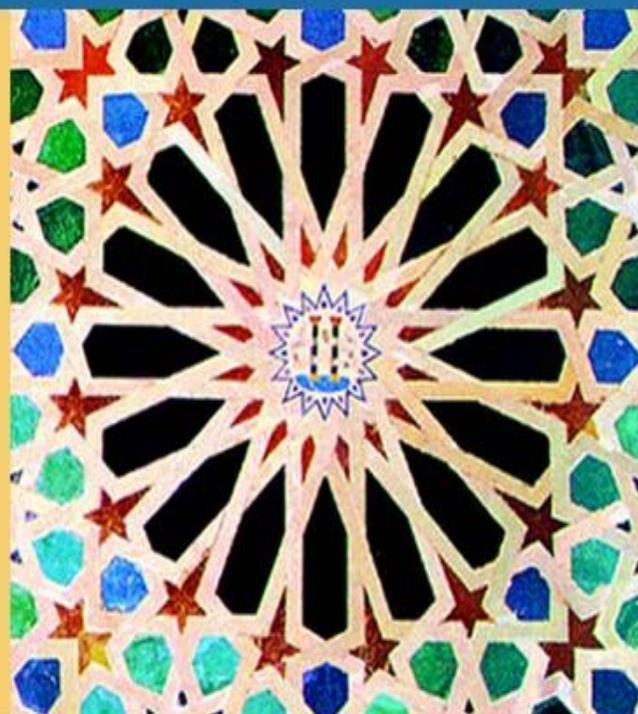


Métodos Numéricos en Ingeniería 2005

Granada, 4 - 7 de Julio

Búsqueda por Autor
Búsqueda por Título
Búsqueda por Área



SEMNI

Sociedad Española de Métodos
Numéricos en Ingeniería

APM|AC

Associação Portuguesa de Mecânica
Teórica, Aplicada e Computacional



E.T.S. de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos
de la Universidad de Granada

VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DE LA FORMULACIÓN COMPLEJA DEL ROCKING MOTION

Francisco Prieto C.^{1*}, Paulo B. Lourenço ² y Alfredo C. Costa³

1,2: Departamento de Engenharia civil
Escola de Engenharia
Universidade do Minho
4800-058 Guimaraes (Portugal)

e-mail¹: fprieto@civil.uminho.pt, web: [http:// www.civil.uminho.pt/masonry](http://www.civil.uminho.pt/masonry)

e-mail²: pbl@civil.uminho.pt, web: [http:// www.civil.uminho.pt/masonry](http://www.civil.uminho.pt/masonry)

3: Laboratorio Nacional de Engenharia Civil (LNEC)

Av. Brasil, 101

1700-066 Lisboa

e-mail³: alf@lneec.pt

Palabras clave: Rocking Motion, Experimental, Construcciones Históricas, Terremotos

Resumen. *En este trabajo se confirma experimentalmente una nueva formulación del problema de los bloques rígidos sometidos a vibraciones externas. Un estudio sistemático de las respuestas del sistema permite determinar los valores de los parámetros relevantes. La nueva formulación hace más sencilla la implementación de técnicas computacionales para el problema de varios tipos de mecanismos acoplados. En las respuestas analizadas, tanto para régimen libre como forzado, se ha observado un buen acuerdo entre teoría y experimento.*

1 INTRODUCCIÓN

Se puede definir el movimiento de Rocking Motion (RM) como la oscilación que tiene lugar en los cuerpos rígidos cuando el centro de rotación cambia instantáneamente de un punto a otro al ser alcanzada una determinada posición. En ese momento tiene lugar una fuerza impulsiva que produce pérdida de energía.

El movimiento de rocking ha sido objeto de interés para los investigadores desde hace más de un siglo. Sin embargo, fue Housner en su trabajo pionero [1] quien puso de manifiesto la complejidad asociada al fenómeno del RM así como la presencia de ciertos comportamientos que no eran intuitivos.

Trabajos posteriores ([2],[3]) han revelado un comportamiento complejo incluyendo la presencia de orbitas caóticas para ciertos valores de los parámetros del sistema.

Desde el punto de vista de la ingeniería sísmica, el estudio del RM juega un papel fundamental a la hora de comprender la dinámica de diversos tipos de estructuras.

La resistencia a tracción de las construcciones de fábrica formadas por bloques de piedra (columnas, estatuas, templos, etc) depende fundamentalmente de su peso propio. Este hecho las hace especialmente vulnerables a movimientos laterales inducidos por terremotos. Si se tiene en cuenta, además, la alta capacidad que tales estructuras tienen a compresión, el modelo tradicional de una construcción continua deja de ser adecuado a la hora de analizar su comportamiento dinámico. En lugar de ello, deben considerarse modelos que permitan interfases entre las partes y rotaciones relativas, como es el caso de un ensamble de bloques rígidos acoplados entre sí por medio de rótulas plásticas.

A pesar de que el fenómeno del RM ha sido abordado por diversos autores, debido a la complejidad del problema y a la escasez de datos experimentales, su estudio, tanto teórico como experimental, sigue siendo relevante para proponer criterios adecuados en la evaluación del riesgo sísmico de las construcciones de fábrica.

Uno de los mayores inconvenientes que presenta el tratamiento clásico del RM es que las ecuaciones diferenciales del movimiento que utiliza son de tipo discontinuo *-piecewise-*, lo que dificulta tanto la generalización a un número mayor de bloques como la utilización de teoremas y resultados conocidos del análisis.

Por otro lado, en dicho marco, no se cuenta con un modelo matemático para las fuerzas de impacto. El impacto se implementa como un coeficiente de restitución que multiplica a la velocidad angular cada vez que el bloque pasa por la posición de equilibrio. Esto dificulta la tarea de crear modelos que permitan generalizar a interacciones entre más cuerpos.

El presente trabajo aporta una prueba experimental de una formulación nueva del problema del RM que fue propuesta en un trabajo anterior [4]. El objetivo es validar la mencionada formulación *-denominada compleja-* y nuevas modelizaciones computacionales basadas en ella que están siendo estudiadas.

2 RESUMEN DE LA FORMULACIÓN COMPLEJA

La formulación compleja del RM *-de tipo lagrangiano-* introduce un ángulo complejo aprovechando la simetría del problema. El resultado es que se cuenta con ecuaciones tanto para el módulo del ángulo como para su fase (resultando ésta ser proporcional a una función de Heaviside). Por otro lado, los impactos son incorporados mediante fuerzas generalizadas de tipo Delta de Dirac [5].

El sistema resultante de ecuaciones diferenciales no es discontinuo para el rango de valores del ángulo de Rocking como ocurría en el caso de la formulación de Housner.

En la figura 1 se muestra la geometría de un bloque simple sometido a una acción lateral. Expresando el ángulo θ en forma compleja mediante un módulo r y una fase ψ ,

$$\theta = r e^{i\psi} \tag{1}$$

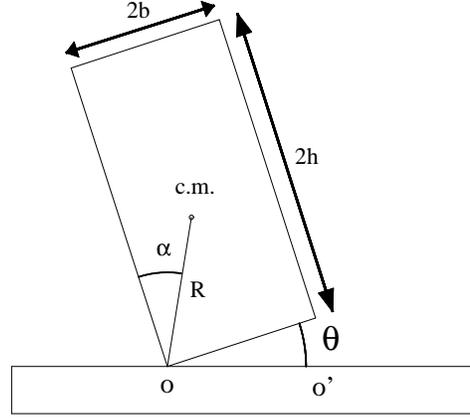


Figura 1: Parámetros geométricos y dinámicos de un bloque simple

se propone la siguiente función lagrangiana real,

$$L = \frac{I}{2}(r'^2 + r^2\psi'^2) - MgR\cos(\alpha - r) \quad (2)$$

donde; r' y ψ' indican derivación con respecto al tiempo (denotado por τ), M es la masa del bloque, I es el momento de inercia medido o bien desde O o bien desde O' . Finalmente α y R se definen según la figura 1.

La energía del sistema¹ es

$$E = \frac{I}{2}(r'^2) + \frac{p_\psi^2}{2Ir^2} + MgR[\cos(\alpha - r) - \cos(\alpha)] \quad (3)$$

donde p_ψ es el momento conjugado de la variable generalizada ψ que, al no depender L explícitamente de ella, es una magnitud conservada y, por tanto, un parámetro bien definido del sistema. De ahora en adelante p_ψ se denotará por: $p_\psi \equiv l$.

La energía de la ec.(3) corresponde a la de una partícula que se mueve con energía cinética $(I/2)r'^2$ en un pozo de potencial efectivo $V_{eff}(r)$ dado por

$$V_{eff}(r) = \frac{l^2}{2Ir^2} + MgR[\cos(\alpha - r) - \cos(\alpha)]. \quad (4)$$

Este potencial tiene una parte atractiva, correspondiente a la acción de la gravedad y una parte centrífuga: $\frac{l^2}{2Ir^2}$, que es resultado de la barrera infinita en $r=0$.

¹Normalizada para que la parte potencial de E se anule cuando $r=0$

Las acciones de impacto y de sismo se introducen como fuerzas externas generalizadas en las ecuaciones de D'Alembert (ecuaciones (5) y (6)).

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial r'}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = Q_r^d + Q_r^s \quad (5)$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi'}\right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = Q_\psi^d + Q_\psi^s \quad (6)$$

Se denotan por Q_r^d y Q_r^s las fuerzas generalizadas de la coordenada r para damping y sismo respectivamente. Para la coordenada ψ se tienen Q_ψ^d y Q_ψ^s análogamente.

En [4] se encontró que era adecuado el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} Q_r^d &= \left(\frac{\ln(\mu)I}{\pi}\right)\psi' r' & (7) \\ Q_r^s &= Ma(\tau)R\cos(\alpha - r)\cos(\psi) \\ Q_\psi^d &= 0 \\ Q_\psi^s &= 0 \end{aligned}$$

siendo $a(\tau)$ la aceleración de la fuerza externa y μ el coeficiente de restitución de la velocidad angular definido por:

$$\mu = \frac{\dot{\theta}^a}{\dot{\theta}^b} \quad (8)$$

donde $\dot{\theta}^b$ y $\dot{\theta}^a$ son las velocidades angulares justo antes y después del choque.

Mediante la normalización,

$$\begin{aligned} \chi &\equiv \frac{r}{\alpha} & (9) \\ t &\equiv p\tau \end{aligned}$$

(donde p es un parámetro con unidades de frecuencia y dado por $p \equiv \sqrt{MgR/I}$) y usando la notación de Newton para las derivadas con respecto al tiempo adimensional t , se obtiene la siguiente ecuación diferencial para el módulo del ángulo θ normalizado (ver [4]).

$$\ddot{\chi} = \frac{l^2}{\chi^3} - \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha - \alpha\chi) + \frac{2\ln(\mu)}{\pi\chi^2}\dot{\chi}l + \frac{a(t/p)}{g\alpha}\cos(\alpha - \alpha\chi)\cos(\psi) \quad (10)$$

La ecuación (10) se integra numéricamente mediante el método de Runge-Kutta-Fehlberg de paso constante para un conjunto dado de condiciones iniciales y parámetros. Los resultados obtenidos son comparados con las respuestas del experimento.

3 INVESTIGACIÓN EXPERIMENTAL

Para el conjunto del trabajo experimental, se cuenta con un conjunto de 4 bloques de granito tipo azul (ver figura 2) de las siguientes características:

- densidad = 2700 kg/m^3
- resistencia mecánica a compresión = 1380 Kg/cm^2
- resistencia mecánica a flexión = 230 Kg/cm^2
- porosidad aparente (porcentage) = 0.40.

Las probetas fueron pulidas en sus bases a fin de conseguir un desempeño mejor. Además de las cuatro probetas, se dispone de una base pulida del mismo material sobre la que se realizan los tests. Esta base se fijó a la mesa sísmica mediante tornillos de anclaje.

Para evitar una degradación rápida del material, las piedras fueron cortadas de modo que sus esquinas no fuesen totalmente *vivas*. Esto es, las probetas tienen un corte de suavizado a 45 grados en sus cantos. El tamaño de los cortes es de aproximadamente 1cm.

La probeta 4 se diseñó con un corte en la base a 45 grados mucho mayor (ver figura 3). El perfil ligeramente distinto de este bloque tiene por objeto determinar una eventual influencia de la geometría propuesta en la calidad de la respuesta.



Figura 2: Probetas experimentales mas base.

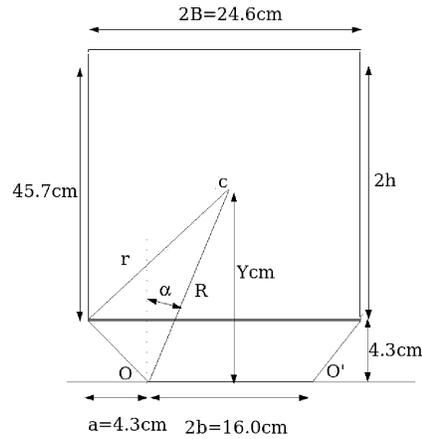


Figura 3: Probeta 4: geometría y parámetros.

Para la batería de ensayos se cuenta con un simulador sísmico uniaxial de dimensiones, entre ejes, de 3x2 m y un peso propio de 3tf.

La carga útil de ensayo, limitada por la capacidad de los rodamientos internos, es de 6tf. La mesa tiene un desplazamiento máximo de $\pm 10\text{cm}$ y es capaz de desarrollar una aceleración de 4.5g para una frecuencia de 20Hz, aproximadamente. Estas características dinámicas son suficientes para el tipo de ensayo que se va a realizar.

Un sistema de adquisición de datos *National Instruments*, junto con el software asociado, completan el equipo de obtención de medidas.

La monitorización de la posición de los bloques se realiza mediante sistemas de LED-cámara capaces de registrar dos coordenadas en un plano perpendicular al rayo óptico del LED. De esta forma, las probetas se instrumentan con leds fijados en sus caras como indica la figura 5.

Como se aprecia en la figura 4, cada bloque se monitoriza, además de los leds laterales, mediante un sistema LED-espejo-cámara en el que el LED está fijado a la cámara. Así, el ángulo de reflexión del rayo del LED reflejado en el espejo suministra una medida directa del ángulo θ . Se tienen, por tanto, varios canales de medida para la posición.

Sin embargo, dado que el sistema sin deslizar tan sólo tiene un grado de libertad, los canales distintos al del ángulo θ deben ser; o bien función de θ , o bien zero. Se pueden así controlar los eventuales deslizamientos o rotaciones en el eje vertical del bloque.



Figura 4: Instrumentación de las probetas con sistemas LED-espejo-cámara



Figura 5: Instrumentación de LEDs laterales en probetas

4 COMPARACIÓN ENTRE TEORÍA Y EXPERIMENTO

Coincidiendo con la teoría, se ha verificado que los tres parámetros fundamentales para el problema del RM plano son α , p y μ .

Una vez determinado este conjunto de parámetros, la ecuación (10) se puede integrar para acciones externas arbitrarias.

Asumiendo que durante un impacto, todas las fuerzas están concentradas en los puntos O y O', el momento angular con respecto a dichos puntos se conserva. Con este criterio, Housner [1] encontró una expresión para μ que depende exclusivamente de la geometría,

$$\mu = 1 - \frac{3}{2} \sin(\alpha)^2. \quad (11)$$

Los parámetros geométricos y dinámicos relevantes de las probetas están recogidos en la tabla 1. A este conjunto de valores de α , p y μ , dependientes exclusivamente de la geometría del bloque, se les denomina *parámetros teóricos*.

Probeta	2b(m)	2h(m)	α (rad)	p(Hz)	$\mu = 1 - 3/2 \sin^2(\alpha)$
1	0.247	1.000	0.242	3.780	0.914
2	0.168	1.000	0.166	3.810	0.959
3	0.120	1.000	0.119	3.820	0.979
4	0.246	0.500	0.310	5.160	0.860

Tabla 1: Parámetros teóricos de las probetas junto a datos geométricos

Se ha comprobado que los valores dados en la tabla 1 no conducen, en general, a un acuerdo aceptable entre teoría y experimento. Este tipo de discrepancias entre los valores teóricos de los parámetros y sus respectivos ajustes experimentales ya ha sido puesto de manifiesto por diversos autores ([6]-[9]).

En particular, en los trabajos [7] y [8], se ha sugerido que el impacto puede no ser completamente inelástico al no verificarse la ecuación (11).

En el trabajo de Lipscombe [9], se ensayan distintos modelos dinámicos de RM tratando de hallar una justificación ante tales discrepancias.

Por otro lado se encontró que el coeficiente de restitución μ sigue una distribución gaussiana con valor medio centrado en la expresión (11) [6].

La presente contribución, se limita a hacer un ajuste experimental de los valores dentro de los rangos admisibles impuestos, dejando para un trabajo futuro la investigación de las causas físicas que producen tales desviaciones.

El criterio adoptado es que los valores ajustados de α , p y μ produzcan el máximo acuerdo entre teoría y experimento. Sin embargo, valores demasiado alejados de los dados en la tabla 1 llevan a situaciones que son claramente no realistas. En efecto, para un bloque de una altura dada, un aumento del valor de α de 0.2 a 0.3 conlleva un incremento de la anchura de un 52.6%.

Haciendo uso de que para el caso de Free RM, la energía del sistema se conserva entre dos choques consecutivos y mediante la ecuación de la energía (eq.(3)), se puede ver que el tiempo que dista entre el correspondiente al máximo del módulo de θ anterior al choque n-ésimo, denotado por r_{n-1} , y el del impacto n-ésimo viene dado por²,

$$\tau_n = \frac{1}{p\sqrt{2}} \int_{r_{n-1}}^0 \frac{dx}{\sqrt{\cos(x - \alpha) - \cos(\alpha)}} \quad (12)$$

Para ángulos pequeños y bloques esbeltos, la ecuación (12) se simplifica considerablemente llegándose a una expresión que coincide con la de Housner [1].

$$\tau_n = \frac{1}{p} \cosh^{-1} \left(\frac{1}{1 - \frac{r_{n-1}}{\alpha}} \right) \quad (13)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que para free RM, la relación entre la energía después del impacto n-ésimo, E_n y la energía inicial E_0 viene dada por: $E_n = E_0 \mu^{2n}$, se obtiene la siguiente expresión para μ dependiente del índice de impacto.

$$\mu_n = \left(\frac{\cos(\alpha - r_n) - \cos(\alpha)}{\cos(\alpha - r_0) - \cos(\alpha)} \right)^{\frac{1}{2n}} \quad (14)$$

siendo r_n la amplitud del módulo del ángulo θ después del impacto n-ésimo y r_0 el módulo inicial de θ .

Las ecuaciones (13) y (14) permiten encontrar los valores ajustados experimentalmente de α , p y μ .

Registrando los tiempos de impacto y amplitudes experimentales τ_n^* y r_n^* a partir de las respuestas de free RM, el procedimiento que se ha seguido es el siguiente:

1. Minimizar la superficie de error dada por la ecuación,

$$\Sigma(\alpha, p) = \sum_n (\tau_n - \tau_n^*)^2 \quad (15)$$

2. Verificar el valor de α descartando las soluciones que caigan fuera del criterio establecido
3. Con el valores de α hallado y las amplitudes experimentales, hallar un valor de μ para cada impacto haciendo uso de la eq.(14)
4. Tomar el valor medio de los valores de μ hallados en 3.

²Para este cálculo se desprecia la parte centrífuga del potencial ya que resulta irrelevante.

Para el primer paso se utiliza el comando `fsolve()`, disponible en *Maple*, que permite encontrar conjuntos de soluciones para un sistema de ecuaciones algebraicas no-lineales. La eficacia del algoritmo se comprueba con un conjunto de soluciones de free RM para parámetros conocidos. Una vez generadas las soluciones, se hallan los valores de α y p resolviendo el sistema de ecuaciones resultante. Se comprobó que los valores entre el conjunto inicial y final coincidían.

Existen experimentos en los que el algoritmo arroja valores de α que no son realistas. Siendo este parámetro el que tiene una medida más directa, se ha escogido como criterio de bondad de las soluciones el que todos aquellos valores de α que sobrepasen un cierto límite sean deshechados.

Para fijar tal límite se tiene en cuenta -como ya se señaló- que el perfil de los bloques tiene un ligero corte en las bases³ de 1cm. Esto implica que existe un error admisible en b de $\pm 1cm$, que se traduce en un error para α de, aproximadamente, $(1/b)\%$. Para la probeta 1, por ejemplo, se tiene un error admisible en α del 8%.

Con el método arriba descrito, se elabora una tabla de parámetros ajustados para las distintas probetas 2.

Probeta	α (rad)	p(Hz)	μ
1	0.235	3.884	0.937
2	0.168	3.767	0.942
3	0.112	4.716	0.986
4	0.311	4.633	0.926

Tabla 2: Parámetros ajustados de las probetas.

Al Comparar estos resultados con los valores de la tabla 1 no se observa ninguna tendencia especial para los parámetros α y p . No ocurre lo mismo con el coeficiente de restitución μ , cuyos valores ajustados experimentalmente tienden a ser superiores a los dados por la fórmula 11. Este hecho ya ha sido señalado por varios autores en trabajos previos ([7], [9]).

A continuación se muestran algunos de los resultados obtenidos para las distintas acciones y probetas. En todas las gráficas presentadas se representa el ángulo de rocking θ medido en grados en función del tiempo, en segundos.

Las acciones introducidas en la mesa son funciones harmónicas tipo seno; o bien de amplitud constante, o bien moduladas por una función de hanning⁴

³Con la excepción de la probeta 4 que tiene un perfil con un corte mucho mayor (ver figura 3).

⁴La expresión usada para la ventana de Hanning es la siguiente

$$A(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\frac{\pi x}{a})) \quad (16)$$

En la figura 6 se compara la gráfica experimental de la probeta 4 con las soluciones numéricas correspondientes a los valores teóricos (tabla 1) y ajustados (tabla 2) de los parámetros.

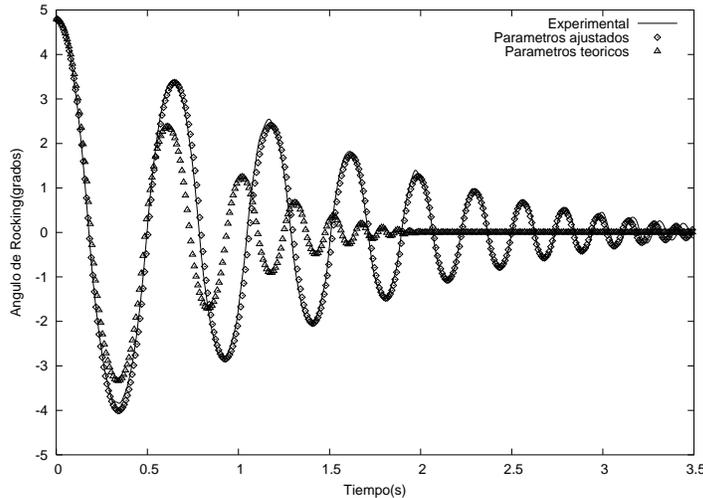


Figura 6: Probeta 4. Resultados con parámetros de las tablas 1 y 2.

Con los parámetros de la tabla 2 se presenta en la gráfica 7 la respuesta de la probeta 1 para una función armónica sinusoidal modulada por una ventana de Hanning. La amplitud del seno es de 6 milímetros y su frecuencia de 3.3 Herzios.

Finalmente, en la figura 8 se muestra el ángulo θ en función del tiempo para la probeta 2 comparando teoría y experimento para un seno constante de 6 milímetros de amplitud y 5 Herzios de frecuencia. Los parámetros son los de la tabla 2.

5 CONCLUSIONES

- Es necesario un ajuste de los parámetros dinámicos del problema para obtener acuerdo entre las respuestas numérica y experimental (ver figura 6).
- Se ha observado, tanto en experimento como en la teoría que el sistema es especialmente sensible a variaciones en las condiciones iniciales y a los parámetros. En particular, las respuestas son significativamente más sensibles a α y μ que a p .
- Para distintos valores de α , p y μ , es posible obtener la misma respuesta; existe una correlación experimental entre los valores de los parámetros como ocurre con sus valores teóricos.

siendo a el parámetro de duración del pulso.

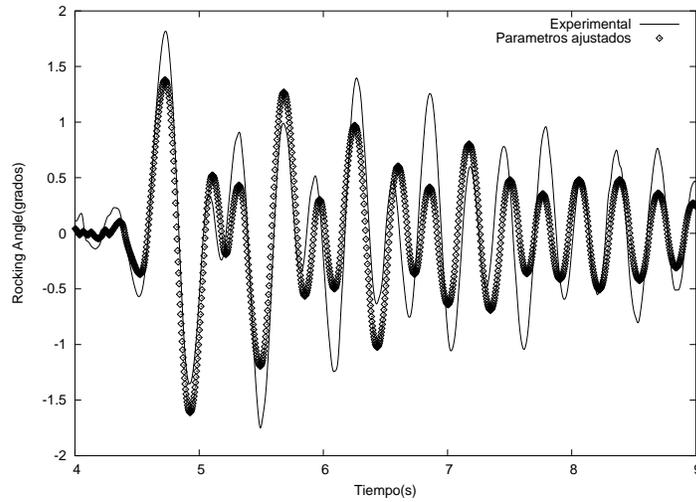


Figura 7: Probeta 1 para acción de seno hanning amplitud=6mm y frecuencia=3.3Hz, con parámetros ajustados: $\alpha = 0.235, p=3.844, \mu = 0.937$

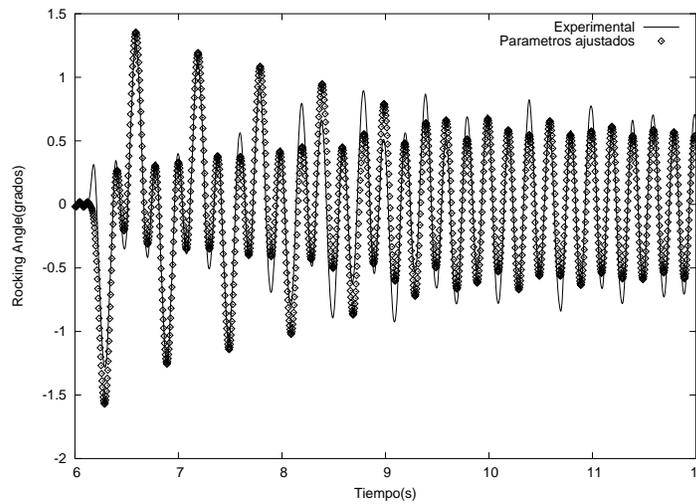


Figura 8: Probeta 2 para acción de seno de amplitud constante=6mm y frecuencia=5.0Hz, con parámetros ajustados: $\alpha = 0.168, p=3.767, \mu = 0.942$

REFERENCIAS

- [1] Housner, W. G. The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes, *Bull.Seismol.Soc.Amer.*, Vol. **53**, pp. 403–417, (1963).
- [2] Hogan, S. J. On the dynamics of rigid block motion under harmonic forcing, *Proc.Roy.Soc.Lond. A*, Vol. **425**, pp. 441–476, (1989).
- [3] Augusti, G. and Sinopoli, A. Modelling the dynamics of large block structures, *Mecchanica*, Vol. **27**, pp. 195–211, (1992).
- [4] Prieto, F., Lourenço, P.B. On the Rocking Behavior of Rigid Objects. *Meccanica*, Accepted for publication.
- [5] Prieto, F., Lourenço, P.B. and Oliveira, C.S. Impulsive Dirac-delta forces in the Rocking Motion. *Earth. Eng. and Struct. Dyn.*, Vol. **33**, pp. 839–857, (2004).
- [6] Liberatore, D. et al. Rocking of slender blocks subjected to seismic motion of the base, *Proc. 12th Europ. Conf. Earth. Eng. Ref (760)*, (2002).
- [7] Aslam, M., Godden, W.G. & Scalise, D.T. Earthquake rocking response of rigid bodies, *J.Struct.Div*, Vol. **106** (2), pp. 377–392, (1980).
- [8] Tso, W. K. and Wong, C.M. Steady state rocking response of rigid blocks to earthquakes. Part 1: Analysis. Part 2: Experiment. *Earth. Eng. and Struct. Dyn.*, Vol. **18**, pp. 89–120, (1989).
- [9] Lipscombe, P. R. Dynamics of rigid block structures, *Dissertation submitted to the University of Cambridge for the degree of Doctor of Philosophy*, (1990).