhecer formas de organização e estruturação do pensamento. Ações, aqui, analisadas através de produções escritas dos alunos e da interação gerada em discussões de grande grupo. A recolha de dados foi feita a partir da observação participante da primeira autora, apoiada por gravações áudio e vídeo, e das produções escritas dos alunos.* Os *dados apresentados revelam as propriedades dos quadriláteros que foram reconhecidas, as conexões estabelecidas, com vista à construção de um processo de classificação, e as dificuldades que ainda persistem em tarefas desta natureza. Os resultados mostram que a classificação inclusiva, ainda inconsistente, decorre do reconhecimento de propriedades invariáveis nas figuras; que o processo de reconhecimento de uma figura através da identificação das suas propriedades, em detrimento da dimensão visual, é lento e distinto e que o raciocínio dos alunos tem implícito uma componente visual que induz a conceptualização e descrição, durante a observação de figuras.*

Palavras-chave: *quadriláteros; propriedades; raciocínio geométrico; classificação.*

Abstract *This paper is part of a large PHD study and it´s target is identify the knowledge that 3rd grade children show while they are establishing relations between properties of quadrilaterals, revealing individual organization and thinking structuration, here analyzed through children productions and interactions on whole group discussions. Data was collected through participant observation supported by audio and video recordings and children written productions. This data reveals quadrilaterals properties that have been recognized and the difficulties that still persists on this kind of tasks. Results show that hierarchical classification stills inconsistent and appears related with invariant properties of figures; shapes recognizing by the identification of its properties is a slow and distinct process and pupils reasoning has implicit a visual component that induces the conceptualization and description while they observe shapes.*

Keywords: *quadrilaterals; properties; geometric reasoning; classification.*

Introdução

Ao longo do seu crescimento as crianças aprendem a desenvolver diferentes perspetivas na relação com os objetos e a coordenar diferentes pontos de vista quando os observam e manipulam, utilizando referências externas que requerem a integração de diferentes representações (Clements & Sarama, 2014). Assim, um trabalho continuado que apele à manipulação, observação e discussão de objetos ou formas geométricas pode ajudar a desenvolver o raciocínio geométrico e a tornar, progressivamente, o trabalho com tarefas que apelam à visualização e ao raciocínio espacial mais desafiante e motivador. Neste tipo de tarefas enquadram-se as de natureza exploratória e investigativa que levam a "pensar matematicamente" e que lidam com processos fundamentais da atividade e do pensamento matemático "nomeadamente de classificação e hierarquização a partir de determinadas definições e propriedades" (Abrantes, 1999, p. 156).

Este artigo pretende identificar os conhecimentos que alunos do 3º ano de escolaridade, revelam quando estabelecem relações entre propriedades de quadriláteros, dando a conhecer formas de organização e estruturação do pensamento.

Raciocínio geométrico

Clements e Sarama (2007) sugerem que o conhecimento geométrico das crianças deve ser desenvolvido tendo em atenção diferentes vertentes, através da utilização de tarefas e materiais diversificados que permitam produzir imagens mentais baseadas na manipulação e diálogos produzidos em torno dos objetos observados. As descrições das crianças devem ser incentivadas e melhoradas para aumentar a sua produção e desconstruir os efeitos protótipo. Nesta perspetiva, conduzindo o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos alunos, entendido como a capacidade para utilizar informação já conhecida para produzir novas conclusões (Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012), o professor deve focar-se na intencionalidade de levar os mesmos a ultrapassar uma classificação baseada em protótipos visuais. Deverá, pois, promover tarefas de classificação de tipo descritivo ou analítico, onde se reconhece uma figura a partir da identificação do conjunto das suas propriedades, correspondente ao nível 2 de van Hiele, nível de análise.

Battista (2007) reconceptualizou os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele (1973), criando subníveis que consideram um desenvolvimento gradual do pensamento geométrico dos alunos.

Apresentamos em seguida, dado o percurso até aqui efetuado, um resumo dos subníveis 2.2 e 2.3 de Battista (2007) que, de acordo com a conjetura traçada, considerámos corresponderem aos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos com os quais desenvolvemos a tarefa apresentada nos resultados.

Nível 2.2. Raciocínio na sua componente informal e insuficientemente formal

Neste subnível, os alunos utilizam uma combinação de descrições formais e informais para descrever as formas porque, embora, muitas vezes, recordem propriedades que já abstraíram, dentro de uma dada classe de formas, por exemplo, afirmando para os retângulos: "… dois lados mais longos e dois lados mais curtos", o seu raciocínio continua a ter subjacente uma componente puramente visual e a maioria das suas descrições e conceptualizações parecem ocorrer subitamente quando observam as formas.

Nível 2.3. Raciocínio formal suficiente baseado em propriedades

Nesta etapa, os alunos utilizam explicita e exclusivamente conceitos geométricos formais e uma linguagem que descreve e conceptualiza as formas de maneira a conseguirem obter um conjunto suficiente de propriedades que especifiquem as figuras em análise. Aqui, os alunos fazem uma mudança decisiva e passam do raciocínio visual para um raciocínio baseado na identificação e relação de propriedades das formas, sendo capazes de utilizar e enunciar definições formais, identificando listas formais de características não relacionadas e as propriedades que são capazes de descrever, para as classes de figuras conhecidas.

Este subnível requer que conceitos formais como lado; comprimento e medida de ângulo estejam já suficientemente abstraídos para poderem ser utilizados na formação de conceptualizações relacionais, como "todos os lados iguais", descrevendo relações espaciais entre as partes de uma forma. Estas relações, tais como, lados opostos iguais, devem ter alcançado um nível de interiorização que os destaca dos seus contextos originais, de modo a serem aplicáveis a novas situações e disponibilizadas para analisar formas.

Raciocínio geométrico e representações

Battista (2008) afirma que em geometria "nós raciocinamos sobre objetos; nós raciocinamos com representações" (p.342), logo, de acordo com Clements (1981), que considera o raciocínio geométrico um processo interno, devemos ter em conta, fundamentalmente, as representações internas sem, no entanto, deixar de lado as representações externas, dado estas exprimirem as manifestações internas, através de processos de comunicação oral e escrita. Assim, qualquer processo de raciocínio depende da apresentação e organização da informação (Duval, 1998), nomeadamente os processos de raciocínio geométrico onde o indivíduo parte de uma imagem ou objeto para poder organizar a informação percecionada e construir relações, através da manipulação de imagens e construção de relações individuais.

Goldenberg, Cuoco e Mark (1998) referem que o facto de os objetos geométricos se relacionarem com representações visuais nem sempre representa uma mais-valia na elaboração de raciocínios, dada a articulação entre as suas dimensões conceptuais e visuais conduzirem a dificuldades e erros que, entre outros, se relacionam com conceitos conhecidos evocados pela memória que não representam a definição formal do conceito pretendido mas, sim, conjuntos de representações visuais, imagens, propriedades ou experiências vividas (Vinner, 1983), ou se ligam à ação sobre imagens e não sobre objetos, gerando definições protótipo que confundem e dificultam o raciocínio dos alunos (Battista, 2007; Clements, 2003; Clements & Battista, 1992). A esta situação está associada, segundo Mariotti (1992), a dupla dimensão dos objetos com que o raciocínio geométrico opera: a dimensão figurativa, relacionada com as representações, e a dimensão conceptual, ligada à definição e de caráter mais abstrato, que articuladas geram o *conceito figurativo* (Fishbein, 1993). Esta difícil articulação entre dimensão figurativa e conceptual dos objetos geométricos gera dificuldades na construção de definições claras e abrangentes, comprometendo, consequentemente, os processos de classificação.

Classificar em geometria

O processo de classificar em geometria, de acordo com Fischbein (1993), lida com ideias mentais que designamos de figuras geométricas. Estas possuem, em simultâneo, um caráter conceptual e visual, nomeadamente um conjunto de propriedades e uma forma. O conceito expressa uma ideia geral relativa à representação de uma classe de objetos, baseada nas suas características comuns, em contraste uma imagem é uma representação sensorial do objeto.

A coexistência de conceitos e imagens e a sua fusão possibilitam ao indivíduo construir conceitos figurativos que se ligam a realidades mentais, permitindo a construção do raciocínio geométrico e o desenvolvimento da capacidade de classificar geometricamente. Logo, classificar implica agir sobre conceitos figurativos, gerando interação entre conceito e imagem. Esta interação permite a criação de um processo de relações lógicas que levam ao reconhecimento de classes e subclasses de figuras ou a "… identificar as propriedades comuns e relevantes que determinam a categoria" (Mariotti & Fischbein, 1997, p.244).

Todavia, para Fischbein (1993) o desenvolvimento de conceitos figurativos não parece ser um processo natural mas, sim, o resultado de um percurso onde, vulgarmente, imagens e conceitos interagem durante a atividade cognitiva do indivíduo, umas vezes cooperando, outras criando conflito e dificuldades nos processos de classificação. Na opinião de Mariotti e Fischbein (1997), as dificuldades surgem porque o processo de conceptualização referente à definição formal entra em conflito com a tendência natural de praticar uma classificação de tipo partitivo, onde apenas são consideradas as propriedades necessárias e suficientes para a classificação de figuras.

A classificação de qualquer conjunto de conceitos não é independente do processo de definição, dado implicar uma relação de interdependência onde classificar implica definir os conceitos envolvidos e definir conceitos implica, de forma direta, a sua classificação (de Villiers, Govender & Patterson, 2009). Esta ideia pode ser traduzida na perspetiva de que saber a definição de um conceito não garante a compreensão do mesmo, como sugere de Villiers (1994):

> (…) embora possam ter ensinado a um aluno, e ele seja capaz de dizer, a definição padrão de um paralelogramo como um quadrilátero com lados opostos paralelos, o aluno pode ainda não considerar retângulos, quadrados e losangos como paralelogramos, já que a imagem conceptual que os alunos têm de um paralelogramo é que nem todos os ângulos ou lados podem ser iguais (p.412).

Esta ideia permite-nos perceber que o conhecimento da definição de paralelogramo não implica o conhecimento de uma classificação de tipo inclusivo, onde os conceitos mais particulares formam subconjuntos dos mais gerais.

Na classificação hierárquica ou inclusiva é possível observar que os retângulos e os losangos são subconjuntos dos paralelogramos, com os quadrados como interseção dos retângulos com os losangos.

Figura 1. Classificação hierárquica (de Villiers, 1994)

Classificar hierarquicamente pressupõe que o aluno não decore apenas um conjunto de definições mas que possua o conceito e seja capaz de criar imagens conceptuais das formas com que tem de lidar. Só assim poderá identificar propriedades invariáveis para uma classe ou subclasses de figuras, nomeadamente reconhecendo todos os paralelogramos, incluindo quadrados, retângulos e losangos, a partir da propriedade "dois pares de lados opostos paralelos".

Metodologia

O estudo apresentado neste artigo segue uma metodologia de natureza qualitativa-interpretativa (Denzin & Lincoln, 1989) e pretende identificar os conhecimentos que alunos do 3º ano de escolaridade revelam quando estabelecem relações entre propriedades de quadriláteros, dando a conhecer formas de organização e estruturação do pensamento.

A investigação é centrada num ambiente de aprendizagem em contexto, a partir da resolução e discussão de tarefas, cujo objetivo é promover nos alunos o desenvolvimento do raciocínio geométrico, levando-os a identificar conjuntos de propriedades de figuras no plano e a estabelecer conexões. Nesta perspetiva, optou-se por uma metodologia de *design research*, na modalidade de experiência de ensino (Gravemeijer & Cobb, 2006), orientada por uma conjetura.

A experiência de ensino envolve uma turma de vinte alunos, de uma escola privada, situada no concelho de Sintra, e os dados analisados englobam as produções escritas de duas alunas, recolhidos através da observação participante da primeira autora, apoiada pelos registos áudio e vídeo das discussões coletivas tidas em torno do seu trabalho.

A investigação onde se inserem os dados analisados neste artigo teve início com um estudo exploratório e, posteriormente, um primeiro ciclo de recolha de dados, pertencendo os dados aqui apresentados a um segundo ciclo de recolha, reunidos ao longo de duas aulas, de uma hora cada. A primeira aula contemplou o trabalho autónomo e a segunda a discussão coletiva, em torno do trabalho realizado autonomamente. A escolha dos trabalhos a discutir coletivamente resultou de aspetos relacionados com a identificação de propriedades conhecidas em quadriláteros; a apresentação de agrupamentos de figuras que considerassem propriedades nunca discutidas anteriormente; a utilização de erros de linguagem ou de ideias incorretas, entre outros. Os dados foram analisados tendo em conta, fundamentalmente, os subníveis de Battista (2007) que consideram um desenvolvimento gradual do pensamento geométrico dos alunos, resultantes da reconceptualização dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele (1973).

Este estudo emerge de um trabalho conjunto, entre a primeira autora, designada a seguir por investigadora, e a professora da turma, na conceção da tarefa e definição da metodologia de implementação da mesma. A sessão de discussão em grande grupo foi orientada pela professora da turma, tendo a investigadora intervindo em situações pontuais.

Para preservar a identidade dos alunos, na análise de dados, os mesmos serão identificados por nomes fictícios.

Resultados

A tarefa apresentada na figura 2 foi proposta aos alunos através do enunciado escrito "Observa com atenção as figuras e identifica propriedades das mesmas". Todavia, logo após o início do trabalho individual, uma grande percentagem de alunos revelou não ter entendido o que era suposto fazer. Perante esta dificuldade, a professora informou que deveriam ser identificadas propriedades das figuras apresentadas no enunciado e, caso fossem encontradas propriedades comuns, os alunos poderiam agrupar figuras por "famílias".

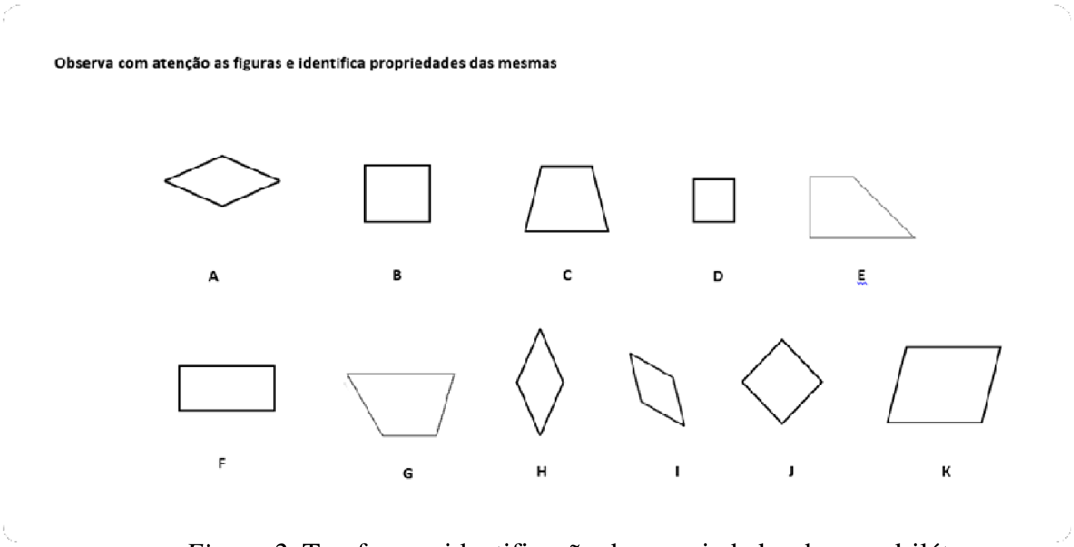


Figura 2. Tarefa para identificação de propriedades dos quadriláteros

No final do trabalho individual, foi visível, talvez motivados pela sugestão da professora, a necessidade que os alunos tiveram de agrupar as figuras de acordo com as propriedades que haviam conseguido identificar.

Na aula seguinte, analisaram-se e discutiram-se em grande grupo as propriedades referenciadas e os agrupamentos formados por duas alunas, no sentido de identificar as propriedades reconhecidas e entender as relações espaciais estabelecidas.

Decidimos, investigadora e professora, começar a discussão coletiva pelo trabalho apresentado por Catarina (Figura 3), dado o agrupamento criado remeter para a inclusão dos losangos na classe dos paralelogramos e possibilitar, ainda, uma discussão em torno das propriedades do paralelogramo obliquângulo.

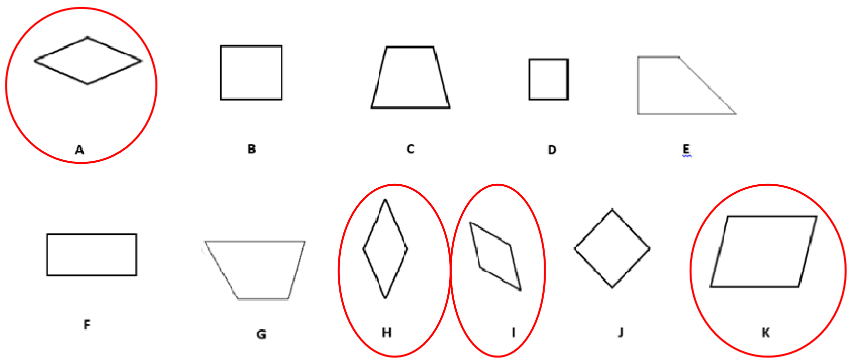


Figura 3. "Família" de paralelogramos e losangos criada por Catarina

A aluna rodeou as figuras *A*; *H*; *I* e *K* e identificou-a como "família" dos paralelogramos e losangos (Fig. 3), sem apresentar qualquer tipo de justificação escrita.

Professora: Catarina escolheste as figuras *A*; *H*; *I* e *K* e chamaste-lhe "família" dos paralelogramos e losangos. Queres explicar-nos porquê?
Catarina: Porque têm os lados todos iguais e têm os lados paralelos.
Patrícia: Catarina, a *K* não tem os lados todos iguais e não pode ser losango.

Patrícia, ao ouvir a justificação da colega, reage sugerindo que para formar a "família" dos paralelogramos losangos, as figuras nela incluída teriam de ter os "lados todos iguais", característica não identificada em *K*.

Professora: Concordas com a Patrícia?
Catarina: Concordo, acho que pensei mais nos lados paralelos e nos ângulos!

Catarina parece considerar relevante a existência de dois pares de lados opostos paralelos, para determinar os paralelogramos, e a existência de dois ângulos agudos e obtusos, para determinar os losangos, deixando de lado a congruência dos lados.

Professora: Bom, então, pensando na existência de dois pares de lados opostos paralelos, para poder ser paralelogramo, e nos "lados todos iguais", para ser losango, será que podemos considerar a figura *B* um paralelogramo losango?
Catarina: Não.
Professora: Porquê?
Catarina: Porque é um quadrado e não tem ângulos agudos e obtusos, só tem ângulos retos.

Esta reação parece ligar-se à imagem conceptual que a aluna tem de paralelogramo onde nem todos os lados ou ângulos podem ser iguais. Para além disso, Catarina continua focada na ideia da existência de dois ângulos agudos e dois ângulos obtusos para reconhecer o losango. Situação que poderá estar ligada à dimensão visual da mesma.

Patrícia: Eu acho que sim, mas não sei explicar muito bem.
Professora: …. a Catarina diz que a figura *B* não pode ser um paralelogramo losango e a Patrícia acha que sim. Quem quer ajudar?
Patrícia: Eu acho que é porque a diferença é só nos ângulos. A *B* tem ângulos retos e as outras têm ângulos agudos e obtusos.

Patrícia parece perceber que a diferença entre as figuras *A*; *H; I* e *B* reside apenas nos ângulos, mantendo-se invariáveis as propriedades consideradas inicialmente: dois pares de lados opostos paralelos e a congruência dos lados.

Prosseguindo, Patrícia acrescenta:

Patrícia: … mas ao grupo dos paralelogramos losangos, agora, eu acrescentava também as figuras *D*; *F* e *J*.

Lurdes: Não, não pode ser! Estás a fazer o mesmo que a Catarina quando escolheu a figura *K* para a "família" dos paralelogramos losangos.

Na escolha de Patrícia, é percetível a inconsistência da ideia de inclusão do quadrado na classe dos retângulos. A aluna, ao incluir a figura *F* nos paralelogramos losangos, parece ter considerado o retângulo como caso especial de quadrado e não o contrário.

Professora: Lurdes, explica um pouco melhor a tua ideia?
Lurdes: Olha… a *F* não pode ser um losango porque os lados não são todos iguais.
Patrícia: Ah…pois!
Professora: … com calma, vamos lá arrumar ideias! […] quais são as figuras que tu achas que fazem parte da família dos paralelogramos losangos?
Patrícia: Então, deixa-me ver… *A*; *B*; *D*; *H*; *I* e *J*. Acho que todas têm dois pares de "linhas" paralelas e os lados todos iguais.

Patrícia consegue identificar todos os paralelogramos losangos utilizando uma combinação de ideias e linguagem formais e informais para identificar propriedades das figuras que pretende identificar, por não conseguir, com as ideias e linguagem formal de que dispõe, especificar com clareza as propriedades que pretendia clarificar.

Em seguida, pelo facto de se ter apercebido que não tinha concluído a discussão pretendida em torno da figura *K*, o paralelogramo obliquângulo, e de ainda existirem muitas dúvidas relativamente à inclusão dos quadrados na subclasse dos retângulos, a professora decidiu discutir o trabalho de Carolina.

Carolina considera a propriedade ângulos de 90° para agrupar os "quadrados" *B*; *D*: *J*; *F*; *K* (Fig. 4) e deixa perceber que a amplitude de 90° resulta do encontro entre duas linhas perpendiculares, embora na representação utilize o símbolo de percentagem e não o de graus. Esta representação parece relacionar-se com conceitos conhecidos já utilizados mas que não indicam a representação formal do conceito pretendido. A resposta apresentada parece revelar que a aluna não foi capaz de se focar numa classificação de tipo descritivo ou analítico, para reconhecer a figura a partir da identificação das suas propriedades.

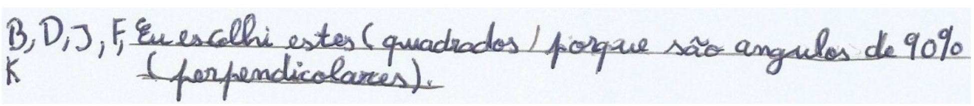

B, D, J, F, Eu escolhi estes (quadrados) porque são angulos de 90%
K (perpendicolares).

Figura 4. Grupo de figuras organizado por Carolina de acordo com as propriedades identificadas

Durante a apresentação do seu trabalho à turma, a professora sugere a Carolina (Fig. 5) que explique o motivo pelo qual escolheu as figuras *F* e *K* como "quadrados".

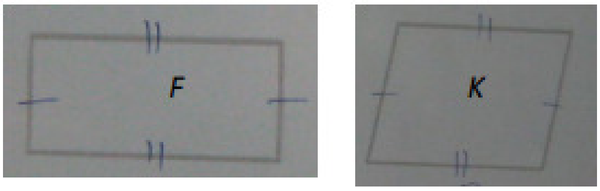


Figura 5. Figuras identificadas por Carolina como "quadrados"

> Professora: Por que escolheste as figuras *F* e *K* para o grupo dos quadrados?
> Carolina: Ai, enganei-me! O retângulo não é quadrado.
> Professora: O que queres dizer?
> Carolina: … este é o conjunto dos retângulos porque os quadrados é que são retângulos.
> Professora: Como assim?
> Carolina: Os quadrados têm 4 ângulos retos, como o retângulo, mas o retângulo não tem os 4 lados iguais.
> Professora: Então, a figura *K* pode ser um retângulo?
> Carolina: Pois… não tem os 4 ângulos retos, mas, então, não a conheço!

A questão inicial da professora e os esclarecimentos que foi pedindo, ao longo do diálogo com a aluna, foram ajudando a clarificar a ideia da subclasse dos retângulos como inclusiva dos quadrados. Todavia, quando Carolina refere que desconhece a figura *K*, depois de já ter acontecido a discussão em torno do trabalho de Catarina e de esta já a ter identificado como um paralelogramo, pelo facto de possuir dois pares de lados opostos paralelos, indicia que o processo de reconhecimento de uma figura através da identificação das suas propriedades, em detrimento da dimensão visual, é lento e bastante variável de aluno para aluno.

Após esta discussão, a professora pede a Roberto, projetando a Figura 2, que tente identificar todos os paralelogramos quadrados.

> Professora: Roberto, podes ajudar-nos a descobrir todos os paralelogramos quadrados que temos aqui?
> Roberto: Acho que sim. Então… são a *B*; *D* e *J*.

Roberto parece ter percebido que tanto a congruência dos lados como dos ângulos são atributo crítico do quadrado e não havendo mais nenhuma figura que reúna estas propriedades os paralelogramos quadrados só poderão ser estas três figuras.

Depois da resposta de Roberto, Patrícia intervém, dizendo:

> Patrícia: Ao grupo do Rodrigo, eu acrescentava a figura *F*.
> Álvaro: Eu não concordo com a Patrícia, porque a *F* tem os quatro ângulos retos mas não tem os lados todos iguais. A *F* é um retângulo mas não é um quadrado. O quadrado é que é um retângulo porque tem os quatro ângulos retos.

Álvaro parece já ter interiorizado as propriedades essenciais do quadrado e reconhecido as propriedades do retângulo que não lhe permitem a inclusão na classe dos quadrados.

Conclusões

Colocar os alunos perante uma tarefa cujo objetivo era fazer uma classificação de tipo descritivo ou analítico, onde os mesmos reconhecessem uma figura ou conjunto de figuras a partir da identificação do conjunto das suas propriedades (Clements & Sarama, 2007), permitiu gerar uma discussão coletiva que, progressivamente, poderá levar ao reconhecimento de classes e subclasses de figuras.

Os alunos enquanto observaram e dialogaram sobre os quadriláteros analisados, construíram agrupamentos de figuras com dois lados opostos paralelos, os paralelogramos; figuras com ângulos e lados congruentes, os quadrados; figuras com lados congruentes e ângulos opostos iguais, os losangos, entre outros. Desenvolveram diferentes perspetivas sobre processos de inclusão de figuras e utilizaram referências externas que poderão ter conduzido à assimilação de diferentes representações (Clements & Sarama, 2014).

Durante a discussão em grande grupo, as descrições foram incentivadas e melhoradas na tentativa de conduzir a uma melhoria da linguagem utilizada e da estruturação espacial (Clements & Sarama (2007).

Os alunos utilizaram descrições formais e informais para descrever as formas sobre as quais se debruçaram, pois, embora, já tenham abstraído algumas propriedades, o seu raciocínio continua a ter subjacente uma componente visual que faz ocorrer um grande número de conceptualizações e descrições durante a observação das figuras (Battista, 2007).

A tarefa proposta levou a que um grupo de alunos baseasse o seu raciocínio na identificação e relação de propriedades das formas e gerasse interação entre conceito e imagem, a caminho da construção de definições (Mariotti & Fischbein, 1997).

Alguns alunos conseguiram utilizar os conceitos de *lado*; *comprimento*; *ângulo* reto, agudo e obtuso (Battista, 2007) e identificar propriedades invariáveis em diferentes quadriláteros. No entanto, há alunos que ainda tentam incluir os paralelogramos retângulo e obliquângulo na subclasse dos losangos, ou os retângulos na classe dos quadrados. Este facto pode estar relacionado com a interação entre as dimensões conceptuais e visuais (Goldenberg et al., 1998).

Os dados analisados estão de acordo com Battista (2008) quando afirma que o processo de reconhecimento de uma figura através da identificação das suas propriedades parece ser lento e distinto.

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (1999). Investigações em geometria na sala de aula. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 153-167). Lisboa: Projeto Matemática para Todos e Associação de Professores de Matemática.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Greenwich, CN: Information Age.

Battista, M. T. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In G. W. Blume, M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives* (vol. 2, pp. 341-362). Charlotte: Information Age Publishing.

Clements, K. (1981). Visual imagery and school mathematics. In *Proceedings of 5th Annual Conference of MERGA* (pp. 21-24). Adelaide, Austrália.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York, NY: National Council of Teachers of Mathematics/Macmillan.

Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 151-178). Reston, VA: NCTM.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking, Students and Learning. In F.K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching Learning* (pp. 489 -517). Reston, VA: NCTM.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2014). *Learning and Teaching Early Math*. NY: Routledge.

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 11-18.

De Villiers, M., Govender, R. & Patterson, N. (2009). Defining in geometry. In T. V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 189-203). Reston: NCTM.

Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (1989). *Handbook of qualitative research* (pp. 105 – 117). Thousand Oaks, CA: Sage.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.) *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Dordrecht/Boston: Kluwer.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, *24(*2), 139-162.

Goldenberg, E. P., Cuoco, A. & Mark, J. (1998). A Role for Geometry in General Education. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 3-44). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspetive. In J. Van Den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research*, (pp. 17-51). New York and London: Routledge.

Mariotti, M. A. (1992). Geometrical reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspects. *Structural Topology*, *18*, 9-18.

Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 219-248.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa*, *7*(2), 355-377.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*,*14(*3), 293-305.

Contextos não formais de aprendizagem

Conceções (etno)matemáticas de alunos do 2.º ciclo do ensino básico da cidade de Olhão

Sofia Graça[1], *António Guerreiro*[2]
[1]ESEC, Universidade do Algarve, *soffiagraca@hotmail.com*
[2]ESEC, Universidade do Algarve e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, *aguerrei@ualg.pt*

Resumo: *Esta comunicação é o resultado de um estudo realizado com alunos do 6.º ano da cidade de Olhão acerca das suas conceções relativamente à integração da matemática em atividades sociais e profissionais. Tem por base os referenciais teóricos da educação etnomatemática, como uma intervenção pedagógica alternativa para o ensino da matemática, tendo especial enfoque nas aprendizagens realizadas pelos alunos fora do ambiente escolar. Optou-se por uma metodologia interpretativa com recurso à análise de dados quantitativos e qualitativos. A análise dos dados evidencia a existência de uma forte relação entre as conceções dos alunos construídas socialmente e a aprendizagem da matemática. O estudo aponta para a necessidade do professor conhecer as conceções prévias dos alunos e planificar tarefas matemáticas culturalmente adequadas, em que os alunos reconheçam a valorização dos seus conhecimentos sociais, gerando ambientes de aprendizagem estimulantes e integradores de todos os alunos.*

Palavras-chave: *etnomatemática; contexto sociocultural; aprendizagem da matemática; conceções.*

Abstract: *This paper is the result of a study conducted with sixth graders at the town of Olhão about their beliefs on the integration of mathematics in social and professional activities. Its theoretical framework is based on ethnomathematics education as an alternative pedagogical intervention to mathematics teaching, with a special focus on learning outside the school environment. We opted for an interpretative methodology (both quantitative and qualitative) for data analysis. The data analysis shows that there is a strong relationship between the students' socially constructed beliefs and the learning of mathematics. The study highlights the need for the teacher to know the learners' previous beliefs and to develop culturally appropriate mathematical tasks, in which the students recognize that their social skills are being valued, thus creating learning environments that are both stimulating and inclusive of all students.*

Keywords: *ethnomathematics; sociocultural context; learning of mathematics; beliefs.*

O presente estudo integra o relatório de prática de ensino supervisionada, da autora desta comunicação, orientado pelo autor, do mestrado em Ensino do 1.º e 2.º ciclos do

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 195–208

ensino básico, Universidade do Algarve, com trabalho de campo numa turma de matemática do 6.º ano de escolaridade de um agrupamento de escolas situado em Olhão (Graça, 2015). Os alunos desta turma apresentam pouca motivação e significativas dificuldades na aprendizagem da matemática, encarando as aulas como a realização de exercícios repetitivos, sem perspetivas de aplicação nas suas vidas diárias. O tema deste estudo consubstanciou-se no conhecimento de conceções dos alunos relativamente à matemática, numa dissociação entre as atividades escolares e as sociais e profissionais, como forma de questionar o ensino e equacionar a aprendizagem em contextos etnomatemáticos.

Etnomatemática

Os alunos transportam para o espaço escolar um conjunto de saberes e de experiências de diversas áreas de conhecimento adquiridos culturalmente no seu meio social. Estes conhecimentos e conceções prévias (por vezes incompletos ou errados) devem ser reconhecidos e valorizados (ou questionados) pelo professor, no sentido de motivar e despertar o interesse dos seus alunos pelos estudos, objetivando uma resposta mais eficaz aos processos de ensino e de aprendizagem (Castro & Fonseca, 2015). Relativamente à disciplina de matemática, os resultados escolares são tendencionalmente baixos, tendo sido criado um estigma à volta desta área de conhecimento, o que não ajuda a colmatar as conceções prévias dos alunos, levando diversos investigadores a tentar perceber que aspetos podem estar por detrás de tal situação de manifesta relevância social.

Ubiratan D'Ambrósio, educador matemático brasileiro, foi um desses investigadores que equacionou a influência do contexto sociocultural e político nas aprendizagens matemáticas realizadas pelos alunos, denominando esta perspetiva de investigação de etnomatemática. Para D' Ambrósio (2008), devemos reconhecer a multiplicidade de condições em que decorrem o ensino e a aprendizagem, em espaço escolar ou fora deste, e elaborar um currículo que responda às necessidades de cada povo.

Deste modo, Ubiratan D'Ambrósio fez surgir o Programa Etnomatemática, enquadrado numa conceção holística e multicultural de educação, reconhecendo outras formas de pensar e produzir conhecimento. Para o autor, a forma como a matemática é trabalhada nos estabelecimentos de ensino, através de regras e de algoritmos impostos aos alunos como únicos e verdadeiros, torna-a um instrumento político e elitista, uma vez que dessa forma a escola está a selecionar quem tem condições para atingir determinada posição, relegando para segundo plano o ambiente cultural de onde o aluno provem e a influência que sobre ele exerce. Deste modo, perante "a necessidade de um ensino que contemple com maior abrangência o cenário cultural do discente" (Fonseca, 2015, p. 151), cabe ao professor mostrar que a matemática pode não ser assim tão elitista, aproximando a disciplina àquilo que é espontâneo, em vez de valorizar tanto o pensamento formal, dado que "todos os povos do mundo se dedicaram a matematizar os seus problemas, mas no sentido de os resolver, e não por uma mera prática científica ou de habilidade instrutiva" (Costa, 2014, p. 188).

Para Ubiratan D'Ambrósio, no quadro atual em que decorrem o ensino e a aprendizagem, continuam a existir duas classes: as dominantes e as dominadas. A matemática difundida nos estabelecimentos de ensino é uma *matemática dominante*, ou seja, "essa matemática e os que a dominam se apresentam com postura de superioridade, com o poder de deslocar e mesmo eliminar a «matemática do dia-a-dia»" (D'Ambrósio, 2008, p. 43). A etnomatemática, ao considerar as diferentes formas de conhecimento reveladas pelas diferentes culturas, "considera o conhecimento matemático científico como uma manifestação cultural e não como verdade universal, válida em todos os lugares" (Júnior, 2014, p. 1169).

Etnomatemática em sala de aula

Há duas questões centrais que estão na base das investigações em etnomatemática: *Como é que as crianças aprendem matemática?* e *Como ensinar matemática?* A formalização da matemática moderna minimizou a valorização do conhecimento que o aluno trazia para a escola, por esta razão, a etnomatemática surgiu, não como uma rejeição à matemática dita *académica*, mas como uma reação contra a existência de um currículo comum e de uma maneira imposta e unidirecional de apresentar a matemática, como um conhecimento universal e caraterizado por divulgar verdades absolutas. Devemos pensar no currículo como um local de diálogo, que considere as vivências do aluno, para não corrermos o risco de perder grandes oportunidades relativamente às práticas em sala de aula (Monteiro & Mendes, 2014). Segundo Moreira (2009):

> É no campo educativo que se situa um dos maiores contributos da aplicação da etnomatemática, na medida em que esta tem mostrado claramente as disjunções existentes entre práticas matemáticas locais e escolares, bem como a complexidade da articulação entre o saber matemático cultural e o

> escolar contribuindo, assim, para problematizar a hegemonia do conhecimento académico matemático, e actuando como uma forte fonte de crítica à forma como este tem sido transposto para as instituições escolares (pp. 247/248).

Como defendem Latas e Moreira (2013), “o saber cultural dos alunos não é, regra geral, uma variável equacionada pelos professores de Matemática na definição de uma linha de actuação” (p. 39), pelo contrário, a estrutura do ensino tradicional da matemática baseia-se na transmissão de conhecimentos com recurso a um sem fim de teoremas, regras, que objetivam um resultado certo para determinada situação (por norma artificial e descontextualizada), o que nem sempre significa o desenvolvimento da capacidade de os solucionar por parte dos alunos. Por esta razão, as aulas de matemática são vistas como desmotivantes, a matéria é considerada difícil e o aluno não reconhece a importância da sua aplicação prática no dia-a-dia (Costa, 2014; Orey & Rosa, 2014). Para mudar estas conceções, que parecem tão enraizadas no aluno, o professor deve demonstrar essa importância através de uma abordagem a conteúdos do interesse dos alunos, valorizando a sua realidade e levando-os a estabelecer relações entre a matemática escolar e o conhecimento adquirido culturalmente para que percebam efetivamente a presença da matemática nas suas vidas (Cortes, Rosa & Orey, 2015; Latas & Moreira, 2013).

Deste modo, o aluno sente que a sua realidade é um importante contributo para a construção de saberes e aprende a valorizar a sua origem, ao mesmo tempo que desenvolve o respeito por origens diferentes da sua. Além disso, “um aluno seguro de seus saberes empíricos tem tendência a arriscar a participação perante a turma e, deste modo, desbloqueia o caminho para evoluir no domínio da comunicação matemática” (Latas & Moreira, 2013, p. 57). Esta alternativa de prática de ensino procura partir da realidade do aluno, compreendendo-a, para chegar à ação pedagógica de forma natural e coerente, em que é trabalhada a vertente cognitiva embora com forte índole cultural, demonstrando que *construir* o conhecimento é relativamente diferente de *transmitir* o conhecimento (Marques & Hartmann, 2014).

O professor, ao trabalhar na perspetiva da etnomatemática, insere-se no contexto dos alunos, adapta a sua prática pedagógica tornando-a mais investigativa, centrada na cultura do grupo e atribuindo igual valor ao conhecimento de diferentes povos. Só assim concede uma oportunidade aos saberes culturais, muitas vezes desprezados, de terem o seu lugar nas aprendizagens dos alunos, não menosprezando o saber institucional pois "a Etnomatemática tem como uma de suas preocupações desenvolver uma ação pedagógica que leve em consideração a realidade local e global dos indivíduos, e a promoção do diálogo e do respeito entre as distintas formas de conhecimento" (Martins & Gonçalves, 2015, p. 120).

O objetivo da etnomatemática é a não exclusão dos alunos de classes menos privilegiadas e a criação de oportunidades para que todos aprendam, respeitando os seus ritmos e as suas vivências. Na perspetiva de Costa (2014):

> Devemos assumir o compromisso de construir uma visão mais alargada sobre o mundo em que nos inserimos, permitindo que os alunos alonguem, igualmente, o seu espetro de saber, indo mais além da escola e do seu conhecimento transmitido por uma metodologia gasta e enganadora, muitas das vezes. A escola é apenas um dos lugares onde se pode aprender (p. 188).

Identificar a necessidade de uma educação etnomatemática é reconhecer a falta de uma educação com caraterísticas diferenciadas para cada grupo e, neste contexto, surge a ideia de *currículo etnomatemático*. Um dos grandes problemas com que nos deparamos é o facto de não existir nos currículos atuais espaço para uma abordagem nesta vertente e eles acabam por refletir, essencialmente, o que cada sociedade espera das diferentes áreas de conhecimento.

***Design* da investigação**

O presente estudo pretende explorar as conceções de alunos referentes à integração da matemática em atividades sociais e profissionais. Seguiu-se uma abordagem metodológica interpretativa, numa "orientação etnográfica com base no pressuposto que o raciocínio matemático precisa ser estudado no contexto das práticas culturais que lhe imprimem significado" (Abreu, 1995, p. 87). A recolha dos dados decorreu com 15 alunos (6 do sexo masculino e 9 do sexo feminino), com idades compreendidas entre os 11 e os 12 anos, de uma turma do 6.º ano de escolaridade da Escola Básica 2,3 Dr. Alberto Iria, em Olhão, provenientes de um meio socioeconómico desfavorecido, inseridos em zonas habitacionais marginalizadas. Os participantes neste estudo são alunos em que o desempenho a matemática é, no geral, muito fraco e por essa razão integram um projeto em que as aulas se baseiem em tarefas matemáticas eminentemente práticas. Os instrumentos de recolha de dados inspiraram-se em Abreu (1995), através da utilização de uma entrevista semiestruturada (em anexo), com registo áudio (um *table*t), apoiada por seis imagens com pessoas envolvidas em diferentes atividades sociais e profissionais (figura 1).

Imagem A - Compra/venda de peixe

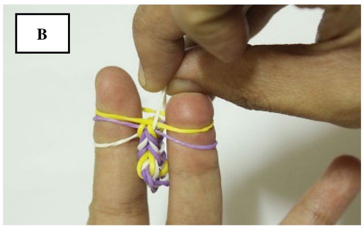


Imagem B - Pulseiras de elásticos

Imagem C - Laboratório

Imagem D - Agricultura

Imagem E – Jogar futebol

Imagem F - Construção civil

Figura 1. Imagens utilizadas nas entrevistas semiestruturadas.

As entrevistas foram realizadas individualmente (à exceção de um aluno), em diferentes dias e em diferentes locais e contaram com uma duração média de 10 minutos em cada sessão (Figura 2). As entrevistas foram transcritas e analisadas considerando a perspetiva interpretativa da abordagem metodológica.

Figura 2. Alunas sendo entrevistadas com a utilização das seis imagens.

Resultados dos alunos

Os dados analisados são relativos às conceções dos alunos sobre a importância da matemática em atividades sociais e profissionais. Na resposta à primeira questão da entrevista, não houve, de um modo geral, dificuldade em identificar as diferentes atividades sociais e profissionais representadas nas imagens.

Relativamente à divisão das imagens em dois grupos, de acordo com o uso da matemática, verifica-se que a maior parte dos alunos acredita ser necessário utilizar esta área de conhecimento para a compra/venda de peixe (93%), para o trabalho em laboratório (80%), e para o trabalho na construção civil (67%). Por outro lado, os mesmos alunos acreditam que as atividades onde não é necessário utilizar matemática são o futebol (73%), as pulseiras de elásticos (67%) e a agricultura (60%), demonstrando não reconhecer que “todos os grupos sociais integram no seu quotidiano algum tipo de conhecimentos e de atividades de cariz matemático” (Moreira, 2009, p. 247).

Natureza e conteúdos de matemática

Quanto à natureza da matemática, verificamos que as atividades consideradas fáceis pelos alunos não envolvem esta área do conhecimento, logo, a matemática está associada a atividades consideradas mais difíceis:

> Investigadora (autora do artigo): Porque é que a pessoa não precisa usar matemática nesta situação (B – Pulseiras de elásticos)?
> Alexandra: Porque aprende-se facilmente!
> Investigadora: Então e nesta (E – Jogar futebol)?
> Alexandra: Porque é uma tática que se aprende facilmente sem usar matemática!

Relativamente aos conteúdos de matemática, os mais referidos pelos alunos são as operações numéricas mencionadas como «contas», predominantes nas atividades em que «é preciso contar!»:

> Investigadora: Disseste que na atividade A (Compra/venda de peixe) estava envolvida a matemática…
> Hélio: Tem a ver com o dinheiro. Eles fazem contas!
> Investigadora: Onde é que achas que essa pessoa aprendeu a matemática?
> Hélio: Na escola!
> Investigadora: E que tipo de matemática ela usa?
> Hélio: Contas!

De acordo com o diálogo apresentado, verificamos que os conteúdos matemáticos parecem surgir apenas em situações relacionadas com a contagem e o cálculo, no entanto, existem alunos que acabam por abordar a resolução de problemas. Desta forma, eles demonstram que, nas suas perspetivas, algumas das situações apresentadas nas imagens requerem uma previsão de quantidades a utilizar, tentando resolver um problema decorrente do contexto social e profissional. O João exemplifica de que forma as situações de compra/venda de peixe e de agricultura são encaradas como problemas matemáticos que requerem uma análise estatística e apresenta o seu raciocínio no sentido de encontrar a solução:

> Investigadora: Porque é que na imagem A (Compra/venda de peixe) utilizam matemática?

João: Para ver qual é o produto que vende mais para ir buscar mais!
Investigadora: Então e na imagem D (Agricultura)?
João: Para poder semear mais. Ver os sítios onde pode por mais agricultura!
Investigadora: E onde é que essa pessoa aprendeu a matemática?
João: No campo! É para ver os produtos que vendem mais!

Escola e profissões

Nas atividades que envolvem matemática, a maior parte dos alunos (87%) referiu que esta foi aprendida na escola, no entanto, perante aquelas em que não se utiliza matemática, as pessoas que praticam essas atividades também frequentaram o ensino, mesmo que elementar, assumindo a universalidade do ensino básico. No entanto, as pessoas que desempenham as atividades das imagens D (Agricultura) e F (Construção civil) ainda são mencionadas como aquelas que poderão nunca ter frequentado a escola: «Acho que todos foram, o agricultor é que eu não sei!»; «Talvez este (F – Construção civil) porque está nas obras». Apenas dois dos alunos entrevistados referem que os conteúdos matemáticos foram aprendidos com a própria realização das atividades, ou seja, é na prática que reside o conhecimento, como tal, aceder a esse conhecimento passa pela participação efetiva na atividade.

A atividade representada pela imagem C (Laboratório) foi considerada conhecimento universitário, que envolve os melhores resultados escolares, deixando transparecer uma certa valorização social desta atividade. No entanto, é considerada diferente do conhecimento matemático, o que demonstra que, para estes alunos, as áreas de conhecimento aprendidas na escola não estão inter-relacionadas, mas sim fragmentadas.

Contrastando com esta situação, os alunos tendem a desvalorizar atividades como a agricultura uma vez que «É só um agricultor, professora!» que utiliza «contas primárias», associadas à matemática mais elementar. Deste modo, verifica-se a hierarquia social de certas atividades, que pode estar relacionada às conceções dos alunos que, segundo Fantinato (2004), têm origem em fatores sociais e históricos que associaram, de certa forma, as atividades à hierarquia social, definindo a matemática como algo difícil e de maior prestígio. Nesta perspetiva, a opinião relativamente à imagem F (Construção civil) é semelhante à anteriormente descrita relativamente à atividade agrícola, nomeadamente na sua desvalorização por influência do contexto sociocultural em que está inserido:

Investigadora: Então, e quem achas que terá sido o pior aluno na escola?
Hélio: Esta (imagem B – Pulseiras de elásticos), lá por estar a fazer

elásticos, não sei se foi a pior ou a melhor!
Investigadora: Então e sem ser o B (Pulseiras de elásticos)?
Hélio: O F (Construção civil) porque … eu vou dizer o que o meu pai me diz sempre… O meu pai diz que quem trabalha na pedreira é quem nunca foi aplicado na escola!

O quadro 1 mostra a distribuição das diferentes atividades de acordo com o que foi considerado, pelos alunos, o melhor aluno a matemática na escola, para o pior, através de diferentes níveis (6, melhor; 1, pior).

Quadro 1

Distribuição das atividades de acordo com o melhor/pior aluno a matemática na escola

Imagem	Níveis															Média
A – Compra/venda de peixe	6	1	3	5	3	5	2	4	4	6	3	5	5	3	5	4
B – Pulseiras de elásticos	1	3	2	1	1	6	1	1	3	1	1	1	3	2	1	1,87
C – Laboratório	5	6	6	6	6	4	6	6	6	5	6	6	6	5	4	5,53
D – Agricultura	2	2	4	4	2	1	4	2	2	4	2	4	2	1	3	2,6
E – Jogar futebol	4	4	1	2	5	3	5	3	5	2	5	2	1	4	2	3,2
F – Construção civil	3	5	5	3	4	2	3	5	1	3	4	3	4	6	6	3,8

Evidenciando uma vez mais a conceção destes alunos, podemos verificar que as atividades relacionadas aos piores alunos na escola são a agricultura (imagem D) e as pulseiras de elásticos (imagem B). Por outro lado, aos melhores resultados escolares estão associadas as atividades C (Laboratório) e A (Compra/venda de peixe). Deste modo, hierarquizando as diferenças, os alunos parecem demonstrar saber que "aqueles que são bem-sucedidos na aprendizagem da matemática da escola têm acesso às profissões de *status* social superior, enquanto que os que fracassam permanecem nas atividades tradicionais, de *status* inferior" (Abreu, 1995, p. 86).

A atividade das pulseiras de elásticos (imagem B) é um caso particular das atividades mais desvalorizadas. Possivelmente por ser desenvolvida pela maior parte dos alunos do grupo, não é encarada como uma atividade profissional mas sim como uma *brincadeira* e, como tal, não a consideram difícil nem a valorizam e, consequentemente, não lhe reconhecem qualquer conteúdo de matemática como os padrões ou regularidades. Nesta ótica, Pires (2008) refere que "os alunos no âmbito de uma disciplina conseguem identificar determinado conteúdo mas, o mesmo conteúdo no âmbito de outra disciplina ou fora da escola é por vezes irreconhecível pelos alunos" (p. 128):

> Investigadora: Nesta situação (B – Pulseiras de elásticos) porque é que achas que não é preciso matemática?
> Miguel: Não é preciso saber matemática, é ter habilidade!
> Mãe do aluno: Ai é? Então não contas os elásticos?
> Miguel: Oh, isso não é matemática!

As atividades do futebol (imagem E) e das pulseiras de elásticos (imagem B) são encaradas, pelos alunos, unicamente como atividades físicas que não requerem esforço intelectual. Por esta razão, parecem estar dissociadas da escola e do conhecimento, sendo referidas, pela maioria dos alunos, como atividades em que não entram conhecimentos matemáticos. Nesta perspetiva é possível concluir que, para estes alunos, aqueles que têm uma atividade física, aparentemente, apresentam um fraco desempenho a nível cognitivo:

> Investigadora: Nas pulseiras de elásticos (imagem B) disseste que não era preciso matemática… Porquê?
> Ana S.: Porque não está a fazer contas mas está a utilizar os dedos!
> Investigadora: Então e aqui (E – Jogar futebol)?
> Ana S.: Porque estão a movimentar o corpo, não mexe com a cabeça!

Relativamente ao melhor/pior aluno a matemática entre as pessoas que conhecem, os professores são apontados como os melhores e os avós como os piores. A referência aos avós poderá ter como base uma relação estabelecida entre as pessoas mais velhas e a instrução mais elementar. No entanto, uma aluna referiu ser ela mesma a pior pessoa a matemática que conhece, o que revela uma autoestima demasiado baixa, que se intensifica na atitude conformada com que responde à questão relativa à profissão que gostaria de ter no futuro:

> Investigadora: Qual é a profissão que gostarias de ter?
> Ana J.: Ser cabeleireira como a minha tia!
> Investigadora: Há tantas outras profissões… diz-me outra que gostasses de ter!
> Ana J.: Ah, mas as outras é muito difícil, professora! Eu não consigo!

Podemos realçar que o meio sociocultural de onde provêm estes alunos transporta consigo estigmas que podem dificultar por si a ascensão socioeconómica dos seus constituintes e que a desestruturação dos agregados familiares, do ponto de vista económico e social, pode complexificar o fomento de um autoconceito positivo nos educandos, originando entraves às decisões e ambições acerca dos seus futuros económicos, culturais e sociais. A existência de um currículo etnomatemático pode valorizar o reconhecimento de diversos contextos culturais e sociais e apreender a construção do conhecimento matemático em resultado da valorização de práticas sociais e profissionais.

Os alunos foram unânimes em referir que irão necessitar de matemática nas suas futuras profissões, demonstrando reconhecer o valor da escola. Nesta perspetiva, D'Ambrósio (2008) afirma que "ninguém nega que a educação matemática tem tudo a ver com empregabilidade. A boa formação em matemática é, muitas vezes, apontada como a chave para se obter um bom emprego" (p. 26).

Considerações finais

Os discursos produzidos pelos alunos espelham as suas conceções construídas socialmente, contribuindo para práticas de exclusão social e profissional, nomeadamente ao reduzirem o conhecimento matemático às operações numéricas, com um forte pendor estritamente académico. Por esta razão, torna-se importante tentar perceber se a escola, onde também decorrem tais discursos, contribui para alterar estas conceções, por vezes tão erradas, e cuida da formação de identidades dos seus alunos. Os aspetos socio-afetivos na aprendizagem da matemática mantêm uma estreita relação com o sucesso escolar, pois um fraco desempenho a matemática leva-nos a uma atitude negativa para com a disciplina do mesmo modo que, quando somos bem-sucedidos, acompanham-nos sentimentos positivos (Abreu, 1996).

A Etnomatemática pode ser um importante contributo para um envolvimento positivo do aluno com a matemática, pois ela "mostra que todas as crianças têm potencial para aprender matemática" (Gerdes, 2007, p. 157). Uma vez que, no ambiente familiar, o professor pouco, ou mesmo nada, pode intervir, no espaço escolar, nomeadamente nas suas aulas de matemática, ele deverá proporcionar aos seus alunos experiências matemáticas positivas e tentar combater o conceito auto-depreciativo que os alunos construíram. Contudo, para haver motivação para a aprendizagem, esta deverá ser ativa e integrar aquilo que é intrínseco aos seus alunos, isto é, as suas culturas e as vivências.

Neste sentido, torna-se imprescindível "que se busquem espaços nos currículos para que se valorizem as diferenças culturais e os saberes matemáticos trazidos pelos educandos em sala de aula" (Campos, 2012, p. 15). As conceções reveladas pelos alunos a propósito da importância da matemática em atividades sociais e profissionais revelam uma hierarquização social e profissional que apontam para a supremacia dos conhecimentos académicos no ensino que contribuem “para reforçar as desigualdades sociais” (Leites, 2005, p. 18) e rotular os alunos de fracassados ou desinteressados pelas aulas de matemática.

O estudo mostra que o professor deve conhecer as conceções matemáticas dos alunos e planificar tarefas matemáticas culturalmente inseridas no contexto social e cultural destes, originando ambientes de aprendizagem integradores de todos os alunos. Nesta ótica, a introdução da etnomatemática em sala de aula requer do professor a compreensão da realidade social e cultural dos seus alunos no sentido de melhor preparar a sua prática profissional para que o ensino e a aprendizagem possam beneficiar todos os alunos, tendo especial atenção para não “favorecer um dos grupos em detrimento do outro” (Bandeira & Morey, 2010, p. 1079), valorizando a construção de saberes com diferentes origens culturais e sociais.

Bibliografia

Abreu, G. (1995). A Matemática na Vida Versus na Escola: Uma Questão de Cognição Situada ou de Identidades Sociais? *Psicologia: Teoria e Pesquisa, 11*, 2, 85-93.

Abreu, G. (1996). Contextos Socio-culturais e Aprendizagem Matemática pelas Crianças. *Revista Quadrante, 5(*2), 7-21.

Bandeira, F., & Morey, B. (2010). Pedagogia Etnomatemática: Do “par de cinco” às Concepções do Sistema de Numeração Decimal. *Boletim de Educação Matemática*, *23*(37), 1063-1080.

Campos, P. (2012). Saberes Matemáticos Produzidos Pelos Produtores Rurais da Comunidade Camponesa em Suas Práticas Cotidianas. *Revista Eletrónica de Educação Matemática*, *7*(1) ,1-17.

Castro, A., & Fonseca, J. (2015). Explorando a matemática na construção de casas de alvenarias. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *8*(1), 29-49.

Cortes, D., Rosa, M., & Orey, D. (2015). Rumo à ação pedagógica: um panorama da produção de pesquisas em etnomatemática. *VII Encontro Mineiro de Educação Matemática – Práticas educativas e de pesquisa em educação matemática*. Universidade Federal de São João del-Rei I (Brasil).

Costa, F. (2014). Etnomatemática: metodologia, ferramenta ou, simplesmente, etnorrevolução? *Zetetiké – Revista de educação matemática*, *22(*42), 181-196.

D’Ambrosio, U. (2008). Globalização, Educação Multicultural e o Programa Etnomatemática. In Palhares, P. (coord.). *Etnomatemática – Um Olhar Sobre a Diversidade Cultural e a Aprendizagem Matemática* (pp. 23-46). Braga: Edições Húmus, Lda.

Fantinato, M. (2004). A Construção de Saberes Matemáticos Entre Jovens e Adultos do Morro de São Carlos. *Revista Brasileira de Educação*, *27,* 109-124.

Fonseca, M. (2015). A matemática inserida naturalmente no contexto sócio-laboral: um caso de Etnomatemática. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *10*(1), 150-161.

Gerdes, P. (2007). *Etnomatemática – Reflexões sobre a Matemática e a Diversidade Cultural*. Braga: Edições Húmus, Lda.

Graça, S. (2015*). Etnomatemática como prática de ensino: perspetivas de alunos do 2.º ciclo do Ensino Básico da cidade de Olhão* (Relatório de Mestrado, Universidade do Algarve).

Júnior, V. (2014). Genealogia e Etnomatemática: uma aproximação em prol da insurreição dos saberes sujeitados. *Boletim de Educação Matemática*, 8(50), 1155-1171.

Latas, J., & Moreira, D. (2013). Explorar conexões entre matemática local e matemática global. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 6*(3), 36-66.

Leites, C. (2005). *Etnomatemática e Currículo Escolar: Problematizando Uma Experiência Pedagógica Com Alunos de 5.ª Série*. Dissertação de mestrado. Universidade do Vale do Rio dos Sinos – Unisinos.

Marques, D., & Hartmann, Â. (2014). *Etnomatemática: Estudo de conhecimento de suas dimensões no contexto pedagógico*. Brasil: Universidade Federal do Pampa.

Martins, F., & Gonçalves, P. (2015). Pesquisas em Etnomatemática e suas contribuições para o contexto escolar: Um olhar para os anais do CBEM. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*. *8*(1), 108-123.

Monteiro, A., & Mendes, J. (2014). A Etnomatemática no encontro entre práticas e saberes: Convergências, tensões e negociação de sentidos. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*. *7*(3), 55-70.

Moreira, D. (2009). Técnicas Populares e sua Aprendizagem: o caso da Etnomatemática. In P. D. Costa (Org.), *Museus e Património Imaterial. Agentes, Fronteiras e Identidades* (pp. 247-254). Lisboa: Instituto dos Museus e da Conservação.

Orey, D., & Rosa, M. (2014). Goiabada com queijo: reflexões sobre a relação existente entre a etnomatemática e a modelagem. *Encontro de Etnomatemática do Rio de Janeiro.*

Pires, E. (2008). *Um Estudo de Etnomatemática: A Matemática Praticada Pelos Pedreiros*. Lisboa: Universidade Aberta.

Anexo 1 - Guião de entrevista semiestruturada

1. Podes descrever o que está a acontecer em cada uma das imagens?
2. Podes separar as imagens em dois grupos: as que usam matemática e as que não usam matemática?

   Para cada imagem:
   Se usam:
   - Porque é que as pessoas usam matemática nestas situações?
   - Onde é que a pessoa aprendeu essa matemática?
   - Que tipo de matemática as pessoas estão a usar?

   Se não usam:
   - Porque é que não precisam usar matemática nestas situações?
3. Nas imagens, quem achas que foi o melhor aluno a matemática na escola? Porquê?
4. E o pior? Porquê?
5. Podes colocar por ordem do melhor aluno a matemática para o pior?
6. Pode haver alguém que nunca foi à escola? Porquê?
7. Das pessoas que conheces, quem é o melhor a matemática?
8. E o pior?
9. Qual a profissão que gostarias de ter no futuro?
10. Achas que vais precisar de matemática?

"Espelhos, Matemática e Ciências" - Conceção e exploração de uma Oficina de Matemática e Ciências no 1º Ciclo do Ensino Básico

Fátima Paixão[1], *Fátima Regina Jorge*[2], *Ana Patrícia Raposo*[3]
[1]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Castelo Branco & Centro de Investigação Didática e Tecnologia Educativa na Formação de Formadores -CIDTFF, Universidade de Aveiro, *mfpaixão@ipcb.pt*
[2]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Castelo Branco & Centro de Investigação Didática e Tecnologia Educativa na Formação de Formadores - CIDTFF, Universidade de Aveiro, *frjorge@ipcb.pt*
[3]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Castelo Branco, *anageraldesraposo@gmail.com*

Resumo. *Apresenta-se o resultado de um estudo desenvolvido na Prática Supervisionada no Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico (1.º CEB) que surgiu da vontade de proporcionar às crianças aprendizagens que as envolvessem de forma ativa em sala de aula, integrando as áreas da Matemática e de Ciências. Este projeto foi concretizado numa turma de 3.º ano de escolaridade, constituída por 23 alunos. A problemática centrou-se no pressuposto do valor criado pela integração entre as duas áreas, num contexto de oficina de trabalho dentro da sala de aula, proporcionando um ambiente motivador para a aprendizagem. Desta emergiu a seguinte questão de investigação: Em que medida a realização de atividades com cariz exploratório e/ou experimental em contexto de oficina favorece as aprendizagens curriculares dos alunos no 1.º CEB e a integração das áreas de Matemática e de Ciências? Tendo em consideração a problemática e a questão norteadora do estudo optámos por uma metodologia qualitativa, sustentada num desenho de investigação-ação. Como instrumentos de recolha de dados recorremos a observação participante, notas de campo, registo fotográfico e recolha de documentos produzidos pelos alunos, bem como a entrevista semiestruturada à professora cooperante. Recorremos à análise de conteúdo para analisar os documentos obtidos, com base na definição de categorias e subcategorias de análise prévias. Os resultados obtidos permitem inferir que a realização de atividades num contexto de Oficina estimulou aprendizagens das áreas de Matemática e de Ciências, proporcionando também a integração destas áreas curriculares. Em particular, destacam-se aprendizagens cognitivas relacionadas com a reflexão em diferentes tipos de espelhos e com o conceito de simetria.*

Palavras-chave: *ensino básico; educação em ciências; educação matemática; oficina didática; integração curricular.*

Abstract. *We present the results of a study conducted in the Supervised Practice in Teaching of the 1st Cycle of Basic Education (1st CEB) that arose from the desire to provide children with learning that actively involve them in the classroom, integrating the areas of mathematics and science. This project was implemented in a 3rd grade class (8 years old) consisting* *of 23 pupils. The research problematic was centered on the assumption of the more value created by the integration of the two areas, in a workshop context within the classroom, providing a motivating atmosphere for learning. From this problematic emerged the following research question: In which extent the performance of activities with exploratory and / or experimental nature in a workshop context favors pupils' curricular learning in the 1st CEB and the integration of the areas of mathematics and science? Taking into consideration the problematic and the guiding question of the study we opted for a qualitative methodology, supported by an action-research design. As data collection instruments and techniques we used participant observation, field notes, photographic records and documents produced by the pupils, as well as a semi-structured interview with cooperating teacher. We used the content analysis on the obtained documents, based on the definition of prior categories and sub-categories of analysis. The results allow to infer that carry out activities in a workshop context stimulated learning in the areas of mathematics and science, also providing integration of these curricular areas. In particular, we highlight cognitive learning related with the reflection in different types of mirrors and with the concept of symmetry.*

Keywords: *basic education; science education; mathematics education; workshop; curricular integration.*

Introdução

Ao longo do percurso de formação dos futuros professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) surge com frequência a necessidade de criar estratégias a usar em sala de aula, com sucesso nas aprendizagens dos alunos. Não se crê, porém, que tal seja possível sem que aquelas sejam motivadoras e adequadas ao grupo de crianças. Deste modo, um dos propósitos do estudo prendeu-se com a conceção de um espaço físico, próximo da ideia inerente a0os tradicionais "Cantinhos" da Educação Pré-Escolar, onde as crianças têm de desenvolver aprendizagens em que a ação, a cooperação e a interação com materiais diversos e atrativos estejam presentes. Pela existência de materiais manipuláveis à disposição dos alunos e pela implicação ativa destes no trabalho desenvolvido num espaço definido, identificámo-lo, inicialmente, com "Oficina" salientando o caráter relacional e prático das tarefas a propor aos alunos.

No que concerne ao estudo desenvolvido, relaciona-se a aprendizagem curricular integrada no 1.º CEB, nomeadamente das áreas de Matemática e de Ciências, e a forma como essa integração pode acontecer no contexto da Oficina. Trata-se de áreas com fortes ligações e sobreposições pouco exploradas na escola mas fortemente presentes no dia-a-dia e com as quais os alunos têm contacto frequente, direta ou indiretamente.

Importa referir que o próprio documento Organização Curricular e Programas do 1.º CEB (Ministério da Educação, 2004) recomenda a articulação e contextualização das várias áreas do currículo. Esse nível de integração remete para uma abordagem em que são esbatidas as fronteiras das disciplinas, identificados temas comuns a diferentes áreas curriculares e enfatizado o desenvolvimento de conceitos e competências transversais (Raposo, 2015).

Pretendíamos, assim, com o estudo evidenciar as potencialidades que o trabalho em contexto de oficina na sala de aula poderia ter e como é que essa metodologia poderia ser facilitadora das aprendizagens dos alunos.

Problemática, questão e objetivos

Partindo do nosso interesse pela temática, propusemo-nos responder à seguinte questão: Em que medida a realização de atividades com cariz exploratório e/ou experimental favorece as aprendizagens curriculares dos alunos no 1.º CEB e a integração das áreas de Matemática e de Ciências?

A questão foi o elemento orientador de toda a investigação, tendo a partir desta, emergido os seguintes objetivos:

- Conceber e organizar uma oficina de Matemática e Ciências no 1.º CEB adequada ao desenvolvimento de experiências de aprendizagem significativa, com caráter predominantemente prático e colaborativo.
- Construir e validar recursos didáticos associados à Oficina que promovam a integração das áreas de Matemática e Ciências com base em tarefas de natureza exploratória e/ou experimental, ajustadas ao currículo do 1.º CEB e às orientações atuais da didática para o ensino destas áreas.
- Evidenciar o valor das atividades realizadas na Oficina para a aprendizagem de Matemática e de Ciências no 1.º CEB.

Fundamentação Teórica

Ao longo dos tempos, a Matemática tem desempenhado um importante papel na compreensão e representação do mundo. Por esse motivo, tem merecido uma intensa investigação didática propiciadora de um melhor conhecimento dos processos de ensino e aprendizagem e ocupa um lugar de destaque na estrutura curricular do 1.º CEB, como é bem visível na sua carga horária semanal relativa.

De acordo com vários autores da educação matemática, o processo de aprendizagem está relacionado com a atividade que os alunos desenvolvem e esta, por sua vez, depende muito da natureza das tarefas propostas pelo professor (Ponte, 2005). A mesma opinião é partilhada por Godino (2004, p. 68) ao afirmar que "Os estudantes aprendem matemática por meio das experiências que os professores lhes proporcionam". Canavarro e Santos (2012, p. 100) também destacam a grande importância da "tarefa como base das experiências matemáticas a proporcionar aos alunos, a vantagem da diversificação de tarefas que possibilitem uma diversidade de experiências matemáticas aos alunos, e a necessidade da sua adequação aos propósitos de ensino definidos pelo professor".

Ao longo da investigação que nos propusemos desenvolver, e ao nível da área curricular de Matemática, centrámo-nos, em primeiro lugar, nas tarefas de cariz exploratório. Na classificação das tarefas em termos do seu grau de desafio e de estrutura, Ponte (2005) apelida de exploratórias aquelas que possuem um certo grau de indeterminação no que é dado e no que é pedido, mas em que o aluno pode começar de imediato a trabalhar, sem muito planeamento. Clarifica o autor que as tarefas exploratórias têm subjacente a intenção de orientar o aluno para a exploração de ideias matemáticas a fim de descobrir, por exemplo, uma fórmula, um procedimento ou algum facto matemático. Paralelamente, por terem um caráter aberto podem promover a intuição, o desenvolvimento de um sentido exploratório e o questionamento (Ponte, 2005). Este tipo de tarefas, sendo acessíveis a todos os alunos e apresentando um certo grau de abertura nos seus objetivos e métodos de resolução, são suscetíveis de motivar os diversos interesses dos alunos (NCTM, 2007). A propósito das tarefas de natureza aberta, Ponte (2010, p. 22-23) escreve:

> Tarefas exploratórias e investigativas adequadas criam oportunidades para o envolvimento dos alunos na Matemática. No entanto, a sua aprendizagem depende muito também de outros elementos da prática do professor, que se relacionam estreitamente com os papéis assumidos na sala de aula por todos os actores e a comunicação que se desenvolve.

O autor citado refere ainda que "as tarefas são importantes, mas ainda mais importante é a maneira como elas são abordadas" (Ponte, 2010, p. 23), isto é, a forma como o professor apresenta as tarefas, as sequencia e conduz a sua execução, em sala de aula ou noutros espaços, determina a atividade que o aluno vai realizar a partir delas e, portanto, influencia as oportunidades de aprendizagem proporcionadas.

Outro aspeto importante das tarefas tem a ver com o contexto das mesmas, podendo este ser puramente matemático; semirreal, isto é, remeter para situações construídas e próximas da vida real; ou real, isto é, relativo a situações do quotidiano, de outras ciências ou da própria experiência do aluno (Ponte, 2005; Yeo, 2007).

Para além da cuidadosa seleção das tarefas, a planificação de uma unidade didática pressupõe que o professor defina (implícita ou explicitamente) uma estratégia de ensino que inclui, para além de outros elementos, a explicitação do que o professor vai fazer e do que este espera que o aluno faça (Ponte, 2005). Este educador matemático valoriza a adoção de estratégias de ensino de cunho exploratório em que o professor proporciona ao aluno uma componente importante do trabalho de construção do conhecimento. Assim, "a ênfase desloca-se da atividade «ensino» para a atividade mais complexa «ensino-aprendizagem»" (Ponte, 2005, p. 13), o aluno aprende através do seu envolvimento regular na realização de atividades matematicamente ricas e da reflexão que desenvolvem a propósito da atividade executada. Canavarro (2011, p. 11) afirma que "o ensino exploratório da Matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou a vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva". Como tal, é fundamental que o professor tenha um papel ativo e não espere "tranquilamente sentado pelos rasgos iluminados e criativos dos seus alunos — não que estes não os tenham quando lhes é dada oportunidade" (Canavarro, 2011).

Na investigação que conduzimos, foi dada enfâse ao domínio da Geometria e Medida, nomeadamente ao conteúdo "figuras geométricas" e dentro deste ao tópico "Identificação de eixos de simetria". No ensino da reflexão e simetria de reflexão recomenda-se que o professor apoie o aluno no reconhecimento visual de objetos e conceitos geométricos, mais concretamente, dando e pedindo exemplos que evidenciem reflexões como simetrias axiais no meio natural e físico (Ponte *et al.*, 2007, p. 22). Relevando o valor da Geometria, autores como Breda, Serrazina, Menezes, Sousa e Oliveira (2011, p. 13) sublinham o papel desta área na descrição, análise e compreensão do mundo físico, exemplificando, "ao confrontar os alunos com fenómenos geométricos como as reflexões, e deixando-os resolver problemas geométricos simples, estes aprendem a compreender melhor o mundo à sua volta". A propósito do ensino das noções de reflexão e simetria de reflexão, o NCTM (2007, p. 116) recomenda que cabe aos professores orientar os alunos e auxiliá-los a "identificar, descrever e comprovar, informalmente, as características de simetria presentes nas suas figuras, fornecendo-lhes materiais concretos. Os alunos poderão (…) recorrer a recortes, dobragens de papel e à utilização de um espelho para investigar a existência de eixos de simetria". Como referem Breda *et al.* (2011, p. 20) "Os materiais manipuláveis (…) podem ter um papel fundamental como mediadores na aprendizagem dos diversos temas de geometria", ressaltando, porém, que "os materiais por si só não conduzem a nenhuma aprendizagem, tendo o professor um papel fundamental neste processo", disponibilizando os materiais e organizando de modo adequado "o ambiente de aprendizagem, de modo a encorajar os alunos a explorar as figuras e as suas propriedades".

Também na senda do que atrás evidenciamos, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2007, p. 44) afirma que "as ideias geométricas revelam-se muito úteis na representação e resolução de problemas em outras áreas da matemática e em situações do dia-a-dia, pelo que a geometria deverá ser integrada, sempre que possível, com outras áreas". Ainda segundo o NCTM (2007), o estudo de geometria no ensino básico exige "pensar e fazer":

> Enquanto os alunos classificam, criam, desenham, modelam, traçam, medem e constroem, a sua capacidade de visualização das relações geométricas desenvolve-se. E, simultaneamente, estão a aprender a raciocinar e a formular, testar e justificar conjeturas sobre essas relações. Esta exploração requer acesso a uma multiplicidade de ferramentas, tais como papel quadriculado ou ponteado, réguas (…) e sólidos geométricos (p. 191).

O nosso estudo convergiu, igualmente, para a integração da área da Matemática e da área das Ciências, pelo que importa realçar pontos convergentes nas conceções didáticas das duas áreas.

No que respeita ao ensino das Ciências, autores como Aleixandre, Caamaño, Oñorbe, Pedrinaci e Pro (2003, p. 22) apontam-no como passando-se num lugar onde "se produzem e usam conhecimentos (…), onde circulam ideias, onde se aplicam de forma ativa os conhecimentos construídos, onde os alunos (…) não são recetores ou «consumidores» de informação", evidenciando o cariz ativo e associado às vivências do dia-a-dia e não à recetividade passiva do saber.

Também as atividades designadas de exploratórias na área do ensino-aprendizagem da Matemática têm semelhanças com as atividades experimentais, cuja designação, no campo das Ciências, emerge da natureza de vários dos seus domínios.

É atualmente consensual que o ensino experimental deve ser a base do ensino das Ciências, uma vez que estas atividades conduzem ao desenvolvimento do pensamento científico através de processos como previsão, experimentação, observação, classificação, identificação de variáveis e seu controle, organização e comunicação de resultados e conclusões. As atividades experimentais podem ser enriquecidas se forem baseadas em temas que tenham significado para os alunos (temas do quotidiano, do mundo que os rodeia, entre outros…). O papel do professor é, assim, fundamental em todo o processo de trabalho experimental e é determinante para o sucesso ou insucesso da atividade. Neste sentido, o professor tem a responsabilidade de criar um ambiente de sala de aula que estimule e motive os alunos.

Do que ficou explicitado, as áreas de Matemática e de Ciências fazem parte do nosso dia-a-dia e estão, então, fortemente ligadas entre si. Os princípios associados ao ensino-aprendizagem destas duas áreas são convergentes e apontam um caminho de integração curricular ativa na sala de aula.

A Oficina de Matemática e Ciências, que se descreverá mais à frente, sucintamente, foi tomada como potenciadora do ensino-aprendizagem a que nos referimos e pretendeu-se que se organizasse como um espaço de interseção, onde se construíssem e consolidassem, ativamente, aprendizagens significativas, integradas e socializadoras. Pretendíamos proporcionar, nesse contexto, tarefas motivadoras, facilitadoras dessas mesmas aprendizagens. Estamos em sintonia com Teixeira (2012, p. 40) que entende que as oficinas, mais do que uma metodologia, proporcionam "um ritmo de vida nos indivíduos, através da liberdade, da organização, da regularidade, da disciplina, do desempenho, do estímulo, da motivação, do interesse, da intervenção, que lhes dá estabilidade emocional, segurança e continuidade".

Assim, podemos entender o conceito da nossa "Oficina" como um contexto didático, associado a um espaço educativo na sala de aula com recursos intencionalmente concebidos, onde a metodologia é fortemente caracterizada pela interdependência entre a teoria e a prática, sendo que o valor do envolvimento dos alunos é aí reforçado com vista a uma aprendizagem ativa.

Metodologia

O estudo enquadrou-se na Prática de Ensino Supervisionada em 1.º CEB (PES) no âmbito do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º CEB e desenvolveu-se ao longo de três semanas. Integrou uma turma do 3.º ano, a sua professora cooperante e a estagiária-par pedagógico.

Tendo em conta a questão, objetivos e características específicas, consideramos que se tratou de uma investigação-ação de natureza qualitativa. Na senda de Máximo-Esteves (2008), é na sala de aula que se encontra o terreno ideal para desenvolver projetos de investigação-ação, pois é aí que se registam as interações diárias e se geram problemáticas questionadoras das práticas do professor e da aprendizagem dos alunos.

Das técnicas e instrumentos de recolha de dados destacamos a observação participante, as notas de campo, o registo fotográfico, os registos produzidos pelos alunos e a entrevista semiestruturada à professora cooperante. Sendo a investigação de cariz qualitativo, a análise de dados centrou-se na análise do conteúdo dos registos obtidos.

De modo a organizar e tornar mais coerente a análise de dados foi necessário definir categorias, subcategorias de análise e os respetivos indicadores (Tabela 1).

Tabela 1.
Categorias e subcategorias de análise de conteúdo

Categorias	Subcategorias
Desempenho dos alunos nas atividades propostas	Aprendizagens cognitivas dos alunos no âmbito da matemática e das ciências
	Capacidades transversais
	Componente afetiva e atitudinal.
Perspetiva da orientadora cooperante	Planificação das atividades
	Atividades desenvolvidas no âmbito da Oficina
	Recursos didáticos; e Projeto de Investigação e Prática Supervisionada

Descrição da Oficina – A gaveta "Espelhos, Matemática e Ciências"

Para que pudesse existir a Oficina de Matemática e Ciências de modo a atingirmos os objetivos a que nos propúnhamos foi necessário um período de preparação durante o qual se delineou e organizou a mesma.

A construção da Oficina desenrolou-se em fases: construção; elaboração dos recursos didáticos (organizados em várias gavetas temáticas); e implementação. Surgiu a ideia de esta não ser um "espaço" fixo, ou seja, que pudesse mover-se e criar alguma dinâmica, curiosidade, expectativa e vir a ser usada noutros espaços do Agrupamento. Assim, surgiu o acrescento ao nome de “Oficina sobre Rodas”. Vale a pena, ainda, referir que, esta foi concebida para continuar a crescer (móvel com gavetas unidas por velcros), podendo ser aumentadas as gavetas ou criado um novo móvel. Outro dos princípios era que a oficina fosse construída utilizando materiais de desperdício. Assim, optámos por usar caixas de um supermercado e as rodas de um móvel já inutilizado; os materiais das gavetas, sempre que se ajustou, também seguiram o mesmo princípio.

As “gavetas temáticas” iam sendo sucessivamente colocadas na “Oficina sobre Rodas” aquando da sua primeira exploração na sala de aula. Como introdução da tarefa, cada gaveta foi inicialmente explorada, em grande grupo, a fim de os alunos tomarem contacto com a respetiva temática e com os materiais. Depois para se garantir a apropriação da tarefa pelos alunos, esta era apresentada pelo professor e definida a forma de organização do trabalho dos alunos, em pequeno grupo ou individual, conforme fosse mais ajustado. Seguia-se o desenvolvimento das atividades, sob orientação do professor. Após a realização das mesmas era feita uma discussão e sistematização, em grande grupo, dos procedimentos e das aprendizagens.

Deste modo, importa frisar que também estas apresentam mobilidade, podendo ser trocadas de posição, umas com as outras, com exceção das duas gavetas da base. Cada gaveta integra um guião de exploração e os correspondentes recursos (Figura 1). Os temas não surgiram ao acaso; resultaram de uma planificação sustentada pelo quadro teórico que atrás evidenciámos para o ensino-aprendizagem de Matemática e de Ciências em contexto de oficina. De modo espiral, cada “gaveta temática” ia sendo refletida após a implementação e contribuindo para sustentar a planificação e a construção da seguinte.

Figura 1. Imagens da Oficina e do interior da gaveta “Espelhos, Matemática e Ciências”.

Gaveta "Espelhos, Matemática e Ciências"

Uma das gavetas da Oficina foi designada "Espelhos, Matemática e Ciências" e a sua exploração pode ocorrer em dois momentos, sequenciais ou não.

Dada a natureza e a extensão das tarefas propostas, com base nesta Gaveta, embora referindo-nos aos objetivos do domínio cognitivo, de Matemática e de Ciências, que podem ser atingidos em ambos os momentos bem como os materiais alocados a cada um deles (Tabela. 2.1 e 2.2), incidimos no 2.º Momento, no que respeita à exploração didática e à análise dos resultados obtidos. A exploração completa das quatro Gavetas que integravam a Oficina no final do ano letivo de 2014/15 encontra-se em Raposo (2015). Neste ano de 2015/16 vai continuar o seu desenvolvimento.

Tabela 2.1.
Objetivos e material disponível na Gaveta "Espelhos, Matemática e Ciências"

	Objetivos	Material disponível na gaveta
1.º Momento	Identificar no plano figuras simétricas em relação a um eixo. Completar figuras planas de modo que fiquem simétricas relativamente a um eixo previamente fixado, utilizando espelhos. Traçar eixos de simetria em figuras planas; Identificar um padrão através do seu eixo de simetria; Identificar eixos de simetria em figuras planas utilizando dobragens, espelhos; Identificar a simetria entre um objeto e a sua imagem num espelho plano Prever a forma das imagens obtidas por reflexão em diferentes espelhos Desenvolver um procedimento experimental de modo a testar previsões Compreender que a superfície do espelho influencia a forma da imagem de um objeto Resolver problemas envolvendo figuras com simetria de reflexão.	- Guião de Exploração da "gaveta"; - Cartões com o padrão dos cristais de gelo; - Espelhos planos; - Folhas de papel coloridas; - Tesouras

Tabela 2.2.
Objetivos e material disponível na Gaveta "Espelhos, Matemática e Ciências"

	Objetivos	Material disponível na gaveta
2.º Momento	Identificar eixos de simetria em figuras planas; Descrever as características da imagem formada por diferentes tipos de espelhos (espelhos esféricos – côncavos ou convexos, espelhos planos e espelhos cilíndricos) Compreender que as características da imagem de um objeto num espelho côncavo dependem da sua distância ao espelho Reconhecer que a imagem num espelho plano está à mesma distância do espelho que o objeto (simetria de reflexão)	- Conjunto de espelhos [planos, côncavos e convexos, cilíndricos] - Boneco (rã) - Papel quadriculado e lápis - Placa retangular de vidro - Cubos de sabão azul - Velas cilíndricas de 1 cm de altura em suporte metálico - Fósforos

Resultados e discussão

Para analisar os resultados, tivemos em conta as categorias e subcategorias definidas no quadro de análise de conteúdo dos nossos registos e dos documentos produzidos pelos alunos (Tabela 1).

A primeira etapa da atividade que se desenvolveu em torno da Gaveta "Espelhos, Matemática e Ciências" incluía tarefas exploratórias que consistiam em que os alunos identificassem e traçassem os eixos de simetria das imagens apresentadas no guião. Através da análise das representações dos alunos e das observações realizadas, percebemos que todos identificaram corretamente os eixos de simetria horizontais ou verticais das imagens 1, 2, 3 e 4 (presentes no guião do aluno), tal como podemos constatar através do seguinte registo (Figura 2).

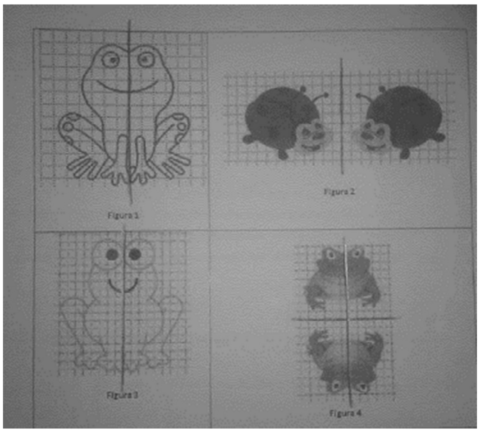


Figura 2. Registo de um aluno evidenciando simetrias de reflexão.

Contudo, algumas situações apresentaram dificuldades a alguns alunos, nomeadamente, como é ilustrado na figura 3 (onde o aluno começou por representar incorretamente o eixo de simetria), situações em que o eixo não era vertical ou horizontal ou situações em que existia mais do que uma figura e a sua imagem (Figura 4).

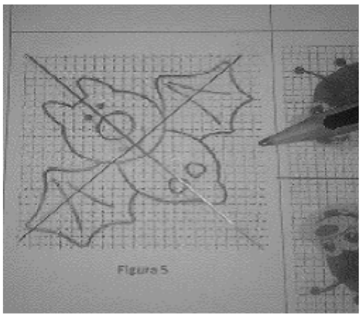
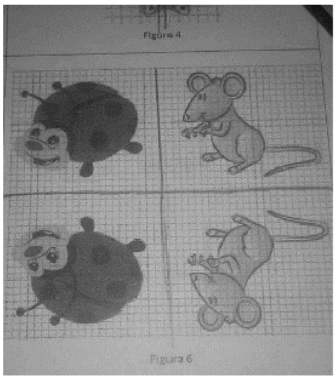



Figura 3 e 4. Exemplos de identificação incorreta do eixo de simetria.

Para que os conhecimentos ficassem realmente consolidados, principalmente para estes alunos, foi-lhes solicitado que fizessem a confirmação, com recurso ao espelho plano contido na gaveta.

A tarefa seguinte consistiu na exploração de vários tipos de espelhos (planos, esféricos - côncavos e convexos ‘colheres de sopa’ - e cilíndricos - horizontal e vertical ‘cartolina espelhada’). Os registos fotográficos reproduzidos nas figuras 5 e 6 mostram os alunos a observarem os vários tipos de espelhos.

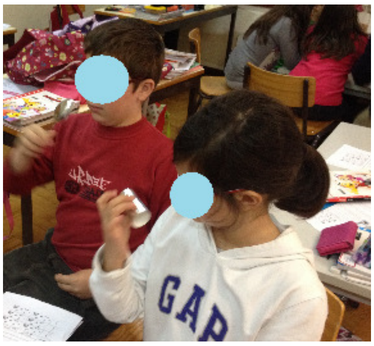


Figura 5. Exploração de espelhos esféricos e cilíndricos.

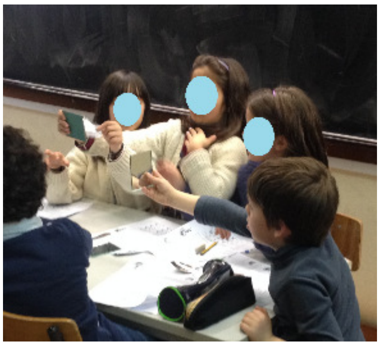


Figura 6. Exploração dos espelhos planos.

Na etapa seguinte os grupos foram confrontados com uma atividade de natureza experimental (adaptada de Martins *et al.*, 2009). Em primeiro lugar, os alunos tinham de registar, no seu guião, as previsões relativamente à imagem da rã (boneco de plástico), conforme refletida nos diferentes tipos de espelhos. O registo das previsões teve duas etapas: colocando a rã perto do espelho e longe do espelho. Os alunos tinham, assim, de pensar se a imagem refletida se manteria igual (em tamanho, forma e posição) ou se ficaria alterada, relativamente ao objeto.

De um modo geral, percebemos que as previsões foram bastante diversificadas o que se terá devido ao facto de a maioria dos alunos não ter muito contacto com este tipo de espelhos, embora sejam comuns em situações de diversão e outras do quotidiano (como os espelhos côncavos e convexos da colher). Nesse sentido, seria de esperar que os alunos acertassem nas previsões relativas à imagem da rã no espelho plano pois este é o tipo de espelho com que contactam mais frequentemente, o que não aconteceu. Apenas um aluno, em 22, fez uma previsão consistente com o resultado nas duas situações (perto e longe).

A etapa que se seguiu consistiu na realização de experiência que permitiu verificar como é que a imagem da rã ficava refletida nos vários tipos de espelhos, sendo colocada perto e longe. Através do registo fotográfico (Figuras 7 e 8) são visíveis os alunos a realizarem a experiência e a compararem as suas previsões com os resultados obtidos por observação.

Figura 7. Aluno a verificar a reflexão da rã no espelho plano.

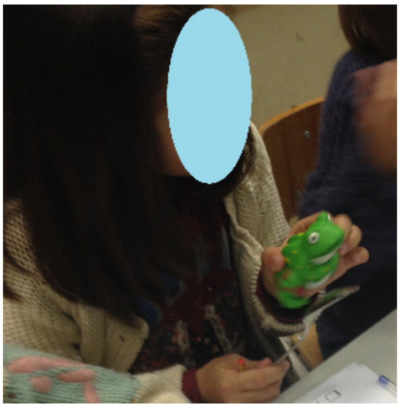
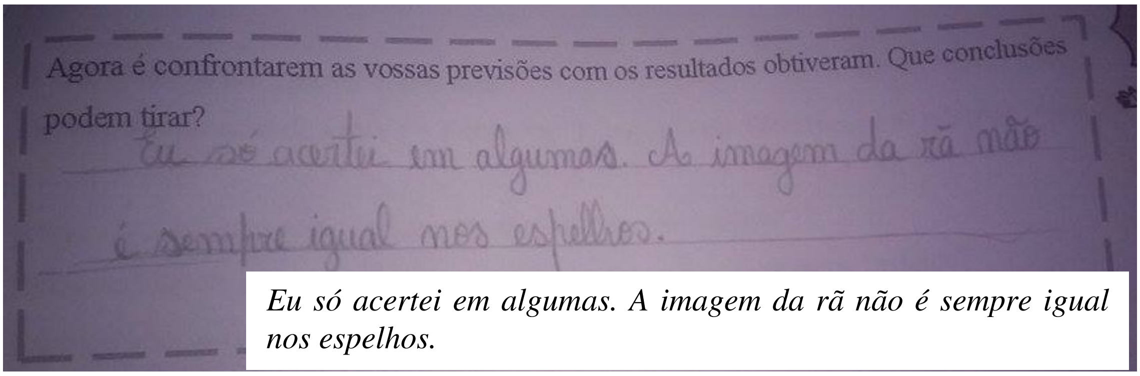


Figura 8. Aluno verificando a reflexão da rã no espelho convexo (face convexa da colher de sopa).

Para terminar esta etapa, os alunos confrontaram as suas previsões com os resultados obtidos e retiraram algumas conclusões, tal como podemos observar nos registos que reproduzimos nas figuras 9 e 10.



Agora é confrontarem as vossas previsões com os resultados obtiveram. Que conclusões podem tirar?

Eu só acertei em algumas. A imagem da rã não é sempre igual nos espelhos.

Eu só acertei em algumas. A imagem da rã não é sempre igual nos espelhos.

Figura 9. Registo de um aluno (a).

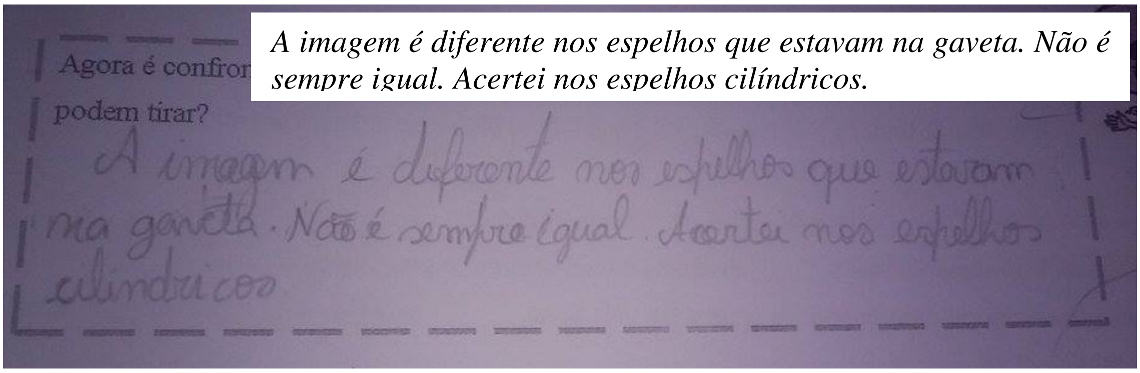


Figura 10. Registo de um aluno (b).

Foi interessante observar e analisar as reações dos alunos, ao realizarem a experiência e ao confrontarem os resultados com as suas previsões. Nesse sentido, foi-nos possível registar alguns comentários, estabelecendo, por vezes, a relação do fenómeno observado com situações do dia-a-dia ou evidenciando o desenvolvimento de competências de pensamento científico, aspetos a que aludimos na fundamentação teórica e integrando-se nas categorias e subcategorias referidas no quadro de análise (aprendizagens cognitivas, transversais e afetivas e atitudinais).

As falas dos alunos, reproduzidas abaixo evidenciam, aprendizagens cognitivas.

- "Pois este espelho [plano] é como o que tenho em casa. E, quando me vejo lá, a minha imagem não muda."
- "Acertei esta. Eu sabia porque, às vezes, quando como a sopa vejo-me ao espelho na colher."
- "Neste espelho [cilíndrico horizontal] a rã fica mesmo gorda. Mas se for assim (espelho cilíndrico vertical) fica toda esticadinha."

No que respeita a aprendizagens transversais, evidenciou-se, por análise dos diálogos, que a maioria dos alunos teve a capacidade de discutir os resultados obtidos, interpretando os resultados obtidos e utilizando vocabulário adequado.

Ainda no que diz respeito a esta tarefa, registámos em notas de campo o grande interesse e empenho por parte dos alunos. Os alunos, de forma individual, e os diferentes grupos constituídos mostraram-se bastante autónomos quer em termos de organização, quer em termos de concretização das várias etapas da atividade.

A última tarefa desta atividade oficinal consistiu em que os alunos retirassem da Gaveta da Oficina um conjunto de materiais (2 velas; 1 vidro com suportes; uma folha de papel quadriculado) e com base nas indicações do guião tentassem dar resposta à questão "O vidro funciona como um espelho?" (Figuras. 11 e 12).

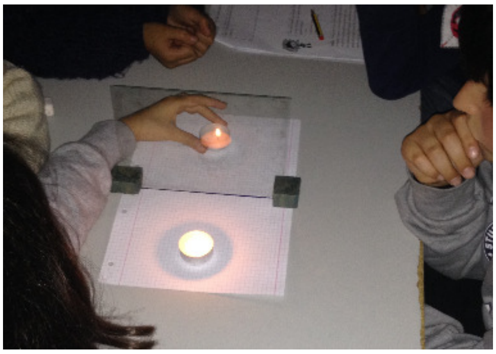


Figura 11. Procurando uma posição para sobrepor a imagem da chama da vela acesa ao pavio da vela apagada.

Figura 12. Resultado final: simetria por reflexão.

Importa destacar a reação de surpresa dos alunos ao observarem que a imagem da vela acesa era refletida pelo vidro e que a vela apagada lhes parecia acesa. É também de realçar que foi uma oportunidade para o desenvolvimento de capacidades diretamente associadas ao trabalho experimental, revelando grande responsabilidade, sobretudo no manuseamento dos materiais, nomeadamente, os espelhos, os vidro e as velas que se encontravam acesas. Também nesta atividade registámos evidências de aprendizagens cognitivas e atitudinais /afetivas:

- "Ah! É mágica, ela acendeu. Não vês, está acesa! … Ah! Afinal não, mas parece mesmo. Ficou refletida."
- "Mas ela [vela] está apagada e, aqui [aponta para o vidro], parece mesmo que está acesa. Que fixe!"
- "Afinal estava enganado, o vidro pode mesmo fazer de espelho."
- "Gostei tanto desta experiência."
- "Isto aconteceu porque elas [velas] estão à mesma distância, não é? Nós já contámos as quadrículas."

Através de observação compreendemos que todos os grupos tinham chegado à conclusão de que o vidro funcionou como espelho. E que para a vela, que estava efetivamente apagada parecesse acesa, as duas tinham de estar à mesma distância do vidro, o que os alunos comprovaram pela medida no papel quadriculado. Todos os grupos adotaram a estratégia de contar as quadrículas para confirmarem a equidistância das duas velas ao vidro.

As observadoras-participantes perceberam que, com a atividade associada à Gaveta "Espelhos, Matemática e Ciências" os alunos conseguiam expressar, claramente, as suas ideias sobre o fenómeno da reflexão da luz no espelho plano como simetria, interpretado de forma integrada como conceito das Ciências e da Matemática, que o concreto dos materiais da Oficina ajudou a compreender. Foi também evidente que a maioria dos alunos conseguiu perceber o porquê de algumas das suas previsões não se confirmarem na observação e construíram as conclusões científicas com base numa metodologia experimental e na exploração ativa dos materiais que a Oficina lhes disponibilizou. De igual modo, as observadoras-participantes convergiram na opinião de que a Oficina implicou os alunos num trabalho de grupo permanecendo motivados e empenhados nas tarefas e revelando um crescente de autonomia grupal e individual.

Conclusões

Da análise dos resultados sobressai como conclusão do nosso estudo que a Oficina Sobre Rodas concebida, construída e explorada permitiu desenvolver experiências de aprendizagem significativas e diversificadas. De facto, as atividades contribuíram para que os alunos se envolvessem de forma mais ativa, empenhada e colaborativa; os recursos didáticos foram adequados e permitiram a integração entre as áreas de Matemática e de Ciências; estas atividades com cariz exploratório/experimental proporcionaram aos alunos o desenvolvimento de capacidades científicas e aprendizagens cognitivas, podendo, assim, responder-se positivamente à questão do estudo, considerando elevado o nível de aprendizagens proporcionadas pela Oficina.

Importa salientar que, devido à especificidade da investigação conduzida na prática de ensino, as conclusões não podem ser generalizadas, uma vez que esta investigação se desenvolveu no contexto particular de uma turma de 3.º ano do 1.º CEB numa escola singular. Tratou-se, portanto, de uma situação de ensino e de aprendizagem irrepetível, enquanto tal. Estávamos conscientes desse aspeto específico da investigação-ação, mas a sua finalidade formativa foi atingida, particularmente pela reflexão que proporcionou com vista a uma nova implementação, com outras crianças no mesmo ou noutros contextos, bem como ao desenvolvimento de novas gavetas da Oficina de Matemática e

Ciências. Agora percebemos que o conceito funciona ativando afetiva e cognitivamente as crianças, tal como reforçou a professora orientadora-cooperante em entrevista.

A nós, permitiu-nos planear, implementar, avaliar, refletir, em suma, investigar na ação, e despertou-nos a vontade de ampliar a Oficina sobre rodas.

Referências bibliográficas

Aleixandre, M. P., Caamaño, A., Oñorbe, A., Pedrinaci, E., & Pro, A. (2003). *Enseñar ciencias.* Barcelona: Editorial GRAÓ.

Breda, A., Serrazina, L., Meneses, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011). *Geometria e Medida no Ensino Básico.* Lisboa: ME-DGIDC.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino Exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Canavarro, A. P., & Santos, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas. Investigação em Educação Matemática. Em A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, & H. Oliveira (Eds.), *Práticas de ensino da Matemática* (pp. 99-104). Lisboa: SPIEM.

Godino, J. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros.* Granada: Universidad de Granada.

Martins, I., Veiga, M. L., Teixeira, F., Tenreiro-Vieira, C., Vieira, R., Couceiro, F., & Pereira, S. J. (2009). *Despertar para as Ciências - Actividades dos 3 aos 6.* Lisboa: ME-DGIC.

Ministério da Educação (2004). *Organização Curricular e Programas Ensino Básico – 1.º Ciclo.* Lisboa: ME.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: MEC.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

Paixão, M. F., & Jorge, F. R. (2015). Desenvolver o conhecimento para ensinar matemática na interação entre contextos formais e não formais. Em A. P. Canavarro, L. Santos, & C Canha (Org.), *Atas do XXVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 92-106). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. Em G. (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM. Obtido em 12 de fevereiro de 2015, de http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3008/1/05-Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf

Ponte, J. P. (2010). Explorar e Investigar em Matemática: Uma Actividade Fundamental no Ensino e na Aprendizagem. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 13-30.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Menezes, L., . . . Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: ME-DGIC.

Raposo, A. P. (2015). *Experiências de Aprendizagem no 1.º Ciclo do Ensino Básico num contexto de uma Oficina de Matemática e Ciências.* Relatório de Estágio*; Escola Superior de Educação do Istituto Politécnico de* Castelo Branco, Castelo Branco, Portugal.

Sá, J., & Varela, P. (2007). *Das Ciências Experimentais à Literacia: Uma proposta didáctica para o 1.ºciclo.* Porto: Porto Editora.

Teixeira, E. (2012). *Importância das Oficinas.* Dissertação de Mestrado, Universidade Lusófona, Lisboa, Portugal.

Yeo, J. (2007). Mathematical tasks: Clarification, classification and choice of suitable task for different tupes of learning and assessment. *Technical Report ME2007*. Singapore: National Institute of Educacion, Nanyang Technological University.

Cidade, Escola e Explorações geométricas - um triângulo de aprendizagem no 1.º Ciclo do Ensino Básico

Fátima Regina Jorge[1], *Neuza Silva*[2]
[1]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Castelo Branco & Centro de Investigação Didática e Tecnologia Educativa na Formação de Formadores – CIDTFF,
frjorge@ipcb.pt
[2]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Castelo Branco,
neuzacarina89@gmail.com

Resumo. *O estudo que se apresenta, desenvolvido numa turma de 4.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico, inseriu-se na problemática do potencial educativo presente na articulação entre as aprendizagens efetuadas em contextos formais e não-formais de ensino e procurou responder às seguintes questões: Em que medida a realização de atividades na interação entre contextos formais e não-formais contribui (1) para despertar a motivação para a aprendizagem matemática e (2) para a promoção da aprendizagem significativa da geometria (conteúdos e capacidades espaciais)? Dada a natureza da problemática e o facto de a investigação-ação decorrerem em paralelo com a finalidade de melhorar a prática docente e as aprendizagens dos alunos, optou-se por esta abordagem metodológica de índole qualitativa. Para a análise de dados recorremos à técnica de análise de conteúdo, com base em categorias previamente definidas. Os resultados obtidos no estudo sustentam que as atividades desenvolvidas na interação entre a sala de aula e o Centro de Cultura Contemporânea de Castelo Branco possibilitaram aos alunos construir novos conhecimentos relativos a figuras geométricas e desenvolver capacidades de visualização espacial. As tarefas implementadas e os recursos produzidos para os três momentos da visita de estudo – pré-visita, visita e pós-visita - revelaram-se articulados, promoveram a aprendizagem da geometria e estimularam o o interesse, a motivação e o empenho na realização de atividades matemáticas.*

Palavras-chave: *educação básica; interação entre contextos formais e não-formais de educação; geometria; visualização espacial.*

Abstract. *This study developed in a 4th class of the 1st cycle of basic education (9 years old) was inserted in the problematic of the educational potential of the interaction between the learning done in formal and non-formal teaching contexts (classroom and a study visit to the Contemporary Culture Centre of Castelo Branco, Portugal). The guiding research questions was defined as follows: In what extent the performance of activities in the interaction between formal and non-formal contexts contributes: (1) to raise motivation for mathematics learning and (2) promote meaningful learning of the geometry (content and spatial skills)? Given the nature of the problematic and the fact that action-research arise in parallel with the goal of improve teaching practice and pupils' learning, we opted for this methodological approach of qualitative nature. For data* *analysis we adopted the content analysis technique, based on predefined categories. The results obtained in this study allowed us to conclude that the activities developed in the interaction between the classroom and the Contemporary Culture Centre, enabled students to build new knowledge on geometric shapes and develop spatial visualization abilities. The implemented tasks and the resources produced for the three moments of the study visit - pre-visit, visit and post-visit - evidenced articulated, promoted learning of geometry and stimulated the interest, motivation and engagement in mathematical activities.*

Keywords: *basic education; interaction between formal and non-formal contexts of education; geometry; spatial visualization.*

Introdução

A ausência de contextualização dos conteúdos curriculares e a insuficiente ênfase no desenvolvimento de capacidades matemáticas podem ser apontadas como aspetos que concorrem para a pouca atratividade e motivação para a matemática, com o consequente reflexo nas aprendizagens. Como referem Guisasola, Azcona, Etxaniz, Mujika, & Morentin (2005), aprender não é uma experiência que se realiza em abstrato mas sim num contexto do mundo real, combinando contextos pessoais, socioculturais e físicos.

A Geometria (e Medida) constitui um dos domínios de conteúdo transversais aos três ciclos do ensino básico, sublinhando-se o contributo do seu estudo para o desenvolvimento de capacidades espaciais, de organização do espaço, de raciocínio e argumentação e, não menos importante, para o estabelecimento de conexões entre a matemática e o mundo real (NCTM, 2007; Ponte & Serrazina, 2000). Contudo, a formulação do atual Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico (Ministério da Educação e Ciência, 2013) sugere um ensino focalizado em definições, regras e procedimentos. Por exemplo, o tópico "ângulos", inserido no conteúdo "figuras geométricas", surge no 4.º ano de escolaridade associado a um conjunto considerável de conceitos e a metas de aprendizagem focadas em definições e procedimentos com um elevado nível de abstração. Parafraseando Breda, Serrazina, Meneses, Sousa, e Oliveira (2011, p. 7), embora num outro contexto, parece haver "pouco espaço à acção dos alunos na compreensão dos conceitos geométricos".

Importa, portanto, implementar estratégias e tarefas de ensino e aprendizagem que ajudem a dar sentido à geometria escolar, se adequem ao quotidiano dos alunos, despertem o interesse e a motivação para aprender e promovam as desejadas aprendizagens significativas. Enfatiza-se, em particular, o potencial didático do recurso a contextos do meio próximo dos alunos que evidenciem as ligações da matemática escolar com a realidade dos alunos. De facto, como se pode ler nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar “quando os professores chamam a atenção para a existência de figuras geométricas na natureza ou na arquitetura, os alunos adquirem uma maior consciencialização da presença da geometria no seu ambiente circundante” (NCTM, 2007, p. 118).

Em função do exposto, a investigação inseriu-se na problemática do potencial educativo presente na articulação entre as aprendizagens efetuadas em contextos formais e não-formais de ensino. A escolha do contexto não-formal recaiu no Centro de Cultura Contemporânea de Castelo Branco (CCCCB) cuja arquitetura é marcada pelas formas geométricas irregulares das fachadas e janelas, bem como por outros elementos geométricos de grande impacto visual. De referir que no período em que decorreu o estudo, o CCCCB tinha patente a Exposição Planet Ferrovia Sector IX Via Lusitanea, da autoria do artista plástico espanhol Viktor Ferrando. A exposição integrava um conjunto de esculturas e instalações de grandes dimensões, de forte cunho geométrico, criadas a partir da reutilização de material ferroviário (Figura 1).

Figura 1. Vista do exterior do CCCCB e das esculturas *Luna Saturni e Agressive* Expansion exploradas na visita.

Considerámos, assim, estarem reunidas condições favoráveis para a realização de um conjunto de atividades focadas no conteúdo curricular “Figuras Geométricas” do Programa de Matemática para o Ensino Básico no 4.º ano de escolaridade (Ministério da Educação e Ciência, 2013).

A investigação desenvolvida foi norteada por duas questões que passamos a enunciar. Em que medida a realização de atividades na interação entre contextos formais e não-formais contribui para: (1) despertar a motivação dos alunos para a realização de atividades matemáticas? (2) promover a aprendizagem significativa da geometria (conteúdos e capacidades espaciais) no 4.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico (1.º CEB)? Destas questões emergiu como objetivo do estudo: Construir e avaliar tarefas e recursos a utilizar na prática educativa (antes, durante e pós visita ao CCCCB) promotores da interação entre os dois contextos e que contribuam para a aprendizagem contextualizada de ideias geométricas e para o desenvolvimento de capacidades espaciais.

Enquadramento teórico

Interação entre contextos de educação formal e não-formal

O processo educativo formal que decorre no seio de instituições escolares é, entre outros aspetos, orientado por um currículo, com objetivos e conteúdos definidos, hierarquizado e organizado sequencialmente por níveis de ensino. Já a designada educação não formal remete para contextos em que as atividades educativas não estão vinculadas a currículos ou programas oficiais, mas em que está presente intencionalidade educativa (Rodrigues, 2011; UNESCO, 2006). Os contextos não-formais contribuem para "abrir janelas de conhecimento sobre o mundo que circunda os indivíduos e as suas relações sociais, o que pressupõe uma intencionalidade na ação, no ato de participar, de aprender e de transmitir ou trocar saberes" (Gohn, 2006, pp. 29-30). Dominguez-Sales e Guisasola (2010) acrescentam que tais espaços, a par, favorecerem o ensino de conceitos científicos através da realização de atividades contextualizadas na realidade, propiciam momentos de diversão e interação social, fatores com grande potencial para despertar a curiosidade e a motivação dos alunos para a aprendizagem, atuando, portanto, nos domínios cognitivo e sócio-afetivo. De facto, a investigação tem evidenciado que a vivência de experiências de aprendizagem em contextos não-formais em articulação com o trabalho realizado em sala de aula pode propiciar aprendizagens curriculares significativas e influenciar os resultados educativos dos alunos. Para tal, é imprescindível que o professor integre a saída da escola na sua planificação didática, contemplando tarefas relacionadas com o currículo dos alunos a propor em três momentos – pré-visita, visita de estudo e pós-visita (ver Morentin & Guisasola, 2014). Sublinha-se ainda que as visitas de estudo a espaços temáticos, contextualizados e inseridos num local concreto do meio próximo dos alunos favorecem a desejável abordagem integradora dos saberes no 1.º CEB (Paixão & Jorge, 2015).

Como destacam vários autores, a organização de uma visita de estudo a um local exterior à escola implica que sejam seguidos três princípios básicos: (1) Inclusão da visita na aprendizagem escolar, isto é, conexão dos conteúdos da visita com as aprendizagens e objetivos do currículo; (2) Estruturação das tarefas a propor nos três momentos – pré-visita, visita e pós-visita - por forma a facilitar a aprendizagem dos alunos, incluindo a elaboração de materiais didáticos; (3) adoção de estratégias de ensino conducentes a aprendizagens com significado, baseadas no trabalho autónomo, colaborativo e ativo dos alunos (assente, por exemplo, em trabalho de grupo orientado pelo professor), ou seja, estratégias de índole sócio-construtivista (ver Morentin & Guisasola, 2014; Osborne & Dillon, 2007).

Ensino da geometria no 1.º CEB

Como se pode ler em documentos curriculares de referência, o propósito principal do ensino Geometria no Ensino Básico deve incidir no desenvolvimento "do sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço (…) bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas geométricos (…) em contextos diversos" (Ponte *et al.,* 2007, p. 20). Neste âmbito valoriza-se o desenvolvimento das capacidades espaciais das crianças, tais como a visualização espacial e a orientação espacial, pois estas são "suscetíveis de facilitar a aprendizagem da geometria" (Matos & Gordo, 1993, p. 13). Enquanto a orientação espacial implica alterações na perspetiva percetual do observador, a visualização envolve movimento ou alteração mental do objeto e contempla um conjunto de capacidades estreitamente relacionadas em si e "com a forma como os alunos percepcionam o mundo que os rodeiam e com a sua capacidade de interpretar, modificar e antecipar transformações dos objectos" (Breda, Serrazina, Meneses, Sousa, & Oliveira, 2011, p. 13), caracterizadas na tabela 1.

Neste enquadramento, o desenvolvimento da visualização espacial implica que as crianças sejam envolvidas na construção e manipulação de representações concretas de objetos geométricos e, progressivamente, o trabalho com figuras geométricas envolva a representação mental de formas, relações ou transformações (Breda *et al.*, 2011). Deste modo, a aprendizagem da geometria desenvolve-se através de experiências geométricas diversificadas que envolvam a construção e manipulação de representações concretas de objetos geométricos bi e tridimensionais, a perceção de objetos a partir de múltiplas perspetivas e a representação em diferentes suportes - papel ponteado, meios tecnológicos, etc. (NCTM, 2007; Ponte & Serrazina, 2000). Destaca-se, particularmente, o grande potencial de jogos, puzzles e outros materiais manipuláveis por, ao mesmo tempo que introduzem a vertente lúdica no processo de ensino e aprendizagem, permitirem a materialização de conceitos, relações geométricas e o desenvolvimento de capacidades espaciais. Como sugere van Hiele (1999, p. 316), para a criança a geometria começa com o brincar, pelo que o professor deve privilegiar materiais manipuláveis, refletir sobre os conteúdos que o material permite explorar e como sequenciar as tarefas a propor aos alunos de modo a desenvolver o seu nível de pensamento geométrico.

Tabela 1.
Capacidades relacionadas com a visualização espacial (Matos & Gordo, 1993, p. 14)

Coordenação visual-motora → Capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo.
Memória visual → Capacidade de recordar objetos que já não estão visíveis.
Perceção figura-fundo → Capacidade de identificar um componente específico numa determinada situação e envolve a mudança de perceção de figuras contra fundos complexos.
Constância percetual → Capacidade de reconhecer figuras geométricas em diversas posições, tamanhos e contextos e texturas.
Perceção da posição no espaço → Capacidade para distinguir figuras iguais quando colocadas com orientações diferentes.
Perceção de relações espaciais → Capacidade de ver e imaginar dois ou mais objetos em relação consigo próprio ou em relação connosco.
Discriminação visual → Capacidade para identificar semelhanças ou diferenças entre objetos.

Metodologia

O estudo foi desenvolvido no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada no 1.º CEB (PES) de um Mestrado em Educação Pré-escolar e Ensino do 1.º CEB, tendo como participantes uma turma de 22 alunos do 4.º ano de escolaridade, com idades compreendidas entre os 9 e os 10 anos e a professora cooperante que, pelo seu papel na supervisão da PES, ligação e conhecimento da turma, esteve, desde o início, envolvida na concretização do estudo.

Tendo em consideração as questões e objetivos do estudo, optou-se por uma metodologia qualitativa, sustentada num desenho com cariz de investigação-ação. Esta abordagem tem o duplo objetivo de obter resultados em ambas as vertentes, a ação docente, para obter mudança e melhoria da praxis, e a investigação, para aumentar a compreensão por parte do investigador acerca de um fenómeno ou problema concreto (Latorre, 2003).

Seguimos ao longo da PES um faseamento de planificação, ação, observação e reflexão sobre a ação. De referir que a investigação-ação ao desenvolver-se em ambientes de cooperação, colaboração e partilha (como é o caso deste estudo, desenvolvido na PES) promove a reflexão crítica sobre a prática e a introdução de alterações dessa e nessa mesma prática (Coutinho *et al.*, 2009).

Como instrumentos de recolha de dados recorremos a observação participante, notas de campo, registos dos alunos, registo fotográfico das atividades desenvolvidas com os alunos, questionário de opinião aos alunos (sobre a organização e interesse da visita) e entrevista semiestruturada à professora cooperante.

A análise dos dados baseou-se na técnica de análise de conteúdo tendo por base a definição de duas categorias, cada uma delas incluindo subcategorias e respetivos indicadores de análise (Bogdan & Biklen, 1994), sintetizados na tabela 2.

Tabela 2.
Categorias e subcategorias de análise de conteúdo

Desempenho dos alunos nas tarefas propostas	Aprendizagem cognitiva - figuras geométricas e suas propriedades
	Capacidades espaciais - perceção figura-fundo; constância percetual; perceção da posição no espaço, ...
	Componente atitudinal e afetiva
Perspetiva da professora cooperante	Integração do Projeto de Investigação na PES
	Unidade didática
	Tarefas e recursos didáticos utilizados
	Interação entre contextos formais e contextos não-formais

Apresentação do percurso de ensino e aprendizagem

Dado que a articulação, a contextualização e a integração das diferentes áreas curriculares são um aspeto essencial no 1.º CEB, propusemo-nos planificar e implementar um percurso de ensino-aprendizagem direcionado para o desenvolvimento integrado de atividades e áreas do saber. Acresce que a interação entre contextos formais e não formais, na perspetiva enunciada no quadro teórico, implica que a preparação da visita de estudo a realizar contemple a planificação das atividades a desenvolver em três momentos distintos - pré-visita, visita e pós-visita. No que respeita à matemática, a nossa planificação incidiu em conteúdos de geometria relacionados com as figuras geométricas: ângulos convexos; comparação das amplitudes de ângulos; ângulos retos, agudos e obtusos; retângulos como quadriláteros de ângulos retos.

Neste âmbito, o percurso de ensino-aprendizagem focou-se nos conteúdos referidos e incluiu uma visita de estudo ao CCCCB, bem como a construção de uma sequência de tarefas e recursos didáticos a utilizar, nomeadamente os guiões da visita de estudo (para os alunos e professores). Para as tarefas realizadas em sala de aula recorreu-se ao Tangram.

Na figura 2 apresenta-se um esquema onde se explicitam as tarefas propostas aos alunos nos três dias de implementação do plano de ação didática.

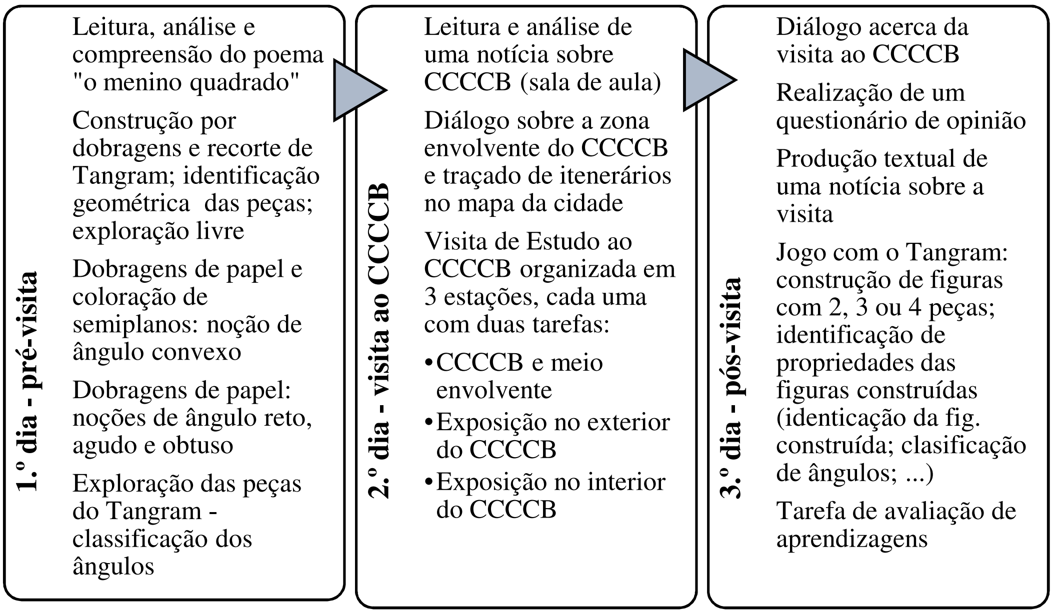


Figura 2. Apresentação global do percurso de ensino e aprendizagem.

Resultados e discussão

Centramos a nossa análise nalgumas das atividades desenvolvidas pelos alunos em sala de aula e no CCCB, com especial ênfase para o contexto não formal. As tarefas propostas assumiram um cariz exploratório pelo seu grau de indeterminação no que é dado e no que é pedido, mas em que o aluno pode começar de imediato a trabalhar, sem muito planeamento (Ponte, 2005). Em termos de conteúdos trabalhámos aqueles que estavam previstos para a semana de implementação do estudo empírico no âmbito do tópico figuras geométricas – ângulos e propriedades geométricas, associados a três grandes objetivos de aprendizagem: reconhecer e representar formas geométricas; identificar e comparar ângulos; reconhecer propriedades geométricas.

Antes da visita - (atividade de construção do Tangram)

Em sala de aula foi proposta a construção de um Tangram por dobragem de uma folha A5 para obtenção de um quadrado e, seguidamente, procedeu-se à decomposição, por sucessivas dobragens, do quadrado nas sete peças do Tangram.

Concluída a construção do puzzle, solicitámos aos alunos a reconstituição do quadrado original e a identificação das peças (Figura 3). É de registar, a dificuldade de alguns alunos em alcançar o objetivo de reconstituir o quadrado.

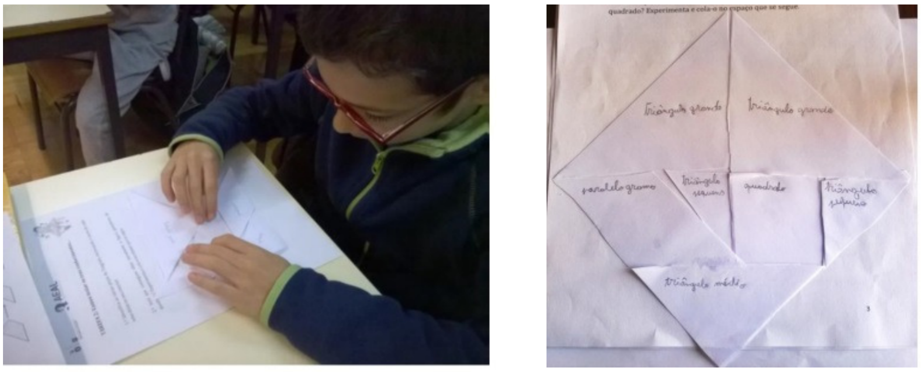


Figura 3. Reconstrução do Tangram

Dado que um dos nossos objetivos era reconhecer a presença de ângulos retos, agudos ou obtusos nas figuras geométricas, propôs-se uma segunda tarefa envolvendo o uso do Tangram (mas agora em material resistente) cujo objetivo era identificar, nas várias peças, os ângulos convexos e, de entre estes, classificá-los. De seguida, pedia-se aos alunos que, no seu guião, colorissem com uma cor determinada os ângulos das figuras aí representadas (Figura 4).

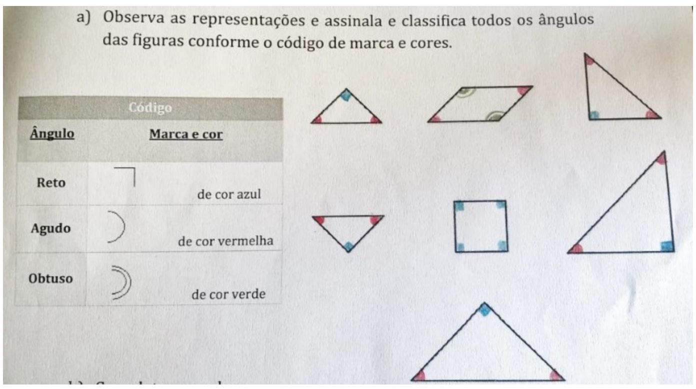
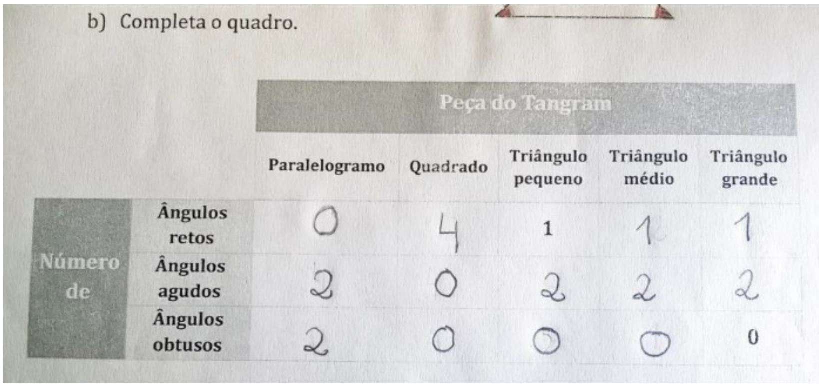


Figura 4. Identificação dos ângulos nas várias representações das peças do Tangram.

A apreciação do desempenho dos alunos revelou a dificuldade de muitos deles em identificarem o ângulo reto nas peças triangulares cuja posição relativa não apresentava os catetos em posição horizontal e vertical. No caso dos três triângulos representados desse modo no guião do aluno (Figura 4), grande parte dos alunos identificaram o maior dos ângulos como obtuso. Constatou-se que, nestes casos, os alunos fizeram a classificação por simples observação (visualização) e não por comparação ou deslocação de objetos.

Por fim, como atividade de sistematização de conhecimentos, os alunos deviam preencher uma grelha na qual se pedia o registo do número de ângulos agudos, retos ou obtusos de cada uma das peças do Tangram (Figura 5). Em geral, o preenchimento da grelha foi bem conseguido.


b) Completa o quadro.

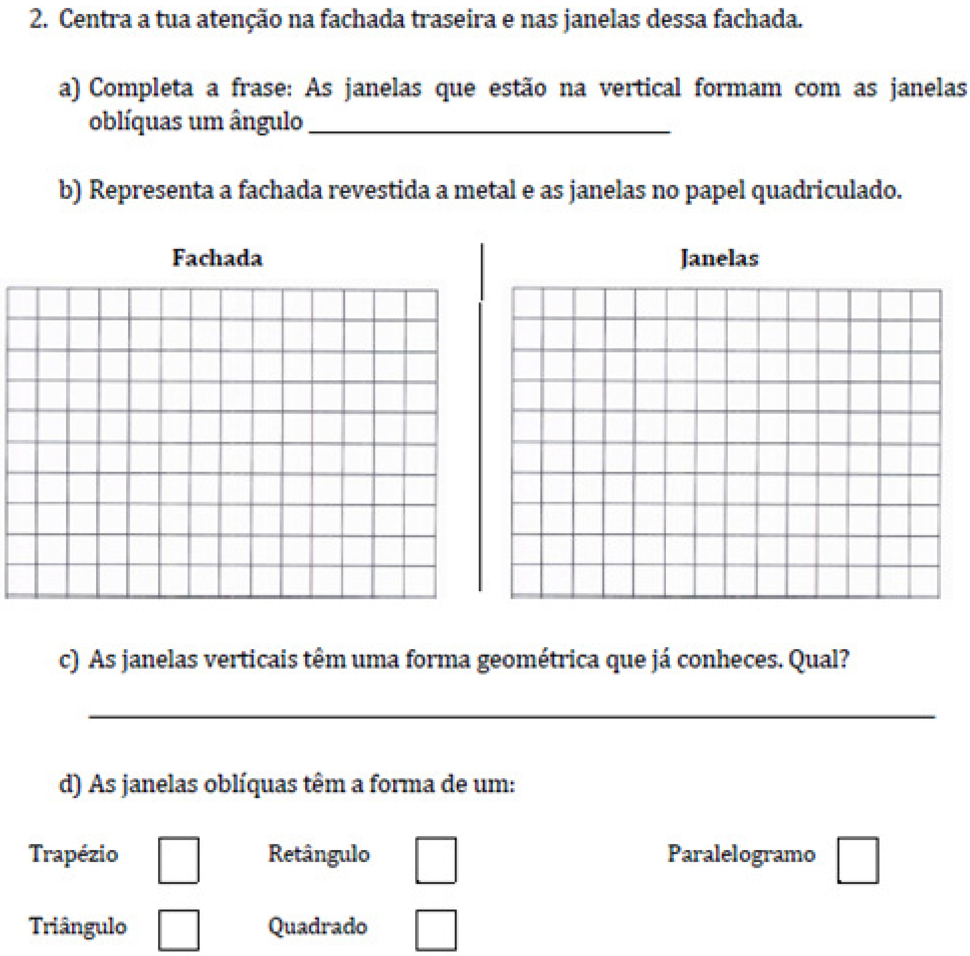
		Peça do Tangram				
		Paralelogramo	Quadrado	Triângulo pequeno	Triângulo médio	Triângulo grande
Número de	Ângulos retos	0	4	1	1	1
	Ângulos agudos	2	0	2	2	2
	Ângulos obtusos	2	0	0	0	0

Figura 5. Grelha preenchida por um dos alunos.

Visita de estudo ao CCCCB

A visita de estudo organizou-se em três estações - CCCCB e meio envolvente; Exposição no exterior e Exposição no interior do CCCCB - sendo os alunos organizados em três grupos de sete elementos, acompanhados por um adulto (a estagiária-par pedagógico e a professora cooperante). Cada aluno tinha consigo um guião de tarefas a desenvolver em cada uma das estações.

A estação *CCCCB e o meio envolvente* iniciou-se com a observação atenta do local e a identificação das instituições e dos serviços situados na zona. Em seguida, os alunos deviam responder a algumas questões sobre a fachada e janelas da traseira do CCCCB. As questões requeriam a classificação do ângulo formado pelas janelas, a identificação das formas geométricas presentes na parede traseira, bem como a sua representação em papel quadriculado (Figura 6).



2. Centra a tua atenção na fachada traseira e nas janelas dessa fachada.

a) Completa a frase: As janelas que estão na vertical formam com as janelas oblíquas um ângulo ______________________________

b) Representa a fachada revestida a metal e as janelas no papel quadriculado.

Fachada | Janelas

c) As janelas verticais têm uma forma geométrica que já conheces. Qual?

____

d) As janelas oblíquas têm a forma de um:

Trapézio ☐ Retângulo ☐ Paralelogramo ☐

Triângulo ☐ Quadrado ☐

Figura 6. Exemplo de tarefa proposta no guião do aluno.

Na figura 7 podemos ver um grupo de alunos a observar a traseira do edifício.

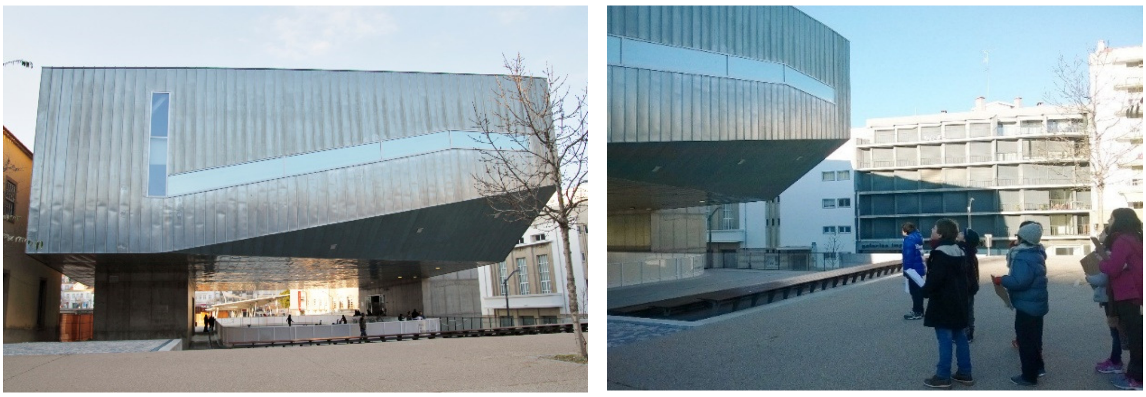


Figura 7. Traseira do CCCCB e alunos a observar a mesma.

Relativamente ao desempenho dos alunos, importa salientar que na organização dos grupos se distribuíram os alunos com mais dificuldades pelos três grupos. Apesar de cada aluno dever responder às questões no respetivo guião, registámos, em notas de campo, que, em momentos de dúvida, os alunos interpelavam outros colegas de forma a tentarem perceber o que era pedido. Deste modo, sobressaiu o espírito de entreajuda e cooperação. Relativamente à questão sobre qual o ângulo formado pelas janelas, apenas um aluno não respondeu. Todos os outros registaram “ângulo agudo”.

Seguidamente, era solicitada uma representação da fachada e das janelas usando como suporte papel quadriculado. Na figura 8 reproduzimos os registos de um dos alunos. É visível uma boa representação da forma da parede, com a perceção de relações de perpendicularidade e paralelismo entre os lados. Pode observar-se na imagem que o aluno corrigiu uma das linhas inicialmente traçada. A mesma precisão é também observável na representação das janelas e dos ângulos que estas formam entre si. Neste caso, o aluno revela capacidade de percecionar formas geométricas em fundos complexos e de reconhecer e representar aspetos específicos das mesmas.

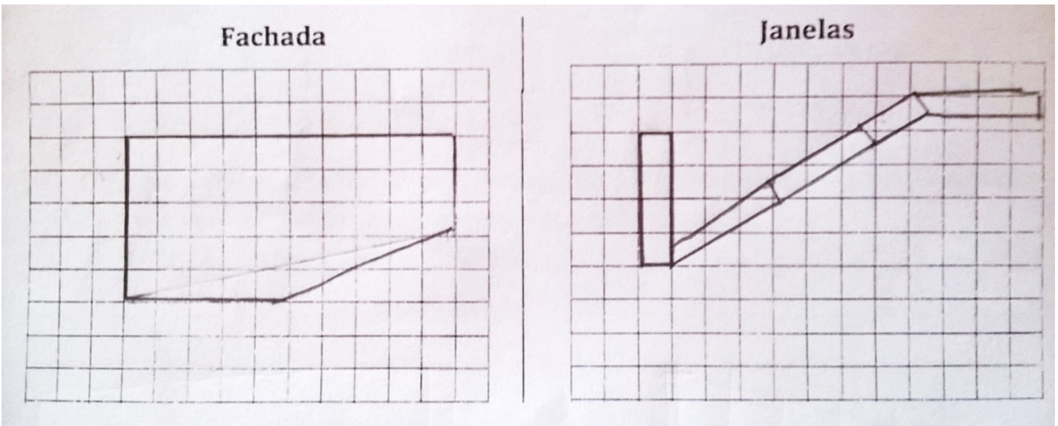


Figura 8. Representação feita pelo aluno A da fachada e das janelas da traseira do CCCCB.

Na figura 9 apresenta-se outro exemplo, mas, neste caso, embora o aluno reconheça a perpendicularidade entre lados, acaba por associar a forma da parede a um trapézio retângulo. Curiosa é a representação que faz das janelas, pois estas são representadas com uma orientação diferente da do colega e do próprio edifício, tal como era visível pelos alunos. Ainda assim, também este aluno denota capacidades de perceção da posição no espaço.

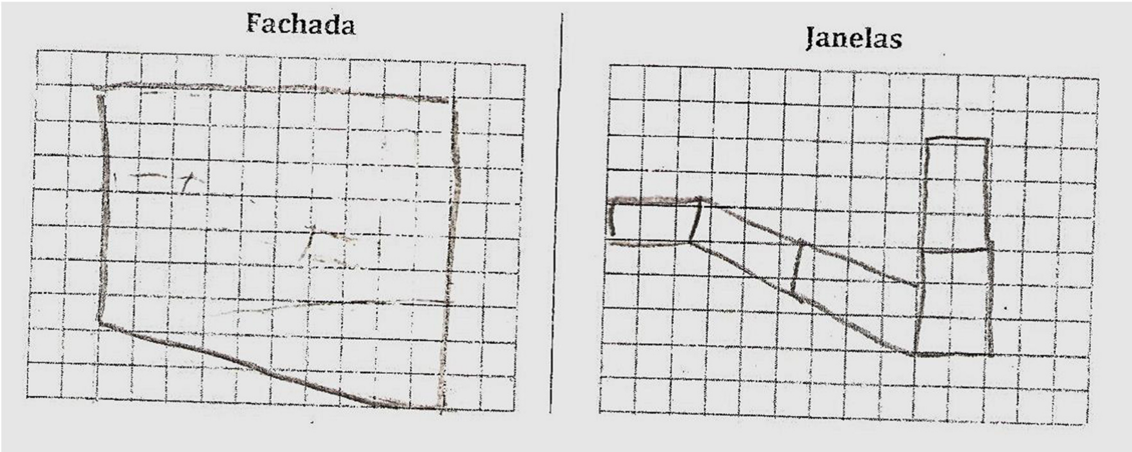


Figura 9. Representação feita pelo aluno B da fachada e das janelas da traseira do CCCCB.

Terminada a representação, era perguntado aos alunos qual a forma geométrica das janelas verticais, sendo que, na generalidade, responderam de forma correta, referindo o retângulo. Por fim, deviam assinalar a forma das janelas oblíquas, sendo que a esta questão todos responderam assinalando o paralelogramo. Ou seja, todos foram capazes de reconhecer a figura geométrica num contexto e numa posição pouco habitual (capacidade de constância percetual).

De um modo geral, consideramos que esta atividade, conjugada com as desenvolvidas noutras estações, proporcionou aos alunos o desenvolvimento de capacidades de perceção figura-fundo, constância percetual e perceção da posição no espaço, e a consolidação de conceitos e propriedades geométricas trabalhadas em sala de aula. Os alunos conseguiram identificar figuras geométricas no património da cidade e as evidências recolhidas permitem afirmar que esta situação desencadeou interesse e motivação, tornando-os, assim, mais curiosos para a construção de novos conhecimentos. No decorrer das atividades, observou-se ainda a autonomia dos alunos, nomeadamente na exploração e descoberta do espaço.

Pós visita - Jogo de cartas com o Tangram

De novo em sala de aula, continuamos a exploração de figuras geométricas propondo, entre outras tarefas, um jogo com o Tangram, composto por doze cartas, com três graus de dificuldade: baixo (construção de figuras com duas peças ou tans); médio (construção de figuras com três tans) e alto (construção de figuras usando quatro tans). Por exemplo, nas cartas com grau de dificuldade baixo pretendia-se que os alunos construíssem as seguintes figuras: quadrado, triângulo, trapézio e paralelogramo. De seguida, deviam responder a algumas questões sobre a respetiva figura. Cada carta, apresentada na forma desdobrável, tinha presente uma figura, as regras, bem como a solução e algumas questões relacionadas com a figura (Figura10).

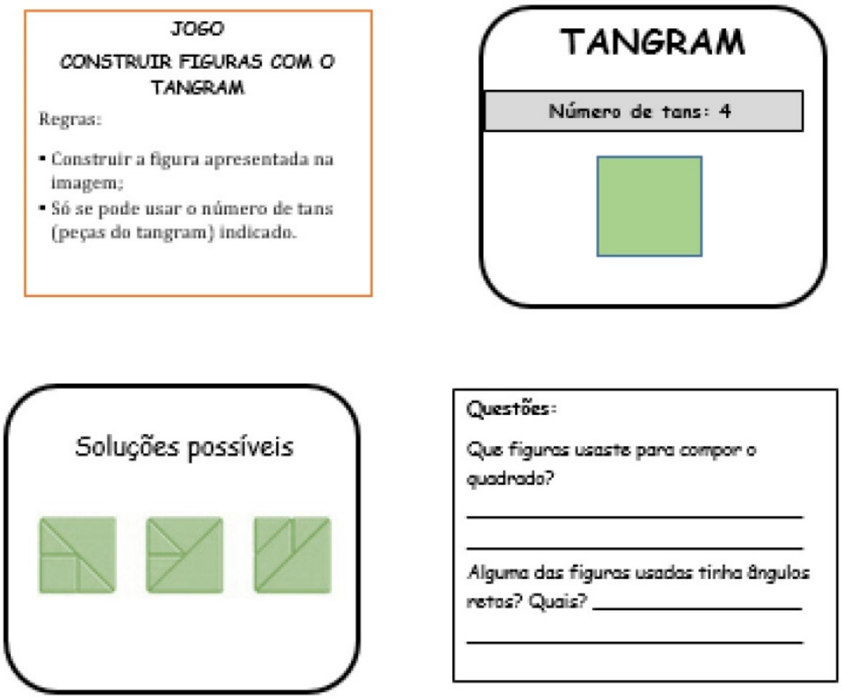


Figura 10. Exemplo de carta do jogo (frente e verso).

Cada grupo era composto por dois elementos, sendo que cada aluno recebeu um total de seis cartas, duas de cada nível. O jogo iniciou-se com as cartas de menor nível de dificuldade, indo progressivamente aumentando a exigência. Para a construção de cada figura os alunos dispunham de aproximadamente dois minutos, sendo que só depois, podiam abrir o cartão e dar resposta às questões. Apesar de terem sido formados grupos de dois elementos, cada aluno dava resposta ao seu cartão de forma individual. Terminado o tempo, o aluno em causa podia ou não receber a ajuda do parceiro para a construção da figura, sendo, posteriormente, o preenchimento do cartão feito individualmente (Figura 11)

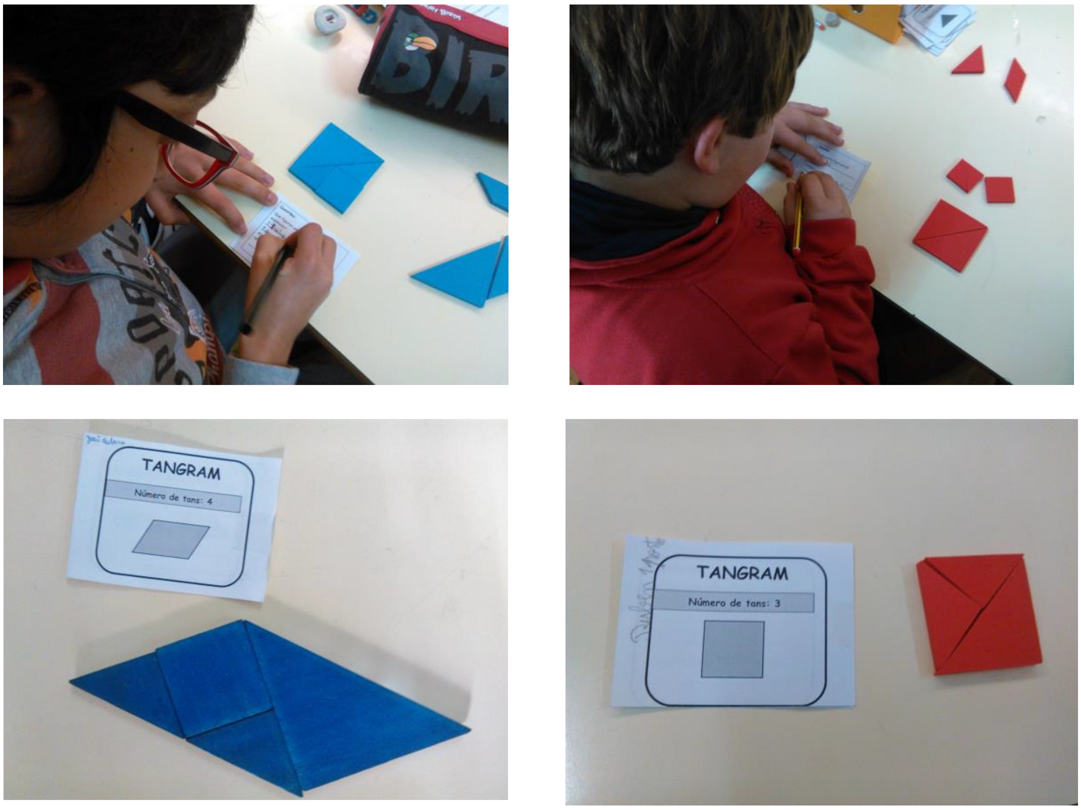


Figura 11. Alunos a dar resposta ao jogo com o Tangram

Com esta atividade lúdica pretendíamos avaliar os conhecimentos dos alunos relativamente às figuras geométricas e, igualmente, as suas capacidades espaciais. Foi possível constatar que os alunos permaneceram sempre muito entusiasmados, procurando responder ao desafio e respeitando as regras do jogo. De registar que mesmo os alunos com maiores dificuldades de aprendizagem evidenciaram o seu entusiamo e empenho em dar resposta ao solicitado.

Relativamente às questões incluídas nas cartas, foi visível que a maioria, desde que tivesse construído a figura solicitada no cartão, conseguia dar resposta. Verificou-se que alguns dos alunos que não tinham conseguido construir a figura pedida, usaram a solução apresentada na carta para responder às questões. Constatou-se, porém, que as maiores lacunas ocorreram nos cartões cujo grau de dificuldade era mais elevado, nomeadamente, naqueles em que era necessário recorrer ao uso de quatro tans. Na figura 12 apresentamos uma avaliação dos resultados obtidos pelos alunos no jogo, tendo assim uma melhor perceção das dificuldades e das aprendizagens dos alunos.

Grau de dificuldade	Figura solicitada	Construção da figura	Resposta às questões
2 Tans	Quadrado	Conseguiram – 10 Conseguiram com ajuda - 1 Não conseguiram – 0	Conseguiram – 11 Conseguiram parcialmente - 0 Não conseguiram – 0
	Triângulo	Conseguiram – 10 Conseguiram com ajuda - 1 Não conseguiram – 0	Conseguiram – 5 Conseguiram parcialmente - 6 Não conseguiram – 0
	Trapézio	Conseguiram – 8 Conseguiram com ajuda - 3 Não conseguiram – 0	Conseguiram – 8 Conseguiram parcialmente - 2 Não conseguiram – 1
	Paralelogramo	Conseguiram – 8 Conseguiram com ajuda - 2 Não conseguiram – 1	Conseguiram – 8 Conseguiram parcialmente - 2 Não conseguiram – 1
3 Tans	Quadrado	Conseguiram – 7 Conseguiram com ajuda - 2 Não conseguiram – 2	Conseguiram – 10 Conseguiram parcialmente - 1 Não conseguiram – 0
	Triângulo	Conseguiram – 4 Conseguiram com ajuda - 4 Não conseguiram – 3	Conseguiram – 3 Conseguiram parcialmente - 5 Não conseguiram – 3
	Retângulo	Conseguiram – 11 Conseguiram com ajuda - 0 Não conseguiram – 0	Conseguiram – 10 Conseguiram parcialmente - 1 Não conseguiram – 0
	Trapézio	Conseguiram – 9 Conseguiram com ajuda - 2 Não conseguiram – 0	Conseguiram – 8 Conseguiram parcialmente - 3 Não conseguiram – 0
4 Tans	Quadrado	Conseguiram – 5 Conseguiram com ajuda - 0 Não conseguiram – 6	Conseguiram – 4 Conseguiram parcialmente - 2 Não conseguiram – 5
	Triângulo	Conseguiram – 2 Conseguiram com ajuda - 3 Não conseguiram – 6	Conseguiram – 5 Conseguiram parcialmente - 4 Não conseguiram – 2
	Retângulo	Conseguiram – 5 Conseguiram com ajuda - 5 Não conseguiram – 1	Conseguiram – 9 Conseguiram parcialmente - 0 Não conseguiram – 2
	Paralelogramo	Conseguiram – 7 Conseguiram com ajuda - 1 Não conseguiram – 3	Conseguiram – 7 Conseguiram parcialmente - 2 Não conseguiram – 2

Figura 12. Resultados dos alunos obtidos no jogo das cartas com o Tangram.

A análise dos resultados permite salientar que a generalidade dos alunos evidenciou ter desenvolvido capacidades de perceção figura-fundo, constância percetual e perceção da posição no espaço, e construídos novos conhecimentos, atingindo, portanto, os objetivos propostos.

Perspetiva dos alunos sobre a visita ao CCCCB

Após a visita de estudo, foi aplicado um questionário de opinião aos alunos com seis questões fechadas e as restantes abertas. A análise das respostas revelou que a visita foi muito apreciada pelos alunos. Questionados sobre se a recomendariam a um amigo, dois alunos escreveram:

> - Sim, porque foi muito divertida e também aprendemos muitas coisas novas.
> - Sim, porque lá fora falamos sobre comprimentos, altura e lá dentro também. Eu acho que sim, era muito interessante e misterioso e muito fixe.

Reproduzimos, a título ilustrativo, opiniões sobre a arquitetura do CCCCB:

> - Nunca vi um edifício com janelas com a forma de um paralelogramo.
> - Era muito diferente, enquanto os prédios e as casas eram perfeitinhas e não se vê assim um edifício no meio da rua.
> - A estrutura do edifício é muito diferente dos que se encontravam a redor porque as janelas são diferentes e a fachada também é diferente.

Questionados sobre o que acharam da visita, responderam:

> - Eu adorei a visita, falámos sobre o que estivemos a aprender na sala.
> - A visita de estudo foi muito bem elaborada, e muito divertida, não como as outras, foi muito, mas mesmo muito «aprendedor»;
> - Eu achei a visita de estudo muito divertida, ficamos a saber um bocado do nosso passado e sobretudo aprendemos.

Em suma, a turma manifestou ter construído novos conhecimentos, sempre motivada, e destacou a sua articulação com as aprendizagens em contexto de sala de aula.

Perspetiva da professora cooperante

Tal como já referido realizou-se uma entrevista semiestruturada à professora cooperante. Quando questionada sobre as atividades realizadas pelos alunos considerou-as *pertinentes, pois a sua diversidade conseguiu prender a atenção dos alunos (…) sempre direcionadas para o mesmo objetivo, sem estes se aperceberem diretamente*. No que diz respeito à condução das atividades dos alunos manifestou a opinião que *foram todas bem exploradas de acordo com o pretendido*. Considerou as atividades desenvolvidas no CCCCB relevantes, justificando:

> Primeiro porque só pelo facto de realizarem uma atividade fora da sala de aula já é bom. Segundo, tiveram também oportunidade de conhecer o interior e exterior do Centro Cultural, bem como a sua função. E terceiro, porque fizeram uma ótima ligação entre os conhecimentos adquiridos na sala de aula e a realidade envolvente.

Relativamente ao momento pós-visita, quando questionada acerca da importância das atividades desenvolvidas, salientou a importância da articulação entre os vários momentos: *se as atividades de preparação de uma visita são importantes, mais o são as que se realizam após a mesma, pois só assim se pode aferir os conhecimentos*.

De todas as atividades implementadas, destacou o jogo com o Tangram como uma das mais relevantes, sendo também aquela que, na sua opinião, mais despertou o interesse dos alunos.

Conclusões

A concretização deste estudo permitiu-nos evidenciar que os contextos não-formais são um elemento importantíssimo a ter em conta para a promoção de aprendizagens curriculares, complementando e enriquecendo o trabalho realizado em sala de aula. A ligação estabelecida entre os dois contextos de aprendizagem proporcionou um processo de ensino coerente aos alunos, tornando as suas aprendizagens consistentes, ativas e socializadoras.

Respondendo à questão de investigação, sustentamos que as atividades desenvolvidas na interação entre contextos formais e não formais contribuíram para a aprendizagem das figuras geométricas e para o desenvolvimento de capacidades espaciais dos alunos participantes no estudo. Verificou-se que em contexto não-formal os alunos conseguiram identificar figuras geométricas no património construído, ou seja, neste caso, evidenciaram a capacidade de percecionar figuras inseridas em fundos complexos. Para além disso, foram capazes de reconhecer características como a forma geométrica de diferentes elementos arquitetónicos (paredes, janelas) e o tipo de ângulos presentes nesses elementos. As mesmas capacidades de visualização espacial foram notórias em sala de aula, no jogo de cartas com o Tangram. É ainda de destacar a motivação e o gosto que os alunos revelaram durante a concretização de atividades que decorreram no CCCCB como após a visita em contexto de sala de aula. Este aspeto foi também comprovado pela professora cooperante, que salientou a importância dos espaços não-formais para a promoção da motivação e empenho dos alunos nas diversas atividades, nomeadamente na área da Matemática.

Em súmula, ainda que os resultados não possam ser generalizados, concluímos que a visita de estudo não só possibilitou aos alunos construir novas aprendizagens, mas também fomentar o gosto e interesse pela área da Matemática.

Referências Bibliográficas

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Breda, A., Serrazina, L., Meneses, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011). *Geometria e Medida no Ensino Básico.* Lisboa: ME-DGIDC.

Coutinho, C., Sousa, A., Dias, A., Bessa, F., Ferreira, M. J., & Vieira, S. (2009). Investigação-acção: Metodologia preferencial nas práticas educativas. *Revista Psicologia, Educação e Cultura, 13(2)* , 355-379.

Domínguez-Sales, C., & Guisasola, J. (2010). Diseño de visitas guiadas para manipular y pensar sobre la ciencia del mundo clásico grecolatino. El taller “logos et physis” de sagunto. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 7(2)*, 473-491.

Gohn, M. (2006). Educação não- formal, participação da sociedade civil e estruturas colegiadas nas escolas. *Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação, 14(50)*, 27-38.

Gordo, M. F. (1993). *A visualização espacial e a aprendizagem da Matemática.* (Dissertação de mestrado). Lisboa: APM.

Guisasola, J., Azcona, R., Etxaniz, M., Mujika, E., & Morentin, M. (2005). Diseño de estrategias centradas en el aprendizaje para las visitas escolares a los museos de ciencias. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 2(1)*, 19-32.

Latorre, A. (2003). *La investigación-acción : conocer y cambiar la práctica educativa.* Barcelona: Gráo.

Matos, J. F., & Gordo, M. F. (1993). Visualização espacial: Algumas actividades. *Educação e Matemática, 26*, 13-17.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e metas curriculares de Matemática para o Ensino Básico.* Lisboa: MEC.

Morentin, M. P., & Guisasola, J. A. (2014). La visita a un museo de ciencias en la formación inicial del profesorado de Educación Primaria. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias 11(3)*, 364-380.

Nacional Council of Teachers of Mathematics. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

Osborne, J., & Dillon , J. (2007). Research on learning in informal contexts: Advancing the field? *International Journal of Science Education, 29(12)*, 1441-1445.

Paixão, F., & Jorge, F. R. (2015). Desenvolver o conhecimento para ensinar matemática na interação entre contextos formais e não formais. Em A. Canavarro, L. Santos, C. Nunes, & H. Jacinto (Eds.), *Atas do XXVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 92-106). Lisboa: APM - Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do ensino básico.* Lisboa: ME-DGIC.

Rodrigues, A. A. (2011). *A educação em ciências no ensino básico em ambientes integrados de formação.* Tese de doutoramento, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.

UNESCO (2006). *Non formal education. Chapter 12, Guidebook for planning education in emergencies and reconstruction.* Paris: UNESCO. Acedido em março, 18, em https://ciaoprofdotcom.files.wordpress.com/2012/06/un-school-non-formal-copia.pdf .

van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children mathematics, 6*, 310-316.

A comunicação matemática com recurso ao Facebook: A experiência na gincana escolar Matemátic@XXI

Marli Duffles D. Moreira[1], *Rosa Antónia Tomás Ferreira*[2]
[1]Universidade do Porto, *marliddmoreira@gmail.com*
[2]Universidade do Porto & CMUP, *rferreir@fc.up.pt*

Resumo. *Esta comunicação pretende contribuir para uma reflexão sobre as potencialidades do Facebook na promoção da enculturação matemática e no favorecimento de uma relação mais positiva dos alunos com a disciplina tendo por base o Matemátic@XXI. O Matemátic@XXI é uma intervenção pedagógica que ocorreu sob a forma de uma gincana escolar, uma competição de natureza inclusiva, dirigida aos alunos do 3.º ciclo do ensino básico duma escola pública situada no norte de Portugal. A gincana Matemátic@XXI decorreu entre janeiro e junho de 2015, num contexto fora da sala de aula, e contou com a participação de 155 alunos organizados em 14 equipas de 11 atletas. Seis professoras de matemática da escola acompanharam estas equipas. A gincana foi organizada em quatro torneios no formato digital (WebQuests) e um torneio final presencial sem recurso à internet. A recolha de dados para esta comunicação centra-se no questionário final de avaliação respondido pelos alunos (online) e nos registos das comunicações postadas nos grupos fechados do Facebook formados entre as equipas e a investigadora (primeira autora). Os resultados obtidos assinalam o papel do Facebook na potencialização e ampliação do espaço pedagógico no processo de enculturação matemática dos alunos participantes na gincana. O recurso ao Facebook possibilitou a experimentação pelos participantes de uma relação mais positiva com a matemática além da integração das tecnologias digitais na atividade matemática dos alunos.*

Palavras-chave: *facebook; comunicação digital; enculturação matemática; competição inclusiva*.

Abstract. *This communication aims to contribute to the reflection about Facebook's potential in the promotion of mathematics enculturation. The research herein presented is based on the pedagogical intervention Math@XXI. This intervention occurred in the form of a school competition of inclusive nature, and was addressed to students of the 3rd cycle of basic education of a public school located in northern Portugal. Math@XXI took place between January and June 2015 with the participation of 155 students organized in teams of 11 athletes. Six school math teachers supported these teams. The competition was organized in five tournaments, four in digital format (WebQuests) and a final on-site tournament without using the internet. Data collection for this communication focuses on the records posted in closed groups on Facebook formed between the 14 teams and the researcher (first author), who was the only common element to these groups. Results support the role of Facebook in enhancing and expanding the educational space with-in a process of mathematics enculturation of the*

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 249–273

participating students. The use of Facebook enabled a positive attitude towards mathematics, as well as the integration of digital technologies in student's mathematical activities.

Keywords: *facebook; digital communication; mathematical enculturation; inclusive competition.*

Introdução

Apresentamos nesta comunicação alguns resultados parciais de um projeto de investigação mais amplo que está ainda a decorrer no âmbito dos estudos de doutoramento da investigadora e primeira autora. Este projeto desenvolve-se a partir de uma intervenção pedagógica denominada Matemátic@XXI, que consiste numa gincana escolar de natureza inclusiva e de caráter interdisciplinar, fundamentada numa epistemologia centrada na construção histórico-cultural do conhecimento matemático.

As competições de natureza inclusiva são dirigidas a todos os alunos, independentemente do seu maior ou menor desempenho escolar. Este tipo de competições tem recebido uma atenção crescente por parte da comunidade educacional e do público em geral (Kenderov, Rejali, Bussi et al., 2009; Stockton, 2012). Embora os alunos lidem com desafios matemáticos, estes são vistos por eles como sendo acessíveis e relacionados com o seu dia-a-dia, favorecendo o seu envolvimento na procura de uma resolução. Tipicamente disponibilizadas em contexto para além da sala de aula, as competições inclusivas proporcionam a criação de um ambiente educacional desafiador que estimula a participação e torna o processo de aprendizagem motivador, interessante e agradável (Freiman & Vézina, 2006).

Freiman e Appelbaum (2011) destacam os aspetos de natureza afetiva que as competições matemáticas (inclusivas) favorecem, em particular, o gosto, a auto-eficácia e o interesse pela matemática. A estes aspetos, Kenderov et al. (2009) acrescentam o desenvolvimento de capacidades de ordem superior como a resolução de problemas. A interação social experimentada durante as competições promove um contexto de relações culturais que favorece o desenvolvimento individual de cada aluno. Estudos internacionais têm demonstrado que as atividades fora do âmbito de sala de aula contribuem positivamente para a promoção de uma atitude positiva dos alunos em relação à escola e à matemática (Morris, 1987; Barbeau & Taylor, 2009; Simpkins, Davis-Kean & Eccles, 2006; Jones & Simons, 2000).

A gincana Matemátic@XXI desenvolveu-se numa escola pública do norte de Portugal, em contexto fora da sala de aula, com alunos do 3.º ciclo do ensino básico. Realizou-se em cinco torneios, quatro no formato digital (*WebQuests*) e um presencial sem recurso à *web*. Os 155 participantes organizaram-se livremente em 14 equipas de 11 atletas cada (exceto uma que teve 12 elementos), contando com o apoio de seis professoras de matemática da escola. No total foram 13 turmas da escola envolvidas na gincana, sendo oito do 7.º ano e cinco do 8.º ano. As equipas foram nomeadas pelos seus próprios integrantes. A opção pelo trabalho em equipa baseou-se na ideia de que este promove a colaboração e favorece a aprendizagem de todos os participantes, incluindo aqueles que têm mais dificuldade, contribuindo deste modo para o sucesso de todos (Barbeau & Taylor, 2009; Simpkins, Davis-Kean & Eccles, 2006).

No desenho do Matemátic@XXI, o *Facebook* foi pensado para ser utilizado para facilitar a comunicação entre os elementos de cada equipa e entre estes e a investigadora, através dos 14 grupos fechados formados por cada uma das 14 equipas e a investigadora – a investigadora foi o único elemento comum entre estes grupos do *Facebook*. O *Facebook* foi também pensado para ser um veículo de publicação das *WebQuests* com as tarefas a serem realizadas. Durante os torneios digitais, os alunos puderam pedir ajuda aos professores e à investigadora sempre que julgaram necessário. A investigadora esteve presente na escola pelo menos uma vez por semana ao longo da gincana para dar apoio e orientação ao desenrolar da competição.

A gincana decorreu ao longo de cinco meses com início a 12 de janeiro de 2015 com a publicação da primeira *WebQuest* nos grupos fechados do *Facebook*. As *WebQuests* foram iguais para todas as equipas e versaram sobre os temas: Triângulo, Número 7, Infinito e Moda. A figura 1 mostra como estes temas foram explorados no *design* das *WebQuests*. Como produto final de cada torneio digital, cada equipa devia apresentar uma revista, em formato digital ou impresso, editada por si, com as resoluções das tarefas propostas nas *WebQuests*.

Torneio	Conexões	Tarefas/Temas
1º torneio (digital) (*1ª WebQuest*)**Tema: TRIANGULO** publicada em 12/01/2015	História	1. Apresentar Pitágoras, as suas ideias e realizações.
	Matemática	2. Teorema de Pitágoras
	Geografia	3. Circuncentro do triângulo imaginário formado por três pontos extremos de Portugal
	Vida quotidiana	4. Area total de um telhado
2º torneio (digital) (*2ª WebQuest*) **Tema: NUMERO 7** publicada em 13/02/2015	História	1. Apresentar Tales de Mileto, as suas ideias e realizações.
	Matemática	2. Números primos
	Física	3. Arco-Iris
	Vida quotidiana	4. Distâncias em mapas
3º torneio (digital) (*3ª WebQuest*) **Tema: INFINITO** publicada em 13/03/2015	História	1. Apresentar Georg Cantor, as suas ideias e realizações.
	Matemática	2. Número de Ouro e os números irracionais
	Ciências	3. A água
	Vida quotidiana	4. Cálculo de uma medicação tomada em doses 'infinitas'
4º torneio (digital) (*4ª WebQuest*) **Tema: MODA** publicada em 20/04/2015	História	1. Apresentar Blaise Pascal e Pierre de Fermat
	Matemática	2. Média, Moda e Mediana
	Estatística	3. Tratamento de dados
	Vida quotidiana	4. Análise de resultados de um campeonato de Futebol
5º torneio (presencial) **final, sem recurso à *internet*** realizado em 29/05/2015)	Tarefa A	1. Sobre um tema da História da Matemática
	Tarefa B	2. Sobre um problema da vida quotidiana
	Tarefa extra	3. Palavras Cruzadas sobre os temas trabalhados nos torneios anteriores

Figura 1. Organização dos cinco torneios da gincana Matemátic@XXI.

As equipas foram classificadas pelos pontos conquistados na realização das tarefas dos cinco torneios. A pontuação máxima da gincana somava 240 pontos, sendo 120 relativos aos quatro primeiros torneios digitais e 120 para o quinto e último torneio. Este quinto torneio, presencial, contou com a participação de 12 equipas (duas não compareceram) e foi realizado na escola, sem recurso à *web*. Todos os alunos realizaram as tarefas simultaneamente, organizados nas suas respetivas equipas, mas não podiam solicitar ajuda às professoras (Figura 2). Do ponto de vista competitivo, visto que a pontuação da etapa final presencial era igual à do conjunto das etapas digitais, as equipas podiam alterar completamente o placar de classificação parcial já divulgado. As tarefas deste último torneio versaram sobre os temas trabalhados previamente nos quatro torneios digitais (*WebQuests*).

Figura 2. Último torneio do Matemátic@XXI.

A 8 de junho de 2015, ocorreu o evento final da gincana Matemátic@XXI com a entrega das medalhas aos alunos das doze equipas finalistas (Figura 3) e a atribuição de prémios às duas equipas que mais pontuaram: *Os Mercenários* e *The Wolves*. Este evento contou ainda com uma apresentação do Circo Matemático[1].

Figura 3. Evento final do Matemátic@XXI.

Nesta comunicação, procuramos descrever o papel que o *Facebook* desempenhou no desenrolar da gincana Matemátic@XXI e refletir sobre o potencial desta rede social para o desenvolvimento da enculturação matemática dos alunos e de uma relação mais positiva com a matemática.

Enculturação matemática e Atividade

A conceção de *Enculturação Matemática* de Bishop (1991) e a *Teoria da Atividade* de Leontiev (1978) são os dois pilares teóricos que suportaram o *design* do

Matemátic@XXI bem como a investigação educacional que foi realizada com base nesta gincana. Bishop e Leontiev sustentam que a aprendizagem é um fenômeno sociocultural e que se dá pela apropriação, por cada indivíduo, dos objetos da cultura humana construída historicamente. Nesta secção, fazemos uma breve apresentação destas duas perspetivas teóricas, procurando mostrar a forma como entendemos a sua interligação no contexto do Matemátic@XXI.

Bishop (1991) sustenta que a educação matemática deve desenvolver-se a partir de um processo de enculturação e que educar os alunos matematicamente é educá-los sobre a matemática, através da matemática e com a matemática. A enculturação matemática é um processo social de envolvimento com a matemática, de apropriação dos objetos da cultura matemática construídos ao longo da história humana. O autor propõe uma mudança na perspetiva da educação matemática atual: passar de um enfoque tecnicista que privilegia o fazer ("*way of doing*") para um enfoque cultural que privilegia o compreender ("*way of knowing*").

O processo de enculturação matemática abrange a linguagem, as técnicas, os valores e as práticas da cultura matemática estabelecida. Não basta que exista transmissão de um conjunto de ideias e significados socialmente construídos para que este processo se desenrole; "cada nova geração reconstroi os significados da velha [geração], pelo que a 'cultura' não é uma coleção rígida de objetos (…). Está constantemente em mudança, e é continuamente alterada pela nova geração, durante o processo de enculturação" (Bishop, 1991, pp. 152-153, tradução nossa).

Este processo é interpessoal e ocorre, essencialmente, na interação professor-alunos e aluno-aluno. Quando interagem em pequenos grupos, os alunos compartilham significados e discordâncias, apropriando-se dos objetos matemáticos a que dão um significado próprio. Além disso, "a tarefa é do grupo e eles têm de encontrar formas de colaboração" (Bishop, 1991, p. 155, tradução nossa).

Segundo Leontiev (1978), a atividade humana, essencialmente social, promove uma relação dialética entre a realidade exterior e a estrutura da consciência, sendo a comunicação de vital importância no processo de apropriação dos bens da cultura humana. O mundo exterior objetivo materializa e acumula a experiência sócio-histórica da Humanidade. A apropriação deste mundo objetivo dá-se pela atividade que faz a mediação entre o sujeito e o objeto.

O processo de apropriação dos objetos da cultura humana é, assim, resultado de uma atividade efetiva do indivíduo sobre esses objetos. Neste processo de aquisição, o indivíduo, a partir de um processo de comunicação, faz destes objetos parte da sua individualidade criando “no homem aptidões novas” (Leontiev, 1978, p. 288).

Leontiev afirma que toda atividade humana é mediada por instrumentos materiais e/ou simbólicos. Na figura 4, recorremos ao modelo que tipicamente ilustra a teoria de Leontiev para mostrar a sua aplicação ao Matemátic@XXI. A gincana é vista como uma ferramenta cognitiva, isto é, uma tecnologia (em sentido amplo) que viabiliza (medeia) uma aprendizagem significativa e ativa dos alunos que constroem conhecimento, comunicam, colaboram e refletem.

Figura 4. Modelo da Teoria da Atividade aplicado ao Matemátic@XXI.

As equipas (sujeitos) do Matemátic@XXI, por sua atividade, tiveram acesso à cultura matemática (objetos) – favorecendo o desenvolvimento de um processo de enculturação matemática. A mediação social deu-se entre os alunos que resolveram colaborativamente as tarefas em equipas, com a ajuda da investigadora e das professoras participantes. O *Facebook* e as *WebQuests* cumpriram o papel de ferramentas físicas e simbólicas de mediação.

Comunicação e Facebook

A educação é um processo essencialmente comunicativo. A comunicação e a vida em sociedade viabilizam-se através da linguagem, o instrumento mais complexo de mediação do homem com o mundo, e que o caracteriza como um ser social, histórico e cultural (Vigotski, 2008). Vigotski assinala ainda a relação fundamental entre o pensamento e a linguagem: “O pensamento não é simplesmente expresso em palavras; é por meio delas que ele passa a existir” (pp. 156-157).

Na sociedade atual, altamente marcada pelas tecnologias digitais, faz-se necessária a construção de uma nova cultura escolar que incorpore estes meios de comunicação e informação. Estes novos objetos culturais modificam a nossa maneira de viver em sociedade, pelo que a sua integração no processo educativo é inevitável e inadiável.

> Equacionar hoje o futuro da escola e da aprendizagem é algo que não pode ser feito sem se considerar a influência das tecnologias digitais, nomeadamente das tecnologias digitais em rede, como parte de um fenómeno muito mais amplo diretamente relacionado com o impacto dessas mesmas tecnologias na sociedade em geral: uma sociedade fortemente marcada pela mudança e uma escola que continua a mostrar grandes dificuldades em se ajustar às exigências que o Século XXI coloca aos cidadãos em geral e aos jovens em particular. (Costa, 2011, pp. 136-137)

As tecnologias digitais abrem novas oportunidades e desafios para o ensino e a aprendizagem da matemática, numa nova dinâmica social (Maasz & Schloeglmann, 2006). As *WebQuests* possibilitam a integração de recursos digitais no ensino, abrindo portas a novas formas de trabalho em sala de aula ou fora dela. Além disto, auxiliam os alunos a desenvolver um vasto conjunto de competências e as capacidades de pesquisa, de comunicação, de colaboração e de participação social (Oliveira & Antunes, 2014):

> Ensinar é um processo complexo e, no contexto do uso da internet como recurso, exige mudanças na postura do professor, em sua forma de pensar, preparar as aulas e atuar em sala, levando-o a buscar metodologias e recursos que melhor se apliquem ao conteúdo a ser ensinado. Diante deste contexto, a metodologia WebQuest pode ser uma alternativa, pois além de aliar as novas tecnologias ao desenvolvimento da aprendizagem, não exige altas habilidades computacionais do professor, e sim sabedoria para inventar modos de usar os atrativos da Web para que os alunos construam conhecimentos consistentes, robustos e significativos. (p.843)

O *Facebook*, como uma rede de comunicação de ampla utilização pelos jovens no seu dia-a-dia, pode desempenhar um papel fundamental como ferramenta pedagógica e como meio de comunicação no cenário escolar, favorecendo a construção de redes de interações digitais e a atividade colaborativa (Allegretti, Hessel, Hardagh & Silva, 2012). Amplia o potencial comunicativo e de interação entre os sujeitos, pela rutura das barreiras físico-temporais e pela possibilidade comunicativa em múltiplos formatos (palavra escrita, figuras, objetos digitais).

Allegretti et al. (2012) inserem a utilização do *Facebook* nas escolas numa perspetiva de cibercultura - a cultura do século XXI - favorecendo uma aprendizagem interativa e colaborativa:

> ... o uso educacional do Facebook justifica-se, também, pela coerência com as tendências educacionais na cibercultura: a noção do conhecimento como uma construção individual e coletiva, a aprendizagem participativa, a

> autoria e coautoria, o compartilhamento, a integração das tecnologias digitais no currículo, a comunicação e aprendizagem interativas e a possibilidade de transgressão do currículo escolar tradicional. (pp.54-55)

Metodologia de investigação

O Matemátic@XXI tem um caráter intervencionista e um perfil pragmático. O objetivo do *design* desta gincana foi o de desenvolver um produto educacional (artefato mediador) dentro do sistema complexo de ensino-aprendizagem da matemática que promovesse a mediação entre os alunos e a cultura matemática, conjugando cognição e afetividade e recorrendo às tecnologias digitais. O desenho metodológico da investigação que se desenvolveu em torno do Matemátic@XXI foi o de *design research* (DR ou *design experiment*). "*Design experiments* têm ambos uma tendência pragmática – 'engendrar' formas particulares de aprender – e uma orientação teórica – desenvolver teorias específicas através do estudo sistemático dessas formas de aprender e dos processos que as sustentam" (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003, p.9, tradução nossa, itálicos adicionados).

A metodologia *design research* (DR) é adequada para desenhar soluções e artefatos (aspeto pragmático) que levem em consideração as múltiplas variáveis práticas e disciplinares intrincadas no processo de ensino-aprendizagem, como é o caso do Matemátic@XXI. É uma metodologia importante para a compreensão do como, quando e porquê inovações educacionais funcionam na prática (DBRC, 2003). Segundo Wang e Hannafin (2005), o DR é uma metodologia orientada para promover mudanças na prática educacional pelo que se mostra adequada para investigar o desenvolver do Matemátic@XXI e seu impacto junto dos alunos, nomeadamente no que toca à promoção da sua enculturação matemática e de uma atitude mais positiva face a esta ciência.

A opção metodológica desta investigação - *design research* - comporta procedimentos mistos de tratamento de dados, métodos qualitativos e quantitativos. De acordo com Brown (1992), a abordagem mista permite uma melhor descrição do fenómeno investigado. Neste trabalho, foram analisados os *posts* nos diferentes grupos fechados do *Facebook* das equipas participantes da gincana e as respostas dos alunos ao inquérito final de avaliação (*online*). Utilizámos os procedimentos de análise de conteúdo e tratamento estatístico dos dados.

Alguns resultados preliminares

A gincana Matemátic@XXI contou com uma participação entusiasmada dos alunos durante toda a sua realização. Destaque-se a presença de 105 alunos no torneio presencial final que se realizou fora do horário de aula, numa sexta-feira à tarde. Isto representa 79% de adesão em relação ao total de alunos finalistas na gincana.

As doze equipas que completaram a gincana apresentaram um desempenho muito bom, sendo que dez equipas alcançaram um percentual de sucesso nas tarefas superior a 60% e cinco equipas, um percentual superior a 90% (Figura 5). A avaliação do trabalho das equipas foi feita a partir dos seguintes critérios: a correção das respostas, a clareza e a correção dos textos escritos, a pontualidade na entrega dos trabalhos, a cooperação entre todos os participantes e a criatividade apresentada na resolução das tarefas. Estes critérios e a pontuação de cada tarefa eram do conhecimento dos alunos.

As 14 equipas e os grupos fechados no *Facebook*	Caracterização da equipa	Percentual de participantes ativos no grupo do *Facebook*	Total de pontos conquistados/ Total de pontos da gincana	Classificação final na gincana
1. Os Mercenários	4 alunos e 7 alunas/ 8º ano – Turma 1	100 %	239/240 = 99,6%	1º lugar
2. The Wolves	11 alunas/7º ano -Turmas 4 e 8/ 8º ano-Turma1	55 %	236/240 = 98,3%	2º lugar
3. 11 Mosqueteiros	7 alunos e 4 alunas/ 8º ano – Turma 5	100 %	234/240 = 97,5%	3º lugar
4. Prostudents	6 alunos e 5 alunas/ 8º ano – Turma 2	55 %	229/240 = 95,4%	4º lugar
5. 7 Sete	8 alunos e 3 alunas/ 7º ano - Turma 7	100 %	217/240 = 90,4%	5º lugar
6. Marretas	3 alunos e 8 alunas/ 7º ano – Turmas 5 e 6	91 %	206/240 = 85,8%	6º lugar
7. Genious of Math	4 alunos e 7 alunas/ 7º ano – Turma 3	91 %	161/240 = 67,1%	7º lugar
8. A. C. Vila Meã	11 alunos/ 7º ano - Turmas 4, 5 e 8	100 %	149/240 = 62,1%	8º lugar
9. Os Amarantinos	5 alunos e 6 alunas/ 7º ano – Turmas 2 e 5	55 %	147/240 = 61,3%	9º lugar
10. Team Lopes	9 alunos e 2 alunas/ 8º ano – Turma 8	82 %	145/240 = 60,4%	10º lugar
11. Kings	11 alunos e 1 aluna/ 7º ano – Turma 1	83 %	140/240 = 58,3%	11º lugar
12. Craques da Matemática	5 alunos e 6 alunas/ 7º ano - Turma 3	91 %	118/240 = 49,2%	12º lugar
13. Matematix	5 alunos e 6 alunas/ 8º ano – Turma 1	100 %	desistentes	---
14. Os Matraquilhos	9 alunos e 2 alunas/8º ano - Turma 4	9 %	desistentes	---

Figura 5. Participação no *Facebook* e desempenho na gincana.

Ao longo da gincana, foram diversos os momentos em que a comunicação digital se evidenciou, sob várias formas e com diferentes objetivos. A figura 6 apresenta um exemplo de um momento de partilha entre a investigadora e os participantes. Os atletas “visualizaram” e “gostaram” do *post*.

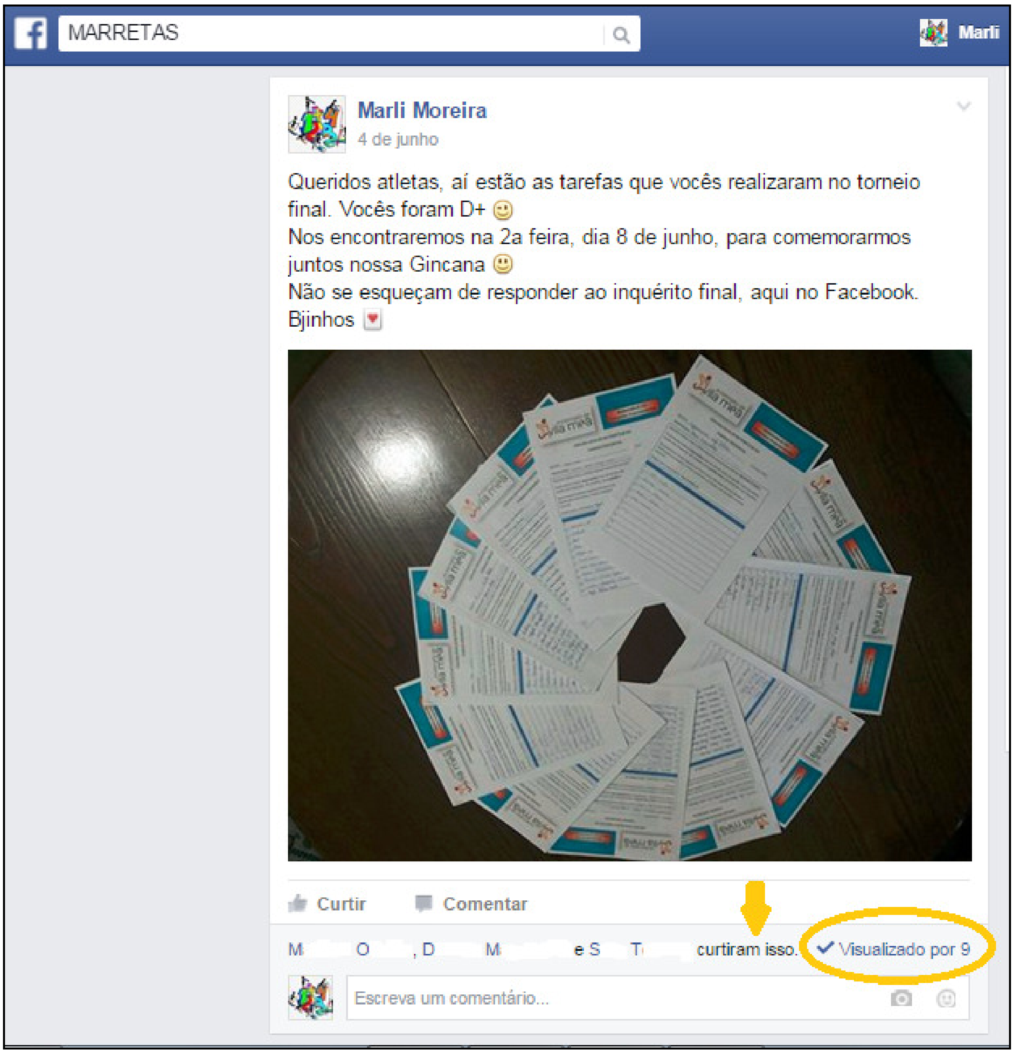


Figura 6. Exemplo de partilha dentro dum grupo fechado.

Foram ainda muitos os registos de diálogos e intervenções dos alunos, entre si e com a investigadora, em horários que extrapolaram o tempo e o espaço usuais da escola.

Procedemos a uma análise de conteúdo por categorização (Bardin, 2013) das diversas situações de comunicação com recurso ao *Facebook* experimentadas no decorrer da gincana. Neste processo, as postagens das diferentes equipas foram desmembradas em unidades e, posteriormente, reagrupadas por analogia em categorias. Desta forma, identificámos cinco categorias que emergiram nas situações postadas nos grupos fechados das equipas com a investigadora: (i) apropriação de objetos matemáticos; (ii) expressão de emoções; (iii) publicação de tarefas; (iv) registo semanal; e (v) divulgação da cultura matemática. A título de exemplificação, apresentamos a seguir situações selecionadas dentre os murais dos grupos fechados das diferentes equipas referentes a cada uma das categorias apresentadas.

(i) Apropriação dos objetos matemáticos

Esta categoria reúne as unidades de comunicação em que os alunos exibem a sua apropriação dos objetos matemáticos, fazendo deles os seus instrumentos cognitivos. Na figura 7, apresentamos a produção de duas equipas (revistas com a resolução das tarefas propostas nas *WebQuests*).

Figura 7. Revistas editadas por duas equipas.

No excerto dos murais do *Facebook* apresentado na figura 8, os alunos mostram como se apropriaram dos conceitos estudados. A equipa *The Wolves* publica a resolução de duas tarefas, ilustrando a apropriação de dois objetos matemáticos pelos elementos da equipa. A equipa *Prostudents* publica "a nossa obra de arte com triângulos". Nos dois casos, a utilização do pronome possessivo "nosso" reforça a ideia de apropriação.

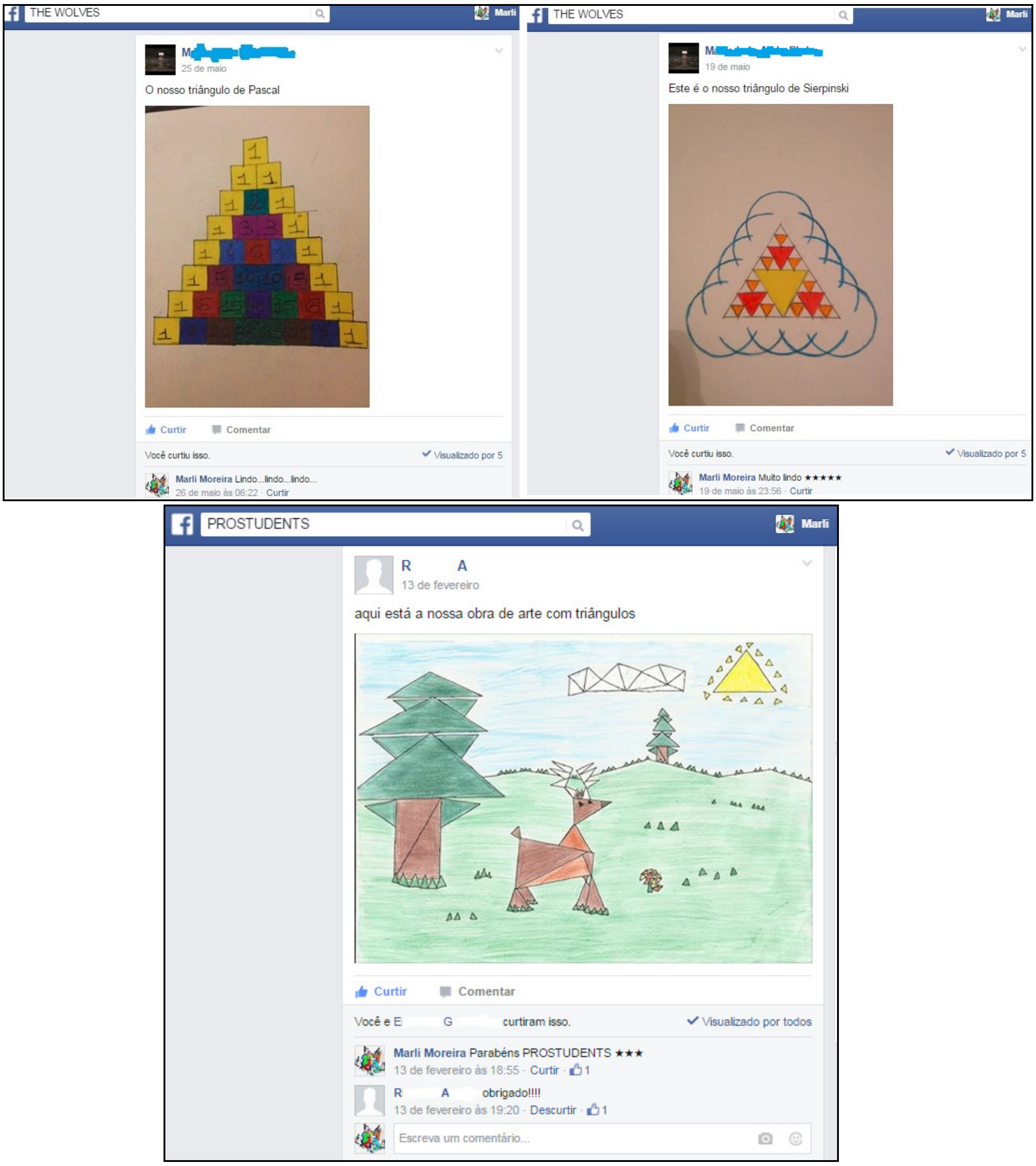


Figura 8. Uso do *Facebook* para exibição da apropriação dos objetos matemáticos.

(ii) Expressão de emoções

Esta categoria reúne as unidades de comunicação em que os alunos expressam as suas emoções, vivenciadas em diferentes situações da gincana. As emoções são manifestadas de forma livre e espontânea. Na figura 9, apresentamos um excerto dos murais do *Facebook* de três equipas, em que os alunos expressam estados emocionais distintos. Os *Marretas* manifestam os seus sentimentos de alegria e de autoconfiança pelo desempenho da equipa na gincana. Os *Kings* desculpam-se por não se terem podido encontrar com a investigadora num determinado momento e expressam o seu descontentamento por isso. Dois alunos da equipa *7Sete* dizem estar "se sentindo festivo" graças a Pitágoras e "se sentindo inspirada" por conta do infinito.

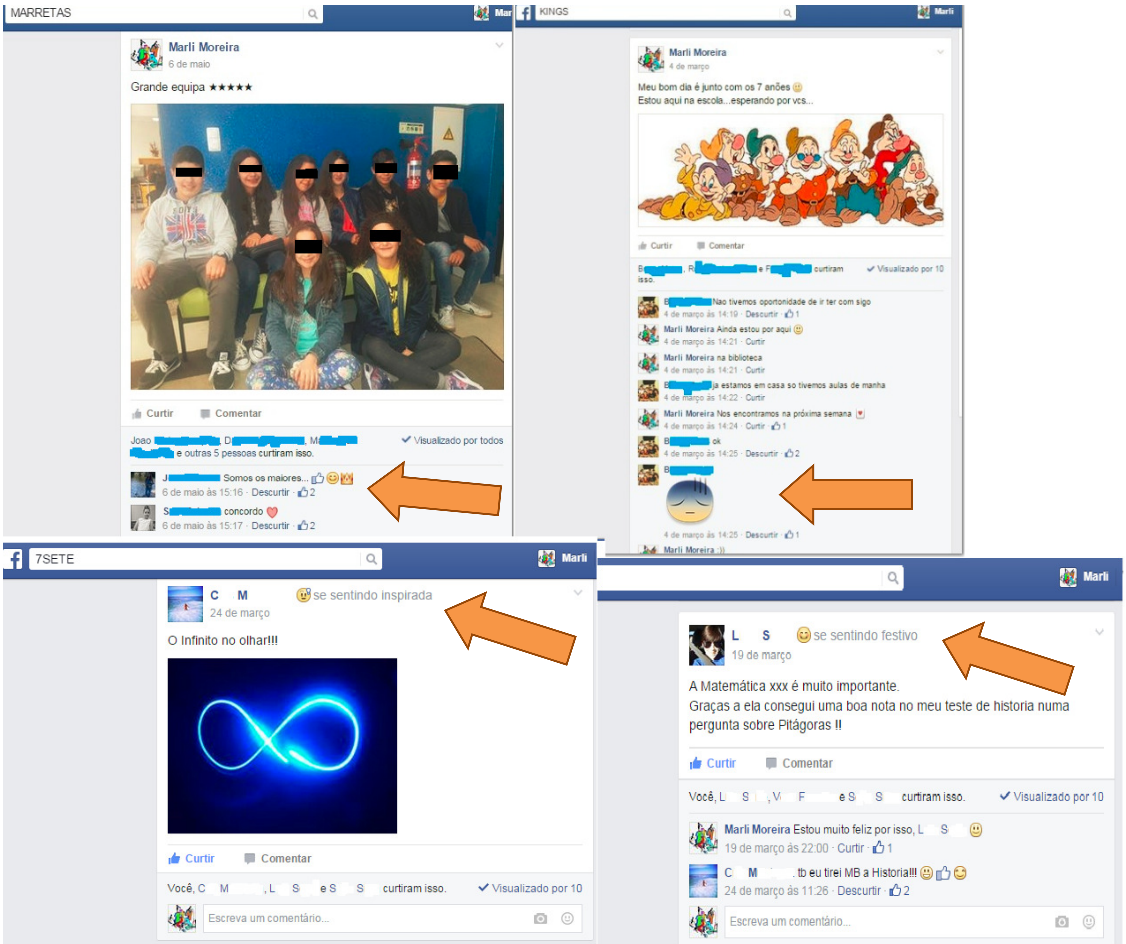


Figura 9. Uso do *Facebook* para expressão de emoções.

Na figura 10, apresentamos um registo das emoções manifestadas pelos atletas da equipa *7Sete* num momento de encontro com a investigadora na escola. Os alunos expressaram as suas emoções de modo gestual (na foto) e através de símbolos disponibilizados pelo *Facebook*.

Figura 10. Símbolos e gestos usados na expressão de emoções no *Facebook*.

(iii) *Publicação de tarefas*

Esta categoria reúne as unidades de comunicação relativas ao uso do *Facebook* para a publicação das *WebQuests* nos 14 grupos fechados das equipas. A figura 11 inclui um excerto do mural da equipa *A. C. Vila Meã* onde se mostra a publicação do Evento “2.º Torneio” com o *link* para a segunda *WebQuest*.

Figura 11. Uso do *Facebook* para publicação da 2ª *WebQuest*.

(iv) Registo semanal

Esta categoria reúne as unidades de comunicação referentes aos registos das vivências dos participantes durante a gincana: saudações, recados, informações, fotos dos encontros e das realizações dos alunos. A figura 12 ilustra um momento de saudação e informação da investigadora para os atletas da equipa *Marretas*. Todos os alunos da equipa "visualizaram" o *post* e alguns mostraram tê-lo apreciado (fazendo um *like*).

Figura 12. Uso do *Facebook* para saudação.

A figura 13 apresenta o registo do momento de entrega do trabalho da equipa *Genious of Math* e de uma sessão de trabalho da equipa *Matematix* que, apesar de ter desistido formalmente de participar na gincana, continuou ativa na interação através do *Facebook* e nos encontros com a investigadora na escola.

Figura 13. Uso do *Facebook* para marcação de encontros.

O *Facebook* serviu também para esclarecer dúvidas sobre o funcionamento da gincana, bem como para publicar os resultados da competição, como se ilustra na figura 14. Estes pedidos de esclarecimento dos alunos ocorriam, frequentemente, “fora de horas” e as suas reações à publicação dos resultados finais da gincana também "entraram pela noite dentro" – o que sustenta um envolvimento significativo dos alunos na gincana.

Figura 14. Uso do *Facebook* para informações.

(v) Divulgação da cultura matemática

Esta categoria reúne as unidades de comunicação referentes às publicações de objetos, processos e personagens da cultura matemática com vista à enculturação matemática, ampliando o universo matemático disponibilizado aos alunos. Na figura 15, apresentamos duas situações distintas relativas a esta ampliação: a conversa dos alunos sobre Pitágoras e a apresentação de um vídeo do *YouTube* com o objeto matemático Fractal de Mandelbrot. Todas as publicações com vista à divulgação da matemática foram comuns a todas as equipas, partilhando com elas diferentes recursos educacionais disponíveis na *web*, para além daqueles que faziam parte das *WebQuests*.

Figura 15. Uso do *Facebook* para divulgação dos objetos matemáticos.

O *Facebook* admite a integração de diferentes recursos nas comunicações desenvolvidas nos seus murais tais como vídeos, fotos, músicas, etc. Tais recursos, como até já vimos, são úteis na divulgação da ciência. Na figura 16 apresentamos um exemplo de como o *Facebook* foi usado para despertar a atenção dos alunos para a presença da matemática ao seu redor.

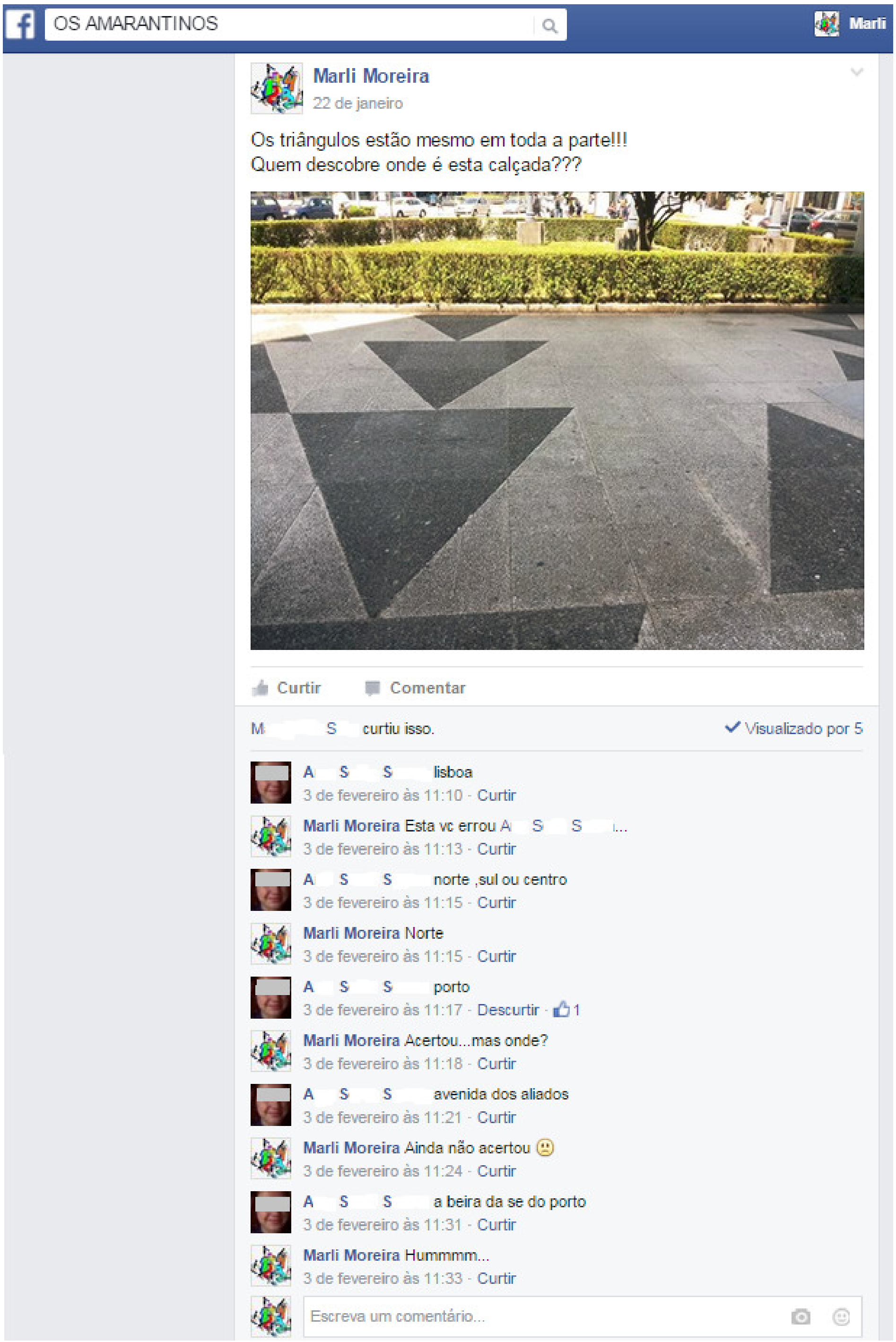


Figura 16. Uso do *Facebook* para sensibilização.

A opinião dos alunos: revelações na avaliação final

Os alunos das doze equipas finalistas da gincana foram convidados a responder a um inquérito *online* de avaliação final sobre a experiência de cada um nesta competição. Um total de 49% dos alunos atendeu à solicitação. Duas perguntas referiam-se ao uso do *Facebook* e das *WebQuests* e uma outra à contribuição da gincana para a aprendizagem matemática.

Um total de 98,5% dos alunos respondeu que apreciou, total ou parcialmente, ter podido "comunicar com meus colegas e com a professora/investigadora através do *Facebook*" e "aprender e realizar tarefas através do ambiente digital da Gincana Escolar Matemátic@XXI". Além disto, 75% responderam positivamente à questão sobre o contributo da participação na gincana para a sua aprendizagem, sendo que 23% dos alunos ainda manifestaram concordar parcialmente com essa contribuição. 96,9% dos alunos que responderam ao inquérito afirmaram que gostariam que a gincana Matemátic@XXI continuasse a acontecer na sua escola.

O questionário continha também uma pergunta aberta que solicitava aos alunos que dissessem o que mais tinham gostado na gincana. Uma análise de conteúdo com uma abordagem quantitativa das respostas foi feita com a utilização do *software NVivo* considerando a palavra como unidade de análise. As duas palavras que apareceram nas respostas dos alunos com maior frequência foram "tudo" e "gostei" o que demonstra uma ampla satisfação dos alunos quanto à gincana (Figura 17).

Mais de 60% dos alunos responderam que o que mais lhes agradara tinha sido a oportunidade de "trabalhar em equipa", "de fazer as tarefas em conjunto", "de formar uma equipa com os meus amigos" e também "de aprender mais sobre a matemática" e "conhecer coisas novas". Muitos alunos referiram gostar "de podermos trabalhar em grupo e descobrirmos coisas sobre a matemática que se não fosse a Gincana Escolar não saberia que elas estavam ligadas à matemática" e "poder conviver mais com os colegas e levarmos a matemática de uma forma mais gira". O ter tido a oportunidade de se envolver com a cultura matemática foi também bastante apreciado pelos alunos. Gostar "de descobrir o infinito" ou de "pesquisar a vida de tales" ou ainda de "resolver problemas" foram algumas das razões invocadas pelos alunos e que se relacionam com objetos matemáticos.

Figura 17. Nuvem de palavras relativa à pergunta sobre o que mais gostaram os alunos na gincana.

Algumas considerações

O processo de ensino-aprendizagem desenvolve-se pela comunicação. Os dados recolhidos sugerem que o *Facebook* desempenhou um papel fundamental como meio de comunicação na gincana escolar Matemátic@XXI. As atividades dos alunos foram todas desenvolvidas com recurso ao *Facebook*, que proporcionou uma ampliação das potencialidades da sala de aula tradicional, como ilustrado nos exemplos apresentados.

Os alunos que frequentam nos dias de hoje o ensino básico são adolescentes nascidos em pleno século XXI para os quais a tecnologia é transparente. Isso quer dizer que estes jovens convivem com o telemóvel, o computador, a internet, a TV por cabo e com os jogos eletrónicos desde que nasceram; estão acostumados à ação e à interatividade. Assim sendo, fazer uso da rede social *Facebook* que eles, na sua maioria, já utilizam nas suas comunicações pessoais diárias, favoreceu a inclusão da matemática como tema das suas conversas *online*, aproximando a cultura matemática das suas vidas e motivando os alunos para participar nas atividades propostas. Além disso, permitiu alargar as fronteiras físico-temporais da escola. Deste modo, o *Facebook*, no contexto do Matemátic@XXI, contribuiu para desenvolver uma atitude positiva face à matemática, vendo-a relacionada com o seu quotidiano e sentindo-a como ciência humana em evolução constante.

O *Facebook* serviu vários propósitos no âmbito do Matemátic@XXI. Enquanto a publicação de tarefas foi um uso do *Facebook* pensado à priori, a maioria das utilizações desta rede social emergiu no decorrer da gincana. Os alunos recorreram ao *Facebook* para partilhar a sua apropriação de objetos matemáticos vários, serviram-se do *Facebook* para exprimir emoções, usaram o *Facebook* como um veículo de comunicação e registo de aspetos vários ligados com a logística do trabalho deles na gincana, e encontraram no *Facebook* um meio de divulgação da cultura matemática. Embora esta última utilização do *Facebook* não tenha surgido por iniciativa dos alunos mas sim da investigadora, ela tornou-se importante no desenrolar da gincana.

Analisando a atividade dos alunos no contexto do Matemátic@XXI, à luz da teoria de Leontiev (1978), o *Facebook*, associado às *WebQuests*, desempenhou um papel de instrumento de mediação entre os alunos (sujeitos) e a cultura matemática (objeto). A atividade dos alunos, baseada nas *WebQuests* e apoiada pelo *Facebook*, permitiu que se apropriassem de vários objetos da cultura matemática. Além disso, os verbos de ação empregados pelos utilizadores do *Facebook* – publicar, compartilhar, visualizar, gostar – são um indicativo da cultura de comunicação e partilha incentivada por esta rede social que, neste contexto, funcionou como um ambiente digital de aprendizagem.

Desta forma, o *Facebook* proporcionou um ambiente amigável e colaborativo para a enculturação matemática dos alunos através do desenvolvimento de uma experiência (a gincana), pessoal e coletiva, com a matemática, seus objetos, processos e personagens (Bishop, 1991). Permitiu também apresentar aos alunos, nos respetivos murais das equipas, recursos digitais disponíveis na *web* tais como vídeos do *YouTube*, páginas educacionais, imagens motivacionais que propiciaram experiências diversificadas para uma aprendizagem matemática significativa.

Durante o desenrolar do projeto Matemátic@XXI, a comunicação, com recurso ao *Facebook*, entre a investigadora e as equipas e entre os alunos de cada equipa, sustentou um ambiente pedagógico interativo, colaborativo e afetuoso. Este espaço de comunicação favoreceu o processo de interação social e a motivação para o trabalho na gincana, condições fundamentais para a enculturação matemática dos alunos. A comunicação no seio dos grupos fechados propiciou ainda a expressão espontânea de emoções e a formação de um sentimento e sentido de equipa que apoiou a construção da identidade do grupo e favoreceu o trabalho colaborativo.

A experiência no Matemátic@XXI ressaltou vários benefícios que o *Facebook* pode trazer ao contexto escolar, particularmente na educação matemática. No entanto, continuar a investigar-se o uso desta rede social no ensino mostra-se necessário. Igualmente importante é a necessidade de sensibilizar os professores para a integração deste tipo de tecnologia digital na sua prática letiva.

Notas

[1] Associação portuguesa que tem como objetivo: "Maravilhar, divertir e atrair para a matemática mediante a realização de atividades lúdicas variadas". < http://ludicum.org/cm/

Agradecimentos

Este projeto conta com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes/Brasil) na forma de bolsa de doutorado pleno concedida à investigadora para o período de setembro de 2013 a agosto de 2016.

Referências bibliográficas

Allegretti, S., Hessel, A., Hardagh, C., & Silva, J. (2012). Aprendizagem nas redes sociais virtuais: O potencial da conectividade em dois cenários. *Revista Cet, 1*(2). Disponível em http://revistacontemporaneidadeeducacaoetecnologia02.wordpress.com/24-2/

Barbeau, E. & Taylor, P. (Eds.). (2009). *Challenging mathematics in and beyond the classroom. The 16th ICMI Study.* Springer: New York, NY.

Bardin, L. (2013). *Análise de Conteúdo*. Lisboa. Edições 70, 4ª edição.

Bishop, A. J. (1991). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. The Netherlands. Kluwer Academic Publishers.

Brown, A. L. (1992). Design Experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the Learning Sciences, 2*(2), 141-178. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13.

Costa, F. (2011). *Digital e Currículo no início do Século XXI.* In P. Dias & A. Osório (Eds). *Aprendizagem (in)formal na Web social*, (pp. 119-142). Centro de Competência, Universidade do Minho.

Design-Based Research Collective – DBRC. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5-8.

Freiman, V. & Applebaum, M. (2011). Online mathematical competition: Using virtual marathon to challenge promising students and to develop their persistence. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 11*(1), 55-66.

Freiman, V., & Véniza, N. (2006). *Challenging virtual mathematical environments: The case of the CAMI Project*. Pre-conference paper of the Study Conference for ICMI Study 16 – Challenging mathematics in and beyond the classroom.
Disponível em http://www.amt.edu.au/icmis16pcanfreiman.pdf

Jones, K. & Simons, H. (2000). The student experience of online mathematics enrichment. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 103-110). Hiroshima, Japão: PME.

Kenderov, P., Rejali, A., Bussi, M. G., Pandelieva, V., Richter, K., Maschietto, M., Kadijevich, D., & Taylor, P. (2009). Challenges beyond the Classroom – Sources and organizational issues. In E. J. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom: The 16th ICMI Study* (pp. 53-96). New York, NY: Springer.

Leontiev, A. N. (1978). *O desenvolvimento do psiquismo.* São Paulo. Editora Moraes.

Maasz, J. & Schloeglmann, W. (Eds.). (2006). *New mathematics education research and practice*. The Netherlands: Sense Publishers.

Miranda, G. L., Monteiro, M. E., & Brás, P. (Org.) (2014). *Aprendizagem Online: Atas Digitais o III Congresso Internacional das TIC na Educação, ticEDUCA*. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa: Portugal. Disponível em http://ticeduca2014.ie.ul.pt.

Morris, R. (Ed.). (1987). *Studies in mathematics education – Out-of-school mathematics education.* Paris: Unesco.

Oliveira, F. T., & Antunes, F. C. A. (2014). WebQuest: Uma alternativa metodológica para aulas em laboratório de informática. In G. L.Miranda, M. E. Monteiro & P. Brás (Orgs.). *Atas Digitais do III Congresso Internacional das TIC na Educação, ticEDUCA, 14 a 16 de novembro de 2014* (pp. 840-844). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa: Portugal. Disponível em http://ticeduca2014.ie.ul.pt.

Simpkins, S. D., Davis-Kean, P. E., & Eccles, J. S. (2006). Math and science motivation: A longitudinal examination of the links between choices and beliefs. *Developmental Psychology, 42*(1), 70-83.

Stockton, J. C. (2012). Mathematical Competitions in Hungary: Promoting a tradition of excellence & creativity. *The Mathematics Enthusiast, 9*(1-2), 37-58.

Vigotski, L. S. (2008). *Pensamento e linguagem*. São Paulo. Martins Fontes, 4ª edição.

Wang, F., & Hannafin, M. J. (2005). Design-based research and technology-enhanced learning environments. *Educational Technology Research & Development*, *53*(4), 5-23.

Ensino e aprendizagem da álgebra

O raciocínio dedutivo de alunos do 10.º ano de escolaridade

Elsa Coelho[1], *Helena Rocha*[2]
[1]Escola Secundária de Santo André, *elsacoelho2@gmail.com*
[2]Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa, *hcr@fct.unl.pt*

Resumo. *O raciocínio dedutivo, sendo central na disciplina de matemática, é também usualmente fonte de dificuldades para os alunos, mais habituados a trabalhar com abordagens empíricas. Neste estudo focamo-nos na demonstração matemática e procuramos dar atenção à forma como este tipo de raciocínio é perspetivado pelos alunos, às opções que assumem quando lhes é solicitado um raciocínio dedutivo e aos fatores que interferem com a realização deste tipo de raciocínio. O estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa, incluindo a realização de dois estudos de caso de alunos do 10.º ano. Os dados foram recolhidos em sessões de trabalho extra aula e através de entrevistas. As principais conclusões alcançadas apontam para uma desvalorização da demonstração matemática e para uma forte preferência por abordagens de caráter empírico. Ainda assim, os alunos mostram capacidade para ponderar estratégias de abordagem. O gosto pelo tema matemático subjacente às tarefas e a atenção que dão aos momentos em que é realizado trabalho dedutivo em sala de aula, parecem ser fatores a ter em conta ao ponderar a capacidade dos alunos para desenvolver um raciocínio dedutivo no âmbito de uma demonstração matemática.*

Palavras-chave: *raciocínio dedutivo; demonstração; matemática*.

Abstract. *Deductive reasoning, being central in mathematics, is also usually a source of difficulties for students, more used to the empirical approaches. In this study we focus on mathematical proof and we try to give attention to how this kind of reasoning is envisaged by the students, to the options they assume when asked to develop a deductive reasoning and to the factors affecting the implementation of this kind of reasoning. The study follows a qualitative and interpretative methodological approach, including the completion of two case studies of students of the 10th grade. Data were collected in work sessions and through interviews. The main findings point to a devaluation of mathematical proof and a strong preference for empirical approaches. Yet students show ability to develop different approaches. The preference for the mathematical subject and the attention given in class to the deduction work, appears to be relevant factors when considering the students' ability to develop a deductive reasoning when involved on a mathematical proof.*

Keywords: *deductive reasoning; proof; mathematics.*

Introdução

O raciocínio dedutivo, sendo central na disciplina de matemática, tem sido o foco de diversas discussões que procuram ponderar o papel que este deve assumir no processo de ensino e aprendizagem da disciplina (Brown, 2014). São diversas as questões levantadas, tanto por professores como por investigadores, entre as quais merecem destaque as que se referem à forma como as demonstrações devem ser introduzidas na sala de aula de matemática, ao ambiente que propicia/facilita essa introdução, e ao rigor que deve ser exigido aos alunos no processo demonstrativo. Não tem, no entanto, sido fácil encontrar respostas consensuais, como refere Mariotti (2006), que enfatiza a necessidade de se realizarem mais estudos nesta área. E é neste contexto que surge o presente estudo.

Com a pretensão de contribuir para um melhor conhecimento relativamente às questões associadas à demonstração matemática no âmbito do ensino da disciplina, procurámos identificar e refletir sobre a forma como os alunos veem a demonstração em matemática, dando nomeadamente atenção à relevância que lhe atribuem, bem como aos aspetos que influenciam neste contexto a realização do raciocínio dedutivo por parte dos alunos, debruçando-nos ainda sobre as estratégias que utilizam. Procurámos também dar atenção aos fatores que poderão contribuir para que os alunos tenham maior facilidade na realização de um raciocínio dedutivo no seio de uma demonstração. E, neste âmbito, demos particular atenção ao eventual impacto do nível de conhecimentos matemáticos dos alunos. Concretamente, este estudo pretende responder às seguintes questões de investigação:

1. Como é perspetivada pelos alunos a demonstração matemática?
2. Quais as opções assumidas pelos alunos quando confrontados com a necessidade de desenvolver um raciocínio dedutivo no âmbito da realização de uma demonstração matemática?
3. Que fatores parecem influenciar a capacidade para desenvolver um raciocínio dedutivo no âmbito da realização de uma demonstração matemática?

Quadro teórico

A comunidade científica tem manifestado preocupação em perceber qual a forma (ou formas) mais adequadas para fazer a introdução e o aprofundamento das demonstrações matemáticas na sala de aula. Ainda assim, e como refere Brown (2014, p. 312) “enquanto poucos discordariam da ideia que a demonstração é importante, as reais implicações desta ser uma ‘parte natural das discussões em sala de aula’ estão longe de ser óbvias”.

O nível de rigor que deve ser exigido no processo demonstrativo em ambiente educativo é outro aspeto em discussão na comunidade científica. De Villiers e Hanna (2012, p. 171) referem que “crescer na capacidade de utilizar a linguagem simbólica da matemática é uma condição indispensável para que o aluno consiga desenvolver e perceber as demonstrações”. Já Boavida (2001, pp.14-15) defende que o formato da demonstração tem de ser adaptado ao nível de ensino do aluno, enfatizando que

> mais importante que a demonstração é a atividade de a produzir, é a sensibilidade ao seu interesse e necessidade, é a comunicação clara e correta das ideias matemáticas que estão em jogo (…) o que é fundamental é que ela constitua, para o aluno, não um objeto matemático a estudar, mas um instrumento que ele pode usar para fazer matemática.

Outro aspeto relevante refere-se à exigência do processo demonstrativo se aplicar sempre à generalidade dos casos ou, em alternativa, e em função do nível dos alunos, se admitir que a validação de uma conjetura possa ser efetuada apenas para alguns casos. Com efeito, a dificuldade dos alunos em lidar com a generalidade dos casos é bem conhecida dos professores, como refere De Villiers (2001). Ainda assim, essa não é razão para que o estudo de alguns casos possa ser aceite como uma demonstração. Afinal, como afirma Boavida (2001, p. 13), “não é por, experimentalmente, se verificar que uma propriedade é válida para um certo número de casos que se pode afirmar que ela é válida para todos”. E, consequentemente, a autora considera que a apresentação de exemplos, por muitos que sejam, nunca poderá ser entendido como uma demonstração. De Villiers (2001) considera que esta tendência dos alunos para se centrarem em exemplos, é mesmo um dos maiores problemas do ensino da demonstração, que engloba inclusivamente a dificuldade que estes frequentemente têm em perceber a necessidade da demonstração.

O processo de aprendizagem da elaboração das demonstrações em matemática pode, de acordo com Freitas (2011, p. 8):

> ser um treino para os alunos conseguirem alargar a sua capacidade de atenção e a sua tolerância à frustração, o que é uma aprendizagem muito importante, não só para a matemática mas para a sua formação como pessoas (…) O raciocínio dedutivo promove a autonomia pessoal e o espírito crítico. Aquando a conclusão do processo demonstrativo, o aluno percebe automaticamente que o resultado é verdadeiro. Quando um aluno entende que é preciso justificar uma afirmação e se propõe examinar essa

> justificação, desenvolve o espírito crítico. Este tipo de atitude é crucial na formação do cidadão e será talvez um dos maiores contributos que a matemática poderá dar às pessoas independentemente da profissão que venham a ter no futuro.

Talvez a primeira preocupação deva ser qual o processo mental e intelectual que permite ao aluno evoluir de um raciocínio empírico e indutivo para um raciocínio dedutivo e quais as condições propícias em sala de aula, para que tal ocorra. Boavida (2001, p. 14) retrata a situação de uma forma mais simples, atestando que "a demonstração ganha sentido e relevância quando os alunos sentem necessidade de a fazer". Todavia permanece a questão: "Como é que os alunos desenvolvendo a capacidade de explorar situações de forma empírica, ganham confiança e em seguida, mudam o modo de pensar e de trabalhar a partir de uma nova base de crenças, em situações de demonstração?" (Brown, 2014, p. 321). Em algum ponto do percurso deve ocorrer uma transição no processo de raciocínio do aluno, que lhe permite começar a desenvolver a capacidade de dedução. Mas como acontece essa transição? Segundo Brown (2014), o problema é que a multiplicidade e diversidade das caraterísticas que potenciam essa transição é tanta que torna a análise da situação verdadeiramente complexa. E o autor aponta o desenvolvimento de modelos que ilustrem esse momento de transição e que relacionem diferentes práticas de demonstração, como um possível caminho a ser seguido pela investigação. Em qualquer dos casos, e ainda segundo o autor, a condição básica necessária para despoletar o início da transição é o desenvolvimento de um ceticismo relativamente às conclusões estabelecidas de forma empírica. Enquanto os alunos mantiverem a prática de validar resultados a partir de validações empíricas, estarão perante uma barreira que os impede de sentir a necessidade efetiva da demonstração.

O programa em vigor em Portugal aquando da realização deste estudo, encara as demonstrações em matemática de forma transversal, incentivando a sua elaboração recorrendo a linguagem simbólica, mas desincentivando o excesso de formalização: "pretende-se que os estudantes fiquem com a ideia de que as teorias matemáticas são estruturadas dedutivamente" (MEC, 2001, p. 19) e acrescenta que "um conceito matemático pode estar completa e rigorosamente compreendido expresso em língua natural" (MEC, 2001, p. 19).

Na presente investigação assumimos que a realização de demonstrações e o desenvolvimento de raciocínio dedutivo é importante para que o aluno compreenda a real essência da matemática. Assumimos ainda que uma demonstração matemática em contexto de sala de aula tem necessariamente que se caraterizar pela sua aplicação à generalidade dos casos. Entendemos também que o fundamental é o raciocínio desenvolvido pelo aluno, não sendo forçoso que este recorra à simbologia matemática.

Metodologia e tarefas

O presente estudo centra-se na realização de tarefas envolvendo pequenas demonstrações matemáticas por parte de alunos de uma turma do 10.º ano de uma escola da Grande Lisboa, no ano letivo 2014/15. Perante as caraterísticas do estudo, e em linha com as ideias preconizadas por Bogdan e Biklen (1994), é adotada uma metodologia de natureza qualitativa e interpretativa, sendo realizados seis estudos de caso (dos quais apenas dois são apresentados aqui), tendo por objetivo genérico analisar a capacidade dos alunos formularem um raciocínio dedutivo no âmbito da realização de demonstrações matemáticas.

Os critérios de escolha dos alunos foram cuidadosamente estruturados em coordenação com os objetivos e questões da investigação, procurando refletir diferentes níveis de conhecimento dos alunos. Assim, foi fundamentalmente tida em conta a classificação alcançada pelos alunos no final do 1.º período, como reflexo dos seus conhecimentos no âmbito da Geometria, e a classificação alcançada pelos alunos nas avaliações escritas realizadas no 2.º período até à data de início da recolha de dados, como reflexo dos seus conhecimentos no âmbito das Funções.

A recolha de dados relevante para a parte do estudo que aqui se apresenta concretizou-se através de uma sessão de trabalho realizada fora da sala de aula e individualmente a cada um dos alunos participantes. Nesta sessão a investigadora colocou aos alunos duas tarefas, tendo-lhes solicitado que a par da resolução escrita fossem comentando o que faziam. Posteriormente foi realizada a cada aluno uma entrevista semiestruturada. Tanto a sessão de trabalho como a entrevista foram audiogravadas e posteriormente transcritas. Ao longo do ano letivo foram ainda acompanhadas as aulas de matemática, tendo sido recolhidos diversos elementos com a intenção de conhecer as caraterísticas dos alunos.

As sessões de trabalho iniciaram-se com a apresentação das tarefas, que foram realizadas num período não superior a 60 minutos, e com um pedido ao aluno para escolher se pretendia começar por uma tarefa de caráter geométrico ou algébrico.

A tarefa 1, de natureza geométrica, centrava-se na demonstração da igualdade do comprimento das duas diagonais de um retângulo, sugerindo a representação do mesmo num referencial ortonormado e a escolha de um dos vértices na origem, ficando o retângulo no 1.º quadrante.

A tarefa 2, de cariz algébrico, pedia para o aluno demonstrar que a abcissa do vértice da parábola $y = ax^2 + bx,\ a, b \neq 0$ é dada por $\frac{-b}{2a}$, sugerindo que considerasse que a coordenada do vértice de uma parábola pertence ao seu eixo de simetria e que relacionasse o ponto de interseção do eixo de simetria da parábola com o eixo dos *xx*, com os zeros da função.

Apresentação e análise de dados

João

João é um aluno de 15 anos que se distrai constantemente em sala de aula, ainda que não perturbe o bom funcionamento da mesma. Podia obter melhores resultados na disciplina, se dedicasse mais tempo aos estudos e assumisse uma postura atenta em sala de aula, pois revelou diversas vezes, durante o ano letivo, ser capaz de elaborar um raciocínio matemático válido. No final do 1.º período obteve 14 valores à disciplina, classificação que não manteve nas avaliações escritas do 2.º período registando 5 e 8 valores respetivamente na ficha e no 1.º teste de avaliação, facto que justificou com a falta de gosto relativamente às Funções.

Na primeira tarefa, logo após a leitura do enunciado, o aluno delineou uma estratégia de resolução, optando pela aplicação do Teorema de Pitágoras. Contudo, não conseguiu iniciar a resolução devido à inexistência de valores. O aluno percebeu que atribuindo valores ao comprimento e largura da figura geométrica provaria que as diagonais daquele retângulo em particular tinham o mesmo comprimento, mas não demonstraria essa afirmação para qualquer retângulo. Manifestou assim dificuldade no desenvolvimento do raciocínio necessário para a realização da tarefa. Nas suas próprias palavras:

> Posso fazer pelo Teorema de Pitágoras. Mas eu não tenho os valores… posso sugerir valores? Eu sei o que fazer, mas preciso de valores… se eu tiver os valores consigo saber a hipotenusa. Mas como não tenho os valores… se os atribuir só faço para estes valores, não faço para todos! Ou então… é lógico que os lados… o comprimento e a largura são o mesmo (lados opostos são iguais), portanto é lógico que as diagonais também sejam…

João começou assim por pensar numa estratégia baseada no Teorema de Pitágoras, mas optou subitamente por outra estratégia baseada na congruência de triângulos, apesar de não referir especificamente nenhum critério e manifestando alguma confusão no desenvolvimento do raciocínio, provocada pela inexistência de valores.

Seguidamente tentou explicar por palavras o raciocínio que desenvolveu (Figura 1). Ao ser questionado quanto ao conteúdo matemático que sustentava a sua resposta, mencionou o critério de semelhança de triângulos LLL ou LAL, mas ao recorrer a um exemplo optou pela aplicação do Teorema de Pitágoras, tal como tinha referido no início da resolução da tarefa.

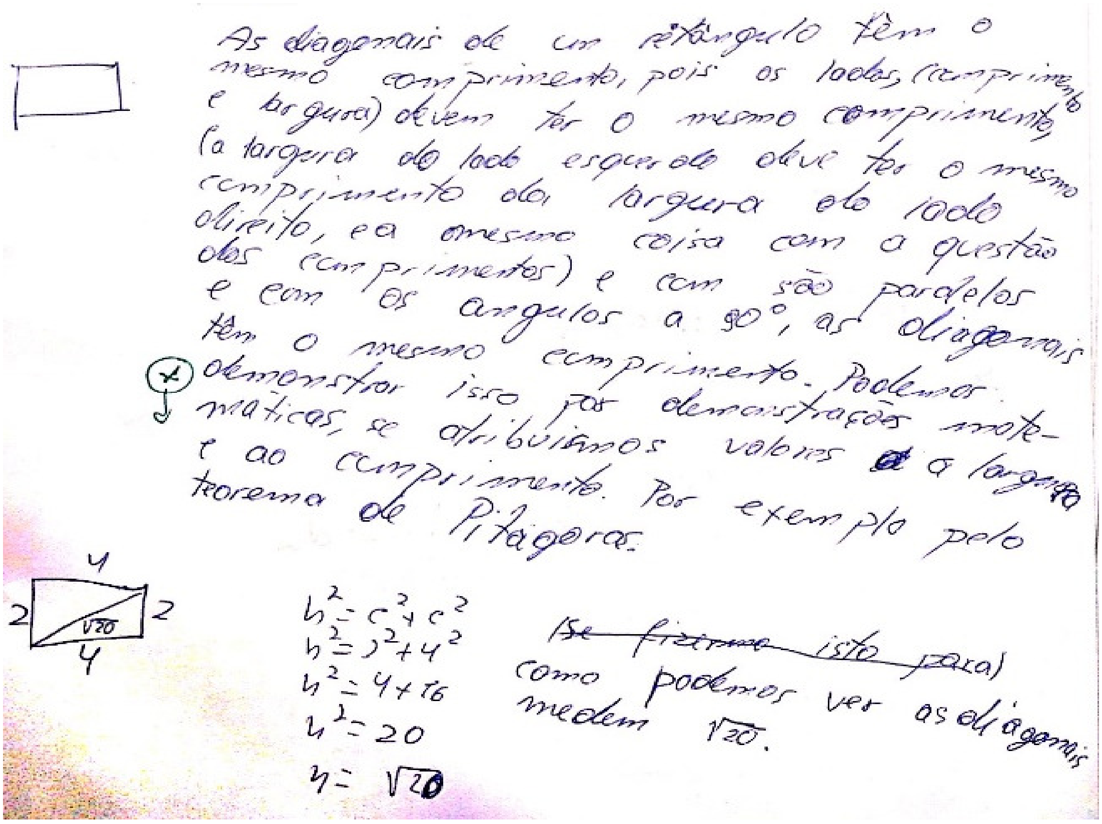


Figura 1. Raciocínio desenvolvido por João na tarefa 1.

Ao ser questionado sobre se já tinha terminado a tarefa, João optou por apresentar outra forma de resolução, utilizando o conceito de distância entre dois pontos (Figura 2), sentindo ainda a necessidade de reforçar que os valores que atribuiu aos segmentos são apenas um exemplo aleatório.

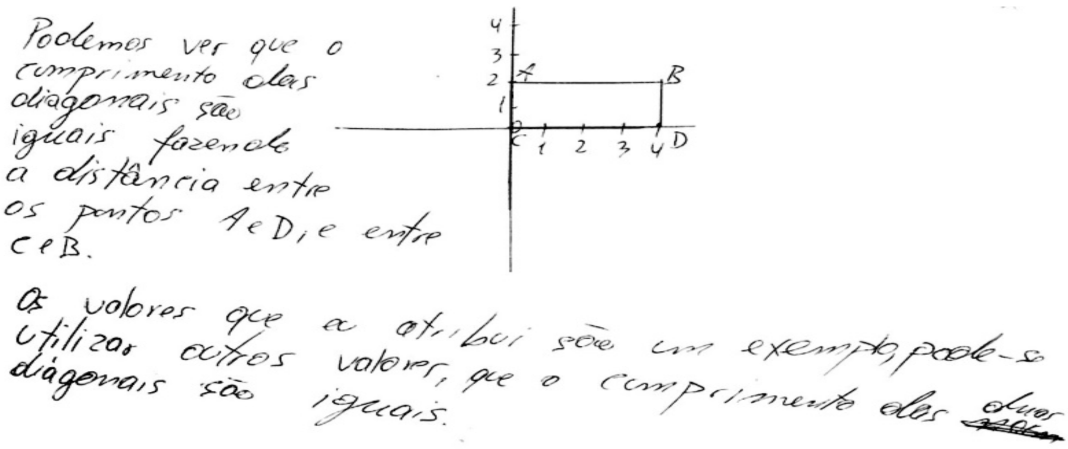


Figura 2. Resolução alternativa de João na tarefa 1.

Apesar dos raciocínios apresentados, João sentia que algo estava em falta e continuou pensativo, acabando por concluir a tarefa procedendo à demonstração solicitada, através do teorema de Pitágoras, como podemos observar na figura 3.

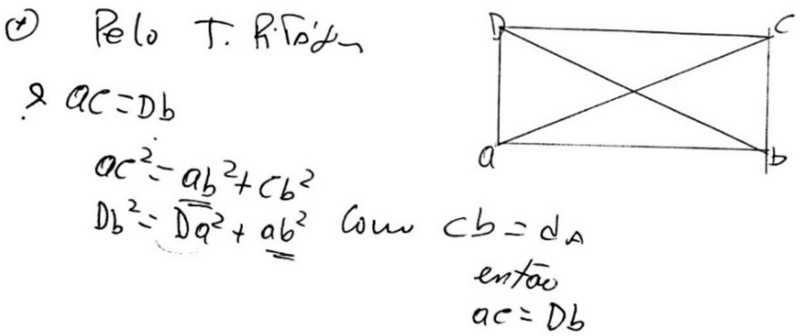


Figura 3. Registo escrito do raciocínio desenvolvido por João na tarefa 1.

Mesmo depois de concluir a tarefa, João continuou a defender que para demonstrar uma afirmação seria suficiente testá-la para uma quantidade de casos concretos, apesar de não conseguir quantificar os casos necessários para tal:

> I – Na tua opinião, caso atribuíssemos diversos valores ao comprimento e à largura do retângulo e chegássemos sempre à conclusão que as diagonais eram iguais, isso seria suficiente para provar que são iguais para qualquer caso?
> A – Deixe-me pensar na sua pergunta… na minha opinião… basta.
> I – Não achas necessário fazer com letras?
> A – Acho que não. Mas se alguém desconfiar posso arranjar outra maneira de explicar!
> I – Quantos casos práticos seria razoável fazer, para ficares convencido?
> A – Tantos quanto forem precisos.

Na segunda tarefa, João continuou a manifestar as mesmas dificuldades sentidas na realização da tarefa anterior, devido à inexistência de valores. Para ultrapassar esta dificuldade, aceitou realizar um exemplo (Figura 4), justificando que, apesar de a sua professora ter explicado como deduzir a fórmula do vértice da parábola, ele apenas a decorara.

Exemplo: $y = x^2+4x$

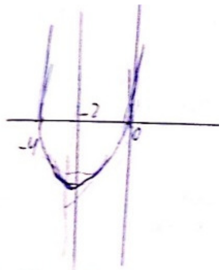
$y=0$

$x^2+4x=0$

$x(x+4)=0$

$x=0 \vee x+4=0$

$x=0 \vee x=-4$



$\frac{0-4}{2} = -2$

Abcissa do vértice

Figura 4. Caso concreto desenvolvido por João na tarefa 2.

O aluno determinou facilmente a abcissa do vértice da função definida por $y = x^2 + 4x$ através da semissoma dos seus zeros. Depois de concluir este caso particular, procedeu à dedução, por analogia, da fórmula da abcissa do vértice da parábola. Não deixou, contudo, de mencionar que "com letras é um pouco estranho". Facilmente concluiu qual a expressão geral dos zeros, mas apresentou muita dificuldade em proceder ao cálculo da semissoma dos zeros da função genérica (Figura 5). Quando questionado sobre as dificuldades que sentia, respondeu que sabia "fazer o cálculo, mas com valores".

$y = ax^2+bx$

$y=0$

$ax^2+bx=0$

$a\times x\times x+b\times x=0$

$x(ax+b)=0$

$x=0 \vee ax+b=0$

$x=0 \vee ax=-b$

$x=0 \vee x=\frac{-b}{a}$

$\frac{0-\frac{b}{a}}{2}$

$\frac{-b}{a}\times\frac{1}{2}$

$\frac{-b}{2a}$

Figura 5. Registo escrito do raciocínio desenvolvido por João na tarefa 2.

Salientamos que o aluno hesitou na altura de pôr a variável em evidência, necessitando de um passo intermédio ($axx + bx = 0$), como podemos observar na figura 5, que não utilizou com $y = x^2 + 4x$.

Após a realização da tarefa, João admitiu que para ele não é motivante conhecer o processo de dedução das fórmulas que utiliza nos exercícios e que, apesar do reduzido grau de dificuldade das tarefas, trabalhar "com letras" é difícil:

I – Preferiste começar a tarefa com um exemplo prático. Foi mais fácil?
A – Com um exemplo prático, é sempre mais fácil. Nunca tive o interesse de pensar como se chega a essa fórmula.
I – Porque nunca tiveste esse interesse?
A – Porque não me motiva.
I – Achaste esta tarefa difícil?
A – Não. O meu problema é que não gosto de funções. E com números é mais fácil. Não estou habituado com letras. Eu vejo letras e pergunto: então como é isso?
I – Bloqueias?
A – Não é bem bloquear. Se eu pensar eu consigo. Mas fico a pensar…

Ainda assim, ao terminar a tarefa, o aluno proferiu espontaneamente: "Ah! Agora já conseguia fazer logo com letras".

Ao começar a trabalhar na tarefa 1, João mostrou-se inseguro referindo "já estou a pensar que estou a fazer mal…". Durante essa tarefa optou por desenvolver diversas formas de resolução, manifestando não ver a necessidade de trabalhar com um caso genérico, e considerando que verificar num número "suficiente" de casos seria o bastante para demonstrar a afirmação.

Segundo o aluno, as duas tarefas foram de fácil resolução, mas a de natureza geométrica pareceu-lhe "mais lógica":

I – Achaste difícil?
A – Não é difícil. É uma questão de raciocínio.
I – Qual a tarefa que foi mais fácil de realizar?
A – As duas são fáceis, mas a primeira é mais lógica. Aliás, agora é lógico!
I – Nunca tinhas feito este tipo de tarefas?
A – Não.
I – Neste momento achas que serias capaz de fazer sozinho?
A – Sim. É só achar a abcissa do vértice!

Rafael

Rafael é um aluno de 15 anos, muito perspicaz e um dos melhores alunos da turma. São poucos os momentos em que parece prestar realmente atenção à aula, coincidindo esses raros momentos normalmente com a explicação inicial de um novo conteúdo. A sua dificuldade de concentração poderá prender-se com o facto de possuir uma capacidade de aprendizagem superior à média da turma, perdendo o interesse na aula nos momentos em que, a pedido dos colegas, a professora procede à repetição de explicações sobre o conteúdo lecionado. Rafael gosta muito de matemática, apresentando preferência pelo conteúdo de funções, em detrimento de conteúdos geométricos. No final do 1.º período obteve a classificação de 17 valores na disciplina de matemática, tendo registado uma subida em ambas as avaliações escritas do 2.º período em que obteve 20 e 19 valores, respetivamente na ficha e no teste de avaliação.

O aluno optou por começar pela tarefa de cariz geométrico porque é o conteúdo de que gosta menos. Depois de ler o enunciado procedeu à sua resolução sem apresentar qualquer sentimento de estranheza em relação à natureza da tarefa, começando por desenhar um retângulo atribuindo aos lados a designação de "a" e "b", identificando os segmentos de reta que correspondiam às diagonais e calculando a hipotenusa (Figura 6). O registo escrito não especifica de forma clara o raciocínio do aluno, favorecendo diversas interpretações, parecendo por um lado que o aluno aplicou o Teorema de Pitágoras para apenas uma das diagonais, por outro lado, que utilizou o mesmo cateto "a" para o cálculo de ambas as diagonais do retângulo, mas oralmente o aluno expôs o seu raciocínio de uma forma clara e coerente.

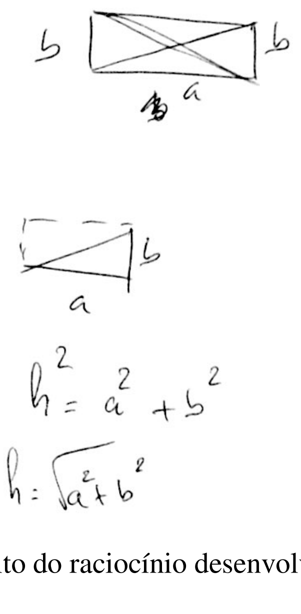
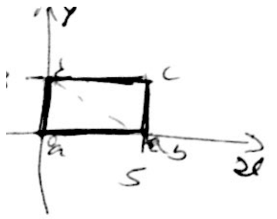


Figura 6. Registo escrito do raciocínio desenvolvido por Rafael na tarefa 1.

De seguida perguntou se podia escolher valores. Questionado sobre o motivo que o levou a começar por um caso geral e depois particularizar respondeu que “era para provar mesmo” (Figura 7).



$d(0,3)$

$b(5,0)$

$a(0,0)$

$c(5,3)$

$$\overline{DB} = B - D$$
$$= (5,0) - (0,3)$$
$$= (5,-3)$$

$$\overline{AC} = (5,3) - (0,0)$$
$$= (5,3)$$

$$\overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{5^2+3^2}$$
$$= \sqrt{34}$$

Figura 7. Caso concreto desenvolvido por Rafael na tarefa 1.

Em resposta à solicitação da investigadora, o aluno procedeu à generalização da forma de cálculo que utilizou para o caso particular, com fluidez de raciocínio e sem apresentar dificuldade (Figura 8).

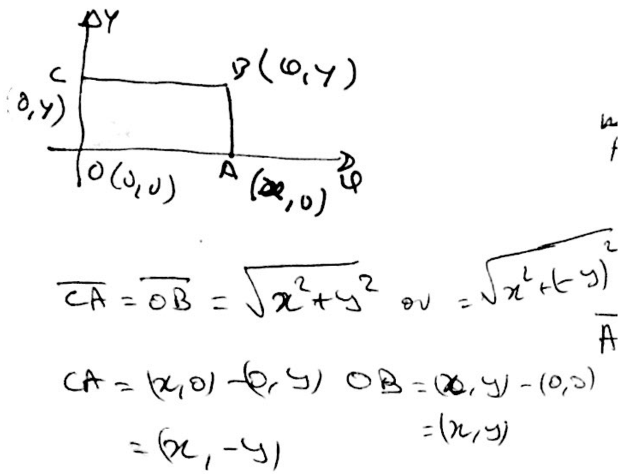


Figura 8. Registo escrito do raciocínio desenvolvido por Rafael na tarefa 1.

O aluno desenvolveu a segunda tarefa facilmente e de forma metódica sem necessitar de proceder a uma analogia com um caso prático, como podemos observar na figura 9. Quando se deparou com a condição $x = 0 \vee ax + b = 0$, hesitou. Alertado para o facto de faltar o cálculo de um dos zeros, procedeu ao seu cálculo.

O Rafael realizou esta tarefa de forma fluida em poucos minutos.

> I – Foi difícil?
> A – Não. Mas parti do princípio que a função só tinha um zero, por isso é que parei quando cheguei a x=0.
> I – Mas conseguiste desenvolver as contas sem números…
> A – Sim.
> I – De entre as duas primeiras tarefas qual a que achaste mais fácil?
> A – A primeira. É por isso que não gosto de Geometria. É fácil.

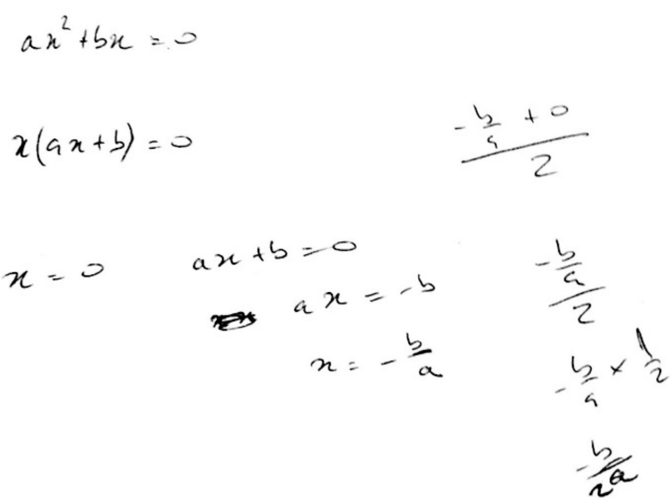


Figura 9. Registo escrito do raciocínio desenvolvido por Rafael na tarefa 2.

Rafael manifestou o quão importante são, em sua opinião, as demonstrações em matemática e o seu desejo que estas fossem parte integrante dos conteúdos lecionados:

I – Já tinhas feito tarefas deste género?
A – Sim. A estudar para os testes. Por exemplo, prove que a equação da parábola é tal. Eu costumo usar casos particulares e depois generalizo.
I – Gostavas que esta área da matemática fosse lecionada nas aulas?
A – Por vezes as aulas tornam-se secantes porque é sempre a repetir a mesma coisa e às vezes os professores complicam muito… é por isso que eu me distraio um pouco…
I – Achas que seria mais complicado?
A – É uma forma de compreender como as coisas são feitas. Acho que era importante.
I – Achas que os conhecimentos que tens adquirido ajudam neste tipo de tarefas?
A – Ajudam sempre. Não quer dizer que fazem com que consiga fazer logo isto…
I – Conseguirias fazer alguma destas tarefas sozinho?
A – Sim. Agora sei como se faz!

Rafael mostrou ter os conhecimentos teóricos e práticos e o nível de abstração necessários à realização das tarefas. Durante a sessão de trabalho mostrou-se calmo e interessado, realizando as tarefas de forma metódica.

Conclusão

João não entende a razão por que as demonstrações são necessárias. Para ele a confirmação com base num número suficiente de casos (que o aluno não específica quantos são) é suficiente para garantir a validade. Como tal, não sente qualquer interesse pelos processos de dedução concretizados pela sua professora nas aulas, afirmando só se interessar por saber a fórmula. Já Rafael, naturalmente distraído em virtude da facilidade com que apreende os conteúdos trabalhados, interessa-se pela introdução de novos conceitos, permanecendo atento na fase inicial, que é também aquela em que são dadas as explicações teóricas. Como tal, parece encontrar alguma facilidade em realizar o raciocínio solicitado, não mostrando qualquer hesitação na sua concretização, o que não o impede de sentir que é nos casos particulares que encontra a garantia de validade. E por isso opta por realizar um caso particular já depois de ter demonstrado a validade para o caso genérico. Os resultados deste estudo parecem assim estar em sintonia com os encontrados por De Villiers (2001) relativamente à forte tendência dos alunos para se centrarem em casos concretos. A dificuldade em perceber a necessidade da demonstração, outro dos aspetos referido por este autor, também parece caraterizar a perspetiva destes alunos, sendo muito clara em João ao referir que não vê o interesse das deduções de fórmulas feitas pela sua professora na aula. Rafael reconhece à demonstração a potencialidade de ajudar a perceber melhor os conceitos, contudo, não parece perceber plenamente a necessidade da demonstração ao precisar de considerar um caso concreto depois de ter validado o caso geral.

Ao serem confrontados com as tarefas, os alunos envolvidos neste estudo tiveram reações diferentes. Perante a primeira tarefa ambos tiveram uma ideia do que fazer. No entanto, enquanto Rafael conseguiu definir uma estratégia de abordagem e concretizá-la o mesmo não sucedeu com João. Este aluno considerou a possibilidade de recorrer ao teorema de Pitágoras (a abordagem seguida por Rafael), mas a ausência de valores concretos deixou-o com dúvidas quanto a como prosseguir. Pensou então numa estratégia alternativa e ponderou a possibilidade de recorrer à semelhança de triângulos. Mas mais uma vez sente dificuldades por não dispor de valores. Recorre então a um referencial e, apesar de aí desenhar um retângulo específico, procura explicar por palavras a forma como vê que o resultado efetivamente é válido independentemente do retângulo em causa. Ainda assim, João sente que o seu raciocínio não está suficientemente explícito e acaba por conseguir utilizar o teorema de Pitágoras com base num retângulo genérico e demonstrar o pretendido.

Na segunda tarefa as estratégias seguidas pelos alunos são menos diversificadas. Os dois alunos seguem a mesma via, mas João necessita de começar por um caso concreto para a partir daí efetuar por analogia a resolução desejada. E mesmo assim, a concretização de parte do trabalho algébrico não foi imediata, tendo o aluno necessitado de algum apoio. Pelo contrário, Rafael não parece enfrentar qualquer dificuldade por trabalhar com o caso geral. Parece pois que as usuais dificuldades dos alunos em trabalhar com casos gerais, referidas por De Villiers (2001), podem ser comuns mas não são certamente globais.

Ambos os alunos participantes neste estudo optaram por iniciar a sessão de trabalho pela tarefa de cariz geométrico. João porque é o conteúdo que mais gosta, Rafael porque é o que menos gosta. Sendo estes alunos com níveis de desempenho diferentes na disciplina de matemática (Rafael um aluno de nível Muito Bom, João um aluno de nível variável entre o médio e o fraco), faz sentido ponderar se essa diferença de nível poderá estar na origem das diferenças observadas na abordagem dos alunos às tarefas. No entanto, os dados disponíveis parecem sugerir que não é necessariamente assim. A atenção dos alunos aos momentos das aulas em que é realizado um trabalho deste tipo parece ser um fator a não desprezar. De igual modo, a falta de compreensão da relevância da demonstração, quando a análise de casos concretos é considerada mais esclarecedora, será também influente. Mas o gosto de João pela Geometria parece dar-lhe uma capacidade que não tem nas Funções. O aluno consegue pensar em diferentes abordagens e, apesar da dificuldade em expressar uma resolução genérica por escrito, deixa a sensação que é sempre nela que pensa. Acresce o entusiasmo e a dedicação com que estes alunos se envolveram nas tarefas propostas, sugerindo que provavelmente não existe uma forma única de desenvolver o raciocínio necessário à concretização de uma demonstração. O presente estudo sugere que esse é um processo complexo, em concordância com Brown (2014), e que não pode nem provavelmente deve ser generalizado. Mas sugere também que os alunos têm a capacidade de se envolver em tarefas que requerem um raciocínio dedutivo, mesmo quando não estão habituados a fazê-lo. Deixa contudo em aberto questões relativamente à forma como deve ser articulado o trabalho em torno de casos particulares e de casos genéricos nas aulas de matemática. E permite questionar se o ceticismo a que Brown (2014) faz referência como algo necessário à passagem da abordagem empírica para a dedutiva é mesmo necessário, uma vez que Rafael, apesar de aparentemente não ter dificuldade na concretização de raciocínios dedutivos, encontra a confiança na validade do resultado no trabalho empírico e não no dedutivo.

Nota

Este trabalho foi desenvolvido no âmbito do projeto *24.º problema de Hilbert* (PTDC/MHC-FIL/2583/2014) financiado pela FCT.

Referências bibliográficas

Boavida, A. M. (2001). Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática. *Educação e Matemática, 63,* 11-15.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação – uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Brown, S. A. (2014). On skepticism and its role in the development of proof in classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 311-335.

De Villiers, M. (2001). Papel e função das demonstrações no trabalho com o Sketchpad. *Educação e Matemática, 62,* 31-36.

De Villiers, N., & Hanna, G. (2012). *Proof and proving in mathematical education.* Londres: Springer.

Freitas, P. J. (2011). *A demonstração matemática no ensino básico e secundário.* Acedido em www.apm.fc.ul.pt/~pedro/pdfs/Dem_ProfMat.pdf.

Mariotti,M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present, and future* (pp. 173–204). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

MEC (2001). *Programa de Matemática A - 10.º ano*. Lisboa: MEC.

A mobilização da capacidade de generalização em contextos de promoção do pensamento relacional: Um estudo com alunos do 4.º ano de escolaridade

Célia Mestre
Agrupamento de Escolas Romeu Correia, Almada, UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, *celiamestre@hotmail.com*

Resumo. *Esta comunicação centra-se na mobilização da capacidade de generalização dos alunos de uma turma de 4.º ano, em tarefas que exploram aspetos do pensamento relacional, no âmbito da realização de uma experiência de ensino enquadrada por uma perspetiva de desenvolvimento do pensamento algébrico. O estudo tem como objetivo analisar possíveis relações entre o desenvolvimento do pensamento relacional e o desenvolvimento da capacidade de generalização manifestados pelos alunos. A recolha de dados incidiu sobre seis tarefas matemáticas realizadas em diferentes momentos da experiência de ensino. As conclusões apontam para a estreita relação entre o desenvolvimento do pensamento relacional e o desenvolvimento da capacidade de generalização. Para além disso, as características das tarefas parecem ter influenciado a forma como os alunos apreenderam as relações numéricas e, consequentemente, a sua generalização.*

Palavras-chave: *generalização; pensamento relacional; pensamento algébrico; tarefas; experiência de ensino.*

Abstract. *This paper focuses on the mobilization of grade 4 students' generalization ability, on tasks exploring relational thinking aspects, in a teaching experiment context, supported by a perspective of algebraic thinking development. The study aims to analyse possible relationships between the development of the level of relational thinking and the ability to generalize expressed by students. Data collection focused on six mathematical tasks performed at different times of teaching experience. We conclude about the close relationship between the development of relational thinking and generalization. The characteristics of tasks also seem to influence the way students perceive relational thinking and generalization.*

Keywords: *generalization; relational thinking; algebraic thinking; tasks; teaching experiment.*

Introdução

A exploração da aritmética nos primeiros anos de escolaridade pode promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, considerando-se este como um "processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade" (Blanton & Kaput, 2005, p. 413). Neste sentido pode ser explorada a generalização de relações numéricas e das propriedades das operações, assim como a compreensão da noção de equivalência associada ao sinal de igual.

Esta comunicação centra-se no desenvolvimento da capacidade de generalização de alunos do 4º ano de escolaridade, em contextos de promoção do pensamento relacional. Procura identificar possíveis relações entre o desenvolvimento do pensamento relacional e a capacidade de generalização manifestados pelos alunos.

O pensamento relacional e a generalização

A introdução do pensamento algébrico na escola elementar acarreta novas visões sobre a aritmética e a álgebra e a forma como estas se relacionam (Carraher & Schliemann, 2007). Para Carpenter, Franke e Levi (2003) a separação artificial entre álgebra e aritmética impede que os alunos construam formas poderosas de pensamento sobre a matemática nos primeiros anos e torna mais difícil a aprendizagem da álgebra nos anos mais avançados. Se ficarmos apenas na natureza concreta da aritmética corremos o risco de oferecer aos alunos uma visão superficial da matemática e desencorajar a generalização (Carraher, Schliemann, Brizuela, & Earnest, 2006).

Carpenter et al. (2003) sintetizam as ideias sobre a aritmética generalizada naquilo que designam por *Pensamento Relacional* e que consideram dizer respeito à capacidade de *olhar* para expressões na sua conceção mais ampla, revelando as relações existentes. No pensamento relacional atende-se às relações e propriedades fundamentais das operações aritméticas em vez de se focar exclusivamente nos procedimentos de cálculo (Carpenter, Levi, Franke, & Zeringue, 2005). Assim o pensamento relacional diz respeito à capacidade de usar relacionalmente a aritmética de forma a fazer uso da estrutura subjacente das relações numéricas e das propriedades das operações e encarar a igualdade como uma relação de equivalência.

No âmbito do pensamento relacional, a noção de quase-variável (Fujii, 2003) reveste-se de particular importância. Expressões quase-variáveis são expressões numéricas particulares passíveis de ser generalizadas por revelarem a relação matemática subjacente e que se manterá verdadeira independentemente dos números que sejam usados.

A generalização envolve deliberadamente a extensão do alcance do raciocínio para além do caso ou casos considerados, o que implica a identificação e exposição explícita da comunalidade entre casos, elevando o raciocínio para um nível onde o foco não é tanto o caso ou as situações em si mesmas, mas antes os padrões, procedimentos, estruturas e as relações entre eles (Kaput, 1999). Britt e Irwin (2011) salientam a necessidade de os alunos mais novos trabalharem em diferentes níveis de compreensão da generalização que envolvam a expressão dessa generalização em palavras, imagens, assim como com símbolos numéricos que atuem como quase-variáveis.

Radford (2013) apresenta os conceitos de indeterminação, denotação e *analiticidade* como condições que permitem distinguir diferentes níveis de generalização. A indeterminação refere-se à existência de quantidades não determinadas, como incógnitas, variáveis, etc. A denotação implica que as quantidades indeterminadas sejam nomeadas ou simbolizadas. Essa nomeação pode revestir-se de diferentes formas, usando a linguagem natural, gestos, signos não convencionais ou a notação alfanumérica. A analiticidade permite tratar as quantidades indeterminadas como se fossem conhecidas, ou seja, tornando possível operar (adicionar, subtrair, multiplicar, dividir) essas quantidades como se procede com quantidades numéricas conhecidas. Estas condições podem assumir diversas formas, conduzindo a diferentes níveis de generalidade. Nos níveis mais concretos, a indeterminação e a analiticidade podem aparecer de uma forma intuitiva e nos níveis mais gerais estas condições são mais explícitas.

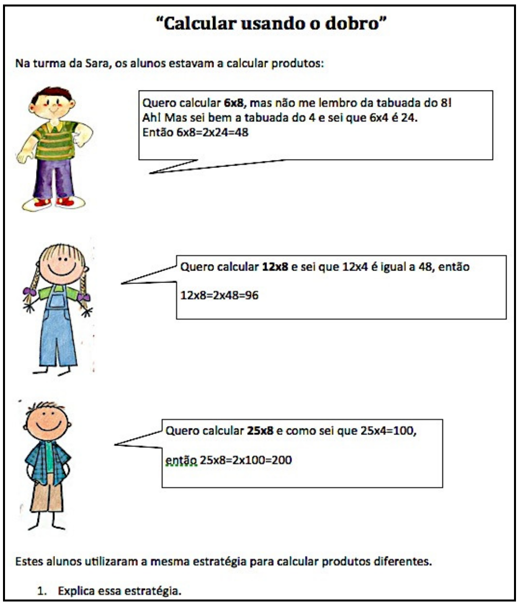
Contexto e metodologia do estudo

Esta comunicação insere-se num estudo mais amplo, de implementação de uma *experiência de ensino em sala de aula* (Gravemeijer & Cobb, 2006), desenvolvida ao longo de um ano letivo, onde a investigadora assumiu, simultaneamente, o papel de professora (Mestre, 2014). A turma onde decorreu a experiência de ensino era constituída por 19 alunos, sete raparigas e 12 rapazes, com uma média de nove anos de idade.

Foram desenvolvidas quarenta e duas tarefas matemáticas, organizadas em cinco sequências, de acordo com os temas e tópicos matemáticos da planificação anual da professora titular de turma, respeitando a perspetiva de conceber o pensamento algébrico como um fio condutor curricular (NCTM, 2000), numa lógica de integração curricular. Nas primeiras quatro sequências as tarefas pretendiam promover o desenvolvimento do pensamento relacional e última sequência explorava situações de promoção do pensamento funcional. Das tarefas matemáticas exploradas com o objetivo de desenvolverem o pensamento relacional foram selecionadas seis para análise, enquadradas nas sequências II, III e IV (Figuras 1 e 2).

Sequência II	
Tarefa 13	**Tarefa 15**

Tarefa 13



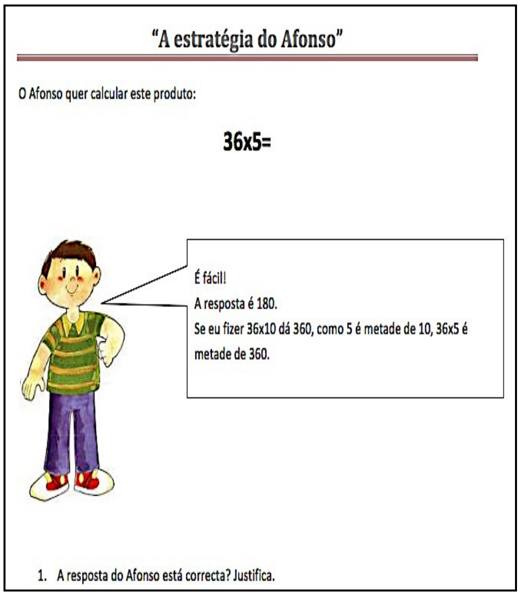
"Calcular usando o dobro"

Na turma da Sara, os alunos estavam a calcular produtos:

Estes alunos utilizaram a mesma estratégia para calcular produtos diferentes.

1. Explica essa estratégia.

Tarefa 15



"A estratégia do Afonso"

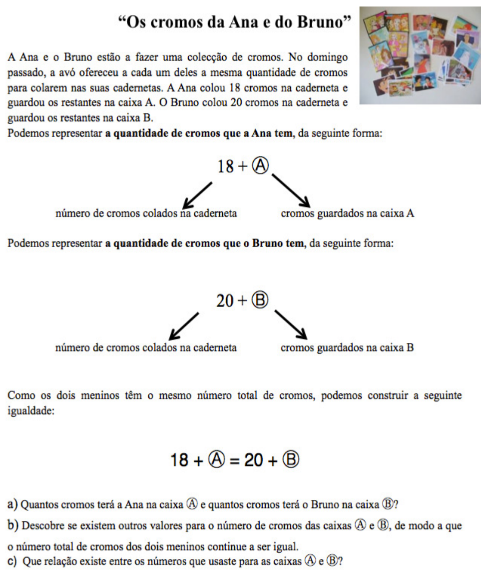
O Afonso quer calcular este produto:

36x5=

1. A resposta do Afonso está correcta? Justifica.

Sequência III	
Tarefa 21	**Tarefa 22**

Tarefa 21



"Os cromos da Ana e do Bruno"

A Ana e o Bruno estão a fazer uma colecção de cromos. No domingo passado, a avó ofereceu a cada um deles a mesma quantidade de cromos para colarem nas suas cadernetas. A Ana colou 18 cromos na caderneta e guardou os restantes na caixa A. O Bruno colou 20 cromos na caderneta e guardou os restantes na caixa B.

Podemos representar **a quantidade de cromos que a Ana tem**, da seguinte forma:

18 + A

número de cromos colados na caderneta — cromos guardados na caixa A

Podemos representar **a quantidade de cromos que o Bruno tem**, da seguinte forma:

20 + B

número de cromos colados na caderneta — cromos guardados na caixa B

Como os dois meninos têm o mesmo número total de cromos, podemos construir a seguinte igualdade:

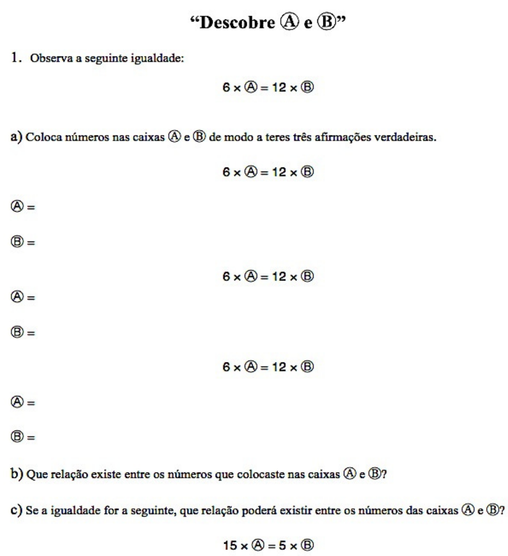
$$18 + A = 20 + B$$

a) Quantos cromos terá a Ana na caixa A e quantos cromos terá o Bruno na caixa B?

b) Descobre se existem outros valores para o número de cromos das caixas A e B, de modo a que o número total de cromos dos dois meninos continue a ser igual.

c) Que relação existe entre os números que usaste para as caixas A e B?

Tarefa 22



"Descobre A e B"

1. Observa a seguinte igualdade:

$$6 \times A = 12 \times B$$

a) Coloca números nas caixas A e B de modo a teres três afirmações verdadeiras.

$$6 \times A = 12 \times B$$

A =

B =

$$6 \times A = 12 \times B$$

A =

B =

$$6 \times A = 12 \times B$$

A =

B =

b) Que relação existe entre os números que colocaste nas caixas A e B?

c) Se a igualdade for a seguinte, que relação poderá existir entre os números das caixas A e B?

$$15 \times A = 5 \times B$$

Figura 1. Enunciados das tarefas 13, 15, 21 e 22.

Sequência IV

Tarefa 30	Tarefa 32

Tarefa 30

Tarefa "Pensa num número"

1. Pensa num número e obedece às diferentes indicações que te são dadas.
   1.1. Escolhe um número.

Escreve o número que escolheste.	
Adiciona 10 a esse número. Escreve a soma.	
Subtrai 10 a esse resultado.	

   1.2. Experimenta com outros números.
   1.3. Que descoberta fizeste? Porque é que isso aconteceu?

2. Experimenta agora obedecer a estas novas indicações. Descobre o que aconteceu e tira as tuas conclusões.
   2.1. A multiplicar e a dividir...

Escolhe um número e escreve-o.	
Multiplica esse número por 6.	
Agora divide por 2.	
Divide o resultado por 3.	

Conclusões

Tarefa 32

Tarefa "Explorando calendários e tabelas"

2. Os números na tabela...

2.1. Observa a seguinte tabela e os números que estão destacados.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	**55**	56	57	58	59	60
61	62	63	**64**	**65**	**66**	67	68	69	70
71	72	73	74	**75**	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2.1. O Pedro diz que se adicionar os números em linha obtém o mesmo valor que na adição dos números em coluna. Verifica se o Pedro tem razão.

2.2. Consegues encontrar outros números com a mesma disposição na tabela onde isso aconteça? Mostra as tuas descobertas.

2.3. Será que a mesma relação se verifica quando o número que está no centro é 823? Explica porquê.

Figura 2. Enunciados das tarefas 30 e 32.

As tarefas da sequência II exploravam estratégias de cálculo mas apresentavam diferentes características: enquanto a tarefa 13 apresentava a estratégia de cálculo aplicada em três exemplos particulares, a tarefa 15 apresentava apenas um exemplo particular. As tarefas da sequência III exploravam uma relação de igualdade com dois valores desconhecidos, introduzida na tarefa 21 através de um contexto de modelação. Por fim, as tarefas da sequência IV exploravam regularidades em contextos marcadamente numéricos. Em todas as tarefas era solicitado aos alunos que reconhecessem as relações numéricas, com o objetivo de promover a sua generalização.

Os alunos trabalharam nas tarefas em pares ou em trios, nos momentos de trabalho autónomo. As suas resoluções escritas foram analisadas com o propósito de identificar os níveis de pensamento relacional e os níveis de generalização manifestados, de acordo com as categorias apresentadas no Quadro 1 (Mestre, 2014). Estes níveis são marcadamente gradativos, embora não sejam necessariamente consecutivos.

Quadro 1.

Categorias de análise dos níveis de pensamento relacional e dos níveis de generalização

<table>
<tr><th colspan="4">Níveis de Pensamento Relacional</th></tr>
<tr><td>Nível 0</td><td colspan="2">Não relacional</td><td>Não reconhece as relações numéricas e/ou propriedades das operações, centrando-se em procedimentos de cálculo.</td></tr>
<tr><td>Nível 1</td><td colspan="2">Utilização de exemplos particulares</td><td>Reconhece e usa relações numéricas e/ou propriedades das operações em exemplos particulares.</td></tr>
<tr><td>Nível 2</td><td colspan="2">Utilização de Quase-variáveis</td><td>Reconhece e usa relações numéricas e/ou propriedades das operações em exemplos particulares, mas com sentido de quase-variáveis.</td></tr>
<tr><td>Nível 3</td><td colspan="2">Relacional</td><td>Reconhece e usa relações numéricas e/ou propriedades das operações independentemente dos casos particulares, evidenciando a sua generalidade.</td></tr>
<tr><th colspan="4">Níveis de Generalização</th></tr>
<tr><td>Nível 0</td><td colspan="2">Não Generaliza</td><td>Não reconhece a comunalidade entre os casos apresentados. Apresenta, eventualmente, tentativas de apreensão da comunalidade, mas que se baseiam em palpites e não são testadas.</td></tr>
<tr><td>Nível 1</td><td colspan="2">Generalização Aritmética</td><td>Reconhece a comunalidade entre os casos apresentados, mas apenas considera as quantidades conhecidas e opera com elas. Não faz a extensão para quantidades indeterminadas e, desta forma, não define uma regra geral.</td></tr>
<tr><td>Nível 2</td><td rowspan="3">Generalização Algébrica</td><td>Factual ou empírica</td><td>Reconhece a indeterminação com sentido de quase-variável, a partir de casos particulares, mas não a nomeia. Apresenta, eventualmente, uma regra para os casos particulares.</td></tr>
<tr><td>Nível 3</td><td>Contextual</td><td>Nomeia a indeterminação e trata-a analiticamente, apoiando-se numa descrição do contexto da situação. Define uma regra geral, mas dentro do contexto da situação.</td></tr>
<tr><td>Nível 4</td><td>Global</td><td>Nomeia a indeterminação de forma global e trata-a analiticamente, não se apoiando na descrição do contexto da situação. Define uma regra geral.</td></tr>
</table>

Na análise do pensamento relacional foram identificados cinco níveis. O nível zero é entendido como “não relacional” por não evidenciar qualquer aspeto do pensamento relacional. No nível um, “utilização de exemplos particulares”, estes são usados no reconhecimento das relações numéricas, mas sem estender o raciocínio para outros casos. No nível dois, “utilização de quase-variáveis”, os exemplos particulares são usados com sentido quase-variável (Fujii, 2003), ou seja, não são restritos aos casos particulares e são utilizados como exemplos da relação numérica. O último nível, marcadamente “relacional”, não se centra em exemplos particulares e revela a generalidade da relação numérica.

Para a definição das categorias de análise relativamente à capacidade de generalização foi considerada a pertinência da existência de diferentes níveis de generalização e a distinção entre generalização aritmética e generalização algébrica (Radford, 2013). O nível zero corresponde às situações em que não é detetada a comunalidade entre os casos e é considerado como um nível de "não generalização". O nível um corresponde à generalização aritmética, identificado quando a comunalidade é detetada apenas nos casos apresentados, não enunciando a extensão para quantidades indeterminadas. No primeiro nível de generalização algébrica, nível dois de generalização, a indeterminação aparece mas não é nomeada. As quantidades são tratadas com o sentido de quase-variável e há a emergência de uma regra para os casos particulares. O nível três de generalização diz respeito ao nível contextual onde a indeterminação aparece e é tratada analiticamente. Neste nível de generalização há a definição de uma regra geral, mas ainda ancorada na descrição do contexto da situação. O nível quatro da generalização considera a generalização global e não envolve a descrição do contexto da situação na definição da regra geral.

Apresentação dos resultados

Em seguida, apresentam-se e discutem-se os níveis de pensamento relacional e os níveis de generalização manifestados pelos oito pares/trios de alunos nos momentos de trabalho autónomo. A figura 3 apresenta o nível de pensamento relacional evidenciado nas resoluções dos alunos no decurso das tarefas referidas.

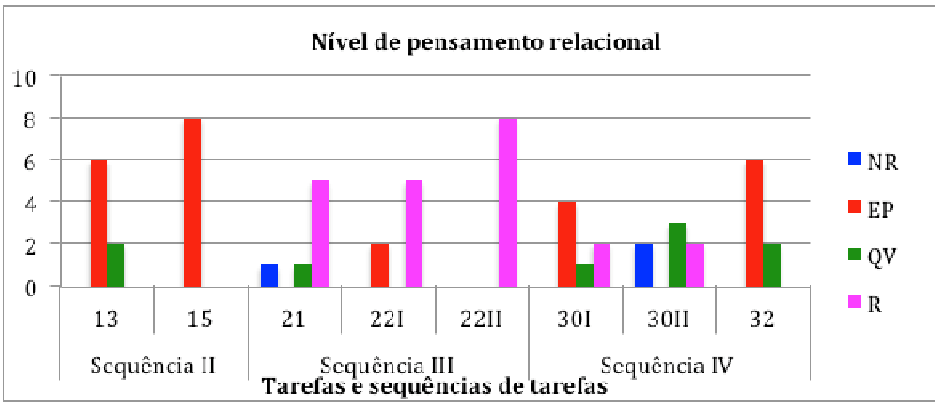


Figura 3. Nível de pensamento relacional evidenciado pelos alunos nas tarefas analisadas das sequências II, III e IV.

Pela análise da figura 3 constata-se que, de forma geral, nas tarefas analisadas das três sequências, os níveis de pensamento relacional mais apresentados pelos alunos foram os de "utilização de exemplos particulares" (EP) e "relacional" (R). Nas tarefas analisadas da segunda sequência, os alunos apenas apresentaram níveis de pensamento relacional centrados em "exemplos particulares" (EP) e através da "utilização de quase variáveis" (QV). As tarefas analisadas na terceira sequência foram as que mais mobilizaram o nível de pensamento relacional (R), sendo este apresentado pela maioria dos pares/trios de alunos nas duas tarefas. Nas tarefas analisadas na quarta sequência os níveis de pensamento relacional mobilizados pelos alunos foram diversos, mas com maior incidência no nível de "utilização de exemplos particulares" (EP) e, em número ligeiramente inferior, o nível de "utilização de quase-variáveis" (QV). Desta forma, constata-se que os alunos apresentaram um nível superior de pensamento relacional nas tarefas analisadas da terceira sequência.

Relativamente ao nível de generalização evidenciado pelos alunos nas tarefas analisadas das três sequências referidas, constata-se que os níveis de generalização com mais expressão foram o aritmético (A) e, em valores muito próximos, o contextual (C) e o global (G) (Figura 4). Nas tarefas analisadas da segunda sequência, apenas na primeira tarefa os alunos evidenciaram um nível de generalização identificado como aritmético (A), pois, na segunda tarefa não evidenciaram qualquer nível de generalização. Na terceira sequência, os níveis de generalização foram maioritariamente contextuais (C), embora um número considerável de evidências da generalização global (G) se tenha registado na última tarefa. Nas tarefas analisadas da quarta sequência, os níveis de generalização foram de sofisticação inferior relativamente aos apresentados nas tarefas analisadas da sequência anterior. Nestas tarefas da quarta sequência, os níveis de generalização foram maioritariamente aritméticos (A).

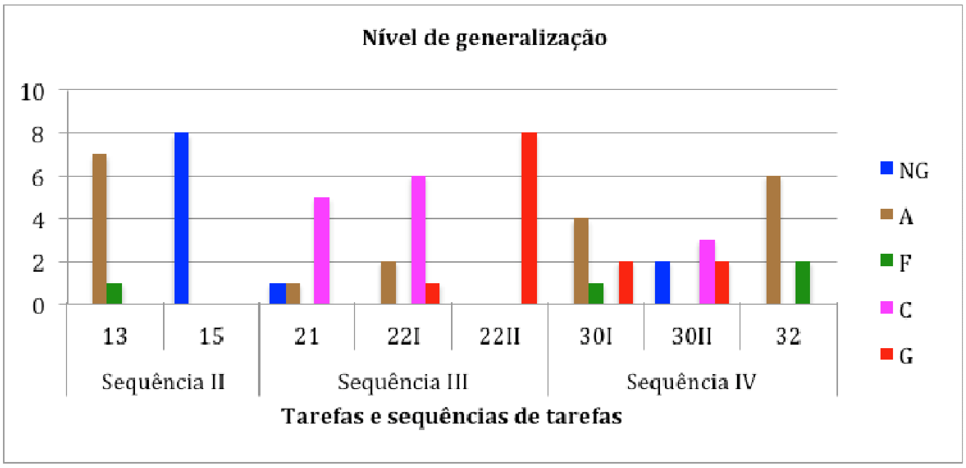
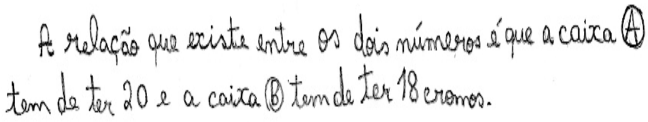


Figura 4. Nível de generalização evidenciado pelos alunos nas tarefas analisadas das sequências II, III e IV.

De forma a relacionar os níveis de pensamento relacional e os níveis de generalização manifestados pelos alunos, apresentam-se e discutem-se, em seguida, exemplos de resoluções dos alunos nas diferentes tarefas referidas.

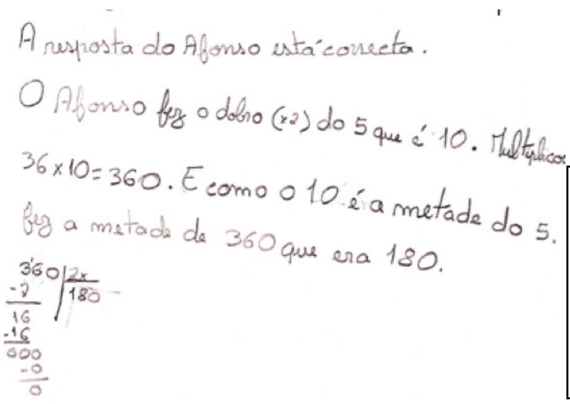


A relação que existe entre os dois números é que a caixa A tem de ter 20 e a caixa B tem de ter 18 cromos.

Figura 5. Resolução do par Diogo e Daniel da tarefa 21.

Esta resolução da tarefa 21 (Figura 5) mostra que estes alunos centraram-se apenas em um caso particular e não conseguiram identificar a relação aritmética envolvida na igualdade, apresentando uma resposta que se situa num nível não relacional (NR). Da mesma forma, não identificando a comunalidade entre os casos possíveis para a igualdade, este par não apresenta qualquer tentativa de generalização (NG).

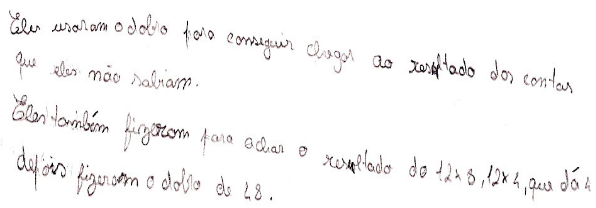
Por outro lado, houve resoluções que, embora não evidenciando um nível de generalização por não reconhecerem a comunalidade entre os casos (NG), apresentaram um nível de pensamento relacional em que reconheceram as relações numéricas em casos particulares (EP). A figura 6 mostra um exemplo de uma resolução deste tipo, para a tarefa 15.



A resposta do Afonso está correta. O Afonso fez o dobro (X2) do 5 que é 10. Multiplicou 36x10=360. E como 10 é a *metade* do 5 fez a metade de 360 que era 180.

Figura 6. Resolução do par Fábio e Henrique da tarefa 15.

Na figura 7 apresenta-se uma resolução com um nível de generalização aritmético (A) e o reconhecimento das relações numéricas em casos particulares (EP). Nesta resolução da tarefa 13, o par consegue perceber que estavam envolvidas as relações numéricas de dobro e metade nos exemplos particulares apresentados no enunciado, mas apenas apreende a comunalidade entre os casos apresentados.



Eles usaram o dobro para conseguir chegar ao resultado das contas que eles não sabiam.
Eles também fizeram para achar o resultado do 12×8, 12×4 que dá 48 e depois fizeram o dobro de 48.

Figura 7. Resolução do par João P. e Beatriz da tarefa 13.

Ainda neste nível de generalização aritmético (A), outras resoluções apresentaram o reconhecimento das relações numéricas aplicadas a outros casos particulares, mas com sentido de quase-variáveis (QV), ou seja, tomando-os como exemplos da relação numérica, mas não a circunscrevendo a esses casos particulares. Na resolução que se apresenta em seguida (Figura 8) os alunos explicaram a relação aritmética usando outros exemplos particulares que não eram apresentados no enunciado da tarefa. O facto de usarem outros exemplos revela que estes alunos reconheceram a relação aritmética de forma a estendê-la para além dos casos particulares apresentados no enunciado, embora não tenham ainda enunciado essa estratégia de forma geral. A forma como representaram numericamente a relação, ainda que de forma incorreta no que respeita à representação da igualdade, dá evidência do procedimento correto que efetuaram para obter os produtos da tabuada do oito usando o dobro dos produtos da tabuada do quatro.

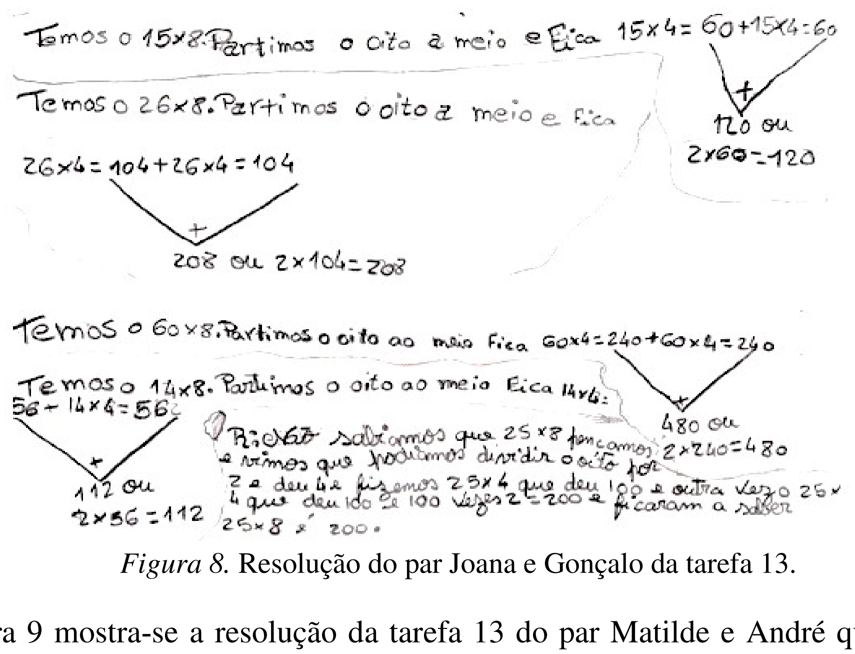
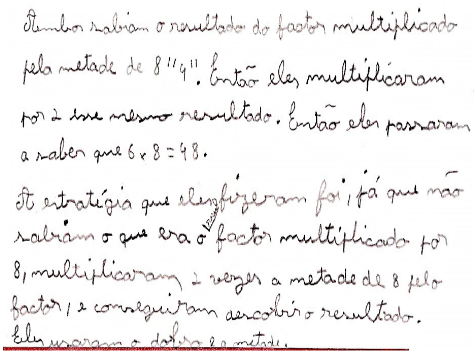


Figura 8. Resolução do par Joana e Gonçalo da tarefa 13.

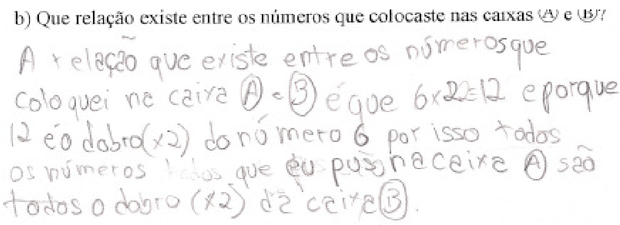
Na figura 9 mostra-se a resolução da tarefa 13 do par Matilde e André que, apesar de usar os casos particulares, consegue descrever a relação usando esses casos com sentido de quase-variáveis. Desta forma, a indeterminação aparece quando estes alunos não se referem a casos concretos, mas a um “fator” qualquer, como referem na explicação da estratégia: “... já que não sabiam o que era o fator multiplicado por 8, multiplicaram 2 vezes a metade de 8 pelo fator”. No entanto, não nomeiam ainda a indeterminação de forma explícita, como num nível de generalização superior, por ainda se centrarem num fator e não nos fatores em geral. Este par mostra, assim, a relação aritmética através dos casos particulares usados com sentido de quase-variável (QV) e enunciando um nível de generalização factual (F).



Ambos sabiam o resultado do fator multiplicado pela metade de 8 “4”. Então eles multiplicaram por 2 esse mesmo resultado. Então eles passaram a saber que 6x8=48.
A estratégia que eles fizeram foi, já que não sabiam o que era o fator multiplicado por 8, multiplicaram 2 vezes a metade de 8 pelo fator, e conseguiram descobrir o resultado.
Eles usaram o dobro e a metade.

Figura 9. Resolução do par Matilde e André da tarefa 13.

A resolução seguinte (Figura 10) apresenta um nível de generalização contextual (C) e um nível de pensamento relacional de quase-variável (QV). Desta forma, a resolução que este par de alunos apresentou está ainda muito dependente do contexto da situação, embora revele a relação multiplicativa subjacente.



A relação que existe entre os números que coloquei na caixa A e B é que 6x2=12 e porque 12 é o dobro (X2) do número 6 por isso todos os números que eu pus na caixa A são todos o dobro (X2) da caixa B.

Figura 10. Resolução do par João V. e Lawry da tarefa 22.

Por outro lado, na resolução seguinte (Figura 11) os alunos conseguiram apreender a relação (R) e apresentar a regra geral sem usarem o contexto da situação, evidenciando um nível de generalização global (G).

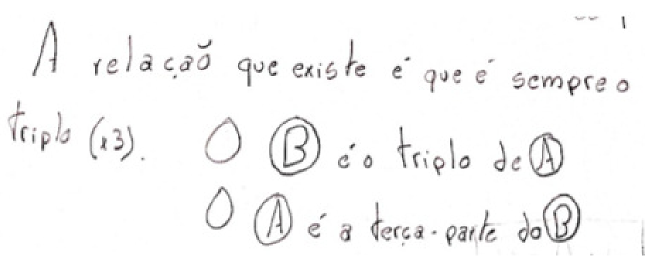


Figura 11. Resolução do par Fábio e António da tarefa 22.

De forma a sistematizar a relação entre os níveis de pensamento relacional e os níveis de generalização manifestados pelos alunos apresenta-se, em seguida, a figura 12. Pela análise da figura, constata-se que os níveis de generalização algébricos superiores (contextual e global) implicaram sempre que as relações numéricas fossem apreendidas. Por outro lado, o nível de generalização aritmético (e desta forma, não algébrico) esteve ancorado a níveis de pensamento relacional maioritariamente centrados na exploração de exemplos particulares. Quando os alunos conseguiram estender os casos particulares para outros casos, usando-os com sentido de quase-variáveis, os níveis de generalização permitiram reconhecer a indeterminação (generalização factual) ou até nomeá-la embora ainda ancorada no contexto da situação (generalização contextual). Desta forma, os níveis de generalização parecem ter sido influenciados pelos níveis de pensamento relacional apreendidos.

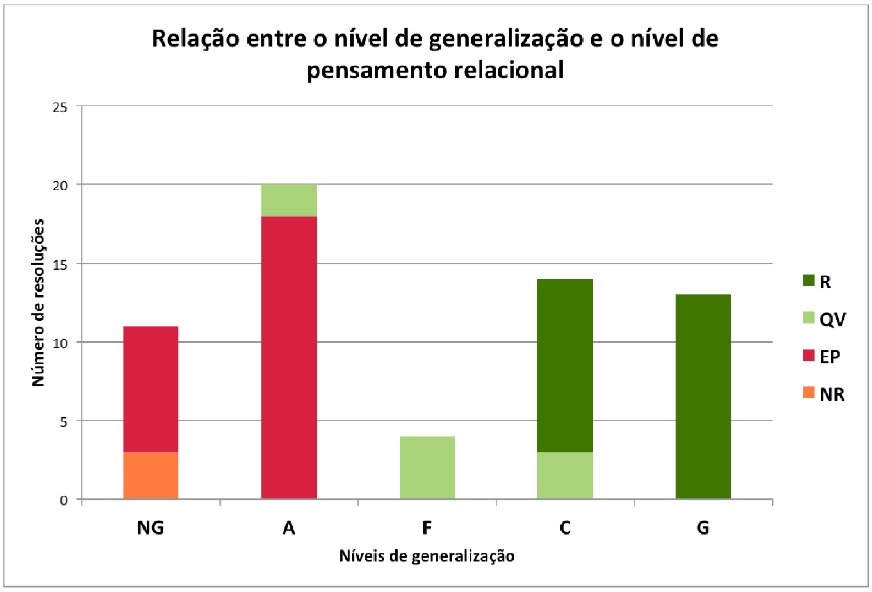


Figura 12. Relação entre o nível de generalização e o nível de pensamento relacional.

Para além destas relações evidenciadas, as características das tarefas parecem ter influenciado quer os níveis de generalização quer os níveis de pensamento relacional. Assim, constatou-se que as tarefas que apresentavam diferentes possibilidades de variação da relação numérica ou um contexto de modelação rico para a sua compreensão, conduziram os alunos a níveis de pensamento relacional e de generalização mais sofisticados. Tarefas que apresentavam mais do que um caso particular (tarefa 13) ou um contexto de modelação facilitador da compreensão das relações numéricas (tarefas 21 e 22) promoveram nos alunos um maior reconhecimento dessas relações e uma maior capacidade de expressão da generalização. Por outro lado, tarefas que apresentavam no seu enunciado apenas um caso particular (tarefa 15) ou contextos estritamente numéricos (tarefas 30 e 32) reverteram-se de maiores dificuldades na mobilização do pensamento relacional e da generalização.

Conclusões

A capacidade de generalização dos alunos da turma foi evoluindo à medida que eram exploradas tarefas com contextos de promoção do pensamento relacional. Assim, nas tarefas com contextos de promoção do pensamento relacional, os alunos começaram por explorar as relações numéricas em casos particulares e, a partir deles, conseguiram estendê-las para outros casos até enunciar a sua generalização algébrica. Desta forma, os primeiros níveis de pensamento relacional centraram-se exatamente na exploração desses exemplos particulares e assumiram níveis de generalização aritméticos em que a comunalidade não é estendida para quantidades indeterminadas. Progressivamente, os alunos conseguiram estender esses casos particulares para outros semelhantes, usando um sentido de quase-variável (Fujii, 2003), e apreender níveis de generalização algébricos, embora de nível inferior. Quando os alunos conseguiam apreender relacionalmente as situações para além dos casos particulares, evidenciavam um nível de generalização algébrico superior. Esse nível poderia ainda evidenciar uma dependência com a descrição do contexto da situação (generalização contextual) ou não necessitar da descrição desse contexto, evidenciando um nível de generalização mais geral (generalização global).

Dois factores parecem ter sido determinantes para a evolução dos níveis de generalização dos alunos: o nível de pensamento relacional apreendido e as características das tarefas.

Relativamente ao primeiro factor, constata-se que, quando os alunos evidenciam um nível relacional das situações exploradas, conseguem níveis de generalização mais sofisticados. Assim, parece ser claro que os níveis de generalização estão dependentes da capacidade de os alunos conceberem relacionalmente as situações que lhes são apresentadas. Tendo em conta que, o pensamento relacional diz respeito à capacidade de olhar para expressões ou equações na sua conceção mais ampla, revelando as relações existentes (Carpenter et al., 2003), é natural a relação entre o desenvolvimento do pensamento relacional e o desenvolvimento da capacidade de generalização.

Relativamente ao segundo factor, características das tarefas, evidencia-se uma estreita relação entre dois aspetos particulares das tarefas. O primeiro prende-se com a apresentação da possibilidade da variação de quantidades numéricas e o segundo com a existência de contextos de modelação.

Assim, quando as tarefas apresentavam não apenas um caso particular, mas vários, os alunos acediam com maior facilidade às relações numéricas de forma geral. Em tarefas que apresentavam apenas um caso particular, os alunos centravam-se na exploração desse caso e, com maior dificuldade conseguiam apreender a possibilidade de variação de quantidades, dificultando a extensão para além dos casos particulares e a generalização. De facto, Stephens (2006) salienta a importância de os alunos serem capazes de ver e usar possibilidades de variação, considerando-a como uma importante característica do pensamento relacional.

A existência de contextos de modelação também foi facilitador para a compreensão da situação, conduzindo a uma maior apreensão do nível relacional e de generalização. Constata-se, assim, a importância dos contextos de modelação de forma a dar sentido aos conceitos (Tabach & Friedlander, 2008) e, em particular, à indeterminação. De acordo com Carraher et al. (2006), a utilização de problemas com contextos ricos para suportar a compreensão dos conceitos mais abstratos é um dos três aspetos definidores da *Early Algebra*.

Estes resultados são consistentes com os estudos que demonstram a importância da promoção do pensamento relacional para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos (e.g., Carpenter et al., 2003, 2005; Carraher et al., 2006, 2007; Fujii, 2003; Stephens, 2006; Rivera, 2006). De facto e de acordo com Rivera (2006), a aritmética deve ser ensinada de tal forma que os alunos percebam as propriedades das operações ou as relações numéricas existentes em objetos individuais para, progressivamente, verificarem que são invariantes dos objetos iniciais. Neste sentido, reitera-se a importância da exploração de tarefas envolvendo contextos de promoção do pensamento relacional, assumindo a conceção de Carpenter et al. (2003) ao considerarem a potencialidade desta ligação entre a aritmética e a álgebra e o aportar de significado, profundidade e coerência à aprendizagem dos próprios conteúdos aritméticos (NCTM, 2000).

Concluindo, a capacidade de generalização dos alunos, em contextos de promoção do pensamento relacional, foi evoluindo no sentido da mudança de atenção dos casos individuais para os casos mais gerais. Esta mudança do foco de atenção conduziu a uma progressiva sofisticação da capacidade de generalização, ancorada ao mesmo sentido de progressão da apreensão do pensamento relacional. No entanto, essa progressão não foi linear, revelando-se particularmente dependente das características das tarefas. Assim, nas tarefas que apresentavam diferentes possibilidades de variação de quantidades ou contextos de modelação significativos para a compreensão das relações numéricas, os alunos apresentaram níveis de generalização e de pensamento relacional mais sofisticados.

Referências bibliográficas

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36(*5), 412-446.

Britt, M. S., & Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.) *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 137-159). New York: Springer.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L. & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in the elementary school: Developing relational thinking. *ZDM, 37*(1), 53-59.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Carraher, D., Schliemann, A.D., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-266). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Fujii, T. (2003). Probing students’ understanding of variables through cognitive conflict problems: Is the concept of a variable so difficult for students to understand? In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 49–65). Honolulu: PME.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 45-85). London: Routledge.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahawah, NJ: Erlbaum.

Mestre, C. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: uma experiência de ensino* (Tese de doutoramento). Universidade de Lisboa, Lisboa.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Retirado de http://www.nctm.org/standards/.

Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 7-44.

Rivera, F. D. (2006). Changing the face of arithmetic: Teaching children algebra. *Teaching Children Mathematics, 12*(6), 306-311.

Stephens, M. (2006). Describing and exploring the power of relational thinking. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen & M. Chinnappan (Eds.), Identities, cultures and learning spaces. *Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 479-486). Canberra: MERGA.

Tabach, M., & Friedlander, A. (2008). The role of context in learning beginning algebra. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.) *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth Yearbook* (pp. 223-232). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

O efeito do uso de um *applet* na aprendizagem de equações do 1.º grau com denominadores numa turma do 7.º ano de escolaridade do Ensino Básico

<u>*Ana Paula Gandra*</u>[1], *Ana Paula Aires*[2], *Paula Catarino*[3]

[1]Escola Básica e Secundária Fontes Pereira de Melo, *anapgandra@gmail.com*

[2]Departamento de Matemática da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, UTAD. Lab_DCT do CIDTFF da Universidade de Aveiro, *aaires@utad.pt*

[3]Departamento de Matemática da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, UTAD. Lab_DCT do CIDTFF da Universidade de Aveiro e CMAT-UTAD, polo do CMAT da Universidade do Minho, *pcatarin@utad.pt*

Resumo. *Vários estudos sugerem que as dificuldades na aprendizagem da álgebra devem-se, em parte, ao modo como os alunos fazem a transição da aritmética para a álgebra. Atualmente existe uma grande diversidade de recursos tecnológicos ao nosso dispor, em particular, na Internet, tornando-se imprescindível a reflexão sobre o seu contributo para o ensino e aprendizagem da álgebra. Este estudo pretende analisar de que forma é que a exploração do applet, Algebra Calculator, pode contribuir para o ensino e aprendizagem das equações do 1.º grau com denominadores. Especificamente, pretende-se analisar a forma como os vinte alunos de uma turma de 7.º ano de escolaridade do Ensino Básico, sem nunca terem resolvido equações com frações, utilizam procedimentos aritméticos na resolução deste tipo de equações. Interessa-nos também perceber se existe influência do uso do applet nas resoluções dos alunos. Este trabalho é realizado no quadro de uma experiência de ensino, durante a lecionação dos princípios de equivalência na resolução das equações. A análise de dados incide na observação das aulas e nas produções escritas dos alunos, antes e após o estudo do tópico. Os resultados mostram que, ao longo do estudo do tópico, a maioria dos alunos aprendeu a fazer a redução de todos os termos da equação ao mesmo denominador e, de seguida, a eliminação dos denominadores, na resolução de equações do 1.º grau com denominadores, mesmo aqueles que tinham fraco rendimento a Matemática.*

Palavras-chave: *álgebra; applet; equações; denominadores*.

Abstract. *Several studies suggest that the difficulties in learning algebra are due, sometimes, to the way students make the transition from arithmetic to algebra. Now there is a great diversity of technological resources everywhere, particularly on the Internet, making it essential to reflect on their contribution to teaching and learning of algebra. The aim of this study is to investigate how the applet Algebra Calculator, can contribute to the teaching and learning of a 1st degree equations containing fractions. Specifically, we intend to analyse how twenty students of a 7th grade class of basic school, without ever having solved equations with denominators, using arithmetic procedures in solving equations with fractions. Also we are interested in to know if there is influence of the use of the applet in the*

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 309–321

resolutions of the students. This work is conducted within the framework of an educational experience for the teaching of equivalence of equations principles. Data analysis focuses on observation of the classes and the written productions of students before and after the study of the topic. The results show that, over the topic of study, most students learned to make the reduction of all terms to the same denominator, and then the elimination of the denominators in the 1st degree solving equations with denominators, even those who had poor performance in mathematics.

Keywords: *algebra; applet; equations; denominators*.

Introdução

O ensino da álgebra recebe particular atenção no 3.º ciclo do Ensino Básico (MEC, 2013), altura em que, formalmente, existe um primeiro contacto com o tópico das equações. A adaptação dos alunos a novas regras, símbolos e sua interpretação nem sempre é simples, existindo "alunos que conseguem um nível de desempenho razoável no trabalho com números e operações numéricas, mas que se deparam depois com grandes dificuldades na Álgebra" (Ponte, 2005, p.39), em particular na inclusão de letras em expressões matemáticas.

O modo como os alunos constroem as suas noções algébricas, normalmente à custa da sua experiência em aritmética (Matz, 1980; Booth, 1984, 1988) terá, certamente, implicações na sua aprendizagem. Booth (1988) e Kieran (1988, 1992) alegam que as dificuldades dos alunos na álgebra devem-se, em parte, à falta de entendimento de factos aritméticos elementares. Enquanto Booth (1984, 1988) considera que os erros na álgebra são o reflexo de uma má formação na aritmética, Matz (1980) sugere que não precisamos de sair da álgebra para justificar os erros dos alunos, isto é, os obstáculos encontrados no ensino e aprendizagem da álgebra não refletem, necessariamente, uma má formação em aritmética, ou, de outro modo, os erros em álgebra são, provavelmente, uma questão puramente algébrica.

A natureza interativa e dinâmica da tecnologia, a par das múltiplas representações que oferece, tem vindo a mudar as perspetivas sobre a aprendizagem de alguns conceitos algébricos (Ferrara, Pratt, & Robutti, 2006). Existem pequenas aplicações digitais, normalmente dirigidas a tópicos específicos do currículo, os *applets*, muitos dos quais disponíveis na *Internet*, que podem constituir ferramentas importantes para a aprendizagem (Heck, Boon, Bokhove, & Koolstra, 2007). Os *applets*, em particular, os *applets* algébricos, são aplicações dinâmicas e interativas, focadas em tópicos específicos, que podem servir para mostrar, visualizar, explorar e ensinar diferentes conceitos, apoiadas em submodelos emergentes que ligam a simbolização com o significado e dão constante *feedback* (Heck et al., 2007; Gravemeijer, Doorman & Drijvers, 2010).

Nesta investigação pretendemos descrever o trabalho desenvolvido com uma turma de 7.º ano de escolaridade, durante a lecionação das equações do 1.º grau com denominadores, bem como analisar e compreender de que forma a aplicação de um *applet*, o *Algebra Calculator*, poderá ser considerado um recurso pedagógico no ensino das *equações do 1.º grau* com frações no 7.º ano de escolaridade do Ensino Básico. Os alunos que nunca resolveram equações com denominadores e apenas têm conhecimento dos princípios de equivalência da adição e da multiplicação na resolução de equações vão realizar trabalho algébrico, no que diz respeito à resolução de equações com denominadores, utilizando regras aprendidas anteriormente na Aritmética. Por fim, são tecidas algumas considerações sobre o desempenho dos alunos na resolução de equações com denominadores, no final da unidade das "Equações".

Este texto está estruturado do seguinte modo: nas duas secções seguintes apresentamos uma breve contextualização teórica que serve de suporte ao estudo, seguindo-se uma caracterização da turma envolvida no estudo e descrição da experiência implementada. Por fim apresentamos os resultados dessa experiência e terminamos o texto com algumas conclusões pertinentes em relação ao estudo apresentado.

O ensino e a aprendizagem das equações

Ao longo dos tempos o ensino das equações do 1.º grau tem sofrido mudanças que, em Portugal, podem ser analisadas em vários documentos, nomeadamente, nos manuais escolares. Ponte (2004) analisou quatro manuais escolares portugueses, de diferentes épocas, e constatou que existe uma grande evolução em diversos aspetos na forma como são abordadas as equações do 1.º grau. Apesar da evolução, quando este tema é tratado sobressaem diversas dificuldades na sua aprendizagem em alguns alunos, como é referenciado pelo autor.

> A aprendizagem das equações, conceito central da Álgebra, representa para os alunos o início de uma nova etapa no seu estudo da Matemática. Ao lado das expressões numéricas, envolvendo números e operações com que contactaram anteriormente, surgem agora outras expressões, envolvendo

> novos símbolos e novas regras de manipulação, que remetem para outro nível de abstração. O início desta etapa revela-se particularmente problemático para muitos alunos, sendo neste ponto que se decide em grande medida quais suas possibilidades de sucesso futuro na aprendizagem escolar desta disciplina. (pp.149-150)

Estudos recentes têm contribuído para ajudar a perceber melhor as dificuldades e os erros mais comuns que os alunos cometem na resolução de equações do 1.º grau (Ponte, Branco & Matos, 2009). Estas dificuldades estão relacionadas com a forma como os mesmos efetuam a passagem da aritmética para a álgebra, como adquirem os conceitos de equação e de incógnita, como resolvem as equações e os problemas algébricos.

Kieran (2006) refere três abordagens para a resolução de equações, no início do estudo da álgebra, que podem ajudar no entendimento e resolução das equações: abordagem intuitiva, que inclui a estratégia relativa às propriedades dos números; abordagem de substituição por tentativa-erro, e abordagem formal.

Os *applets* no ensino e a aprendizagem das equações

A investigação mostra que a perspetiva de álgebra como aritmética generalizada é insuficiente para desenvolver nos alunos um pensamento algébrico adequado (Socas, 2011). Este autor sugere que o uso de novas fontes de significado, como as novas tecnologias, oferecem oportunidades para construir a compreensão concetual dos processos matemáticos no ensino da álgebra. Esta ideia é reiterada por Ponte, Branco e Matos (2009) que consideram ser fundamental integrar a tecnologia e estudar o seu uso com vista à promoção da aprendizagem.

Diversas investigações mostram que o uso da folha de cálculo ajuda os alunos a interiorizar a noção de variável e a desenvolver a sua capacidade de resolver certos tipos de problemas. No entanto, para alguns aspetos da aprendizagem da álgebra, como a resolução de equações, a folha de cálculo não parece ter um efeito visível (Ponte, Branco & Matos, 2009).

A interatividade e o dinamismo, características da tecnologia, particularmente visíveis nos *applets*, mudaram as perspetivas sobre a forma como o ensino e a aprendizagem de alguns conceitos matemáticos podem ser aprendidos, chamando a atenção para a construção de significados, mais do que os aspetos manipulativos (Ferrara, Pratt & Robutti, 2006; Duarte, 2011).

Existem *applets* direcionados para o ensino e aprendizagem da matemática que se podem encontrar em diversos *sites*, como por exemplo, no *site Mathpapa*, onde encontramos o *Algebra Calculator*, *applet* direcionado para o ensino e aprendizagem das equações do 1.º grau. O *Algebra Calculator* pretende ser uma calculadora que resolve equações passo a passo.

Documentos de orientação curricular e de investigação reconhecem que a aprendizagem dos alunos pode beneficiar muito da tecnologia, através da visualização de noções matemáticas sob múltiplas perspetivas e representações interligadas e serem capazes de passar informação de uma forma de representação para outra (MEC, 2013; NCTM, 2007; Ferrara et al., 2006).

Uma experiência com alunos portugueses do 7.º ano de escolaridade

Seguindo os trabalhos de Duarte (2011) e Oliveira (2014), e tendo como foco a aprendizagem da resolução de equações do 1.º grau através da utilização de *applets*, utilizamos o *Algebra Calculator* para tentar perceber como é que este *applet* pode funcionar como um instrumento mediador da aprendizagem, contribuindo para que os alunos do 7.º ano de escolaridade que nunca resolveram equações com denominadores e apenas têm conhecimento dos princípios de equivalência da adição e da multiplicação na resolução de equações, possam resolver equações com frações, utilizando estratégias aritméticas.

Este episódio foi dinamizado no terceiro período do ano letivo de 2014/2015, numa turma da primeira autora, do 7.º ano de escolaridade constituída por vinte alunos, onze raparigas (55%) e nove rapazes (45%), com idades entre os 12 e 13 anos numa aula de cinquenta minutos. Relativamente à avaliação final, numa escala de zero a cinco, no primeiro período todos os alunos tiveram nível superior ou igual a três e no segundo período, cinco alunos (25%) tiveram nível dois.

O tema que estava a ser lecionado era o referente às Equações e ainda não tinha sido iniciado o subtema "Equações do 1.º grau com denominadores". As equações que os alunos já sabiam resolver com a regra da adição, com a regra da multiplicação e até mesmo, agrupando termos semelhantes, eram do tipo «$a \pm x = b$; $a = b \pm x$; $ax = b$; $a = bx$; $x \div a = b$; $a = x \div b$; $ax \pm b = c$; $a = bx \pm c$; $ax \pm bx = c$; $ax \pm bx + c = d$;

$ax+b=cx+d$ ». Os alunos costumavam utilizar o *Algebra Calculato*r para tirar as suas dúvidas, em casa e nas aulas.

Durante a primeira parte da aula (30 minutos), a professora começou por pedir aos alunos que resolvessem exercícios do manual escolar adotado (Marques & Ferreira, 2014) no âmbito das equações, incluindo equações com frações. Os alunos tiveram a possibilidade de comunicar oralmente, formular conjeturas, refutar e/ou discutir ideias em par, podendo consultar a professora e o *Algebra Calculator*, sempre que tivessem necessidade. Quando terminaram os exercícios propostos, os alunos mostraram as resoluções à professora que as corrigiu.

Na segunda parte da aula (20 minutos), os alunos resolveram individualmente sem auxílio do *Algebra Calculator*, uma questão aula (QA1) constituída por seis equações, sendo duas equações com frações. A professora funcionou como mera observadora. Foi solicitado aos alunos que registassem tudo o que faziam, que indicassem todos os cálculos efetuados, que não apagassem o que tinham feito e que, quando se enganassem, passassem um traço por cima e continuassem. Os dados foram recolhidos pela primeira autora que era a professora da turma, fazendo uso das técnicas seguintes: observação presencial; recolha de elementos escritos produzidos pelos alunos no âmbito da questão aula, permitindo obter informação sobre os conhecimentos e capacidades dos alunos; realização de registos, o mais pormenorizado possível, imediatamente a seguir à aula, com observações e impressões do modo como os alunos reagiram e se envolveram nas tarefas, além de alguns episódios significativos.

Após a lecionação das equações do 1.º grau com denominadores, os alunos foram sujeitos a outra questão aula (QA2) com a mesma duração, onde apareciam duas equações idênticas às da primeira questão aula.

Resultados da experiência

Os coeficientes de sucesso obtidos, foram globalmente satisfatórios e alguns superaram as expectativas. Assim, na sua maioria (90%), os alunos sabem resolver uma equação usando o princípio de equivalência da adição, o princípio de equivalência da multiplicação e agrupam termos semelhantes.

Em relação à primeira equação com frações, $-\frac{2}{3}b=4$, que aparecia na QA1 (questão aula 1), a percentagem de sucesso é a mesma e os erros verificados são sobretudo de natureza aritmética, tendo-se constatado algumas dificuldades por parte dos alunos na multiplicação e na divisão. A figura 1 apresenta exemplos de resoluções desta primeira equação com frações.

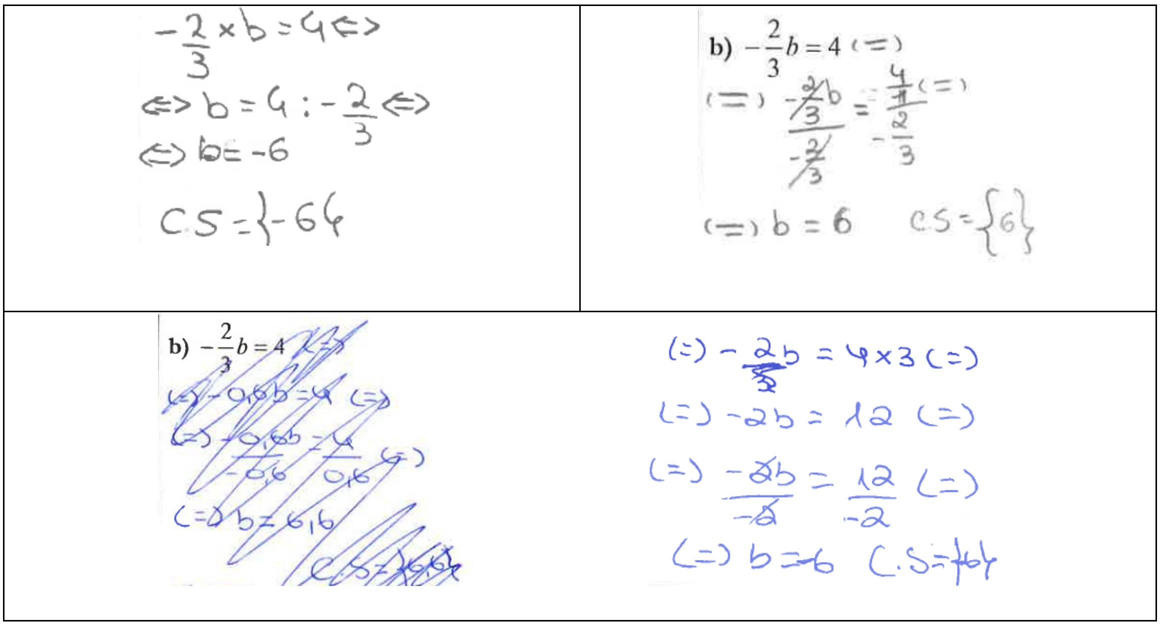


Figura 1. Exemplos de resoluções da primeira equação com frações da QA1.

No que diz respeito à segunda equação com frações, $\frac{x}{2}+4=10$, que aparecia também na QA1, a percentagem de sucesso é ligeiramente inferior (80%) e os erros advêm dos alunos não compreenderem os princípios de equivalência, quando têm de utilizar as regras da adição e da multiplicação e/ou de natureza aritmética. A figura 2 apresenta exemplos de resoluções desta segunda equação com frações, onde na última resposta se observa uma exceção, o aluno experimenta um valor e obtém a solução pretendida.

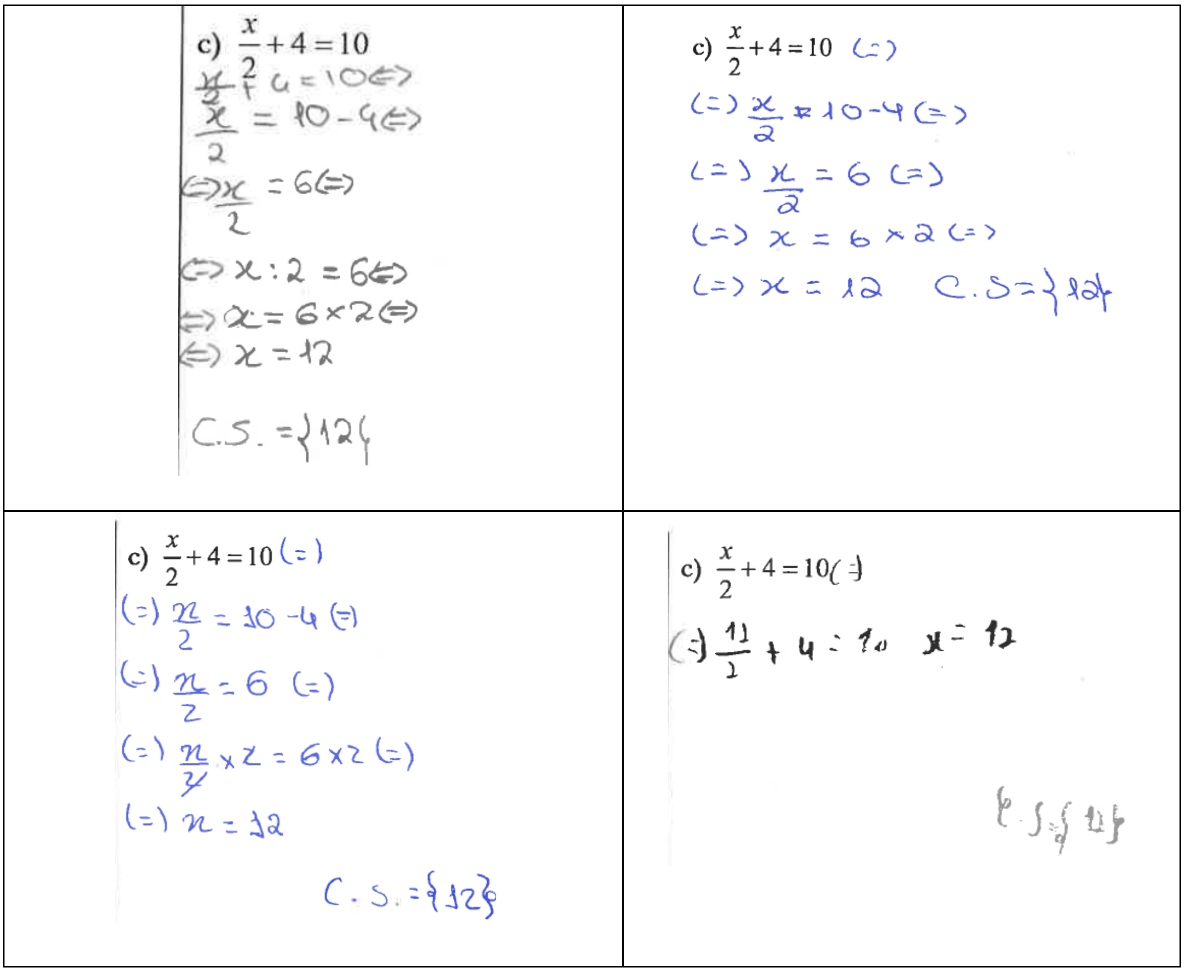


Figura 2. Exemplos de resoluções da segunda equação com frações da QA1.

A figura 3 apresenta os erros verificados nas resoluções da segunda equação $\frac{x}{2}+4=10$ da QA1, a mudança do termo independente de um membro para o outro não é acompanhada da mudança de sinal, o que advêm do aluno não compreender os princípios de equivalência, quando têm de utilizar a regra da adição.

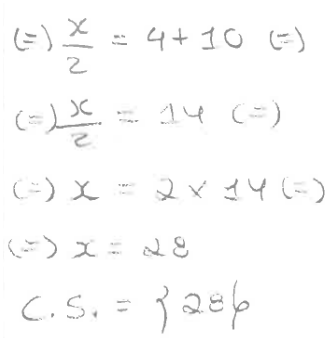


Figura 3. Erro verificado nas resoluções da segunda equação com frações da QA1.

Na QA2 (questão aula 2) resolvida pelos alunos após a lecionação das equações do 1.º grau com denominadores, onde apareciam duas equações análogas às equações da QA1, o sucesso manteve-se (90%). Na análise dos procedimentos empregues na resolução das equações do 1.º grau com denominadores, notou-se uma preferência significativa dos alunos de diferentes níveis de aproveitamento, em reduzir todos os termos da equação ao mesmo denominador e de seguida, desembaraçar de denominadores. A figura 4 apresenta exemplos de resoluções da equação com frações, $-\frac{2}{5}x=8$ da QA2.

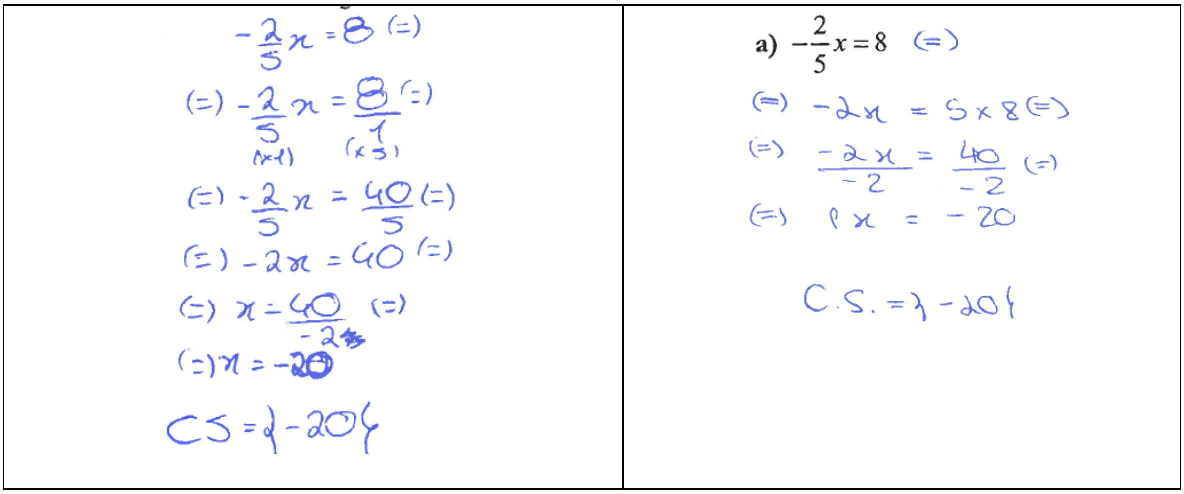


Figura 4. Exemplos de resoluções da primeira equação com frações da QA2.

A figura 5 apresenta o erro verificado nas resoluções da primeira equação $-\frac{2}{5}x=8$ da QA2 que advém dos alunos não compreenderem os princípios de equivalência quando têm de utilizar a regra da multiplicação ou do significado do termo com incógnita.

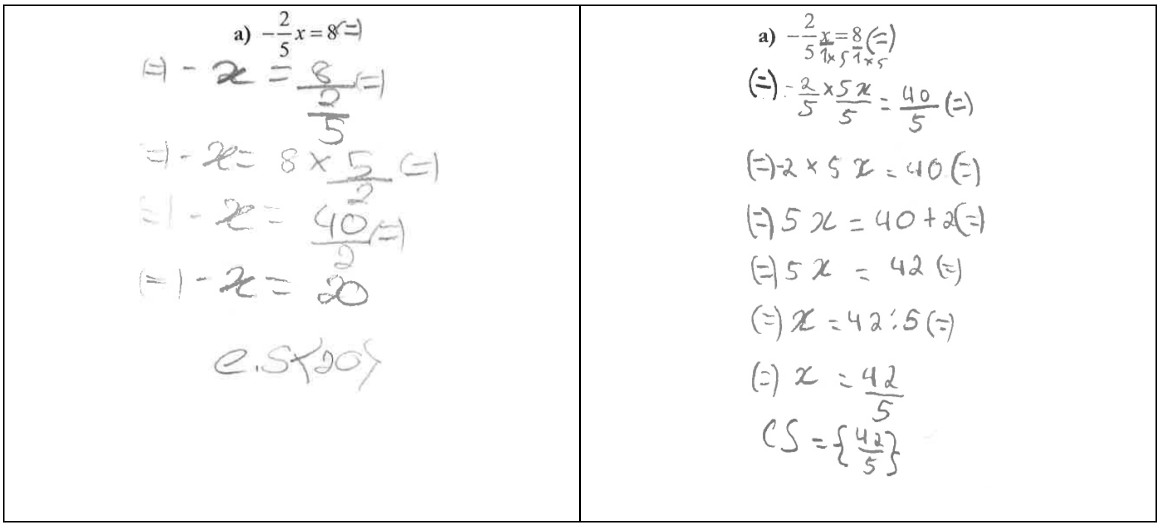


Figura 5. Erros verificados nas resoluções da primeira equação com frações da QA2.

Em relação à resolução da equação $\frac{x}{3}+1=6$ da QA2, o sucesso melhorou ligeiramente (a percentagem de respostas certas foi de 85%) apesar de ser ligeiramente inferior ao registado na resolução da primeira equação. Da análise dos procedimentos empregues na resolução das equações do 1.º grau com denominadores, podemos concluir que os alunos reduziram todos os termos da equação ao mesmo denominador e de seguida, desembaraçaram de denominadores. A figura 6 apresenta um exemplo de resoluções da equação $\frac{x}{3}+1=6$ da QA2.

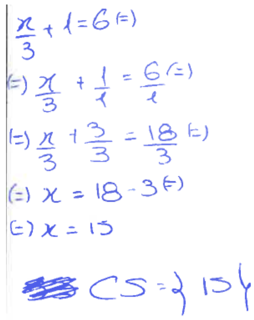


Figura 6. Exemplo de resoluções da segunda equação com frações da QA2.

Os erros verificados na equação $\frac{x}{3}+1=6$ da QA2 devem-se às razões já apontadas anteriormente, isto é, os alunos não compreenderam as condições da equivalência quando têm de utilizar as regras da adição e da multiplicação. A figura 7 ilustra um exemplo dos erros verificados nas resoluções da equação $\frac{x}{3}+1=6$ da QA2.

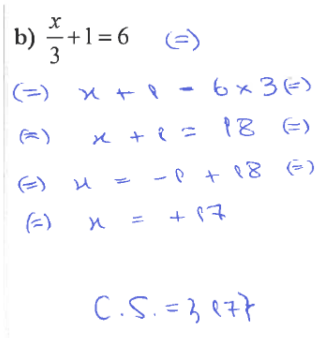


Figura 7. Erros verificados nas resoluções da segunda equação com frações da QA2.

Nas aulas seguintes à resolução das QA1 e QA2, respetivamente, as mesmas foram entregues aos alunos corrigidas. Durante a correção da QA1 e QA2, que foi feita no quadro pelos alunos sob a orientação da professora, todos os erros detetados foram alvo de reflexão e diálogo com a turma. Constatou-se que os erros de natureza aritmética verificados foram consequência da falta de compreensão dos princípios de equivalência. Durante a correção, ao verem a resolução correta das equações, os alunos de viva voz, reconheceram que a precipitação e a falta de concentração contribuíram para os resultados obtidos e perceberam que necessitavam de estar mais atentos nas aulas.

Conclusões

Os processos de observação levados a cabo nas aulas durante a lecionação da unidade das "Equações" permitem afirmar que o uso do computador, em particular do *Algebra Calculator* que resolve as equações apresentando os passos de resolução, facilitou a aprendizagem da resolução analítica das equações do 1.º grau e motivou os alunos, uma vez que sem a ajuda da professora, os alunos conseguiram resolver as equações propostas. Os alunos puderam aplicar e treinar os seus conhecimentos, repetindo os exercícios as vezes que quiseram sem usar papel e lápis.

A partir dos resultados das questões aula, QA1 e QA2, constatou-se que os alunos desenvolveram competências algébricas, ao usar o *Algebra Calculator* na aprendizagem da resolução das equações do 1.º grau, em particular, nas equações do 1.º grau com denominadores.

Depois do ensino e aprendizagem deste tópico, em que o *applet* foi incorporado, os alunos obtiveram melhores resultados do que os alunos de anos letivos anteriores que, nessa altura, apenas trabalhavam com o manual escolar. Aparentemente, o *applet* incentivou os alunos a desenvolver e a executar pensamento algébrico, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa e consolidada dos princípios de equivalência. Os alunos conseguiram fazer a aplicação prática do segundo princípio de equivalência, o desembaraçar de denominadores numa equação, isto é, reduziram todos os termos da equação ao mesmo denominador e de seguida, determinaram uma equação equivalente à dada sem denominadores.

As classificações dos alunos neste tópico foram iguais ou superiores às classificações obtidas anteriormente. No entanto um grupo de alunos (20%) de aproveitamento bastante satisfatório, apesar de reconhecerem vantagens na aplicação desta metodologia de trabalho, tiveram dificuldades com ela, uma vez que na aula, ao construírem a sua própria aprendizagem auxiliados pelo *Algebra Calculator* e pela professora, não houve lugar às habituais idas ao quadro para poderem apreciar o trabalho desenvolvido. O *feedback* construtivo habitual por parte da professora, que normalmente elogia o trabalho bem feito e corrige os erros dos alunos, foi feito individualmente e não em grande grupo, o que despertou a necessidade de uma permanente solicitação da mesma por parte dos alunos envolvidos e conduziu a um ambiente de alguma indisciplina.

De um modo geral, os alunos conseguiram resolver equações do 1.º grau com frações antes do ensino formal das equações com denominadores. Foi agradável constatar que os alunos participantes deste estudo dominam as operações básicas e utilizaram os princípios de equivalência antes do ensino formal dos mesmos.

Referências bibliográficas

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. Windsor: NFER-NELSON.

Booth, L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12* (1988 Yearbook, pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Duarte, J. (2011). *Tecnologias e pensamento algébrico: Um estudo sobre o conhecimento profissional dos professores de Matemática*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. In A. Gutierrez, & P. Boero (Orgs), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present and future* (pp. 237-273). Rotterdam: Sense.

Gravemeijer, K., Doorman, M., & Drijvers, P. (2010). Symbolizing and the development of meaning in computer-supported algebra education. In L. Verschaffel, E. de Corte, T. Jong & J. Elen (Eds.), *Use of representations in reasoning and problem solving: Analysis and improvement*. (pp. 191-208). Oxford: Routledge.

Heck, A., Boon, P., Bokhove, C., & Koolstra, G. (2007). *Applets for learning school algebra and calculus: experiences from secondary school practice with an integrated learning environment for mathematics*. Obtido de http://uu.academia.edu/ChristianBokhove/Papers/219885/Applets_for_Learning_School_Algebra_and_Calculus

Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12* (1988 Yearbook, pp. 91-96). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York, NY: MacMillan e National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-49). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Marques, M. & Ferreira, P. (2014). *Projeto Desafios Matemática 7.º Ano*. Carnaxide: Santillana – Constância.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Mathematical Behavior*, *3*(1), 93-166.

Ministério da Educação e Ciência (MEC). (2013). *Programa Metas curriculares Matemática - Ensino Básico*. Lisboa: Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M. C.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007). *Princípios e Normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Oliveira, E. (2014). *A utilização das aplicações interativas no ensino e aprendizagem das equações do 1.º grau*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Ponte, J. P. (2004). As equações nos manuais escolares. *Revista Brasileira de História da Matemática*, *4*(8), 149-170.

Ponte, J. P. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática*, *85*, 36-42.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: DGDIC.

Socas, M. M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la Investigación. *Números*, *77*, 5-34.

Ensino e aprendizagem dos números

Desenvolvendo a flexibilidade em rotinas de cálculo

Lurdes Serrazina[1], *Margarida Rodrigues*[2]
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, Universidade de Lisboa, [1]*lurdess@eselx.ipl.pt*, [2]*margaridar@eselx.ipl.pt*

Resumo. *Nesta comunicação analisamos a rotina "número do dia" desenvolvida numa turma do 1.º ano do 1.º ciclo, mostrando como a flexibilidade em cálculo mental está presente na forma como os alunos respondem ao questionamento da professora e apresentam as diversas representações do número do dia. Procuramos ainda fazer uma ligação entre a flexibilidade em cálculo mental e o processo de desenvolvimento conceptual. Os dados foram recolhidos através da observação das autoras e da videogravação e posterior transcrição da atividade desenvolvida. Na análise de dados procuramos evidenciar como os alunos utilizam os números, as quatro operações aritméticas, as relações entre elas e as suas propriedades. Discute-se também as fases de evolução conceptual dos diferentes alunos da turma, concluindo-se que a turma globalmente revela flexibilidade de cálculo, evidenciando um conhecimento do número, apoiado por uma teia de relações numéricas que a partilha coletiva e a discussão dos raciocínios dos alunos potenciam.*

Palavras-chave: *sentido do número; cálculo mental; flexibilidade em cálculo mental; estratégias de cálculo.*

Abstract. *In this communication we analyze the routine "day number" developed in a first grade classroom, where the flexibility in mental calculation is present in the way pupils answer to teacher's questions and justify their representations of number day. We also seek to make a connection between flexible mental calculation and conceptual development process. Data were collected through observation by the authors and videotaping and transcribing of the developed activity. In data analysis we try to put in evidence how pupils use the numbers properties, the four arithmetic operations, the relations between them and their properties. We also discuss the stages in the process of concept formation of the classroom pupils, concluding that, globally, the class reveals flexibility of calculation, evidencing a number knowledge, supported by numerical relations which are potentiated by the collective sharing and discussion of students' reasoning.*

Keywords: *number sense; mental computation; flexibility in mental computation; computational strategies.*

Introdução

Esta comunicação insere-se no Projeto *Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos* que está a ser desenvolvido por docentes das Escolas Superiores de Educação

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 323–337

de Lisboa, Setúbal e Portalegre, tendo como objetivos identificar os conhecimentos conceptuais dos alunos que estão em jogo nos diferentes níveis de compreensão das operações/relações numéricas e analisar se e como estes conhecimentos lhes permitem usar flexivelmente o cálculo mental. Nesta comunicação apresentamos a análise da rotina designada por "número do dia", desenvolvida numa turma do 1º ano de escolaridade, mostrando como a flexibilidade de cálculo, na perspetiva de Threlfall (2009), é visível na forma como os alunos desenvolvem essa atividade. Procuramos ainda fazer uma ligação entre a flexibilidade em cálculo mental e o processo de desenvolvimento conceptual, como definido por Sfard (1991).

O cálculo mental é assumido como um cálculo efetuado com os números globais, e não com os seus dígitos, através da aplicação das propriedades operatórias e do estabelecimento de relações numéricas, envolvendo o uso de variadas estratégias pessoais e podendo recorrer-se a registos em papel (Buys, 2001). Este tipo de cálculo encontra-se intimamente associado ao desenvolvimento do sentido de número, na medida em que este sentido se refere à capacidade de usar flexivelmente a compreensão sobre os números e as operações para desenvolver estratégias na manipulação dos números e das operações (McIntosh, Reys, & Reys, 1992). Diversos autores salientam a importância de existirem sessões diárias interativas e orais focadas no cálculo mental no início das aulas (Brown, Millet, & Askew, 2008; Fosnot & Dolk, 2002) como forma de desenvolver este tipo de cálculo nos alunos.

Flexibilidade em cálculo mental

A capacidade de usar o conhecimento de modo flexível, aplicando, de modo apropriado, o que é aprendido numa situação, numa outra é considerada fundamental para desenvolver a proficiência matemática (NCTM, 2000). A ideia de flexibilidade aparece associada ao cálculo mental e à resolução de problemas aritméticos. Existem diferentes maneiras de resolver um problema aritmético mentalmente, designadas normalmente por estratégias. Flexibilidade estratégica em cálculo mental refere-se ao modo como o problema é afetado pelas circunstâncias ao ser resolvido (Threlfall, 2009). Estas circunstâncias tanto podem relacionar-se com características específicas das tarefas como com características individuais ou ainda com variáveis contextuais. Threlfall (2009) designa o mecanismo subjacente à flexibilidade estratégica de *zeroing-in*, referindo que o mesmo não é totalmente consciente nem racional, envolvendo cálculos exploratórios parciais que decorrem de reparar em aspetos específicos dos números em causa e respetivas relações.

Segundo Fosnot e Dolk (2001), é necessário compreender o que significa operar com uma dada operação aritmética, mas isso não é suficiente. Estes autores referem que, por exemplo, muitas vezes os alunos compreendem o que significa adicionar dois números e mostram essa compreensão usando os dedos, cubos ou outro material. Mas, é fundamental que sejam capazes de estabelecer relações entre os factos básicos de modo a facilitar a sua memorização. Fosnot e Dolk (2001) apresentam diversas estratégias que, quando apropriadas pelos alunos, são importantes auxiliares no desenvolvimento daqueles automatismos (relativamente à memorização dos factos básicos) e consequentemente do cálculo mental. Entre estas, destacamos a ideia de dobro e quase dobro, desenvolvendo a partir daí cadeias de cálculo. Por exemplo, começando com o dobro de 5 (5+5), então 5+6 ou 5+4 são quase dobros. Esta relação pode também ser usada em sentido inverso (11-6 = 5), pois 11=10+1 e 5 é metade de 10, estabelecendo assim a relação dobro/metade. Hartnett (2007) inclui a estratégia de dobros e metades também como uma estratégia de cálculo mental tanto para a multiplicação como para a divisão. Este autor considera ainda a estratégia de contagem como uma forma de pensar a multiplicação a partir da adição de parcelas iguais.

Desta forma, os alunos vão desenvolvendo uma teia de relações, pois desenvolver a flexibilidade de cálculo passa por desenvolver uma compreensão relacional e flexível, de modo a que, por exemplo, quando os alunos revertem a adição para obter a subtração não necessitem de encarar a subtração como um novo processo, comprimindo as ideias matemáticas, tornando-as mais simples (Gray & Tall, 1994).

De acordo com Sfard (1991) e Tall (2013), os processos e os objetos matemáticos são duas faces da mesma moeda. Assim, o número tanto pode ser concebido estruturalmente como um objeto como operacionalmente como processo, sendo ambas as abordagens complementares. Na perspetiva de Sfard (1991), a conceção operacional é a primeira etapa na construção de novas noções matemáticas. Pegando no exemplo do número, a contagem constitui o processo operacional que conduziu a esse objeto matemático, do ponto de vista histórico mas também psicológico (Gray & Tall, 1994; Sfard, 1991). Assim, partindo da conjetura da origem operacional dos objetos matemáticos, Sfard (1991) propõe um esquema com 3 etapas hierárquicas no desenvolvimento de um conceito: (1) *interiorização*; (2) *condensação*; e (3) *reificação.* Durante a interiorização, o aluno torna-se competente nos processos até conseguir desempenhá-los através de representações mentais, sendo estes processos operações efetuadas em objetos matemáticos de baixo nível. Na fase de condensação, o aluno consegue pensar num dado processo como um todo, comprimindo as sequências longas de operações em unidades mais manejáveis. É esta fase que permite ao aluno combinar esse processo com outros processos, fazer comparações e generalizações. A autora refere, ainda, que a evolução do aluno nesta fase conduz a uma maior facilidade em lidar com diferentes representações do conceito. A fase de condensação encontra ressonância na perspetiva de Gray e Tall (1994) quando os autores referem que os alunos comprimem as ideias matemáticas, tornando-as mais simples. A condensação dura enquanto se mantiver a ligação com um determinado processo. A passagem para a terceira fase é repentina e coincide com a solidificação de um processo num objeto, numa estrutura estática. A mudança qualitativa para a reificação ocorre quando o aluno consegue ver algo familiar sob um novo prisma.

> As várias representações do conceito tornam-se unificadas semanticamente por este constructo abstrato e puramente imaginário. A nova entidade é rapidamente desligada do processo que a produziu e começa a desenhar o seu significado a partir do facto de ser um elemento de uma certa categoria. (Sfard, 1991, p. 20)

Essa categoria justifica a existência do novo objeto, podendo ser investigada seja no que respeita às suas propriedades gerais seja no que se refere às diversas relações entre os seus representativos. O novo objeto A, originado a partir de processos em objetos concretos, reificado enquanto conceito A, ficará sujeito a uma nova evolução, segundo estas três fases, funcionando como *input* para os processos, na fase de interiorização, até ocorrer a reificação do objeto B enquanto conceito B, e assim sucessivamente.

Gray e Tall (1994) propõem o constructo *proceito* formado por três componentes: (1) processo que produz um dado objeto matemático; (2) objeto matemático produzido por esse processo; e (3) símbolo representativo do processo ou do objeto. Tal como Sfard (1991), os autores consideram a combinação cognitiva de processo e conceito. Assim, na sua perspetiva, o pensamento procetual implica a flexibilidade de encarar o simbolismo como representação simultânea do processo e do objeto. Por exemplo, 5+3 é simultaneamente o processo de adicionar dois números e o objeto matemático correspondente à soma 8. Neste exemplo, o número 8, ao ser reificado, torna-se um objeto mental cuja manipulação, decomposição ou recomposição efetuadas de maneira flexível permitem que os alunos considerem as múltiplas representações do 8 como representações do mesmo objeto, unificando-as no seu significado enquanto número.

As múltiplas representações dos números constituem um componente importante do conhecimento e destreza com os números (McIntosh et al., 1992). Cusi e Malara (2007) distinguem as representações canónicas dos números naturais das representações não-canónicas. Tomando o mesmo exemplo, "8" é a representação canónica, representando a sua cardinalidade, e outras representações, como por exemplo, "5+3", "2x4", "2^3", "16/2", são representações não-canónicas. De acordo com as autoras, embora a representação canónica seja mais popular, ela é mais opaca, dizendo pouco acerca do número. Pelo contrário, cada uma das representações não-canónicas acrescenta informação sobre o número — "5+3" sublinha a estrutura do 5, "2x4" assinala que é múltiplo de 2 e de 4, "2^3" sendo uma potência de base 2 também indica que é múltiplo de 2, "16/2" indica que é metade de 16, e portanto, seu divisor — aprofundando o conhecimento do número e facilitando a identificação de relações numéricas.

Metodologia

Este estudo segue uma abordagem qualitativa dentro de um paradigma interpretativo (Erickson, 1986). Os dados aqui apresentados foram recolhidos através da observação das autoras, numa turma do 1.º ano, da atividade do “número do dia” — uma rotina desenvolvida durante cerca de meia hora no início do dia pelos alunos e pela sua professora. Esta atividade foi videogravada e posteriormente transcrita. A turma tinha 25 alunos mas neste dia estavam presentes 24.

Nesta rotina, o desafio consiste em apresentar diferentes representações simbólicas do número do dia, neste caso o 19, pois a atividade em análise foi desenvolvida no dia 19 de março de 2015. No lado esquerdo do quadro está afixada uma tabela do 100 (que muitas vezes funcionou como auxiliar de cálculo) onde estão registados os números até 109. A professora regista no quadro as diferentes representações envolvendo as quatro operações aritméticas propostas pelos alunos e pede explicações. Quando um aluno sabe uma representação diferente levanta a mão e espera pela sua vez.

Na sua prática letiva, a professora valoriza o desenvolvimento do cálculo mental, focando o trabalho dos alunos no estabelecimento de relações numéricas e de conexões entre as diversas operações aritméticas, através de um diálogo interativo e de questionamento focalizado. Embora privilegiasse a adição e a subtração, foi introduzindo a multiplicação e a divisão, de uma forma intuitiva e compreensiva, em ligação com o trabalho desenvolvido no âmbito da estrutura aditiva. Trata-se de uma professora com uma larga experiência, possuindo um conhecimento de Matemática e da sua Didática, que lhe advém, nomeadamente, de uma participação ativa em projetos e ações de formação contínua relativas ao ensino da Matemática nos primeiros anos.

As categorias de análise de dados foram construídas a partir do enquadramento teórico mas também emergiram de uma forma indutiva dos dados e focaram-se nos processos de resolução dos alunos – as relações aplicadas (como relacionaram os números, como relacionaram as operações, como usaram as relações inversas, como compararam quantidades); as propriedades das operações – e também nas fases da evolução conceptual – interiorização, condensação e reificação (Sfard, 1991).

Para preservar o anonimato os nomes dos alunos foram alterados.

19 de março: O Número do Dia

Os alunos encontram-se dispostos em grupo e cada par tem um colar de contas com 30 contas, alternadas na cor de 5 em 5, e uma mola para marcar o 19, embora nem todos os pares tenham feito a marcação. Uma das alunas conta de 5 em 5 — 5, 10, 15 — fazendo deslocar as contas e depois marca o 19 com a mola, fazendo deslocar mais quatro (Figura 1). No entanto, não verbaliza qualquer expressão.

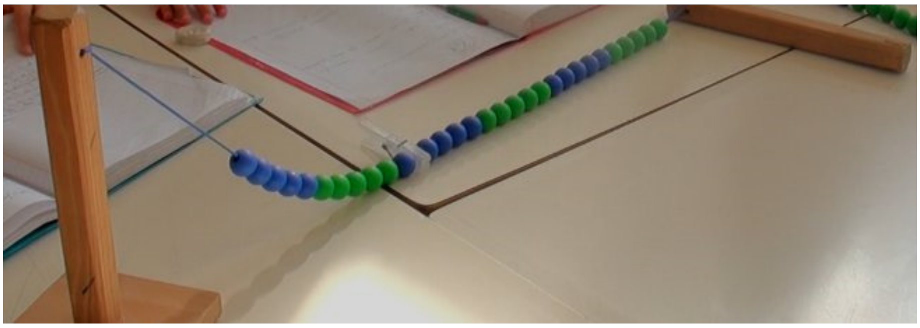


Figura 1. Colar de contas com a marcação do 19.

Apesar de disponíveis, os colares de contas não são usados como recursos auxiliares pela maioria dos alunos, tendo sido usados apenas por três alunos. Durante o decurso da atividade, por vezes, a professora recorre ao colar de contas para concretizar a expressão proposta pelos alunos ou para apoiar o seu raciocínio.

> Profª: Já toda a gente marcou o 19? O 19 está perto de que número, Maria?
> Maria: Do 20.
> Profª: Antes ou depois do 20, Marta?

Marta: 10+10-1.
Profª: Ajuda? O que dá 10+10?
Alunos: 20.

A professora inicia o diálogo com os alunos, registando no quadro as expressões propostas pelos mesmos, e normalmente, dirige-se a um aluno específico que tenha o braço levantado para intervir. Os alunos acompanham a discussão oral em torno dos diversos registos escritos no quadro, sem os escrever no caderno.

Profª: Renato, 19 é dobro ou quase dobro?
Renato: Quase dobro.
Profª: Qual o dobro que está a seguir ao 19?
Renato: 20.
Profª: Então fomos buscar o 10+10. E o que está antes?
Renato: 18.
Alunos: 9+9+1.
Profª: Lara, 19 é par ou ímpar?
Lara: É ímpar.

A ideia matemática do dobro/quase dobro, associada à noção de número par/ímpar, já tinha sido trabalhada anteriormente, e a professora mobiliza esta ideia no seu questionamento para que os alunos expressem o 19, relacionando-o com os números vizinhos, o 20 e o 18. O 20 é verbalizado em primeiro lugar pela Maria, talvez por se tratar de um múltiplo de 10. Assim, surgem primeiro as expressões que enquadram o 19 entre o 18 e o 20, sendo estes números decompostos nas suas metades: 10+10-1; 9+9+1.

Ilda: 5+5+5+4.
Profª: Consegues transformar isto, Ilda?
Ilda: 3x5+4.

Ilda verbaliza uma expressão que revela a estrutura dos grupos de cinco. Incitada pela professora, transforma a expressão, revelando já um sentido de multiplicação associado à adição de parcelas iguais.

Os alunos continuam a verbalizar as suas soluções:

Profª: Dario?
Dario: 38:2.
Profª: Porquê?
Dario: Porque 19+19 é 38.
Profª: Como é que tu chegaste ao 38?
Dario: Porque 18 mais 18 dá 36.
Profª: Calma!... Então fomos ao 18 mais 18 que é uma coisa que tu sabes, certo?
Dario: Sim.
Profª: 18 mais 18 dá quanto?

Dario: 36.
Profª: Como é que tu chegaste ao 19+19?
Dario: Mais 2.
Profª: De onde é que vem este 2?
Dario: Do 18 para o 19, mais 1; do 18 para o 19, mais 1.
Profª: Outra forma de fazer o 19+19, sem ir ao 18+18?
Maria: Juntamos a dezena do primeiro 19 e depois a outra dezena.
Profª: Esta dezena vale quanto?
Maria: 10. (*a professora regista 10+9+10+9).*
Profª: E agora?
Maria: 10+10 é 20. 9+9 é 18. (*a professora regista 20+18, igualando as expressões)*

Dario exprime 19 como a metade de 38 (38:2). Evidencia, pois, a compreensão da relação entre dobro e metade. A professora desafia os alunos a utilizar outra estratégia, aproveitando a oportunidade para recordar o valor de posição dos números. A professora continua a questionar os alunos, chamando a atenção para a utilização da tabela e procurando que mais alunos participem.

Profª: Outro mais fácil, Luís? Olhem para a tabela. Como fazem rapidamente 19+19, Dario?
Dario (*olhando para a tabela, sentado no seu lugar*): 19+10=29, vindo para baixo; mais 9, porque faz na diagonal.
Profª: Porque é que na diagonal é mais 9?
Maria: Porque se nós andarmos para baixo, é mais 10, na diagonal, é mais 9.
Profª: Então, andar na diagonal é o mesmo que andar 10 para baixo...
Maria: E depois para trás.
Profª: Para trás, o quê? Como é que isso se diz?
Maria: Mais 10 menos um.

Aqui a professora aproveita para ir relembrando as relações entre os números na tabela e faz o registo no quadro, correspondendo ao último registo da figura 2.

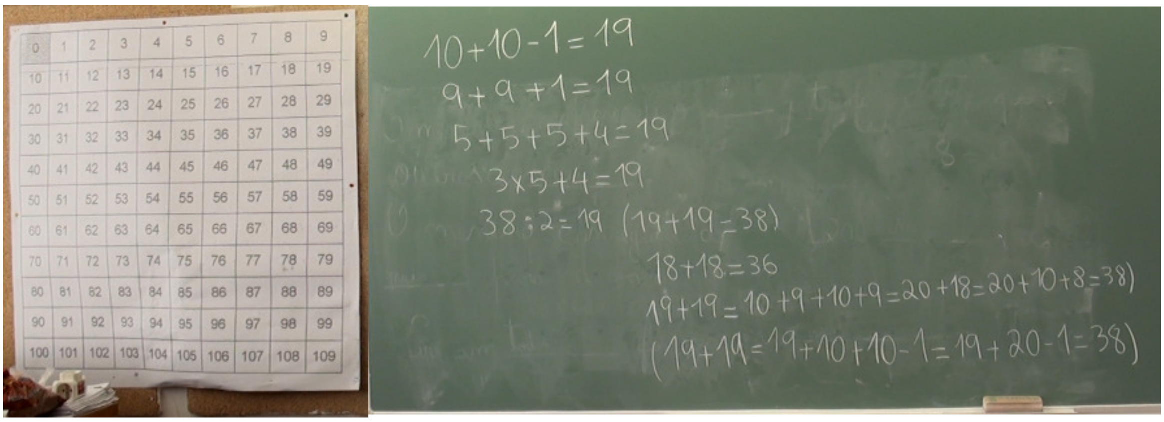


Figura 2. Tabela do 100 e diferentes expressões representativas do 19.

A professora continua a sugerir o uso da tabela como recurso para agilizar o cálculo:

Profª: Mais rápido? O 19 está próximo do 20. Porque é que eu não vou ao 20 logo no primeiro 19? Quanto é 20+20?
Alunos: 40.
Profª: Ajuda?
Alunos: Sim. Ajuda.
Profª: Então como faço isto? (*regista 19+19 = 20+20*). Quantos é que eu pus a mais aqui? (*aponta com uma mão para o 19 e com a outra para o 20*).
Alunos: Mais um.
Profª: E aqui? (*aponta com uma mão para o outro 19 e com a outra para o segundo 20*)
Alunos: Mais um.
Profª: Pus mais um aqui e mais um aqui (*apontando com uma mão para o 19 e com a outra para o 20, e novamente com o segundo 19 e 20*). O que tenho de fazer?
Alunos: Menos 2.
Profª: Tenho de tirar 2. (*a professora completa o registo 19+19 = 20+20-2*) Quanto dá?
Alunos: 38.
Profª: Qual é a forma mais rápida?
Alunos: Esta.
Profª: Concordo. (...) Então, voltando ao 38:2, o que é o 38 em relação ao 19?
Alunos: É o dobro.
Profª: É o dobro. (...) Quando eu divido o 38 em duas partes iguais, estou a fazer o quê?
Alunos: Estou a achar a metade.
Profª: Se eu dividir o 38 que é o dobro de 19, vou achar a sua...
Alunos: Metade.
Profª: Metade (*proferindo "metade" quase ao mesmo tempo que os alunos)*, dividindo ao meio.

A professora interpela os alunos para encontrarem novas formas de calcular 19+19. Maria usa a decomposição decimal e Dario, seguindo a sugestão da professora de usar a tabela, faz a leitura da tabela em coluna e depois na diagonal. A professora sugere, ainda, um novo uso da tabela focando a atenção dos alunos no 20+20 e compensando, depois, menos 2. E colocando a questão sobre a forma mais rápida de calcular 19+19, valoriza o uso do dobro de 20. No final, a professora focaliza novamente para a expressão proposta por Dario, 38:2, sistematizando a relação de dobro/metade.

Os alunos continuam a exprimir diferentes representações do 19, como por exemplo: 2x9+1=19 e 3x6+1=19, proferidas por João. Cada nova expressão suscita a geração de uma outra, como se estivessem encadeadas. Embora com uma estrutura similar, estas duas expressões foram propostas com algum distanciamento temporal. A expressão 2x9+1 foi proposta imediatamente a seguir a uma aluna ter proposto 18+1, parecendo que o João foi inspirado por esta última expressão, procurando representar o 18 como um produto.

O diálogo continua em plenário de turma:

> Armando: 4+4+... (*hesita*)
> Profª: O que é o 19? Par ou ímpar?
> Alunos: Ímpar.
> Profª: Quando escrevo 4+4, onde começo a contar? (*a professora pega num dos colares para exemplificar*)
> Alunos: (*depois de alguma hesitação*) Do zero.
> Profª: Se fizer contagens de 4 em 4, obtenho um ímpar? Vamos lá a contar.
> Alunos: 4, 8, 12, 16, 20.
> Profª: Chego ao 19?
> Alunos: Não.
> Profª: Porquê?
> Aluna: Porque 19 é ímpar e 4 é par.
> Profª: Então, diz lá, Armando.
> Armando: 4+4+4... (*hesita*)
> Profª. Ainda dá outro 4?
> Armando: 4+4+4+3.

A professora, depois de precisar o zero como ponto de partida da contagem de 4 em 4, volta a apelar para a conexão com o conhecimento da distinção entre números pares e ímpares. Após mais propostas vindas de diversos alunos, surge uma incidente no 100:

> Renato: 100:100...
> Profª: 100:100 quanto dá?
> Renato: Zero.
> Profª: Se tiveres 100 berlindes a dividir por 100 meninos, quantos berlindes recebe cada menino?
> Renato: 1.
> Profª: Então quanto é 100 a dividir por 100?
> Renato: Um. 100:100+18=19. (*a professora regista no quadro*)

Renato parece transpor a diferença entre 100 e 100 para o quociente entre 100 e 100. A professora recorre, então, ao contexto dos berlindes já explorado noutras tarefas anteriores para dar sentido à expressão proposta. Rapidamente, Renato retifica o zero para um.

A expressão proposta por Renato suscita outras similares, embora propostas mais tarde por outros alunos, já no momento final desta rotina: 10:10+18 (proposta por Luís); 1000:1000+18 (proposta por Dario e um pouco depois por Guilherme), 2000:2000+18 e 4000:4000+18 (verbalizadas por Dario mas não registadas). Com o uso de números de elevada ordem de grandeza, os alunos parecem querer generalizar a ideia matemática de que quando se divide qualquer número por si próprio se obtém sempre a unidade. E com a expressão desta generalização, conseguem o seu intuito de obter um elevado número de expressões representativas do 19.

Dario: 51:3=19. (*a professora regista no quadro*)
Profª: Onde foste buscar o 51?
Dario: 19+19+19 dá 51.
Profª: Porquê? Vamos ver... (*regista no quadro 19+19+19*). O que vimos aqui que era fácil de fazer?
Aluno: Podemos ir ao 20.
Dario e Maria: 20+20+20...
Profª: E agora o que é que eu faço?
Dario: Menos três.
Profª: Menos três. (*regista 19+19+19=20+20+20-3*)
Profª: Quanto é 20+20, Dario?
Dario: 40.
Profª: Mais 20?
Dario: Hann...
Prof: Quanto é 2+2 e +2?
Dario: Seis.
Prof: Quanto é 20+20? Mais 20?
Alunos: 60.
Profª: Agora menos 3. O 60-3?
Aluno: 56.
Maria: 57!

Dario revela alguma dificuldade em operar com os números perto da ordem de grandeza do 60, o que não acontece com números menores. A professora orienta os alunos para a leitura regressiva da tabela, desde o 60 até ao 57, e regista 57 no quadro, à frente do sinal de igual.

Profª: (*voltando ao 51:3*) Então está bem?
Alunos: Não.

A professora altera o registo para 57:3 (Figura 3).

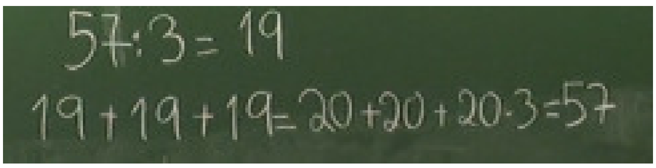


Figura 3. 19 como a terça parte de 57.

A professora continua a solicitar expressões a cada um dos alunos, individualmente, tendo a preocupação de dar a todos a oportunidade para se exprimirem.

João: 15+2+2=19 ou então 15+4=19.

Profª: Miguel?
Miguel: 4+5+3+3+4=19. (*Miguel vai deslocando as contas acompanhado pela professora que também aponta para os grupos de contas no colar à medida que vai registando a expressão formulada pelo aluno*)

João decompõe o 19 em 15+2+2 e recompõe 2+2 em 4, mostrando flexibilidade em movimentar-se na equivalência de diferentes expressões não-canónicas. Miguel propõe uma decomposição em grupos de 4, 5 e 3, tendo de ser apoiado pela professora com o colar de contas (Figura 4).

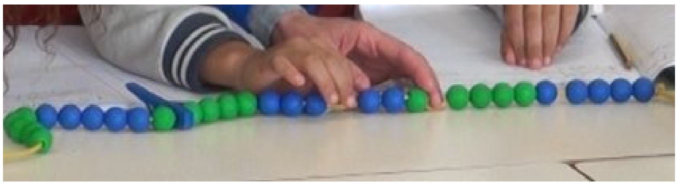


Figura 4. Miguel estruturando o 19 com o colar de contas e o apoio da professora.

Os alunos continuam a propor novas expressões até que a professora encerra a rotina: "Temos de terminar". Só no final da rotina é que os alunos registam nos seus cadernos diários algumas das expressões representativas do 19, ficando ao critério de cada um as que quiser copiar. O registo de todas as expressões representativas do 19 propostas pelos alunos, bem como o registo do seu raciocínio subjacente a algumas delas encontra-se na figura 5:

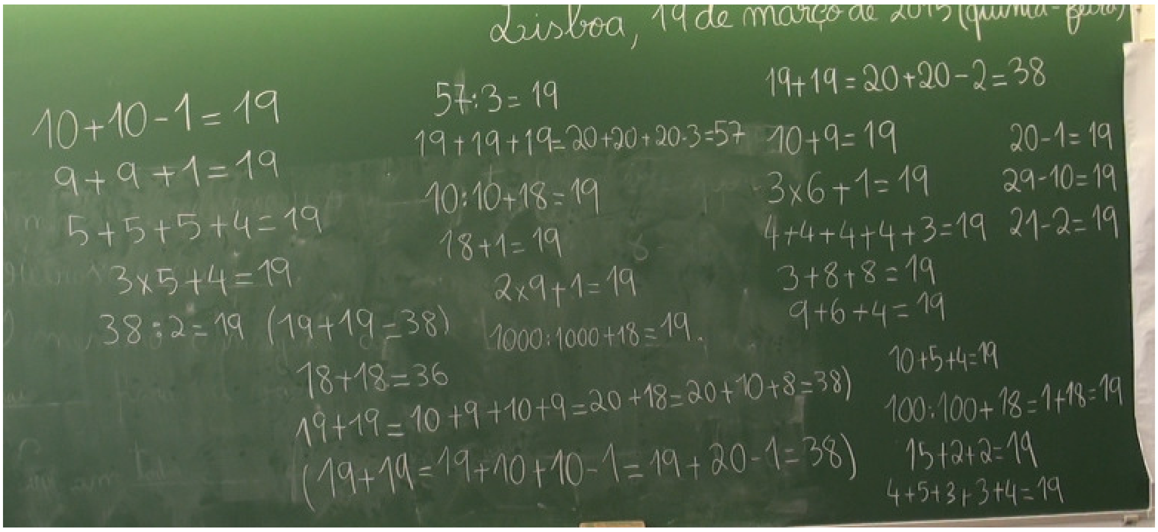


Figura 5. Representações não-canónicas do 19 propostas na rotina.

Para a grande diversidade de representações do 19, os alunos mobilizaram as quatro operações aritméticas, a relação do dobro e metade e aplicaram generalizações, dando evidência de terem já desenvolvido bases importantes para o cálculo mental flexível.

Considerações finais

A ideia matemática do dobro/quase dobro (Fosnot & Dolk, 2001), associada à noção de número par/ímpar, na turma do 1.º ano, não surge, primeiramente, decorrente do uso de uma dada estratégia nem ligada a uma dimensão processual operatória, mas sim como uma propriedade dos números. No entanto, esta propriedade permite olhar para os números como objetos mentais estruturados, de tal forma que são construídos como proceitos (Gray & Tall, 1994; Tall, 2013) resultantes da fusão entre número/objeto, processo e símbolo representativo de ambos. Assim, por exemplo, a expressão 10+10-1 comporta uma simbologia que representa simultaneamente o número quase dobro 19 através de decomposição reveladora de uma estrutura possível, bem como uma forma de operar no âmbito de uma estrutura aditiva produzindo o objeto matemático 19. Tal como sustentado por diversos autores (Sfard, 1991; Tall, 2013), conceito e processo são lados da mesma moeda. O dobro é também mobilizado como operador, e através da sua relação íntima com a metade, é aproveitado para gerar uma nova expressão do 19 como um quociente, como no caso de 38:2. É de destacar a forma como a professora, no final da partilha dos raciocínios subjacentes a essa expressão, sistematiza a relação inversa entre metade e dobro ("Se eu dividir o 38 [por 2] que é o dobro de 19, vou achar a sua metade").

O facto de a professora solicitar novas maneiras de efetuar um determinado cálculo suscita nos alunos o desenvolvimento da flexibilidade, ao encontrarem uma diversidade de processos para calcular uma mesma expressão, como aconteceu, por exemplo, com 19+19 (resultante da justificação de 38:2 dada por Dario), em que usaram a relação do dobro, associada a um facto básico ("Porque 18 mais 18 dá 36"), e aliada à estratégia da compensação (18+18+2; ou 20+20-2), bem como a decomposição decimal ("10+10 é 20. 9+9 é 18") ou, ainda, o cálculo por saltos (19+10+10-1), apoiado pela tabela do 100.

A característica do 19 como um número ímpar leva os alunos a decompô-lo em 18+1, exprimindo o 18 por diversos produtos já seus conhecidos como 2x9 ou 3x6. A decomposição 18+1 acaba por suscitar novas expressões, desta vez, representativas da unidade enquanto quociente entre qualquer número e o próprio número, em que os alunos propõem números grandes como forma de evidenciar o sentido alcançado da generalização envolvida (100:100+18; 10:10+18; 1000:1000+18 =19; 2000:2000+18 e 4000:4000+18). O contexto dos berlindes foi um recurso mobilizado pela professora para dar sentido à expressão 100:100 proposta por um dos alunos, sendo que deixou de ser necessário continuar a estabelecer a ligação com o contexto, nas sucessivas propostas de expressões que generalizaram a ideia associada a 100:100. Apesar dos alunos do 1.º ano, em março, ainda se encontrarem numa fase inicial de aprendizagem da multiplicação e da divisão, seis alunos da turma mostram ser capazes de usar de forma apropriada estas duas operações e começam a fazer generalizações, como é o caso do exemplo atrás referido.

A turma revela, globalmente, flexibilidade de cálculo, dando evidência de um conhecimento do número suportado por uma rede de relações numéricas, que é potenciado pela partilha coletiva e discussão dos raciocínios dos alunos acerca das diferentes representações não-canónicas propostas (Cusi & Malara, 2007). A equivalência dessa diversidade de representações é um fator que contribui para esse conhecimento, conduzindo também à geração de novas expressões que são encadeadas nas expressões propostas anteriormente, indicador de relacionamento numérico flexível (Tall, 2013). Não obstante, identificamos diferentes níveis de desenvolvimento conceptual (Sfard, 1991). Alguns alunos encontram-se na fase de interiorização, como é o caso do Miguel que ainda precisa de operacionalizar contagens, com o apoio do recurso do colar de contas. Outros encontram-se na fase de condensação, conseguindo comprimir operações já efetuadas de modo competente e mentalmente em unidades mais simples, fazer generalizações e alternar entre diferentes representações do número. É o caso de João que, ao decompor o 19, comprime a iteração de 5 em 5 (5+5+5) numa unidade manejável, o 15; e do Luís, ao propor 10:10+18, generalizando o 1 enquanto quociente de um número por ele próprio, a partir do 100:100. Outros, como o Dario, parecem já ter reificado o 19 enquanto objeto matemático mental, fazendo de modo flexível decomposições e recomposições, e tomando como base factos básicos memorizados. Neste nível superior de reificação, as diferentes expressões simbólicas do número são já interpretadas como nomes de uma estrutura, uma entidade estática, a que corresponde um elemento de um determinado conjunto com propriedades bem definidas.

Esta rotina, devidamente explorada pela professora, de forma interativa com os alunos, é potenciadora do desenvolvimento da flexibilidade de cálculo, dando espaço para cada um dos alunos exprimir uma dada representação, seja qual for o seu nível de desenvolvimento conceptual. O material manipulável suportou o pensamento matemático de apenas três alunos, sendo que a maioria lida já com os números de um modo mais formal enquanto objetos mentais. Sendo uma rotina suficientemente aberta para contemplar diferentes ritmos de aprendizagem, é simultaneamente potenciadora do desenvolvimento dos alunos para níveis superiores de pensamento.

Referências bibliográficas

Brown, M., Millet, A., & Askew, M. (2008). O impacto da estratégia nacional de numeracia no ensino e na aprendizagem em Inglaterra. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Orgs.), *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 61-96). Lisboa: Escolar Editora.

Buys, K. (2001). Mental arithmetic. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school* (pp. 121-146). Netherlands: Freudenthal Institute (FI) Utrecht University and National Institute for Curriculum Development (SLO).

Cusi, A., & Malara, N. (2007). Approaching early algebra: Teachers' educational processes and classroom experiences. *Quadrante, 16*(1), 57-80.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3ª ed.). New York: Macmillan.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing number sense, addition, and subtraction*. Portsmouth: Heinemann.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division*. Portsmouth: Heinemann.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 115-141.

Hartnett, J. (2007). Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. In J. Watson & K. Beswick (Ed.), *Mathematics: Essential research, essential practice. Proceedings of the thirtieth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. (MERGA-30)* (I, pp. 345-352). Hobart: MERGA.

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12,* 2-8.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics Education*, *22*, 1-36.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics (Learning in doing: social, cognitive and computational perspectives).* Cambridge: Cambridge University Press.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 541-555.

Desenvolver o cálculo mental: Construção de uma teoria local de aprendizagem através de uma Investigação Baseada em Design

Renata Carvalho[1], *João Pedro da Ponte*[2]
[1]Agrupamento de Escolas Joaquim Inácio da Cruz Sobral, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, *renatacarvalho@campus.ul.pt*
[2]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, *jpponte@ie.ul.pt*

Resumo. *A Investigação Baseada em Design (IBD) é uma metodologia de investigação promissora que começa a dar os seus passos em Portugal, apesar de ser usada em educação desde a década de 90. O objetivo deste artigo é descrever as potencialidades da IBD na construção de uma teoria local de aprendizagem relativa ao desenvolvimento de estratégias de cálculo mental com números racionais dos alunos do 6.º ano e refletir sobre essa experiência. Subjacente à construção desta teoria local de aprendizagem está o aperfeiçoamento do quadro teórico, do design da experiência e de conjeturas de ensino aprendizagem, ao longo de dois ciclos de experimentação, tendo por base as reflexões da equipa de investigação sobre a preparação de tarefas, as observações em sala de aula e as análises retrospetivas.*

Palavras-chave: *investigação baseada em design; cálculo mental; números racionais; teoria local de aprendizagem.*

Abstract. *Design Based Research (DBR) is a promising methodological approach that is making its first steps in Portugal, despite being used in education since the decade of 90. The aim of this article is to describe the potential of DBR in the construction of a local instructional theory for the development of students' mental computation strategies with rational numbers in grade 6 and to reflect on this experience. Underlying the construction of this local instructional theory is the improvement of the theoretical framework, of the design experience and of learning conjectures, during two experimental cycles, based on reflections of the research team about the preparation of tasks, classroom observation and retrospective analysis.*

Keywords: *design-based research; mental computation; rational numbers; local learning theory.*

Introdução

A complexidade do ambiente de aprendizagem de uma sala de aula constitui um desafio para a investigação em educação. A compreensão das múltiplas interações que surgem, bem como das aprendizagens proporcionadas aos alunos requerem metodologias de investigação sofisticadas, como a Investigação Baseada em Design (IBD)[1]. Esta metodologia começou a surgir em educação a nível internacional (Cobb, Confrey, diSessa, Lehere, & Schauble, 2003; Collins, Joseph, & Bielaczyc, 2004) na década de 90, mas, em Portugal, só muito recentemente começou a ser usada, principalmente em estudos de doutoramento (Ponte, Carvalho, Mata-Pereira, & Quaresma, em preparação).

A IBD surge como forma de testar e refinar projetos educacionais baseados em princípios derivados de investigações anteriores (Collins et al., 2004). Esta perspetiva de refinamento progressivo, que a diferencia de simples experiências de ensino, envolve a experimentação de uma primeira versão de um projeto ou de uma sequência de tarefas, analisando os seus efeitos e revendo-a em ciclos sucessivos, sempre com base na experiência. Esta metodologia permite não só testar mas também gerar teorias. Gravemeijer e Cobb (2006) acrescentam que a IBD pode contribuir para minimizar o fosso que existe entre a teoria e a prática educacional uma vez que incide sobre problemas que surgem a partir da prática.

Esta comunicação constitui uma reflexão sobre um estudo de IBD que teve origem em problemas da prática de ensino identificados pela primeira autora, nomeadamente, das dificuldades dos alunos na aprendizagem dos números racionais e quase ausência de cálculo mental com este conjunto numérico. O seu objetivo é descrever as potencialidades desta metodologia na construção de uma teoria local de aprendizagem relativa ao desenvolvimento de estratégias de cálculo mental com números racionais dos alunos do 6.º ano e refletir sobre essa experiência.

Investigação Baseada em Design

Cobb et al. (2003) consideram a IBD uma metodologia de investigação propícia à compreensão de *ecologias de aprendizagem.* Para os autores, uma ecologia de aprendizagem é um sistema complexo de interações que envolve múltiplos elementos de diferentes tipos e níveis, incluindo as tarefas que os alunos resolvem, o discurso que é encorajado na sala de aula, as normas de participação estabelecidas, as ferramentas e materiais usados e as relações que se estabelecem entre estes elementos. Esta metodologia parte da conceção destes elementos, procurando antecipar como estes funcionam em conjunto para apoiar a aprendizagem.

Cobb, Jackson e Dunlap (2016) caracterizam a IBD por cinco aspetos essenciais: (i) incide sobre problemas da prática, procurando promover a aprendizagem dos alunos, a formação de professores ou a mudança sistémica; (ii) baseia-se em intervenções, para transformar processos que ocorrem em contextos reais; (iii) tem uma forte orientação teórica e pragmática; (iv) rege-se pelo teste, revisão ou rejeição de conjeturas sobre processos e meios de promover a aprendizagem ou a mudança; e (v) dada a sua preocupação teórica, visa a generalidade.

Gravemeijer e Cobb (2006) consideram que a IBD desenvolve-se segundo três fases: (i) preparação; (ii) experimentação em contexto; e (iii) análise retrospetiva. Além disso, inclui ciclos e microciclos de intervenção e revisão onde se testam e/ou criam novas teorias (Cobb et al., 2003). O processo interativo que ocorre nos ciclos e microciclos de intervenção caracteriza-se por ser prospetivo e reflexivo (Cobb et al., 2003): é prospetivo, no sentido em que as experiências de ensino são realizadas de acordo com um processo de aprendizagem sujeito a constantes refinamentos e reformulações, e é reflexivo, porque envolve testes de conjeturas muitas vezes conduzidos em vários níveis de análise.

A fase de preparação contempla a clarificação da intenção teórica, dos pressupostos da intervenção onde se incluem objetivos de aprendizagem ou possíveis transformações pretendidas, bem como a elaboração de uma conjetura de ensino aprendizagem a testar e a aperfeiçoar ao longo dos ciclos de experimentação (Cobb et al., 2003). Nesta fase poderão ser realizados estudos preliminares que representem uma mais-valia para a compreensão da ecologia de aprendizagem (Plomp, 2007). A par disto, Collins et al. (2004) alertam para a necessidade de se prever diferentes formas de "olhar" a experiência, ou seja, o foco e as variáveis dependentes e independentes que podem ser pontos críticos da experiência.

Na fase de preparação é importante pensar nestes aspetos para posteriormente perceber como se relacionam a fim de avaliar a experiência e sua realização. Collins et al. (2004) consideram que o foco deve ser contemplado a vários níveis: cognitivo, interpessoal, grupo ou sala de aula, recursos, escola ou instituição. Por exemplo, o foco de análise de uma experiência de ensino pode estar na relação entre as regras de sala de aula ou padrões de argumentação matemática e científica e a aprendizagem dos alunos ou no modo como a diversidade de experiências dos alunos pode ser um recurso para perceber as suas ideias.

No que se refere às variáveis dependentes, Collins et al. (2004) consideram que existem três grandes tipos que, de certo modo, se relacionam com os diversos focos sobre os quais incide a análise e avaliação da experiência de ensino: variáveis de ambiente, que inclui o envolvimento dos alunos na aprendizagem em sala de aula, a cooperação entre alunos, bem como o esforço que fazem para entender o tema que está a ser abordado;

variáveis de aprendizagem, tais como o conhecimento do conteúdo, capacidades (*skills*), disposições, estratégias metacognitivas, estratégias de aprendizagem; e variáveis sistémicas, como a sustentabilidade, extensão, escalabilidade, facilidade de adaptação e os custos. As variáveis de ambiente e de aprendizagem implicam a negociação de normas sociais para as discussões de sala de aula, formas organizadas de intervir e explicar raciocínios e normas sociomatemáticas (Yackel & Cobb, 1996).

No que respeita às variáveis independentes, Collins et al. (2004) identificam seis que importa ter em conta: o contexto/ambiente de aprendizagem; as características dos alunos; o suporte técnico; o apoio financeiro; o desenvolvimento profissional; e a trajetória da implementação. No entanto, destacam o contexto/ambiente de aprendizagem como uma variável crítica para o desenvolvimento de qualquer experiência, bem como as características dos alunos (idade, nível socioeconômico, taxa de rotatividade, etc.). Consideram ser importante determinar para que tipo de alunos a experiência é eficaz e de que forma, uma vez que esta pode não funcionar do mesmo modo com alunos com características diferentes. Este é um aspeto que reforça a necessidade de experimentação em contextos diversos tal como referem Nieveen, Mckenney e Van den Akker, (2006).

Na fase de experimentação, Cobb et al. (2003) defendem um envolvimento direto da equipa de investigação na sala de aula para que seja possível observar as ocorrências e posteriormente refletir sobre elas. Assim, consideram que é importante: ter uma visão clara dos percursos de aprendizagem esperados e dos meios possíveis de apoio que devem ser mantidos e partilhados pela equipa de investigação; manter relações permanentes entre os profissionais; desenvolver uma profunda compreensão da *ecologia da aprendizagem*, não só para facilitar a logística, mas porque esse entendimento é um objetivo teórico para a investigação; e realizar sessões regulares entre os elementos da equipa para interpretar acontecimentos e planear novas intervenções. Consideram importante que a equipa faça registos completos do processo para documentar as conjeturas em evolução, juntamente com as observações realizadas.

A fase de análise retrospetiva contempla a análise de um grande volume de dados, o que representa um dos grandes desafios da IBD (Cobb et al., 2003), embora este aspeto contribua para a credibilidade dos estudos. Esta análise é realizada no final de cada ciclo de experimentação, enquadrando o conhecimento produzido num contexto teórico mais amplo. Nieveen et al. (2006) indicam que, no final, o conhecimento produzido traduz-se num conjunto de *princípios de design* que não pretendem ser receitas para o sucesso, mas sim linhas orientadoras para quem pretende aplicar o conhecimento produzido a novos contextos. Pelo seu lado, Gravemeijer (2004) refere que a IBD cria "teorias locais" fortemente influenciadas por conjeturas de ensino-aprendizagem.

Metodologia

O presente trabalho tem por base um estudo qualitativo e interpretativo (Denzin & Lincoln, 2005) seguindo uma abordagem de IBD (Cobb et al., 2003). Participam duas professoras e duas turmas do 6.º ano (39 alunos), que tinham previamente abordado as quatro operações com números racionais nas suas várias representações (decimal, fração, percentagem) e a primeira autora (daqui em diante designada por investigadora) como observadora participante. De cordo com a metodologia IBD, o estudo desenvolveu-se em três fases (figura 1): preparação, experimentação e análise.

Figura 1. Fases do estudo.

A preparação envolveu uma primeira revisão de literatura e um estudo preliminar, com alunos do 5.º ano da investigadora em 2010/11. Este estudo baseou-se numa conjetura inicial (quadro 1) e num protótipo de experiência de ensino com 6 tarefas de cálculo mental, tendo por objetivo perceber as estratégias e erros dos alunos no cálculo mental com números racionais e as dinâmicas inerentes à realização de uma experiência de ensino centrada em tarefas de cálculo mental e na discussão coletiva dessas tarefas, a ser aperfeiçoada em dois ciclos de experimentação a realizar em 2012 e 2013. Posteriormente foi construída uma nova experiência de ensino tendo por base uma conjetura que evoluiu do estudo preliminar para o ciclo de experimentação I (quadro 1).

Quadro 1.

Evolução da conjetura de ensino aprendizagem

Estudo preliminar	Ciclo I	Ciclo II
Um trabalho sistemático na sala de aula, devidamente orientado, pode promover o desenvolvimento do cálculo mental.	Uma experiência de ensino realizada durante dois períodos letivos, baseada em tarefas de cálculo mental em contextos matemáticos e não matemáticos com números racionais positivos envolvendo as quatro operações e centrada na discussão das estratégias e erros dos alunos no 6.º ano: (i) Permite aos alunos desenvolverem um reportório flexível de estratégias de cálculo mental; (i) Contribui para uma melhoria gradual do seu desempenho em tarefas de cálculo mental, levando-os a cometerem cada vez menos erros.	Os alunos do 6.º ano desenvolvem estratégias de cálculo mental com números racionais positivos nas quatro operações quando: (i) As tarefas envolvem diversos contextos e diferentes representações de um número racional, bem como diferentes níveis de exigência cognitiva; (ii) Se promove a discussão coletiva das estratégias dos alunos com o intuito de partilhar e discutir os seus erros, bem como de construir um conjunto de relações numéricas que lhes permita aumentar o seu reportório de estratégias de forma a cometerem cada vez menos erros.

A planificação da experiência de ensino contempla a clarificação da intenção teórica da experiência (Cobb et. al., 2003), que relaciona o objetivo geral do estudo com as condições em que este ocorre (quadro 2). Contudo, o estudo de fenómenos complexos como as *ecologias de aprendizagem* não permite a especificação completa de tudo o que acontece, tornando-se fundamental definir os elementos que podem ser essenciais, auxiliares, acidentais ou assumidos como condições de fundo. Assim, definimos focos de análise e variáveis dependentes e independentes (tabela 1). A definição destes focos e variáveis, essenciais na IBD, apoiou uma análise e reflexão focada em aspetos suscetíveis de influenciarem o *design* da experiência, nos dois ciclos de experimentação, dando origem a refinamentos no quadro teórico, nas tarefas e gestão da discussão na sala de aula, como exemplificamos adiante. A fase de experimentação contempla dois ciclos realizados em duas escolas diferentes. Os dados foram recolhidos recorrendo a observação direta e participante da investigadora nas aulas em que se realizam tarefas de cálculo mental e de reuniões de preparação/reflexão da experiência de ensino com as professoras participantes.

Tabela 1.

Aspetos considerados na construção da experiência de ensino

Planificação da experiência de ensino	**Descrição**
Intenção teórica	Identificar e compreender as estratégias e erros dos alunos no cálculo mental com números racionais e perceber como se relacionam com as condições em que ocorre a experiência.
Foco	*Cognitivo*: o raciocínio dos alunos no cálculo mental (estratégias); os erros que cometem no cálculo mental; *Interpessoal*: a discussão na sala de aula (interações entre alunos); *Grupo ou sala de aula*: características dos alunos e participação; *Recursos*: *PowerPoint* temporizado, lápis e papel.
Variáveis dependentes	*Variáveis de ambiente*: envolvimento e participação dos alunos (normas sociais e sociomatemáticas); *Variáveis de aprendizagem*: evolução das estratégias dos alunos; *Variáveis sistémicas*: adaptação da experiência a dois contextos distintos.
Variáveis independentes	Contexto /ambiente de aprendizagem; Suporte técnico (*PowerPoint* temporizado).

A experiência de ensino elaborada pela investigadora foi discutida e preparada com as professoras das turmas que a realizaram na sala de aula. A experiência é constituída por 10 tarefas de cálculo mental envolvendo números racionais nas representações fracionária, decimal e percentagem e questões em contexto matemático (expressões com e sem valor em falta) e não matemático (situações contextualizadas). As tarefas foram apresentadas aos alunos através de um *PowerPoint* temporizado, tendo estes 15 segundos para resolver cada expressão e 20 segundos para resolver cada situação contextualizada e anotar o resultado numa folha de registo. As tarefas possuem duas partes, cada uma com cinco questões de cálculo mental, sendo no final de cada parte promovida uma discussão coletiva com partilha de estratégias dos alunos. A gestão desta discussão na sala de aula foi da responsabilidade das professoras intervindo, por vezes, a investigadora para esclarecer aspetos relacionados com a comunicação de estratégias e erros dos alunos. As reuniões de trabalho com as professoras foram áudio-gravadas e as aulas de cálculo mental foram áudio e vídeo-gravadas para posterior análise e reflexão sobre os momentos de discussão coletiva. Em cada ciclo de experimentação, surgem diversos microciclos influenciados pela reflexão realizada pela investigadora e professoras sobre a forma como decorrem as aulas de cálculo mental, a adequação do tempo previsto para cada tarefa, estratégias, erros e dificuldades dos alunos no cálculo mental, contributos do cálculo mental para o tópico matemático abordado nas restantes aulas de Matemática, aspetos a melhorar na gestão da discussão e pontos fortes e fracos da aula. Esta reflexão, em conjunto com uma revisão de literatura continuada, permitiu aprofundar a conjetura de ensino aprendizagem ou teoria local de aprendizagem, no sentido de a tomar cada vez mais específica e suscetível de orientar dinâmicas e abordagens na sala de aula capazes de promover o desenvolvimento do cálculo mental dos alunos com números racionais.

O quadro teórico (quadro 2) começou por constituir um conjunto de ideias para o desenvolvimento do cálculo mental dos alunos, tendo por base literatura de referência (e.g., Caney & Watson, 2003), sendo posteriormente fortalecido com teorias no âmbito da Psicologia Cognitiva (a Teoria dos Modelos Mentais de Johnson-Laird, 1990) e estabelecido um conjunto de relações que emergiram da análise de dados.

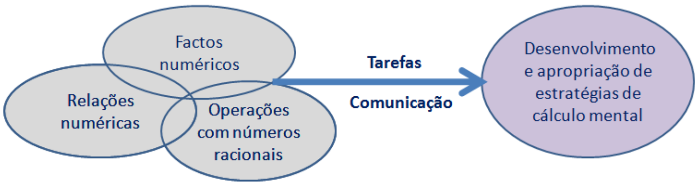
O refinamento deste quadro teórico centrou-se, primeiro na inclusão do conceito de imagem mental como elemento essencial ao cálculo mental dos alunos, e posteriormente evoluiu para representações mentais tendo em conta a teoria de Johnson-Laird (1990). Numa segunda fase, as tarefas e a comunicação foram excluídas do quadro concetual por não serem conceitos a desenvolver nos alunos, embora a sua importância seja indiscutível no quadro da experiência de ensino realizada. São um meio para atingir o fim pretendido. A referência ao sentido de número foi retirada do quadro concetual, não por não ser importante, mas por não ser um dos conceitos a analisar. Por fim, e à medida que a experimentação em ambos os ciclos foi evoluindo, a perceção das relações entre o uso de factos numéricos, regras memorizadas e relações numéricas foi sendo clarificada e aprofundada através da análise das estratégias dos alunos.

Na fase de análise foram visionados e transcritos episódios de aula. Este visionamento decorreu ao longo de toda a experimentação permitindo análises preliminares dos dados, tendo presentes os focos e variáveis definidas no quadro 2. Neste sentido, a análise retrospetiva constituiu uma constante ao longo do estudo. No final, esta análise foi aprofundada permitindo compreender não só estratégias e erros de cálculo mental dos alunos, mas também a evolução destas estratégias ao longo da experimentação e a avaliação da experiência de ensino do ponto de vista do *design* e realização.

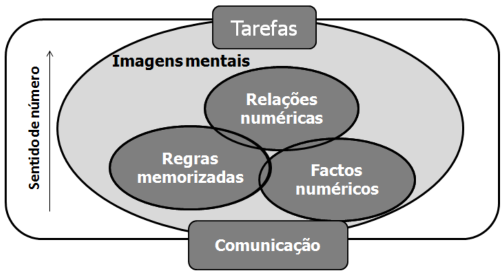
Quadro 2.

Evolução do quadro teórico

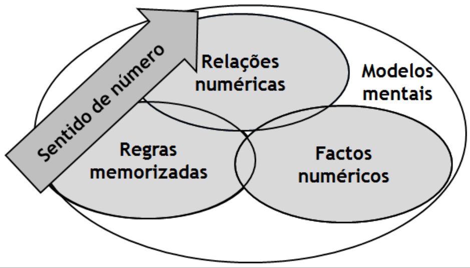
Ciclo I – Ponto de partida



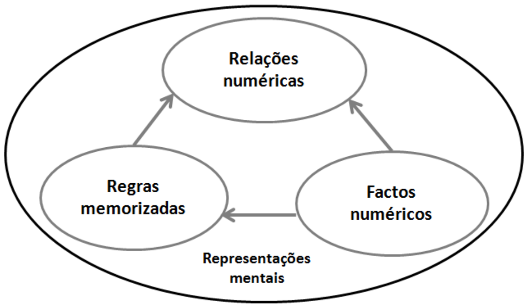
Ciclo I – Final do ciclo



Ciclo II – durante a experimentação



Ciclo II – Final do ciclo



Processo de construção de uma teoria local de aprendizagem

Na fase de experimentação foram realizados dois ciclos de experimentação. Os momentos de preparação das tarefas e de reflexão pós-aula em conjunto com as professoras participantes, foram potenciadores de refinamentos ao nível do *design* da experiência de ensino (tarefas e gestão da discussão) e do quadro teórico como apresentado na metodologia. Estes refinamentos culminaram no aperfeiçoamento sucessivo da conjetura de ensino-aprendizagem desde o estudo preliminar até ao ciclo de experimentação II (quadro 1). Tendo por base os focos e variáveis definidos na fase de preparação do IBD, em cada ciclo de experimentação, foram identificados os aspetos mais significativos e passíveis de originar refinamentos. Apresentamos exemplos de alguns destes aspetos, que originaram alterações ao nível do *design* da experiência. Uma análise mais completa e detalhada encontra-se em Carvalho (2016).

As tarefas

Os refinamentos realizados nas tarefas foram mais significativos no ciclo de experimentação II do que no ciclo I. No ciclo de experimentação I, as alterações mais significativas ocorreram a partir da tarefa 7 onde se intercalaram questões com e sem valor em falta, quando antes se apresentavam expressões sem valor em falta na parte 1 e expressões com valor em falta na parte 2 das tarefas (figuras 2 e 3). Subjacente a esta alteração, estão reflexões sobre as estratégias dos alunos (foco cognitivo) e respetiva evolução (variável de aprendizagem). Inicialmente antecipámos uma evolução das estratégias dos alunos da parte 1 para a parte 2 das tarefas uma vez que se promovia uma discussão aquando da resolução da parte 1, mas o grau de dificuldade de ambas as partes pareceu-nos condicionar esta evolução, pelo que decidimos apresentar tarefas mais equilibradas. Outro aspeto que influenciou esta decisão foi a dificuldade de alguns alunos em estabelecerem relações numéricas pelo que a alternância de expressões com valor em falta, potenciadoras do uso de pensamento relacional (Carpenter et al., 2003), com outras sem valor em falta pareceu-nos mais adequado. Esta alteração manteve-se no ciclo II.

No ciclo de experimentação II, um aspeto que marcou a experiência foi a dificuldade dos alunos em resolver expressões e não situações contextualizadas, como aconteceu no ciclo I. Isso levou-nos a efetuar uma organização diferente das questões por tarefa no ciclo II. A par disto, os erros manifestados pelos alunos no ciclo II no cálculo de expressões e a sua dificuldade em encontrarem estratégias de resolução para uma dada expressão (foco cognitivo) fez-nos perceber a necessidade de adaptar a experiência a um contexto de aprendizagem diferente (variável sistémica) onde os conhecimentos prévios dos alunos estavam aquém do que era esperado e antecipado pela investigadora e pela professora na preparação das tarefas. De notar que os dois ciclos de experimentação foram realizados em turmas com características diferentes[2] o que fez com que a variável sistémica em conjunto com a variável independente (contexto/ambiente de aprendizagem) assumissem alguma importância pela necessidade sentida em adequar a experiência no ciclo II, não só nas tarefas mas na gestão da discussão na sala de aula como iremos referir adiante.

Tarefa 9

Parte 1

$a)\ \frac{5}{10}+\frac{1}{4} b)\ 0{,}68-0{,}02\ c)\ \frac{4}{6}\times\frac{6}{7} d)\ \frac{9}{10}\div\frac{3}{10} e)\ 75\%\ de\ 20$

Parte 2

$f)\ \frac{6}{12}+?=1\ g)\ ?\ -2{,}2=\frac{1}{5} h)\ \frac{2}{3}\times?=1\ i)\ 0{,}75\div?=3\ j)\ 20\%\ de\ ?=\ 8$

Figura 2. Proposta inicial de tarefa 9.

Tarefa 9

Parte 1

$a)\ \frac{5}{10}+\frac{1}{4}\ b)\ \frac{6}{12}+?=1\ c)\ 0{,}68-0{,}2\ d)\ 2{,}2-\frac{1}{5}\ e)\ \frac{4}{6}\times\frac{6}{7}$

Parte 2

$f)\ \frac{2}{3}\times?=1\ g)\ \frac{9}{10}\div\frac{3}{10}\ h)\ 0{,}75\div 3\ i)\ 75\%\ de\ 20\ j)\ 20\ \%\ de\ ?=8$

Figura 3. Proposta reajustada da tarefa 9 no ciclo I.

Para ilustrar a dificuldade dos alunos em resolver expressões, apresentamos a estratégia de Luís (ciclo II) para o cálculo de $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ logo na tarefa 1: "[$\frac{2}{4}$] Eu fiz da mesma maneira que a Cristina: 1+1 e 2+2" ou a de António para o cálculo de $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ (tarefa extra a meio da experiência): "Eu pensei assim, já que são os dois com o mesmo numerador eu posso somar e dá $\frac{1}{9}$". Estas estratégias mostram dificuldades na compreensão do conceito de fração, influenciando a forma como os alunos operam na ausência de contexto da realidade. No caso das operações com numerais decimais, os alunos manifestaram uma forte tendência para recorrer a contextos de dinheiro, que em situações de adição e subtração ou de multiplicação de um decimal por um inteiro são uma boa representação mental de apoio (tendo-se verificado algum sucesso em operações deste tipo). Evidência disto é a estratégia de Bernardo que, mesmo numa situação contextualizada envolvendo o conceito de perímetro[3], recorre ao modelo mental de um contexto de dinheiro para realizar o cálculo: "Eu pensei em dinheiro… Pensei que tinha 4 amigos e que precisava de emprestar dinheiro aos 4. Reparti o 8,8 deu-me 2,2". Quando surgem questões envolvendo a multiplicação de numerais decimais este tipo de contexto manifesta-se desadequado e os alunos voltam a cometer erros baseados na incompreensão de relações numéricas, como mostra a estratégia de Rui para o cálculo de $25{,}5 \times ? = 5{,}1$ (tarefa 5 ciclo II): "[5] Vê-se logo. 5×5 dá 25 e 5×1, 5". Rui não recorreu a contexto de dinheiro, mas estabeleceu uma relação entre 5,1 e 25,5 em vez de fazer o contrário.

Os erros evidenciados pelos alunos no cálculo de expressões simples, associados à perceção que tivemos da falta de representações mentais de contextos diversos (Carvalho, 2016) que pudessem apoiar os alunos no cálculo mental, levou-nos, a partir da tarefa 5, a recorrer a tarefas maioritariamente mistas (parte 1 com situações contextualizadas e parte 2 com expressões) para que a discussão da parte 1 pudesse influenciar positivamente a compreensão de representações simbólicas e seu significado apresentadas nas expressões da parte 2. A figura 4 mostra os ajustamentos efetuados na tarefa 9 para o ciclo II.

Tarefa 9

Parte 1

a) A mãe da Catarina fez um bolo de chocolate. Ao almoço a Catarina comeu $\frac{1}{10}$ e o pai $\frac{1}{5}$. Ambos comeram mais ou menos de metade do bolo de chocolate?

b) A avó da Sofia vai-lhe fazer uma saia. De uma peça de tecido com 8,16 m usou $\frac{1}{8}$. Que porção de tecido usou?

c) Uma camisola custa 25€. O Vasco comprou-a com 20% de desconto. Calcula o valor do desconto.

d) Diariamente, 400 alunos almoçam no refeitório da escola do João. Destes alunos, $\frac{3}{4}$ comem sempre sopa. Quantos alunos comem sopa?

Parte 2

e) $\frac{5}{10}+\frac{1}{4}$ *f*) $2{,}2 - ? = \frac{1}{5}$ *g*) $\frac{9}{10} \div \frac{3}{10}$ *h*) $\frac{2}{3} \times ? = 1$ *i*) $20\%\ de\ ? = 8$

Figura 4. Tarefa 9 reajustada para o ciclo II.

A gestão da discussão na sala de aula

A discussão na sala de aula e interação entre alunos (foco interpessoal) mereceu muita reflexão, tendo levado a um reajustamento na gestão das discussões coletivas. Na verdade, é através da discussão das estratégias dos alunos que percebemos a adequação das tarefas, a evolução das estratégias e o modo como os elementos que definimos *a priori* como fundamentais (foco e variáveis) se relacionam e influenciam a dinâmica desenvolvida. Por exemplo, a dificuldade dos alunos em compreenderem o sentido de operação multiplicação/divisão com numerais decimais evidenciada na estratégia de

António para o problema b) da tarefa 9 (figura 4): “É $\frac{1}{8}$ a dividir [por 8,16]. [8 a dividir] por 8 deu 1. Dividi o 16 por 8 e deu 2. Ai eu coloquei 1,2”, denota dificuldades em compreender o tipo de quociente originado a partir da divisão de dois numerais decimais (sentido de operação) assim como o valor posicional dos algarismos. O valor posicional de 2 no quociente, não foi devidamente compreendido por António, face ao resultado que obteve da divisão de 16 por 8. Se para dividir 16 por 8 o aluno multiplicou 0,16 por 100 (para lhe facilitar o cálculo), teria posteriormente de dividir 2 por 100 para assim obter 2 centésimas. Na sequência da explicação apresentada por António, Rui intervém chamando a atenção do colega para este facto:

> Rui: Está errado.
> Professora ciclo II: Porque é que está errado?
> Rui: Porque ele pôs 1,2 . . . É 2 centésimas. Ele pôs foi uma unidade e 20 centésimas.
> Diogo: Mas a conta dele está bem. O resultado é que está mal.
> (...)
> Rui: Para fazeres $\frac{1}{8}$. 8÷8 dá 1, certo? E 16 a dividir por 8?
> António: 2.
> Rui: Sim, mas tu puseste 20.
> António: Está correto.

Rui pretendia ajudar António a perceber que estava a dividir 16 centésimas por 8 o que iria corresponder a 2 centésimas no quociente e não a 20, pois ao indicar como resultado 1,2 o aluno está a considerar que a parte decimal é constituída por 20 centésimas.

A necessidade de desconstruir determinados raciocínios fez com que ambas as professoras dessem continuidade a abordagens na aula de Matemática para reforçar a aprendizagem dos alunos em aspetos como este, o que levou a experiência de ensino para além dos momentos específicos de cálculo mental previstos, relacionando-se e integrando-se recorrentemente no percurso de aprendizagem matemática dos alunos. Nos momentos de cálculo mental os reajustamentos realizados na gestão da discussão passaram pela intensificação do questionamento aos alunos de modo a focá-los mais no essencial da discussão ou de os ajudar à compreensão das estratégias em discussão, pelo incentivo à interação crítica entre alunos, como evidenciam os casos de António e Rui, pelo reforço da relação entre representações dos números racionais e relação entre operações realizadas em expressões e situações contextualizadas.

No final do ciclo de experimentação II os refinamentos realizados nas tarefas e na gestão da discussão na sala de aula parecem ter dado os seus frutos tendo em conta as estratégias de Diogo (ciclo II) à questão a) da tarefa 9 (figura 4): "Menos. $\frac{1}{5}$ equivale a $\frac{2}{10}$. Se juntarmos $\frac{2}{10}$ mais $\frac{1}{10}$ do pai fica $\frac{3}{10}$. E para alcançar metade tinha que ser $\frac{5}{10}$. $\frac{3}{10}$ é menos de metade". O aluno mostra alguma destreza na linguagem e no uso de frações equivalentes sem necessidade de explicitar cálculos subjacentes, algo que não se verificou na generalidade dos alunos no início da experimentação. Também a estratégia de Ricardo para a resolução de uma situação contextualizada apresentada na tarefa[4] 10 ilustra a flexibilidade que alguns alunos foram adquirindo no cálculo mental com números racionais: "$\frac{1}{8}$ é um copo e 75% é $\frac{6}{8}$ . . . $\frac{6}{8}$ é 6 copos", nomeadamente ao nível da equivalência entre representações dos números racionais, algo que enfatizámos nas discussões coletivas. Por último, há a realçar o caso de Rui que no primeiro momento em que realiza cálculo mental com percentagens considera que o cálculo de 10% se resume a multiplicar uma quantidade por 10 (10% de 350 =3500). Na entrevista final, Rui mostra ter-se apropriado de algumas relações numéricas ao referir que 30% de 80 é 24: "Então 5% de 80 equivale a 4 porque se fosse 10% ia ficar sem um zero . . . Depois pensei o 25 para por o 30. Então, 25% de 80 equivale a 20. Isto dá 24". Na fase final da experimentação, Rui mostra agora compreender o que significa calcular 10% de uma quantidade e decompõe o cálculo de 30% no cálculo de 25% mais 5%.

Conclusão

Procurámos salientar alguns dos elementos críticos no desenvolvimento deste estudo, que foram promotores de refinamentos no *design* da experiência. Estes refinamentos originaram uma redefinição da conjetura de ensino-aprendizagem que assumimos como teoria local de aprendizagem e que constitui o principal contributo deste trabalho. Isso foi possível pelo facto da IBD favorecer a proximidade entre professores e investigadores num trabalho conjunto em prol da aprendizagem dos alunos, marcado por ciclos e microciclos de experimentação em que a equipa de investigação prepara antecipando, observa em conjunto e reflete posteriormente com o intuito de melhorar continuamente. Como referem Gravemeijer e Cobb (2006) trata-se de uma metodologia favorável à aproximação da teoria à prática. Isso foi também possível porque a IBD salienta a necessidade de estabelecer uma perspetiva teórica que relacione os objetivos do estudo com outros elementos particularmente críticos, nomeadamente os vários focos de análise e as variáveis dependentes e independestes previamente definidas. Estes elementos apoiaram uma reflexão conjunta e focada entre professoras e investigadora, originando refinamentos ao nível das tarefas e da gestão da discussão na sala de aula. Neste estudo, uma análise sobre o foco cognitivo e interpessoal em conjunto com as variáveis aprendizagem e sistémica foram essenciais para as mudanças realizadas.

Foi a reflexão acerca destes elementos que originou uma consolidação da teoria local de aprendizagem apresentada na última coluna do quadro 1. A primeira parte desta teoria relaciona-se com um conjunto de princípios essenciais para o *design* de tarefas que promovem o desenvolvimento de cálculo mental dos alunos (Carvalho & Ponte, 2014). A necessidade de tarefas com contextos diversos surge a partir da dificuldade dos alunos (ciclo II) em recorrerem a contextos diferentes dos de dinheiro para operarem com expressões; o uso de diferentes representações dos números racionais surge como essencial pelas relações numéricas que proporcionaram ao longo da experiência e é evidenciado pela flexibilidade que os alunos manifestaram em operar com números racionais no final da experiência; as tarefas de diferente exigência cognitiva, incluindo expressões com e sem valor em falta e situações contextualizadas permitiram aos alunos relacionar representações e operações entre questões diferentes dentro de uma mesma tarefa ou entre tarefas diferentes; a discussão coletiva como meio para promover o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos revelou-se fundamental, uma vez que estes constroem aprendizagens partilhadas através das múltiplas interações que estabelecem entre si e com o professor; além disso, a discussão coletiva mostrou constituir uma boa oportunidade para o professor avaliar formativamente os alunos relativamente aos números racionais e suas operações. Finalmente, há a referir que neste estudo, a IBD representou uma mais-valia não só para a construção do conhecimento em Didática da Matemática e para a aprendizagem dos alunos, mas também para o desenvolvimento profissional das professoras participantes.

Notas

[1] Proposta de designação em português para *Design-Based Research* de Ponte, Carvalho, Mata-Pereira e Quaresma (em preparação) que usamos neste artigo.

[2] Ciclo I – alunos com bom desempenho a Matemática e conhecimentos prévios sobre números racionais e suas operações; Ciclo II – alunos com desempenho mediano/fraco a Matemática e défice de conhecimentos prévios sobre números racionais e suas operações.

[3] O perímetro da face de um depósito cúbico é $8{,}8\ m$. Qual a medida do lado? – tarefa 5 do ciclo de experimentação II.

[4] A Ana quer encher copos com refresco. Cada copo tem $\frac{1}{8}l$ de capacidade. Quantos copos consegue encher a Ana com $0{,}75l$ de refresco?

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa atribuída à primeira autora (SFRH/BD/69413/2010).

Referências bibliográficas

Caney, A., & Watson, J.M. (2003). Mental computation strategies for part-whole numbers. *AARE 2003 Conference papers, International Education Research* (Disponível em http://www.aare.edu.au/03pap/can03399.pdf em 15/05/2010)

Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carvalho, R., & Ponte, J.P. (2014). *Design* de tarefas para o desenvolvimento do cálculo mental dos alunos. *Investigação em Educação Matemática: Tarefas Matemáticas* (pp. 95-107). Sesimbra: SPIEM (Disponível em http://www.spiem.pt/publicacoes/arquivo/).

Carvalho, R. (2016). *Cálculo mental com números racionais: um estudo com alunos do 6.º ano de escolaridade* (Tese de doutoramento). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehere, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9 –13.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.) *Handbook of international research in mathematics education* (Third edition, pp. 481-503). New York, NY: Routledge.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *The Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 15–42.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (2005). Introduction: The discipline and practice of qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, CA: SAGE.

Gravemeijer, K. (2004). Local instructional theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 105-128.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Ed). *Educational design research* (pp.17-51).London: Routledge.

Johnson-Laird, P. N. (1990). *Mental models*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Nieveen, N., McKenney, S., & Van den Akker, J. (2006). Educational design research: the value of variety. In J. Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Ed). *Educational design research* (pp.151-158).London: Routledge.

Plomp, T. (2007). Educational design research: an introduction. In T. Plomp & N. Nieveen (Eds.). An introduction to educational design research. *Proceedings of the seminar conducted at the East China Normal University* (pp. 9-35). Enschede: SLO.

Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., Quaresma, M. (em preparação). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*, 458-477.

Preparar, concretizar e refletir sobre como explicar os números racionais inversos: O caso de Ana

Nádia Ferreira[1], *João Pedro da Ponte*[2]
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, [1]*nadiadferreira@gmail.com*, [2]*jpponte@ie.ulisboa.pt*

Resumo. *No ensino dos números racionais coloca-se, aos futuros professores, o desafio de propor tarefas com situações suscetíveis de promover a compreensão de conceitos fundamentais. O objetivo desta comunicação é compreender o processo de preparação, concretização e reflexão que vivem os futuros professores do 2.º ciclo quando lecionam o conceito de números racionais inversos. Assim, analisamos a comunicação na prática de ensino supervisionada, dando atenção às ideias matemáticas destacadas na elaboração de explicações. Para tal, analisamos o caso de uma futura professora (Ana) que, reconhece a importância de explorar diferentes representações dos números racionais no processo de ensino-aprendizagem e o faz de diferentes modos e com vários focos. Discutimos, ainda, a natureza do conhecimento didático dos futuros professores quando pretendem promover a compreensão de ideias matemáticas relativas à multiplicação de números racionais inversos.*

Palavras-chave: *explicar; números racionais; prática supervisionada; conhecimento de futuros professores.*

Abstract. *In the teaching of rational numbers, prospective teachers face the challenge of proposing mathematical tasks with situations that may promote the understanding of fundamental concepts. The aim of this communication is to understand the process of preparation, implementation and reflection that prospective teachers (for grades 5-6) live when they teach the concept of inverse rational numbers. Thus, we analyze the communication in supervised teaching practice, paying attention to the mathematical ideas emphasized in building instructional explanations. To this end, we analyze the case of a prospective teacher (Ana), that recognizes the importance of exploring different representations of rational numbers in the teaching and learning process, and does so in different ways and with different focuses. We also discuss the nature of didactic knowledge of prospective teachers when they want to promote understanding of mathematical ideas concerning the multiplication of inverse rational numbers.*

Keywords: *explain; rational numbers; student teaching; knowledge of future teachers.*

.

Introdução

Os números racionais são um tema fundamental no programa de Matemática do 2.º ciclo. Trata-se de um tema que levanta dificuldades na aprendizagem aos alunos e que desafia os professores no que diz respeito ao seu conhecimento e às suas práticas. No ensino deste tema é incontornável o uso de diferentes representações e significados e a identificação da unidade de referência (Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2010). Apesar disso, pouco sabemos sobre como são usadas as diferentes representações, para que fins e quais as dificuldades que se levantam aquando do seu uso (Mitchell, Charalambous, & Hill, 2013) e o mesmo pode dizer-se relativamente à identificação da unidade de referência e aos diferentes significados dos números racionais.

É necessário compreender qual é o conhecimento para ensinar Matemática dos futuros professores, à entrada, durante e no final da sua formação (Ponte & Chapman, 2016). Em particular, consideramos importante entender o conhecimento dos futuros professores no momento da sua prática de ensino supervisionada, assumindo que tal conhecimento é nessa altura sujeito a circunstâncias que permitem a perceção da sua natureza. Na prática letiva podemos identificar as tarefas e a comunicação como aspetos essenciais. Analisando as tarefas definidas e a comunicação desenvolvida na prática letiva podemos compreender a natureza do conhecimento didático dos futuros professores. O nosso objetivo é compreender o processo de preparação, concretização e reflexão que os futuros professores do 2.º ciclo experimentam na exploração do produto de duas frações inversas na sua prática supervisionada. Especificamente, analisamos, a comunicação que preveem e conduzem, dando atenção às ideias matemáticas que destacam, quando elaboram explicações.

O conhecimento didático e a comunicação na prática letiva de futuros professores

Conhecimento para ensinar números racionais

O conhecimento do futuro professor pode ser considerado sob distintas perspetivas. Dois campos fundamentais são o conhecimento matemático e o conhecimento didático que, na prática letiva, surgem de forma integrada. Mas mais que mapear o conhecimento matemático e didático, é importante compreender a natureza deste conhecimento e como intervém na prática letiva. O conhecimento didático diz respeito ao modo como ensinar e é decisivo para que o professor possa exercer cabalmente o seu papel (Shulman, 1987). Envolve ideias gerais sobre a Matemática, o ensino da Matemática, o papel do professor e do aluno, as potencialidades de determinadas tarefas no ensino e aprendizagem da Matemática (Shulman, 1987) e as aprendizagens e dificuldades dos alunos em determinados tópicos. Relativamente ao conhecimento sobre tarefas, os professores devem ser capazes de selecionar, desenhar e sequenciar tarefas com determinados propósitos, definir e explorar estratégias de resolução das tarefas para a construção de ideias matemáticas e estabelecer uma sequência de ensino reconhecendo que determinadas opções influenciam oportunidades de aprendizagem (Chapman, 2013; Serrazina, 2012). Relativamente ao conhecimento sobre os alunos, os professores devem ser capazes de antecipar e identificar as suas dificuldades e erros comuns, quando ouvem e interpretam pensamentos incompletos. Devem também saber antecipar as resoluções dos alunos em tarefas específicas e o que estes consideram desafiante e interessante ou confuso (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Son & Crespo, 2009). Segundo Barnett-Clarke et al. (2010), uma das ideias fundamentais do ensino-aprendizagem dos números racionais é que "os números racionais têm múltiplas interpretações e dar-lhes sentido depende da identificação da unidade de referência" (p. 17). Relativamente às representações, os professores devem saber como os alunos lidam com as representações pictórica, verbal, fração, numeral decimal e percentagem dos números racionais e como as relacionam desenvolvendo uma compreensão do conjunto numérico na sua globalidade (Barnett-Clarke et al., 2010). Assim, quando exploram tarefas, os professores devem reconhecer os prós e contras da utilização de determinadas representações e saber aproveitar as estratégias e representações dos alunos para promover ideias matemáticas (Ball et al., 2008; Stylianou, 2010). No entanto, o uso de determinadas representações pode levantar desafios aos professores uma vez que estas podem reforçar equívocos dos alunos ao fazerem conversões incompletas ou por estarem demasiado afastadas do seu conhecimento inicial. Por exemplo, os professores podem considerar que uma certa representação ilumina determinadas ideias matemáticas e tal não acontecer (Mitchell et al., 2013).

Comunicação na prática letiva

A comunicação é um elemento estruturante da prática letiva, inerente ao processo de construção do conhecimento (Menezes, Ferreira, Martinho, & Guerreiro, 2014). Comunicar é tornar algo em comum podendo-se fazer uso de gestos, representações pictóricas e simbólicas, explicações e questões. Na sua dimensão discursiva, a linguagem pode ser oral e escrita, incluindo a linguagem e as representações matemáticas (Ponte & Serrazina, 2000). Um aspeto importante da comunicação é o questionamento, podendo-se distinguir entre diversos tipos de questões (focalização, confirmação e inquirição) (Ponte & Serrazina, 2000) e estudar diversos padrões de questionamento (Menezes et al., 2014). Outro aspeto importante da comunicação é a exploração de representações que apoiem a resolução de tarefas, sejam ou não representações construídas pelos alunos, de modo a construir ou ilustrar objetos, conceitos e situações matemáticas (Mitchell et al., 2013).

Um terceiro aspeto importante da comunicação são as explicações. Longe de se reduzir à simples "transmissão do conteúdo", explicar é um processo onde estabelecem relações entre ideias matemáticas. Para estabelecer essas relações podem ser usadas metáforas e analogias ou outras representações que permitam aos alunos compreender os conceitos e procedimentos (Medeiros & Ponte, 2010). As explicações dadas podem ter diferentes fins e características, focar-se nos procedimentos e/ou em conceitos e ser realizadas em diferentes momentos de uma aula. Segundo Charalambous, Hill e Ball (2011), podem ser realizadas para introduzir um novo conteúdo, responder a questões dos alunos, ou apoiar os alunos em dificuldades. Para além de apoiar a aprendizagem dos alunos, uma boa explicação pode eliminar ideias, significados e processos erróneos. Num estudo no âmbito da formação inicial de professores, Charalambous et al. (2011), debruçando-se sobre a qualidade das explicações elaboradas, consideram que uma explicação incoerente, incompleta ou pouco clara pode influenciar negativamente a aprendizagem dos alunos. Por outro lado, uma "boa explicação" é significativa e de fácil entendimento. Assim, o futuro professor deve: (i) ter o público em mente, usando uma linguagem apropriada aos alunos; (ii) definir de forma adequada os principais termos e conceitos; (iii) destacar as principais ideias matemáticas explicando o processo de pensamento passo-a-passo; (iv) usar exemplos adequados e representações modelando procedimentos e conceitos; e (v) esclarecer a questão em análise, mostrando como deve ser respondida (Charalambous et al., 2011).

Metodologia

Esta comunicação insere-se num estudo que assume uma abordagem qualitativa e interpretativa, seguindo um *design* de estudo de caso (Stake, 1995). Selecionaram-se três futuras professoras de duas escolas superiores de educação mas analisamos apenas o caso de uma delas quando leciona os números racionais inversos. Trata-se de Ana que tem 24 anos e estudou Matemática 12 anos antes de ingressar na ESE. Mostra insegurança relativamente ao que pretende realizar na sua prática, sentindo-se dividida entre uma abordagem do ensino direto e de ensino exploratório. Considera-se e é considerada como uma boa aluna mas por vezes com dificuldades em executar os seus propósitos.

As aulas de Ana foram observadas e videogravadas para posterior análise. Foram ainda analisadas as entrevistas semiestruturadas realizadas no início e no final do estágio (EI, EF), as entrevistas realizadas antes e depois da aula (EAAi, EDAi), as planificações (P) e registos pessoais (R). A análise dos dados assume um cunho descritivo e interpretativo procurando compreender o processo de preparação, concretização e reflexão da exploração do produto de duas frações inversas. Assim, nos momentos de preparação analisaram-se as estratégias de resolução das tarefas e as representações previstas que apoiariam explicações. Nos momentos de concretização focou-se a atenção no modo como se foram desenvolvendo as explicações realizadas e os aspetos sublinhados pela futura professora. Relativamente aos momentos de reflexão analisou-se a perspetiva da futura professora sobre as explicações que foi elaborando relativamente aos números inversos entre si.

Preparar, concretizar e refletir sobre como explicar números racionais inversos

Preparação da aula

Ana lecionou várias aulas sobre números racionais, sendo quatro delas de introdução a novos conceitos. Na primeira aula, a ideia central a explorar era o inverso de um número racional. Como os alunos já sabiam multiplicar números racionais, pretendia que os alunos representassem pictoricamente expressões de modo a visualizar que "o produto de um número pelo seu inverso é 1". Considerou que era importante que os alunos chegassem à regra:

> Para haver uma sequência lógica com as aulas que têm ocorrido. Porque quando foi a multiplicação, também foram eles que chegaram à regra, quando foi a adição, também . . .Vão perceber realmente, aquilo que estão a fazer em vez de memorizar . . . Queria tentar ir pelo processo de compreensão em vez de ser pelo de memorização. Como é uma tentativa nova, digamos assim, para mim... É fazer experiências para ver o que é que aquilo vai dar. O que é que vai resultar melhor, digamos assim. (EAA1)

Para se preparar, Ana elaborou uma planificação onde previa de modo muito breve o que pretendia realizar. Nessa planificação, entregue aos supervisores, não antecipou as resoluções possíveis dos alunos às expressões que iria propor e como tal não teve oportunidade de discutir com eles como as iria explorar. No entanto, preparou a resolução das diferentes expressões num bloco de notas pessoal. Estas resoluções não faziam parte da planificação enviada por considerar que poderia expor possíveis fragilidades aos seus “supervisores/ avaliadores”. Analisando os diferentes registos percebemos que Ana foi resolvendo as expressões de diferentes modos (simbólica e pictoricamente), como se observa na figura 1.

Nas resoluções simbólicas, recorrendo a procedimentos de cálculo, resolveu as questões recorrendo ao algoritmo $a/b \times c/d = ac/cd$ e quando tinha números inteiros transformava-os em frações. Na resolução da expressão “2/5 de 5/2”, recorrendo à representação pictórica, partiu da unidade de referência 5 que dividiu em duas partes iguais pintando dois retângulos e meio. Dividiu a nova unidade em cinco partes e pintou duas delas o que equivale a um retângulo. Nesta resolução percebemos que Ana começou por interpretar a fração 5/2 como um quociente, quando divide os 5 retângulos ao meio. Em seguida considerou “2/5” como um operador onde assumiu um quinto como um novo todo e tomou duas partes. Assim o produto de 2/5 por 5/2 são duas partes das cinco, equivalentes a um retângulo.

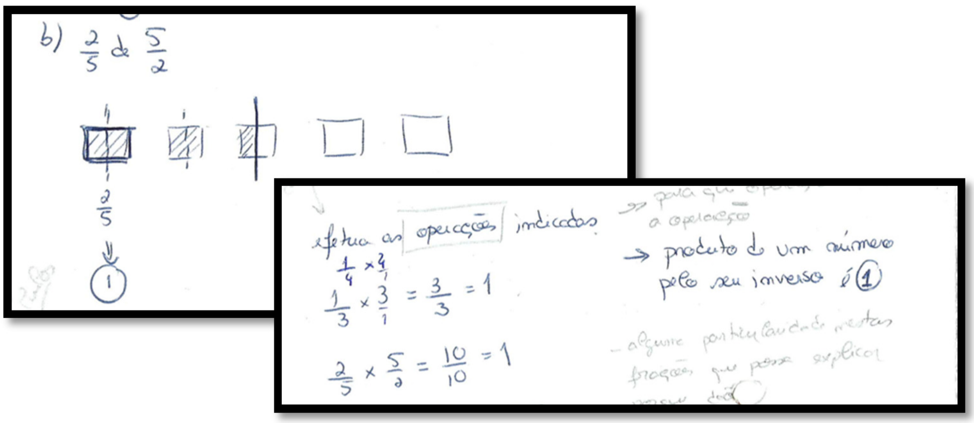


Figura 1. Resolução das tarefas propostas (1ª versão).

A exploração de 2/5 de 5/2 na aula

Na aula, concretizando o seu plano, Ana propôs aos alunos que representassem pictoricamente as expressões 1/4 de 4 e 1/3 de 3. Nestas expressões as frações surgem com significado de operador, o que não ofereceu quaisquer dúvidas nem aos alunos nem à futura professora. Em seguida, colocou no quadro a expressão “2/5 de 5/2” e pediu aos alunos para, mais uma vez, representarem a expressão “por desenhos ou esquema”. Os alunos começaram a resolver a tarefa e enquanto circulava pela sala, sublinhou a necessidade de representarem pictoricamente a situação. A certa altura, percebeu que havia perguntas dos alunos que se repetiam e decidiu discutir a tarefa em grande grupo. Começou por focar a atenção dos alunos na fração 5/2. Em diálogo, focou a atenção no

5, como unidade de partida, e dividindo a unidade em duas partes. Uma aluna propôs dividir cada um dos 5 retângulos em metades e Ana desenhou a figura 2 e explicou:

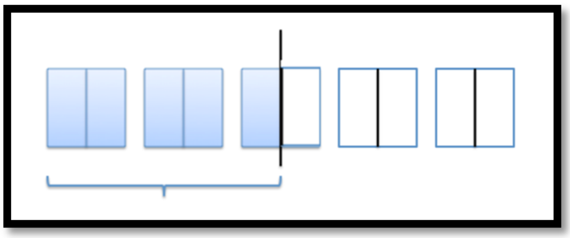


Figura 2. Reprodução da representação de Ana na 1.ª aula.

Ana: A Gabi foi dividir cada uma das 5 unidades ao meio. Mas é isso que nos dizem para fazer?... Nós temos 5 unidades e, as cinco, vamos dividir em duas partes... [A opção da Gabi] vai ajudar para descobrir onde é o meio das nossas 5 partes... Vai ser o quê? (Traça o meio) Porquê? Vamos ter aqui duas unidades e meia e mais 2 unidades e meia… . . . Vamos ter cinco meios. E agora estes 2/5? Nós temos que representar 2/5 *de* 5/2. Ou seja, nós ao representarmos os 5/2 fomos descobrir a nossa unidade para os 2/5. Ou seja, onde nós vamos representar os 2/5. Porquê? Porque agora o nosso universo vai passar a ser só uma das partes. Que é onde nós vamos representar os 2/5 . . . Vamos pintar o quê? 2 partes de 5 . . .

Gabi: Eu pensei em pôr logo 5 metades.

Ana: O teu raciocínio está correto. É que estes 2/5 vão ser só desta parte. Nós já não vamos representar 2/5 de todo o nosso universo, das 5 unidades. É só da parte daqui. Então estes 2/5 vão ser o quê? Vão ser estas duas partes, destas 5. Que nos vai dar o quê?

Gabi: Uma unidade.

Ana tinha previsto discutir as resoluções dos alunos mas no momento da aula precipitou-se a dar uma explicação da resolução. Nesta explicação, considerou a fração imprópria 5/2 como um quociente onde a unidade é 5 e é dividida em duas partes. Definiu os termos da expressão destacando a importância de indicar a unidade de referência e sublinhando a palavra *de* como forma dos alunos compreenderem que estão perante uma multiplicação. Em seguida indicou que se estabelece uma nova unidade e considerou duas quintas partes dessa nova unidade. Assim, as principais ideias matemáticas que pretendia iluminar foram explicadas passo-a-passo modelando a situação e tentando esclarecer a questão em análise. No entanto, os alunos pareceram interpretar as frações como relação parte-todo. A futura professora não rejeitou esta compreensão mas também não explorou estas duas perspetivas não ficando clara a adequação da sua explicação às ideias prévias dos alunos.

Reconsiderando a explicação

Depois da aula, e a pedido da professora cooperante, Ana tentou reconcetualizar a sua explicação. No seu bloco de notas, encontramos mais uma tentativa de resolução onde percebemos que ainda não estabilizou o modo como queria representar 5/2 (figura 3):

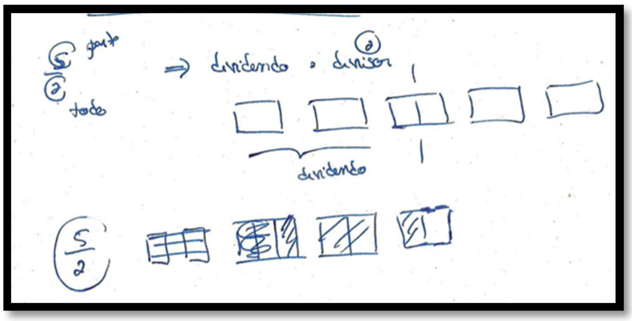


Figura 3. Segunda resolução para 2/5 de 5/2.

Analisando o registo percebemos que considerou 5/2 como uma fração com significado parte-todo e também como um quociente onde o numerador é o dividendo e o denominador é o divisor. Assim 5 é o dividendo e 2 é o divisor e daí ter marcado a separação de cinco retângulos ao meio. Na segunda representação, em baixo, percebemos que risca dois retângulos como estando a mais e considera apenas dois retângulos e meio ou 5 meios retângulos, parecendo que fica satisfeita com a resolução circundando a fração 5/2. Nesta segunda resolução considerou um retângulo como a unidade e interpretou a fração como parte-todo. Assim, ao tentar estabilizar a representação ilustrativa da expressão 2/5 de 5/2 transitou entre os significados parte-todo e quociente dependendo da unidade de referência que considerou. Do ponto de vista didático esta questão pode ter consequências na compreensão dos alunos relativamente ao que pretendia que eles aprendessem.

De modo a rever a explicação a dar aos alunos, Ana registou, no seu bloco de notas, as diferentes ideias a destacar e os passos a seguir. Também percebemos que previu representações para modelar o conceito e esclarecer a questão em análise. A figura 4 foi o registo prévio à construção do PowerPoint apresentado na segunda aula sobre números racionais inversos.

Analisando o registo percebemos que Ana manteve a ideia final e considerou as frações com o significado parte-todo, desenhando três retângulos. Note-se que no lado direito da figura enunciou a explicação que deu à resolução preparada. Previu identificar a unidade 5/2 (fração imprópria) decompondo em 1/2 + 1/2 + 1. No segundo passo planeou dividir os cinco meios em cinco partes tomando-se duas partes desse todo.

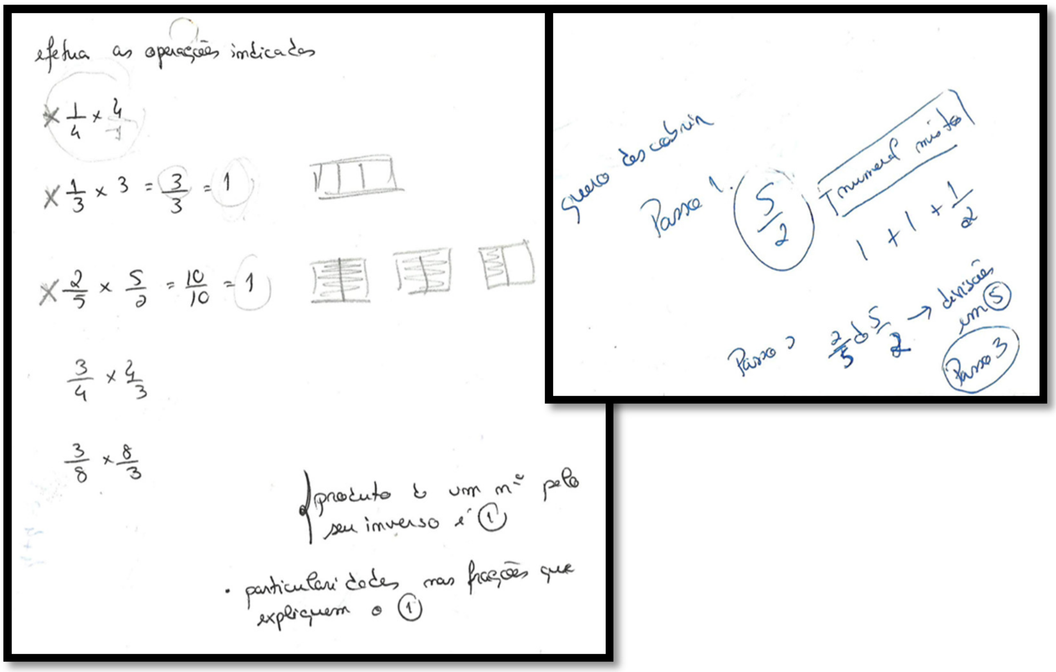
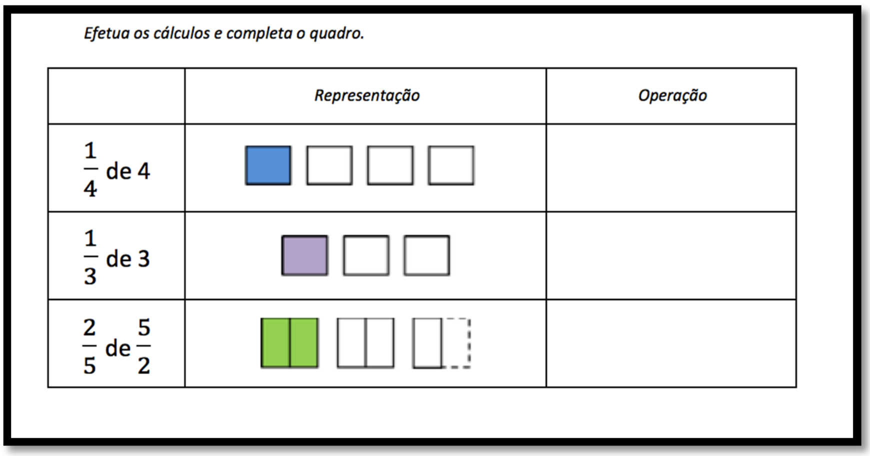


Figura 4. Resolução das tarefas propostas para aula 1 e 2 (2.ª versão).

Continuação da discussão das resoluções com foco nos procedimentos

No dia seguinte, Ana começou por distribuir uma ficha de sistematização das ideias exploradas na aula anterior e reviu o trabalho realizado para enquadrar o trabalho a concretizar. Projetou, no quadro, a ficha entregue em papel (figura 4) e explorou as expressões 1/4 de 4 e 1/3 de 3. Nesta exploração as frações assumiram o significado de operador.



Efetua os cálculos e completa o quadro.

	Representação	*Operação*
$\frac{1}{4}$ de 4		
$\frac{1}{3}$ de 3		
$\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$		

Figura 5. Quadro resumo projetado no quadro branco.

Em seguida, Ana questionou uma aluna sobre como iria calcular a operação multiplicação recorrendo aos procedimentos de cálculo. Esta iniciou o cálculo multiplicando numeradores. Quando passou para a multiplicação entre denominadores a futura professora questionou o que fazer com o número inteiro:

> Ana: Será que é 4 vezes 4 ou não teremos de transformar isto em fração?
> Cátia: Tenho que transformar em fração.
> Ana: Como é que transformamos em fração? Quando temos um número inteiro o que é que nós temos aqui em baixo?
> Cátia: O zero.
> Ana: O zero! Nós podemos dividir por zero?
> Cátia: Não.
> Ana: Então?
> Cátia: É o 1.

Neste diálogo, Ana deparou-se com o erro da aluna em considerar que quando não temos denominadores consideramos o denominador zero. De modo a levá-la a compreender o seu erro, focou a atenção da aluna para o facto de uma fração poder representar um quociente. Assim, se o divisor é zero não é possível dividir.

No final da resolução, Ana redisse a operação e respetivo produto levando a aluna a verbalizar que 4/4 é equivalente a 1. Em seguida foi ao quadro um aluno resolver "1/3 de 3" e outra aluna "2/5 de 5/2" recorrendo aos procedimentos da multiplicação utilizados anteriormente. Finalmente, e para sistematizar a exploração de 2/5 de 5/2, Ana recorreu a um PowerPoint e explicou de novo a resolução:

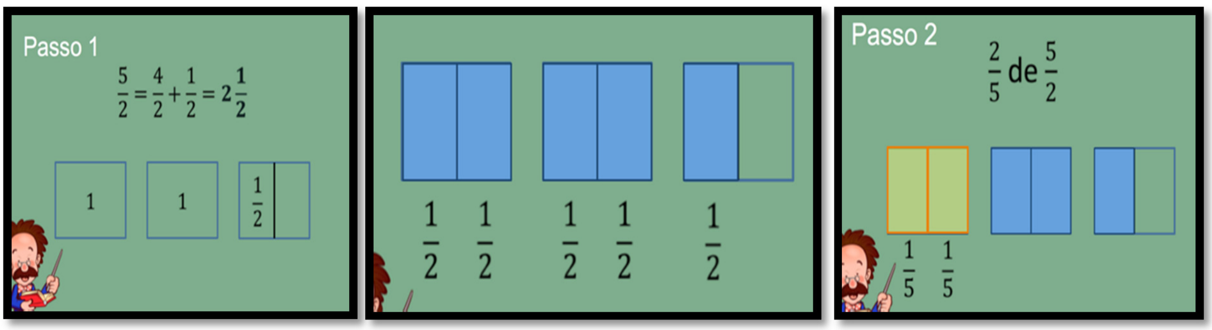


Figura 6. PowerPoint da situação 2/5 de 5/2.

> Ana: Nós fomos descobrir através do cálculo. Mas ontem estivemos a fazer através de quê? Através de esquema. Então vamos esclarecer o que estivemos a fazer ontem. Nós nos 5/2, vamos observar o quê. Se nós formos através do número numeral misto, o quê que nós vamos ter? Vamos ter 2/2 + 2/2 + 2/2. O quê que isto nos indica?
> Aluno: 2 1/2.
> Ana: 2 1/2, que é o que temos aqui (apontando para o primeiro slide), ou seja vamos ter 2 unidades, que temos aqui, 1 mais 1, mais metade, que

é o que nós temos aqui representado, certo? E o que nós queremos saber é 2/5 de 5/2. Então como é que nós vamos fazer? Nós temos representado o nosso todo. Temos 2 unidade e depois vamos ter as 5, no total, não é. Cada unidade está dividida em duas e nós queremos o quê? Os 2/5, duas partes de cinco. Então o quê que nós vamos ter? Uma, duas... Vai corresponder a quanto? A quanto é que corresponde estes 2/5 de 5/2?

Aluno: Uma unidade.

Ana começou a sua explicação retomando o trabalho realizado anteriormente de modo a focar os alunos novamente na expressão 2/5 de 5/2. Em seguida afirmou que 5/2 pode ser representado por um numeral misto mas não explicou porquê. De modo a explicar o processo passo-a-passo decompôs o numeral misto para que os alunos visualizassem porque é que a unidade são dois retângulos e meio. Por fim, e modelando cada passo, conceptualizou a operação multiplicação explicando que se consideram duas partes de cinco da unidade inicial (5/2) o que corresponde a duas metades de retângulo, ou seja, uma unidade. Finalmente, confirmou com os alunos que a questão em análise ficou esclarecida.

Refletindo sobre como explicar 2/5 de 5/2

No final do processo, Ana refletiu sobre as explicações. Comentou o que aconteceu e o que pretendia referindo:

> [A explicação da primeira aula] vai além do procedimento e pode gerar algum conflito de ideias. De ideias… Conflito de ideias é bom, para discutir. No entanto, baralhar os alunos é outra coisa completamente diferente. E aí eu acho que foi mais isso, baralhar os miúdos. Porquê? Todos os outros, eles perceberam muito bem sem problema nenhum. No entanto aí, como o que era pedido já ia um bocadinho além do que estávamos a trabalhar, a falar, já exigia um pouco mais e eles acabaram por se sentir assim um bocadinho "o que é que agora aconteceu aqui?!" . . . [Na realidade] são metades de 5. Foi esse o problema… Na altura esclareci a dúvida...(EF)

Nesta reflexão Ana sentiu que a sua explicação não partiu das ideias dos alunos e não estava adequada aos seus conhecimentos prévios. Os alunos começaram por interpretar a fração 5/2 como uma relação parte-todo e Ana manteve o seu plano interpretando a fração como quociente. Talvez por isso sentiu que confundiu os alunos e que o significado de quociente se pode tornar confuso.

Comentou assim o diálogo da primeira aula:

Ana: Ela disse que tínhamos cinco unidades, que eram cinco quadrados [retângulos] e que tínhamos de os dividir ao meio. E a questão foi "mas vamos dividir ao meio como?" Porque eu não sabia se ela ia dividir cada unidade ao meio ou se queria dividir o conjunto das unidades ao meio. Ela foi ao quadro dividir cada unidade ao meio.

Inv: Portanto ela considera que tem cinco unidades?

Ana: Em vez de ser as cinco, apenas uma unidade. E foi isso que acho que não ficou, se calhar, muito bem explorado. Porque o meu objetivo era que eles percebessem que os cinco era uma unidade que ia ser dividida ao meio. E depois desse todo íamos ficar com o todo para os dois quintos, digamos assim...(EDA1)

Nesta reflexão percebemos que Ana teve dificuldade em compreender qual a unidade considerada pela aluna. Nesta entrevista, logo a seguir à primeira aula, mostrou-se insegura em relação à explicação construída uma vez que a unidade de referência que tinha previsto não foi totalmente compreendida pelos alunos. Depois desta entrevista, refletiu com a professora cooperante que a ajudou a compreender a perspetiva dos alunos. Como resultado da conversa, e como foi descrito, Ana reconcetualizou a sua explicação e concretizou-a. Refletindo sobre o acontecido na segunda aula e perspetivando o trabalho a fazer numa outra oportunidade comentou:

> Para mim, foi tão lógico este processo que não pensei na ideia de eles já terem as cinco partes... E de ser fácil para eles chegar aqui. Porquê, porque eu na altura não as dividi em cinco, só na segunda parte é que eu as dividi. Faltou-me uma das estratégias, digamos assim . . . Fez mais sentido ser da maneira como eu tinha a proposta, . . . Depois quando surgiu a [nova] proposta fez sentido . . . Eu acho que os miúdos perceberam onde é que queríamos chegar, no entanto, aquela estratégia se calhar deveria ter sido explorada de outra maneira . . . [Podíamos] confrontar as duas estratégias, as duas propostas... Aí teria sido mesmo o ideal. Perfeito! (EDA2)

Neste excerto da entrevista, Ana ainda não se sentia completamente segura com a explicação construída na segunda aula. Para a futura professora o foco em 5 como unidade de referência de cinco meios é o que tem mais sentido. Mas percebeu que o foco no significado parte-todo e portanto partir da unidade de referência "um retângulo" faz mais sentido para os alunos. Assim a sua proposta final seria combinar as duas perspetivas apesar de não apresentar uma proposta de como seria essa explicação.

Analisando o percurso de reflexão da futura professora percebemos que não colocou em causa os propósitos das aulas que preparou e realizou. Ana mostrou-se segura relativamente às tarefas selecionadas para concretizar os seus propósitos. No entanto, essa segurança não existiu nas suas explicações. Não previu diferentes resoluções das tarefas e as dificuldades que os alunos podiam sentir. Assim, quando foi confrontada com uma resolução imprevista sentiu dificuldade em compreender o pensamento dos alunos. Ou seja, a insegurança que evidencia está relacionada com o seu conhecimento sobre alunos relativamente aos conhecimentos prévios destes e sobre os significados que eles atribuem aos números racionais quando representam pictoricamente tarefas descontextualizadas.

Conclusão

Nesta comunicação apresentamos o caso de Ana, uma futura professora que, no âmbito da sua prática letiva supervisionada, tinha como propósito explorar o conceito de números racionais inversos numa aula de 90 minutos. Para tal, preparou e realizou a exploração de expressões onde se multiplicavam números racionais inversos. De modo a que os alunos visualizassem o produto obtido e para que não fosse "dada" uma regra a memorizar, pediu-lhes que representassem pictoricamente as expressões. No momento da preparação resolveu as expressões simbólica e pictoricamente. Inicialmente na resolução pictórica considerou a unidade de referência da fração imprópria 5/2 como sendo cinco retângulos e deste modo atribuiu à fração o significado de quociente. Nesta primeira fase não previu outras perspetivas sobre os números racionais envolvidos e foi no momento da concretização que foi confrontada com uma perspetiva diferente. Perante o imprevisto, ou seja perante a perspetiva dos alunos em encarar 5/2 com o significado parte-todo identificando um retângulo como unidade de referência, optou por realizar uma explicação focada na resolução que previu. A explicação está correta matematicamente, no entanto, não considerou a perspetiva dos alunos e não confrontou as duas perspetivas revelando algumas dificuldades em compreender as ideias dos alunos e em se adaptar o seu discurso. Estas dificuldades também são identificadas no estudo de Charalambous et al. (2011). Mais tarde, preparou uma segunda aula de 45 minutos. Depois de conversar com a professora cooperante, por um lado, reconcetualizou a sua explicação e, por outro, focou a sua atenção nos procedimentos de cálculo de multiplicação com frações. Nesta segunda fase, as suas explicações evidenciaram mais segurança relativamente a questões conceptuais imprevistas e revelaram que esteve mais atenta às ideias e dificuldades dos seus alunos. Ainda que do ponto de vista matemático as explicações constituídas fossem corretas, levantam algumas questões do ponto de vista didático. Ao longo do processo a futura professora refletiu sobre estas questões tomando consciência da complexidade do ensino dos números racionais desenvolvendo o seu conhecimento didático sobre os alunos.

Com o caso de Ana, verificamos como o conhecimento do professor sobre o ensino-aprendizagem dos números racionais é complexo (Barnett-Clarke et al., 2010). Também a concretização de uma prática letiva focada na compreensão de conceitos é complexa e exige uma preparação cuidada (Serrazina, 2012). Importa, então, que tanto os futuros professores como os seus formadores estejam alerta para as questões relacionadas com a preparação e concretização da prática letiva. É importante que na fase de preparação os futuros professores discutam com os seus supervisores diferentes resoluções, minimizando o impacto de situações imprevistas na qualidade das práticas letivas. Tal como Mitchell et al. (2013) discutem, importa também sublinhar que por vezes os futuros professores consideram que as representações pictóricas *per si* iluminam os conceitos a aprender e a ensinar. No entanto, isso nem sempre acontece e é importante refletir sobre quais as representações mais adequadas a determinados propósitos, as suas potencialidades para apoiar a aprendizagem dos alunos e aos significados atribuídos aos números racionais em diferentes situações.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa atribuída à primeira autora (referência SFRH/ BD/99258/2013).

Referências bibliográficas

Ball, D.L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Barnett-Clarke, C., Fisher, W, Marks, R., & Ross, S. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*, 1–6.

Charalambous, C. Y., Hill, H., & Ball, D. (2011). Prospective teachers' learning to provide instructional explanations: How does it look and what might it take? *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*, 441-463.

Medeiros, K., & Ponte, J.P. (2010). Explicar e negociar significados: As concepções e as práticas de uma candidata a professora de Matemática. *Actas do EIEM* (pp 197-211). Lisboa.

Menezes, L., Ferreira, R. T, Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais de professores de matemática* (pp. 135-164). Lisboa: IE (on-line).

Mitchell, R., Charalambous, C., & Hill, H. (2013). Examining the task and knowledge demands needed to teach with representations. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*, 37-60.

Ponte, J .P., & Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed.). New York, NY: Taylor & Francis.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didática da Matemática do 1º Ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Serrazina, M. L. (2012). Conhecimento matemático para ensinar: Papel da planificação e da reflexão na formação de professores. *Revista Electrónica de Educação*, *6*(1), 266-283.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Researcher*, 57(1), 1-22.

Son, J. W., & Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*, 235-261.

Stake, R. (1995). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*, 325-343.

A percentagem como ideia matemática potente na aprendizagem dos números racionais: Uma experiência de ensino no 1.º ciclo do ensino básico

Helena Gil Guerreiro[1], *Lurdes Serrazina*[2]
[1]Agrupamento de Escolas Braamcamp Freire, UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, *hg@campus.ul.pt*
[2]Escola Superior de Educação de Lisboa UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, *lurdess@eselx.ipl.pt*

Resumo. *Neste artigo pretendemos refletir sobre o papel da percentagem na aprendizagem dos conceitos associados à compreensão dos números racionais, no 1º ciclo do ensino básico. A construção da noção de percentagem surge ancorada a uma variedade de representações icónicas e simbólicas, no sentido de permitir interpretar as relações entre quantidades em situações multiplicativas. O estudo que inspira este artigo apoia-se numa experiência de ensino, orientada por uma conjetura, seguindo os procedimentos metodológicos de um Design-Based Research. Analisamos a comunicação e as produções dos alunos de uma turma. Os dados foram recolhidos através da observação participante, apoiada num diário de bordo, nas gravações áudio e vídeo das aulas e na análise documental das produções da turma. Os resultados parecem evidenciar que a compreensão das relações e conceitos que a noção de percentagem envolve, é acessível e pode tornar-se potente para estes alunos, pois permite mobilizar os seus conhecimentos intuitivos, relativos a aspetos informais, mas cruciais do desenvolvimento do raciocínio proporcional. A mensagem visual dos modelos associados à percentagem parece facilitar a mobilização de diferentes representações e contribuir para fortalecer a rede de relações entre as ideias subjacentes ao conceito de número racional.*

Palavras-chave: *aprendizagem; números racionais; percentagem; representações; discussão e interação.*

Abstract. *In this paper we discuss the role of percentage in students' emerging understanding of rational numbers, at elementary school. Building percent knowledge supported in familiar multiple iconic and symbolic representations can allow that relationships be interpreting in multiplicative situations and reach rational numbers' basic concepts. The study that inspired this paper is based on a teaching experiment, guided by a conjecture, according to a design-based research methodology. We analyze the interactions and students' productions when solving tasks in the classroom. Data were collected by participant observation, supported by entries in a logbook and by video-recording and audio-recording of the classes and collecting the students´ worksheets. The results indicate that an understanding of the fundamental issues and concepts on percentage can be accessible and effectively exploited at this school level, as embedded in the emergence of taken-as-shared meanings. It constitutes a way of thinking* *about rational numbers that is natural and powerful and emphasizes proportionally based understandings. Models associated to percentage provide a powerful visual concrete representation and can contribute to build a connection between students' intuitions about proportions and rational numbers.*

Keywords: *learning; rational numbers; percentage; representation; discussion and interaction*

Introdução

Os números racionais constituem um dos temas mais importantes do currículo da Matemática ao longo do ensino básico. Contudo, a sua aprendizagem envolve uma rede de conceitos complexa que os alunos revelam alguma dificuldade em compreender (Lamon, 2006). O desenvolvimento deste tema no 1º ciclo do ensino básico constitui um desafio. É importante compreender as razões que fundamentam as opções curriculares e os modos de as concretizar (Brocardo, 2010), quer em relação a percursos de aprendizagem, mas também em relação a processos e meios através dos quais se pretende que a aprendizagem aconteça, o que reforça a sua pertinência neste nível de ensino.

A investigação em curso, em que se baseia este artigo, tem como objetivo aprofundar como se desenvolve a aprendizagem com compreensão dos números racionais, dos alunos de uma turma, no contexto social da sala de aula, descrevendo e analisando essa aprendizagem e os meios que a suportam. Neste artigo centramo-nos no papel que a percentagem pode desempenhar nessa construção, procurando perceber como é que pode potenciar a aprendizagem, se trabalhada numa fase inicial.

A aprendizagem dos números racionais com compreensão

O processo de aprendizagem inicial dos números racionais compreende um conjunto de ideias matemáticas fundamentais e conceitos essenciais (NCTM, 2010). Espera-se que desde os primeiros anos do 1.º ciclo os alunos desenvolvam essas ideias e compreendam as suas relações, construindo com sentido e gradualmente, uma aprendizagem efetiva dos números racionais. Uma dessas ideias matemáticas fundamentais é o desenvolvimento da compreensão das estruturas multiplicativas. Segundo Post, Behr e Lesh (1986) esta ideia é potencialmente geradora de conflitos concetuais, uma vez que o facto dos números inteiros terem por base estruturas aditivas, pode dificultar a passagem para o desenvolvimento das estruturas multiplicativas.

A compreensão das estruturas multiplicativas é indissociável do desenvolvimento do raciocínio proporcional, estando mutuamente implicados na construção dos conhecimentos associados à compreensão dos números racionais. Parish (2010) discute se se deve desenvolver primeiro o pensamento multiplicativo para que os alunos possam lidar com situações num significado de razão ou se os processos envolvidos nessas situações não podem ajudar a desenvolver esse pensamento, desde que se apoiem nos conhecimentos intuitivos que já possuem acerca da proporcionalidade. O desenvolvimento do raciocínio proporcional implica, numa primeira fase, a compreensão de uma relação que se estabelece entre duas grandezas. A perceção de que essa relação se mantém constante (invariância) e de que as duas vão variando em conjunto (covariância), permite ir comparando e descobrindo quantidades dessas mesmas grandezas, no sentido de uma construção informal e intuitiva dos significados de razão e proporção.

Alguns autores consideram que o desenvolvimento do raciocínio proporcional deve iniciar-se nos primeiros anos do 1.º ciclo, para que se possa gradualmente ir ampliando. Para Lamon (2006) importa que se possam ir promovendo formas de pensamento que permitam o desenvolvimento gradual da capacidade de raciocinar e julgar proporcionalmente as situações. Para esta autora, não se trata apenas de um processo de mecanização, mas sim de interpretação de relações entre quantidades que requer um pensamento relacional e multiplicativo. No entanto, destaca que a compreensão das estruturas multiplicativas implica alguma maturidade matemática, mas reforça que esta se vai desenvolvendo na vivência de experiências, apoiadas em contextos da vida real. Gradualmente, os alunos vão percecionando que as transformações aditivas não permitem relacionar as quantidades envolvidas em situações multiplicativas, que envolvem processos como o cálculo de metades, de dobros, a partilha equitativa ou o cálculo de percentagens. Também Spinillo (2003) considera que os aspetos cruciais do raciocínio proporcional devem ser trabalhados no 1.º ciclo. O recurso à estratégia da metade e ao uso de estimativas reforça esta autora, podem tornar-se valioso, quando associados a um ambiente estimulante do ponto de vista das discussões matemáticas.

Alguns estudos (Hunter & Anthony, 2003; Moss & Case, 1999) evidenciam que os alunos podem desenvolver uma efetiva compreensão dos números racionais quando a sua trajetória de ensino-aprendizagem, envolve o estudo da percentagem, numa etapa inicial. Uma das razões apontadas para a sua introdução nesta fase da escolaridade remete para a sua ligação aos contextos do dia-a-dia, familiares aos alunos (Moss & Case, 1999). A percentagem está presente no quotidiano. A simplicidade da sua representação faz com que seja de utilização corrente, mas é também esta simplicidade que a torna, segundo Parker e Leinhardt (1995), um conceito de aprendizagem complexa, muitas vezes gerador de conflitos. Pelo que, numa introdução à noção de percentagem no 1.º ciclo do ensino básico há alguns aspetos que devem ser tidos em conta. Um exemplo disso é o facto da linguagem que normalmente surge associada à percentagem ser aparentemente aditiva, escondendo a sua natureza multiplicativa. Parker e Leinhardt (1995) referem ser importante ter em conta que, mesmo numa fase inicial de trabalho, a percentagem "é uma linguagem de proporção privilegiada que simplifica e condensa descrições de comparações multiplicativas" (p.472). Para evitar que se torne ambíguo, o trabalho com a percentagem não pode remeter-se apenas ao seu significado parte-todo. Os mesmos autores reforçam que a percentagem é um constructo com propriedades de número, de parte-todo e de razão. Importa assim percecionar a relação que traduz entre quantidades e as comparações proporcionais que oferece, muitas vezes escondidas atrás da notação, o que a torna uma ideia potente para uma aprendizagem dos números racionais com compreensão.

A construção dos conceitos, sobretudo no 1.º ciclo, deve ser suportada numa diversidade de representações que permita ir compreendendo as múltiplas relações com outras ideias (NCTM, 2007). A apropriação de uma dada representação passa pela sua utilização, num processo de reconstrução enquanto modelo de uma dada situação, num contexto com significado (Gravemeijer, 2005). No que respeita ao trabalho com a percentagem nos primeiros anos, alguns estudos convocam o recurso a diversas representações, em contexto, que permitem uma modelação dos conceitos associados à noção de percentagem. Moss e Case (1999) constroem um modelo conceptual, apoiado em representações, que remete para o uso de recipientes e imagens, a que se vão associando procedimentos de cálculo, que se constroem com sentido. Van Den Heuvel-Panhuizen (2003) apresenta o modelo da barra, como um modelo para pensar. Esta barra é convocada na passagem da utilização de representações ativas, tiras de papel associadas a um dado contexto, para uma outra representação, icónica não implicada diretamente num contexto. Hunter e Anthony (2003) reportam o uso de representações ativas e icónicas para fazer julgamentos proporcionais sobre o líquido que está em diferentes recipientes e recorrem a retas numéricas ampliadas para interpretar e justificar raciocínios. Brocardo (2010), convocando o Programa de Matemática (ME, 2007), sugere o recurso a contextos que envolvam o uso da barra retangular e da reta numérica, considerando que estas representações se podem constituir como modelos, uma vez que permitem interpretar relações complexas, nomeadamente de proporcionalidade, com significado.

O trabalho com diferentes representações, ativas, icónicas, simbólicas (Bruner, 1962), e linguagem oral e escrita (Ponte & Serrazina, 2000) no sentido da construção de modelos para raciocinar matematicamente, é um processo evolutivo, que se desenvolve na interação com os outros. Numa perspetiva sociocultural é importante que a interação na sala de aula seja encorajada, de modo a permitir que os alunos partilhem e discutam abertamente, e a negociação de significados aconteça (Bishop & Goffree, 1986). A sala de aula transforma-se assim numa comunidade de aprendizagem cuja identidade se define na atividade, no discurso e na reflexão que desenvolvem, bem como no reportório partilhado de ideias que se vai construindo (Wenger, 1998). Mercer (2002) fala em diálogo exploratório para se referir à forma através da qual, os alunos, ao se envolverem na resolução de problemas em matemática, podem usar a linguagem para pensar em coletivo, de forma eficaz, tendo por base a sua atividade. O modelo de ensino-aprendizagem exploratório de Ponte (2005) prevê que este tipo de diálogo aconteça sobretudo na etapa da discussão da tarefa, quando partilham e validam estratégias e argumentos. A construção da compreensão matemática vai-se desenvolvendo na participação nesta comunidade, nos diferentes momentos combinados, que envolve a negociação de normas sociais de sala de aula e de normas específicas dos aspetos matemáticos da atividade dos alunos (Yackel & Cobb, 1996).

Abordagem metodológica

Os dados que se apresentam neste artigo enquadram-se numa investigação mais alargada, de natureza qualitativa, que segue os procedimentos metodológicos de um Design-Based Research (Cobb, Jackson, & Dunlap, 2016), e que se apoia na implementação de uma experiência de ensino pela primeira autora, à frente designada por investigadora. Esta é orientada por uma conjetura (Confrey & Lachance, 2000) que apresenta uma dimensão de conteúdo matemático e outra de conteúdo pedagógico, que procuramos sintetizar no seguinte enunciado: No tópico dos números racionais, um trabalho apoiado numa sequência de tarefas, que privilegia a percentagem e a subsequente inter-relação com as outras representações (decimal e fração), pode gerar um percurso potente na aprendizagem, à medida que os alunos participam na atividade sociomatemática da sala de aula e constroem significados partilhados, numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número.

Esta abordagem, segundo Cobb, Jackson e Dunlap (2016), permite interpretar a aprendizagem dos alunos cruzando as potencialidades das tarefas e dos materiais utilizados, com as normas e a qualidade do discurso da sala de aula. É nesta perspetiva que fazemos a recolha de dados no ambiente natural de aprendizagem e que consideramos como unidade de análise a própria turma.

O desenvolvimento da experiência de ensino traduz-se num percurso de aprendizagem dos números racionais, que se faz ao longo de dez aulas no 3.º ano e de doze no 4.º ano, na mesma turma. Este percurso pode dividir-se em três etapas do ponto de vista do conteúdo matemático, inspirado no estudo de Moss e Case (1999) e apoiado nos resultados preliminares do estudo de diagnóstico. A primeira remete para o início do desenvolvimento da compreensão da noção de percentagem. Na segunda decorre a introdução da representação decimal, fazendo as centésimas decorrer da percentagem. A última envolve o trabalho com frações, relacionando as diferentes representações entre si.

Pretendemos neste artigo realçar o papel da percentagem, pelo que, escolhemos três tarefas da experiência de ensino que integram a primeira etapa deste percurso, contextualizadas na realidade dos alunos e que envolvem diferentes representações. A primeira envolve a compreensão da dinâmica de uma bateria de telemóvel (Figura 1).

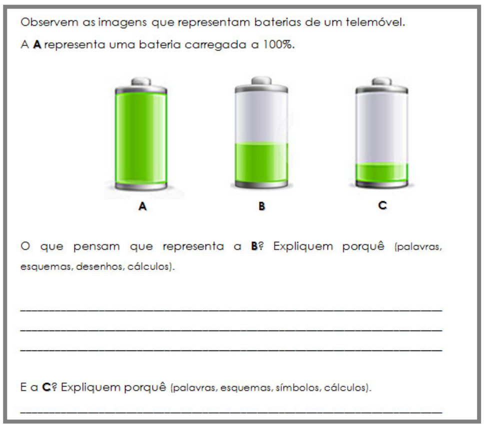


Figura 1. Tarefa I.

A segunda envolve a capacidade uma lata de cola, apoiada numa imagem (Figura 2).

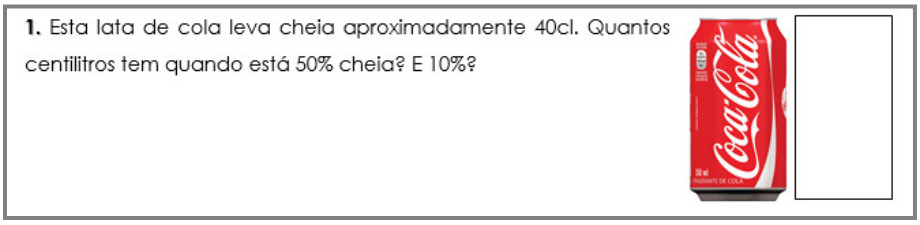
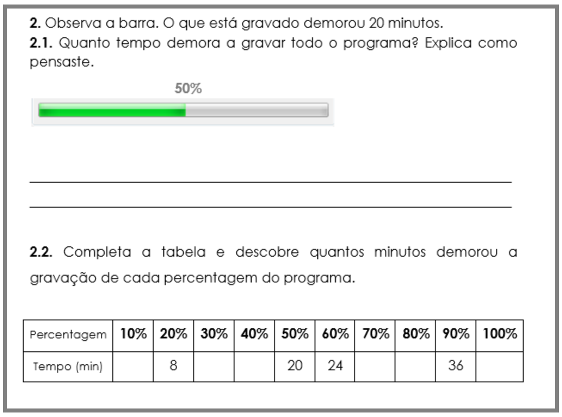


Figura 2. Tarefa II.

A terceira tarefa remete para a interpretação da barra de estado na gravação de um programa, a velocidade constante, e de uma tabela de razão (Figura 3).


2. Observa a barra. O que está gravado demorou 20 minutos.

2.1. Quanto tempo demora a gravar todo o programa? Explica como pensaste.

2.2. Completa a tabela e descobre quantos minutos demorou a gravação de cada percentagem do programa.

Percentagem	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
Tempo (min)		8			20	24			36	

Figura 3. Tarefa III.

Embora não sendo consecutivas as tarefas são apresentadas pela ordem que foram propostas aos alunos. A análise de dados que trazemos a este artigo incide sobre momentos de trabalho em torno destas três tarefas. Recorremos a uma variedade de procedimentos e instrumentos de recolha de dados (Confrey & Lachance, 2000), como os registos da observação participante, apoiada pelas gravações áudio e vídeo das aulas, o diário de bordo da investigadora/professora, e recolha documental das produções dos alunos. Com base na triangulação dos dados recolhidos, resulta a sua análise de conteúdo, no sentido de permitir uma ampla compreensão dos fenómenos em estudo.

A compreensão da noção de percentagem

Os episódios que destacamos pretendem contribuir para compreender a relação que se procura estabelecer entre o uso de algumas representações, como modelos de situações que convocam a construção dos conceitos associados à percentagem, e as aprendizagens que os alunos realizam.

A discussão em coletivo da primeira tarefa (Figura 1) permite colocar em comum o significado de algumas percentagens de referência, bem como do termo “por cento”. No momento de discussão surge o debate em torno do significado do termo por cento, a partir das informações que cada um já tinha.

Prof – Mas o que quer dizer “por cento”?
DR – Parece 100…
BF – … por 100.
Prof – Então o que quererá dizer 50 por cem?
MB – Significa que a bateria está a metade e teria que estar no 100 por cento para estar cheia.
Prof – Tinha que estar no 100 e está nos cinquenta… o que quererá dizer?
SA – 50 de 100.
AS – 50 até 100.
Prof – Então se eu tenho 50, quanto me falta até 100.
MF – Só tens metade.

Destaca-se um primeiro entendimento do termo “por cento” que relaciona uma parte com um todo, que totaliza 100. É interessante percecionar que alguns alunos explicam o termo por cento recorrendo a expressões como “por 100”, “de 100” “até 100”, que remetem para uma estrutura multiplicativa, verbalizando uma relação que é estruturante na construção do significado de razão.

Na bateria B (Figura 1), o valor 50% surge com naturalidade com um significado parte-todo, neste caso, como metade de uma bateria carregada. Perante a imagem da bateria C (Figura 1), os alunos sugerem que estão representados 20% ou 25%. Para validar a sua opinião, alguns usam como estratégia o cálculo das metades sucessivas, apoiando-se na representação icónica, como explica a aluna DR.

DR – Eu vi 100 e fiz metade de 100, que deu 50 e depois parecia outra vez metade.

Embora sendo uma estratégia potente, não se revela eficaz nesta situação. Ao achar a metade de 50%, a aluna perceciona que não corresponde à zona sombreada na bateria e chega a um impasse. Outros alunos sugerem que a zona sombreada seja considerada como parte a repetir, considerando como resultante da divisão do todo.

SA – Isso não está a 25 por cento.
Prof – 25 por cento seria a metade da metade. Então quanto será que é?
Alunos – 20 por cento
Prof – Porquê? MB.
MB – Porque cabe 5 vezes.
Prof – [considera a medida da parte representada e repete na imagem]
DF – Assim já vais no 80 por cento...
Prof – Acham que cada uma destas partes representa 20 por cento?
Alunos – Sim.
Prof – Assim, quanto me falta para ter a bateria cheia? AS.

AS – Faltam 80 por cento.

A folha de registo da tarefa da aluna AS (Figura 4) permite ilustrar este diálogo, já que mostra que vai verificar quantas vezes a zona sombreada cabe na unidade e chega à conclusão de que cabe 5 vezes, pelo que, cada parte corresponde a 20%.

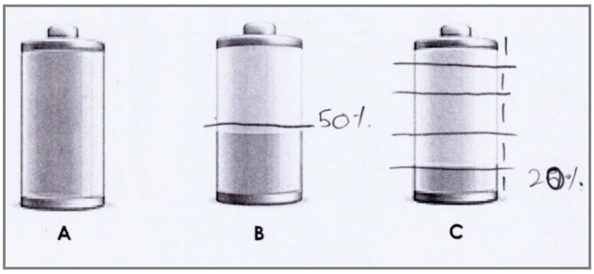


Figura 4. Registo da aluna AS relativo à tarefa I.

Este raciocínio traduz uma estratégia multiplicativa, com recurso à divisão. O significado de medida permite-lhes estabelecer uma relação entre dois referentes que os alunos, nesta altura, conseguem visualizar como representando quantidades de um todo diferente. Nesta tarefa, a representação icónica de uma bateria parece ter-se constituído como um modelo facilitador da situação, pela forma natural e familiar com que foi interpretada por todos os alunos da turma. Para além do fator de familiaridade, esta representação facilita a visualização das duas escalas e permite, indo além do significado parte-todo, uma primeira abordagem ao conceito de proporção, embora que ainda implícita e informal.

O propósito da segunda tarefa (Figura 2) é interpretar a percentagem como um esquema de relações e não apenas olhar para a relação parte-todo. Os alunos são convidados a associar o 100%, que identificam como completamente cheio, a um todo que remete para uma capacidade de 40 centilitros. Implica um pensamento relacional na descoberta da parte, considerando o todo e a percentagem dada. Num certo momento de discussão em coletivo, gera-se um conflito em torno do cálculo de 25% de 40 centilitros.

Prof – […] BF, então quanto é que vocês acharam que 25 por cento é?
BF – [Aponta 25 centilitros]
Prof – A BF e a CM acharam que eram 25 centilitros, pensaram da mesma maneira? LS.
LS – Não, 25 por cento é de "porcentos", mas de centilitros não é... Lá em cima no 50 por cento está 20…
Prof – Vai lá indicar… Estão a perceber o LS? Ele diz que 25 por cento é "nos porcentos", isto é, é na percentagem, não corresponde aos centilitros…

LS – [dirige-se ao QIM] Aqui não pode estar o 25, porque aqui está o 20, e o 25 passa dos 20 por cento.

Através do seu discurso, o aluno LS parece revelar um entendimento das relações envolvidas no conceito de percentagem, reconhecendo o conjunto de referência, no sentido de que considera que diz respeito a um todo que está para 100, e que noutro referente remete para 40 centilitros.

BF – É 15 por cento.
Prof – A BF está a reformular o pensamento… queres explicar BF?
BF – Se 50 por cento são 20 centilitros, 25 são menos 5 e por isso são 15 centilitros… acho eu…

A aluna BF, embora percecione que a percentagem e a capacidade constituem dois referentes diferentes, duas grandezas que se relacionam, não identifica a relação de comparação multiplicativa. A intervenção de um colega permite ir além na compreensão dos termos da proporção que está implícita, nesta comparação de razões.

SA – Não, porque como 50 é o dobro de 25, o 20 tem que ser o dobro do outro número, que é o 10 e não 15.
Prof – Percebeste com a forma de pensar do SA, BF?
BF – Sim. Aqui é 20 e como é metade da metade, tem que ser 10.

Neste episódio, a interação em torno do conceito de “25% de…”, permite percecionar a construção conjunta de relações numéricas. Esta construção manifesta-se na capacidade de um aluno captar o pensamento do outro e devolvê-lo reformulado, a par de reconhecer o valor relativo dos números envolvidos. A representação icónica foi sendo transformada e usada como modelo para explorar a situação em duas escalas e sintetizar as relações que se foram estabelecendo.

Na terceira tarefa (Figura 3), os alunos são incentivados a estabelecer relações e calcular percentagens de referência. A situação implica que determinem a parte sabendo a percentagem e o todo. A interpretação da situação vai além de um significado parte-todo, já que estão implicadas quantidades de grandezas de natureza diferente: tempo e quantidade de programa gravado em percentagem, sendo necessário que estabeleçam uma relação de comparação.

Embora esteja subjacente uma estrutura multiplicativa, alguns grupos de alunos, nas justificações que apresentam em linguagem escrita, verbalizam essa relação de proporcionalidade recorrendo a um sentido aditivo, como é o caso da justificação apresentada no registo da tarefa do aluno HT, na Figura 5.

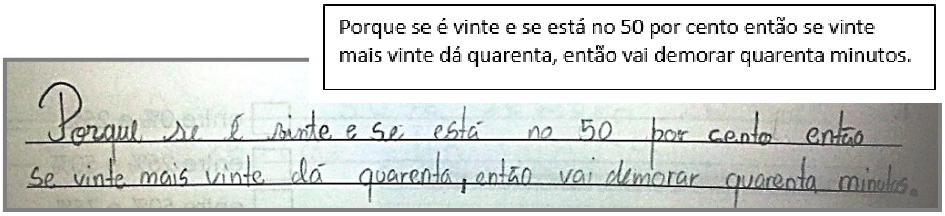


Figura 5. Justificação do aluno HT à primeira pergunta da tarefa III.

Outros alunos traduzem em linguagem natural uma relação, de natureza multiplicativa, que estabelecem apoiada na estratégia das metades/dobros, comparando dois conjuntos de números e mantendo a razão constante, como evidencia o testemunho da Figura 6.

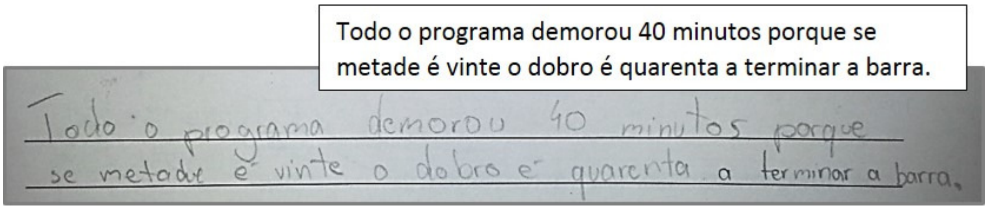


Figura 6. Justificação da aluna MF à primeira pergunta da tarefa III.

Ao justificar, a aluna MF (Figura 6) parece interpretar a proporção simples entre os quatro valores das quantidades referentes às grandezas envolvidas, apresentando o argumento de que a relação que o tempo que demora a gravar metade do programa está para o tempo que demora a gravar todo o programa, como 50% está para 100%.

Na segunda parte desta tarefa é apresentada uma tabela de razão (Figura 7). Esta é escolhida no sentido de tornar explícitas relações e facilitar o cálculo de diferentes percentagens do programa gravado. Nesta representação, o apelo à estratégia do 10% é forte e pretendíamos que esta fosse mobilizada.

Percentagem	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
Tempo (min)	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

Figura 7. Resposta da aluna CMg à segunda pergunta da tarefa III.

Um dos primeiros factos descobertos é a relação com os múltiplos de quatro, uma regularidade sugerida pela tabela. O aluno DF, por exemplo, verifica que na tabela os minutos vão aumentando de quatro em quatro e assim consegue descobrir todas as percentagens relativas à quantidade de programa gravado, recorrendo ao sentido aditivo da multiplicação, sem que relacione as duas grandezas.

DF – Antes de preencher a tabela eu olhei para os números para ver se os números me davam uma pista e a verdade é que os números me deram uma pista. O 20 e o 24 deram-me uma pista.

Prof – Como assim?
DF – Eu vi que o vinte [apontando para os 50 por cento] passou para este [apontando para os 60 por cento] fazendo mais quatro. . . . É sempre de quatro em quatro.

Tal como o aluno DF, outros também compreendem a existência de uma regularidade, mas não a formulam a partir da estratégia dos 10%. Analisam a grandeza tempo, identificando um padrão crescente nos minutos, sem a relacionar com a quantidade de programa gravado. Outros avançam um pouco mais, como a aluna BF.

BF – Eu fiz assim. Vi que duas vezes 10 não dava quarenta, fiz três vezes dez e também não dava quarenta e vi que quatro vezes dez dava, descobri que era o quatro.

Esta aluna percebe a relação entre os dois conjuntos de números e avança na descoberta recorrendo a um processo de tentativa-erro, a fim de encontrar o valor do 10%, tendo presente que, para tal, teriam que encontrar o número que multiplicado por dez desse 40, os 100%. A apresentação de várias estratégias na discussão coletiva permite que a turma avance, acontecendo a reformulação de raciocínios, de acordo com o que cada um consegue interpretar nesse momento, e que desenvolvem com os contributos dos outros.

HB – O processo era sempre de quatro em quatro minutos.
SA – 10% são 4, é sempre vezes 4.
MF – O processo todo demorava dez vezes quatro minutos.
Prof – Todo o processo de gravação do programa demorava dez vezes quatro minutos.
HT – Podíamos também olhar para 36 minutos e ver qual era o número que dava 40.

Podemos constatar que, de um modo geral, todos os alunos percecionam que o número de minutos vai aumentando proporcionalmente em relação à percentagem de programa gravado. Esta é uma constatação que trazem do dia-a-dia e que confirmam. Há alunos ainda presos a estruturas aditivas e outros que, gradualmente, de acordo com cada situação, conseguem ir comparando e compreendendo a noção de percentagem, como parte de um todo que está para 100, recorrendo a estratégias multiplicativas. O cruzar das suas interpretações com a visão de outros permite chegar juntos mais longe na construção de relações, no sentido da compreensão dos conceitos de base associados à percentagem.

Considerações finais

As tarefas que partilhamos têm em comum o recurso a representações icónicas, simbólicas e a linguagem oral e escrita que, como salientam Ponte e Serrazina (2000), parecem ter apoiado a construção da aprendizagem dos conceitos associados à compreensão da percentagem. A imagem de uma bateria de telemóvel, uma barra de estado ou uma tabela de razão são usados como modelos de situações contextualizadas, para representar conceitos ou relações, que permitem aos alunos ir atribuindo sentido à percentagem. Estas representações têm por base a visualização, proporcionando a exploração de comparações, tornando visíveis os dois conjuntos de números, as duas grandezas que se comparam, numa construção intuitiva e informal do significado de razão: "isto é 50% daquilo". A imagem da barra de estado, por exemplo, evidencia os quatro números que estão envolvidos na situação, relacionando-os, o que mais tarde no seu processo de aprendizagem, os alunos vão formalizar como proporção. A abordagem inicial e intuitiva da percentagem, apoiada nas representações e nos conhecimentos matemáticos informais que os alunos trazem consigo, proporciona a explicitação e discussão de relações, afigurando-se assim a percentagem como uma ideia potente para os alunos neste nível de ensino e numa etapa do trabalho com os números racionais.

A escolha das representações usadas nestas tarefas foi atenta, na medida em que, como alertam Parker e Leinhardt (1995), alguns modelos podem levar os alunos a fixar-se apenas no significado parte-todo. Verificamos que este facto não acontece, tendo os alunos conseguido explorar outros constructos do número racional, como a medida e a razão. De notar que não pretendíamos encontrar a representação mais adequada, mas potenciar as vantagens que cada uma traz na abordagem exploratória da percentagem, contornando as suas limitações.

Tal como sugerem Moss e Case (2001), assegurámos que o trabalho incidisse no desenvolvimento de estratégias de cálculo, que coordenam os conhecimentos intuitivos dos alunos com estratégias que dominam, de manipulação dos números inteiros de 1 a 100, como a da composição e decomposição dos números ou a das metades/dobros. Podemos percecionar que estas estratégias, inicialmente aditivas, vão progressivamente assumindo uma natureza multiplicativa, apoiada num raciocínio proporcional.

A experiência de ensino, de que se destacam os episódios apresentados, decorre numa sala de aula, cuja dinâmica da interação é mediada pela comunicação que se estabelece, num olhar sobre a turma como uma comunidade de aprendizagem (Wenger, 1998).

Uma comunidade de aprendizagem matemática, com regras sociais e sociomatemáticas próprias da sua cultura que, como afirmam Yackel e Cobb (1996) sustentam a explicação, a justificação e a argumentação que se estabelecem. Nos momentos de discussão, os alunos apresentam o seu raciocínio e justificam-no, "seja com que modelo ou representação de percentagem for, todas as conversões e construções de representações devem ser apoiadas na verbalização de pensamentos e raciocínios" como sugerem Parker e Leinhardt (1995, p. 471).

Da análise retrospetiva em curso, a reflexão que trazemos a este artigo pretende não espelhar um percurso, mas destacar momentos em que a construção da rede de relações e conceitos que a noção de percentagem envolve parece ser acessível, estimulante e potente na aprendizagem com compreensão dos números racionais, para alunos do 1.º ciclo do ensino básico.

Referências bibliográficas

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics* education (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Brocardo, J. (2010). Trabalhar os números racionais numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. *Educação e Matemática*, *109*, 15-23.

Bruner, J. (1962). *The process of education*. Cambridge: Harvard University Press.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-266). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 481-503). New York: Routledge.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Hunter, R., & Anthony, G. (2003). Percentages: A foundation for supporting students' understanding of decimals. In *Proceedings of the 26th Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 2, (pp. 452-459). Geelong, Vic: MERGA.

Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação. DGIDC.

Mercer, N. (2002) Developing dialogues. In G. Wells & G. Claxton (Eds.*), Learning for life in the 21st century: Sociocultural perspectives on the future of education* (pp. 141-153). Oxford: Blackwell.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 122-147.

NCTM. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: a privileged proportion. *Review of Educational Research*, *65*(4), 421-481.

Parish, L. (2010). Facilitating the Development of Proportional Reasoning through Teaching Ratio. In L. Sparrow, B. Kissan & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,* (pp. 469-476). Freemantle: MERGA.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática, 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1986). Research-based observations about children's learning of rational number concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *8*(1), 39-48.

Spinillo, A. (2003). Ensinando proporção a crianças: Alternativas pedagógicas em sala de aula. *Boletim do GEPEM*, *43*(3), 11-47.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The Didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 9-35.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning and identity*. New York: Cambridge University Press.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Comunicação no ensino e aprendizagem

Preparação das discussões matemáticas no ensino da Álgebra: o caso da professora Ana

Cátia Rodrigues[1], *João Pedro da Ponte*[2], *Luís Menezes*[3]
[1]Agrupamento de Escolas de São João da Pesqueira e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, *catiamat@gmail.com*
[2]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, *jpponte@ie.ul.pt*
[3]Escola Superior de Educação de Viseu e CI&DETS, *menezes@esev.ipv.pt*

Resumo. *As discussões matemáticas podem ser uma atividade importante para promover a aprendizagem dos alunos, criando oportunidades para a partilha, justificação e argumentação de ideias matemáticas resultantes do seu trabalho com tarefas. No entanto, a sua realização constitui um desafio exigente para o professor, tanto na sua preparação como na sua condução tendo em vista a aprendizagem dos alunos. Nesta comunicação, procuramos compreender as práticas de discussão de Ana, professora do 3.º ciclo do Ensino Básico (EB), na preparação da discussão coletiva no trabalho com a Álgebra, em articulação com o seu conhecimento didático. Os resultados mostram que a professora, apoiada no seu conhecimento da Matemática, da prática letiva e dos alunos e da aprendizagem, identifica (antes e durante a aula) as ideias matemáticas que pretende que os alunos discutam a partir do seu trabalho com tarefas selecionadas para o efeito. Antecipa, também, possíveis estratégias de resolução e pensa como pode levar os alunos atingir os objetivos definidos. Na aula, e perante o trabalho dos alunos, reconhece as ideias mais importantes para discutir e estabelece uma ordem de apresentação tendo em vista promover a generalização dessas ideias.*

Palavras-chave: *discussões matemáticas; álgebra; práticas e conhecimento didático.*

Abstract. *Mathematical discussions can be an important activity to promote students' learning, creating opportunities for sharing, justifying and arguing mathematical ideas based on their work with tasks. However, leading mathematics discussions poses a high challenge to the teacher's work, including their preparation and conduction with a view to learning. In this communication, we seek to understand the discussion practices of Ana in her grade 7 class, in the preparation of a collective discussion in working with Algebra, based on their didactic knowledge. The results show that the teacher, based on their knowledge of mathematics, teaching practice and students and learning, identifies (before and during the class) the mathematical ideas that she wants students to discuss from their work with selected tasks for this purpose. She also anticipates possible solution strategies and thinks how she can take students to achieve the set objectives. In class, and taking into account the students' work, she recognizes the most important ideas to discuss and she establishes an order of presentation that promotes generalization of these ideas.*

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 387–404

Keywords: *mathematical discussions; algebra; teaching practices; didactical knowledge***.**

Introdução

O envolvimento dos alunos em discussões matemáticas contribui para a sua aprendizagem, já que ao partilharem e justificarem as suas ideias, ao argumentarem e avaliarem as dos colegas e ao negociarem significados para as ideias expostas, os alunos desenvolvem uma melhor compreensão sobre os assuntos em discussão (Cengiz, Kline, & Grant, 2011). Em particular, a aprendizagem da Álgebra é potencializada se resultar do envolvimento dos alunos em discussões. Contudo, conduzir discussões é uma prática complexa, que coloca dificuldades aos professores, e ainda insuficientemente compreendida. Para responder com sucesso a esse desafio, os professores precisam de apoiar-se no seu conhecimento didático (Ponte, 2011), que engloba o conhecimento da prática letiva em articulação com o conhecimento da Matemática, do currículo e da aprendizagem e dos alunos.

Neste estudo, defendemos que para fomentar uma discussão coletiva produtiva, é importante que o professor prepare a discussão antes e durante a aula. Para tal, antes da aula, o professor começa por selecionar tarefas que favoreçam o envolvimento dos alunos em discussões coletivas; define os objetivos que pretende atingir com essa discussão; antecipa possíveis estratégias de resolução dos alunos e seleciona, de entre as resoluções previstas, as que têm potencial para serem partilhadas em coletivo e que contribuem para atingir os objetivos propostos (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008). Como nem tudo pode ser antecipado na planificação da aula, a preparação da discussão completa-se já na aula. Ao acompanhar os alunos no desenvolvimento da tarefa, o professor seleciona as resoluções com mais potencial para a discussão e define uma sequência de apresentação de acordo com os seus objetivos (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012; Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

Nesta comunicação, o objetivo é compreender as práticas letivas desenvolvidas por uma professora do 3.º ciclo do EB na preparação de discussões matemáticas no ensino da Álgebra, em articulação com o seu conhecimento didático.

Práticas de discussão matemática e conhecimento didático

A aprendizagem dos alunos com compreensão decorre, essencialmente, da sua participação em aulas onde têm oportunidade de trabalhar com tarefas matemáticas significativas, partilhar e justificar ideias resultantes desse trabalho, apreciar as dos colegas, questionar e negociar significados para os raciocínios analisados. A promoção desse tipo de aulas é da responsabilidade do professor. Para o apoiar, Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) sugerem o recurso ao modelo das cinco práticas – antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões entre as respostas dos alunos.

A primeira prática – *antecipar* – pressupõe a antecipação de possíveis estratégias de resolução a apresentar pelos alunos, de eventuais dificuldades na resolução das tarefas e de formas de os levar a sistematizar aprendizagens (conceitos, representações e procedimentos). Essa prática, que é prévia à aula, é fundamental para a promoção de discussões matemáticas produtivas, porque se o professor não é capaz de antecipar respostas dos alunos e pensar como pode usar essas respostas para promover a sua aprendizagem, compromete a condução da discussão ao revelar falta de familiaridade com as ideias partilhadas e dificuldade em as acompanhar (Wagner, Speer, & Rossa, 2007). Contudo, é importante frisar que embora o professor, na planificação, antecipe formas de levar os alunos a atingir o definido, em sala de aula tem de ser capaz de selecionar as ideias matemáticas mais importantes, de modo a ampliar o pensamento dos alunos (Grant, Kline, Crumbaugh, Kim, & Cengiz, 2009).

A segunda prática – *monitorizar* – diz respeito ao modo como o professor acompanha o trabalho dos alunos, identificando as ideias mais importantes e que têm potencial para serem partilhadas, quer em termos de representações usadas quer em termos de conceitos mobilizados. O professor, ao prestar atenção às resoluções dos alunos e aos conceitos e representações usados nessas estratégias, continua a preparação da discussão, começando a delinear o trabalho a realizar nas práticas seguintes. Na terceira prática, *selecionar*, o professor escolhe as estratégias de resolução que pretende levar à discussão com o objetivo de partilhar e analisar raciocínios importantes e evitar repetições. A escolha dessas estratégias tem em conta os objetivos que definiu para aquela aula. De seguida, na quarta prática, – *sequenciar* – organiza-as de modo a ajudar os alunos a evoluírem nas suas ideias iniciais e a desenvolverem uma compreensão mais aprofundada dos assuntos em estudo. O professor pode organizar as estratégias dos alunos pelas mais frequentes, pelas que apresentam raciocínios errados e que precisam ser clarificados ou pelas que revelam uma evolução em termos de linguagem matemática mobilizada. Esta opção para organização das intervenções dos alunos é também evidente no estudo de caso relatado em Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), já que a professora apresenta uma tarefa aos alunos que favorece o trabalho com diferentes tipos de representações e depois organiza-as de forma a privilegiar a progressão no uso da linguagem algébrica. Na última prática, – *estabelecer conexões* – o professor leva os alunos a estabelecerem relações entre as suas ideias e as partilhadas, através do pedido de justificação, da comparação de estratégias e da argumentação sobre as ideias apresentadas.

Na preparação de discussões matemáticas, o professor recorre necessariamente ao seu conhecimento didático (Ponte, 2011), encarado numa perspetiva integradora, muito em especial ao seu conhecimento da prática letiva (que inclui elementos da gestão curricular, como as tarefas, o modo de trabalho dos alunos e a regulação da comunicação), mas relacionado com o conhecimento da Matemática, do currículo e da aprendizagem e dos alunos. O conhecimento da Matemática inclui o conhecimento de representações, conexões, conceitos e procedimentos. O do currículo pressupõe o conhecimento dos documentos e orientações curriculares e o da aprendizagem e dos alunos engloba o conhecimento de formas de pensar dos alunos, que tira partido do conhecimento dos alunos e suas características. É com base nesse conhecimento que o professor seleciona as tarefas a apresentar aos alunos com vista a envolvê-los, posteriormente, em discussão; define os objetivos que pretende atingir com a participação dos alunos na partilha de ideias; pensa em possíveis estratégias de resolução e dificuldades que possam sentir, assim como formas de os ajudar a ultrapassar essas dificuldades. É ainda da articulação entre o seu conhecimento da prática letiva, da Matemática e da aprendizagem e dos alunos que define um possível fio condutor para a apresentação das estratégias dos alunos.

Metodologia

Com vista a compreender as práticas de discussão de uma professora de Matemática do 3.º ciclo do EB, na preparação da discussão no ensino da Álgebra, apoiada no seu conhecimento didático, o estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994). A modalidade escolhida é o estudo de caso de uma professora, Ana, sendo os principais instrumentos de recolha de dados a observação participante (de aulas e sessões de trabalho colaborativo no qual a professora se integrou) e as entrevistas no início do estudo (EI) e no final do estudo (EF), apoiados em notas de campo (NC).

A análise de dados é baseada na análise de conteúdo dos dados recolhidos e na definição de categorias de codificação (Bardin, 1994), apoiada nos quadros teóricos de Ponte (2011) e Stein, Engle, Smith e Hughes (2008). Tendo por base esses referenciais teóricos, organizámos o caso do estudo desta comunicação em duas secções – a apresentação da professora Ana e a preparação da discussão coletiva, antes e durante a aula – que correspondem a dimensões de análise, para as quais definimos alguns temas que são concretizados em diversas categorias. As categorias estabelecidas são aplicadas transversalmente às diversas aulas observadas à professora e demais dados recolhidos. Analisamos de forma integrada práticas e conhecimento didático da professora relativos às discussões, por facilitar a compreensão das práticas letivas da professora quanto à preparação da discussão. Para a dimensão *preparação da discussão coletiva*, antes e durante a aula, definimos os seguintes temas de análise: *preparação do objetivo da discussão*; *seleção de tarefas e estratégias de resolução* e *seleção de estratégias* e *trajetórias de sequenciação*. O *objetivo* é concretizado através das categorias ideias matemáticas e generalização; as *tarefas*, nas categorias natureza, desafio, contexto e representações, e *estratégias de resolução* nas categorias tentativa, tabela e algébrica; a *seleção de estratégias* nas categorias ideias matemáticas e representações; e para *trajetórias de sequenciação* nas categorias linguagem matemática informal e formal.

O caso que apresentamos nesta comunicação faz parte de um trabalho de investigação mais amplo que ocorreu em contexto de um trabalho com características colaborativas que envolveu a primeira autora e o grupo de professores de Matemática de uma escola do EB do centro de Portugal, que integrava Ana. O trabalho colaborativo desenvolveu-se ao longo de dez sessões de trabalho (que decorreram durante nove meses, com uma duração aproximada de três horas cada uma), onde refletimos sobre textos e episódios de sala de aula relacionados com as discussões matemáticas e com o tema da Álgebra (a partir das próprias experiências dos professores) e preparáramos, em pequenos grupos, tarefas para exploração em sala de aula, tendo em conta o modelo de Stein, Engle, Smith e Hughes (2008). Essas tarefas foram selecionadas a partir de um conjunto de propostas introduzidas pela investigadora, e adaptadas tendo em conta as características das turmas e os conteúdos que estavam a ser abordados em sala de aula. A análise da preparação das discussões coletivas de Ana incide em quatro tarefas: *Palitos, Cubos com autocolantes, Inscrição no ginásio e A cantina da escola* (em anexo), por serem representativas do conjunto de dados relativos à preparação da discussão. As tarefas foram exploradas por Ana nas suas aulas do 7.º ano, que decorreram em paralelo com o desenvolvimento das sessões do grupo colaborativo, tendo aí sido refletidas.

A preparação das discussões matemáticas

Nesta secção começamos por apresentar, de forma breve, a professora Ana. De seguida, analisamos as suas práticas de preparação da discussão coletiva, antes e durante a aula.

Apresentação da professora Ana

É uma professora com uma vasta experiência de ensino, mais de vinte anos de serviço. Encontra na participação em projetos a oportunidade de enfrentar novos desafios e realizar aprendizagens que a levam a desenvolver um novo olhar sobre as coisas ou a refletir sobre as suas práticas. Em particular, neste projeto das "Discussões", sublinha a sua preocupação com o formalismo da linguagem que pode estar, nas suas práticas, associado ao trabalho com ideias algébricas:

> Eu acho que é outra vez para ver se, até que ponto aquilo que eu tenho feito nessa área é, pronto, o que se pretende, ou está correto, ou será que se pode ensinar isto de outra maneira, pronto, ou até o que me está a preocupar é um bocado o formalismo. (EI set 2013).

Reconhece que as aprendizagens que realiza têm repercussões na aprendizagem dos seus alunos, já que as procura introduzir na sua prática letiva:

> Eu não fazia de forma tão cuidada a preparação das aulas no sentido de antecipar as resoluções. (...) O facto de se insistir um bocado na organização dos dados, de haver umas tabelas (...) aquilo foi claro para eles, organizar o texto, organizar o que lhes é dado no texto numa tabela, isso trouxe-lhes alguma segurança e vi que pode haver coisas que vamos continuar a dar porque funcionaram e vale a pena insistir, acho que é um bocado isso que vai acontecer. (EF jun 2014)

Apesar de ser uma professora experiente, Ana procura evoluir profissionalmente e de enfrentar novos desafios. Por isso, procura nos projetos em que participa oportunidades para se desenvolver e de o repercutir nas aprendizagens praticadas pelos seus alunos.

Preparação do objetivo da discussão

Ao planificar, quando prepara o momento de discussão coletiva, identifica as *ideias matemáticas* que pretende discutir em coletivo – escrita do termo geral de uma sequência e da expressão da função afim e da função linear e de equações, a partir da apresentação de informação em linguagem natural:

> Com estas tarefas [*Palitos* e *Cubos com autocolantes*] pretendo trabalhar a escrita de termos gerais. Os alunos também determinam o número de palitos de algumas figuras e analisam uma regra que é dada. (NC_19/11/2013)

> O objetivo [para a tarefa *Inscrição no ginásio*] é eles chegarem à escrita de uma expressão para a função afim e para a função linear. Como eles também representam graficamente as funções veem algumas caraterísticas dessas funções. (NC_27/3/2014)

> O objetivo para esta aula é resolverem problemas com equações. Eles podem fazer tentativas mas pretendo que eles consigam traduzir o problema [*A cantina da escola*] por uma equação. (NC_27/3/2014)

Em sala de aula, ao preparar a discussão da tarefa *Palitos* (anexo 1), verifica que os alunos determinam termos de uma dada sequência e confirmam se um dado termo pertence à sequência: "Eles não têm dificuldade nenhuma em dizer quantos é que estão na 5.ª nem na 15.ª. Depois, eles vêm treinados do 6.º ano fazer o termo geral e eles sabem fazer a operação inversa, tirar, dividir (...)" (3.ª sessão_2/12/2013).

Ao refletir sobre a preparação da discussão da tarefa *Inscrição no ginásio* (anexo 3), destaca o trabalho profícuo dos alunos no preenchimento de uma tabela, que mobiliza ideias resultantes da interpretação de informação dada em linguagem natural, e na elaboração de um gráfico com os dados dessa tabela, apesar das dificuldades sentidas na definição de uma possível escala para a construção da representação gráfica:

> Esta, contrariamente, ao que se estava a pensar a grande tragédia das crianças, a primeira pergunta preencheram mais ou menos a tabela e depois o problema foi na segunda que era… Que era fazer o gráfico por causa da escala. (8.ª sessão_8/5/2014)

Na tarefa *A cantina da escola* (anexo 4), tendo em vista preparar a discussão, verifica na aula que os alunos conseguem traduzir o problema por uma equação, surpreendendo-a com a escrita de equações com denominadores e parêntesis: "Eu nesse dia estava muito orgulhosa dos meus meninos (...) esta equação aparece com parêntesis (...) com denominadores" (8.ª sessão_8/5/2014). Justifica a ocorrência dessa situação pela atribuição de diferentes designações à incógnita: "A turma estava dividida em três grupos [tipos de resoluções distintos] (...) há um grupo que faz a outra, há três grupos que faz esta, que é atribuir o *x* à segunda-feira" (8.ª sessão_8/5/2014).

Durante a preparação da discussão coletiva, preocupa-se também com a *generalização* das ideias algébricas. As tarefas envolvendo sequências favorecem a escrita da expressão para o termo geral de uma sequência, a partir da sua relação com a ordem das figuras e a explicação do raciocínio desenvolvido: “Ver qual era a relação entre a ordem e a figura. (...) Mas não é o termo geral. É como chegas lá. Se calhar até é mais difícil chegar a esta.” (2.ª sessão_24/10/2013). Em sala de aula, verifica que os alunos são capazes de escrever várias expressões para o termo geral de uma dada sequência, resultantes da forma como interpretam a construção subjacente à sequência apresentada, na tarefa *Cubos com autocolantes* (anexo 2):

> Há o pessoal que acha que vai, são 4, 4 porque são estas voltas e 2 tampas, não é? Que é o 4n+2. Depois, há pessoal que assume que os dois cubos dos extremos têm sempre 5 autocolantes e por isso vão só fazer os do meio e quem pensa assim acaba por depois chegar a uma fórmula parecida com esta aqui, é muito giro. (...) (3.ª sessão_2/12/2013).

A resolução da tarefa *A cantina da escola* (anexo 4) permite concretizar o objetivo de generalizar as relações apresentadas na informação dada em linguagem natural e consequente sistematização dessas ideias através de uma equação: “esta equação aparece com parêntesis” (8.ª sessão_8/5/2014).

Seleção de tarefas e estratégias de resolução

A preparação da discussão coletiva contempla, também, a seleção das tarefas a apresentar aos alunos. Opta por tarefas de *natureza* diversificada, apesar de referir que não podem ser demasiado abertas para não comprometer o trabalho dos alunos: “Se for uma coisa muito aberta há alguma tendência deles se perderem e nós também (...) O objetivo depois não é alcançado com a facilidade que devia, sei lá, perde-se muito mais tempo” (EI set 2013). Considera, ainda, que não se devem afastar muito do tipo de trabalho habitual dos alunos: “Os meninos não estão habituados a este tipo de resoluções. (3.ª sessão_2/12/2013). É pelas razões apontadas que adapta a tarefa *Inscrição no ginásio* (anexo 3), a partir do conjunto de propostas apresentadas pela investigadora, já que a tarefa surge com um pedido aberto (Explica que ginásio deve escolher o Santiago):

> Na primeira questão apresenta-se uma tabela aos alunos para preencherem, que relacione o tempo de permanência com o total gasto em cada um dos ginásios, de modo a que os alunos se familiarizem com a situação descrita e comecem a ter uma noção do comportamento dos dois ginásios. A segunda questão mantém-se, acrescentando a indicação que a representação da evolução do preço a pagar é apenas nos primeiros seis meses de permanência. No terceiro pedido convidam-se os alunos a analisar durante quanto tempo é mais vantajosa a inscrição num determinado ginásio, justificando a sua resposta. A última questão também se mantém mas

> exclui-se a representação gráfica, uma vez que já foi solicitada aos alunos na segunda questão. (NC_27/3/14)

As tarefas que propõe são, também, diversificadas quanto ao grau de *desafio*. Escolhe um problema (tarefa fechada de desafio elevado) para abordar o domínio das equações e uma exploração (tarefa aberta de desafio reduzido) para trabalhar a função afim e linear. A escrita e explicação do termo geral para uma sequência é desencadeada a partir do trabalho dos alunos em torno de investigações (tarefa aberta de desafio elevado). Essas tarefas surgem em *contextos* não puramente matemáticos e com oportunidades de aprendizagem distintas para os alunos. A atividade dos alunos no trabalho com sequências é desencadeada a partir de imagens que sugerem a análise de sequências baseadas em construções com palitos (construção no plano) e cubos (construção no espaço). A opção por essas tarefas está relacionada com o facto de considerar que essa é a abordagem indicada para o trabalho dos alunos nesse conteúdo: "É sempre deste género, que eles consigam associar o número da figura à figura que está em cima, porque se não, eu acho que aqui eles têm muita dificuldade em perceber a ordem, o que é a ordem, o que é o termo" (2.ª sessão_24/10/2013). As tarefas propostas para o domínio das equações, embora surgindo em contexto não puramente matemático, permitem que os alunos trabalhem com informação apresentada em linguagem natural e que de seguida a traduzam para linguagem matemática: "Eu achei que realmente a equação seria mais complicada, mas a leitura do texto, a da cantina estava tudo mais direitinho. (...) Naturalmente escreve-se essa equação" (8.ª sessão_8/5/2014).

A tarefa *Inscrição no ginásio* (anexo 3) para além de surgir em contexto não puramente matemático tem, ainda, a particularidade de apresentar uma situação próxima do interesse dos alunos e envolve a tomada de decisões acerca da escolha do melhor ginásio. Para tal, os alunos analisam um conjunto de informação apresentada em linguagem natural e recorrem a diferentes tipos de *representações*: preenchem uma tabela, elaboram uma representação gráfica e escrevem expressões analíticas representativas da função linear e afim:

> Ana: Preencheram mais ou menos a tabela e depois o problema foi na segunda que era, que era fazer o gráfico por causa da escala. (...)
> José: E tiveram dificuldade a escrever as expressões?
> Ana: Não, nada, não. (8.ª sessão_8/5/2014)

Em sala de aula, tendo em vista preparar a discussão, identifica diversas estratégias de resolução que os alunos usam no trabalho com as diversas tarefas. A estratégia que recorre ao processo de *tentativa* é usado pelos alunos na tarefa *A cantina da escola* (anexo 4), embora mobilizando raciocínios distintos: numa, os alunos experimentam valores arbitrários iniciando por números redondos; na outra, analisam as condições dadas no enunciado da tarefa e começam por testar um número que esteja de acordo com os dados: "Em todas elas há um grupo que faz mais por tentativas, mas o engraçado nos outros é começar por um número redondo. Portanto, começam por 100 e depois vão subindo ou descendo. Não tem nada a ver com esta que dividem logo" (8.ª sessão_8/5/2014).

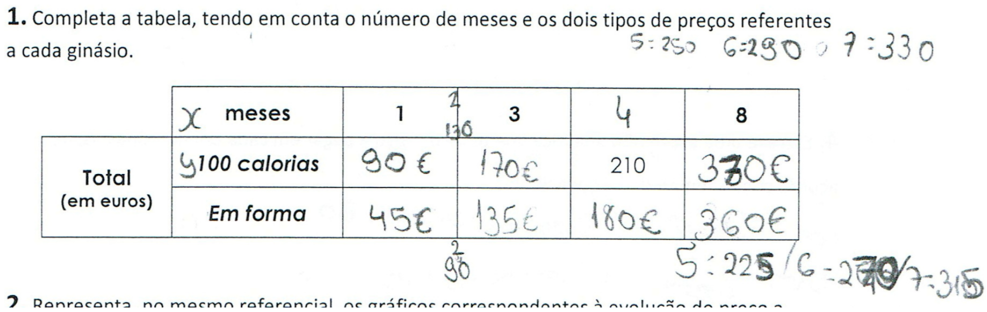
Com vista a contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, valoriza bastante a estratégia que recorre a procedimentos *algébricos*. Antes da aula, contempla a identificação e justificação do raciocínio desenvolvido para a escrita de diferentes expressões para o termo geral de uma sequência:

> Nós pensámos que temos sempre duas filinhas de fósforos. E as duas linhas horizontais têm sempre tantos fósforos como o número da figura, portanto duas vezes n, 2n. Depois temos sempre 3 pauzinhos ao alto. Temos sempre mais 1 que o número da figura, mais n+1. (...) A 3n+1. Tínhamos as duas bases outra vez e ainda temos mais 2 verticais. Será múltiplo de 3. Já sei que é 3n e agora vou ali à procura. (2.ª sessão_24/10/2013).

Na escolha das propostas a apresentar aos alunos, mobiliza o seu conhecimento dos alunos e da aprendizagem, ao procurar que as tarefas não sejam demasiado abertas, estejam de acordo com o seu trabalho habitual e promovam o desenvolvimento da sua atividade matemática. Usa o seu conhecimento da Matemática para a antecipação das estratégias que os alunos podem desenvolver na realização das tarefas propostas, assim como na identificação dessas estratégias em sala de aula, contemplando também as representações que podem usar (algébrica, gráfica e tabelar).

Seleção de estratégias e trajetórias de sequenciação

No acompanhamento que faz nas aulas ao trabalho dos alunos, identifica as *ideias matemáticas* importantes e as *representações* usadas e que têm potencial para serem discutidas na turma. Na tarefa *Inscrição no ginásio* (anexo 3), seleciona resoluções que evidenciam de forma clara o processo seguido para o preenchimento da tabela e que se baseia na adição sucessiva da mensalidade de cada um dos ginásios (figura 1).



1. Completa a tabela, tendo em conta o número de meses e os dois tipos de preços referentes a cada ginásio.

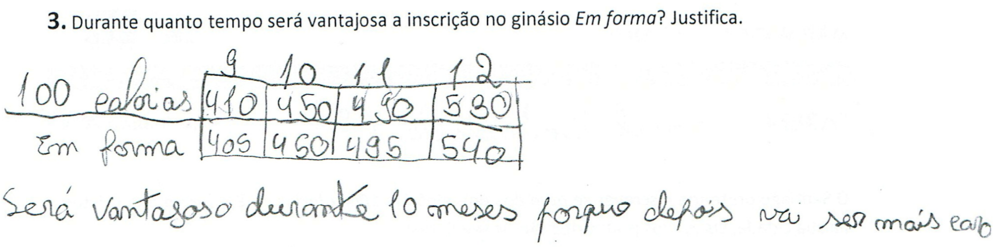
5: 250 6=290 7:330

	x meses	1	2	3	4	8
Total (em euros)	100 calorias	90 €	130	170€	210	330€
	Em forma	45€	90	135€	180€	360€

5: 225 / 6 = 270 / 7: 315

Figura 1. Resposta à questão 1.

Relativamente à elaboração da representação gráfica dos valores pagos nos primeiros seis meses do ano nos dois ginásios, opta por resoluções que recorrem ao uso de diferentes escalas. Seleciona a estratégia que recorre à elaboração de uma tabela, como forma de apoiar os alunos na tomada de decisões acerca do ginásio mais vantajoso (figura 2).



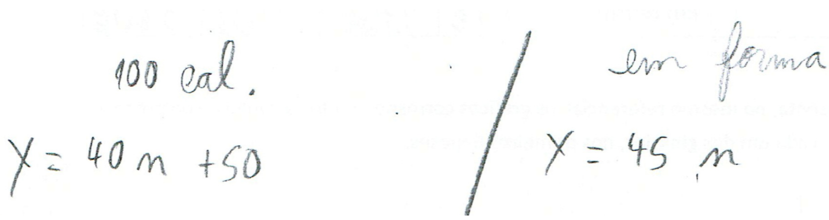
3. Durante quanto tempo será vantajosa a inscrição no ginásio *Em forma*? Justifica.

	9	10	11	12
100 calorias	410	450	490	530
Em forma	405	450	495	540

Será vantagoso durante 10 meses porque depois vai ser mais caro

Figura 2. Resposta à questão 3.

Na questão que convida os alunos à generalização da relação entre duas variáveis, privilegia os grupos que apresentam diversas formas de representar essa generalização e que evidenciam uma progressão relativamente ao uso da linguagem matemática, desde a *linguagem matemática informal* – lei de formação – até à *linguagem matemática formal* – expressão algébrica (figura 3):



100 cal.

$y = 40n + 50$

em forma

$y = 45n$

Figura 3. Resposta à questão 4.

Quando questionada sobre a escolha das resoluções que preparou para discutir na turma, focou aspetos como a diversidade e a apresentação de raciocínios que contemplassem todos os passos de resolução. Refere, ainda, a importância de discutir diferentes expressões que traduzem uma mesma relação entre variáveis:

> Optei por aquela, porque como apresentava todos os meses, os alunos percebiam melhor de onde vinham os valores. Na do gráfico achei importante alertar para as diferentes escalas que podiam usar e na terceira não houve muita variedade. Na última como tinham aparecido na turma três resoluções diferentes achei que era importante eles apresentarem as três e verem as diferenças. (NC_ março 2014)

As suas escolhas evidenciam a sua preocupação na partilha de ideias distintas e sua comparação, assim como a exposição e justificação de raciocínios que apresentam um processo detalhado de resolução, de forma a ficar compreensível para todos os alunos. Na tarefa *A cantina da escola* (anexo 4), Ana, antes da aula, antecipa dois tipos principais de estratégias a utilizar pelos alunos: tentativa e algébrica. Para essas possibilidades, estabelece que a ordem de apresentação das resoluções deve privilegiar a evolução da linguagem matemática usada:

> Os alunos podem resolver este problema por tentativa, (...) podem também traduzir este problema por uma equação. (...)
> O grupo considerou que perante estas possíveis estratégias, o processo com recurso à tabela seria partilhado em primeiro lugar seguido da estratégia que usa uma equação. (NC_27/3/14)

Em sala de aula, na preparação da discussão desta tarefa, identifica na turma duas resoluções distintas que recorrem a *representações* diferentes, com graus de linguagem matemática também distintos: o processo por tentativa, apela ao uso de uma linguagem matemática informal enquanto a equação se baseia numa *linguagem matemática formal*. Na primeira, os alunos fazem um tratamento da informação dada no enunciado, de modo a organizarem as suas tentativas e encontrarem de forma mais eficaz a resposta ao problema (figura 4).

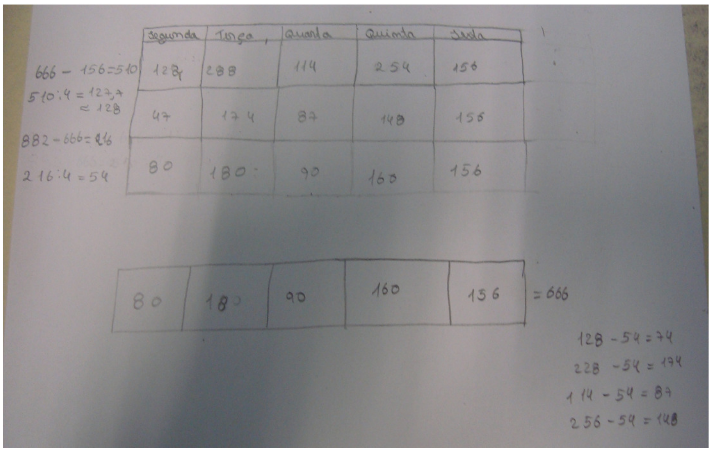


Figura 4. Resolução por tentativa

O outro processo resume-se à definição da variável e tradução das condições do problema em função dessa variável. Nessa estratégia, surgem na turma duas designações distintas para a variável que implicam a escrita de duas equações também diferentes e que envolvem ideias matemáticas variadas, como a necessidade do uso de parêntesis e denominadores, para além do uso das diversas operações matemáticas (figuras 5 e 6):

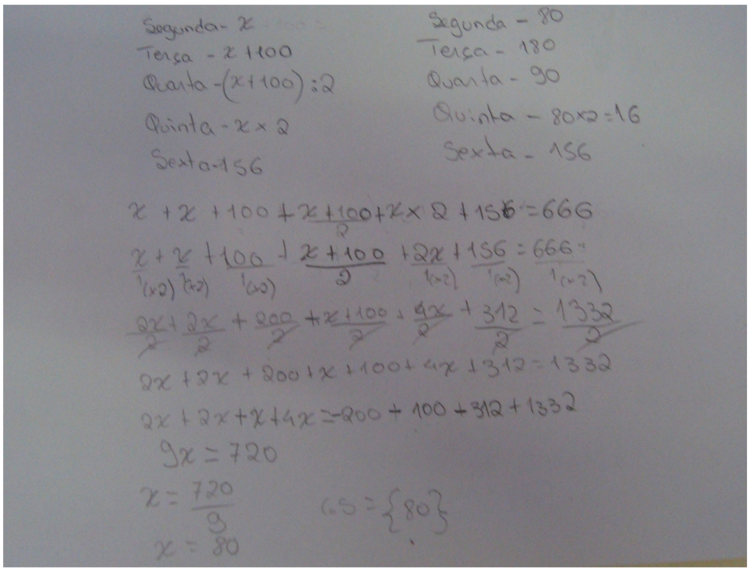


Figura 5. Resolução algébrica (*x* designa a segunda-feira).

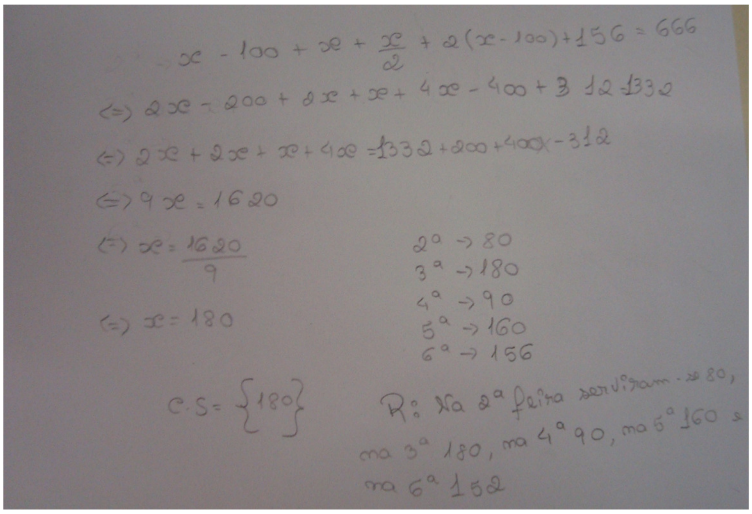


Figura 6. Resolução algébrica (*x* designa a terça-feira).

Na preparação da seleção de estratégias e trajetórias de sequenciação, a professora apoia-se no seu conhecimento da Matemática, na identificação das ideias matemáticas envolvidas nas resoluções dos alunos e nas representações usadas. Recorre também a conhecimento da aprendizagem e dos alunos na sequenciação que estabelece para os convidar a partilhar as suas ideias e levá-los a discutir coletivamente para atingir o objetivo da aula.

Considerações finais

Quando prepara a discussão coletiva, na planificação e durante a aula, a professora é levada a realizar diversas ações instrucionais. Seleciona tarefas que proporcionem experiências de aprendizagem diversificadas aos seus alunos, mas que estejam de acordo com as suas características e capacidades. Os alunos trabalham com investigações, problemas e explorações. Para essas tarefas define claramente o objetivo que pretende atingir no momento da discussão, identificando os conceitos e procedimentos algébricos que quer que discutam e generalizem. Em sala de aula, ao fazer esse levantamento, consegue, ainda, reconhecer dificuldades que os alunos sentem no desenvolvimento do seu trabalho. As tarefas que propõe surgem em contextos diversos e sugerem o uso de diferentes tipos de representações matemáticas. Na preparação da discussão, a professora pensa, ainda, em possíveis estratégias que os alunos podem usar no trabalho com as diversas tarefas (como também é destacado em Stein, Engle, Smith e Hughes, 2008), privilegiando as que permitem recorrer a processos de resolução por tentativa, tabela e algébrica. Essas estratégias são reconhecidas, em sala de aula, no acompanhamento que faz ao trabalho dos alunos. Para essas estratégias, identifica os conceitos matemáticas envolvidos e as representações usadas e é com base nesses critérios que na preparação da discussão, na aula, seleciona as resoluções que pretende que os alunos partilhem na discussão coletiva, como também acontece no estudo de Oliveira, Menezes e Canavarro (2013). No caso de Ana, essa seleção evidencia a transição da linguagem matemática informal para a formal, com vista a envolver os alunos no processo de generalização das ideias algébricas.

O trabalho desenvolvido pela professora na preparação da discussão, antes e durante a aula, é apoiado no seu conhecimento didático, em particular, da prática letiva, na escolha das tarefas e na forma como seleciona e estabelece uma ordem para a apresentação dos processos de resolução usados pelos alunos, visando fomentar a discussão. Naturalmente, o conhecimento da Matemática está presente principalmente na definição do objetivo de discussão e na identificação das estratégias de resolução. Já o conhecimento da aprendizagem dos alunos emerge na identificação das dificuldades na resolução e também na escolha criteriosa das tarefas.

Os resultados deste estudo de caso mostram-nos quão importante é continuar a estudar as práticas dos professores na preparação da discussão coletiva, de modo a compreendê-las em profundidade, sinalizando os seus elementos-chave e as relações entre eles.

Referências

Bardin, L. (1994). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Um introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Canavarro, P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds), *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 255-266). Portalegre: SPIEM.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*, 355-374.

Grant, T. J., Kline, K., Crumbaugh, C., Kim, O.-K., & Cengiz, N. (2009). How can curriculum materials support teachers in pursuing student thinking during whole-group discussions? In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann & G. M. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 103-117). New York, NY: Routledge.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a construção de um quadro de referência. *Quadrante*, *2*, 29-54.

Ponte, J. P. (2011). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. In N. Planas (Ed.), *Educación matematics: Teoría, critica y prática.* (pp. 83-98) Barcelona: Graó.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313-340.

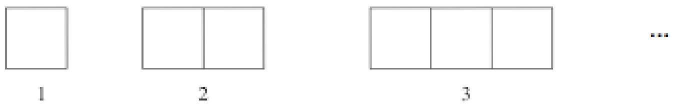
Wagner, J. F., Speer, N. M., & Rossa, B. (2007). Beyond mathematical content knowledge: A mathematician's knowledge needed for teaching an inquiry-oriented differential equations course. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*, 247-266.

ANEXOS

Anexo 1: Tarefa *Palitos*

Tarefa: Palitos

Considera a seguinte sequência de figuras construídas com palitos que continua da forma que a imagem sugere:



1. Quantos palitos terá a 5.ª figura? E a 15.ª?

2. Será possível construir uma figura desta sequência com 76 palitos? Explica como pensaste.

3. Escreve uma regra que te permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explica como a obtiveste.

4. A Aurora, que também resolveu esta tarefa, diz que o número de palitos de qualquer figura, T, desta sequência pode ser obtido a partir da seguinte regra:

$$\boldsymbol{T = 4 \times n - (n - 1)}$$

Explica como poderá ter pensado.

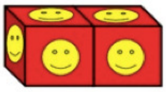
Como se relaciona esta regra com a que escreveste na questão número 3?

Anexo 2: Tarefa *Cubos com autocolantes* (retirado de Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2012)

Tarefa: Cubos com autocolantes

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.



1. Descobre quantos autocolantes a Joana usa numa construção com: três cubos; quatro cubos; dez cubos; cinquenta e dois cubos.

2. Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

Anexo 3: Tarefa *Inscrição no ginásio*

O Santiago pretende inscrever-se num dos dois ginásios ***100 calorias*** ou ***Em forma*** que existem na sua cidade. Os preços praticados são os seguintes:

100 Calorias — Inscrição: 50 € — Mensalidade: 40 €

Em Forma — Inscrição: Gratuita — Mensalidade: 45 €

1. Completa a tabela, tendo em conta o número de meses e os dois tipos de preços referentes a cada ginásio.

	meses	1	3		8		11	12
Total (em euros)	***100 calorias***			210				
	Em forma					450		

2. Representa, no mesmo referencial, os gráficos correspondentes à evolução do preço a pagar em cada um dos ginásios, nos primeiros 6 meses.

3. Durante quanto tempo será vantajosa a inscrição no ginásio *Em forma*? Justifica.

4. Escreve uma expressão analítica que te dê o preço a pagar em cada um dos ginásios, de acordo com o tempo de frequência.

Anexo 4: Tarefa *A cantina da escola*

No final de cada semana, e de forma a preparar a próxima, a responsável pela cantina dá indicação aos serviços da *Escola Azul* do número de alunos que almoçaram na cantina, durante essa semana. Na informação enviada aos serviços pode ler-se:

Na terça-feira a cantina serviu mais 100 almoços do que na segunda, na quarta-feira metade dos almoços servidos na terça, na quinta-feira o dobro dos almoços servidos na segunda e na sexta serviu 156 almoços.

Quantos almoços serviu a cantina da escola em cada um dos dias, durante essa semana? Explica como pensaste.

Comunicar por escrito em matemática: um estudo com alunos do 5.º ano

Elisabete Costa[1], *Manuel Vara Pires*[2]
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança,
[1]*elisabete_costa_87@hotmail.com;* [2]*mvp@ipb.pt*

Resumo. *A investigação educacional e as práticas da sala de aula relatadas por professores têm realçado a relevância do desenvolvimento das capacidades comunicativas dos alunos na melhoria das aprendizagens. Esta comunicação apresenta um estudo exploratório realizado no âmbito do Relatório Final de Estágio do Mestrado em ensino do 1.º e do 2.º ciclo do ensino básico, com o propósito de identificar e analisar a capacidade de comunicação escrita dos alunos, nas dimensões clareza, fundamentação, lógica e profundidade, quando resolvem tarefas matemáticas. A investigação, integrada num estudo mais amplo centrado na comunicação oral e escrita dos alunos desenvolvido em todas as disciplinas do estágio profissional, segue uma abordagem qualitativa e interpretativa, envolvendo os alunos que constituíam a turma de matemática do 5.º ano de escolaridade. A recolha de dados foi feita através das respostas escritas dadas num questionário com três tarefas para resolver individualmente. A análise dos dados suportou-se nas quatro dimensões definidas previamente e em três níveis de análise (baixo, médio, elevado). Da análise dos registos escritos dos alunos, pode concluir-se que a maioria revela um nível médio em clareza, oscila entre os níveis baixo e médio na fundamentação e manifesta níveis baixos em lógica e na profundidade, evidenciando maiores dificuldades na justificação e conexão das ideias e dos processos seguidos, na coerência dos registos e no domínio de aspetos importantes dos tópicos matemáticos trabalhados.*

Palavras-chave: *aprendizagem matemática; comunicação matemática; comunicação escrita; ensino básico; prática de ensino supervisionada.*

Abstract. *Both the educational research and classroom practices reported by teachers have emphasized the importance of the development of communication abilities of students in improving their learning. This communication presents an exploratory study in the context of the master Final Report in Teaching in the 1st and 2nd basic education cycles, in order to identify and analyze the written communication ability of the students, in clarity, reasoning, logic and depth dimensions, when they solve mathematical tasks. The research, part of a broader study focused on oral and written communication ability of the students in all disciplines of the professional internship, follows a qualitative and interpretative approach, involving the students of the 5th grade mathematics class. Data collection was done through the students' written answers in a questionnaire with three mathematical tasks to solve individually. Data analysis was based on the four dimensions previously defined (clarity, reasoning, logic, depth) and three levels of analysis (low, medium, high). Analyzing the students' written answers, it can be concluded that most of them reveals an medium level in clarity, oscillates between the low and medium levels in reasoning, and* *expresses low levels in both logic and depth, suggesting some difficulties in the justification and connection of ideas and procedures, in the consistency of the written records and in the understanding of important aspects of mathematical topics.*

Keywords: *mathematics learning; mathematical communication; written communication; basic education; supervised teaching practice.*

Enquadramento do estudo

O estudo, que se apresenta, foi desenvolvido durante o estágio profissional realizado ao longo de um ano letivo numa escola do nordeste transmontano pela primeira autora e orientado pelo segundo autor, no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada do Mestrado em ensino do 1.º e do 2.º ciclo do ensino básico. A investigação, integrada num estudo mais amplo feito em todas as disciplinas do estágio profissional, envolveu os alunos que constituíam a turma do 5.º ano de escolaridade, em que foi lecionada a disciplina de matemática. Ao longo do estágio, tal como nas restantes três turmas das outras áreas disciplinares lecionadas, foi dada uma grande relevância a aspetos da comunicação, quer oral quer escrita, dos alunos na sala de aula, que funcionou como tema integrador das diversas experiências de ensino e aprendizagem apresentadas no Relatório Final de Estágio (Costa, 2015).

É amplamente reconhecido que as crianças devem ser consideradas o centro da ação educativa, devendo o professor assumir um papel de “orientador” das aprendizagens e organizador do ambiente de forma a melhor poder responder às especificidades dos alunos em concreto. Ao longo da prática letiva desenvolvida, facilitar e apoiar as suas aprendizagens constituiu uma preocupação constante, procurando responder às respetivas necessidades e interesses. Por isso, procurou-se criar oportunidades para os alunos discutirem e tomarem decisões, quer na seleção de algumas tarefas a trabalhar quer no desenvolvimento das aulas, no sentido de potenciar o desenvolvimento da capacidade de comunicação em sala de aula.

Em matemática, como em qualquer outro saber disciplinar, a importância da capacidade de saber comunicar bem oralmente ou por escrito em sala de aula no desenvolvimento e na aprendizagem dos alunos é largamente reconhecida (Fonseca, 2009; Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014; NCTM, 2007). Mas todas as formas de comunicação, sendo importantes, envolvem especificidades próprias que devem ser tidas em conta. Reforçando o papel relevante da comunicação escrita em matemática, os alunos aprendem melhor quando registam, por escrito, “os processos matemáticos utilizados, progredindo na tradução de relações da linguagem natural para a linguagem matemática e vice-versa, na variedade de formas de representação matemática que usam e no rigor com que o fazem" (Ministério da Educação, 2007, p. 45). Neste sentido, a comunicação escrita exige o registo das ideias através de palavras e representações adequadas à situação. Assim, é fundamental que, individualmente ou em grupo, os alunos possam resolver tarefas que apelem ao desenvolvimento das suas capacidades de comunicação escrita em matemática, registando as suas ideias de forma clara, correta e lógica, apelando a diferentes representações, justificando os seus raciocínios e revelando compreensão dos tópicos trabalhados.

Atendendo a estes pressupostos, no contexto do estágio profissional, foi desenvolvido um trabalho mais organizado e fundamentado em torno da comunicação escrita em matemática, dando destaque a quatro dimensão da comunicação relevantes para a compreensão do tema em estudo (Castanheira, 2014; Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014): (i) clareza das ideias registadas, suportada em vocabulário e representações adequados; (ii) fundamentação dos processos seguidos, centrada nas justificações escritas das opções tomadas; (iii) lógica, manifestada no raciocínio e coerência dos registos escritos; e (iv) profundidade, associada ao domínio de aspetos importantes e complexos do assunto a tratar. Nesta perspetiva, o principal propósito do estudo é, então, identificar e analisar a capacidade de comunicação escrita dos alunos, nas dimensões clareza, fundamentação, lógica e profundidade, quando resolvem individualmente tarefas matemáticas.

Aspetos da comunicação em matemática na sala de aula

Como muitos outros termos usados em educação, "comunicação" é um termo polissémico, possuindo diferentes significados que têm vindo a aumentar em múltiplas dimensões com o desenvolvimento de publicações sobre o tema (Belo, 2005). Mas, independentemente dos múltiplos significados, não se consegue imaginar a vida social sem comunicação. Nos tempos atuais, a sociedade vive em permanente evolução, necessitando de utilizar cada vez mais a comunicação, através de sistemas mais eficazes e capazes de fomentar e facilitar o desenvolvimento social (Guerreiro, 2011).

No que respeita ao contexto educativo, a comunicação passou a ser mais valorizada como processo pelo qual os alunos aprendem nas várias áreas do saber do que meramente como um produto ou objeto curricular (Menezes, 2010). Neste sentido, muitos estudos apontam para a necessidade de fomentar e desenvolver nos alunos competências comunicativas escritas e orais, desde os primeiros anos de escolaridade, tendo evidenciado a relevância da comunicação na melhoria das aprendizagens (Carvalho & Silvestre, 2010; Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014). Muitos autores, como Menezes (2000), consideram a comunicação como a essência do ensino e da aprendizagem de uma dada disciplina, dado que "os atos de ensinar e aprender são na sua essência atos de comunicação" (p. 5).

Outros autores, como Brendefur e Frykhom (2000), citados por Guerreiro & Menezes (2010) e Menezes, Ferreira, Martinho e Guerreiro (2014), reconhecem quatro modos de comunicação na sala de aula que, embora tenham maior incidência na oralidade, têm também implicações na comunicação escrita: (i) a comunicação unidirecional; (ii) a comunicação contributiva; (iii) a comunicação reflexiva; e (iv) a comunicação instrutiva. O modo de comunicação unidirecional caracteriza-se pela forte prevalência do professor na sala de aula, que expõe e explica os conceitos, reservando aos alunos o papel de ouvintes, com poucas oportunidades para comunicarem as suas ideias. Neste contexto, a eficácia é medida pela aproximação entre aquilo que o aluno é capaz de reproduzir, quer oralmente quer por escrito, e o que o professor expõe (Menezes, 2010). O modo de comunicação contributiva está associado à interação entre os alunos e o professor, mas em que o professor continua a ter o papel predominante havendo apenas pequenas intervenções dos alunos (Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014). Neste modo, "o professor permite que os alunos participem no discurso da aula", mas através da participação concretizada por "interações curtas e de um nível cognitivo baixo" (Menezes, 2010, p. 240). Contrariamente aos dois modos antecedentes, o modo de comunicação reflexiva apoia-se no conceito do discurso reflexivo desenvolvido no contexto de sala de aula, valorizando a reflexão e ação dos alunos sobre a atividade que decorre da resolução de tarefas (Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014). Destaque-se que Menezes (2004) aponta este modo de comunicação reflexiva como o mais valorizado e significativo no desenvolvimento da capacidade de comunicar dos alunos. Finalmente, o modo de comunicação instrutiva envolve a interação mas, sobretudo, incorpora as ideias, dificuldades e estratégias dos alunos que influenciam o trabalho do professor, suscitando o refazer constante do discurso no contexto educativo (Guerreiro & Menezes, 2010; Menezes, 2010).

A comunicação em sala de aula decorre a partir de formas caracterizadas pelo uso da linguagem oral e da linguagem escrita, revelando-se na maneira como o professor e os alunos constroem e partilham o seu conhecimento (Guerreiro & Menezes, 2010; Ponte & Serrazina, 2000). O NCTM (2007) reforça a relevância dos registos escritos na aprendizagem matemática, considerando-os uma "forma de ajudar os alunos a consolidar o seu pensamento, uma vez que os obriga a refletir sobre o seu trabalho e a clarificar as suas ideias acerca das noções desenvolvidas na aula" (p. 67).

Também para Ponte et al. (2007, p. 45), "a linguagem escrita (incluindo todo o tipo de registos escritos, simbólicos e representações icónicas) é uma forma de comunicação que tem um papel complementar fundamental no ensino-aprendizagem" da matemática, envolvendo um conjunto de representações facilitadoras do processo comunicativo. Associando os três modos de representação interativos de Bruner às produções escritas na resolução das tarefas, pode-se afirmar que os alunos apelam: (i) a representações ativas, quando recorrem à manipulação ou experiência direta sobre os objetos; (ii) a representações icónicas, quando recorrem a esquemas, desenhos ou diagramas, ilustrando conceitos ou procedimentos; e (iii) a representações simbólicas, quando recorrem a linguagem simbólica, através de símbolos matemáticos ou outras linguagens (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008).

Aspetos metodológicos do estudo

Globalmente, a prática de ensino supervisionada, realizada ao longo do ano letivo nos dois ciclos de ensino e nas respetivas áreas disciplinares, seguiu características de investigação-ação (Bogdan & Biklen, 1994; Máximo-Esteves, 2008) e de investigação sobre a própria prática (Ponte, 2002), dado que foi desenvolvida identificando ou reconhecendo problemas (da prática) e atuando no processo de uma forma ativa de modo a procurar resolvê-los e promover mudanças nas práticas. Atendendo ao contexto formativo em que foi concretizada, a investigação-ação desenvolvida enquadra-se no paradigma interpretativo, também referenciado como qualitativo, enfatizando "a compreensão e interpretação da realidade educativa a partir dos significados das pessoas implicadas" (Pires, 2005, p. 84).

Consequentemente, o estudo exploratório, focado na comunicação escrita em matemática, seguiu uma abordagem qualitativa e interpretativa, envolvendo os onze alunos que constituíam a turma de matemática do 5.º ano de escolaridade. O facto de se assumir uma orientação interpretativa significa que nos centramos "na descrição e na compreensão do que é único e particular para o sujeito em vez da procura de generalizações, analisando a prática educativa a partir da intencionalidade [e] sentido" (Pires, 2005, p. 84), para interpretar o que os participantes fazem no contexto onde se desenrola a ação. Esta opção resulta do problema (emergente da prática) em estudo cujo principal propósito é, então, identificar e analisar a capacidade de comunicação escrita dos alunos, nas dimensões clareza, fundamentação, lógica e profundidade, quando resolvem individualmente tarefas matemáticas.

A recolha de dados foi feita numa aula de matemática de noventa minutos através das respostas escritas que cada aluno deu, individualmente, a um questionário com três tarefas matemáticas para resolver. A escolha destas tarefas teve em conta, por um lado, os tópicos matemáticos (perímetro e área de figuras poligonais) que estavam a ser tratados na turma no desenvolvimento normal do currículo e, por outro, a sua natureza aberta, apelando à mobilização de capacidades comunicativas e permitindo diferentes processos de resolução e possibilidades de justificação.

A análise dos dados recorreu a um instrumento de análise adaptado do instrumento mais global sobre comunicação oral e escrita, construído e usado na prática de ensino supervisionada (Costa, 2015), tendo sido sustentado na literatura revista (Castanheira, 2014) e validado por três especialistas em didática. O instrumento usado nesta investigação (ver caixa) foi orientado apenas para a análise da comunicação escrita em matemática, mantendo as quatro categorias definidas previamente — clareza, fundamentação, lógica, profundidade —, cada uma analisada em função de três níveis de análise — nível baixo (1), nível médio (2) e nível elevado (3). Cada resolução dos alunos apresentada nas respostas escritas às três tarefas matemáticas foi lida, analisada e incluída num dos níveis definidos em cada dimensão. A atribuição de cada um destes níveis atendeu à respetiva caracterização.

Clareza: O aluno expressa, por escrito, as suas ideias, recorrendo a vocabulário correto e a representações adequadas. Considera-se nível baixo (1) quando o aluno apresenta ideias imprecisas, utiliza vocabulário incorreto ou incompreensível e recorre a representações inadequadas. Considera-se nível médio (2) quando o aluno apresenta ideias precisas, mas utiliza vocabulário pouco preciso ou compreensível e recorre a representações pouco adequadas. Considera-se nível elevado (3) quando o aluno apresenta ideias precisas, utiliza vocabulário preciso e correto e recorre a representações adequadas.

Fundamentação: O aluno justifica, de forma escrita, os seus processos ou ideias, apresentando argumentos plausíveis.
Considera-se nível baixo (1) quando o aluno justifica os seus processos ou ideias de forma imprecisa. Considera-se nível médio (2) quando o aluno consegue justificar razoavelmente os seus processos ou ideias. Considera-se nível elevado (3) quando o aluno justifica adequadamente os seus processos ou ideias .

Lógica: O aluno manifesta raciocínio e coerência nos registos escritos, apresentando conexões entre as ideias registadas.

Considera-se nível baixo (1) quando o aluno revela pouco raciocínio e coerência nos registos, não mostrando conexão entre as ideias. Considera-se nível médio (2) quando o aluno revela algum raciocínio e coerência nos registos, a par de alguma conexão entre as ideias. Considera-se nível elevado (3) quando o aluno revela raciocínio e coerência nos registos, manifestando conexão entre as ideias.
Profundidade: O aluno revela o domínio de aspetos importantes e complexos sobre o assunto a trabalhar.
Considera-se nível baixo (1) quando o aluno revela, frequentemente, não dominar aspetos complexos sobre o assunto. Considera-se nível médio (2) quando o aluno revela, algumas vezes, o domínio de aspetos complexos sobre o assunto. Considera-se nível elevado (3) quando o aluno revela, frequentemente, dominar os aspetos mais complexos sobre o assunto.

Aspetos da comunicação escrita em matemática dos alunos

Os resultados do estudo são apresentados tarefa a tarefa, sistematizados em quadros e ilustrados com produções dos alunos. A discussão tem em conta as categorias definidas e os respetivos níveis de análise da comunicação escrita em matemática dos alunos.

Tarefa 1 – A prenda da avó

Na tarefa 1 (ver figura 1) era pedido que os alunos determinassem o perímetro de um retângulo e explicassem o processo seguido. Os resultados globais obtidos pelos alunos na sua resolução estão sistematizados no quadro 1.

Tarefa 1. A prenda da avó

A Patrícia ofereceu à sua avó, no dia de aniversário, um desenho com a forma de um quadrado com 10 cm de comprimento do lado. Colocou-lhe uma moldura formada por 4 retângulos de cartolina, todos geometricamente iguais, como se mostra na Figura 1. No final obteve um quadrado com 20 cm de comprimento do lado.

Figura 1

1. Determina o perímetro de cada um dos retângulos de cartolina que formam a moldura. Explica como chegaste à tua resposta. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos ou cálculos.

Figura 1. Enunciado da tarefa 1.

Quadro 1.
Nível dos alunos nas quatro categorias, tarefa 1

Alunos	Tarefa 1 – A prenda da avó											
	Clareza			Fundamentação			Lógica			Profundidade		
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
Abel		X		X				X		X		
André	X			X			X			X		
Beatriz	X			X			X			X		
Cláudio		X		X				X			X	
Cátia			X	X				X			X	
Dino		X		X				X			X	
Dinarte		X		X			X			X		
Fabiano			X	X			X			X		
Glória		X		X			X				X	
Rui	X			X			X			X		
Telmo	X			X				X		X		
Total	4	5	2	11	0	0	6	5	0	7	4	0

Legenda: (1) nível baixo; (2) nível médio; (3) nível elevado.

Na resolução desta tarefa, cerca de dois terços dos alunos comunicaram com clareza, expondo ideias precisas e recorrendo a representações bastante adequadas. Veja-se a resposta de um aluno (ver figura 2), expressando-se através de registos escritos adequados e de forma compreensível na procura de valores desconhecidos necessários para o cálculo do perímetro.

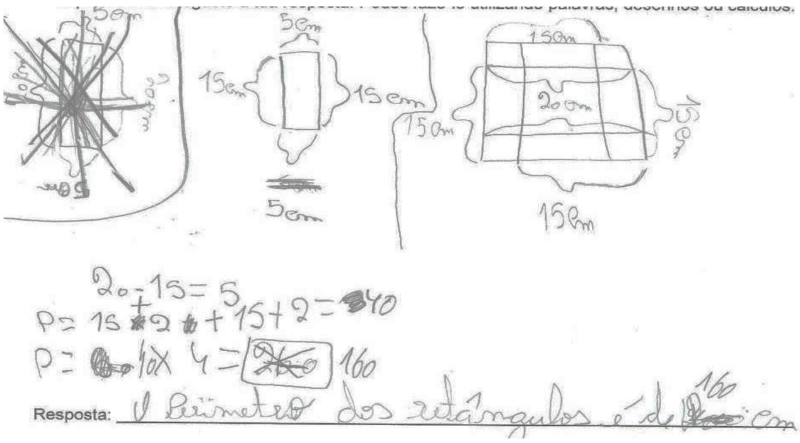


Figura 2. Resposta (tarefa 1) de nível elevado em clareza.

Na fundamentação, categoria com desempenhos mais fracos, os alunos não escreveram qualquer justificação ou argumento plausível nos processos de resolução da tarefa. Alguns deles mostraram raciocínio, conexão e coerência nos registos apresentados, embora outros revelassem lacunas na seleção ou utilização de fórmulas de cálculo e de termos matemáticos. Por isso, quanto à profundidade, apenas um terço dos alunos conseguiu revelar algum domínio mais aprofundado do conceito de perímetro apesar de ser um tópico já trabalhado em anos anteriores. Para ilustrar as diferentes dimensões, atenda-se, na figura 3, à resolução de um aluno com a indicação dos níveis atribuídos nas categorias em análise.

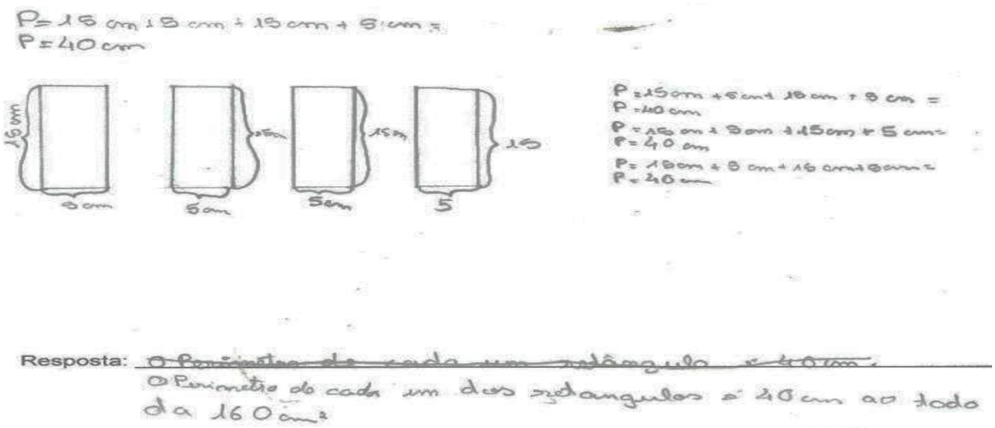


Figura 3. Resposta (tarefa 1) de nível baixo em fundamentação, de nível médio em lógica e profundidade e de nível elevado em clareza.

Tarefa 2 – Quem tem razão?

Esta tarefa (ver figura 4), com duas questões, trabalhava aspetos do conceito de área e solicitava comentários e correções a afirmações produzidas por dois alunos.

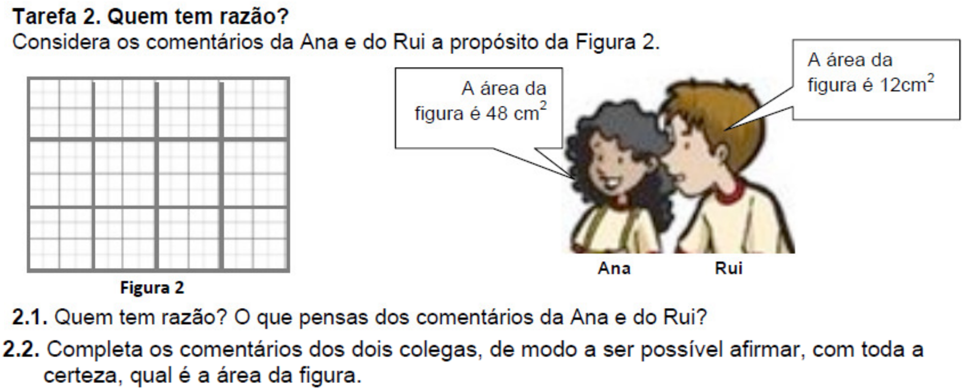


Figura 4. Enunciado da tarefa 2.

Tarefa 2.1. Os níveis globais atribuídos aos alunos na resolução da tarefa 2.1 estão sistematizados no quadro 2.

Quadro 2.
Nível dos alunos nas quatro categorias, tarefa 2.1

	Tarefa 2.1											
	Clareza			Fundamentação			Lógica			Profundidade		
Alunos	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
Abel		X			X		X				X	
André		X			X		X				X	
Beatriz	X			X			X			X		
Cláudio	X			X			X			X		
Cátia			X			X			X		X	
Dino		X			X		X				X	
Dinarte		X			X		X				X	
Fabiano		X			X		X				X	
Glória		X			X		X				X	
Rui		X			X		X				X	
Telmo		X			X		X				X	
Total	2	8	1	2	8	1	10	0	1	2	9	0

Legenda: (1) nível baixo; (2) nível médio; (3) nível elevado.

Na clareza, na fundamentação e na profundidade, os alunos tiveram desempenhos bastante similares, tendo atingido globalmente o nível médio. Nas figuras seguintes, apresentam-se as produções de dois alunos relativas a desempenhos considerados bastante divergentes. O primeiro aluno (ver figura 5), embora reconhecendo que as duas afirmações poderiam estar corretas, não conseguiu apresentar nem justificar as ideias, mostrando dificuldades na apresentação dos seus argumentos. O segundo aluno (ver figura 6), pelo contrário, expôs as suas ideias de forma precisa, com vocabulário correto e recorrendo a representações adequadas, a par de procurar fundamentar as suas ideias e formular adequadamente os seus argumentos.

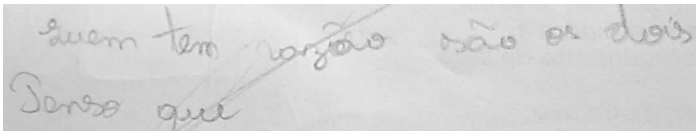


Figura 5. Resposta (tarefa 2.1) de nível baixo em todas as categorias.

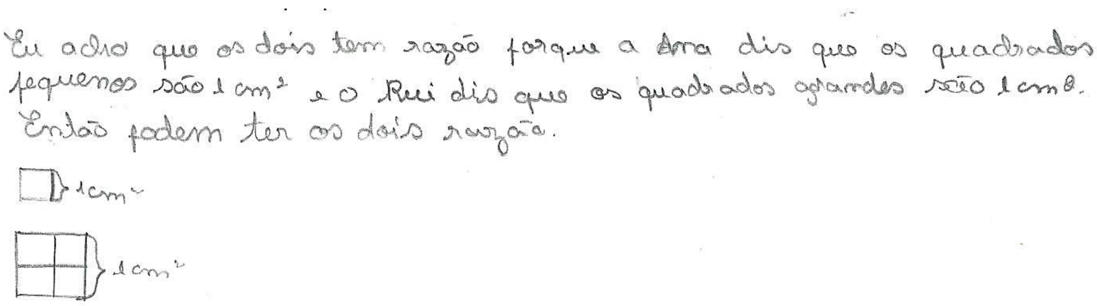


Figura 6. Resposta (tarefa 2.1) de nível médio em profundidade e de nível elevado em clareza, fundamentação e lógica.

A lógica foi a categoria com os desempenhos mais fracos. Excetuando a anterior, as respostas restantes foram associadas ao nível baixo, revelando pouco raciocínio e coerência nos registos e evidenciando pouca conexão entre as ideias. Como exemplo, veja-se a resposta apresentada na figura 7. Embora o aluno remeta para a noção de unidade de medida, não são explicitadas as conexões concetuais que pretende estabelecer.

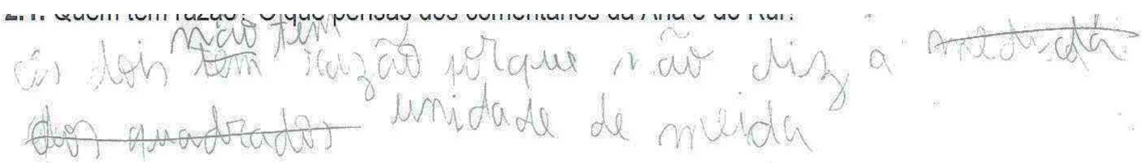


Figura 7. Resposta (tarefa 2.1) de nível baixo em lógica.

Tarefa 2.2. Os resultados globais obtidos pelos alunos na resolução desta tarefa estão sistematizados no quadro 3.

Tal como na tarefa 1, a maioria dos alunos revelou um bom desempenho na categoria “clareza” (ver figura 8), expressando os seus pontos de vista com vocabulário compreensível e com representações ajustadas à situação.

Quadro 3.
Nível dos alunos nas quatro categorias, tarefa 2.2.

Alunos	Tarefa 2.2											
	Clareza			Fundamentação			Lógica			Profundidade		
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
André		X			X			X		X		
Beatriz			X		X			X			X	
Cláudio	X			X				X		X		
Cátia		X			X		X			X		
Dinarte		X			X			X		X		
Fabiano		X			X			X		X		
Glória		X			X		X			X		
Rui	X			X			X			X		
Telmo			X		X			X			X	
Total	2	5	2	2	7	0	3	6	0	7	2	0

Legenda: (1) nível baixo; (2) nível médio; (3) nível elevado.
Nota: Abel e Dino não fizeram qualquer registo escrito.

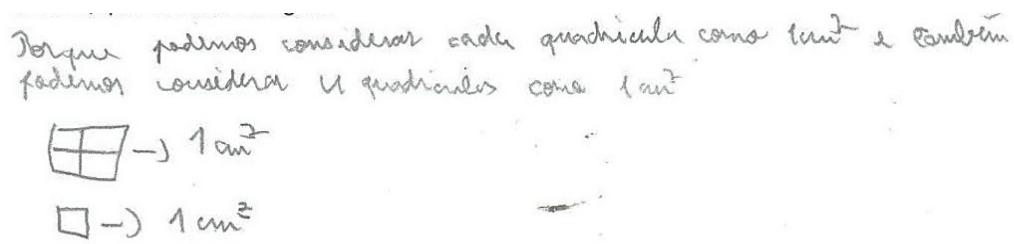


Figura 8. Resposta (tarefa 2.2) de nível médio em clareza.

Nas categorias "fundamentação" e "lógica", muitos alunos apresentaram algumas justificações ou argumentos sobre os processos seguidos. Mas, em geral, desenvolveram raciocínios incompletos ou estabeleceram pouca conexão entre as noções de medida e de unidade de medida, revelando dificuldades no domínio de aspetos mais complexos do conceito de área. Por isso, a profundidade foi a categoria com desempenhos mais fracos e concentrados no nível baixo. Nas figuras 9 e 10, confrontam-se produções de dois alunos que foram situadas em níveis diferentes nas categorias em análise. Na primeira produção, o aluno apenas registou informação do enunciado. O segundo aluno relacionou os conceitos envolvidos e apresentou justificações para os resultados encontrados.

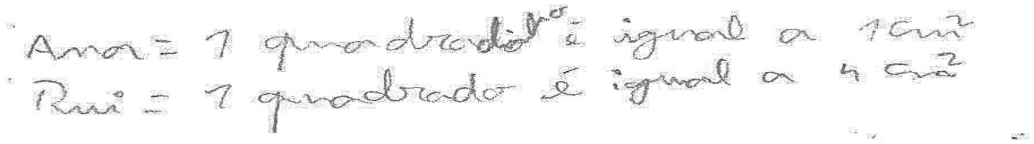


Figura 9. Resposta de nível baixo para todas as categorias.

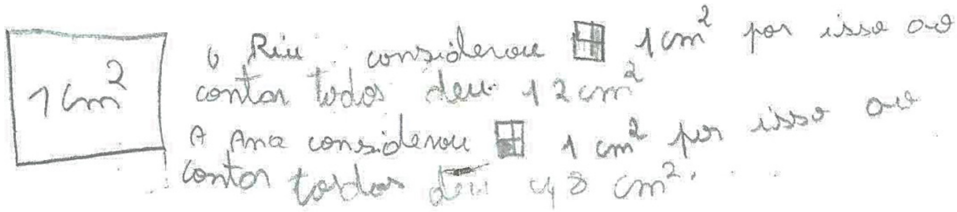


Figura 10. Resposta (tarefa 2.2) de nível médio em fundamentação, lógica e profundidade e de nível elevado em clareza.

Tarefa 3 – Qual a área?

Na tarefa 3 (ver figura 11), era pedido para calcular a área de um triângulo. Os resultados globais obtidos pelos alunos que resolveram a tarefa estão sistematizados no quadro 4. Por se tratar da última tarefa proposta, sete alunos não tiveram tempo para a resolver e não apresentaram qualquer registo escrito.

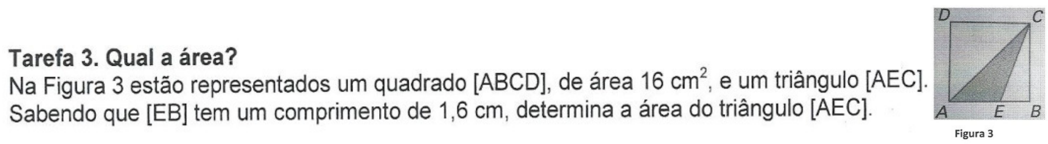

Tarefa 3. Qual a área?
Na Figura 3 estão representados um quadrado [ABCD], de área 16 cm^2, e um triângulo [AEC]. Sabendo que [EB] tem um comprimento de 1,6 cm, determina a área do triângulo [AEC].

Figura 11. Enunciado da tarefa 3.

Quadro 4.
Nível dos alunos nas quatro categorias, tarefa 3

	Tarefa 3											
	Clareza			Fundamentação			Lógica			Profundidade		
Alunos	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
Fabiano	X			X			X			X		
Glória		X		X				X		X		
Rui	X			X			X			X		
Telmo		X			X			X			X	
Total	2	2	0	3	1	0	2	2	0	3	1	0

Legenda: (1) nível baixo; (2) nível médio; (3) nível elevado.
Nota: Abel, André, Beatriz, Cláudio, Cátia, Dino e Dinarte não fizeram qualquer registo escrito.

Apenas um aluno não revelou dificuldades especiais em compreender a situação e a selecionar a informação relevante para calcular a área do triângulo obtusângulo. Nas figuras 12 e 13, apresentam-se duas produções escritas para ilustrar os processos seguidos pelos respondentes. O primeiro aluno registou a fórmula de cálculo da medida da área de um triângulo e algumas tentativas na procura de um resultado, mas sem qualquer coerência ou lógica no processo. Já o outro aluno revelou ideias mais precisas e um bom raciocínio, sequenciando os passos para a obtenção de valores no sentido da aplicação correta da fórmula de cálculo e lidando adequadamente com os conceitos envolvidos.

Figura 12. Resposta (tarefa 3) de nível baixo em todas as categorias.

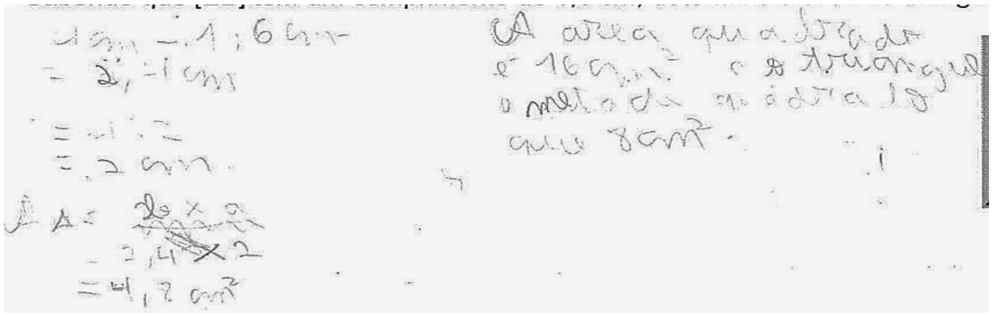


Figura 13. Resposta (tarefa 3) de nível médio em todas as categorias.

Principais conclusões

A análise e a categorização (concretizada na frequência absoluta dos níveis de análise atribuídos) dos registos escritos apresentados na resolução das três tarefas permitem concluir que, em termos gerais, a capacidade de comunicação escrita em matemática dos alunos pode ser enquadrada no nível médio na categoria “clareza”, no nível baixo nas categorias “lógica” e “profundidade” e oscila entre o nível baixo e o nível médio na categoria “fundamentação”. Permite concluir, ainda, que o nível elevado tem alguma expressão na clareza, mas é quase inexistente na fundamentação, na lógica e na profundidade.

Tal como no estudo de Castanheira (2014), os alunos apresentaram registos escritos sem grandes redundâncias, expressando-se com ideias bastante precisas, utilizaram vocabulário geralmente correto e recorreram a representações icónicas e simbólicas adequadas (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008). Mas, apesar de terem respondido ao questionário quase no final da unidade de ensino, muitos alunos revelaram dificuldades na justificação das suas ideias e processos seguidos (Carvalho & Silvestre, 2010; Guerreiro, 2011; Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014; Ponte e Serrazina, 2000), manifestaram pouco raciocínio e coerência nos registos escritos (Fonseca, 2009), não ligando as ideias, e mostraram, com alguma frequência, não dominar aspetos importantes e essenciais dos tópicos matemáticos abordados (perímetro e área de figuras poligonais).

Este estudo reforça a necessidade de proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem estimulantes (NCTM, 2007) no sentido de desenvolver a capacidade de expressar e justificar as suas ideias por escrito, com lógica, profundidade e clareza. Neste sentido, é indispensável trabalhar os diferentes aspetos da comunicação escrita em matemática na sala de aula, solicitando frequentemente aos alunos justificações escritas dos processos seguidos e apelando à abordagem dos temas com profundidade (Castanheira, 2014). É importante valorizar a produção escrita das ideias matemáticas dos alunos, que se deve basear em raciocínios claros, corretos e coerentes (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008; Fonseca, 2009; Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014), de modo a consolidar e a dar mais sentido às aprendizagens que fazem.

Referências bibliográficas

Belo, J. M. (2005). Comunicação didática e competência de comunicação: a necessidade de emergência de novos modelos. *Atas do Congresso da Associação Portuguesa de Ciências da Comunicação, 4.º SOPCOM*, 305-316. http://revistas.ua.pt/index.php/sopcom

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: DGIDC, Ministério da Educação.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Carvalho, R., & Silvestre, A. (2010). Desenvolver a comunicação matemática na sala de aula. In GTI (Org.), *O professor e o programa de matemática do ensino básico* (pp. 147-174). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Castanheira, G. (2014). *Um modelo de ensino para o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática em alunos do 5.º ano do ensino básico*. Dissertação de mestrado, Instituto Politécnico de Viseu, Viseu, Portugal.

Costa, E. (2015). *Prática de ensino supervisionada em ensino do 1.º e do 2.º ciclo do ensino básico*. Relatório final de estágio, Instituto Politécnico de Bragança, Bragança, Portugal.

Fonseca, L. (2009). Comunicação matemática na sala de aula: episódios do 1.º ciclo do ensino básico. *Educação e Matemática, 103*, 2-6.

Guerreiro, A. (2011). *Comunicação no ensino-aprendizagem da matemática: práticas no 1.º ciclo do ensino básico*. (Tese de doutoramento). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Guerreiro, A., & Menezes, L. (2010). Comunicação matemática: na busca de um entendimento comum. In H. Gomes, L. Menezes & I. Cabrita (Eds.), *Atas do XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 137-143). Aveiro: APM.

Máximo-Esteves, L. (2008). *Visão panorâmica da investigação-ação*. Porto: Porto Editora.

Menezes, L. (2000). Matemática, linguagem e comunicação. *Millenium*, *20*.

Menezes, L. (2004). *Investigar para ensinar matemática: contributos de um projeto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores.* (Tese de doutoramento). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Menezes, L. (2010). Conceções sobre a comunicação matemática de uma futura professora. In H. Gomes, L. Menezes & I. Cabrita (Eds.), *Atas do XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 238-252). Aveiro: Associação de Professores de Matemática.

Menezes, L., Ferreira, R. T., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de matemática. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp. 135-161). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de matemática do ensino básico.* Lisboa: DGIDC, Ministério da Educação.

NCTM. (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Pires, M. V. (2005). *Os materiais curriculares na construção do conhecimento profissional do professor de matemática. Três estudos de caso.* (Tese de doutoramento). Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J. M., Veia, L., & Viseu F. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, *20*(2), 39-74.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didática da matemática do 1.º ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Um Estudo Comparativo em Grupos Colaborativos de Professores que ensinam Matemática no Brasil e em Portugal

Zionice Garbelini Martos Rodrigues[1], *Nelson Antonio Pirola*[2], *Joana Leitão Brocardo*[3]
[1]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – Campus Birigui, *zionice@ifsp.edu.br*
[2]Universidade Estadual Paulista – Campus Bauru, npirola@uol.com.br
[3]Universidade de Lisboa, *joana.brocardo@ese.ips.pt*

Resumo. *Estudos atuais mostram a colaboração como estratégia de investigar a prática. Neste projeto tem-se como foco principal investigar como surgem os grupos colaborativos no Brasil e, além disto, apontar um estudo comparativo entre Brasil e Portugal. A partir do uso da metodologia da História Oral, intenciona-se promover entrevistas com os primeiros professores que iniciaram o trabalho sob a perspectiva de colaboração. Este estudo tem como objetivo levantar e registrar quais os fatores que levaram determinados professores/formadores à construção de parcerias e, consequentemente, à constituição de um grupo colaborativo no qual estão integrados professores da educação básica e professores da universidade. As narrativas de vida constituem uma maneira de conhecer a versão não oficial dos acontecimentos sociais e permitem a compreensão dos fatos históricos e sociais filtrados pela ótica dos sujeitos, a partir da elaboração presente dos fatos passados. Acredita-se que os depoimentos coletados dos principais articuladores de grupos colaborativos podem oferecer registros que permitam reflexões para futuros professores de Matemática.*

Palavras-chave: *grupo em contexto colaborativo; desenvolvimento profissional; formação de professores; aprendizagem do professor*

Abstract. *Current studies show the collaboration as a strategy to investigate the practice. This project has focused primarily on investigating how the collaborative groups emerge in Brazil and, moreover, point out a comparative study between Brazil and Portugal. From the use of the methodology of Oral History, it intends-promoting interviews with the first teachers who began work in collaboration perspective. This study aims to collect and record what factors have led some teachers / trainers to build partnerships and, consequently, the formation of a collaborative group are integrated into basic education teachers and university professors. The life stories are a way to meet the unofficial version of social events and allow the understanding of historical and social facts filtered through the eyes of subjects, from the elaboration of this past facts. It is believed that the testimonies collected from the main promoters of collaborative groups can provide records that allow reflections for future teachers of mathematics.*

Keywords: *collaborative group; professional development; teacher education; teacher learning.*

Introdução

Em toda a trajetória profissional como pesquisadora foi possível perceber a problemática da formação de professores, tanto no âmbito da formação acadêmica, que engloba tanto as disciplinas específicas da área de atuação quanto nas disciplinas pedagógicas. Além disso, a participação atuante no PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação a Docência) proporcionou voltar o olhar para a Educação Básica. Embora tenha ministrado curso de formação continuada, na época denominado "Teia do Saber" A prática docente e o aprendizado do professor de Matemática, enquanto formadora de futuros professores mostra, de forma evidente, a realidade da sala de aula, o que desencadeia certa inquietação.

Objetivos da investigação

Esta pesquisa tem como objetivo secundário: mapear os grupos colaborativos existentes e em atuação e investigar os porquês/motivos do surgimento destes grupos. Busca-se com este estudo verificar a seguinte hipótese: De forma e qual motivos têm levado a criação de Grupos em contexto colaborativo. Algumas hipóteses são levantadas: Pode se afirmar que existe insatisfação com as políticas de formação continuada das secretarias estaduais no sentido de continuidade das formações? Ou ainda se o surgimento de tais grupos inicia-se a partir dos cursos de pós-graduação em Educação Matemática?

Questão de pesquisa

Igualmente, este estudo busca respostas para a pergunta diretriz: Quais fatores levaram e ainda levam à formação/criação de grupos em contexto colaborativo?

Na busca na literatura por trabalhos desenvolvidos com base nessas problemáticas percebe-se uma forte influência do GDS (Grupo de Sábado), desenvolvido na Faculdade de Educação da UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas). E do Grupo de Estudos Outros Olhares para a Matemática, que tem como foco a aprendizagem do professor que ensina Matemática nas séries inicias do Ensino Fundamental, assim como do Grupo Colaborativo de Matemática (GRUCOMAT).

Sabe-se que em Portugal há existência de grupo de pesquisa os quais se investigam as relações entre professores e pesquisadores (investigadores). Assim, sendo intenciona a realização de parte da pesquisa na Universidade de Lisboa, no Instituto de Educação.

Metodologia de Investigação

Pretende-se investigar no Brasil, os grupos em contexto colaborativo, ora denominados GDS (Grupo de Sábado); GEOOM (Grupo de Estudos Outros Olhares para a Matemática) e Grucomat (Grupo Colaborativo em Matemática). E em Portugal, investigar-se-á quais grupos ali se constituíram e quais suas denominações.

Como mencionado anteriormente serão realizados questionários e entrevistas com pesquisadores brasileiros e portugueses envolvidos na temática e com os dados das entrevistas objetiva-se levantar e registrar quais os fatores que levaram determinados professores/formadores à construção de parcerias e, consequentemente, à constituição de um grupo colaborativo integrado por professores da Educação Básica e professores do Ensino Superior.

Serão elaborados instrumentos de pesquisa tais como questionários e entrevistas para os professores da Educação Básica que participam de grupos em contexto colaborativo.

Além disso, conforme Alves-Mazzotti (1998, p. 169) "considera-se documento qualquer registro escrito que possa ser usado como fonte de informação. Além dos dados a serem coletados pela metodologia da História Oral, se o acesso a for permitido pelos líderes ou coordenadores dos grupos investigados, pretendemos fazer também o uso de atas de reuniões e relatórios.

A revisão da literatura tem foco principal na História Oral (HO), pela possibilidade que esta oferece de ligar, neste estudo, o campo do saber da Educação Matemática à construção da pesquisa.

A HO, segundo Camargo (1994, p. 11) permite:

> A conversão de indagações mais amplas e abstratas, em questões concretas, a serem submetidas no decorrer de uma entrevista, ou seja, perguntas referentes à história de vida, às atividades profissionais, entre outras, adquirem o tom informal e espontâneo que permite o diálogo, a comunicação e o entendimento entre o pesquisador e o entrevistado, garantindo, assim, o sucesso da entrevista.

A opção pela metodologia da História Oral para as entrevistas foi baseada nos estudos de Garnica (2004, p. 154) que escreve:

> Pensar a História Oral como metodologia, entretanto, nos trabalhos que temos desenvolvido, não significa reduzi-la a uma prática de coleta e arquivamento de informações. Significa, sim, pensar em regras de ação — associadas, como pretendia também Descartes, a uma ideia de eficácia — e

> fundamentá-las teórico-filosoficamente, analisando situações, propondo táticas e estratégias (no sentido que lhes dá Certeau), testando seus limites, esclarecendo tanto quanto possível o campo epistemológico e axiológico no qual estão assentadas.

Na revisão de literatura sobre grupos colaborativos inclui se o I E-book de Gonçalves Jr. et al. (2014), intitulado "Grupos Colaborativos e de Aprendizagem do Professor que Ensina Matemática: repensar a formação de professores é preciso!", como um dos principais textos a ser pesquisado.

Para Magalhães (2007, p. 28):

> As narrativas de vida constituem uma maneira de conhecer a versão não oficial dos acontecimentos sociais e permitem a compreensão dos fatos históricos e sociais filtrados pela ótica dos sujeitos, a partir da elaboração presente dos fatos passados.

Acredita-se que os depoimentos elaborados dos principais articuladores de grupos colaborativos poderão trazer registros que permitam reflexões para futuros professores de Matemática.

Fundamentação teórica

Entendemos, entretanto, que as lembranças individuais de cada pessoa estão entrelaçadas com as memórias de seu grupo afetivo, social e cultural. Ao rememorar, à medida que cada pessoa

> conta a sua história, esta se mostra envolta em um contexto sócio-histórico que deve ser considerado. Portanto, apesar de a escolha do método se justificar pelo enfoque no sujeito, a análise dos relatos leva em consideração [...] as questões sociais neles presentes (Oliveira, 2005, p. 94).

Neste estudo pretende-se investigar como tem sido realizadas as estratégias de formação continuada de professores que ensinam matemática e as principias contribuições que os grupos em contexto colaborativo tem proporcionado aos seus participantes.

A presença de outros na constituição das memórias individuais é, para Galzerani (1994), um aspecto importante na constituição das singularidades.

> A memória surge aqui tecida por uma pessoa mais inteira, que se percebe portadora de sensibilidades, de incompletudes, de esquecimentos, de atos voluntários e inconscientes. Apresenta-se, ao mesmo tempo, como afirmação de sua própria singularidade, sabendo-a constituída na relação, muitas vezes conflituosa, com "outras" pessoas. Ou, ainda permite o reconhecimento de que a (re) constituição temporal de sua vida só adquire sentido na articulação com uma memória coletiva (p. 198).

Em outro texto, Galzerani (1999), observa que Benjamim “constrói uma tríplice interlocução sobre os sentidos da memória”. Para ele, estes sentidos são representados pelo “diálogo com Bérgson”, pela interação da “filosofia e psicologia” psicanalítica de “Freud a Jung”, pela literatura e poética que sobressaem em Baudelaire, Alan Poe e Proust”.

> Para o filósofo frankfurtiano, a memória constitui uma viagem no tempo até as ‘impressões matinais’ da pessoa humana, com direito à ida e à volta. Apoiando-se em Aristóteles, reconhece que o registro mnemônico por si só não tem valor (...) o desafio para o animal histórico está na ‘rememoração’ (anaminesis) sempre a partir da dimensão presente. Rememoração esta que passa pelo filtro do juízo crítico do intelectual, o qual, por sua vez, passa também pelo crivo da maneira poética de ver da criança (p.102).

A rememoração para Benjamin (1986) sugere um “lembrar-se para dentro” que revela intensamente e de forma mais íntima o vigor que permeia a lembrança, a memória, a recordação e isto possibilita um tipo de “contra memória” que permite conceber o passado como algo inacabado e aberto a novas possibilidades.

Aqui memória e história dialogam. Segundo Lopes (2002, p. 69), ambas trazem a tona “a rememoração, que é o alimento da história” e esta, ao oficializá-la aquela, mantém vivo um vínculo com o passado. Tanto a memória quanto a história “são instrumentalizadas” para atender aos objetivos a serem atingidos no presente.

Estudos atuais mostram a colaboração como estratégia de investigar a prática (Boavida & Ponte, 2012). Neste projeto tem-se como foco principal investigar como surgem os grupos colaborativos no Brasil e, além disto, apontar um estudo comparativo com Portugal.

Em Ponte (2001, p. 10) encontramos que a realização de projetos colaborativos envolvendo professores e investigadores em um trabalho comum, teem sido uma prática adotada pelo Grupo DIF.

Os autores Cochran-Smith e Lytle (2002) e Fiorentini e Crecci (2013) apresentam uma vasta literatura sobre o tema e, por essa razão, acredita-se que este trabalho de pesquisa poderá trazer avanços significativos para estudos posteriores sobre grupos colaborativos e suas contribuições para a sociedade. Além disto, experiências e histórias relatadas podem contribuir para repensar as políticas públicas educacionais brasileiras, sobretudo, àquelas voltadas à formação continuada do professor, no sentido de fortalecer as vozes dos grupos colaborativos e o papel do próprio simpósio que reivindica a necessidade do reconhecimento dos grupos colaborativos enquanto espaço de formação continuada de professores pelas políticas públicas.

Fullan e Hargreaves (2000, p. 71), ao estudarem as características que as culturas de trabalho conjunto podem adquirir nas escolas, apontam que "a simples existência de colaboração não dever ser confundida com a consumação de uma cultura de colaboração". Eles descrevem formas alternativas de colaboração que, apesar de envolverem trabalho conjunto, não constituem culturas colaborativas por apresentarem subgrupos em disputa, ações conjuntas apenas ocasionais ou ações reguladas de maneira diretiva pela direção das instituições.

Torres, Alcântara e Irala (2004) salientam que, apesar de suas diferenças teóricas e práticas, ambos os termos (cooperação e colaboração) derivam de dois postulados principais: rejeição ao autoritarismo e promoção da socialização, não só pela aprendizagem, mas, principalmente, na aprendizagem. Eles argumentam que a colaboração pode ser entendida como uma filosofia de vida, enquanto que a cooperação pode ser vista como uma interação projetada para facilitar a realização de um objetivo ou produto final.

A seguir, relataremos como se deu o processo de como se deu a formação dos Simpósios de Grupos Colaborativos. Estes simposiso foram resultantes de acões de grupos em contextos colaborativos que se organizaram para troca de informações seja com são desenvolvidos sua dinâmica de ação, seja como se dá o modo de produção. A partir de agora, neste texto, intenta-se-a historicizar desde o I Simpósio até o IV simposio de grupos colaborativos realizados no Brasil.

No Brasil, em uma reunião do Grupo de Sábado (GDS), em 2012, surgiu a ideia de fazer no IV Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática (SHIAM), um simpósio de grupos chamados de "colaborativos e de aprendizagem". Nas versões anteriores do Seminário, o espaço de uma mesa redonda se havia mostrado exíguo; avaliou-se que nem duas seriam suficientes para discutir as questões que os grupos têm suscitado.

Perante estas reflexões, a Faculdade de Educação da Unicamp realizou o I Simpósio de Grupos Colaborativos e de Aprendizagem do Professor que Ensina Matemática. O evento foi realizado em um dia inteiro do IV Shiam.

Hoje é possível perceber que essa decisão não surgiu espontaneamente. Ela foi sendo gestada ao longo da história de grupos colaborativos que, com o passar dos anos teve a oportunidade de conhecer-se melhor em diversas mesas redondas. Por isso, vale fundamentar a compreensão da necessidade de realizar o Simpósio e nesse formato que teve.

Um dos produtos desse primeiro simpósio foi o E-book intitulado “Grupos Colaborativos e de Aprendizagem do Professor que Ensina Matemática – Repensar a formação de professores é preciso!”. Esse E-book foi lançado durante o II Simpósio de Grupos Colaborativos e de Aprendizagem do Professor que Ensina Matemática que aconteceu em 14 de agosto de 2014, antecedendo o III Seminário de Leituras e Escritas em Educação Matemática – SELEM, que aconteceu em 15 e 16 de agosto de 2014, ambos na Universidade Federal de Lavras – UFLA.

Por isso, vale fundamentar a compreensão da necessidade de realizar o Simpósio e nesse formato que teve.

Neste primeiro Simpósio apresentaram-se 13 grupos, compostos principalmente por professores que ensinam Matemática em variadas etapas da Educação Básica, evento ocorrido em 12 de julho de 2013, realizado juntamente com o IV SHIAM, na Universidade Estadual de Campinas.

No III Simpósio de Grupos Colaborativos (GC), realizado em São Paulo nos dias 22 e 23 de maio de 2015, aconteceram as seguintes salas de discussões, listadas com a sigla SD.

- SD1: A aprendizagem da docência nos grupos de trabalhos do PNAIC: do caderno ao aluno.
- SD2: Ações e reações: buscando respostas e criando uma rede.
- SD3: As contribuições das produções em grupos para a prática pedagógica de professores e futuros professores.
- SD4: O OBEDUC (Programa Observatório da Educação) enquanto espaço cultivador de Comunidades de Práticas e Grupos Colaborativos.

Perspectiva dos Resultados esperados.

Conforme os objetivos elencados no início deste trabalho, acredita-se que o relatório final desta pesquisa de pós-doutoramento possa trazer ou apontar alguns "caminhos" para a constituição de outros grupos em contexto colaborativo, bem como indicar possibilidades de um repensar sobre os cursos de formação de professores para a Educação Básica.

De que forma estas discussões podem trazer contribuições para efetivas medidas pela Secretaria da Educação nas condições de trabalho do professor que ensina Matemática? Esta é também outra inquietação.

A intenção de pesquisa é entrevistar os primeiros professores que iniciaram o trabalho sob a perspectiva de colaboração que são:

No Brasil:

- Dario Fiorentini – Universidade Estadual de Campinas/SP – UNICAMP.
- Adair Nacarato – Universidade São Francisco – USF.
- Eliane Matesco Cristovão – Universidade Federal de Itajubá/MG – UNIFEI.
- Juliana Facanali – Professora Educação Básica II.
- Priscila Domingues Azevedo – Professora Educação Básica

Em Portugal, em específico na cidade de Lisboa:

- Ana Boavida – Universidade de Lisboa – ULISBOA.
- Joao Pedro da Ponte – Universidade de Lisboa – ULISBOA.

Vale ressaltar que embora existam outros pesquisadores optou se por reduzir a amostra nestes acadêmicos supramencionados.

Entendemos que a investigação que tem sido desenvolvida pelo Grupo DIF (Didática e Formação) na Universidade de Lisboa, poderá trazer elementos muitos apropriados para a constituição deste trabalho de pesquisa.

Meinerz (2008, p.42), justifica que uma das principais "consequências do rompimento do intercâmbio de experiências é a supressão da memória do indivíduo e a perda do sentido da história.

Pode-se contribuir para que os futuros professores de Matemática possam observar os movimentos desenvolvidos no decorrer da História da Educação Matemática no que se refere a "Formação continuada do professor de Matemática" e refletir sobre possíveis limitações de reformas, o modo como elas se manifestaram e extrair conclusões a partir dessas narrativas vivenciadas pelos professores/educadores da época estudada.

Ibiapina (2008, p. 51) defende que a pesquisa colaborativa transforma a academia e a escola, acreditamos que existe uma consonância com os estudos de outros autores, os quais e também concordam que o processo de investigação se dá nos modos da e na ação docente embasada nos estudos de Cochran-Smith e Lytle (2002).

Esperamos que esta pesquisa possa registrar os mecanismos para o rompimento da racionalidade técnica, no qual o professor apenas é um simples e mero reprodutor dos conhecimentos técnicos ou pedagógicos adquiridos ao longo da humanidade.

E por fim, não há como se negar as potencialidades de narrativas orais e escritas no desenvolvimento profissional dos professores que ensinam Matemática. Recurso este evidenciado pelos integrantes de grupos em contexto de colaborativos, seja no Brasil, ou em Portugal.

Cronograma de execução do projeto.

Primeira fase: Elaborar questionários para efetivar posteriores entrevistas com os principais articuladores/pesquisadores brasileiros que trabalham com grupos colaborativos, a saber: 1) Dario Fiorentini; 2) Adair Nacarato; 3) Eliane Matesco Cristovão; 4) Juliana Facanali.

Segunda fase: Elaborar questionários para efetivar posteriores entrevistas com os principais articuladores/pesquisadores portugueses que trabalham com grupos colaborativos, a saber: 1) João Pedro da Ponte e 2) Ana Boavida.

A partir da devolutiva dos questionários pretende-se agendar entrevistas com os pesquisadores e utilizando dos recursos da metodologia da História Oral registrar as principais ações destes grupos.

Para Camargo (1994, pp. 2-3), a originalidade da HO reside no fato de que esta “por sua maior amplitude, busca responder as indagações mais amplas do conjunto de pesquisadores e da comunidade em geral”. Segundo a autora, há uma mudança qualitativa, pois se rompe o antigo individualismo, e a informação é socializada.

A HO registra novas informações que ainda não foram registradas e consegue estabelecer novos parâmetros acerca de um assunto. Os depoimentos colhidos compõem um acervo documental original.

Cronograma na forma de tabela para o período correspondente/ Cronograma de execução do projeto.

1 – Etapas da Pesquisa

JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ	JAN/16	FEV16	MAR 16	ABRI	Mai/16	JUN/16
1	**X**	**X**	**x**									
2	**X**	**X**	**x**									
3		**X**	**x**									
4				**X**	**X**	**x**						
5							**X**	**X**				
6							**X**	**X**	**X**			
7										**x**	**x**	

2 – Descrição das atividades das Etapas da Pesquisa:

Atividade	Descrição
1	Busca e leitura de artigos da área. Levantamento do estado da arte do tema.
2	Elaboração de questionários e posterior entrevista semiestruturada
3	Realização de entrevistas com os depoentes.
4	Realização de entrevistas com os depoentes.
5	Análise da produção portuguesa.
6	Entrevistas com professores portugueses.
7	Entrega de relatório final.

Disseminação e avaliação.

Este estudo ainda intenciona:

- A Produção de artigos individuais e/ou coletivos com publicações em revistas tanto nacionais quanto internacionais - Qualis A, B, C, entre outros.

  - A Organização/produção conjunta de outro tipo de material como livros, números temáticos em revistas, entre outros.

- A Participação em reuniões de grupos de estudo e de pesquisa, eventos, vinculados a temáticas de interesse tanto no Brasil quanto em Portugal.

- A Produção e elaboração de materiais de estudo, visitas acadêmicas, palestras, entre outros.

- Apresentação da comunicação científica no IV Simpósio Nacional de Grupos Colaborativos de Professores que ensinam Matemática em Vitoria da Conquista na Bahia;

Atualmente com a atuação desta pesquisadora no Grupo de pesquisa-Grupo Colaborativo em Educação Matemática e Científica (GCEMC), se tem percebido o quanto se faz necessário o registro de ações de formação de professores da Educação Básica em conjunto com os professores formadores nas instituições de ensino superior.

Algumas reflexões a partir das entrevistas já realizadas

Indício α: A partir da realização de três entrevistas – Juliana Facanali; Priscila Azevedo e Adair Nacarato – que já foram coletadas por pelo menos um dos representantes do GDS (Grupo de Sábado), GEOOM (Grupo de estudos outros olhares para a Matemática) e o Grucomat (Grupo Colaborativo em Matemática) pode se inferir que conforme Ibiapina (2008, p. 14):

> [...] Dessa forma, criticar as situações ideológicas de opressão é apenas uma das tarefas dos pesquisadores já que suas ações vão além dessa crítica, oferecendo condições para a transformação de tal situação.

E, a partir da entrevista de Nacarato (2015):

> Porque esse grupo é que me alimenta, me traz novas ideias, me ouve, me valoriza...Faz refletir, para eu voltar e dar conta do que está tão pesado hoje na escola pública. [narrando a fala de uma participante do grupo] (Depoimento oral).

Percebe se aqui que existe uma aproximação do que a Profa. Juliana Facanali, entrevistada pela autora desta pesquisa, aqui apresentada, ao afirmar que a partir de um grupo em contexto colaborativo existe a criação de um ambiente acolhedor e que "enxerga" (grifo nosso) o professor como aquele que produz conhecimento. Essa afirmação vem ao encontro do que já afirmaram como sendo uma das concepções sobre aprendizado dos professores, ou seja:

> Que o conhecimento que os professores precisam para ensinar bem é gerado quando eles consideram suas próprias salas de aula locais para uma investigação intencional, ao mesmo tempo em que consideram o conhecimento e teoria produzidos por outros, material gerador para questionamento e interpretação" denominado por conhecimento-da-prática. (Cochran-Smith & Lytle, 1999, p. 249).

Além disso, há concordância com a situação em que se encontra a profissão docente. Como bem apontam Cristovão e Castro (2013, p. 2):

> A baixa atratividade da carreira docente se evidencia no momento em que discutimos a incompatibilidade dos baixos salários com a complexidade, responsabilidade e relevância do trabalho que os professores realizam.

Este trabalho se encontra em fase de desenvolvimento e nos próximos meses serão realizadas entrevistas com participantes da educação portuguesa no que diz respeito à constituição e manutenção de grupos em contexto colaborativos.

Este trabalho se encontra em fase de desenvolvimento e nos próximos meses serão realizadas entrevistas com participantes da educação portuguesa no que diz respeito à constituição e manutenção de grupos em contexto colaborativos.

Como resultado espera-se reafirmar que o aprendizado do professor em cursos de formação continuada via grupo colaborativos tem sido um dos modos mais "eficazes" de dar oportunidade ao professor formador (investigador) trocar o conhecimento apropriado pelas teorias para o conhecimento na prática do professor colaborador.

A seguir indicamos um roteiro com as supostas questões aos sujeitos a serem pesquisados em nosso trabalho.

unesp | U LISBOA UNIVERSIDADE DE LISBOA | ie Instituto de Educação

Descrição sucinta do Projeto

Nome: Zionice Garbelini Martos Rodrigues

Supervisores: Prof. Dr.Nelson Antonio Pirola e Profa Dra Joana Brocardo

Esta pesquisa tem como objetivo registrar via História Oral, o processo de constituição de grupos colaborativos, bem como, as motivações para sua constituição. Para tanto, intenciona-se entrevistar profissionais da educação de diferentes grupos e com atuações distintas na docência, objetivando capturar não só a diversidade dos grupos, mas, também, a diversidade de contribuições dos variados grupos.

Entrevista à Profa Dra Zionice Garbelini Martos Rodrigues

Data: ____________

Local:________________

Nome: _________________________________

Constituição do Perfil do Entrevistado

a) Há quanto tempo está na carreira docente?

b) Há quanto tempo está na instituição atual?

c) Há quanto tempo faz parte do grupo colaborativo a que pertence?

1) Qual é a sua compreensão sobre o processo de constituição de um grupo colaborativo de Professor que Ensina Matemática (PEM)? Objetivo: identificar como se deu a criação de um grupo colaborativo PEM.

2) Quais fatores/motivações podem ser atribuídos à criação de um grupo colaborativo de PEM?

Objetivo: compreender quais motivos levaram à criação de grupos colaborativos ou o equivale como é chamado em Portugal.

3) Existe, por parte do grupo colaborativo, alguma forte ligação com as universidades? O fato dos grupos se localizarem na mesma cidade em que está: a Universidade de Lisboa, interfere de alguma maneira?

Objetivo: Identificar se a existência de um órgão formador interfere na constituição de um grupo colaborativo.

4) Atualmente, se tem conhecimento da produção de uma produção considerável sobre o tema. Além destas produções existem outros documentos como atas, fichas de registro de reuniões, documentos institucionais, projetos de pesquisa, memórias ou outros? E ainda, como se pode ter acesso a essa documentação?

Desde já agradeço sua atenção e me coloco à disposição:

No email: zionice@gmail.com

No WhatsApp (18) 996655777

Referências bibliográficas

Alves-Mazzotti, A. J., & Gewandsznajder, F. (1998) *O método nas ciências naturais e sociais*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning.

Associação Brasileira de História Oral (1994). *Estatuto Social*. Rio de Janeiro, 24 abr.

Antunes, C. (2007). *Professores e Professauros*. Petrópolis, RJ: Vozes.

Bicudo, M. A. V. (org.). (1999). *Pesquisa em Educação Matemática:* Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP.

Boavida, A M., & Ponte, J. P. (2012). *Investigação colaborativa:* Potencialidades e problemas. In. GTI (Org). Reflectir e investigar sobre a prática profissional pp. 43-55. Lisboa: APM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). Características da investigação qualitativa. In: *Investigação qualitativa em educação:* uma introdução à teoria e aos métodos. Porto, Porto Editora.

Brasil. (1997). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (2002). Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio* – PCNEM. Brasília: MEC/SEB.

Camargo, A. A. (1994). História Oral e Política.. In: Moraes, M. de. *História Oral.* Rio de Janeiro: Diadorim, FINEP.

Cochran-Smith, M., & Lytle, S. L. (1999). *Relationships of Knowledge and Practice: teacher learning in communities. In Review of Research in Education.* USA, 24, p. 249-305. Tradução: GEPFPM (Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Formação de Professores de Matemática (FE/Unicamp).

Cochran-Smith, M., & Lytle, S. L. (2002). *Dentro e Fuera – enseñantes que investigan.* Madrid: Ediciones Akal.

Cristovão, E. M**.** (2007). *Investigações Matemáticas na Recuperação de Ciclo II e o Desafio da Inclusão Escolar.* 158 p. Dissertação de Mestrado em Educação: Educação Matemática. Campinas, SP: FE-UNICAMP.

Cristovão, E. M., & Castro, J. F. (2013). Possibilidades e limites da postura colaborativa e investigativa do professor como tática de enfrentamento da complexidade da docência. *Revista Espaço Pedagógico*, *20*(1), 158-174.

Debert, G. G. (1986). Problemas relativos à utilização da História de Vida e História Oral. In. Cardoso, Ruth. (org) *Aventura Antropológica***.** Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Delgado, C., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2014). Investigar as práticas do professor num contexto de trabalho colaborativo: Potencialidades e desafios. *Medi@ções 2*(3), 85-110.

Ferreira, M. De M., & Amado, J. (org). (1996). *História Oral:* usos & abusos. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas.

Fiorentini, D. (1995). Alguns Modos e ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. In: *Revista Zetetiké*, *3*(4), 1-37.

Fiorentini, D. (2008). A Pesquisa e as Práticas de Formação de Professores de Matemática em face das Políticas Públicas no Brasil. *BOLEMA, 21*(29), 43-70.

Fiorentini, D. (2009). Quando acadêmicos da universidade e professores da escola básica constituem uma comunidade de prática reflexiva e investigativa. In: *Práticas de formação e pesquisa de professores que ensinam Matemática.* Campinas: Mercado das Letras.

Fiorentini, D. et al. (2011). *International Approaches to Professional Development for Mathematics Teachers.* Disponível em: http://www.press.uottawa.ca. [texto online].

Fiorentini, D., & Crecci, V. M. (2013). Desenvolvimento Profissional docente: Um Termo Guarda-Chuva ou um novo sentido à formação? *Revista Brasileira de Pesquisa sobre Formação Docente, 5*(1), 11-23.

Fullan, M., & Hargreaves, A. (2000). *A escola como organização aprendente:* buscando uma educação de qualidade. 2ª ed. Porto Alegre, Artmed.

Gama, R. P. (2007). *Desenvolvimento profissional com o apoio de grupos colaborativos:* o caso de professores de Matemática em início de carreira. Tese de Doutorado em Educação Matemática. Campinas: FE-UNICAMP.

Garnica, A. V. M. (2002). História Oral e Educação Matemática: do inventário à regulação. *Revista Zetetiké*, *11*(19), 9-56.

Garnica, A. V. M. (2004). (Re) traçando trajetórias, (Re) coletando Influências e perspectivas: Uma proposta em História Oral e Educação Matemática. In: Bicudo, M A V. (org) *Educação Matemática:* pesquisa em movimento (pp.151-163). São Paulo: Cortez.

Garnica, A. V. M. (2009). Notas sobre narrativa e Educação matemática. In: C. E. Lopes & A. M. Nacarato (Org.) *Educação Matemática, leitura e escrita: armadilhas, utopias e realidades* (pp.79-99.). Campinas, SP: Mercado de Letras. (Série Educação Matemática).

Galzerani, M. C. B. (1999). Memória, História e (Re) Invenção Educacional: Uma Tessitura Coletiva na Escola Pública. In: M. C. Menezes (org.) *Educação, Memória, História: Possibilidades, Leitura*s. Campinas: Mercado de Letras, 2004.

Gonçalves J., M. A. et al. (Org.) (2014) G*rupos Colaborativos e de Aprendizagem do Professor que Ensina Matemática:* Repensar a formação de professores é preciso! Campinas, SP : FE/UNICAMP.

Ibiapina, I. M. L. M. (2008). *Pesquisa colaborativa:* investigação, formação e produção de conhecimentos. Brasília: Liber Livro.

Machado, S. A. (2008). *Educação Matemática:* Uma introdução. 3ª edição. São Paulo: EDUC.

Magalhães, V. B. (2007). Imigração: Subjetividade e Memória Coletiva. Oralidades: *Revista de História Oral*, *1*, 23-32.

Martos, Z. G. (2005). A História OraI: buscando reconstituir parte da educação matemática na região de Ribeirão Preto ao investigar o Centro Regional de Aperfeiçoamento e Ensino de Matemática (CRAEM). Cadernos de Resumos. *VI Congresso Luso Brasileiro de História da Educação.* Uberlândia: FACED.

Martos, Z. G. (2010). *O movimento da matemática moderna na região de Ribeirão Preto*: Uma paisagem (tese de doutoramento) UNICAMP.

Meihi, J. S. B. (2002). *Manual de História Oral.* São Paulo: Loyola.

Meinerz, A. (2008) *Concepção de Experiência em Walter Benjamim*. Dissertação (Mestrado) Filosofia. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre: UFRGS.

Nacarato, A. (2015). Entrevista concedida a Zionice Garbelini Martos Rodrigues no ano de 2015.

Nacarato, A. et al. (2003). Um Estudo Sobre Pesquisas de grupos colaborativos na Formação de Professores de Matemática In: *Anais do Seminário Internacional Pesquisas em Educação Matemática*, Santos-SP.

Nacarato, A., & Granado, R.C. (2006). Professores e futuros professores compartilhando aprendizagens: dimensões colaborativas em processos de formação. In: *A formação do professor que ensina Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., Brocado, J., & Oliveira, H. (2005). *Investigações Matemáticas em sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., Brocado, J., & Oliveira, H. (2005a). *A formação do professor de Matemática***:** passado, presente e futuro. Lisboa: Actas do Encontro Nacional em homenagem a Paulo Abrantes, 2005.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2002). Investigar a nossa própria prática. In: *Refletir e investigar sobre a prática profissional.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2001) A investigação sobre o professor de Matemática: Problemas e perspectivas do professor. *Educação Matemática em Revista, 11*(8).

Torres, P. L., Alcântara, P. R., & Irala, E. A. F. (2004). Grupos de Consenso: uma proposta de aprendizagem colaborativa para o processo de ensino-aprendizagem. *Revista Diálogo Educacional*, *4*(13), 129-145.

Von Simson, O. R. de M. (org.). (1997). *Os desafios contemporâneos da História Oral.* Campinas: Centro de Memória – UNICAMP.

Conhecimento e práticas do professor

Ações do professor e atividade dos alunos: Trabalhando com representações

Isabel Velez[1], *João Pedro da Ponte*[2], *Lurdes Serrazina*[3]
[1]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, *velez@campus.ul.pt*
[2]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, *jpponte@ie.ulisboa.pt*
[3]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, *lurdess@eselx.ipl.pt*

Resumo. *Analisamos as ações de uma professora do 3.º ano, Sara, com o objetivo de compreender de que forma explora uma tarefa com os alunos, em especial, como promove a compreensão das representações matemáticas por parte deles. Os dados foram recolhidos através da gravação vídeo da aula e das produções escritas dos alunos, sendo segmentados em três momentos da aula (introdução da tarefa, trabalho autónomo dos alunos e discussão coletiva) e analisados através de análise de conteúdo. A forma como Sara organiza os diferentes momentos da aula e o modo como atua parecem promover a escolha livre e o uso de diferentes tipos de representações matemáticas por parte dos alunos. Durante a discussão coletiva, ao questionar os alunos relativamente às representações que usaram, promove a compreensão das representações que surgem durante a realização da tarefa e o estabelecimento de conexões entre elas.*

Palavras-chave: *representações; atividade; 1.º ciclo; práticas dos professores.*

Abstract. *We analyze the actions of a grade 3 teacher, Sara, aiming to understand how she explores a task with her pupils, particularly how she promotes their understanding of mathematical representations. Data was gathered by video recording and the collection of pupils' written work, was segmented in three different classroom moments (introduction of the task, pupils' autonomous work and whole class discussion) and analyzed through content analysis. The way Sara organizes the different classroom moments and how she acts seem to promote the free choice and use of different representations by her pupils. During the whole class discussion, by questioning her pupils regarding the representations that they used, the teacher promotes their understanding and establishing of connections among different representations that emerge as they work on the task.*

Keywords: *representations; activity; 1st cycle; teaching practices.*

Introdução

O trabalho com diferentes representações tem ganho crescente destaque nas orientações curriculares para o ensino da Matemática. A prática do professor determina o modo como os alunos usam as representações, e isso tem grande impacto na sua aprendizagem

(Stylianou, 2010). Deste modo, importa perceber de que forma os professores trabalham as representações na sala de aula e qual a influência que a sua prática tem na promoção da a compreensão das representações pelos alunos. Nesta comunicação, analisamos uma aula realizada por Sara, uma professora do 3.º ano, tendo por objetivo conhecer de que forma promove nos seus alunos a compreensão das representações usadas.

Práticas dos professores e representações

A noção de representação é fundamental na aprendizagem da Matemática. Tripathi (2008) define representação como uma construção física ou mental que descreve as características de um certo objeto ou conceito. Refere ainda que através das representações podemos interpretar, comunicar e discutir as nossas ideias com os outros. Bishop e Goffree (1986) indicam a importância de conhecer e aprender o vocabulário próprio de cada representação de modo a compreender as ideias com ela relacionadas. Deve ter-se em conta que uma representação pode ter vários significados e um significado pode ter várias representações (Goldin, 2008). O NCTM (2000) chama atenção que o termo "representação" pode referir-se ao processo de representar, bem como ao resultado desse processo.

Perante um problema é necessário escolher a representação ou combinação de representações adequada para a respetiva resolução. Bruner (1999) distingue entre representações ativas (objetos e movimentos), icónicas (desenhos e símbolos não matemáticos) e simbólicas (símbolos matemáticos). Pelo seu lado, Thomas, Mulligan e Goldin (2002) referem três tipos diferentes de representações: pictóricas (imagens e desenhos não matemáticos), icónicas (traços, círculos e pontos) e notacionais (linguagem matemática). Finalmente, Webb, Boswinkel e Dekker (2008) referem a existência de representações informais (muito relacionadas com o contexto), preformais (com ligação ao contexto mas também com aspetos formais) e formais (notação e linguagem matemática). No trabalho com representações podem surgir dificuldades por parte dos alunos. Assim, a não compreensão das caraterísticas das representações pode originar problemas na escolha da representação mais adequada (Acevedo et al., 2009). A dificuldade na compreensão das relações entre várias representações pode também gerar obstáculos na sua compreensão e na sua aprendizagem (Goldin, 2008).

Na realização de uma tarefa, as representações que o professor privilegia e a forma como as explora influenciam a aprendizagem e a compreensão das representações por parte dos alunos. Bishop e Goffree (1986) indicam que os professores devem promover a interpretação das representações e o estabelecimento de conexões entre elas. Sugerem que, para além das representações informais dos alunos, os professores devem usar outras representações que estes já compreendam, levando-os a estabelecer conexões entre várias representações. Os autores referem a importância dos professores respeitarem o ritmo de aprendizagem dos alunos, possibilitando-lhes compreender, usar e estabelecer conexões entre diferentes representações.

As tarefas selecionadas pelos professores e a forma como estes conduzem a sua realização na sala de aula são aspetos centrais da prática dos professores (Ponte & Chapman, 2006). Durante a realização de uma tarefa, a atividade dos alunos depende do que o professor faz, do papel que assume, do modo como introduz a tarefa, das questões que coloca e da forma como gere a discussão coletiva de resultados (Swan, 2007).

Ponte (2005) sugere que a realização de uma tarefa envolve três momentos principais: (i) introdução, em que é discutido o enunciado da tarefa e que pode ser realizada com a participação dos alunos ou assumida em exclusivo pelo professor; (ii) trabalho autónomo dos alunos, em que estes resolvem a tarefa de forma individual, a pares ou em pequeno grupo; e (iii) discussão coletiva de resultados, onde os alunos apresentam e explicam as soluções encontradas sendo ainda neste momento que se sistematizam as ideias mais relevantes. Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) identificam quatro possíveis ações do professor durante a discussão coletiva de resultados: (i) convidar, (ii) desafiar, (iii) apoiar ou guiar, e (iv) informar ou sugerir. Por sua vez, a atividade dos alunos numa tarefa pode ser analisada relativamente à sua compreensão das representações. Partindo desta classificação, definimos diversas ações específicas do professor relativamente às representações, diretamente relacionadas com a atividade dos alunos durante a realização de uma tarefa (Tabela 1).

Na realização de uma tarefa, a atividade dos alunos envolve a produção ou escolha de uma representação, o uso ou transformação da representação escolhida e, por fim, a reflexão sobre o trabalho realizado. Como é referido na Tabela 1, as ações dos professores estão relacionadas com a atividade dos alunos. Desta forma, para apoiar a produção e escolha de representações, os professores podem (i) promover a escolha livre de representações, (ii) dar pistas sobre a representação a usar questionando os alunos, ou (iii) sugerir explicitamente ou dar exemplos da representação que os alunos devem ou podem usar. Quando os alunos usam ou transformam representações, os professores podem (i) desafiá-los através do questionamento aberto promovendo a transformação de representações (conversões ou tratamentos, na aceção de Duval, 2006), (ii) pedir-lhes de forma estruturada que expliquem as representações que escolheram, (iii) guiá-los para que estabeleçam conexões entre representações; ou (iv) guiá-los para que façam conversões e tratamentos. Na terceira fase da atividade dos alunos, os professores podem (i) promover a avaliação do trabalho realizado (ii) promover a sistematização de informação relevante ou (iii) informar os alunos relativamente a informações e representações que considerem importantes. Nas duas primeiras fases o grau de exigência das ações do professor diminui quando são dadas pistas ou o questionamento é feito de forma estruturada.

Tabela 1.
Ações dos professores relacionadas com a atividade dos alunos numa tarefa.

Atividade dos alunos (relativa a representações)	**Ações do professor**
Produzir/Escolher	Promover a escolha livre de representações Dar pistas através do questionamento Sugerir ou dar exemplos
Usar/Transformar	Desafiar os alunos através de questionamento aberto Questionar de forma mais estruturada para explicar Guiar para o estabelecimento de conexões Guiar para fazer tratamentos e conversões
Refletir	Promover a avaliação do trabalho realizado Promover a sistematização de informação relevante Informar

Relativamente às representações dos alunos, considerámos como formais as representações simbólicas (notação matemática e palavras), como pré-formais as representações icónicas (esquemas e notações representativas da realidade) e como informais as representações pictóricas (desenhos muito próximos da realidade). Considerámos ainda como representações mistas, representações que incluem dois ou mais tipos de representações.

Metodologia de investigação

Sara é uma professora do 3.º ano que trabalha habitualmente com os quatro colegas do mesmo ano das duas escolas do agrupamento e que conhece os alunos há dois anos. No âmbito de uma investigação de natureza qualitativa e interpretativa, baseada em estudos de caso, sobre práticas dos professores, os cinco professores, em conjunto com a primeira autora, formaram um grupo de trabalho que reunia quinzenalmente com o intuito de preparar e refletir sobre as aulas realizadas e as tarefas propostas, dando sempre grande atenção às representações utilizadas. A aula que analisamos nesta comunicação teve por base a tarefa: "Numa peça de teatro, o João, o Pedro e o Ulisses queriam ser o rei. A Ana, a Inês e a Estrela disputaram o papel de rainha. Quantos pares de rei e rainha poderão ser formados?"

Os dados foram recolhidos através da observação participante da primeira autora (a investigadora) apoiada pela gravação vídeo das aulas com posterior transcrição. Foram também recolhidos os registos escritos dos alunos. Os dados foram segmentados nos três momentos da aula (introdução, trabalho autónomo e discussão coletiva) e analisados através de análise de conteúdo. As representações dos alunos foram categorizadas como informais (ativas e pictóricas), preformais (icónicas) e formais (simbólicas) tendo em conta as caraterizações de Bruner (1999), Thomas, Mulligan e Goldin (2002) e Webb, Boswinkel e Dekker (2008).

A aula

Introdução da tarefa

Sara pede a André que leia o enunciado da tarefa e desafia-o a interpretá-lo:

> Sara: André o que é que tu percebeste do exercício? (o aluno lê novamente o enunciado). . . .
> André: Então… O João, o Pedro e o Ulisses querem ser reis… A Ana, a Inês e a… Querem ser rainhas…
> Sara: Queriam ser rainhas… E qual era a pergunta?
> André: A pergunta era quantos pares de reis e rainhas…
> Sara: Quantos pares de reis… O que é um par de rei e rainha? (alunos parecem ficar confusos e começam a falar ao mesmo tempo) Calma! Quero ouvir o Vitor! Percebeu alguma coisa? (aluno responde negativamente) Boris! Quando é que eu tenho um par rei/rainha?
> Boris: Quando é um casal…
> Sara: Quando tem um casal… Tem que ter um rei e uma rainha! Então e com esses meninos eu quero ter par rei/rainha… Vamos tentar descobrir, quantos pares é que eu consigo formar com esses meninos… Para já… Quantos meninos é que eu tenho?

Boris: Três!
Sara: E quais são os meninos?
Alunos: O João, o Pedro e o Ulisses…
Sara: E as meninas? Quais são as meninas?
Alunos: A Ana, a Inês e a Estrela… (a professora escreve no quadro).

Sara desafia André a interpretar o enunciado da tarefa ("O que é que tu percebeste do exercício?") Tendo em conta as dificuldades que o aluno demonstra nesta interpretação, guia-o com algumas pistas através do questionamento ("Quantos pares de reis… O que é um par de rei e rainha?"). Após a intervenção de Boris, dá algum apoio para a compreensão do significado da palavra "par" ("Tem que ter um rei e uma rainha!"). De seguida, as suas ações procuram focar os alunos nos aspetos importantes do enunciado (compreender que cada par tem um rei e uma rainha, identificar quantos rapazes e raparigas existem e quem são, perceber que se podem formar vários pares). No final da introdução da tarefa, alguns alunos tentam responder oralmente e Sara aproveita para falar com a turma:

Leonardo: Podemos fazer assim… Por exemplo…
Sara: Então faz lá… No teu caderno! Está bem? Não quero ouvir os "por exemplos"… Quero que tu me faças… Por esquemas! Quero que tu me expliques porquê! Eu não quero que me digam só quantos são! Quero que me expliquem quais são os pares! E porquê! Porque é que vocês acham que é determinado número! Vamos lá! Eu já ouvi aqui umas respostas…Vá lá! Vamos descobrir quantos são os pares!

Sara reforça a importância de representar por escrito a resolução da tarefa ("Então faz lá… No teu caderno!") e desafia os alunos a explicar e justificar a sua resposta ("Quero que me expliquem quais são os pares! E porquê!"). Ao mesmo tempo, sugere que os alunos podem recorrer a representações icónicas ("Quero que tu me faças… Por esquemas!").

Trabalho autónomo dos alunos

Enquanto os alunos trabalham autonomamente de forma individual, Sara observa o seu trabalho e interpela-os. Alguns tentam novamente responder apenas oralmente e a professora volta a reforçar a importância de registar a resposta. Outros apresentam respostas incompletas e Sara desafia-os a rever o seu trabalho, dizendo-lhes que "existem mais pares". A maioria dos alunos que encontra a solução correta da tarefa recorre a uma representação semelhante à de Carlos, um dos alunos que tentou responder oralmente durante a introdução da tarefa (Figura 1):

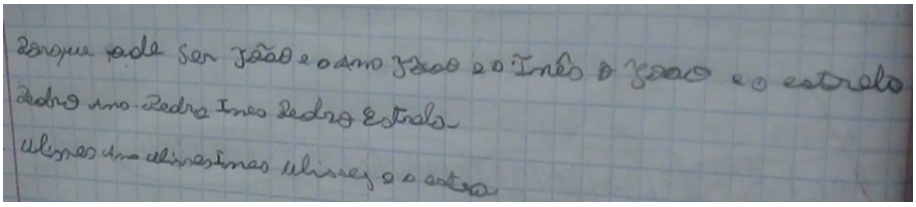


Figura 1. Representação mista de Carlos.

Sara: Então ao todo quantos pares são? Tu disseste-me logo o número [durante a introdução da tarefa]… Qual era o número?
Carlos: Nove!
Sara: E porquê? Como é que tu viste? (silêncio do aluno) Estiveste a formar esses pares… Ou olhaste e viste logo que podiam ser nove?
Carlos: Eu fiz num quadro (referindo-se à sua representação – figura 1) . . . O João e a Ana, João e a Inês e o João e a Estrela… E depois fiz igual nas outras vezes [conjuguei um rapaz com todas as raparigas]…

Tendo Sara desafiado os alunos a representar por escrito a sua resposta, Carlos produz uma representação mista (com elementos esquemáticos e simbólicos) a que chama “tabela”. A professora desafia-o a explicar a sua representação (“E porquê? Como é que tu viste?”) o que ele faz sem dificuldades. Atendendo à representação e explicação do aluno, Sara percebe que este conjuga os pares rapaz-rapariga usando o nome das personagens sempre pela mesma ordem.

Sara circula pela sala e interpela pontualmente os alunos, fazendo algumas questões. Quando se depara com respostas que incluem representações diferentes da escolhida pela maioria dos alunos, a sua intervenção é mais prolongada. De seguida, analisa a representação de Mauro, uma representação mista (icónica e simbólica) (Figura 2):

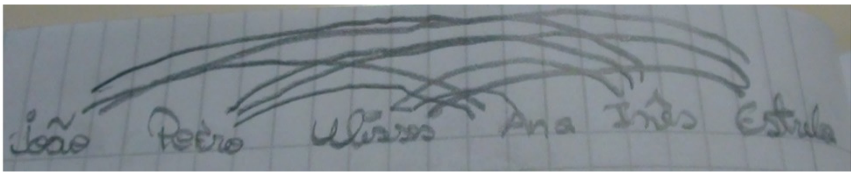


Figura 2. Representação mista usada por Mauro.

Sara: Boa, Mauro!
Mauro: Eu acho que não se percebe muito bem…
Sara (como se falasse para toda a turma): Eu acho que se percebe muito bem… Explica lá…
Mauro: Fiz assim: Ulisses-Ana, Pedro-Ana e João-Ana… (aponta para a ligação entre os nomes). Depois fiz Ulisses-Inês, Pedro-Inês e João-Inês… E depois fiz Ulisses à Estrela, Pedro à Estrela e João à Estrela . . .
Professora: E dá quanto? No total?
Mauro: Seis… São três… (o aluno conta) Dá nove!

Sara elogia a representação de Mauro, desafiando-o a explicar como resolveu a tarefa ("Eu acho que se percebe muito bem… Explica lá…"). Falando para que toda a turma oiça, está a promover a escolha livre de representações e a desafiar todos os alunos a encontrar diferentes representações para resolver a tarefa. Ao obter esse feedback da professora, o aluno mostra-se entusiasmado em mostrar o seu trabalho e Sara aproveita para o desafiar ("Explica lá…", "E dá quanto?").

Ao perceber que Mariana é a única que recorre à representação simbólica da adição (Figura 3), questiona-a:

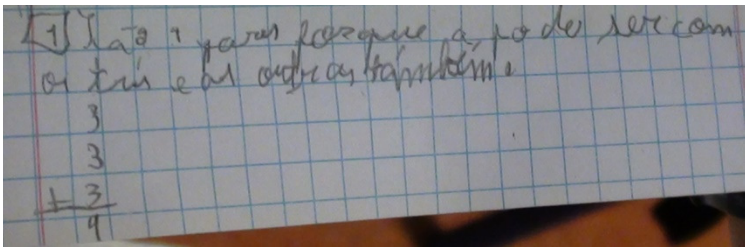


Figura 3. Representação simbólica de Mariana.

> Sara: Eu não percebi como é que tu chegaste a este resultado aqui… Explica-me lá isto (aponta para a representação do cálculo na disposição vertical)…
>
> Mariana: Isso eu fiz… A Ana com eles os três [rapazes] (referindo-se à primeira parcela), a Inês com eles os três (referindo-se à segunda parcela) e a Estrela com eles os três (referindo-se à terceira parcela)… E deu nove!
>
> Sara: Muito bem! Embora o escrito [a resposta escrita] não esteja perfeito… (falando para a investigadora) A justificação dela é correta…

Perante a resposta certa da aluna, Sara desafia-a a explicar como encontrou a solução encontrada ("Eu não percebi . . . Explica-me lá isto…") de modo a entender se a aluna compreendeu o significado da sua representação (nomeadamente o que simboliza cada parcela). Perante a explicação de Mariana, Sara fica satisfeita e elogia-a.

Leonardo, outro aluno que tentou responder de imediato à tarefa, perante o desafio inicial da professora, sentiu-se motivado a encontrar uma representação "diferente" (Figura 4):

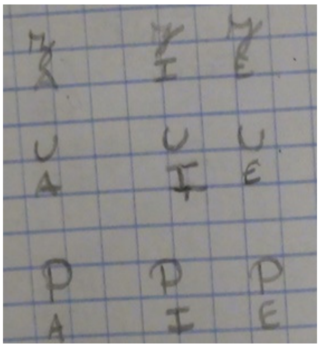


Figura 4. Representação mista (simbólica e icónica) de Leonardo.

Sara: Então Leonardo… Explica-me lá…

Leonardo: O “J” tá aqui… É de João… O “I” é de Inês… Ai!…Então… (apontando para as iniciais) Ana, Inês e Estrela. O U que é do Ulisses é Ana, Inês e Estrela (aponta para o P) é do Pedro com Ana, Inês e Estrela… São os nove pares que podemos formar…

Sara: Os nove pares que podemos formar, muito bem! Gostei desta representação!

Sara desafia Leonardo a explicar a sua representação mista e o aluno fá-lo sem dificuldade. Após a sua explicação, Sara dá um reforço positivo ao aluno elogiando-o. Mais uma vez, e ao fazê-lo em voz alta, promove a livre escolha de representações, desafiando os alunos a encontrar diferentes tipos de representação.

Discussão coletiva

Durante a discussão coletiva, Sara pede a alguns alunos que apresentem as suas representações. Assim, pede a Jonas que registe a sua representação no quadro e a explique aos colegas (Figura 5).

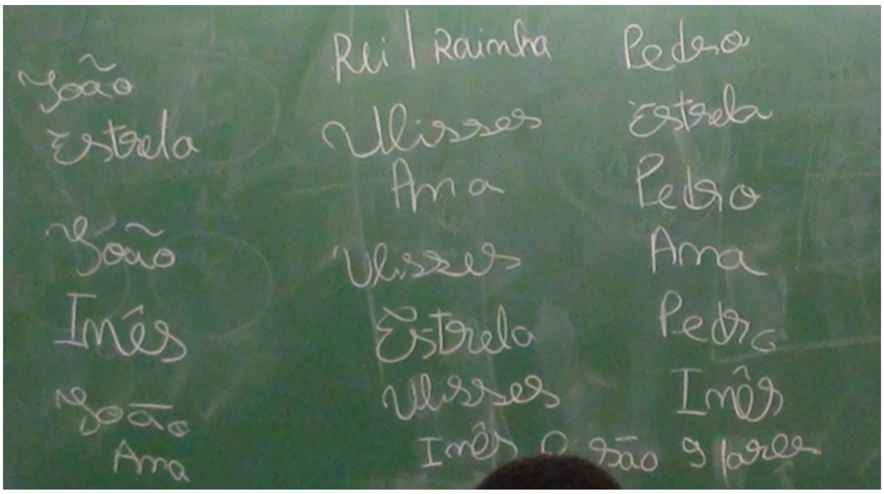


Figura 5. Representação mista (simbólica e icónica) de Jonas.

Sara: Então e quantos pares são?

Jonas: São nove…

Sara: Então… Escreve isso aqui em baixo… (Jonas escreve). Então… Vamos lá todos tomar atenção… Jonas … Queres tentar explicar esse esquema que fizeste? Explica-me lá porque é que tu fizeste assim.
Jonas: Eu fiz…
Sara: Explica-me…
Jonas: Fiz aqui o João…
Sara: E porque é que tu escolheste o João? O João e a Inês? O João e a Estrela…? Porquê? Porque é que tu fizeste um esquema assim?
Jonas: Para saber quais os pares que dava para fazer… Então eu fiz [os pares]…
Sara: Fizeste os pares… E não sabes porquê? Apeteceu-te fazer assim? Foi? (o aluno fica calado)
Jonas: Então… Estava a tentar fazer um rapaz.
Sara: Estava a tentar fazer um rapaz e depois a rapariga… É isso?
Jonas: É…

Jonas é um aluno tímido e inseguro, especialmente quando é necessário falar para a turma. Durante o trabalho autónomo, Sara tinha-o questionado e, percebendo que a sua representação proporcionava uma solução correta, pede-lhe que a mostre no quadro. Assim, começa por desafiá-lo a explicar a sua solução ("Explica-me…", "Porquê?") mas face às dificuldades do aluno decide questioná-lo de forma estruturada ("Fizeste os pares… E não sabes porquê?") e acaba por guiá-lo dando informações sistematizadas relativamente à sua explicação ("Estava a tentar fazer um rapaz e depois a rapariga… É isso?").

Depois, Sara pede a Mauro que mostre de que forma encontrou a solução do problema:

Sara: Então diz lá Mauro como é que tu fizeste? (Mauro vai ao quadro) . . . Explica aos teus colegas como é que tu fizeste? Como é que chegaste ao teu resultado? . . .
Mauro: Eu escrevi os nomes . . . Posso fazer [no quadro]?
Sara: Podes (Mauro desenha o primeiro traço do seu esquema) (Figura 6).

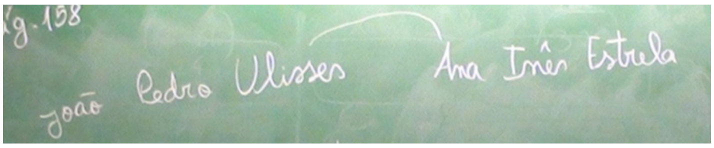


Figura 6. Representação de Mauro (início da explicação).

Sara: Isso [esse traço] é o quê?
Mauro: O que está ligado? É um par!
Sara: É um par… Qual é o par?
Mauro: Ulisses e Ana!
Sara: Ulisses e Ana! Ele tem ali um par… Ulisses e Ana! Mais? (Mauro continua a ligar nomes)… Pedro e a Ana… João e a Ana… (Figura 7) E a seguir?

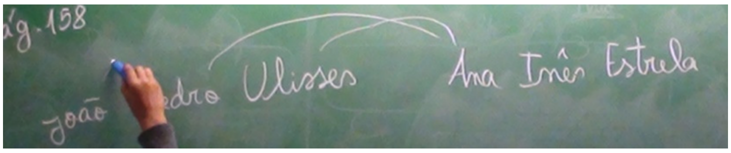


Figura 7. Representação de Mauro durante a explicação.

Mauro: Pedro e Inês…
Sara (vai narrando o que o aluno vai fazendo): O Pedro e a Inês… E o João e a Inês… E era a Estrela… O João e a Estrela… E a seguir o que é que tu fizeste? Acho que já me perdi! (Mauro indica que falta fazer pares com a Estrela). Ah! Falta a Estrela, sim! Então… Fizeste o João e a Estrela . . . (Figura 8) Se vocês repararem… Quantos pares é que pode fazer o Jonas (aponta para a representação de Jonas registada no quadro)?

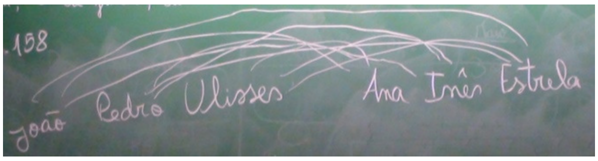


Figura 8. Representação de Mauro no final da explicação.

Alunos: Nove!!
Sara: E quantos pares é que fez aqui o João (aponta para o esquema de Mauro e circula o início das três linhas) (Figura 9)?

Figura 9. Conexão estabelecida por Sara entre as representações de Mauro e Jonas.

Alunos: Trêsss!!
Sara: Três pares… O Pedro pode fazer…
Alunos: Três!!!
Sara: E o Ulisses pode fazer…
Alunos: Três!!
Sara: Mais três pares! OK, podes sentar-te… Muito bem!

Sara desafia Mauro para mostrar aos colegas o esquema que usou para resolver o problema ("Como é que tu fizeste?") e por vezes questiona-o de forma estruturada ("Isso [esse traço] é o quê?"). A certa altura, parece considerar que a explicação do aluno é pouco clara e foca a atenção da turma na representação de Mauro ("Ele tem ali um par… Ulisses e Ana!"). No final, guia os alunos para o estabelecimento de conexões entre as representações de Jonas e Mauro e adapta a representação de Mauro de forma a representar iconicamente a conexão existente entre as duas representações fazendo marcas circulares na representação de Mauro (figura 9).

Por fim, Sara desafia Mariana para que explique a sua representação simbólica:

Mariana: A Estrela e o João, a Ana e o João, a Inês e o João. Depois fiz outra vez a Estrela com o Ulisses, a Inês com o Ulisses e a Ana com o Ulisses (enquanto enumera os pares, a aluna conta-os pelos dedos).
Sara: Ela viu que… Podia fazer os… A Ana com o João, A Inês com o João e a Estrela com o João… Então o João pode fazer quantos pares?
Alunos: Três…
Sara: Com três não foi? Então vá… Coloca lá… (aluna escreve “3” no quadro) Depois ela fez a Ana e o Pedro, a Inês com o Pedro e a Estrela com o Pedro. Então Quantos pares é que pode fazer o Pedro…
Alunos: Três!!
Sara: E ela…Colocou lá o 3… Depois fez a Inês com o Ulisses, a Estrela com o Ulisses e a Ana com o Ulisses… Quantos pares é que pode fazer o Ulisses?
Alunos: Três!! E a seguir o que é que tu fizeste?
Mariana: Fiz a soma… (Figura 10)
Sara: E a seguir fez a soma! Muito bem!
Mariana: E dava nove!

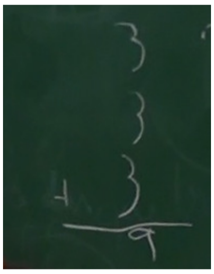


Figura 10. Representação simbólica apresentada por Mariana.

Mariana é outra aluna muito tímida e Sara questiona-a de forma estruturada para apresentar a sua representação simbólica. Durante o trabalho autónomo, a aluna tinha usado a representação simbólica da adição que explicou sem dificuldade. No entanto, durante a discussão coletiva sente necessidade em se apoiar numa representação ativa (conta pelos dedos). Ao se aperceber das dificuldades da aluna, Sara altera as suas ações e informa a turma relativamente à representação usada por Mariana. Esta sente-se assim motivada para mostrar aos colegas que apesar de ter usado uma representação simbólica diferente das anteriores, o seu resultado é igual (“E dava nove!”). A partir das representações dos alunos, que permanecem registadas no quadro (Figura 11), Sara desafia a turma:

Sara: . . . Olha então vou-vos ensinar um truque…!! Então vamos lá tomar atenção… Quantos rapazes é que eu tenho?
Alunos: Três!!
Sara: E quantas meninas?
Alunos: Três!!
Sara: Cada menino pode fazer três pares…

Fábio: Professora! São três pares de três!
Miguel: É três vezes três!
Sara: Então também podes fazer 3×3 (escreve no quadro) que dá…
Alunos: Nove!! (Figura 11)

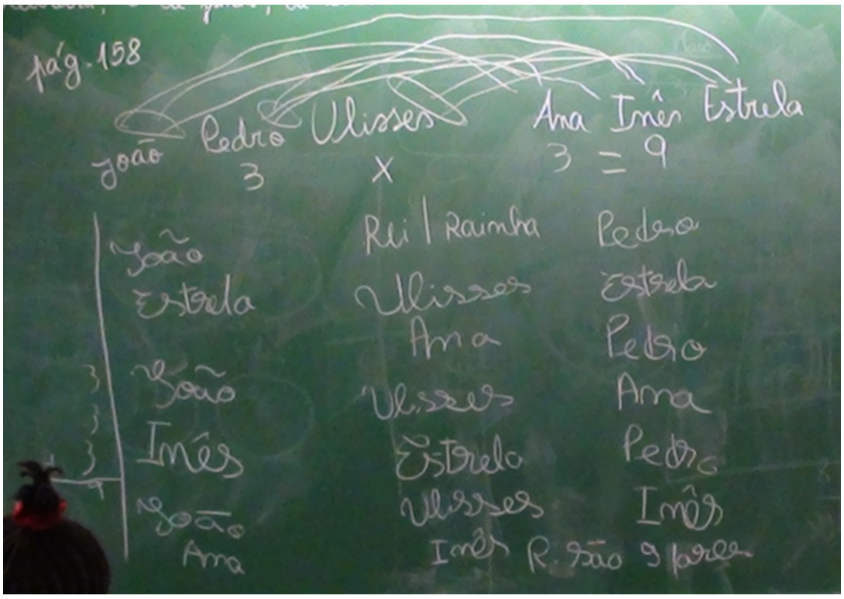


Figura 11. Representação simbólica de Sara (multiplicação) inserida nas representações apresentadas pelos alunos Jonas, Mauro e Mariana.

Antes de desafiar os alunos, Sara provoca-os ("Vou ensinar-vos um truque!"). Tendo captado a atenção da turma, parece guiá-los na interpretação do enunciado da tarefa ("Quantos rapazes é que eu tenho?", "E quantas meninas?"). Através de um comentário que parece apenas informativo ("Cada menino pode fazer três pares…"), desafia os alunos a converter as representações apresentadas na representação simbólica da multiplicação. Ao fazê-lo, promove a compreensão das conexões existentes entre as diferentes representações, o que é notório na rapidez com que os alunos identificam a operação da multiplicação como adequada para a resolução do problema. No final, regista o sinal da multiplicação junto à representação de Mauro (Figura 11).

Conclusão

Durante a introdução da tarefa a professora promove a escolha livre de representações e procura evitar dar sugestões aos alunos, o que leva ao surgimento de diferentes representações por parte destes. Indica-lhes que registem por escrito as resoluções para que possam ser discutidas no final. A representação simbólica (verbal) usada no enunciado da tarefa revela-se problemática, na medida em que alguns alunos desconhecem o sentido da palavra "par". Assim, Sara solicita a ajuda de um dos alunos que dá outro termo ("casal") como sinónimo de "par".

Durante o trabalho autónomo dos alunos, Sara altera as suas ações à medida que avalia as dificuldades dos alunos. Assim, a sua primeira abordagem é sempre através de um desafio. Por vezes, perante a falta de resposta dos alunos ou a dificuldade em compreender o que está a ser pedido, baixa o grau de exigência das suas ações e questiona os alunos de forma estruturada. No que diz respeito às representações usadas pelos alunos, Sara questiona-os com o intuito de perceber como resolveram o problema, se compreendem a representação que usaram e se conseguem interpretar a representação escolhida. Tal como fez durante a introdução da tarefa, promove a escolha livre de representações através do elogio a alunos que recorrem a representações diferentes da maioria da turma.

Na discussão coletiva, Sara desafia os alunos a apresentar as suas soluções. Perante alunos que revelam dificuldades em falar para a turma, altera rapidamente as suas ações para ações de questionamento estruturado e de dar informação. Convida os alunos com "representações chave" a apresentar aos colegas as soluções encontradas. Assim, ao discutir as diferentes representações, guia os alunos na conversão de representações, evidenciando as conexões entre estas.

De forma geral, Sara começa quase sempre pelo nível mais exigente (desafiar) e diminui se necessário o nível de exigência em função da resposta dos alunos. Nesses casos, depois de desafiar os alunos, questiona-os de forma estruturada, faz sugestões e dá informações. Em relação às representações, ao promover a sua escolha livre e o estabelecimento de conexões entre as diferentes representações, Sara promove o conhecimento e a compreensão de várias representações o que ajudará os alunos a escolher a representação mais adequada (Acevedo et al., 2009) e a compreender as relações existentes entre as várias representações (Goldin, 2008). O modo como a professora organiza a apresentação das representações dos alunos (da mais informal para a mais formal) permite uma formalização gradual das representações que, no final, potencia o surgimento da representação simbólica da multiplicação como adequada à resolução da tarefa. Para além disso, a decisão de manter registadas no quadro as representações dos alunos, mostra facilitar a visualização e identificação de conexões entre as representações.

Assim, para promover a compreensão das representações utilizadas pelos alunos, Sara usa a ação de desafiar, levando-os a explicar as representações que escolheram. Durante o trabalho autónomo dos alunos, seleciona alunos que usam representações apropriadas para resolver a tarefa, mas diferentes da representação mais usada pela turma. Durante a discussão, o modo como promove a apresentação e discussão de diversas representações e o seu questionamento parecem contribuir para que os alunos compreendam as representações usadas e estabeleçam conexões entre estas.

Referências bibliográficas

Acevedo, A., Dooren, W. V., Clarebout, G., Elen, J., & Verschaffel, L. (2009). Conceptualizing, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: A critical review. *ZDM*, *41*(5), 627-636.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'Água.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.). *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 178-203). New York, NY: Routledge.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, *22*(2), 55-82.

Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*, 325-343.

Swan, M. (2007). The impact of task based professional development on teachers' practices and beliefs: A design research study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*, 217-237.

Thomas, N. D., Mulligan, J. T., & Goldin, G. (2002). Children's representation and structural development of the counting sequence 1–100. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*(1), 117-133.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438-445.

Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(2), 110-113.

Uma proposta para análise do Conhecimento para Ensinar Matemática com a Tecnologia

Helena Rocha [1]
[1]Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa, *hcr@fct.unl.pt*

Resumo. *O conhecimento profissional é há muito perspetivado como uma forte influência sobre as aprendizagens dos alunos. Diversos autores têm procurado desenvolver processos de aferir esse conhecimento, mas este tem-se revelado um processo complexo. Neste artigo apresenta-se um esboço de uma conceptualização para análise do conhecimento do professor, tendo por base o modelo do Conhecimento para Ensinar Matemática com a Tecnologia (KTMT) e um conjunto de propostas de trabalho escolhidas pelo professor, de entre as que preparou para os seus alunos e que considera melhor ilustrarem a forma como tira partido das potencialidades da tecnologia. São consideradas como unidades estruturantes da análise do KTMT as caraterísticas das propostas de trabalho escolhidas; a articulação entre as representações disponibilizadas pela tecnologia que as propostas de trabalho preconizam; a forma como nestas propostas é ponderado o contacto com a nova questão de procurar uma janela de visualização adequada; e ainda a forma como as propostas de trabalho têm em conta as espectáveis dificuldades dos alunos durante esse processo de procura pela janela.*

Palavras-chave: *conhecimento profissional; KTMT; tecnologia.*

Abstract. *The teacher's knowledge has long been viewed as a strong influence on the students' learning. Several authors have sought to develop procedures to assess this knowledge, but this has proved to be a complex task. In this paper I present an outline of a conceptualization to analyze the teacher's knowledge, based on the model of the Knowledge for Teaching Mathematics with Technology (KTMT) and a set of tasks. These tasks are chosen by the teacher among the ones he prepared for his students taking into account the potential of the tasks to take advantage of the technology's potential. The analyze of the teacher's KTMT is based on the characteristics of the tasks chosen by the teacher; the balance established between the representations provided by the technology that the tasks advocate; the way how the tasks pay attention to the new issue of seeking for a suitable viewing window; and also the way how the tasks take into account the expectable difficulties of the students in the process of looking for the window.*

Keywords: *professional knowledge; KTMT; technology.*

Introdução

O conhecimento profissional do professor é considerado como um requisito importante para um ensino de qualidade (Fauskanger, 2015). E muitos são os autores que se têm dedicado a desenvolver caraterizações desse conhecimento, identificando aspetos importantes do conhecimento requerido para ensinar e desenvolvendo modelos que articulam conhecimentos específicos numa estrutura global e abrangente. Alguns autores têm-se dedicado ao desenvolvimento de modelos para caraterizar o conhecimento requerido para ensinar em contextos tecnológicos, como é o caso de Mishra e Koehler (2006) e do seu modelo TPACK; outros têm-se dedicado ao desenvolvimento de modelos para ensinar Matemática, independentemente do contexto, como é o caso de Hill *et al.* (2007) e do seu modelo MKT.

Indissociável desta intenção de caraterizar o conhecimento que um professor necessita de ter para que possa promover um ensino de qualidade, está o desejo de aferir o conhecimento efetivamente detido pelos professores. E esta é uma questão que se tem revelado problemática. São diversos os autores (ver, por exemplo, Fauskanger (2015), Schmidt *et al.* (2009)) que apontam fragilidades e que questionam mesmo a fiabilidade dos resultados alcançados através da aplicação de alguns dos instrumentos desenvolvidos. São igualmente vários os autores (ver, por exemplo, Rocha (2010), Schmidt *et al.* (2009)) que criticam as opções assumidas para aferir o conhecimento dos professores, por as considerarem demasiado exigentes em termos do tempo requerido e dos recursos necessários para as concretizar.

Neste artigo pretende-se apresentar uma conceptualização teórica para analisar o conhecimento do professor num contexto de utilização da tecnologia. Trata-se de um trabalho ainda em curso, que assenta no modelo do Conhecimento para Ensinar Matemática com a Tecnologia (KTMT) e que se baseia na análise das tarefas propostas pelo professor aos alunos. Nesta fase do trabalho é apenas considerado o ensino das Funções com a calculadora gráfica.

A estrutura do artigo inclui uma parte dedicada a uma apresentação resumida do KTMT, a que se segue uma análise crítica das principais opções assumidas por outros autores que desenvolveram instrumentos/estratégias para aferir o conhecimento dos professores. É então apresentada a conceptualização que é o objecto deste artigo e fundamentadas as opções assumidas. Por fim é apresentado um exemplo hipotético de aplicação desta conceptualização, com a mera intenção de contribuir para a sua clarificação. Os dados apresentados nesta última parte são reais, tendo sido recolhidos junto dum professor no âmbito dum outro estudo. Não se trata, contudo, de um exemplo real de aplicação desta conceptualização, uma vez que as tarefas foram selecionadas pela investigadora e não pelo professor.

Conhecimento para Ensinar Matemática com a tecnologia (KTMT)

Um olhar sobre modelos do conhecimento desenvolvidos até ao momento, como o MKT de Hill *et al.* (2007) ou o TPACK de Mishra e Koehler (2006), sugere o conhecimento da Matemática, do Ensino-Aprendizagem, da Tecnologia, e do Currículo como domínios importantes. Estes são os domínios base do KTMT, sendo que o Currículo é encarado de uma forma transversal e influente sobre os demais domínios.

Para além disso, o KTMT valoriza particularmente dois conjuntos de conhecimentos inter-domínios desenvolvidos na confluência de mais de um domínio e que constituem novo conhecimento que vai para além da interseção entre conhecimento dos domínios base: o conhecimento da Matemática e da Tecnologia (MTK) e o conhecimento do Ensino-Aprendizagem e da Tecnologia (TLTK). O MTK foca-se no conhecimento de como a tecnologia influência a Matemática, potenciando ou limitando certos aspetos. O TLTK foca-se na forma como a tecnologia interfere com o processo de ensino-aprendizagem, potenciando ou constrangendo certas abordagens.

Uma das principais intenções subjacentes à conceção do KTMT, e que o distingue de outras concetualizações existentes, é integrar num único modelo a investigação realizada em torno do conhecimento profissional e da integração da tecnologia na prática profissional. É por isso que o MTK inclui necessariamente:

- Conhecimento da fidelidade matemática da tecnologia, ou seja, conhecimento do nível de concordância entre os resultados apresentados pela Matemática e pela Matemática da tecnologia;
- Conhecimento das novas ênfases que a tecnologia coloca sobre os conteúdos matemáticos (por exemplo, incentivando abordagens mais intuitivas ou requerendo um domínio diferente da influência dos valores representados nos eixos coordenados sobre o aspecto do gráfico visualizado);
- Conhecimento de novas sequências dos conteúdos;
- Fluência representacional, envolvendo conhecimento das diferentes representações, de como as relacionar e de como alternar tanto entre representações como entre diferentes formas da mesma representação.

E o TLTK inclui necessariamente:

- Conhecimento das novas questões com que a tecnologia confronta os alunos, nomeadamente das dificuldades com que estes se deparam e que decorrem dessa utilização;
- Conhecimento da concordância matemática das tarefas propostas, ou seja, do alinhamento entre as intenções do professor e a Matemática efetivamente trabalhada pelos alunos;
- Conhecimento das potencialidades da tecnologia para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, nomeadamente conhecimento dos diferentes tipos de trabalho e dos papéis do professor que a tecnologia torna possível, do contributo que estes podem trazer à aprendizagem e de formas de os articular.

Por fim, o KTMT inclui Conhecimento Integrado (IK). Um conhecimento detido pelo professor que articula simultaneamente o conhecimento nos domínios base e nos dois conjuntos de conhecimentos inter-domínios. Este é um conhecimento que se desenvolve a partir da interação entre todos os domínios e que se carateriza pela sua natureza abrangente e global e ao mesmo tempo particular, no sentido que é aquele que permite maximizar as potencialidades específicas da tecnologia para proporcionar melhores aprendizagens matemáticas aos alunos. É este conhecimento que constitui a verdadeira essência do KTMT.

Análise do conhecimento profissional do professor

A análise do conhecimento profissional detido por cada professor tem constituído uma preocupação para diversos autores, mas tem-se revelado uma tarefa complexa.

Graham *et al.* (2009) desenvolveram um questionário com 31 questões de resposta fechada e duas de resposta aberta. A partir deste quantificaram a opinião que os professores têm do seu conhecimento relativamente aos diferentes domínios propostos pelo modelo TPACK que envolvem tecnologia. A caraterização que fazem de cada um destes domínios do conhecimento, contrariamente ao proposto pelos autores do TPACK, coloca uma ênfase significativa no conhecimento técnico. Por exemplo, Graham *et al.* (2009) caracterizam o TCK como o conhecimento da tecnologia a que os investigadores da área recorrem, enquanto Mishra e Koehler (2006) colocam o foco na forma como o conteúdo pode ser modificado pelo recurso à tecnologia. O instrumento desenvolvido por Graham *et al.* (2009) acaba assim por se centrar na confiança do professor relativamente a diferentes conhecimentos predominantemente de caráter técnico.

Angeli e Valanides (2009) classificam o TPACK detido pelo professor focando-se na tarefa desenvolvida por este e num conjunto de cinco critérios:

1. Identificação de tópicos a ensinar com a tecnologia onde seja patente o valor adicional trazido por esta.

2. Identificação de representações para transformar o conteúdo a ensinar de modo a que este se torne compreensível para os alunos e em casos em que seria difícil fazê-lo com base nos métodos tradicionais.

3. Identificação de estratégias de ensino que seriam difíceis ou impossíveis de implementar com base nos meios tradicionais.

4. Seleção duma tecnologia adequada.

5. Identificação de estratégias adequadas para a introdução da tecnologia na sala de aula.

O processo de classificação a que recorrem envolve uma apreciação levada a cabo pelos pares, pelo próprio e por um especialista, o que o torna complexo em termos da estrutura que requer.

Niess *et al.* (2009) propõem um modelo de desenvolvimento profissional que assenta numa caraterização da utilização e das preocupações do professor face à tecnologia. Os autores apresentam quatro temas (o currículo e a avaliação, a aprendizagem, o ensino e o acesso), cinco níveis (reconhecimento, aceitação, adaptação, exploração e desenvolvimento) e um conjunto de descritores e exemplos. Não clarificam contudo as razões subjacentes à escolha destes temas para conceptualizar o desenvolvimento de um conhecimento que se apoia num modelo que se encontra organizado em domínios muito distintos (conhecimento do conteúdo, da pedagogia, da tecnologia e das intersecções entre estes). Além disso, como os próprios reconhecem, o modelo não permite uma análise global do conhecimento profissional, sendo possível encontrar professores em diferentes níveis consoante o tema considerado.

Análise do KTMT a partir das propostas de trabalho

É amplamente reconhecido o potencial da tecnologia para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, bem como as substanciais implicações que esta poderá ter sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática (Graham *et al.* 2003). E Dunham (2000), considera mesmo que é ao nível da mudança das caraterísticas das propostas de trabalho e do trabalho daí decorrente que se faz sentir o impacto mais profundo que a calculadora gráfica pode ter sobre o ensino. Parece pois pertinente considerar as propostas de trabalho escolhidas pelo professor como a base da análise do seu Conhecimento para Ensinar Matemática com a Tecnologia (KTMT).

Nas palavras de Penglase e Arnold (1996, p. 85), numa opinião também partilhada por Goos e Geiger (2000), as "abordagens de ensino e aprendizagem que enfatizem a resolução de problemas e a exploração e ao longo das quais os alunos constroem e negoceiam activamente o significado para a Matemática com que se deparam, encontram nesta tecnologia um parceiro natural e matematicamente poderoso". Um aumento do trabalho em torno de questões abertas e da exploração de conceitos por parte dos alunos são, igualmente, uma das possíveis consequências da integração da tecnologia (Cavanagh, 2006; Graham *et al.*, 2003). A facilidade e rapidez com que os alunos podem traçar diversos gráficos torna possível propostas de trabalho em que estes façam as suas próprias descobertas, usando a máquina como instrumento de investigação (Cavanagh & Mitchelmore, 2003). A calculadora gráfica permite também que sejam colocadas aos alunos propostas de trabalho utilizando tanto dados recolhidos por outros como dados recolhidos pelos próprios alunos (White, 2009). Os alunos passam assim a poder usar e aplicar os seus conhecimentos para compreender situações reais e, consequentemente, aprofundar esses mesmos conhecimentos (White, 2009).

As propostas de trabalho escolhidas por um professor encerram assim o potencial para elucidar sobre a forma como este perspetiva as potencialidades da tecnologia para o ensino a aprendizagem da Matemática.

Ponte (2005) pondera o nível de exigência que a tarefa coloca sobre os alunos e o seu nível de estruturação, atendendo ainda ao contexto da tarefa (estritamente matemático ou da realidade). Classifica assim as tarefas em exercícios, problemas, explorações ou investigações, onde as explorações correspondem a investigações com um menor grau de dificuldade e as tarefas de modelação são encaradas como problemas ou investigações, tal como descrevi acima.

Breen e O'Shea (2010), apoiando-se em trabalhos prévios, desenvolvem uma caracterização baseada em aspectos do trabalho que o aluno tem que desenvolver no decurso da tarefa. Consideram assim oito tipos diferentes, consoante é necessário: (1) recordar factos; (2) executar um cálculo ou procedimento rotineiro; (3) classificar um objecto matemático; (4) interpretar uma situação ou uma resposta; (5) provar, mostrar ou justificar; (6) desenvolver um conceito; (7) construir um exemplo; ou (8) criticar uma falácia. Organizam depois estes tipos de tarefas em dois grupos. Um grupo envolvendo os quatro primeiros tipos de tarefas, onde os alunos se envolvem num trabalho de carácter essencialmente reprodutor, requerendo a aplicação de conhecimentos familiares em situações típicas. Um outro grupo envolvendo os últimos cinco tipos de tarefas (o quarto tipo é assim considerado nos dois grupos), onde são requeridos processos cognitivos de nível superior, tais como criatividade, reflexão e espírito crítico, e a capacidade de adaptar os conhecimentos adquiridos a novas situações. Pode assim de algum modo considerar-se aqui uma classificação em torno do nível de dificuldade da tarefa, um dos eixos considerados por Ponte (2005) na sua classificação.

Laborde (2001) considera as tarefas num contexto de utilização da tecnologia e classifica-as em: (1) tarefas que são facilitadas pela tecnologia, mas que não são modificadas por esta; (2) tarefas onde a tecnologia facilita a exploração e a análise; (3) tarefas que podem ser realizadas com papel e lápis, mas onde a tecnologia vem permitir novas abordagens; (4) tarefas que não podem ser realizadas sem a tecnologia. E a autora organiza estes tipos em dois grupos, consoante as tarefas são facilitadas pela tecnologia, mas poderiam continuar a ser implementadas sem o recurso a esta; ou modificadas por esta, como sucede nas tarefas em que são modelados fenómenos reais ou efectuadas deduções a partir de um conjunto de observações.

Parece pois pertinente partir de uma análise das propostas de trabalho para ponderar o conhecimento do potencial da tecnologia para o ensino e aprendizagem da Matemática detido pelo professor (um dos conhecimentos que integra o TLTK) e, consequentemente, o seu Conhecimento do Ensino-Aprendizagem e da Tecnologia (TLTK).

Uma das características da calculadora gráfica é permitir aceder a múltiplas representações (Kaput, 1992), o que torna possível estabelecer ou reforçar ligações de uma forma que não seria possível sem o apoio da tecnologia (Cavanagh & Mitchelmore, 2003), articulando as representações numérica ou tabular, simbólica ou algébrica e gráfica (Goos & Benninson, 2008) e potenciando o desenvolvimento de uma melhor compreensão das Funções (Burril, 2008). Como refere Kaput (1989), a conexão entre diferentes representações cria uma visão global, que é mais do que a junção do conhecimento relativo a cada uma das representações e a tecnologia propícia uma exploração plena das abordagens numérica e gráfica de uma forma que até então não era possível, favorecendo assim uma abordagem integrada das diferentes representações e consequentemente o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda. O recurso a múltiplas representações tem assim o potencial de tornar a aprendizagem significativa e efectiva.

Apesar da importância de trabalhar com diferentes representações e da preocupação, por parte dos professores, em articular e equilibrar o recurso a estas, Molenje e Doerr (2006) constataram que o recurso às representações algébricas e gráficas são dominantes relativamente à representação numérica. Além disso, quando os professores efetivamente recorrem às três representações, tende a existir um padrão na forma como o fazem. Assim, alguns dos professores envolvidos no estudo tendem a recorrer primeiro à representação algébrica, passando depois para a gráfica e, por fim, para a numérica, enquanto outros tendem a passar da representação algébrica para a numérica e só depois para a gráfica. Esta sequência rígida adotada pelo professor tende a ser copiada pelos alunos que, consequentemente, vêem dificultado o desenvolvimento da desejada fluência entre as diferentes representações.

Neste sentido, uma análise da forma como as propostas de trabalho prevêem/requerem o recurso a diferentes representações e, quando o fazem, das caraterísticas que é possível identificar na utilização que delas fazem, constitui um indicador da fluência representacional do professor e, consequentemente, do seu Conhecimento da Matemática e da Tecnologia (MTK).

Apesar da importância de trabalhar com diferentes representações e de esse trabalho ser muito facilitado pela utilização da calculadora gráfica, os alunos têm dificuldade em fazê-lo (Kieran, 2007) e os professores não têm dedicado a necessária atenção à flexibilidade necessária para passar de uma representação para outra e para articular a informação veiculada por estas (Even, 1998). E esta é afinal uma nova questão com que os alunos têm que se defrontar, pois quando a tecnologia não estava disponível a alternância entre representações era naturalmente mais reduzida. Mas não é a única nova questão.

A integração da calculadora gráfica no processo de ensino e aprendizagem da Matemática vem permitir a representação gráfica de um conjunto mais amplo de funções, colocando os alunos perante decisões matemáticas com que até então não se deparavam (Cavanagh & Mitchelmore, 2003). Como refere Dick (1992), qualquer que seja a tecnologia em causa, esta terá necessariamente um ecrã finito e essa limitação cria a necessidade de lidar com escalas e com aspetos relacionados com a escolha de uma janela de visualização adequada. Com efeito, Cavanagh e Mitchelmore (2003) consideram que passa a ser necessário fazer uma escolha adequada da escala e dos valores da janela de visualização, saber lidar com as situações em que não é observado qualquer gráfico ou em que apenas surge uma vista parcial. Trata-se portanto de um conteúdo matemático com que os alunos não estavam habituados a lidar e, nesse sentido, a forma como o professor o inclui nas propostas de trabalho que lhes coloca poderá ser mais um indicador do seu conhecimento da Matemática e da Tecnologia (MTK).

A principal dificuldade com que os alunos se deparam quando a tecnologia passa a estar presente prende-se, segundo Cavanagh e Mitchelmore (2003), com as tomadas de decisão relativamente à janela de visualização mais adequada. E os autores atribuem a sua origem à anterior experiência matemática dos alunos, onde todos os gráficos eram traçados com papel e lápis em referenciais onde os valores representados eram quase sempre os mesmos, o que realça a atenção que o professor precisa de atribuir a essas noções, reflectindo em torno das novas ênfases que o recurso à tecnologia tende a colocar sobre os conteúdos matemáticos. Como refere Hector (1992), a utilização da calculadora gráfica permitiu a exploração de outro tipo de situações e transformou a escolha dos valores representados em cada eixo e da escala, em aspectos fundamentais. Esta alteração veio a revelar que a opção por simplificações permanentes, impediu os alunos não só de se aperceberem da importância das noções envolvidas, como também, e principalmente, de as compreenderem convenientemente. Torna-se portanto fundamental que o professor gira de forma adequada a forma e, acima de tudo, o momento em que os alunos vão ser confrontados com essas dificuldades. Com efeito, de acordo com Cavanagh (2006), é fundamental que o professor promova um contacto gradual com as situações potencialmente problemáticas, assegurando que este não ocorre demasiado cedo. E uma análise das propostas de trabalho permitirá sem dúvida perspetivar como é que o professor pondera esta questão. Constituirá assim mais uma forma de aceder a elementos do seu Conhecimento do Ensino-Aprendizagem e da Tecnologia (TLTK).

Identificámos assim um conjunto de aspetos que nos permitem aceder a elementos do KTMT e, consequentemente, partir de uma análise de propostas de trabalho do professor para aferir o seu conhecimento profissional (ver fig. 1 para uma síntese).

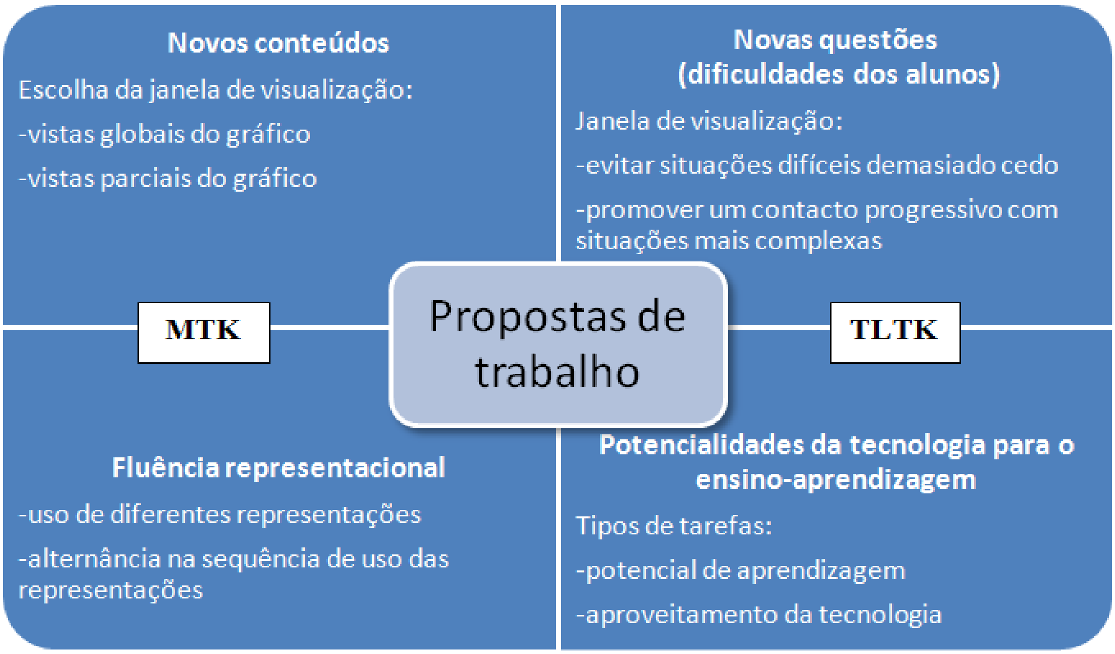


Figura 1. Síntese de aspetos a ponderar nas propostas de trabalho para análise do KTMT.

Exemplo

Suponhamos que um professor seleciona quatro propostas de trabalho como exemplificativas do trabalho realizado pelos seus alunos de uma turma do 10.º ano no âmbito do estudo do tema Funções e que envolveu a utilização da calculadora gráfica.

A primeira proposta foi concretizada na 3.ª aula (A3) e solicitava aos alunos o estudo de algumas famílias de funções quadráticas. Os alunos deviam observar gráficos, à sua escolha, de funções de cada uma das famílias em estudo e conjeturar quanto ao efeito da alteração dos seus parâmetros.

Na 4.ª aula (A4) foi proposta uma situação com contexto real onde era dada a expressão de uma função quadrática e efetuadas várias questões que requeriam que os alunos calculassem valores da função, encontrassem o valor que originava determinado valor da função e calculassem o seu zero.

Na 10.ª aula (A10) era dado um gráfico em papel e mais algumas informações sobre a função polinomial do 3.º grau representada. Depois de determinada analiticamente a expressão da função eram pedidos o máximo e mínimo relativos.

Na 12.ª aula (A12) era pedida a resolução gráfica da inequação $x^3-100x \leq 10x^2+100x$.

Na figura 2 apresenta-se sinteticamente uma análise do conhecimento deste professor.

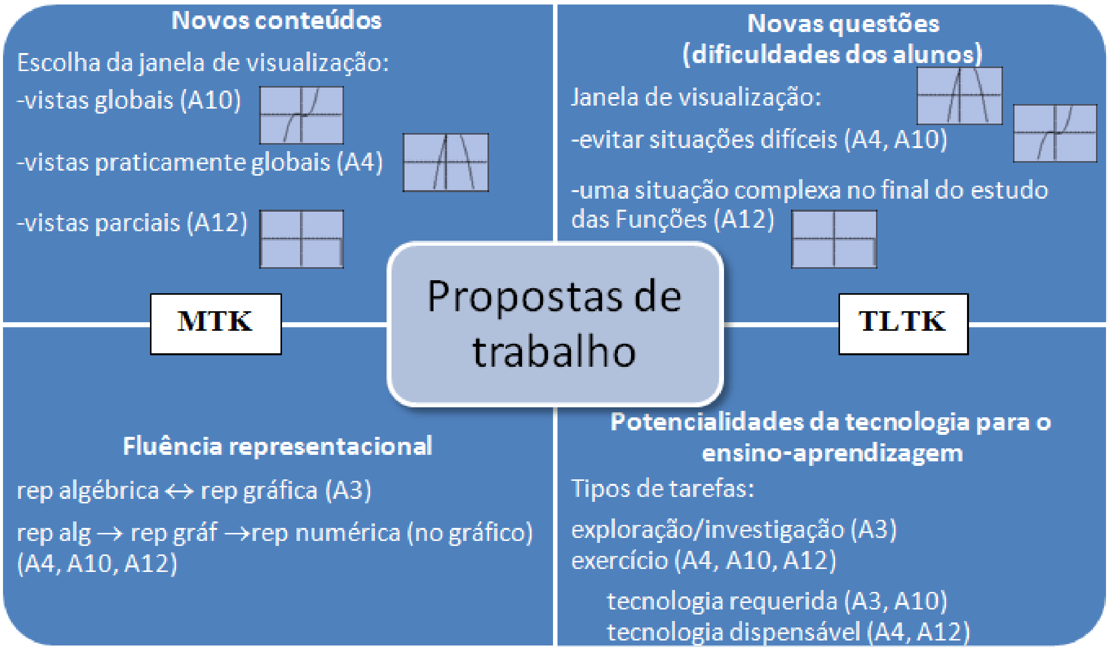


Figura 2. Síntese da análise do KTMT do professor.

A análise das propostas de trabalho supostamente escolhidas por este professor evidencia uma diversidade reduzida, com duas propostas onde era mesmo possível encontrar a resposta sem recorrer à calculadora. Parece pois não existir o conhecimento para escolher tarefas onde a calculadora assuma um papel relevante e potenciador de aprendizagens de um modo que não seria possível sem o apoio da tecnologia (*ie*, no sentido apontado por Laborde (2001)). Relativamente à forma como as propostas de trabalho obrigam a lidar com a janela de visualização, é possível concluir que existe a preocupação de evitar situações complexas demasiado cedo (tal como recomendado por Cavanagh (2006)), ainda assim, a diversidade de situações é muito limitada, sendo questionável se o contacto com uma situação complexa apenas em A12 não será demasiado tardio. Quanto ao trabalho em torno das representações, parece dominar uma preferência por iniciar pela representação algébrica e passar à gráfica. Ainda assim, e apesar da diversidade poder ser maior e da alternância mais interativa, existe alguma diversidade.

Este professor evidencia pois possuir conhecimento sobre aspetos importantes, contudo é possível identificar domínios onde o seu KTMT poderia ser desenvolvido. Ou seja, domínios que deveriam ser ponderados ao planear/procurar um programa de formação contínua /desenvolvimento profissional para este professor.

Discussão final

Neste artigo apresentamos uma proposta para aferição do conhecimento profissional do professor tendo por base o modelo do Conhecimento para Ensinar Matemática com a Tecnologia (KTMT) e um conjunto de propostas de trabalho escolhido pelo professor como representativo do que foi feito com os alunos no âmbito da utilização da tecnologia. A análise do exemplo fictício apresentado sugere que esta proposta tem potencial para aferir aspetos do conhecimento profissional, mas algumas críticas às opções assumidas são inevitáveis. E a principal prende-se com a forma como esta proposta de aferição do conhecimento ignora todos os aspetos relativos à implementação das propostas de trabalho.

Efetivamente, apesar de importantes, as tarefas propostas só por si não caracterizam a prática do professor. Como realça Boaler (2003), é preciso atender à complexidade da prática e ter presente que uma mesma tarefa pode suportar práticas distintas. Ou seja, é preciso ter presente que mesmo a mais meritória das tarefas não se constitui necessariamente como a origem inevitável de um produtivo ambiente de aprendizagem, visto que o que à partida poderia ser uma questão aliciante que apelava à exploração por parte dos alunos pode, perante determinada atuação do professor, rapidamente deixar de o ser e converter-se num exercício trivial. Com efeito, como referem Stein, Grover e Henningsen (1996), pode suceder que no decurso da implementação da tarefa ocorra uma diminuição do desafio cognitivo que se lhe encontra associado, especialmente quando estão envolvidas tarefas mais exigentes de um ponto de vista cognitivo.

E se é inegável que a ausência de elementos relativamente à implementação das propostas de trabalho pelo professor é uma realidade, já não é assim tão claro que seja efetivamente uma limitação significativa. No pior dos cenários (em que ocorre uma alteração das caraterísticas do trabalho que seria de prever na sequência da implementação em sala de aula), teremos sempre uma majoração do conhecimento profissional do professor. E isto porque se existem referências à redução do desafio cognitivo de propostas de trabalho no decorrer da sua implementação, o contrário parece já não ser usual. E essa majoração do conhecimento do professor continuará a ser informação útil e relevante.

Esta proposta pretende assumir uma estrutura simples, mas que ainda assim possibilita o acesso a informações relevantes. Pretende assim evitar análises complexas concretizadas por múltiplos intervenientes, como no caso da proposta de Angeli e Valanides (2009); múltiplas interpretações sobre o conhecimento do professor em função do domínio considerado, como no caso da proposta de Niess *et al.* (2009); e um foco quase exclusivo em questões técnicas e relativas à confiança do professor, como no caso da proposta de Graham et al. (2009).

Além disso, esta não é de modo algum a única proposta que não inclui aspetos relativos à implementação das propostas de trabalho. É bem conhecimento o trabalho de Hill *et al.* (2007), que se baseia num questionário de resposta fechada a que os professores respondem, assim como as críticas, nomeadamente de Fauskanger (2015), sobre as potencialidades dum questionário de escolha múltipla para recolher elementos que vão para além de um conjunto de factos e procedimentos, para incluir uma perspectiva mais profunda e multidimensional do conhecimento do professor.

Esta é contudo uma proposta que está ainda na fase inicial do seu desenvolvimento. Importa agora refiná-la e analisar de forma mais profunda os contributos que pode trazer, ponderando nomeadamente a sua integração no seio de outras já existentes.

Referências bibliográficas

Angeli, C., & Valanides, N. (2009). Epistemological and methodological issues for the conceptualization, development, and assessment of ICT-TPCK: advances in technological pedagogical content knowledge (TPCK). *Computers & Education*, 52, 154-168.

Boaler, J. (2003). Studying and capturing the compexity of practice – the case of the “dance of agency”. In N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference* (vol.1, pp. 3-16). Hawai: PME.

Breen, S., & O’Shea, A. (2010). Mathematical thinking and task design. *Irish Mathematics Society Bulletin*, 66, 39-49.

Burril, G. (2008). *The role of handheld technology in teaching and learning secondary school mathematics*. In Proceedings of ICME 11. Monterrey, México: ICME.

Cavanagh, M. (2006). Enhancing teachers’ knowledge of students’ thinking: the case of graphics calculator graphs. In P. Jeffery (Ed.), *Creative dissent, constructive solutions*. Parramatta, NSW: AARE.

Cavanagh, M., & Mitchelmore, M. (2003). Graphics calculators in the learning of mathematics: teacher understandings and classroom practices. *Mathematics Teacher Education and Development*, 5, 3-18.

Dick, T. (1992). Super calculators: implications for calculus curriculum, instruction, and assessment. In J. Fey & C. Hirsch (Eds.), *Calculators in Mathematics Education* (pp. 145-157). Reston, Va.: NCTM.

Dunham, P. (2000). Hand-held calculators in mathematics education: a research perspective. In E. Laughbaum (Ed.), *Hand-held technology in mathematics and science education: a collection of papers* (pp. 39-47). Columbus, OH: The Ohio State University.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17(1), 105-121.

Fauskanger, J. (2015). Challenges in measuring teacher's knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 90, 57-73.

Goos, M., & Bennison, A. (2008). Surveying the technology landscape: teachers' use of technology in secondary mathematics classrooms. *Mathematics Education Research Journal*, 20(3), 102-130.

Goos, M., & Geiger, V. (2000). Towards new models of teaching and learning in technology enriched mathematics classrooms. In W-C. Yang, S-C. Chu & J-C. Chuan (Eds.), *Proceedings of the Fifth Asian Technology Conference in Mathematics*. Chiang Mai, Thailand: ATCM Inc.

Graham, T., Headlam, C., Honey, S., Sharp, J., & Smith, A. (2003). The use of graphics calculators by students in an examination: what do they really do?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(3), 319-334.

Graham, T. et al. (2009). Measuring the TPACK confidence of inservice science teachers. *TechTrends*, 53(5), 70-79.

Hector, J. (1992). Graphical insight into elementary functions. In J. Fey & C. Hirsch (Eds.), *Calculators in Mathematics Education* (pp. 131-137). Reston, Va.: NCTM.

Hill, H., Sleep, L., Lewis, J., & Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: what knowledge matters and what evidence counts?. In F. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 111-156). Charlotte, NC: NCTM, IAP.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston, Va: NCTM.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: IAP.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in design of geometry tasks with Cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 283-317.

Mishra, P., & Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054.

Molenje, L., & Doerr, H. (2006). High school mathematics teachers' use of multiple representations when teaching functions in graphing calculator environments. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of NA-PME*. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Niess, M. et al. (2009). Mathematics teacher TPACK standards and development model. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 9(1), 4-24.

Penglase, M. & Arnold, S. (1996). The graphics calculator in mathematics education: a critical review of recent research. *Mathematics Education Research Journal*, 8(1), 58-90.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Eds.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Rocha, H. (2010). Ensinar Matemática com a tecnologia: uma nova conceptualização do conhecimento e das etapas subjacentes ao seu desenvolvimento. In *Actas I Enconto Internacional TIC e Educação* (pp. 121-126). Lisboa: IE-UL.

Schmidt, D. et al. (2009). TPACK: The development and validation of an assessment instrument for preservice teacher. *Journal of Research on Technology in Education*, 42(2), 123-149.

Stein, M., Grover, B., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: an analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455-488.

White, A. (2009). Graphics calculator in the secondary mathematics classroom, pedagogical tool or just a gadget?. In *Proceedings of the Conference Redesigning pedagogy: research, policy, practice*. Singapore: National Institute of Education.

Um ciclo de IBD sobre o desenvolvimento do raciocínio matemático: uma unidade de ensino sobre sequências no 8.º ano

Joana Mata Pereira[1], *João Pedro da Ponte*[2]
[1]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, *joanamatapereira@campus.ul.pt*
[2]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, *jpponte@ie.ulisboa.pt*

Resumo. *O modo como professor pode promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos é uma questão complexa e pouco estudado em Didática da Matemática. Por isso, torna-se pertinente criar, experimentar e avaliar situações de trabalho em sala de aula que contribuam para tal desenvolvimento. O estudo apresentado nesta comunicação, referente ao primeiro ciclo de intervenção de uma investigação baseada em design (IBD), tem por objetivo contribuir para o conhecimento sobre os modos de promover o raciocínio matemático em sala de aula, em tópicos algébricos, refinando uma conjetura quanto aos princípios para apoiar o desenvolvimento do raciocínio matemático em sala de aula. Esta intervenção corresponde a uma unidade de ensino sobre Sequências realizada numa turma de 8.º ano. Neste sentido, são definidos os princípios de design referentes aos modos de trabalho em sala de aula, às tarefas a propor e às ações do professor que visam desenvolver o raciocínio matemático dos alunos. A análise de dados tem por base estes princípios de design e centra-se essencialmente nas ações do professor de convidar, guiar, sugerir e desafiar e nos processos de raciocínio matemático de generalizar e justificar. Os resultados mostram que os princípios de design contribuem para que os processos de raciocínio dos alunos se evidenciem nos momentos de discussão coletiva de tarefas de natureza exploratória.*

Palavras-chave: *raciocínio matemático; ações do professor; investigação baseada em design; sequências.*

Abstract. *The ways in which a teacher can enhance the development of students' mathematical reasoning is a complex issue and little researched in mathematics education. Thus, it is relevant to create, carry out and assess situations in the classroom that contribute to such development. The study presented in this paper, regarding the first intervention cycle of a design-based research (DBR), aims to contribute to the body of knowledge about ways to promote students' mathematical reasoning in the classroom, in algebraic topics, by refining a conjecture about the principles to support students' development of mathematical reasoning in the classroom. This intervention is a teaching unit on sequences in a grade 8 class.. In this sense, design principles are defined regarding learning environment, the tasks proposed and the teacher's actions aiming to develop students' mathematical reasoning. Data analysis is based on these design principles and focuses mainly on the teacher's actions of inviting, guiding, suggesting and challenging and on the mathematical reasoning processes of generalizing and justifying. The results show that the design principles* *contribute to the students' reasoning processes to emerge in moments of whole class discussion of exploratory tasks.*

Keywords: *mathematical reasoning; teacher actions; design-based research; sequences.*

Introdução

Desenvolver o raciocínio matemático dos alunos é, sem dúvida, um dos grandes objetivos da Matemática escolar. Contudo, é reduzida a informação e a investigação sobre os modos como o professor pode contribuir para promover o raciocínio matemático dos seus alunos (Brodie, 2010). Para isso, um elemento fundamental é o conhecimento sobre o próprio raciocínio matemático e sobre os processos de raciocínio dos alunos. Contudo, este conhecimento, ainda que fundamental, é insuficiente para o professor. Por um lado, é necessário analisar quais as tarefas apropriadas ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Por outro lado, é imprescindível considerar a própria prática profissional do professor, nomeadamente quais as suas ações que mais se coadunam ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Atendendo à escassa investigação nesta área, este trabalho insere-se num estudo mais amplo cujo objetivo é criar intervenções que visam promover o raciocínio matemático dos alunos, tendo em vista construir uma teoria local sobre o desenvolvimento do raciocínio matemático em tópicos algébricos. A opção pelos tópicos algébricos centra-se no papel da Álgebra na Matemática escolar e na sua estreita relação com o raciocínio. Atualmente, a Álgebra é um dos pontos fortes da Matemática escolar, ainda que muitas vezes seja vista sobretudo como uma fonte de dificuldades e fracassos dos alunos (Kilpatrick & Izsák, 2008). Este papel de destaque da Álgebra advém de um entendimento deste tema como forma de pensamento matemático (ME, 2007) que permite a sua integração noutros temas como a Aritmética ou a Geometria (Kilpatrick & Izsák, 2008).

Seguindo uma modalidade de investigação baseada em design (IBD) (*design based research*) (Cobb et al., 2003), este artigo apresenta o primeiro ciclo de intervenção numa unidade de ensino sobre Sequências no 8.º ano. Este primeiro ciclo tem por principal objetivo contribuir para a referida teoria local através da análise das ações do professor e suas implicações no raciocínio matemático dos alunos.

Desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos

Raciocínio matemático

Um dos pontos fundamentais para promover o raciocínio matemático dos alunos é a compreensão do que se entende por raciocinar matematicamente e de quais os processos de raciocínio a desenvolver. Numa conceção abrangente, raciocinar matematicamente consiste em fazer inferências matemáticas justificadas (e.g., Aliseda, 2003; Pólya, 1945; Rivera & Becker, 2009), ou seja, utilizar informação já conhecida para obter nova informação. Pela sua abrangência, esta definição acomoda raciocínio matemático de natureza dedutiva, indutiva e abdutiva. Assim, raciocinar matematicamente não se limita ao raciocínio lógico, mas inclui também processos intuitivos, a formulação de novas ideias e a obtenção e validação de conclusões. Nesta mesma perspetiva, os processos de raciocínio incluem a formulação de questões, a formulação e teste de conjeturas (nomeadamente, generalizações) e a justificação. Destes, a formulação de generalizações e a justificação destacam-se como processos de raciocínio fundamentais. Por um lado, a Matemática pretende fazer afirmações gerais sobre propriedades, conceitos e procedimentos que se pretendem válidos para um conjunto alargado de objetos ou condições matemáticas e, por outro, espera-se que seja possível justificar e validar tais afirmações.

Tarefas

No ensino da Matemática, em especial para promover o raciocínio matemático, as tarefas a propor são um aspeto central a considerar. Particularmente importante é a natureza das tarefas e o seu nível de exigência cognitiva. Quanto à natureza das tarefas, vários estudos identificam os problemas e as tarefas de exploração e investigação como potenciadoras do desenvolvimento do raciocínio matemático (e.g., Francisco & Maher, 2011; Henriques, 2010). Henriques (2010), na sua investigação com alunos do ensino superior, destaca particularmente as potencialidades das tarefas de exploração e investigação na aprendizagem dos alunos, não só ao nível dos conceitos e procedimentos, como também no desenvolvimento de capacidades como o raciocínio matemático. Pelo seu lado, Brodie (2010) refere que tarefas que promovam resultados diversos ou representações várias, que tendam a gerar desacordos e desafios ou que deem aos alunos "oportunidades de investigar, analisar, explicar, conjeturar e justificar" (p. 47) são também propensas ao desenvolvimento do raciocínio matemático.

Quanto ao nível de exigência cognitiva das tarefas a propor aos alunos, Brodie (2010), refere que não é desejável que todas as tarefas sejam de nível elevado. Assim, é desejável que sejam propostas aos alunos tarefas desafiantes, pois o desafio incita o raciocínio matemático mas é igualmente importante que sejam propostas tarefas com um nível de desafio reduzido, em situações que permitam a consolidação de propriedades e conceitos matemáticos. Contudo, ainda que se possam construir ou propor as mais variadas tarefas aos alunos, estes apresentam muitas vezes dificuldades em responder a tarefas que envolvem o raciocínio matemático por não estarem "habituados a 'explorar' as tarefas tanto quanto [possam]" (Brodie, 2010, p. 55).

Ações do professor

As ações do professor surgem como um aspeto complementar às tarefas a propor, sendo igualmente centrais para promover situações que propiciem o raciocínio matemático dos alunos. No entanto, "seria desonesto fingir que as abordagens de ensino [que promovem o raciocínio matemático] são fáceis ou bem compreendidas" (Boaler, 2010, p. v).

Uma das ações do professor fundamental para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos é o questionamento. De acordo com o NCTM (2009), o professor deve resistir ao impulso de dar indicações para a resolução de tarefas e problemas, tentando suportar o seu raciocínio e o seu trabalho. Se o professor apresenta demasiadas indicações aos alunos e não os desafia, a resolução da tarefa é simplificada e deixa de apoiar o raciocínio (Brodie, 2010). Contudo, o professor também não deve deixar os alunos a trabalhar em grupo sem qualquer mediação pois esta situação "não traz necessariamente apoio suficiente para desenvolver o seu raciocínio" (p. 20). Assim, Bell (2011) destaca que o professor deve incentivar os alunos a dar sentido a justificações, pedir justificações alternativas, salientar o que valida uma justificação e enfatizar a explicação do "porquê".

Para além do questionamento, o professor pode ainda empreender outras ações tendo em vista a aprendizagem e a partilha e compreensão de processos de raciocínio. Brodie (2010) refere que os alunos devem ouvir os colegas e construir sobre as ideias dos outros, desafiando tanto os colegas como o professor, que deve igualmente justificar as suas ideias. A autora salienta também que o professor deve encorajar os alunos a partilhar as suas ideias e várias versões do seu raciocínio. Wood (1999) destaca ainda que o professor deve criar e explorar situações de desacordo entre os alunos, pelas potencialidades destas situações no desenvolvimento da capacidade de argumentação e, consequentemente, do raciocínio matemático. É também importante que, por um lado, se aceitem, valorizem e integrem as contribuições incorretas ou parciais dos alunos e, por outro lado, se alarguem e explorem as suas contribuições corretas (Brodie, 2010).

Durante a discussão sobre as tarefas propostas devem ainda ser consideradas ações do professor particularmente direcionadas para os processos de raciocínio. De acordo com Galbrait (1995), os professores têm, tipicamente, dificuldades em ensinar processos de raciocínio mais formais, nomeadamente a demonstração. Uma das abordagens que pode ser estruturante na aprendizagem de processos de raciocínio próximos da demonstração é a justificação como atividade coletiva promovida no âmbito da discussão das tarefas propostas pelo professor, onde os alunos têm "oportunidades para partilhar, debater e clarificar [o seu raciocínio] " (p. 416). Além de moderar a discussão e sempre que se mostre pertinente, o professor deve enfatizar as características de uma justificação para esta ser considerada válida. Neste sentido, é importante que as tarefas propostas que levam a esta ação por parte do professor incluam justificações baseadas em raciocínios indutivos. Coffland (2012) indica que esta ação, ainda que possa não ser suficiente para eliminar todos os vestígios de raciocínios indutivos erradamente justificados, pode proporcionar alguma da experiência necessária para desenvolver justificações apropriadas.

Metodologia de investigação

Opções metodológicas e participantes

Tendo por objetivo a construção de uma teoria local sobre a promoção do raciocínio matemático em sala de aula, o estudo alargado onde se insere este trabalho segue uma metodologia de IBD com ciclos de intervenção e revisão (Cobb et al., 2003). Nesta comunicação apresentamos o 1.º ciclo desta IBD. Optar por uma IBD permite introduzir alterações às práticas em sala de aula que advêm de combinar e recombinar elementos da investigação no sentido de promover uma abordagem útil e efetiva no contexto específico em que a investigação se desenvolve (Wood & Berry, 2003).

A intervenção é realizada numa turma de 8.º ano de uma professora com 13 anos de serviço, convidada pela sua experiência e constante investimento em melhorar a sua prática profissional. A turma tem 30 alunos, sendo que 2 estão em situação de abandono escolar. De acordo com a professora, dos 28 alunos que frequentam as aulas de

Matemática, 7 têm muito bom desempenho na disciplina, 8 têm algumas dificuldades e 13 têm um desempenho regular. Na turma existe um ambiente de trabalho muito produtivo, ainda que a professora refira que existe uma disparidade entre o trabalho desenvolvido pelos alunos com bom desempenho e pelos alunos com mais dificuldades. As aulas são lecionadas pela professora, sendo o papel da primeira autora o de observadora não participante. A recolha de dados neste ciclo de investigação inclui reuniões com a professora da turma, observações em sala de aula e entrevistas a alunos. Todos os momentos são vídeo e áudio gravados e complementados com registos em diário de bordo. São ainda recolhidas as produções escritas dos alunos. A utilização destes processos de recolha de dados visa reconhecer e fundamentar as ações da professora em sala de aula, bem como atentar aos processos de raciocínio matemático dos alunos.

Princípios de design e conjetura da IBD

Um dos pontos centrais na IBD é a definição dos princípios de design subjacentes a cada intervenção. Considerando o objetivo de estudo e o seu foco nas ações do professor de Matemática, parte destes princípios referem-se a este aspeto da prática profissional. Os restantes princípios de design dizem respeito a outros aspetos centrais como as tarefas a propor aos alunos e os diferentes momentos na aula.

Atendendo à discussão realizada no quadro teórico acima apresentado, os princípios gerais de design definidos para as tarefas são quatro: **a)** assumir uma natureza diversa, com enfâse em tarefas que incluam questões exploratórias e/ou problemas, **b)** incluir questões que incitem a formulação de generalizações, **c)** incluir questões que solicitem a justificação de respostas ou processos de resolução, e **d)** incluir questões com diferentes graus de desafio. Quanto aos momentos da aula, pretende-se uma sala de aula marcada pelo ensino exploratório, com momentos de introdução da tarefa, de trabalho autónomo acompanhado pelo professor e momentos de discussão coletiva e síntese. De entre estes momentos, são de destacar os de discussão coletiva, que surgem como potencialmente favoráveis à aprendizagem (Ponte, 2005) e, consequentemente, ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

O design considera os seguintes princípios gerais para as ações do professor, que advêm igualmente do quadro teórico apresentado: **i)** acompanhar a resolução da tarefa dando apenas as indicações necessárias, com o intuito de não reduzir de modo significativo o desafio da tarefa, **ii)** solicitar a explicação do "porquê" e justificações alternativas tanto durante a resolução da tarefa como nos momentos de discussão coletiva, **iii)** destacar ou solicitar aos alunos que identifiquem justificações válidas e inválidas, enfatizando o que as valida, **iv)** propor demonstrações sempre que estas forem pertinentes e adequadas aos conhecimentos dos alunos, **v)** encorajar a partilha de ideias nos momentos de discussão coletiva, **vi)** aceitar e valorizar contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique, e **vii)** desafiar os alunos a ir além da tarefa, quer pela formulação de novas questões quer pela formulação de generalizações.

Assim, pretende-se neste primeiro ciclo da IBD testar a seguinte conjetura: Uma intervenção baseada nos princípios de design enunciados contribui para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos em sala de aula.

Primeiro ciclo de intervenção

O primeiro ciclo de intervenção é realizado no ano letivo 2012/13 numa unidade de ensino sobre Sequências, na referida turma de 8.º ano. Atendendo a que este tópico já havia sido abordado no 7.º ano, esta unidade de ensino decorre em três aulas de 90 minutos. Não havendo continuidade pedagógica face ao ano anterior, a unidade de ensino inicia-se com uma tarefa que a professora refere como sendo "em simultâneo de introdução, mas também para mim [professora] de diagnóstico, porque eu não fui professora [da turma no ano anterior]" (Reunião inicial). Além desta tarefa inicial, são propostas três tarefas, todas elaboradas e/ou adaptadas atendendo aos princípios de design definidos e às características particulares da turma. Na sua grande maioria, as questões das tarefas são adaptadas de tarefas já existentes, provenientes de investigação sobre Sequências. Estas tarefas são propostas pelos autores desta comunicação, discutidas com a professora da turma e ajustadas quando necessário. Definidas as tarefas e os objetivos de cada questão, são discutidos os objetivos dos momentos de discussão coletiva, bem como as ações esperadas por parte da professora.

Processo de análise de dados

Nesta comunicação analisamos momentos de discussão coletiva de duas das tarefas da intervenção. Estes momentos de discussão coletiva são ilustrativos tanto das tarefas propostas na unidade como das ações da professora. Assim, a análise de dados destes momentos pretende ser representativa do ciclo de intervenção, apresentando os modos como as tarefas propostas e as ações do professor podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Além de se sustentar nos princípios de design desta IBD, a análise, realizada com apoio do software Nvivo, considera dois quadros conceptuais distintos tendo em atenção o objetivo da investigação: o raciocínio matemático e as ações do professor. O quadro conceptual considerado para a análise do raciocínio relaciona os raciocínios indutivo e abdutivo sobretudo com a formulação de conjeturas e o raciocínio dedutivo essencialmente com o teste e a justificação (Figura 1). O raciocínio matemático, correspondendo à zona central da Figura 1, apoia-se nas representações e articula-se com os processos de representação e significação (*sense making*).

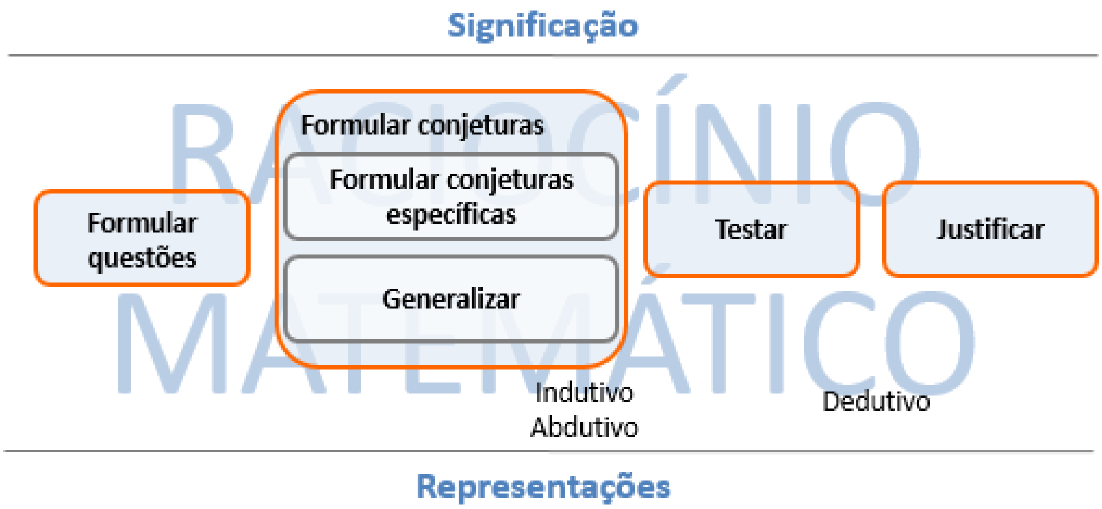


Figura 1. Quadro conceptual para o estudo do raciocínio matemático (adaptado de Mata-Pereira & Ponte, 2011).

Quanto à análise das ações do professor, utilizamos o modelo de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) para as ações relacionadas com os processos matemáticos, nomeadamente, ações de convidar, informar/sugerir, apoiar/guiar e desafiar. As ações de convidar dão início à discussão coletiva ou a um segmento desta discussão, com o professor a incentivar os alunos a participar e a partilhar as suas resoluções. No decorrer da discussão o professor recorre essencialmente aos outros três tipos de ações. Nas ações de informar/sugerir o professor disponibiliza informação aos alunos ou valida as suas afirmações, enquanto nas ações de apoiar/guiar conduz os alunos a apresentar informação. Já nas ações de desafiar, incentiva os alunos a ir além do seu conhecimento prévio. Este modelo relaciona ainda as ações do professor na condução de discussões coletivas com os processos matemáticos envolvidos (Figura 2).

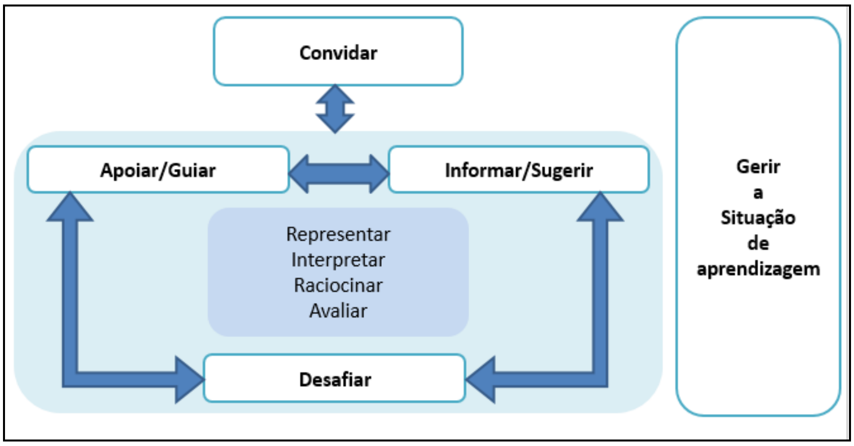


Figura 2. Modelo para analisar as ações do professor (adaptado de Ponte, Mata-Pereira, & Quaresma, 2013).

Tarefa de introdução

A tarefa proposta para a introdução da unidade de ensino sobre Sequências é apresentada na Figura 3. Esta tarefa, de natureza exploratória (princípio a), inclui questões de nível de desafio reduzido, como a questão 1.1, e questões de nível de desafio mais elevado, como a questão 1.5 (princípio d). Esta última questão, ao solicitar o termo geral da sequência, incita a formulação de uma generalização (princípio b). Algumas questões solicitam ainda explicações ou justificações (princípio c).

1. Observa a seguinte sequência de figuras formadas por pontos.

Fig. 1 **Fig. 2** **Fig. 3**

1.1. Indica o número total de pontos da figura 4.

1.2. Sem desenhar a figura, indica o número total de pontos da figura 8. Explica como obtiveste a tua resposta.

1.3. Existirá alguma figura com 86 pontos? Justifica a tua resposta.

1.4. Qual o número da figura com 65 pontos? Explica como chegaste à tua resposta.

1.5. Escreve a expressão algébrica que representa o número de pontos da figura n.

Figura 3. Tarefa de introdução proposta aos alunos.

A tarefa é proposta aos alunos e estes trabalham autonomamente, seguindo-se um momento de discussão coletiva. Neste momento de discussão, a professora começa por *convidar* os alunos a partilhar as suas respostas, alertando para a possibilidade de poderem existir diversas estratégias de resolução.

No segmento da discussão referente à questão 1.3, a professora torna a *convidar* os alunos a participar, selecionando o par Duarte e Marisa:

> *Duarte:* Nós fizemos 86, que é o número de pontos . . . A dividir por 4, menos 1.
> *Professora:* Assim [escreve no quadro $\frac{86-1}{4}$]? Só fala o Duarte.
> *Duarte:* Foi. 86 menos 1 a dividir por 4.

A diferença entre o que Duarte apresenta e o que a professora escreve é discutida com a turma e, resolvida a situação, a professora retoma a estratégia do aluno:

> Professora: Duarte, perdi-me, explica-me.
> . . .
> Duarte: Então, é o número de pontos que é 86 . . . Depois subtraímos 1 que é o ponto do meio . . . E depois a dividir por 4 que é o que vai sempre aumentando.
> Professora: Este 4 é sempre o que vão aumentando?
> Duarte: Não, é o número de lados.
> Professora: Ah, o número de lados. Quanto é que deu Duarte?
> Duarte: 21,25.

Atendendo a que Duarte dá a sua resposta por concluída, a professora questiona-o para que interprete a expressão que apresentou e posteriormente *guia* o aluno na identificação de um erro dessa mesma interpretação, acompanhando a resolução apresentada dando apenas as indicações necessárias (princípio i).

Perante a resposta de Duarte, a professora continua a *apoiar* a sua intervenção, pedindo-lhe uma interpretação do valor obtido e levando-o a *justificar* essa interpretação (princípio ii):

> Professora: E a minha pergunta para ti é, o que é que tu e a Marisa concluíram?
> Duarte: Que não existe nenhuma.
> Professora: Porquê?
> Duarte: Porque o número da figura [ordem] é sempre um número inteiro.
> Professora: Número inteiro. Este número não é inteiro.

A professora dá a intervenção de Duarte por terminada ao *informar* a turma de que o valor que o aluno obteve não é um número inteiro, interpretando e validando a sua resposta (princípio iii).

Depois de apresentada uma nova estratégia de outros alunos, a professora avança para a discussão da questão 1.4, onde um par de alunos apresenta e justifica a sua resolução, com o seu apoio. Joaquim tenta retomar a questão 1.3, o que é aceite pela professora (princípio v):

> Joaquim: Na 1.3 nós chegámos à conclusão que não era, mas com outra resolução.
> Professora: Então diz.
> Joaquim: Nós fizemos… Nós justificámos que não era múltiplo de 4.
> Professora: Agora, daí a importância da discussão, pergunta para a turma: O Joaquim e o Guilherme disseram assim 86 não faz parte da sequência porque não é múltiplo de 4. E agora vou fazer uma pergunta a um par que ainda não ouvi, que é a Bianca e a Ana. Pergunta para vocês: Se este argumento serve ou não para justificar. Uma de vocês que me explique, ou então as duas em coro.

Perante a proposta de resolução de Joaquim, a professora *desafia* os alunos a avaliar a validade desta resolução (princípio iii). Direciona a questão para a turma, mas depois questiona diretamente um par de alunas que ainda não tinha participado:

> Bianca: Se eles dissessem que 85 não era múltiplo de 4 podiam fazer isso, mas… Porque, então, tem de ser, para ser múltiplo de 4 nós tiramos 1, que é o ponto central.
> Professora: Sim ou não? Joaquim e Guilherme, perceberam ou não? Não? Ainda não perceberam. Bianca, explica tu.

Bianca indica implicitamente que a resposta dos colegas não é válida e *justifica* a sua opinião. Contudo, a sua justificação não é suficiente para Joaquim e Guilherme compreenderem que a resposta é inválida. Perante esta situação, a professora opta por *desafiar* Bianca a reformular a sua justificação (princípio vii):

> Bianca: O número de pontos é 86, só que nós queremos tirar primeiro o ponto central, só depois é que podemos dividir por 4.
> Professora: Porque é que só depois é que podemos dividir por 4?
> Bianca: Porque se fizéssemos 86 a dividir por 4 menos 1 era aquilo que eles estavam a dizer que não dá certo.
> Professora: Sim ou não, Guilherme?
> Guilherme: Acho que sim, porque o do meio nunca… Era como se estivéssemos a cortar o do meio.
> Professora: Aqui era como se estivessem a cortar o do meio . . . A soma destes 4 braços é que é múltiplo de 4, não é a soma dos 4 braços com o ponto central.

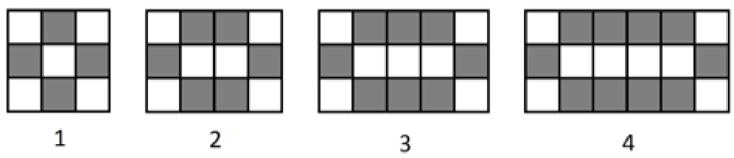
Apesar da validade da afirmação de Bianca, a professora *desafia* novamente a aluna a justificar parte dessa afirmação (princípio ii). Neste momento, a professora confirma se Guilherme compreendeu a justificação e *informa* a turma da representação destacada pelo aluno.

Nos segmentos da discussão coletiva aqui apresentados, que representam apenas parte da discussão desta tarefa introdutória, as ações da professora ilustram a grande maioria dos princípios de design pretendidos, o que leva à realização de justificações por parte dos alunos. Contudo, e ainda que sejam identificadas justificações válidas e inválidas, nem sempre é destacado o que as valida.

Segunda sequência

Na segunda aula da unidade de ensino é proposta uma tarefa apresentada em parte na Figura 4. Esta tarefa tem uma estrutura muito semelhante à tarefa introdutória, sendo também de natureza exploratória (princípio a), com aumento do nível de desafio ao longo da tarefa (princípio d). A última questão aqui apresentada incita a formulação de generalizações (princípio b). A questão 1.2 solicita ainda uma explicação da resposta obtida (princípio c).

1. A Sara construiu uma sequência de figuras utilizando pequenos azulejos brancos e cinzentos, dispostos do seguinte modo:



1.1. Indica o número total de quadrados da figura 5.

1.2. Quantos azulejos, no total, tem a 20ª figura? Explica a tua resposta.

1.3. Ajuda a Sara a completar a tabela que fez para organizar os dados.

Repara que na última linha da tabela deves introduzir expressões algébricas:

Número da figura	Número de azulejos cinzentos	Número de azulejos brancos	Número total de azulejos	
1				
2				
3	8	7	15	
4				
5				
...				
n				←Termo geral

Figura 4. Primeira parte da segunda tarefa proposta aos alunos.

A segunda aula da unidade de ensino tem início com uma síntese sobre a terminologia utilizada no tópico Sequências, nomeadamente, o significado de termo e ordem na designação termo de ordem n de uma sequência. Após este momento de síntese a tarefa é apresentada aos alunos e, posteriormente, estes trabalham autonomamente. No início da discussão coletiva desta tarefa, a professora retoma a questão da terminologia, o que gerou ainda alguma discussão, e avança para o *convite* à discussão da tarefa em si (princípio v). Passa então a palavra ao par Bruno e Andreia, e Andreia partilha a resposta à questão 1.1:

> Andreia: Então... Eu encontrei o termo geral dos quadrados cinzentos e dos quadrados brancos.
> Professora: Fizeste logo isso, foi a tua primeira abordagem? . . . Como é que fizeste Andreia? Explica-me.
> Andreia: Dos quadrados cinzentos . . . Eu pus que era 2n mais 2 . . . E dos quadrados brancos é n mais 4.

Ainda que a resposta dada por Andreia vá além do pretendido com a questão, a professora *guia* a aluna para que esta prossiga com a sua explicação (princípios i, v e vii), levando-a a apresentar a *generalização* pretendida com a questão 1.3.

> Professora: [Escreve as expressões referidas por Andreia]. A Andreia foi logo para o termo geral. Explica-me lá Andreia, estas expressões.
> Andreia: Olhei para a figura e vi que por baixo estava . . . Estava 2. Então eu vi que de cima e de baixo era dois também.
> Professora: A Andreia reparou isto. Na ordem 2, se a figura era a figura 2, havia 2 [quadrados] cinzentos aqui [na linha de baixo da figura] e 2 cinzentos aqui [na linha de cima da figura]. Aqui há 2, aqui há 2. Reparem, se a figura for a figura 3, eu tenho 3 [quadrados] cinzentos aqui [na linha de baixo] e 2 [quadrados] cinzentos aqui [na linha de cima].
> . . .
> Andreia: E depois tinha mais 2 de cada lado.
> Professora: 2n mais os 2 das pontas, muito bem. E os brancos?

Perante as expressões apresentadas por Andreia, a professora *desafia* a aluna a apresentar uma *justificação* para os termos gerais (princípio ii). A professora *sugere* ainda uma interpretação do que é referido por Andreia (princípio vi). De modo idêntico, torna a *desafiar* a aluna para *justificar* o termo geral referente aos azulejos brancos, *informando* a turma ao interpretar as justificações de Andreia (princípios ii e vi). No final deste segmento de discussão, com ações de *guiar* por parte da professora (princípio i), a aluna conclui a resolução da questão substituindo corretamente o *n* nas expressões por 5.

Nesta tarefa, tal como na anterior, as ações da professora nos segmentos da discussão coletiva apresentados incluem a grande maioria dos princípios de design pretendidos, o que leva a justificações por parte dos alunos e, por vezes, a generalizações. No entanto, a primeira generalização que emerge da discussão não parece advir das ações da professora durante a discussão coletiva, mas antes da natureza da tarefa, pela sua semelhança com a tarefa introdutória.

Conclusão

Um dos aspetos salientes nos dados apresentados é a diversidade de ações utilizadas para dar resposta aos princípios de design. Ainda que a discussão de cada questão da tarefa seja iniciada por uma ação de convidar por parte da professora, as ações seguintes dependem essencialmente das intervenções dos alunos. Esta análise também sugere que a natureza exploratória das tarefas influencia as ações do professor visto que as questões da tarefa mais complexas tendem a levar a questões orais mais desafiantes por parte do professor. Na sua relação com os princípios de design, os princípios ii e vii encontram-se associados essencialmente a ações de guiar e de desafiar, enquanto os princípios iii e vi maioritariamente em ações de sugerir e de desafiar. Já o princípio i está associado a ações de guiar e o princípio vi predominantemente relacionado com ações de convidar.

Quanto ao raciocínio matemático dos alunos, neste ciclo de intervenção, as justificações que apresentam emergem dos momentos de discussão coletiva, sendo suscitadas por ações de guiar e de desafiar por parte da professora. Já as generalizações, no caso desta unidade de ensino muito associadas ao termo geral da sequência, tendem a surgir na própria realização da tarefa, durante o trabalho autónomo dos alunos e são posteriormente apresentadas e justificadas nos momentos de discussão coletiva.

Desta análise emerge ainda uma reestruturação necessária dos princípios de design. Por um lado, será necessário reestruturar os princípios de design das tarefas para que incitem mais efetivamente à justificação. Por outro lado, parece pertinente robustecer os princípios referentes às ações do professor no sentido de promover a generalização.

Referências

Aliseda, A. (2003). Mahtematical resoning vs. abductive reasoning: A structural approach. *Synthese, 134,* 25-44.

Bell, C. (2011). Proofs without words: A visual application of reasoning and proof. *Mathematics Teacher, 104*(9), 690-695.

Boaler, J. (2010). The road to reasoning. In K. Brodie, *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms* (pp. v-vii). New York, NY: Springer. doi:10.1007/978-0-387-09742-8

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms.* doi:10.1007/978-0-387-09742-8

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Coffland, D. A. (2012). Closing in on proof. *Mathematics Teaching in the Middle School, 17*(8), 494-500.

Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2011). Teachers attending to students' mathematical reasoning: lessons from an after-school research program. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(1)*,* 49-66. doi:10.1007/s10857-010-9144-x

Galbrait, P. (1995). Mathematics as reasoning. *The Mathematics Teacher, 88*(5), 412-417.

Henriques, A. C. (2010). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Obtido de http://hdl.handle.net/10451/ 2465

Kilpatrick, J., & Izsák, A. (2008). A history of algebra in the school curriculum. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth yearbook* (pp. 3-18). Reston, VA: NCTM.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2011). Raciocínio matemático em contexto algébrico: Uma análise com alunos de 9.º ano. *Atas do EIEM, Póvoa de Varzim,* 347-364. Obtido de http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2011/2011_17_JMPereira.pdf

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

NCTM (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making.* Reston, VA: Autor.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics* (Vol. I). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, 22*(2), 55-81.

Rivera, F., & Becker, J. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teacher in the Middle School, 15*(4), 213-221.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 171-191.

Wood, T., & Berry, B. (2003). What does "design research" offer mathematics teacher education? *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*, 195-199.

Formação continuada em ambientes de geometria dinâmica e seu impacto em sala de aula

Maria Teresa Zampieri[1,2], *Sueli Liberatti Javaroni*[2]*Jaime Carvalho e Silva*[3]
[1]Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", *maite.zampieri@gmail.com*
[2]Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", *suelilj@fc.unesp.br*
[3]Universidade de Coimbra, *jaimecs@mat.uc.pt*

Resumo. *Nesse trabalho, temos o objetivo de discutir um recorte de dados proveniente de uma pesquisa de doutorado de cunho qualitativo, que está em desenvolvimento. Discutimos aqui um curso de formação continuada que explorou um ambiente de geometria dinâmica (GeoGebra) e analisamos em detalhe uma atividade sobre pontos notáveis no triângulo. Constatamos que houve compartilhamento de ideias, críticas e sugestões, que estão claramente vinculados à prática pedagógica de cada professor, e que ao socializarem isso entre os demais professores e também conosco, enquanto equipe proponente, ampliaram a reflexão para além de seus próprios contextos, possibilitando assim mudanças em suas respectivas salas de aula.*

Palavras-chave: *desenvolvimento profissional; prática pedagógica; pontos notáveis no triângulo; geometria dinâmica.*

Abstract. *In this work, we aim to discuss a data cut from a qualitative nature doctoral research, which is under development. We discuss here an in service professional development course, which explored a dynamical geometry environment (GeoGebra) and analysed in detail an activity of notable points in the triangle. We found that there was sharing of ideas, criticisms and suggestions, which are clearly linked to the teaching practice of each teacher, and to socialize it among the other teachers and also with us, while proposing team, they expanded the reflection beyond their own contexts, thus enabling changes in their respective classrooms.*

Keywords: *professional development; teaching practice; notable points in the triangle; dynamical geometry.*

Introdução

Neste trabalho temos o propósito de apresentar as características e consequências de um curso de formação continuada construído usando o software de geometria dinâmica GeoGebra[1]. Analisamos em detalhe as reflexões emergentes em um debate entre professores após eles terem realizado uma atividade sobre Pontos Notáveis no triângulo. Essas reflexões apontam críticas e adaptações que os professores teceram, tendo em mente os seus respectivos contextos de trabalho. Veremos que consequências para a sala de aula tiveram as atividades trabalhadas no curso, em função das características do próprio curso.

Os dados que aqui discutimos foram produzidos em um curso de formação continuada ofertado a professores de Matemática que atuam na rede estadual pública na cidade de Bauru, estado de São Paulo, Brasil. Esse curso compõe o cenário da pesquisa de doutoramento da primeira autora desse artigo.

Esta pesquisa de doutoramento mencionada é parte integrante de um projeto de pesquisa de maior envergadura que vem sendo realizado no Estado de São Paulo, o *Mapeamento do uso das tecnologias de informação nas aulas de Matemática do Estado de São Paulo*[2]. O projeto atua em distintas cidades no referido estado, sendo Bauru uma delas, e conta com colaboradores de distintos setores: professores universitários, bolsistas de iniciação científica, mestrado e doutorado, e professores da rede pública do estado de São Paulo, Brasil.

O curso de que nos referimos nesse artigo foi a primeira iniciativa de ação de formação realizada dentro do projeto Mapeamento[3], e foi fruto de uma parceria da UNESP, campus Bauru, com a Diretoria de Ensino também dessa cidade. O propósito de tal curso foi de propiciar aos professores momentos de reflexão coletiva acerca de atividades matemáticas com GeoGebra, para que avaliassem as abordagens propostas, e as adequassem buscando atender aos seus respectivos contextos de trabalho (Zampieri, 2014).

Um desses momentos de reflexão, o qual apresentamos e discutimos nesse trabalho, consiste na exploração e investigação de uma atividade sobre pontos notáveis de triângulos. Nesse momento, os professores teceram suas críticas a essas atividades, bem como sugeriram outras abordagens para atender aos propósitos de aprendizagem que almejavam atingir com seus estudantes.

A dinâmica do curso de formação continuada

O curso intitulado *Currículo no ensino fundamental II e atividades matemáticas com softwares: articulações possíveis* começou a ser planejado no início do primeiro semestre letivo de 2014. Nesse planejamento, os colaboradores do projeto Mapeamento se reuniam semanalmente para discutir textos referentes à formação continuada, com a finalidade de escolher o aporte teórico que mais se adequasse com os nossos propósitos em relação à dinâmica do curso, ou seja, que ela fosse flexível o bastante para atender a demanda trazida pelos professores, em relação às dificuldades de aprendizagem em suas salas de aula, detectadas a partir de suas vivências.

Dentre tais textos, nos embasamos em três, pois convergiam com nossos propósitos. O primeiro se refere à noção de colaboração, que segundo Gama e Fiorentini (2009) emerge depois de certo tempo entre os participantes de um determinado grupo, para que passem a estabelecer vínculos uns com os outros e adquiram confiança mútua. Assim, quando se tornam participantes colaborativos, eles passam a trabalhar juntos, tanto para atingir o objetivo geral de tal grupo, quanto para atingir os objetivos individuais de cada um (Gama & Fiorentini, 2009). Além disso, pensando no sentimento dos professores acerca da necessidade de mudanças, decorrentes da inserção das tecnologias digitais em seus cotidianos, assim como Souto (2013), defendemos "uma nova forma de trabalho [na área de formação continuada de professores de Matemática] que se caracteriza por ações colaborativas, o que exige minimamente, uma mudança de postura, que coloca a individualidade em um segundo plano" (Souto, 2013, p. 26)

Já no que diz respeito às tecnologias digitais, Rosa, Pazuch e Vanini (2012) defendem a noção de Cyberformação como sendo uma concepção de formação de professores de Matemática voltada para esse uso. Embora os autores se refiram, na maioria das vezes, a formação a distância por meio de ambientes virtuais de aprendizagem, nos baseamos em algumas ideias para planejarmos a dinâmica do curso. Por exemplo, assim como os autores, consideramos a formação de professores como algo inconclusivo.

Outro aspecto que estamos em concordância com eles é em relação ao tipo de uso das tecnologias digitais. Os autores defendem uma perspectiva em que as tecnologias digitais são utilizadas para potencializar a aprendizagem acerca de conteúdos matemáticos. Para os autores, é importante que o uso não seja "mecânico, técnico, como se os recursos tecnológicos utilizados fossem auxiliares ao ensino e à aprendizagem; mas, considera as TIC e/ou Tecnologias Digitais como meios que participam ou devem participar efetivamente da produção do conhecimento matemático" (Rosa, Pazuch & Vanini, 2012, p. 91).

Assim, a dinâmica do curso foi constituída a partir dessas três perspectivas teóricas, tendo o propósito de criar um ambiente colaborativo em que os professores pudessem realizar as atividades matemáticas propostas com o software GeoGebra, analisá-las em pares e depois em um debate com os demais presentes, e, finalmente, sugerir adaptações que possibilitassem a produção de conhecimento matemático de seus alunos. Os professores foram convidados a participar do curso pela professora coordenadora do núcleo pedagógico da área de Matemática daquela Diretoria de Ensino, que por sua vez também é colaboradora do projeto Mapeamento. Sendo assim, os 23 professores que participaram fizeram isso de maneira voluntária, com o intuito de estudar o GeoGebra e, possivelmente, integrá-lo às suas aulas nos laboratórios de informática de suas respectivas escolas, os quais são regidos pelo programa governamental *Acessa Escola*[4].

O curso contou então com uma carga horária de 40 horas, sendo 32 realizadas em 8 encontros presenciais, e 8 horas realizadas em 2 encontros a distância, no Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) Moodle. A equipe proponente foi composta pela primeira e pela segunda autoras desse artigo, e contou também com o suporte de duas alunas de iniciação científica e da professora coordenadora a que já nos referimos. Todas que atuaram na equipe proponente são colaboradoras do projeto Mapeamento.

Nos encontros presenciais do curso, realizávamos e discutíamos por volta de quatro atividades. Após a realização de cada uma, sentávamos em círculo e debatíamos se a abordagem da atividade estava adequada ao objetivo que visava cumprir, refletíamos acerca de adaptações/transformações nas abordagens para que contemplassem os contextos distintos de trabalhos dos professores, bem como sobre as potencialidades e limitações do GeoGebra dentro da abordagem proposta.

A pesquisa de doutoramento da qual estes dados fazem parte está sendo desenvolvida segundo a metodologia qualitativa, assim como as demais pesquisas vinculadas ao projeto Mapeamento, pois todas estão interessadas em aspectos subjetivos em relação ao uso das tecnologias digitais nas aulas de Matemática. O que diferencia cada uma dessas pesquisas, segundo Javaroni e Zampieri (2015), é o fio condutor tecido, “pois mesmo com um tema convergente, os aportes teóricos e os cenários de pesquisa são distintos, bem como o raciocínio articulador de cada pesquisador colaborador, que carrega em si sua própria subjetividade” (Javaroni & Zampieri, 2015, p.1005).

Para a obtenção e análise dos dados, foi realizada uma triangulação, que é a combinação de diversos procedimentos metodológicos. A triangulação propicia o aumento da confiabilidade da pesquisa, bem como das possibilidades de compreensão do fenômeno estudado. Para Denzin e Lincoln (2000, p. 5), a combinação de diferentes procedimentos, "diversos materiais empíricos e participação de vários investigadores em um só estudo deve ser vista como uma estratégia para acrescentar rigor, amplitude, complexidade, riqueza e profundidade a qualquer investigação".

Assim, os procedimentos metodológicos utilizados foram: videogravação, diário de campo e aplicação de questionários. Ao longo do trabalho de campo contamos com apoio de todos da equipe proponente, no que tange à realização desse procedimentos, para garantir o rigor da pesquisa. Os dados que discutimos aqui neste artigo, especificamente, serão entrelaçados com a noção de desenvolvimento profissional de Arcavi e Schoenfeld (2010) e com a ideia de reorganização do pensamento de Paulo e Firme (2014).

O desenvolvimento profissional e a busca por mudanças

Para Arcavi e Schoenfeld (2010), os programas para o desenvolvimento profissional do professor deveriam articular, de modo significativo, reflexão, discussões sobre metas, conhecimento e convicções dentro e ao redor da prática. Assim, nessa perspectiva, desenvolvimento profissional significa crescimento e mudança. No entanto, para eles, tais mudanças não se referem apenas ao domínio de um conhecimento novo ou alguma técnica, mas sim à adoção de "novos instrumentos para examinar (reexaminar) as próprias práticas [...]. Isso pode conduzir a mudanças nas práticas ou a uma consciente e fundamentada aderência às práticas antigas" (Arcavi & Schoenfeld, 2010, p. 93).

Já em relação à integração das tecnologias digitais nas aulas de Matemática, Paulo e Firme (2014, p. 600) consideram que a reorganização do pensamento pode acontecer segundo duas possibilidades de análise: uma que é referente à própria aprendizagem matemática sendo potencializada e a outra que "exige do professor nova forma de entender a ação de ensinar matemática, de ver a possibilidade dos alunos aprenderem e de ver o próprio ambiente de sala de aula".

Assim, ao trabalharem com as tecnologias digitais, em particular com softwares de Geometria Dinâmica, os professores tem a possibilidade de estudar esses novos instrumentos, assim como orientam Arcavi e Schoenfeld (2010), para reexaminar suas práticas. E ao mesmo tempo, reorganizam seus pensamento de acordo com a segunda possibilidade de análise de Paulo e Firme (2014), ao vislumbrarem a aprendizagem matemática em seus respectivos contextos de trabalho.

Ambientes de Geometria Dinâmica

No contexto desse curso de formação continuada, foco desse artigo, propusemos aos professores que realizassem e avaliassem atividades matemáticas com GeoGebra, para que examinassem (ou reexaminassem, no caso daqueles que já conheciam o software) as suas próprias práticas, e que, a partir disso, tomassem a decisão consciente de desenvolver ou não tais atividades em suas aulas.

Sobre a escolha para trabalhar com o software GeoGebra, além de termos recebido respostas de uma pesquisa de interesse realizada com os professores, a qual nos revelaram que eles tinham preferência por estudar esse software, defendemos a ideia, assim como Souto (2013), de que o GeoGebra permite o desenvolvimento de abordagens experimentais que favorecem a criação de conjecturas por parte dos alunos, e a consequente validação ou refutação destas.

Por um lado a Geometria, segundo salientam Fujita e Jones (2003), tem uma natureza dual combinando um desenvolvimento teórico de séculos com uma presença permanente no dia a dia de alunos e professores (Fujita & Jones, 2003), o que poderia levar a concluir que fosse uma das áreas de maior sucesso no currículo, interligando a matemática abstrata com aplicações realistas. Por outro lado as dificuldades presentes em seu ensino na generalidade dos países (ver ICMI Study, 1998) motivam muitos educadores a propor o uso de Ambientes de Geometria Dinâmica-AGD.

Os AGD permitem explorações com figuras geométricas que de outro modo seriam inacessíveis ou apenas acessíveis com tremendos esforços e, em consequência, como assinala Osta, são uma das áreas principais em que o curriculum de matemática é impactado pelos desenvolvimentos tecnológicos mais recentes (Osta, 1998).

As muitas investigações efetuadas com os AGD são prometedoras e vão até ao desenvolvimento da capacidade de argumentação, como, por exemplo, na investigação de Fernandes e Viseu (2011) em que se analisa "o contributo de um ambiente de geometria dinâmico para o desenvolvimento da capacidade de argumentação de alunos do 9º ano nas suas atividades de aprendizagem de tópicos de Geometria deste ano de escolaridade" (Fernandes & Viseu, 2011).

Assim, a escolha de uma abordagem com o GeoGebra, fornece um bom ambiente que pode conduzir a mudanças nas práticas.

A análise das implicações da atividade realizada

No oitavo encontro presencial do curso, desenvolvemos duas atividades, e uma delas foi de Geometria, sobre Pontos notáveis no triângulo. O objetivo de tal atividade era que os professores avaliassem se a abordagem estava apropriada para que seus alunos identificassem os pontos notáveis do triângulo e visualizassem algumas de suas propriedades: propriedade do baricentro e propriedade do triângulo equilátero, em que todos os pontos notáveis (incentro, ortocentro, baricentro e circuncentro) coincidem. Utilizamos as seguintes funcionalidades do GeoGebra: **mediatriz, bissetriz, valor booleano, reta perpendicular, entre outros**. O comando **valor booleano** permite exibir ou esconder um objeto. Ele cria uma caixa de diálogo que especifica o objeto que será afetado por tal caixa. Por exemplo, na figura 1, observamos que todas as caixas estão selecionadas, então todos os pontos notáveis estão sendo exibidos. Caso contrário, os pontos não aparecem na construção.

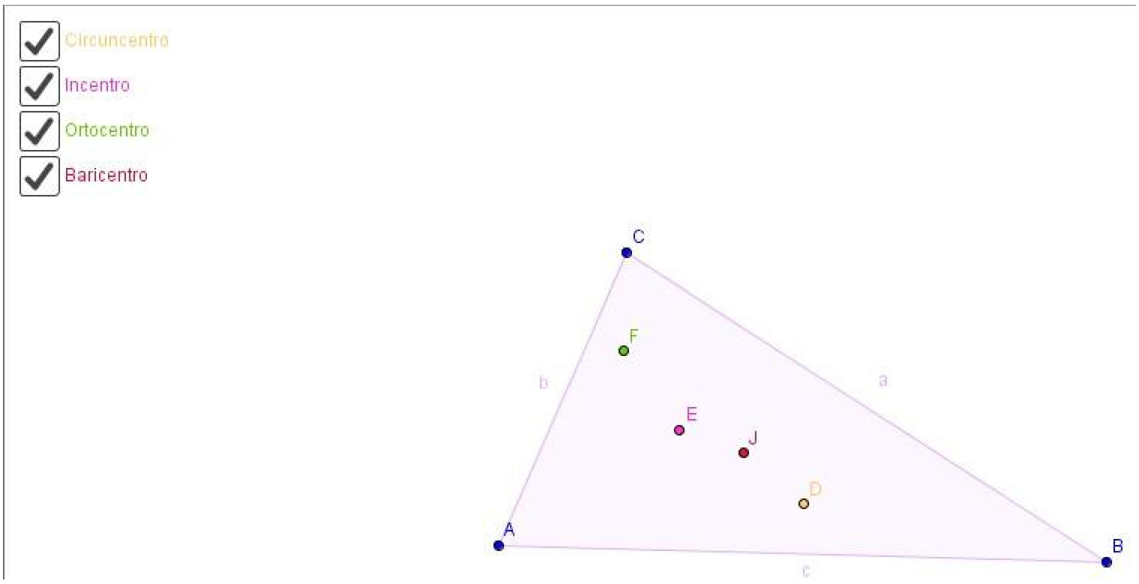


Figura 1. Exemplo do comando booleano

Fonte: dados da pesquisa de doutorado da primeira autora.

No momento em que os professores estavam realizando essa atividade, observamos que alguns reclamaram de dificuldades no roteiro, principalmente por causa do comando booleano, porque não estavam conseguindo vincular as caixas de diálogo com os pontos notáveis. Eles sugeriram que deveriam ter mais detalhes no roteiro, pois a construção envolvia comandos do GeoGebra que eles não tinham utilizado em encontros anteriores.

Paralelamente, evidenciamos que outros professores iam além do que havíamos proposto no roteiro, como foi o caso da professora Laura[5], que criou um comando booleano também para os segmentos e as retas, que representavam as medianas, as alturas, as bissetrizes e as mediatrizes. Cabe destacar que, ao longo dos dez encontros, percebíamos, geralmente, que enquanto exploravam o software dentro de seus grupos, o foco deles estava voltado para a aprendizagem de seus alunos em sala de aula. No entanto, as dificuldades que estavam tendo no processo da construção em relação a essa atividade, particularmente, acabavam atrapalhando esse foco dos professores.

Assim, ao percebermos que muitos estavam tendo dificuldades, resolvemos utilizar o projetor multimídia para realizarmos a construção juntos. Começamos a fazer passo a passo a construção, com a tela projetada na parede. Aqui, tivemos uma iniciativa que foi mais adequada para lidar com as dúvidas, e ainda estimulou os professores a se manifestarem com ideias e sugestões em relação à atividade. Como foi o caso do professor Lucas.

Ele perguntou sobre como colocar as medidas dos segmentos na figura. Mostramos que é com o comando *distância* do GeoGebra, e exemplificamos colocando as medidas das medianas, mostrando suas medidas de cada vértice ao centro e depois do centro até o lado em que cada uma chega, para que a propriedade do baricentro (que a medida do vértice ao centro é o dobro da medida do segmento que liga o baricentro ao lado oposto) fosse visualizada. Essa foi a primeira ideia de adaptação ou acréscimo que emergiu. Observamos que ao não apresentarem mais dúvidas em relação à construção, o foco dos professores conseguiu se voltar novamente à aprendizagem de seus alunos.

Em seguida, demos início ao debate acerca dessa atividade, instigando os professores a falarem se a abordagem proposta estava em consonância com o objetivo a que se referia. O primeiro a se manifestar novamente é Lucas. Ele argumentou que o roteiro deveria ser mais detalhado, pois eles mesmos (se referindo aos professores cursistas) que agora já estavam familiarizados com o software apresentaram certa dificuldade nessa atividade, então os alunos que nunca teriam usado o GeoGebra apresentariam ainda mais. Então, do ponto de vista dele, as funcionalidades do software deveriam ser trabalhadas com antecedência, e o roteiro deveria ser bem específico para que atingisse o objetivo a que se propõe. Ele propôs que a construção com os alunos deveria ser feita passo a passo, para não correr o risco de haver muitas discrepâncias entre os que fariam muito rápido e os que apresentassem muitas dificuldades.

A professora Letícia concordou com Lucas, e sugeriu que cada ponto notável fosse abordado separadamente. Pois, segundo ela, tal abordagem seria mais significativa, em termos de aprendizagem, para se trabalhar com algumas classes. O professor Lucas concordou com Letícia e ainda reforçou seu argumento, alegando que ficaria difícil atingir um objetivo de aprendizagem, caso os alunos se dispersassem com as dificuldades ao longo do roteiro. Em suas palavras: “É complexo, porque, eu vejo assim, quando você perde a interlocução com o aluno, aí fica difícil o domínio, né? Porque quando a pessoa não está entendendo, ela fala, ah, não estou entendendo, aí passa a ter conversinhas paralelas” (professor Lucas).

Letícia ainda criticou o fato de o currículo ser muito rígido, o que acaba inviabilizando aquela sugestão que ela deu, de trabalhar um ponto notável de cada vez com o software, perdendo-se assim uma oportunidade para que os alunos tivessem uma aprendizagem significativa sobre aqueles conceitos, segundo a professora. Dando sequência ao debate, o professor Orlando sugeriu que após a construção de cada ponto notável, as retas (ou segmentos, no caso das medianas) que deram origem a eles fossem exibidas novamente, para que o aluno entendesse caso a caso o surgimento de tais pontos e explorassem mais essa noção. Ao analisarmos o vídeo, posteriormente ao curso, e ao nos depararmos com essa sugestão do professor Orlando, lembramos que a professora Laura já havia até colocado em prática essa sugestão, pois conforme já mencionamos, ela criou comandos booleanos também para os segmentos das medianas. No entanto, no momento da discussão, não mencionamos isso a Orlando, e Laura também não se manifestou no debate, então acabamos não aprofundando essa questão, o que nos serve agora como um sinal de alerta para ficarmos mais atentos em articular as sugestões dos professores em possíveis edições futuras desse curso, dentro do projeto Mapeamento.

O professor Lucas fez uma analogia da nossa iniciativa ao projetar a tela do computador, pensando que o professor poderia usar também desse artifício em sua aula, de modo que os alunos pudessem acompanhar a construção etapa por etapa, minimizando o tempo nesse processo, já que todos fariam juntos. Ele ressaltou a importância dessa iniciativa, pois foi possível acompanhar alguns atalhos que utilizamos no GeoGebra ao longo da construção, assim eles [os professores cursistas] acabaram aprendendo outras funcionalidades do software.

Diante dessas circunstâncias que permearam a realização e o debate acerca dessa atividade e das demais que aconteceram ao longo do curso, argumentamos que os professores reorganizaram seus pensamentos de acordo com a segunda possibilidade de análise de Paulo e Firme (2014), na medida em que fizeram suas críticas e sugestões tendo em mente o processo de aprendizagem de seus alunos, como fica bem nítido na fala de Letícia. De um modo mais geral, salientamos ainda que a articulação de reflexões sobre metas, conhecimentos e convicções dentro e ao redor da prática, conforme definem Arcavi e Schoenfeld (2010), estiveram sempre presentes nos encontros, principalmente nesses momentos de debate. Isto dentro das práticas, pois as sugestões levantadas pelos professores eram sempre provenientes de dentro de seus respectivos contextos. E ao redor, pois eles não estavam em sala de aula, e sim refletindo sobre a sala de aula, mas com professores que possuíam outras vivências, e com a equipe proponente do curso. Então, eles puderam expandir suas percepções para além dos muros das escolas em que atuam.

Características e consequências do curso

Destacamos que a dinâmica constituída no curso motivou alguns professores a promoverem algumas mudanças em suas classes. Um exemplo disso está destacado no questionário de Letícia. Ela afirma que "a praticidade presente em todas as aulas (os encontros do curso), que possibilitou e estimulou meu retorno à sala de informática". Além disso, no último encontro do curso, os professores apresentaram o trabalho final, que eram suas propostas de aula com GeoGebra, e que de preferência, tivessem aplicado tais propostas em suas aulas. Infelizmente nem todos tiveram tempo hábil para fazer essa aplicação, mas 5 deles conseguiram, e nos detalharam essas aulas.

Considerando esses 5 professores, analisando a participação deles ao longo do curso, os trabalhos apresentados e as respostas de seus questionários, destacamos algumas das características do curso que, segundo eles, contribuíram para que aplicassem as propostas elaboradas em sala de aula, sintetizadas no quadro 1 a seguir:

Quadro 1.
Características que contribuíram para que os cursistas aplicassem as propostas elaboradas em sala de aula.

Características
A flexibilidade para atender os conteúdos sugeridos pelos professores
A postura colaborativa de todos os envolvidos
Os momentos de debate, que permitiam compartilhamento de críticas e sugestões
A exploração do software GeoGebra
A disponibilidade da equipe proponente também fora dos horários dos encontros

Todos os professores cursistas se mostraram determinados a aplicarem as propostas do curso com seus alunos. Contudo, fatores diversos impediram muitos de o fazer logo. Os fatores que foram citados por eles no decorrer do curso, que dificultam a aplicação destas propostas, constam do Quadro 2.

Quadro 2:
Características que impediram os cursistas de aplicar as propostas elaboradas em sala de aula.

Fatores que dificultam a aplicação das propostas
Infraestrutura inadequada (falta de computadores, por exemplo)
Falta de apoio técnico
Necessidade de cumprir o currículo que é muito extenso
Indisciplina

Fazendo agora o mesmo tipo de síntese, mas comparando os professores cursistas que aplicaram e os que não aplicaram as propostas do curso em sua sala de aula, obtivemos a síntese que consta no Quadro 3.

Quadro 3.

Comparação entre os cursistas que aplicaram as propostas elaboradas em sala de aula e os outros.

5 professores que aplicaram	***Os demais professores***
Motivação prévia	Não tiveram tempo hábil
Apoio da direção da escola	Infraestrutura inadequada
A dinâmica que vivenciaram no curso	Falta de apoio por parte da escola

Observamos assim que as características deste curso de formação continuada contribuíram positivamente para cinco dos professores mudarem a sua prática na sala de aula. Todos os outros professores manifestaram determinação em também o fazer, mas obstáculos que têm a ver com a falta de condições nas suas escolas impediram-nos de o fazer durante o espaço temporal em que decorreu o curso (cerca de dois meses e meio).

Conclusão

Constatamos que ao longo do curso de formação continuada, de que foi descrita e analisada em detalhe uma das atividades, houve compartilhamento de ideias, críticas e sugestões, que estão claramente vinculados à prática pedagógica de cada professor, e que ao socializarem isso entre os demais professores e também conosco, enquanto equipe proponente, ampliaram a reflexão para além de seus próprios contextos, possibilitando assim mudanças nas práticas de alguns professores.

Diante de tudo o que foi exposto aqui, destacamos que tais circunstâncias também permitiram mudanças de nossa própria prática, dentro da equipe proponente. Um exemplo disso foi em relação à reflexão que tivemos ao analisarmos o vídeo do curso. Mais especificamente, quando analisamos o debate sobre essa atividade, percebemos que a colocação feita pelo professor Orlando sobre a criação de um comando booleano para esconder as retas e segmentos que originam os pontos notáveis não foi articulado com a adaptação que já havia até realizada pela professora Laura, que contemplava essa ideia do professor. Isso nos mostrou que devemos estar mais atentos ainda ao ministrarmos um curso como esse, tanto nos momentos de realização das atividades, quanto nos momentos de debate acerca delas.

Por fim, reiteramos que, o curso, como um todo, provocou mudanças na prática de todos os intervenientes. Argumentamos ainda que provocou algumas mudanças reais, que já se refletiram em sala de aula. O projeto Mapeamento ainda está dando continuidade a esse trabalho, como é o caso da pesquisa de Andrade (2015) que investiga como está se dando a prática de professores de Matemática que fizeram o curso após terem participado dessa ação. Mais especificamente, esta pesquisadora buscará entender as propostas de trabalho que esses professores desenvolvem utilizando as tecnologias digitais. Assim, o estudo acerca do impacto real do nosso trabalho só ficará completo após a análise do que será desenvolvido por essa referida pesquisa.

Notas

1. http://www.geogebra.org/ Último acesso em 13.03.2016.

2. Projeto de pesquisa aprovado sob número 16429, Edital 049/2012/CAPES/INEP/OBEDUC – Observatório da Educação. http://www.capes.gov.br/educacao-basica/observatorio-da-educacao Acesso em 9.2.16.

3. Para a maior fluidez do texto, na maioria das vezes no referiremos ao projeto de maior envergadura apenas como Mapeamento.

4. Esse programa tem como principal objetivo promover a inclusão digital nas escolas do estado de São Paulo. www.acessaescola.fde.sp.gov.br . Último acesso em 18 de março de 2016.

5. A fim de preservar o anonimato dos sujeitos investigados, seus nomes aparecem alterados neste estudo.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de pessoal do Estado de São Paulo - CAPES, entidade do Governo Brasileiro voltado para a formação de recursos humanos.

A aluna de doutorado, Maria Teresa Zampieri, tem bolsa FAPESP, processo brasileiro #2014/27166-9, bolsa BEPE no exterior # 2015/10536-0.

Referências bibliográficas

Andrade, P. F. (2015). A utilização das tecnologias da informação e comunicação por professores de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental. In: *Anais do XIX Ebrapem.* Juiz de Fora (MG). Universidade Federal de Juiz de Fora.

Arcavi, A., & Schoenfeld, A. (2010). Usando o não familiar para problematizar o familiar. In: Borba, M. C. (Org.). *Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática*. Tradução A. Olimpio Junior. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Fernandes, A. C. P., & Viseu, F. A. V. (2011). Os ambientes de geometria dinâmica no desenvolvimento da capacidade de argumentação de alunos do 9° ano na aprendizagem de Geometria. In: *Atas ProfMat 2011*, (pp. 1-13).

Fujita, T., & Jones, K. (2003). The place of experimental tasks in Geometry teaching: learning from the textbook designs of the early 20 th century. In: *Research in Mathematics Education*, v. 5, (pp. 46-63).

Gama, R. P., & Fiorentini, D. (2009). Formação continuada em grupos colaborativos: professores de matemática iniciantes e as aprendizagens da prática profissional. In: *Educação Matemática Pesquisa*, v. 11, (pp. 441–461).

Javaroni, S. L., & Zampieri, M. T. Z. (2015). O uso das TIC nas práticas dos professores de Matemática da rede báica de ensino: o projeto Mapeamento e seus desdobramentos. In: *Bolema*, v. 9, n. 23, (pp. 998-1022).

Mammana, C., & Villani, V. (Eds.). (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century (New ICMI Study Series 5).* Dordrecht: Kluwer.

Osta, I. (1998). Introdução do Capítulo 4 - Computer technology and the teaching of Geometry. In: *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century (New ICMI Study Series 5)* (pp. 109-112).

Paulo, R. M., & Firme, I. C. (2014). O Programa Acessa Escola: um espaço para a atuação com as TIC. In: *Anais do III Congresso internacional das TIC na educação* (pp. 595-601). Lisboa-Portugal. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Rosa, M., Pazuch, V., & Vanini, L. (2012). Tecnologias no ensino de Matemática: a concepção de cyberformação como norteadora do processo educacional. In: *Anais do XI Encontro Gaúcho de Educação Matemática* (pp. 1-7). Lajeado/Rio Grande do Sul (RS).

Souto, D. L. P. (2013). *Transformações expansivas em um curso de Educação Matemática a distância online.* Tese de doutorado em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, UNESP, Rio Claro, SP.

Zampieri, M. T. (2014). Digital technologies and curriculum for teaching Mathematics: Planning a blended continuing education course. In: *Anais do III Congresso internacional das TIC na educação* (pp. 1110-1114). Lisboa-Portugal. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Posters

Percepções dos alunos da educação básica sobre o uso de tablets em aulas de Física e de Matemática

Romildo Pereira da Cruz[1], *Marli Teresinha Quartieri*[2], *Maria Madalena Dullius*[3]
[1]Centro Universitário UNIVATES, *romildo.cruz@universo.univates.br*
[2]Centro Universitário UNIVATES, *mtquartieri@univates.br*
[3]Centro Universitário UNIVATES, *madalena@univates.br*

Contextualização e referencial

Estudar Matemática e Física, na maioria das escolas brasileiras, é considerado um desafio pelos alunos. Enquanto alguns se destacam, muitos têm dificuldades para compreender determinados conteúdos e desenvolver habilidades necessárias para a resolução de problemas.

Diante do contexto, supomos que as tecnologias móveis digitais (TMDs) na educação, sobretudo os *tablets*, contribuem para a mudança das práticas educativas com a criação de uma nova ambiência em sala de aula e na escola, que repercute em todas as instâncias e relações envolvidas nesse processo. Segundo Barcelos, Batista, Behar e Moreira (2013, p. 1), "[...] os *tablets* são dispositivos que oferecem diversos recursos que podem facilitar a visualização de conteúdos, estimular atividades cooperativas e o desenvolvimento de projetos e, assim, contribuir para a realização de atividades pedagógicas".

Desta maneira, objetivamos investigar as percepções dos alunos da Educação Básica em relação a integração do *tablet* como ferramenta de apoio na resolução de atividades nas aulas de Matemática e de Física, bem como identificar e analisar as vantagens ou desvantagens que essa ferramenta proporciona aos processos de ensino e de aprendizagem.

Análise inicial dos dados emergentes

A investigação é orientada pela abordagem qualitativa. Para o processo da coleta de dados serão utilizados os seguintes instrumentos: questionários, gravações (áudio ou vídeo) e observação sistemática nas salas de aula. O questionário será aplicado na primeira aula de observação para identificar e analisar as percepções dos alunos acerca das vantagens ou desvantagens identificadas pelos discentes ao utilizar o *tablet*. Pretendemos observar 30 horas em cinco turmas de quatro escolas distintas. Os dados aqui apresentados refletem os resultados oriundos de uma escola pública municipal,

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 503–505

com 26 alunos do 9º ano da Educação Básica. Os dados foram analisados na perspectiva da Análise de Conteúdo.

Instigados a respeito de "como veem a integração do *tablet* nas aulas de Física e de Matemática como recurso de apoio a resolução das atividades", 100% dos alunos, asseveraram que a integração do *tablet* torna essas aulas mais dinâmicas e atrativas. O que está em consonância com o pensamento de Barcelos et al. (2013, p. 3) ao citar que dados de sua pesquisa apontam "resultados positivos sobre utilização de *tablets* e que a tecnologia tem um significado expressivo para os jovens, principalmente as mídias digitais".

Questionados a respeito das vantagens do uso do *tablet* para a sua aprendizagem, os alunos citaram alguns pontos favoráveis relacionados a aspectos físicos como, portabilidade, funcionalidade e eficiência. Em relação aos aspectos pedagógicos citaram atratividade e interatividade. Surpreendentemente, a vantagem mais observada por todos foi a portabilidade, o que não tem relação direta com os processos de ensino e de aprendizagem.

Nesse sentido, há uma convergência das respostas para o que preconiza Barcelos et al. (2013). Para os autores, há indicativos de que a portabilidade e a conectividade oferecida por esses dispositivos incentivam a colaboração e interação entre alunos em sala de aula. Dessa maneira, supomos que o conforto físico gerado pela ferramenta pode contribuir para o bem-estar do aluno e, por conseguinte, para a melhoria do seu desempenho.

Com relação às desvantagens do uso do *tablet* para sua aprendizagem, os alunos manifestaram dificuldades relacionadas ao aspecto pedagógico. Entre as mencionadas, a mais crítica refere-se a um fator comportamental: a dispersão causada pelo acesso à internet e por aplicativos disponíveis na ferramenta.

Percebemos por parte dos alunos, uma preocupação exacerbada com o próprio comportamento diante do instrumento em uso, ou seja, os discentes não sentem-se preparados, amadurecidos para usar a ferramenta na sala de aula apenas com foco educacional. Supomos que o despreparo para lidar com as novidades tecnológicas pode ter origem na falta de planejamento das escolas para seu uso. Como defende Mercado (2002, p. 11),

> O reconhecimento de uma sociedade cada vez mais tecnológica deve ser acompanhado por conscientização da necessidade de incluir nos currículos escolares as habilidades e competências para lidar com as novas tecnologias. No contexto de uma sociedade do conhecimento, a educação exige uma abordagem diferente em que o componente tecnológico não pode ser ignorado.

Salientamos que a partir do mês de março daremos continuidade nas inserções em outras escolas, em novas turmas, o que nos permitirá ter maior convicção acerca dos resultados da nossa ação investigativa até a realização do evento.

De acordo com os resultados obtidos imaginamos que as inovações, advindas com as inserções das tecnologias no campo educacional pode representar alguns desafios a serem transpostos, mas é inegável a contribuição dessas ferramentas no cotidiano dos jovens estudantes no desenvolvimento de suas atividades escolares.

Referências bibliográficas

Barcelos, G. T., Batista, S. C. F., Behar, P. A., Moreira, L. S. (2013). Uso Educacional de Tablets: Estudo de caso na Formaçao Inicial de Professores de Matemática. *RENOTE – Revista Novas Tecnologias na Educação*, *11*, 36-46.

Mercado, L. P. L. (Org). (2002). *Novas tecnologias na educação: reflexões sobre a prática*. Maceió: EDUFAL.

Ensino de matemática, jogos digitais e a forma de vida de alunos dos anos iniciais: um estudo alicerçado no campo da Etnomatemática

Tatiane Cristine Bernstein[1], *Ieda Maria Giongo*[2], *Márcia Jussara Hepp Rehfeldt*[3]
[1]Centro Universitário UNIVATES, *tbernstein@universo.univates.br*
[2]Centro Universitário UNIVATES, *igiongo@univates.br*
[3]Centro Universitário UNIVATES, *mrehfeld@univates.br*

Introdução e procedimentos metodológicos

Com a emergência de novas configurações das formas de aprender postas em evidência por diversos estudos efetivados no âmbito acadêmico, é importante preocupar-se com os currículos fixos e as formas de aprendizagem engessadas, sem flexibidade. Em particular, é produtivo discutir tais regularidades e propor metodologias inovadoras na Educação Básica.

Com este intuito, no Centro Universitário UNIVATES, em Lajeado/RS/Brasil, está em andamento um projeto de pesquisa vinculado ao Programa Observatório da Educação (Edital 049/2012/CAPES/INEP) e, dentre suas ações, uma delas consiste em elaborar e implementar propostas metodológicas e curriculares, à luz de três tendências do ensino de Matemática – Etnomatemática, Modelagem Matemática e Investigação Matemática – nos Anos Iniciais e Finais do Ensino Fundamental em seis educandários da região.

Nesse cenário, propomos uma pesquisa no âmbito dos Anos Iniciais, alicerçada no campo da Etnomatemática, que vem sendo realizada por intermédio de práticas pedagógicas investigativas, via atividades centradas na exploração de jogos digitais, em duas turmas de 4º Ano do Ensino Fundamental, vinculadas a duas escolas públicas parceiras do projeto e localizadas no Vale do Taquari/RS/Brasil. O eixo de tais práticas são os jogos digitais, pelo fato das tecnologias ocuparem um lugar significativo em suas atividades.

Assim, o objetivo geral dessa investigação consiste em investigar os jogos de linguagem matemáticos existentes na forma de vida digital de alunos do 4º Ano do Ensino Fundamental e suas semelhanças de família com aqueles usualmente presentes na Matemática Escolar. Elencou-se também três objetivos específicos: proporcionar a duas turmas de alunos do 4º Ano do Ensino Fundamental, por meio de práticas pedagógicas investigativas, atividades centradas em jogos digitais; problematizar, com as referidas turmas, mudanças ocorridas, ao longo das décadas, nas brincadeiras com a introdução

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 507–509

dos jogos digitais; e potencializar, junto às turmas, a valorização dos jogos usualmente presentes na forma de vida de seus antepassados.

A investigação é de cunho qualitativo e etnográfico, formada por 10 encontros que foram realizados em duas turmas de 4º Ano do Ensino Fundamental, como mencionado anteriormente. Durante os encontros, ocorrem momentos de discussão acerca do tema "Jogos Digitais"; exploração e socialização dos jogos digitais praticados pelos alunos no seu cotidiano; construção coletiva de roteiro para entrevistar as avós; visita das avós às escolas, na qual relatarem as brincadeiras e jogos praticados na infância; debate coletivo sobre os relatos das avós; exploração das brincadeiras e jogos citados pelas avós e por fim, seminário de apresentação das atividades realizadas durante a prática pedagógica, aos alunos das demais turmas de anos iniciais.

Referencial Teórico

O referencial teórico que sustenta a investigação é relativo ao campo da Etnomatemática com destaque para as pesquisas, em âmbito brasileiro, de Ubiratan D'Ambrosio (2007) e Gelsa Knijnik (2004). Para os referidos pesquisadores, a Etnomatemática está preocupada em conhecer e problematizar os conceitos matemáticos manifestados por específicas culturas durante o manejo de atividades cotidianas. Assim, neste campo do saber é primordial levar em conta a cultura, haja vista que propicia a emergência dos saberes e permite:

> [...] a vida em sociedade. Quando sociedades e, portanto, sistemas culturais, se encontram e se expõem mutuamente, elas estão sujeitas a uma dinâmica de interação que produz um comportamento intercultural que se nota em grupos de indivíduos, em comunidades, em tribos e nas sociedades como um todo. (D'Ambrosio, 2007, p. 59)

Atentando-se ao mundo contemporâneo, é relevante mencionar que as interações culturais, bem como as formas de agir, pensar e sentir são fortemente mediadas pelas tecnologias. Knijnik et al. (2013) inferem que os saberes reconhecidos socialmente estão sendo "alimentados" pelas tecnologias, provocando inúmeras mudanças sociais. Possivelmente, na forma de vida digital, inúmeros saberes matemáticos são gestados pelos alunos ao operarem com os recursos tecnológicos, especificamente os jogos digitais.

Alguns Resultados Emergentes e Conclusões

Um dos resultados está relacionado com os saberes matemáticos gestados pelos alunos ao explorarem, no Laboratório de Informática, os jogos digitais preferidos. Estes utilizaram o sistema de numeração decimal para resolver os cálculos de adição e subtração durante as jogadas. Guiavam-se pelo valor posicional do algarismo – unidade, dezena e centena, fazendo uso de regras usualmente presentes na matemática escolar. Como apontou um deles, ao ser questionado qual o resultado de 36-13: "*vinte e três,[pois] seis eu tiro três, dá três, três eu tiro um, dá dois*". Tal resultado evidencia, sobretudo, o predomínio da matemática escolar em ambientes não escolares. Os resultados desta investigação apontam para problematizações acerca das distintas racionalidades na forma de vida digital.

Referências Bibliográficas

D' Ambrosio, U. (2007). *Etnomatemática*: *elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica.

Knijnik, G. (2004). Itinerários da Etnomatemática: questões e desafios sobre o cultural, o social e o político na educação matemática. In Knijnik, G., Wanderer, F., Oliveira, C. J. de (Orgs.), *Etnomatemática, currículo e formação de professores* (pp. 19-38). Santa Cruz do Sul: EDUNISC.

Knijnik, G., Wanderer F., Giongo, I. M., & Duarte, C. G. (2013). *Etnomatemática em movimento*. Belo Horizonte: Autêntica.

Um olhar sobre as situações problemáticas relativas à reta numérica apresentadas em manuais do 5º ano do ensino básico

João Rebola[1], *Conceição Costa*[2]
[1]Escola Superior de Educação de Coimbra, *duque.rebola@gmail.com*
[2]Escola Superior de Educação de Coimbra / UIED FCT UNL, *ccosta@esec.pt*

Este presente trabalho é parte de uma investigação que pretende examinar, com pormenor, como manuais de matemática do 5.º ano de escolaridade disponibilizam e apresentam a reta numérica como ferramenta de ensino para as frações.

Pretendemos contribuir para a reflexão sobre situações problemáticas relativas à reta numérica, apresentadas em manuais de matemática, do 5.º ano do Ensino Básico. O presente estudo é parte de uma investigação que pretendeu responder a duas questões: a) como é que a reta numérica é apresentada e integrada em manuais de matemática do 5.º ano de escolaridade? b) quais os olhares de professores de matemática sobre a apresentação e integração da reta numérica no manual por eles adotado.

A relevância deste estudo prende-se com o facto de a reta numérica ser uma representação básica para a aprendizagem dos números e ser fundamentalmente usada para a introdução de sistemas de números (naturais, inteiros, racionais e reais). Janvier (1983, citado em Bruno & Cabrera, 2006) afirma que a reta numérica sendo um modelo de representação, levanta dificuldades porque os números têm dupla representação: eles podem ser posições na reta numérica ou movimentos nela. A reta numérica e outras representações lineares do número têm o potencial de apoiar as compreensões dos alunos nas conexões entre números inteiros e fracionários (Wu, 2008, citado em Saxe et. al, 2013). A reta numérica é também reconhecida como uma ferramenta conveniente para avaliar a interpretação dos estudantes sobre frações como medida (Keijzer & Terwekl, 2013, citados em Steenburge et al., 2014).

Uma forma de verificar a importância dada à reta numérica nas escolas é analisar o seu uso nos manuais, já que estes, para professores e estudantes, determinam o que é a matemática escolar e também o que é a matemática (Johansson, 2003). Ainda para muitos alunos, os livros de texto são a sua primeira e muitas vezes a única exposição aos livros e à leitura. As pessoas olham os manuais como uma opinião autorizada, exata

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 511–513

e necessária e os professores confiam neles para organizar as suas aulas e estruturar a matéria (Haggarty & Pepin, 2002).

A metodologia usada na investigação, acima referida, é de natureza qualitativa, envolvendo análise de conteúdo, método de análise das comunicações que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens (Bardin, 2004), integrando a observação e análise de quatro manuais escolares de matemática do 5.º ano de escolaridade do Ensino Básico, publicados em 2013, que tinham sido adotados por professores orientadores de estágio do Mestrado do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico da Escola Superior de Educação de Coimbra.

Foi construída uma grelha de análise de manuais, que resultou da adaptação de outras grelhas de análise (Carvalho, 2006; Bruno & Cabrera, 2006) para perceber quando e como a reta numérica é usada naqueles manuais e que tipos de situações problemáticas são propostas (Tunç-Pekkan, 2015). Identificaram-se, então, os seguintes critérios de análise: (i) aspetos para os quais a reta numérica é usada (conceito de número; modelo para operações; modelo para ordenação); (ii) tipos de representações na reta numérica; (iii) classificação da reta numérica "flexível" ou “pré-determinada”; (iv) tipos de situações problemáticas envolvendo frações e a representação na reta numérica.

Os resultados da investigação, relativamente à questão de pesquisa acima identificada, onde os manuais são vistos como produtos curriculares específicos que influenciam as oportunidades dos alunos para aprender e a qualidade das experiências de aprendizagem sustentadas (Reyes et. al, 2011), e em que o desenvolvimento curricular perspetiva-se como baseado na situação, ou seja, agrega problemas associados com o currículo que num contexto democrático se traduz num maior grau de autonomia dos professores para modelar a sua prática (Gimeno, citado em Carvalho, 2006), parecem ser problemáticos. Os resultados apontam uma frequência muito reduzida em cada manual da integração da reta numérica no domínio dos “Números e Operações”. A reta numérica como “modelo para ordenação” é o aspeto mais usado e é só conduzida em linhas horizontais, quase sempre, pré-determinadas. As representações das operações na reta numérica surgem com pouca frequência e parecem ser incompletas e confusas. Os manuais mostram ainda uma pequena variedade de tipos de situações problemáticas.

O póster começa com a apresentação do estudo, incluindo objetivos da metodologia seguida e da grelha criada para a análise dos manuais. O foco é nos exemplos de situações problemáticas apresentadas pelos quatro manuais e reflexão sobre elas, sobretudo tendo em conta a perspetiva de Tunç-Pekkan (2015).

Referências bibliográficas:

Bardin, L. (2004). *Análise de conteúdo.* Lisboa: Edições 70.

Bruno, A., & Cabrera, N. (2006). Types of representations of the number line in textbooks. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátka & N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings 30 Conference of the International Group for Phsychology of Mathematics Education. (*vol. 2, pp. 249-256). Prague: PME.

Carvalho, C. A. (2006). *A calculadora gráfica na trigonometria do 11º ano. Uma análise de manuais escolares de Matemática,* Tese de Mestrado (não publicada), Universidade Nova de Lisboa.

Haggarty, L. & Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German Classrooms: Who gets an opportunity to learn what?. *British Educational Research Journal, 28* (4), pp. 567-590.

Johansson, M. (2003). *Textbooks in mathematical education - a study of textbooks as the potentially implemented curriculum.* Tese de Mestrado (não publicada), Lulea University of Technology, Sweden

Reyes, B. & Reyes, R. (2011) Curriculum as a vehicle for reform in United States. *Quadrante, 20*(1), pp. 101-121.

Saxe, G., Diakow, R., & Gearhart, M. (2013). Towards curricular coherence in integers and fractions; a study of the efficacy of a lesson sequence that uses the number line as the principal representational context. *ZDM Mathematics Education,* 45, 343-364.

Steenbrugge, H. V., Lesage, E., Valcke, M., & Desoete, A. (2014). Preservice elementary school teachers' knowledge of fractions: a mirror of students knowledge?. *Journal of Curriculum Studies, 46*(1), 138-161.

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Mathematical Studies, 89*, 419-441.

Etnomatemática e formação de grupos de estudos com professores da escola básica: algumas reflexões

Ademir de Cássio Machado Peransoni[1], Ieda Maria Giongo[2], Marli Teresinha Quartieri[3]
[1]Centro Universitário UNIVATES, *ademir.peransoni@universo.univates.br*
[2]Centro Universitário UNIVATES, *igiongo@univates.br*
[3]Centro Universitário UNIVATES, *mtquartieri@univates.br*

O pôster apresenta resultados da formação de um grupo de estudos com professores de quarto e quinto anos de duas escolas públicas de Educação Básica da Região do Vale do Taquari, RS, Brasil. Tal formação esteve atrelada a um projeto de pesquisa vinculado ao programa governamental brasileiro Observatório da Educação (Edital 049/2012/CAPES/INEP). Nesse cenário, o objetivo central consistiu em investigar as implicações pedagógicas advindas das discussões efetivadas em grupos de estudos com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, tendo como aportes teóricos o campo da etnomatemática, cujas teorizações problematizam aspectos sociais, políticos e culturais no âmbito do ensino da Matemática.

Dentre as várias interpretações deste campo, optamos pela definição dada por Gelsa Knijnik que, alinhando-se às perspectivas pós-críticas, se serve dos estudos da maturidade de Ludwig Wittgenstein. Em efeito, nesse referencial teórico, ao assumir que "a linguagem tem um caráter contingente e particular, adquirindo sentido mediante seus usos" (Knijnik, Wanderer, Giongo & Duarte, 2012, p. 29), é possível questionar "a existência de uma linguagem matemática única e com significados fixos" (Knijnik e tal., 2012, p.29). A respeito da produtividade das ideias do filósofo para o campo da etnomatemática, Knijnik et al. (2012, p. 29) ainda aludem que:

> O "Segundo" Wittgenstein concebe a linguagem não mais com as marcas da universalidade, perfeição e ordem, como se preexistisse às ações humanas. Assim como contesta uma noção de uma linguagem universal, o filósofo problematiza a noção de uma racionalidade total e a *priori*, apostando na constituição de diversos critérios de racionalidade.

Nessa ótica, pesquisas têm demonstrado que a forma de vida dos indivíduos engendram jogos de linguagem com o intuito de atender a manutenção de determinadas atividades, apresentando, para isso, meios diversificados de operar com a matemática. Tais jogos possuem, entre si, semelhanças, como, por exemplo, com aqueles encontrados entre os membros de uma mesma família. Assim:

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 515–517

> A propriedade que nos permite empregar a palavra “jogo” e compreender seu significado em situações de comunicação não é uma propriedade transitiva, ou seja, que percorre todos os elementos aos quais aplicamos; é uma “propriedade de semelhanças de família, como aqueles traços fisionômicos que nos permitem identificar pessoas como pertencendo a uma mesma família; tais pessoas são semelhantes, sem serem idênticas. (Moreno, 2000, p. 63)

De posse destes referenciais teóricos, a pesquisa, de cunho qualitativo e inspirações etnográficas, foi desenvolvida entre 2013 e 2014, separadamente, nas dependências dos educandários, em horários previamente acordados com os professores e direção. O tempo destinado para cada uma das dez sessões era compatível com os horários destinado às reuniões pedagógicas dos docentes envolvidos e realizadas nas dependências de cada educandário. Usualmente, ocorriam a cada quinze dias com duração aproximada de duas horas cada. Durante a realização da investigação, um dos docentes foi transferido, mas demonstrou interesse em seguir no grupo por, segundo ele, acreditar que teria a oportunidade de seguir problematizando o ensino da Matemática. Entretanto, por questões de horário a ser cumprido no novo educandário, não pôde mais participar. Ademais, os docentes não foram remunerados por sua participação, tampouco tiveram gastos.

Convém ressaltar que não era propósito deste estudo comparar as instituições, tampouco as práticas pedagógicas efetivadas pelos professores envolvidos ou suas ideias sobre educação, matemática e processos de ensino e de aprendizagem, o que seria contraditório e incompatível com o referencial teórico escolhido para sustentar a investigação. As atividades desenvolvidas constaram de: a) apresentação da proposta de formação de grupos com posterior aceite dos docentes via assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, b) apresentação e discussão de pesquisas efetivadas no campo da etnomatemática com aprofundamento de estudos, c) estruturação de práticas pedagógicas, d) elaboração de entrevistas com posterior aplicação para pais e profissionais da construção civil e respectiva análise, e) práticas desenvolvidas em sala de aula e f) visita de docentes em locais de trabalho relativos à construção civil.

O material de pesquisa foi gerado por meio de discussões, gravadas e posteriormente transcritas, com o grupo de professores, bem como suas produções textuais escritas durante os encontros de estudos. O diário de campo do pesquisador, as atividades desenvolvidas por duas turmas de alunos – uma de cada escola – e as explanações de dois profissionais ligados à construção civil também compuseram o corpus da pesquisa. A análise do material de pesquisa permitiu construir as seguintes unidades de análise: a) Apego, por parte dos professores integrantes dos grupos, ao formalismo matemático; b) Reconhecimento, desses docentes, da existência de jogos de linguagem matemáticos não escolares e c) Reconhecimento, por parte dos docentes e discentes, da forma de vida dos envolvidos na emergência dos jogos de linguagem.

Referências bibliográficas

Knijnik, G., Wanderer F., Giongo, I. M., & Duarte, C. G. (2013). *Etnomatemática em movimento*. Belo Horizonte: Autêntica.

Moreno, A. R (2000). *Wittgenstein: os labirintos da linguagem. Ensaio introdutório.* São Paulo: Moderna.

Desenvolvimento profissional e aprendizagem matemática de professores dos anos iniciais

Raimunda de Oliveira[1], *Cristiano Alberto Muniz*[2]
[1]Universidade de Brasília – UnB, *deoliveirarai@hotmail.com*
[2]Universidade de Brasília – UnB, *cristianoamuniz@gmail.com*

Os resultados das avaliações de larga escala brasileiras realizadas por organismos nacionais e internacionais como as desenvolvidas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP)[1] ou do *Programme for International Student Assessment* (PISA)[2], relacionados as aprendizagem em matemática, têm apontado que muitas crianças saem do ensino fundamental sem conseguir solucionar situações-problema envolvendo deduções diretas da informação dada, conhecimento elementar da área trabalhado ao longo desta modalidade de ensino.

A partir dessa constatação, muitas questões emergem, dentre elas: *quais os fatores que contribuem para a ineficiência do ensino de matemática no Brasil?*

Segundo as ações governamentais, o professor seria o principal agente uma vez que as políticas públicas, voltadas para a melhoria do ensino, têm como foco principal a qualificação da formação dos professores. Em geral, consideram as condições de trabalho, carreira, jornada de trabalho e remuneração como fatores de menor importância no contexto do desenvolvimento educacional. Neste quadro, as formações, tanto inicial quanto continuada, deveriam, portanto, se estabelecer como espaços privilegiados de contribuição para um desenvolvimento profissional pleno e engajado na função social que ancora a docência, no entanto, muitas pesquisas relacionadas a educação brasileira apontam que tal situação não tem se configurado na prática e na realidade das escolas.

Com base nesse quadro, esta pesquisa, tem como objetivo central: analisar aprendizagem matemática docentes e a sua articulação com a práxis pedagógica no processo de desenvolvimento profissional de professores dos anos iniciais. Trata-se de uma pesquisa em andamento a ser concluído até dezembro de 2016.

Objetivos Específicos

- Analisar as aprendizagens matemáticas reveladas pelos professores e o reflexo nas escolhas pedagógicas para o ensino desta área do conhecimento.

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 519–521

- Construir e analisar situações-problema e contextos formativos que possibilitem aos professores a ressignificação de aprendizagens matemáticas.
- Favorecer e analisar produções matemáticas orais e escritas produzidas pelos professores a partir de situações propostas.
- Identificar e analisar os obstáculos epistemológicos e profissionais que dificultam a aprendizagem matemática de docente e os reflexos na práxis pedagógica e no desenvolvimento profissional.

Referencial teórico-conceitual

Os objetivos deste trabalho têm como suporte três conceitos: (1) aprendizagem matemática, entendida como o desenvolvimento conceitual de conhecimentos matemáticos e a reflexão e usos dos mesmos em contextos de ação, (2) práxis pedagógica, diz respeito a indissociabilidade de conhecimentos teóricos e práticos na constituição do agir pedagógico de cada professor e (3) desenvolvimento profissional, enriquecimento das diferentes aprendizagens que cada educador vai construindo ao longo da carreira. O aporte teórico para o entendimento destes eixos fundamenta-se principalmente em Vergnaud (2014), Skovsmose (2007) na aprendizagem matemática, Vasquez (1968) e Silva (2011) em práxis pedagógica e Guskey (2000) e Vaillant & Marcelo (2012) para desenvolvimento profissional.

Metodologia

Esta pesquisa se caracteriza como qualitativa, com características de pesquisa participante, proposta metodológica que busca responder as questões de pesquisa em trabalho colaborativo e investigativo aos sujeitos participantes.

O cenário de pesquisa será uma escola pública de Ceilândia – Distrito Federal, cidade com grande densidade populacional e com situação socioeconômica da maioria dos moradores em situação de pobreza e exclusão social. Na escola atuam cerca 22 professores regentes e três coordenadores pedagógicos. O foco será dado às turmas do quinto ano do Ensino Fundamental.

Para alcançar os objetivos propostos a primeira ação será a construção de um espaço de estudo e pesquisa na escola tendo como eixo a aprendizagem matemática dos professores. Esta formação em serviço será orientada pela Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (2008) no que se refere a organização dos processos de ensino e pela Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud (2014) suporte teórico para as análises quanto ao desenvolvimento das aprendizagens matemáticas.

Paralelamente às investigações em torno dos processos de aprendizagem, busca-se compreender como a formação dentro do contexto da profissão influencia a prática de cada sujeito envolvido, evidenciando se a partir dele, se prática está sendo orientada à constituição de novas práxis e se colabora ou não para o desenvolvimento profissional.

Notas

[1] Autarquia federal vinculada ao Ministério da Educação (MEC), com o objetivo de promover estudos, pesquisas e avaliações sobre o sistema educacional brasileiro.

[1] Programa internacional que avalia sistemas educacionais de 67 países, incluindo o Brasil.

Referências bibliográficas

Brandão, C. R., & Streck, D. R. (2006). *Pesquisa participante: O saber da partilha*. Aparecida – SP: Ideias & Letras.

Brousseau, G. (2008). *Introdução os estudo das situações didáticas: Conteúdos e métodos de ensino.* São Paulo: Editora Ática.

Guskey, T. R. (2000). *Evaluating professional development*. Thousand Oaks, California: Corwin Press.

Silva, K. A. C. P. C. (2011). A Formação de professores na perspectiva crítico-emancipadora. *Revista Linhas Críticas, 32*(17), 12-31.

Skovsmose, O. (2007). *Educação matemática crítica: Incerteza, matemática, responsabilidade.* São Paulo: Cortez.

Vaillant, D., & Marcelo, C. (2012). *Ensinando a ensinar: As quatro etapas de uma aprendizagem.* Curitiba: Editora UTFPR.

Vázquez, A. S. (1968). *Filosofia da práxis*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Vergnaud, G. (2014). *A criança, a matemática e a realidade*. Curitiba: Ed. da UFPR.

Organização do trabalho pedagógico em sala de aula e a influência à criatividade em matemática: uma análise da prática docente no 3.° ano dos anos iniciais.

Fabiana Barros de Araújo e Silva[1], *Cleyton Hércules Gontijo*[2]
[1]Universidade de Brasília – UnB, *fbasilva@hotmail.com*
[2]Universidade de Brasília – UnB, *cleyton@unb.br*

Direcionando o olhar para a pesquisa

Este pôster tem como objetivo primordial apresentar a pesquisa que será desevonlvida ao longo do primeiro semestre de 2016. Tal estudo visa investigar a ação pedagógica do professor analisando sua influência para o desenvolvimento da criatividade matemática dos estudantes em uma turma do terceiro ano dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Para tanto é importante compreender o que vem a ser criatividade e suas características. De acordo com Alencar e Fleith (2003), a criatividade é compreendida como um produto novo, referindo-se a uma ideia ou invenção original. E ainda, Martinez (2014) traz que a invenção de algo é conceituado ao mesmo tempo como novo e valioso para determinado campo da ação humana. Entende-se assim que o termo criatividade está ligado tanto ao fator novidade como à utilidade.

Csikszentmihalyi (1988), estudioso húngaro sobre o assunto, ressaltou que mais importante do que saber o que é criatividade, é saber por onde está a criatividade e que ambiente é mais propício.

Espera-se, ao investigar a área da educação matemática, contribuir para disseminar práticas pedagógicas que colaborem com a diminuição de representações negativas da matemática que, muitas vezes, é tratada, nas salas de aula, como uma mera reprodução de fórmulas e algoritmos sem significados, tanto para estudantes quanto para professores. Dos pesquisadores brasileiros que estudam sobre este tema, destacam-se os estudos realizados por Gontijo (2007a, 2007b, 2010)

A pesquisa apresenta algumas questões essenciais, dentre elas: Quais são as concepções do professor sobre ensinar e aprender matemática? Quais aspectos do planejamento realizado antes das aulas contribuem para um trabalho pedagógico que possa favorecer a criatividade matemática dos estudantes**?** Como o currículo moldado e o currículo em

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 523–526

ação, desenvolvidos pelo professor, podem influenciar a criatividade matemática dos estudantes?

Sobre o referencial teórico

Como pretende-se direcionar para o campo da educação matemática, é necessário delinear o foco do trabalho pedagógico do professor, sendo o saber escolar estruturante no trabalho do educador matemático, que adequa o saber científico às necessidades de aprendizagem dos alunos, pois "[...] o matemático trabalha com o saber científico já o educador matemático com o saber escolar" (Gontijo, Silva, Carvalho, 2012, p.39).

Para conceituar a criatividade matemática, apoia-se no conceito trazido por Gontijo (2006), segundo o qual:

> A capacidade de apresentar inúmeras possibilidades de soluções apropriadas para uma situação problema, de modo que estas focalizem aspectos distintos do problema e/ou formas diferenciadas de solucioná-lo, especialmente formas incomuns (originalidade), tanto em situações que requeiram a resolução e elaboração de problemas como em situações que solicitem a classificação ou organização de objetos e/ou elementos matemáticos em função de suas propriedades e atributos, seja textualmente, numericamente, graficamente ou na forma de uma sequência de ações. (Gontijo, 2006, p.4)

Sobre a matemática escolar, Valdés (2010) enfatiza que é preciso que essa matemática se encarregue de priorizar, na formação dos alunos, uma forma de raciocínio mais comprometida com o comportamento criativo, complementando-se ao pensamento lógico, principalmente na resolução de situações problemas.

Aspectos metodológicos

Para o primeiro objetivo específico, que é *analisar quais as concepções do professor sobre ensinar e aprender matemática*, a pretensão é que se realize uma entrevista semiestruturada, no horário de coordenação pedagógica dos professores. Para privilegiar a comunicação entre os sujeitos, será proposto que faça um desenho a partir da frase "Como você vê a matemática?" As perguntas seguintes serão formuladas no intuito de perceber como o professor concebe a matemática e o que costuma priorizar ao planejar suas aulas.
Ainda para o primeiro objetivo, serão analisados alguns planejamentos já elaborados pela professora, com a intenção de analisar se há coerência entre o que foi dito na entrevista e o que foi planejado.

No intuito de atender aos demais objetivos, no horário de aula, serão realizadas observações em sala ou no ambiente em que a aula estiver acontecendo. Incialmente, não só nas aulas de matemática. Tais observações serão realizadas com o apoio de uma ficha que contará com itens que direcionarão o olhar do pesquisador quanto à inclusão de estratégias para a criatividade.

É importante analisar se o indicador aparece, mas principalmente se ocorre no sentido de favorecer ou se serve como barreira para a Criatividade. Os indicadores foram escolhidos tendo como base: 1) as habilidades propostas por Martinez (2002); 2) as estratégias que podem ser utilizadas para favorecer o desenvolvimento da criatividade em matemática de Sternberg e Grigorenko (2004) e, 3) a Escala de Clima para Criatividade em Matemática, de Carvalho (2015).

Posteriormente à análise dos dados colhidos, acontecerão alguns encontros com a professora, em seu horário de coordenação, para discutir seu entendimento sobre a criatividade, a criatividade em matemática e para apresentar algumas análises acerca do trabalho realizado em sala de aula, a partir dos dados coletados por meio da ficha de observação. Busca-se, com isso, promover uma análise crítica e reflexiva frente aos aspectos observados.

Após esses encontros com a professora no horário de coordenação, serão realizadas novamente outras observações em sala de aula, para analisar se houve ou não mudanças na prática pedagógica do professor desde o planejamento até a aula de matemática. Novamente será utilizada a ficha de apoio para observação.

Assim, como definido por Flick (2009), que a pesquisa qualitativa dá oportunidade para o pesquisador buscar diferentes caminhos, considerando-se aspectos objetivos, subjetivos e intersubjetivos. O modo como ele vai entrelaçar esses aspectos é que dará uma unicidade a sua pesquisa.

Referências bibliográficas

Alencar, E. M. L. S; Fleith, D. (2003). *Criatividade: múltiplas perspectivas*. Editora da Universidade de Brasília.

Csikzentmihalyi, M. (1988) *Society, culture and person: a systems view of creativity*. In R. J. Stern-Berg (Ed.), The nature of creativity (pp. 325-339). Cambridge: University Press.

Flick, U. (2009). *Uma Introdução à Pesquisa Qualitativa*. Porto Alegre: Artmed.

Gontijo, C. H. (2007). *Relações entre criatividade, criatividade em Matemática e motivação em Matemática de alunos do ensino médio.* [Tese]

Gontijo, C. H. (2007). *Criatividade em Matemática: identificação e promoção de talentos criativos*. p. 481-494. [Artigo de revista]

Gontijo, Cleyton Hércules. *Criatividade em matemática: explorando conceitos e relações com medida de criatividade e motivação*. In: 33ª REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 2010. [Anais Anped]

Gontijo, Cleyton Hércules; Silva, Erondina; carvalho, Rosália. *A criatividade e as situações didáticas no ensino e aprendizagem da matemática.* 2002. [Artigo de revista]

Martinez, A. (2002). *A criatividade na escola: três direções de trabalho*. p. 189 a 206. [Artigo de revista]

Valdés, C. Eloy Artega. *El desarrollo de la creatividad em la Educacion Matemática.* Congresso Iberamericano de Educacion: Metas 2021. 2010. [Artigo de revista]

A construção do conceito de número pela criança no contexto da educação inclusiva

Carine Almeida Silva Noleto[1] *, Cristiano Alberto Muniz*[2]
[1]Universidade de Brasília – Unb, *noletocarine@gmail.com*
[2]Universidade de Brasília – UnB**,** *cristianoamuniz@gmail.com*

O estudo apresenta a proposta de articulação entre duas áreas imprescindíveis na educação. Esta proposta tem a intenção de contribuir para as áreas de Educação Matemática e da Educação Inclusiva, proporcionando um espaço de debate e de estudo, de modo a permitir avanços com os resultados que surgirem a partir da realização da investigação. Pensar a relação sobre a aprendizagem matemática e a deficiência intelectual é uma necessidade que se mostra atual e necessária e se mostra fundamental tanto para professores atuantes nas escolas, quanto para investigadores em educação.

A questão fundamental, da qual nasceu toda a pesquisa foi: Como compreender os processos mentais de aprendizagem do número, já que se tratam de processos internos e subjetivos?

Desenvolveu-se, então, o objetivo geral da pesquisa, que é analisar processos mentais pelos quais a criança com deficiência intelectual percorre na construção do conceito de número na alfabetização.

Portanto, trata-se de um estudo de mestrado, em desenvolvimento, que pretende explicitar processos mentais de aprendizagem, na construção de significados e sentidos na alfabetização matemática e mais especificamente na construção do conceito de número.

Os objetivos específicos são:

- Identificar os processos da construção do conceito de número no processo de alfabetização matemática da criança com diagnóstico de Deficiência Intelectual.
- Analisar a aprendizagem da criança com diagnóstico de Deficiência Intelectual como possibilidade formas diversas de produção de conhecimentos matemáticos, previamente concebidos pelo currículo escolar.
- Analisar o papel do professor regente e do professor da Sala de Recursos e as relações destes com a criança com diagnóstico de Deficiência Intelectual.

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 527–529

- Identificar possibilidades de organização do trabalho pedagógico na Sala de Recursos e na sala de aula regular no trabalho com a aprendizagem matemática, a fim de favorecer a inclusão de crianças com diagnóstico de Deficiência Intelectual.

Referencial teórico-conceitual

Os principais conceitos trabalhados no estudo são: A Educação Matemática como uma categoria que abrange os conceitos tratados no texto; a Educação Inclusiva é um importante conceito que permeia toda a investigação, é o ponto de partida e chegada do estudo; o sujeito de pesquisa é uma criança com diagnóstico de Deficiência Intelectual, assim sendo este um importante conceito a ser trabalhado; o conhecimento matemático que é objeto do estudo é o conceito de número e sua construção pela criança, e a alfabetização matemática dentro de um conceito amplo de alfabetização; são abordados a aprendizagem e o ensino e seus processos instigantes e dialéticos, as possibilidades e contribuições para a situação que será investigada.

É um trabalho que trata a respeito de como a criança constrói o número do ponto de vista da mobilização de esquemas mentais e dos caminhos psicológicos envolvidos. Assim, pensando as bases epistemológicas essenciais a esta pesquisa são a Teoria dos Campos Conceituais de Gerárd Vergnaud (2014) e conceitos de esquemas, situação, invariantes operatórios, e a própria concepção de conceito e de conceitualização, e a Teoria Histórico-cultural, especialmente com Vygotski (2009) com a construção do pensamento e da linguagem, a mediação e a zona de desenvolvimento iminente.

Outras bases teóricas presentes no estudo estão presentes, como Danyluk (1998) na alfabetização matemática e suas manisfestações na escrita infantil. Kamii (2012) e Piaget (1981) com conceito de número e sua construção pela criança.

Percurso Metodológico

É um estudo que trata de processos de aprendizagem, que por si só são processos complexos e envolvem diversos aspectos, sendo assim, a abordagem qualitativa demonstrou-se adequada às subjetividades envolvidas.

A pesquisa apresenta características de estudo de caso, por se propor a aprofundar a investigação com uma criança. Será utilizada a Epistemologia Qualitativa como metodologia.

> A Epistemologia Qualitativa defende o caráter construtivo interpretativo do conhecimento, o que de fato implica compreender o conhecimento como produção e não como apropriação linear de uma realidade que se apresenta. (González-Rey, 2005, p. 5).

A pesquisa será realizada sob o ponto de vista da construção de informações, apoiada em González-Rey (2005), segundo o qual não se conhece uma dada realidade, a realidade se constitui a partir da relação entre os sujeitos. Da mesma forma como se constitui o conhecimento.

Os procedimentos metodológicos acontecerão na escola, com a criança e seus professores, na sala de aula e na sala de recursos, no primeiro semesre de 2016. Os instrumentos utilizados serão: observação participante, levantamento documental, entrevistas e e realização de momentos para atividades matemáticas com a criança em diversos momentos escolares.

Referências bibliográficas

Danyluk, O. (1998). *Alfabetização Matemática: as primeiras manifestações da escrita infantil.* Porto Alegre: Sulina, Passo Fundo: Ediupf.

González-Rey, F. L. (2005). *Pesquisa qualitativa e subjetividade: os processos de construção da informação.* São Paulo: Cengage Learning.

Kamii, C. (2012). *A criança e o número. Implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação com escolares de 4 a 6 anos*. Campinas, SP: Papirus.

Piaget, J., & Szminska, A. (1981). *A Gênese do número na criança.* Rio de Janeiro: Zahar.

Vergnaud, G. (2014). *A criança, a matemática e a realidade.* Curitiba: Ed. Da UFPR.

Vigotski, L. S. (2009). *A construção do pensamento e da linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.

A formação em serviço dos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais de escolarização: saberes docentes e práticas pedagógicas

Marilene Xavier dos Santos[1], *Cristiano Alberto Muniz*[2]
[1]Universidade de Brasília – UnB, *mxavierpb@gmail.com*
[2]Universidade de Brasília – UnB, *cristianoamuniz@gmail.com*

Diante da complexidade da profissão docente, dos desafios na realização de suas práticas e da necessidade permanente de formação, este projeto é uma proposta de pesquisa que tem como objetivo analisar as possíveis implicações entre a formação em serviço, os saberes docentes e a práxis pedagógica de professores que ensinam matemática, nos anos iniciais de escolarização e que atuam na Rede Pública de Ensino do Distrito Federal. Os colaboradores da pesquisa vivenciaram um processo de formação oferecida pelo Ministério da Educação (MEC), em parceria com as Universidades Federais, os Estados, os Municípios e o Distrito Federal. Essa formação em serviço, realizada em 2014, foi uma das ações do Pacto Nacional de Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), cujo eixo central foi o ensino e aprendizagem da Matemática, além do aprofundamento e a ampliação da formação oferecida no ano de 2013 na área da Linguagem.

O PNAIC é um compromisso formal assumido entre Governo Federal, Distrito Federal, Estados, Municípios e a sociedade de assegurar que todas as crianças estejam alfabetizadas até os oito anos de idade, ao final do 3º ano do Ensino Fundamental. Acredita-se que ao realizar uma pesquisa na qual o pesquisador se insere no ambiente escolar, têm-se alguns desafios pela frente, pois cada escola tem a sua cultura construída por seus atores. Essa cultura representa o que as instituições de ensino possuem de diferente umas das outras. Cada escola tem sua história, sua forma de se organizar, sua identidade construída de acordo com o seu cotidiano, suas práticas pedagógicas, seus momentos de formação, sua localização geográfica, de acordo com o contexto histórico, cultural e social da população que atende, além das subjetividades individuais dos seus atores.

O caminho metodológico para a realização deste estudo será definido de acordo com o que pretendemos investigar: a relação entre formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais e as suas práxis pedagógicas. O ensino e a aprendizagem da matemática estão cercados de mitos e de desafios para o professor e

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 531–533

para as crianças. Nesse contexto, a metodologia a ser adotada deve possibilitar a imersão no espaço escolar com o intuito de investigar que movimentos foram gerados a partir da referida formação bem como analisar como os professores caracterizam essa formação, como se percebem em todo esse processo e como organizam o ensino para a construção de conhecimentos na área da matemática nos anos iniciais de escolarização. Para isso, faremos uso de entrevista semiestrutura, organizaremos rodas de conversa, de modo a entender como ocorre o fazer pedagógico dos profissionais, sujeitos da pesquisa. Propõe-se uma pesquisa qualitativa do tipo participante e a análise de conteúdo será feita a partir da proposta de Bardin (2011). O referencial teórico desta pesquisa será composto por quatro temas centrais: a formação continuada de professores a partir de autores como Gatti, Barretto e André (2011), Contreras (2012), Silva (2011), sobre as práticas formativas e as políticas públicas de formação docente. Os autores Fiorentini e Nacarato (2005), Serrazina e Oliveira (2010) fundamentam as discussões sobre a formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais e o processo de ensino e aprendizagem nessa área do conhecimento. Para aprofundamento em relação à práxis pedagógica, o estudo se apoiará nos estudos de Vázquez, (1968), Silva (2011) e Diniz-Pereira (2011). A pesquisa será desenvolvida em uma escola pública localizada na Região Administrativa de Ceilândia/Distrito Federal.

Referências bibliográficas

Alro, H., Skovsmose, O (2006). *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática* (1ª ed.). Belo Horizonte: Autêntica.

Bardin, L. (2011) *Análise de conteúdo.* Tradução Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, São Paulo.

Bittar, M. e. (2009). *A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais* (1ª ed.) Curitiba: CRV.

Contreras, J. (2012). *Autonomia de professores.* 2ª ed., São Paulo, SP: Cortez.

D'Ambrósio, U. (1996). *Educação matemática: da teoria à prática.* 19ª ed., Campinas: SP: Papirus.

Diniz-Pereira, J. E. (2011). *A pesquisa dos educadores como estratégia para construção de modelos críticos de formação docente*. In: Diniz Pereira, Júlio Emílio; Zeichner, Kenneth M. (Orgs.) *A pesquisa na formação e no trabalho docente*. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Fiorentini, D., & Nacarato A. M. (2005). *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática.* . Campinas, SP: Musa Editora - GEPFPM-PRAPEM-FE/UNICAMP.

Gatti, B. A., Baretto, E. S., & André, M. E. (2011). *Políticas docentes: no Brasil: um estado da arte.* Brasília: UNESCO.

Muniz, C. A. (Sd.). *Pedagogia – Educação e linguagem matemática - PEDEaD.*

Nacarato, A. M., Mengali, B. L., & Passos, C. L. (2014). *A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental – Tecendo fios do ensinar e do aprender.* 2ª ed., Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Serrazina, L.; Oliveira, I.(2010). *Trajectória de aprendizagem e ensinar para a compreensão. In: GTI – Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.). O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico (*pp. 43-59). Lisboa: Associação de Professores de Matemática,.

Silva, K. A. (jan/abril. de 2011). A Formação de professores na perspectiva crítico-emancipadora. *Revista Linhas Críticas,17*, 12-31.

Smole, K. S. (2013). *A matemática em sala de aula- reflexões e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental* (1ª ed.). Porto Alegre: Penso.

Vasquez, A. S. (1968). *Filosofia da Práxis.* Rio de Janeiro: Paz e Terra.

O Programa de Formação Contínua em Matemática de Portugal: narrativas das formadoras

Carlos André Bogéa Pereira[1], *Margarida Rodrigues*[2]
[1]Universidade São Francisco, *andre.bogea@hotmail.com*
[2]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, Universidade de Lisboa, *margaridar@eselx.ipl.pt*

Introdução

Entre os anos de 2005 e 2011, foi desenvolvido em Portugal o Programa de Formação Contínua em Matemática (PFCM), que alcançou os professores do 1º ciclo de escolarização, no primeiro ano de implantação, e 2º ciclo, no ano posterior.

Para este trabalho, apresentamos a visão de seis formadoras (duas Doutoras na área da Educação Matemática, docentes do Ensino Superior em ESE's de regiões distintas e coordenadoras dos grupos de formadores de professores nas suas respectivas ESE's; e as outras quatro, docentes com vasta experiência, nos agrupamentos/escolas do 1º Ciclo, oriundas do Mestrado de Educação Matemática), sobre o desenvolvimento do PFCM.

O nosso objetivo é refletir, a partir das narrativas, sobre a implementação do PFCM e suas contribuições para as formadoras. Tomaremos como aportes teóricos principais Connelly e Clandinin (1995), Serrazina (2012, 2013) e Sowder (2007).

Metodologia

A metodologia qualitativa se aproxima de uma investigação narrativa. Para produzirmos as narrativas utilizamos entrevistas, que foram gravadas, transcritas e analisadas, durante o segundo semestre do ano de 2015.

No processo de análise, organizamos as reflexões em três categorias, a partir dos pontos mais destacados nas narrativas das formadoras: as suas impressões sobre os objetivos do PFCM; o Ensino de Matemática no PFCM; e as contribuições do PFCM em suas atividades profissionais futuras.

Resultados e Discussões

No início, as formadoras enfrentaram um grande desafio: fazer com que os professores acreditassem no PFCM. Mas, foi o diálogo, o responsável pelo bom andamento dos encontros formativos.

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 535–537

A partir do trabalho colaborativo, formadoras e professores partiram do pressuposto de que para ensinar matemática seria necessário ter conhecimento matemático, caso contrário, a prática ficaria comprometida. Muitas atividades foram planejadas, levando em consideração o conteúdo programático a ser lecionado. Assim, a formação centrou-se nas práticas profissionais no contexto da profissão (Sowder, 2007).

Outro fator relevante para o bom andamento da formação foi o acompanhamento do trabalho do professor nas escolas, que foi apresentado pelas formadoras, não como mero trabalho de fiscalização, mas como momentos em que as soluções foram pensadas.

A organização de seminários finais foi considerada fundamental para a melhoria do trabalho dos professores. Foram momentos de troca de experiências (Serrazina, 2013), em que as formadoras puderam verificar a participação e envolvimento dos professores.

As formadoras consideraram este, como o período que mais discutiram sobre o ensino da matemática, o que contribuiu para as suas práticas letivas posteriores à conclusão do PFCM, isto porque seus conhecimentos matemáticos, didáticos e curriculares foram enriquecidos, e assim, passaram a refletir sobre a própria prática (Serrazina, 2012). Para elas, foi na reflexão sobre essas práticas (Schön, 1992), que os seus saberes profissionais se desenvolveram.

Considerações finais

O PFCM era constituído de formadores que já possuíam certa experiência, partindo do pressuposto que ser formador exige mais que domínio de conteúdo, exige a capacidade de dialogar sobre os conhecimentos a serem adquiridos. Mas, para que o PFCM se desenvolvesse de acordo com seus objetivos era necessário que todo o trabalho que envolvia os formadores e os professores fosse colaborativo.

Observamos que a colaboração existiu e foi a estratégia de trabalho utilizada para lidar com os problemas relatados pelos professores com relação ao ensino de matemática, constituindo-se em um dispositivo com um grande poder realizador (Boavida & Ponte, 2002).

As formadoras tomaram para si novos conhecimentos sobre o ensino de matemática. Do ponto de vista profissional, isto foi um grande ganho. Elas perceberam a formação como troca de saberes, assim ao mesmo tempo em que discutiram a matemática com os professores, também aprenderam mais nas vertentes matemática e didática. Isso acabou por contribuir para suas práticas futuras.

Percebemos então, as formadoras, como organismos contadores de histórias (Connelly & Clandinin, 1995), onde as concepções apresentadas por elas nos revelaram um processo de reflexão, que segundo Paiva (2003), poderá levar um formador de professores a conquistar uma compreensão das razões, motivos, valores e pressões que influenciam o seu trabalho pedagógico.

Referências bibliográficas

Boavida, A M. & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Org), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.

Connelly, M. F. & Clandinin, D.J. (1995). Relatos de Experiencia e Investigación Narrativa. In Larrosa, J. (et al.). *Déjame que te cuente: ensayos sobre narrativa y educación*. Editorial Laertes.

Paiva, E. de (Org.). (2003). *Pesquisando a formação de professores*. Rio de Janeiro: DP&A.

Schön, D. A. (1992). Formar professores reflexivos. In: Nóvoa A. *Os professores e sua formação* (pp. 79-92.). Lisboa: Dom Quixote.

Serrazina. L. (2013). O Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º ciclo e a melhoria do ensino da Matemática. *Da Investigação às Práticas, 3(*2), 75-97.

Serrazina. L. (2012). Contributo das práticas de formação para as práticas letivas: um estudo exploratório. In: Canavarro, A. P. (Ed. et al). (2012). *Investigação em Educação Matemática 2012. Práticas de ensino da Matemática.* Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Sowder, J. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 157-223). Charlotte: Information Age Publishing Inc. & NCTM.

Materiais manipuláveis e conceitos geométricos

Eurivalda Santana[1], *Nerivaldo Honorato da Cruz Santos*[2], *Maria Elizabete Souza Couto*[3]
[1]Universidade Estadual de Santa Cruz-Brasil, *eurivalda@uesc.br*
[2]Instituto Federal da Bahia-Brasil, *neryhonorato@hotmail.com*
[3]Universidade Estadual de Santa Cruz-Brasil, *melizabetesc@gmail.com*

Marco teórico

Lorenzato (1993) tem revelado que o ensino de Geometria está, praticamente, ausente das salas de aulas. Jesus (2013) acrescentou que quando o professor trabalha a geometria a metodologia adotada é baseada na utilização de recursos didáticos como o quadro, giz e livro didático tornando suas aulas "[...] monótonas e cansativas, tanto do ponto de vista do ensino, quanto da aprendizagem" (p.1). Apoiamos nesses estudos para estudar situações que possibilitem o envolvimento do aluno e a aprendizagem de conceitos geométricos.

Utilizamos o desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele (1953, como citado em Crowley, 1994) que defendeu que os alunos aprendem Geometria avançando em cinco níveis de compreensão dos conceitos: 1- Visualização; 2- Análise; 3- Dedução Informal; 4- Dedução Formal; 5- Rigor.

Para fundamentar as situações escolhemos a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, uma teoria cognitivista, que entende o conceito caracterizado como um tripé de três conjuntos indissociáveis: "S: de situações que dão sentido ao conceito; I: de invariantes nas quais assenta a operacionalidade dos esquemas; s: conjunto das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito" (Vergnaud, 1996, p. 166).

Assim, para estudarmos o desenvolvimento de um conceito e sua utilização ao longo do processo de aprendizagem, é fundamental considerarmos que a situação é o referente do conceito. Vergnaud (1996) afirmou que se estivermos interessados na aprendizagem e no ensino de qualquer conceito, precisamos entender que "é através das situações a resolver que um conceito adquire sentido [...]" (p.156). O conceito matemático adquire sentido para o indivíduo a partir de situações, apresentadas em forma de problemas, encontrados na realidade ou propostos pelo professor.

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 539–542

Nesse sentido, decorre que um conceito nunca deverá ser estudado isoladamente e sim, em situações que inter-relacionem vários conceitos, uma vez que, um sujeito constrói o conhecimento à medida que pensa sobre o assunto, vivencia diferentes situações reais e quando é capaz de estabelecer relações do conteúdo estudado.

Objetivos

Diante desse quadro, acreditamos ser essencial buscar possibilidades metodológicas que contribuam para a aprendizagem de conceitos geométricos. Assim, o objetivo foi analisar as contribuições que uma sequência de ensino, elaborada com situações que usam materiais manipuláveis, pode trazer para a aprendizagem de conceitos de cubo e de quadrado na Educação de Jovens e Adultos (EJA).

Metodologia

A pesquisa teve uma abordagem qualitativa, que "engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões" (Bicudo, 2006, p. 106).

Participaram 25 alunos da EJA de um colégio de nível médio da Região Sul da Bahia, Brasil. O conceito de sequência de ensino foi usado como sugere Santana (2010, p. 114) "um conjunto de situações elaboradas e dispostas de maneira que sejam abordados conceitos previamente selecionados para serem trabalhados".

1ª situação

A sequência de ensino foi elaborada em três situações que se complementam.

2ª situação

1º Leitura de texto → 2º Responder as perguntas do texto e discutir sobre as respostas.

1º Distribuição de material manipulável (folhas de jornais, tesoura, fita métrica e cola) para construção de quadrado com área $1m^2$.

↓

2º Com os quadrados construídos com jornal, montar um cubo.

3ª situação

1º Distribuição de materiais manipuláveis (dados e cubos mágicos) para subsidiar análise a respeito das relações interfigurais entre quadrado e o cubo.

A sequência foi aplicada em 02 horas de aula e utilizamos um gravador de áudio para registrar os diálogos dos sujeitos. A figura 1 apresenta o texto e as perguntas feitas.

Atividade - Uso Racional de Água

De acordo com a Organização das Nações Unidas, cada pessoa necessita de 3,3 m^3/pessoa/mês (cerca de 110 litros de água por dia para atender as necessidades de consumo e higiene). No entanto, no Brasil, o consumo por pessoa pode chegar a mais de 200 litros/dia. Gastar mais de 120 litros de água por dia é jogar dinheiro fora e desperdiçar nossos recursos naturais (Sabesp**1**, 2013). De posse das notas fiscais de contas de água e esgoto (NF), escolha uma, e responda o que se pede abaixo:

1 No último mês, quantos m^3 de água a família consumiu?
2 Quantos litros de água a família consumiu, nesse mês?
3 O consumo da família ficou dentro do que recomenda a Organização das Nações Unidas - ONU?

Figura 1. Texto e perguntas da 1ª situação.

A figura 2 apresenta os materiais manipuláveis da 2ª e da 3ª situação.

Figura 2. Materiais manipuláveis.

Resultados

Na sequência de ensino o aluno é o protagonista. Na 1ª situação com apoio do texto e das perguntas, foram feitas reflexões que serviram de base para elencar os elementos geométricos do cubo (arestas, faces, vértices), partindo do volume em m^3. Os alunos expressaram no momento das discussões a dificuldade em compreender o que significava o m^3 e não souberam informar quantos litros de água a família tinha consumido no mês, pois não sabiam fazer a conversão de m^3 em litros. O próprio aluno identificou as suas dificuldades.

Com a 2ª situação, a construção do quadrado com o jornal, os alunos refletiram e externaram sobre os elementos do quadrado e a sua classificação como paralelograma. A manipulação possibilitou a análise das medidas dos lados, da percepção sobre a medida dos ângulos internos e a melhor compreensão a respeito dos conceitos envolvidos.

Para a 3ª situação os alunos estavam mais motivados para tentar montar o cubo mágico e o pesquisador aproveitou a motivação e incentivou a percepção e discussão a respeito das relações interfigurais entre quadrado e cubo.

Em relação a aprendizagem, a maioria dos estudantes estava no nível de visualização, pois reconhecia a figura geométrica, aprendeu o vocabulário, mas tem dificuldade de reconhecer propriedades do quadrado e do cubo. Poucos foram os momentos que apresentaram elementos que pudéssemos identificar o nível 2 que é o de análise, pois expressavam propriedades das formas geométricas, mas apresentavam dificuldades para fazer inclusão de classe.

Referências bibliográficas

Bicudo, M. A. V. (2006). *Pesquisa em educação matemática*. Proposições, Campinas, v. 4, n. 10, p. 18-23.

Crowley, Mary, L. (1994). O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In M. M. Lindquist, A. P. Shulte (Org.). *Aprendendo e ensinando Geometria,* (pp. 1-19). São Paulo: Atual.

Jesus, G. B. (2013). Os Materiais Manipuláveis no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática: algumas implicações no trabalho do professor. *XV Encontro Baiano de Educação Matemática Educação Matemática na Formação de Professores:* um novo olhar UNEB CAMPUS X – Teixeira de Freitas – BA.

Santana, E. R. dos S. (2010). *Estruturas Aditivas: O suporte didático influencia a aprendizagem do estudante?* (Tese de doutoramento), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Vergnaud, G. (1996). A Teoria dos Campos Conceituais. In: J. Brun (Org.) *Didáctica das Matemáticas* (pp. 155-191). Lisboa: Instituto Piaget.

Mas afinal o que se avaliou na componente específica matemática nível 1 da PACC e qual o desempenho dos professores na sua realização?

Catarina Gonçalves[1], *Alexandra Gomes*[2]
[1]Escola dos Gambozinos, *catarinavasconcelosgoncalves@gmail.com*
[2]CIEC/IE, Universidade do Minho*, magomes@ie.uminho.pt*

Durante muitas décadas, em todo o mundo, os esforços para melhorar os sistemas educativos centraram-se na organização e na gestão das escolas e na melhoria e na inovação dos currículos. Atualmente, os governos e os responsáveis políticos têm vindo a dar cada vez mais importância à avaliação dos alunos, dos professores, das escolas e dos sistemas educativos. Nesta linha de ideias, este estudo irá centrar-se na avaliação dos professores do 1.º ciclo, através da análise da prova componente específica de Matemática nível 1, realizada em 2015, com o objetivo de se responder às seguintes questões de investigação: (1) Quais os conhecimentos matemáticos avaliados pela PACC componente específica – Matemática nível 1?; (2) Qual o desempenho dos professores dos grupos 110 e 230 na realização da PACC?.

Reflexões iniciais

Durante muitas décadas, em todo o mundo, os esforços para melhorar os sistemas educativos centraram-se na organização e na gestão das escolas e na melhoria e na inovação dos currículos. Atualmente, a melhoria da qualidade de ensino e dos professores encontra-se na primeira linha dos fatores críticos a ter em conta para melhorar a educação, destacando-se a emergência da avaliação dos professores.

O conhecimento do professor é considerado, inquestionavelmente, fulcral no processo de ensino e aprendizagem, na medida que determina o que se faz na sala de aula e a forma e o quê que o aluno aprende. No caso do professor do 1.º ciclo, esse conhecimento é crucial porquanto é responsável pelo início de um processo mais ou menos longo, de aprendizagem matemática, em que cada etapa depende altamente de cada uma das etapas anteriores. Deste modo parece-nos bastante pertinente estudar o conhecimento matemático que estes professores detêm. Por outro lado, estudar o conhecimento destes professor tem-se revelado uma tarefa difícil e complexa pois, tal como refere Gomes (2003, p. 61), "esse conhecimento apresenta-se numa forma heterogénea, formado por diferentes componentes interligadas e difíceis de isolar".

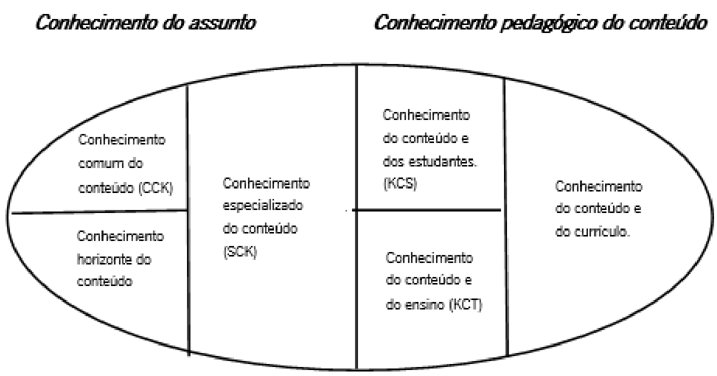
Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 543–547

Sobre o conhecimento matemático dos professores

Shulman e os seus colegas (Shulman, 1986) revolucionaram as investigações sobre o conhecimento do professor, na medida em que se focaram e destacaram o estudo da perceção do conteúdo por parte do professor como uma forma especial de conhecimento que, segundo estes autores, determinaria a sua prática de ensino. Posteriormente à investigação de Shulman (1986), vários autores, ao longo dos anos, acrescentaram e especificaram estas componentes do conhecimento profissional, focando-se, principalmente, no *conhecimento do conteúdo* e no *conhecimento pedagógico do conteúdo* (Grossman, 1995; Sherin, 1996; Shulman, 1987, citado em Baumert et al, 2010).

Ao longo dos anos, Ball e outros investigadores como Heather Hill e Hyman Bass, questionaram-se, o que na prática, "os professores precisam de saber sobre matemática para terem sucesso com os seus alunos" (Ball, Hill & Bass, 2005, p. 17).

Nesta linha de ideias, Hill, Ball e Schilling (2008) analisaram o conhecimento da matemática para ensinar e definiram o seu modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), representando-o como o esquema em baixo.



Vários estudos empíricos têm avaliado a influência das várias componentes do conhecimento dos professores na sua qualidade do ensino e na aprendizagem dos alunos (Baumert et al, 2010).

Baumert et al. (2010) investigaram a influência do conhecimento do conteúdo e também do conhecimento pedagógico do conteúdo na qualidade da instrução e no progresso matemático dos alunos do ensino secundário. Um dos resultados desse estudo destaca a importância fundamental do conhecimento pedagógico do conteúdo para o progresso matemático dos alunos, sendo decisivo para a qualidade da instrução. Por outro lado, destacou-se também o conhecimento do conteúdo, uma vez que se concluiu que o seu *deficit* pode comprometer o desenvolvimento do conhecimento pedagógico do conteúdo e, consequentemente, ter efeitos negativos sobre a instrução e o progresso dos alunos.

Estudo

Este estudo, que se integra num estudo mais amplo em que se pretende estudar o conhecimento matemático dos professores do 1.º ciclo, em Portugal, irá centrar-se na análise da prova componente específica de Matemática nível 1, que visava avaliar os "conhecimentos e competências exigidas para a função docente" (IAVE, 2016). Esta componente é uma das 24 componentes específicas da Prova de Avaliação de Conhecimentos e Capacidades, elaborada pelo Instituto de Avaliação Educativa (IAVE), com base no Decreto-Lei n.º 15/2007. Colocaram-se as seguintes questões de investigação: (1) Quais os conhecimentos matemáticos avaliados pela PACC componente específica – matemática nível 1?; (2) Qual o desempenho dos professores dos grupos 110 e 230 na realização da PACC?.

Para se responder à questão (1), fez-se uma análise de conteúdo da PACC, componente específica – nível 1, usando como base de análise o modelo MKT (Hill, Ball & Schilling, 2008) e o Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico de Matemática (MEC, 2013). Apesar de a Prova de Avaliação de Conhecimentos e Capacidades dos Professores já não ser, atualmente, um dos instrumentos de avaliação dos docentes em Portugal, a sua análise pode permitir que se avance mais um passo neste caminho tão ambíguo que é a avaliação de professores.

Relativamente à questão (2), analisaremos os dados fornecidos pelo Instituto de Avaliação Educativa (IAVE), relativos às classificações finais obtidas por cada candidato na Componente Específica da Prova de Conhecimento e Capacidades, realizada em 2015, na disciplina de Matemática nível 1.

Alguns resultados

Questão de Investigação 1

Constata-se que a prova se caracteriza como fechada, de escolha múltipla, apenas focada em avaliar os conteúdos. Deste modo, a prova em causa não avalia mais nenhuma dimensão do conhecimento matemático do professor a não o *conhecimento do conteúdo*, e mesmo a forma como se avalia este tipo de conhecimento pode ser questionada.

No que respeita aos conteúdos presentes na PACC específica - Matemática nível 1 e comparando-os com os que constam dos programas do 1.º e 2.º CEB (MEC, 2013), verifica-se que se tratam essencialmente dos mesmos. Ou seja, parece assumir-se que é suficiente os professores dominarem os conteúdos que irão lecionar.

Considerando o modelo MKT (Hill, Ball & Schilling, 2008), constata-se que apenas uma ínfima parte do conhecimento do conteúdo foi avaliada, a saber, uma parte referente ao Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK). Deste modo, parece-nos altamente questionável a forma como esta prova avalia o conhecimento dos professores.

Questão de investigação 2

Quanto à questão (2) conclui-se, posteriormente à análise dos dados fornecidos pelo IAVE – classificações finais obtidas por cada candidato na Componente Específica da Prova de Conhecimento e Capacidades, no geral, que os docentes tiveram um mau desempenho nesta prova. Note-se que a média das classificações finais obtidas pelos 451 docentes de Matemática do 1º e 2º ciclos que realizaram a prova foi de 52,6% e a mediana 53,3%, em que a nota máxima foi de 93,3 % e a menor classificação chegou a ser 16,7 %. Tendo em conta o tipo de questões da prova, os resultados dos 451 docentes revelaram-se muito preocupantes.

Reflexões finais

Concluiu-se este trabalho reformulando as questões do título desta comunicação e às quais se pretende responder com o continuar desta investigação:

– Afinal, o que deve/pode avaliar numa prova de avaliação de conhecimentos matemáticos para ensinar?

– Como se justifica o mau desempenho dos docentes na realização de uma prova que apenas aborda conhecimentos de matemática comum/básica?

Referências bibliográficas

Ball, D., Hill, H., & Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching. Who knows Mathematics Well Enough To Teach Third Grade, and How Can We Decide? *American Educator*, 14-46.

Baumert, J., Blum, W., Blum, W. B., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., . . . Neubrand, M. e.-M. (2010). Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal*, 13-180.

Decreto Lei nº 15/ 2007. (2007). *Alteração ao Estatuto da Carreira dos Educadores de Infância*.

Gomes, A. (2003). *Um estudo sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores de 1º ciclo. O problema dos conceitos fundamentais em Geometria.* (Tese de doutoramento) Universidade do Minho, Braga.

Hill, H. C., Ball, D.L. & Schilling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge conceptualizing and measuring teacher's topic-specific knowledge of students. *Jounal for Research in Mathematics Education, 39(4)*, 372-400.

IAVE. (2016). *Prova de avaliação de conhecimentos e capacidades.* Lisboa: IAVE.

MEC. (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: ME.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15 (2)*, 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Fondations of new reform. *Harvard Educational Review, 57*, 1-22.

Revisores

Alexandra Gomes
Ana Barbosa
Ana Boavida
Ana Henriques
Ana Isabel Silvestre
Ana Paula Aires
Ana Paula Canavarro
António Domingos
António Guerreiro
António Ribeiro
Cândida Barros
Catarina Delgado
Célia Mestre
Conceição Costa
Cristina Loureiro
Cristina Martins
Darlinda Moreira
Elisabete Cunha
Ema Mamede
Eurivalda Santana
Fátima Regina Jorge
Fátima Mendes
Floriano Viseu
Helena Rocha
Hélia Oliveira
Hélia Pinto
Henrique Guimarães
Isabel Cabrita
Isabel Vale
Jaime Carvalho e Silva
Joana Mata-Pereira
João Pedro da Ponte
Jorge Pinto
José António Fernandes
José Duarte
José Manuel Matos
José Portela
Leonor Santos
Lina Fonseca
Luís Menezes
Lurdes Serrazina
Magda Pereira
Manuel Saraiva
Manuel Vara Pires
Margarida Rodrigues
Maria Helena Martinho
Maria Madalena Dullius
Maria M. Geal
Maria Manuel Nascimento
Maria Paula Rodrigues
Maria Teresa Zampieri
Marli Teresinha Quartieri
Miguel Figueiredo
Nádia Silva
Nélia Amado
Nerivaldo Honorato Santos
Neusa Branco
Paula Catarino
Paulo Afonso
Pedro Palhares
Renata Carvalho
Rosa Antónia Tomás Ferreira
Sílvia Fernanda de Mendonça Figueirôa
Sofia Graça
Susana Carreira
Susana Colaço
Teresa Maria Monteiro
Teresa Neto
Teresa Pimentel
Waléria de Jesus Barbosa Soares
Zionice Garbelini Martos Rodrigues