REVISTA DE ESTUDIOS E INVESTIGACIÓN
EN PSICOLOGÍA Y EDUCACIÓN
eISSN: 2386-7418, 2017, Vol. Extr., No. 06
DOI: https://doi.org/10.17979/reipe.2017.0.06.2968

O ensino de frações no 1.º ciclo — Um estudo de caso

The teaching of fractions in primary school — A case study

Paula Cardoso, Ema Mamede
Universidade do Minho

Resumo

Este artigo descreve parte de um estudo sobre as práticas de ensino de frações no 1.º ciclo. Procura resposta às questões: 1)Como é que os professores exploram e articulam os significados quociente, parte-todo, medida e operador para ensinar frações? 2)Que dificuldades manifestam os professores no desenvolvimento das suas aulas sobre frações? Realizou-se um programa de trabalho colaborativo com 4 professores e observaram-se aulas, apresentando-se aqui um dos casos. Os resultados sugerem dificuldade dos professores no ensino de frações nomeadamente na seleção e exploração de tarefas, mas também na abordagem às diferentes interpretações de fração.

Palavras-chave: ensino de frações, conhecimento do professor, interpretações de fração

Abstract

This article describes part of a study about the teaching of fractions in primary school levels. It seeks answers to the questions: 1) How do teachers explore and articulate the interpretations quotient, part-whole, measure and operator to teach fractions? 2) What difficulties do teachers have in the development of their classes on fractions? Classes were observed and a collaborative work program was developed, involving four teachers — one of these cases is presented in here. Results point to some teaching fragilities, namely concerning the selection and approaching of the tasks, as well as the approach to the different interpretations of fractions.

Keywords: teaching of fractions, teacher's knowledge, interpretations of fractions

Introdução

A investigação tem vindo a sugerir dificuldades dos alunos com o conceito de fração (Behr, Wachsmuth, Post & Lesh, 1984; Kerslake, 1986; Monteiro, Pinto & Figueiredo, 2005). A investigação revela que, para além de dificuldades semelhantes com o conceito de fração, os professores consideram ser difícil o seu ensino (Alves & Gomes, 2009; Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Cardoso & Mamede, 2015; Post, Harel & Lesh, 1991).

Ensinar frações

A aquisição do conceito de número racional está completa apenas quando os alunos dominam os diferentes significados de fração traduzidos nos diferentes modelos de representação (ver Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Nunes *et al.*, 2004).

A literatura apresenta várias classificações de interpretações, significados de frações ou situações em que as frações são utilizadas. Kieren (1976) distingue, inicialmente, sete tipos de situações em que as frações são utilizadas passando mais tarde (Kieren, 1993) a considerar apenas quatro: quociente, medida, razão e operador. Posteriormente, Behr *et al.* (1983), baseados na classificação inicial de Kieren, distinguiram as mesmas situações embora considerando medida e parte-todo como dois modelos distintos. Marshall (1993), baseada no conceito de 'schema', apresenta uma classificação muito idêntica à de Behr e colegas, distinguindo situações com a mesma designação. Mais recentemente Nunes *et al.* (2004), apresentaram uma classificação baseada no significado dos valores envolvidos na fração, distinguindo as situações quociente, parte-todo, operador e quantidades intensivas.

Por estarem incluídos nas orientações curriculares portuguesas mais recentes e por serem transversais às classificações apresentadas, foram selecionados para o estudo aqui apresentado os significados quociente, parte-todo, medida e operador. Entendam-se os mesmos da seguinte forma: (a) no significado quociente o denominador da fração representa o número de recipientes e o numerador representa o número de itens inteiros contínuos a dividir pelos recipientes. Neste tipo de situações, a fração representa ainda a parte de item que cabe a cada recipiente; (b) no significado parte-todo o denominador da fração representa o número de partes em que o todo é dividido e o numerador indica o número dessas partes que são retiradas; (c) no significado medida, a fração $\frac{1}{b}$ ($b \neq 0$) é utilizada repetidamente para determinar uma distância; frequentemente é acompanhada por uma reta numérica ou uma imagem de um instrumento de medida, sendo esperado que os alunos meçam a distância de um ponto a outro em termos de $\frac{1}{b}$ unidades; (d) no significado operador o denominador representa o número de grupos iguais em que o conjunto de elementos foi dividido e o numerador representa o número desses grupos que lhe foram retirados.

Conhecimento dos professores sobre os números racionais

Estudos centrados no conhecimento dos professores sobre os números racionais sugerem que estes são consideravelmente menos confiantes e menos bem-

Correspondencia: Paula Cardoso, p.cardoso.sousa@netcabo.pt
Selección y *peer-review* bajo responsabilidad del Comité Organizador del XIV Congreso Internacional Galego-Portugués de Psicopedagogía

sucedidos no domínio dos números racionais do que no domínio dos números inteiros (Ball, Hill & Bass, 2005). Post, Harel, Behr e Lesh (1991) conduziram um estudo com 218 professores (níveis 4-6) no qual se pretendia traçar o perfil dos mesmos relativamente ao seu conhecimento sobre os números racionais. Os autores identificaram dificuldades diversas, nas quais se incluem dificuldades com as interpretações de fração e com a ordenação e equivalência de frações.

Tirosh, Fischbein, Graeber e Wilson (1998) procuraram avaliar o conhecimento de alunos da formação inicial de professores relativamente aos números racionais. Na primeira parte do estudo participaram 147 futuros professores do ensino elementar. Estes autores sublinham que o conhecimento dos alunos da formação inicial é segmentado e rígido, nomeadamente na redução da Matemática a uma coleção de técnicas de cálculo desprovidas de justificação formal, e muitas vezes até utilizadas de forma intuitiva. Mais ainda, concluíram que os futuros professores tendem a alargar o seu conhecimento sobre os números inteiros aos números racionais, aplicando inapropriadamente propriedades daqueles a estes.

Em Portugal, os resultados obtidos por Pinto e Ribeiro (2013) através da aplicação de um questionário a 27 alunos da formação inicial de professores sugerem que estes possuem um conhecimento limitado de número racional. Sugerem, designadamente, dificuldades com os significados de frações (quociente, parte-todo e operador), com a compreensão do papel da unidade de referência e com a equivalência, ordenação e densidade dos números racionais. Mamede e Pinto (no prelo) aplicaram um questionário a 86 alunos, futuros professores do 1.º ciclo do Ensino Básico, a frequentar cursos de Mestrado em Ensino de diferentes instituições de Ensino Superior do norte de Portugal, com o objetivo de analisar o conhecimento destes sobre frações. Os resultados sugerem: dificuldades com a compreensão do papel da unidade de referência; fraco domínio dos significados de fração, mormente no âmbito de problemas envolvendo a interpretação quociente e no âmbito da representação de números na reta numérica, quando números diferentes de 1 são usados como referência na reta e quando é necessária uma redefinição da escala; fraco domínio da propriedade de densidade do conjunto dos números racionais; e dificuldades com a ordenação e equivalência de frações.

Porém, são escassos os estudos centrados na prática do professor relativamente ao conceito de fração. Tendo presente as mais recentes orientações curriculares que preconizam uma abordagem mais aprofundada às frações (MEC-DGE, 2012, 2013), foi conduzida uma investigação que procurou caraterizar as práticas de ensino no 1.º ciclo relativamente ao conceito de fração, enquanto participantes de um programa de trabalho colaborativo com a investigadora – uma das autoras deste artigo. Esta investigação procurou responder às seguintes questões: a) Como é que os professores exploram e articulam os significados quociente, parte-todo, medida e operador para ensinar frações? b) Que dificuldades manifestam os professores no desenvolvimento das suas aulas sobre frações?

Metodologia

O presente estudo segue uma metodologia qualitativa, dado que se pretende uma descrição e interpretação de fenómenos educativos no seu ambiente natural (Bogdan & Biklen, 1999; Merriam, 1998). Optou-se por um *design* de estudos de caso múltiplos (ver Yin, 2010), dado que esta opção é particularmente adequada quando se pretende responder a questões do tipo “como?” e “porquê?” e se pretende uma profunda compreensão dos acontecimentos.

Participantes

Participaram nesta investigação quatro professores de uma escola pública do distrito de Braga, Portugal. Por constrangimentos de espaço, apresentam-se aqui apenas resultados relativos a um dos casos – o da professora Inês (nome fictício), que tinha treze anos de experiencia de ensino, dez deles no 1.º ciclo do ensino básico e lecionava uma turma do 2.º ano de escolaridade com 25 alunos (7 - 8 anos de idade). De acordo com a professora, os alunos não haviam sido até então introduzidos formalmente ao conceito de fração.

O trabalho colaborativo

O programa de trabalho colaborativo organizou-se em ciclos de atividades, consistindo cada ciclo na seguinte sequência: reuniões de grupo, com todos os professores participantes, para reflexão sobre as aulas observadas e preparação das aulas a observar; observação de aulas de cada um dos professores participantes; e entrevista individual, para reflexão sobre as aulas observadas — esta entrevista teve lugar imediatamente após cada aula observada.

Foram realizados cinco ciclos de atividades (sete reuniões de trabalho conjunto — uma reunião preliminar, uma reunião somente para preparação de aulas, quatro de reflexão/preparação de aulas, e uma somente para reflexão sobre aulas observadas — seis a sete aulas observadas para cada um dos professores e igual número de entrevistas individuais para reflexão sobre as mesmas).

As sessões de trabalho para preparar as aulas incluíram a análise e discussão dos diferentes significados de fração referidos nas orientações curriculares, bem como das propostas dos professores e da investigadora para introdução do conceito de fração. A seleção e implementação das tarefas em sala de aula foi sempre da total responsabilidade dos professores. As tarefas apresentadas nas reuniões de trabalho conjunto incidiam sobre diferentes significados de fração (quociente, parte-todo, medida e operador) e debruçavam-se sobre a representação, a equivalência e a ordenação de frações nestes significados.

As aulas e sessões de trabalho foram áudio gravadas, tendo sido também realizados registos fotográficos no caso das aulas. Foram ainda realizadas notas de campo pela investigadora. Durante as aulas, a investigadora desempenhou sempre o papel de observadora não participante, não fazendo, portanto, qualquer intervenção no desenvolvimento das mesmas.

A análise de dados

A análise de dados recolhidos durante o programa de trabalho colaborativo teve como base o modelo sobre o conhecimento do professor apresentado por Ball *et al.* (2008). Assim sendo, a interpretação da informação recolhida passou pela categorização dos diversos aspetos analisados segundo os diferentes parâmetros daquele modelo: aspetos do conhecimento de conteúdo e aspetos do conhecimento pedagógico de conteúdo (ou conhecimento didático) dos professores relativamente ao ensino do conceito de fração.

Resultados

Os resultados obtidos sugerem dificuldades da professora Inês na introdução do conceito de fração. Algumas destas dificuldades são agora apresentadas.

Nas transcrições dos diálogos realizados nas aulas, a letra A representa a intervenção de um aluno – numerada de acordo com a ordem em que diferentes alunos intervêm no diálogo, Prof. representa a intervenção da professora, e Vv representa a intervenção simultânea de diversos alunos.

A representação pictórica na interpretação quociente

A professora Inês utilizou a interpretação quociente para introduzir o conceito de fração. Selecionou para isso um suporte pictórico que levantou algumas dúvidas entre os alunos. A Inês apresentou uma situação de partilha equitativa na qual se pretendia partilhar uma tablete de chocolate entre duas crianças, e perguntou aos alunos "Quero saber duas coisas: Como é que repartiam ou dividiam o chocolate pelos meninos? Quanto é que come cada menino?". A tablete de chocolate encontrava-se previamente dividida em 18 partes iguais (3x6), sendo expectável que este facto influenciasse as respostas dos alunos. Com efeito as respostas dos alunos foram "come 9"; "2 partes", "3 filas", "metade", "cada come 3 barras (6÷2=3)", "meio chocolate", "uma parte" (Figura 1). A professora fez uma exploração pedagogicamente enriquecedora desta tarefa, registando todos os tipos de resposta no quadro e discutindo as mesmas com os alunos (Transcrição 1). Não obstante, observa-se que a professora destacou as respostas "metade" e "meio chocolate" em detrimento de outras, sem justificar o seu procedimento. De forma a evitar situações como esta, Inês poderia, nomeadamente, ter selecionado um desenho de um chocolate que não estivesse previamente dividido em partes iguais. Face às respostas dos alunos, a professora deveria ter esclarecido que diferentes nas respostas dos alunos estavam envolvidas diferentes unidades de referência.

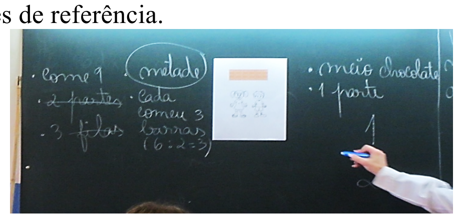

Figura 1. Resposta dos alunos à tarefa sobre a partilha equitativa de 1 tablete de chocolate por 2 meninos.

Transcrição 1.
Introdução à interpretação quociente

Prof. — Quem escreveu 9 pedaços, que explique porquê.
A1 — O chocolate tem 18 bocadinhos. Se cortarmos ao meio, ficam 9 para cada um.
Prof. — Tínhamos 18 pedaços. Se dividimos por 2 meninos, cada um come 9 pedaços.
[…]
Prof. — Estão todas bem… Tirando a resposta das "2 partes". Mas o que eu queria era a metade [rodeia a metade – ver **Erro! A origem da referência não foi encontrada.**]. Ou seja, nós dividimos um chocolate por quantos meninos?
Avv — Dois.
Prof. — [Escreve no quadro 1 e por baixo 2 – ver Figura 2]
[…]
Prof. — Significa que temos 1 chocolate que vai ser dividido por…
Avv — Dois meninos.
Prof. — Então cada menino come quanto?
Avv — Nove.
Avv — Metade.
Prof. — Está bem. Cada menino come quanto? Olhem para a imagem: 1 para 2, 1 a dividir por 2.
[…]
Prof. — Significa que cada menino vai comer um meio.

A seleção de tarefas e os suportes pictóricos das mesmas devem ser criteriosamente pensados de acordo com a finalidade da tarefa. Mais ainda, aquando da planificação de aula, o professor deve perspetivar todas as respostas possíveis às tarefas propostas aos alunos. Este aspeto particular da preparação de uma aula é especialmente importante quando se trata de introduzir um novo conceito, uma vez que estes, para além de momentos decisivos da aprendizagem, são momentos durante os quais os alunos deverão ver todas as suas dúvidas esclarecidas.

A interpretação parte-todo e a unidade de referência

A professora apresentou aos alunos um círculo dividido em 4 partes iguais. Numa das partes estava escrito $\frac{1}{4}$. A professora introduziu então os alunos ao significado do numerador e do denominador da fração na interpretação parte-todo. Ainda assim não foi discutida qual a unidade de referência envolvida na tarefa. Inês apenas referiu que "[…] o denominador indica o número total de partes iguais que formam a unidade". Mais ainda, nas tarefas subsequentes a professora não diversificou a unidade de referência que era sempre um círculo, um retângulo, um quadrado, etc. (Figura 2). Por exemplo, "um meio" de um retângulo em que este é a unidade não é o mesmo que "um meio" de dois retângulos em que estes são a unidade. Este tipo de abordagem conduziria os alunos a uma reflexão mais profunda sobre a interpretação parte-todo e sobre a importância de identificar-se claramente a unidade a cada tarefa.

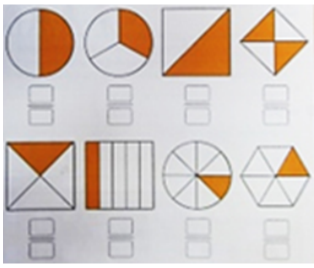

Figura 2. Problema sobre a representação de $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ na interpretação parte-todo.

A interpretação operador e a utilização de procedimentos algébricos

Para introduzir os alunos ao conceito de fração na interpretação operador a professora escreveu no quadro "$\frac{1}{2} \times 6 = 6 \div 2 = 3$" e declarou "Como é que de $\frac{1}{2}$ vezes 6 chegamos a 6 a dividir por 2? Nas frações, quando temos $\frac{1}{2}$ vezes 6, fazemos 1 vezes 6, que dá 6 e 6 a dividir por 2. Depois vou à tabuada do 2 ver que número dá seis: 2 vezes 1, 2, 2 vezes 2, 4, 2 vezes 3, 6". Os alunos não pareciam acompanhar as explicações apresentadas. A professora poderia antes ter começado por apresentar o significado dos valores do numerador e do denominador na interpretação operador, seguindo-se a representação pictórica de frações na mesma interpretação. E depois sim, poderia ter abordado expressões como "$\frac{1}{2}\times6=6\div2=3$".

Posteriormente, a professora propôs aos alunos o seguinte problema: "O João tinha 8 rebuçados e comeu $\frac{1}{4}$ desses rebuçados. Rodeia os rebuçados que o João comeu". Solicitava-se ainda que os alunos completassem: "$\frac{1}{4}\times8=$___ ou $8\div4=$____"; Um quarto de oito é ______ ". A professora sugeriu aos alunos: "primeiro fazem as contas e depois rodeiam só o resultado dessas contas". A sugestão da professora remete de imediato para a aplicação de procedimentos algébricos. Note-se que alguns dos alunos que realizaram os cálculos corretamente manifestaram dificuldades em rodear os rebuçados, tal como solicitado no enunciado. Este facto indicia a possibilidade de os alunos não dominarem o significado dos valores do numerador e do denominador na interpretação operador.

Na aula seguinte, a professora abordou a representação pictórica de frações na interpretação operador e referiu o significado dos valore do numerador e do denominador nesta interpretação.

Articulação entre diferentes interpretações de fração

Nas aulas observadas, Inês abordou os conteúdos de forma segmentada, raramente interpolando tarefas envolvendo diferentes interpretações – a professora começou por abordar a interpretação quociente, depois a parte-todo e, finalmente, a operador. A articulação destas interpretações promoveria a consolidação de conhecimentos e a integração de diferentes interpretações de fração. Uma situação em que tal sucedeu consistiu na seleção, para uma mesma aula, de problemas sobre a representação pictórica de frações nas interpretações parte-todo e operador.

No conjunto das aulas observadas, a professora explorou muito pouco a articulação das diferentes interpretações de fração. Isto pode sugerir que a professora não reconhece a importância deste aspeto na construção do conceito de fração ou que a professora não se sente confortável em realizar esta articulação.

Discussão e conclusões

Os resultados obtidos sugerem algumas fragilidades da professora na abordagem ao conceito de fração em sala de aula. A seleção de tarefas para a sala de aula é um dos aspetos fundamentais das práticas de ensino, motivo pelo qual esta seleção deve ser realizada cuidadosamente de modo a que os objetivos das aulas sejam devidamente cumpridos. Porém, verificaram-se algumas inconsistências resultantes de discrepâncias entre aquilo que era pedido aos alunos e o tipo de respostas que eram consideradas corretas. Designadamente, perante uma ilustração em que o item a partilhar se encontra previamente dividido em 18 partes iguais, os alunos tendem a responder que cada recipiente receberá 9 partes do item. Nestes casos, a professora destacou apenas as respostas dos alunos que iam ao encontro do que havia sido idealizado para a tarefa – um meio – em vez de considerar todas as respostas corretas, explicando o contexto de cada uma delas. Alternativamente, a professora poderia ter selecionado ilustrações de itens que não estivessem previamente divididos em partes iguais.

Os resultados sugerem também fragilidades na abordagem à interpretação parte-todo: o papel da unidade de referência, aspeto essencial na compreensão das interpretações de fração, tende a ser muito pouco discutido em sala de aula. Por exemplo, para abordar-se a representação pictórica de frações, a unidade de referência era apenas subentendida como sendo o total da figura geométrica apresentada (um retângulo, um círculo, um quadrado), não havendo uma clara e devida referência a este aspeto. Na verdade, a compreensão da unidade de referência levanta frequentemente dúvidas entre os alunos, tal como é referido por diversos autores (ver Hart, 1981, Lesh *et al.*, 1987, Post *et al.*, 1991, Tirosh *et al.*, 1998).

No que respeita à interpretação operador, os resultados sugerem uma tendência para a realização de procedimentos algébricos enfatizando a regra "multiplicar pelo numerador e dividir pelo denominador" para calcular $a\times\frac{b}{c}$, sendo *a*, *b* e *c* números inteiros ($c\neq0$). No entanto, é importante abordar o significado do numerador e do denominador de modo a justificar a aplicação de tais procedimentos. Resultados obtidos por Pinto e Ribeiro (2013) revelam que, no contexto da interpretação operador, alunos da formação inicial de professores aplicam procedimentos algébricos sem conseguirem relacioná-los com representações pictóricas realizadas pelos próprios.

É igualmente importante proporcionar aos alunos oportunidades de estabelecerem articulações entre as diferentes formas de representação de frações (Mamede, 2008). Contudo, estas oportunidades não foram promovidas nas aulas observadas. De um modo geral, as tarefas tendem a ser a implementadas de forma segmentada, isto é, quando uma determinada interpretação de fração é abordada, são selecionadas apenas tarefas envolvendo essa mesma interpretação. Esta opção didática não favorece a articulação entre as diferentes interpretações. Seria pois desejável que, à medida que os alunos vão aprendendo novas interpretações, a seleção de tarefas inclua também as interpretações anteriormente abordadas.

Em suma, os resultados deste estudo, apesar de não serem passíveis de generalização, sugerem fragilidades no conhecimento didático do professor do 1.º ciclo. A verificação destas fragilidades sugere que modificações no currículo nem sempre são acompanhadas pelas correspondentes alterações nas práticas de ensino dos professores. Assim sendo, parece premente facultar-se aos professores formação contínua, no âmbito das frações, focada em aspetos de ambos os conhecimentos didático e de conteúdo.

Referências

Ball, D., Hill, H., and Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching. Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(3), 14-46.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. C. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education* 59(5), 389-407.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). Rational-Number Concepts. In R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 92-127). New York: Academic Press.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T., & Lesh, R. (1984). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15 (5), 323-341.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1999). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Cardoso, P. & Mamede, E. (2015). O conceito de fração – um estudo sobre o conhecimento de professores do 1.º ciclo. *Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación*, Extr.(6), 229-233.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors – A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project.* Berkshire: NFER-NELSON.

Kieren, T. (1976). On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement: Paper from a Research workshop*, (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. (1993). Fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter & E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 49-84). Hillsdale, NJ: Erlbaum

Hart, K. (1981). Fractions. In K. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, (pp. 66-81). London: John Murray Publishers.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations. In C. Janiver (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mamede, E. (2008). Um pouco mais sobre Frações. In Ema Mamede (Ed.), *Matemática — ao encontro das práticas — 2.º ciclo.* Braga: Universidade do Minho – Instituto de Estudos da Criança.

Mamede, E., & Pinto, H. (no prelo). Pre-service Elementary School Teachers' ideas about fractions. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics),* n. X

MEC-DGE (2012). *Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática*. Lisboa: Direção Geral de Educação. Ministério da Educação e Ciência. Acedido em http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf

MEC-DGE (2013) *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Direção Geral de Educação. Ministério da Educação e Ciência. Acedido em http://dge.mec.pt/metascurriculares/index.php?s=directorio&pid=17

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A Aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, 14(1), 89-104.

Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Evans, D., Wade. J. & Bell, D. (2004). Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching. *Annual Meeting for the Association pour la Recherche sur le Développement des Compétences*, Paper presented in Paris : 28-31, January.

Pinto, H., & Ribeiro, C. M. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos – o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas,* 3(1), 80-98.

Post, T., Harel, G., Behr, M. & Lesh, R. (1991). Intermediate Teachers' Knowledge of Rational Number Concepts. In E. Fennema, T. Carpenter, S. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 177-198). NY: State University of NY Press.

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O., & Wilson, J. W. (1998). *Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers.* Retrieved from: http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/tirosh/Pros.El.Tchrs.html.

Yin, R. (2010). *Estudo de caso. Planejamento e métodos* (4.ª ed.). Porto Alegre: Bookman.