Universidade do Minho
Instituto de Educação

Álvaro Fernandes Serafim Filho

A aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia: Um estudo de caso com uma turma do primeiro ano

setembro de 2016

A aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia: Um estudo de caso com uma turma do primeiro ano
Álvaro Fernandes Serafim Filho

UMinho|2016

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Álvaro Fernandes Serafim Filho

A aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia: Um estudo de caso com uma turma do primeiro ano

Tese de Doutoramento em Ciências da Educação
Especialidade em Educação Matemática

Trabalho realizado sob a orientação da
Doutora Maria Helena Silva de Sousa Martinho

setembro de 2016

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração da presente tese. Confirmo que em todo o trabalho conducente à sua elaboração não recorri à prática de plágio ou a qualquer forma de falsificação de resultados.

Declaro que tomei conhecimento integral do Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

Universidade do Minho, 29 de setembro de 2016.

Nome completo: Álvaro Fernandes Serafim Filho

Assinatura: Álvaro F. Serafim

AGRADECIMENTOS

Ao finalizar a minha tese de doutoramento, gostaria de expressar o meu agradecimento a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para o êxito deste trabalho, em especial a minha orientadora, Doutora Maria Helena Silva de Sousa Martinho, pela confiança, disponibilidade e por suas valiosas orientações. Professora, sem a sua preciosa colaboração esta obra não seria possível.

As professoras Rosineide Pereira Mubarak Garcia e Custódia Alexandra Almeida Martins pelo admirável empenho no estabelecimento e manutenção do convênio entre a Universidade Federal do Recôncavo da Bahia/Brasil e a Universidade do Minho/Portugal.

A Universidade Federal do Recôncavo da Bahia pelo financiamento de todo o projeto.

Aos queridos professores Almerindo Janela Afonso, José António da Silva Fernandes, Susana Caires, Custódia Alexandra Almeida Martins e Isabel Maria da Torre Carvalho Viana por suas disponibilidades e inestimáveis contribuições.

Aos amigos professores Waslon Terllizzie Araújo Lopes e Ângela Vilma Santos Bispo Oliveira pelo apoio e valorosas colaborações.

A todos os alunos que cooperaram com as investigações deste estudo e tornaram possível a realização deste trabalho.

A todos vocês o meu sincero agradecimento.

RESUMO

O interesse investigativo no ensino superior pelo tema ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral tem-se apresentado de forma bastante acentuada na atualidade em função dos altos índices de reprovação nesta matéria. Com esta pesquisa, propomos investigar uma prática ainda pouco explorada no seu ensino, que visa apresentar aos estudantes uma série de tarefas sistematizadas de natureza exploratória e investigativa com o suporte da tecnologia. Objetivamos com isso avaliar como os alunos evoluem na disciplina a partir da aplicação das tarefas, como utilizam os recursos tecnológicos e que dificuldades enfrentam na realização destes trabalhos. Com o apoio de alguns programas matemáticos os alunos se empenharam na exploração de uma série de tarefas diversificadas. Estas tinham a finalidade de aplicar alguns conhecimentos, aprofundar outros ou introduzir alguns temas da programação curricular da disciplina. A metodologia exploratória e investigativa pôde se associar eficientemente aos momentos expositivos, diversificando e aperfeiçoando o ensino da matéria.

Para esta pesquisa, procuramos o suporte teórico das explorações e investigações matemáticas apoiadas nos recursos tecnológicos em relevantes problemas. Esta combinação se configura na atualidade como um importante mecanismo promotor da aprendizagem pela descoberta. A introdução da informática na sala de aula, além de incorporar importantes fatores motivacionais, permite explorações mais dinâmicas do conhecimento, viabilizadas pelas modernas tecnologias. Quando a aprendizagem do aluno baseia-se na construção do conhecimento, ela torna-se mais significativa e duradoura e tende a ser esquecida menos facilmente.

A metodologia desta pesquisa encontrou-se inserida na perspectiva descritiva interpretativa, constituindo um estudo de caso na visão do próprio professor/investigador. A partir da proposta metodológica, a estrutura experimental contou com a aplicação das tarefas em grupos e com a observação criteriosa do quadro evolutivo dos alunos, tanto no aspecto da aprendizagem quanto nos cenários das dificuldades e superações, inclusive no uso das tecnologias. As observações participativas, questionários, entrevistas e documentos escritos constituiram eficientes instrumentos para esta avaliação.

Através desse estudo foi possível constatar as potencialidades que as tarefas exploratórias, com suporte nas tecnologias, agregam ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral. Estas abarcam uma diversidade enorme de assuntos da disciplina – inclusive com panorâmicos históricos – e oportunizam aos alunos: a possibilidade de abordar, do ponto de vista numérico, gráfico e analítico, uma série de problemas contextualizados; desenvolver as habilidades típicas dos processos investigativos matemáticos; compartilhar conhecimentos e cooperar na construção do conhecimento em pequenos grupos de trabalho e assumirem papéis ativos no processo de aprendizagem. Os resultados da pesquisa consagram os benefícios que as atividades exploratórias desempenham na aprendizagem dos alunos e sugerem firmemente a sua inserção regular na disciplina.

Palavras-chave:
Cálculo Diferencial e Integral; Tarefas exploratórias e investigativas; Tecnologia educacional.

ABSTRACT

Due to the high rates of disapproval related to the subject Differential and Integral Calculus in undergraduate courses, there is a growing interest in this research area. In this thesis, we investigated an unusual and underexplored practice in the teaching process which has the objective of presenting to the students a sequence of exploring and investigating tasks with technology support. Our objective was to evaluate how students evolve in the discipline from the implementation of tasks, how they use technological resources and the difficulties faced in this work. With the support of mathematical software, the students explored a sequence of wide range tasks with the purpose of applying some knowledge, enhancing others and introducing themes of the curricular grade. The exploratory and investigative methodology can efficiently associated with the expository moments, diversifying and improving the subject teaching process.

In this research, we look for the theoretical support of mathematical explorations and investigations by using technological resources in relevant problems. This combination is an important mechanism for the discovery-based learning. The introduction of the informatics in the classroom, besides its important motivational aspects, allows more dynamical exploration of the knowledge by using modern technologies. When the student learning process is based on the knowledge construction, it becomes more significant and it has a long-term behavior. Furthermore, it is less easily forgotten.

The methodology used in this research was inserted in the perspective descriptive and interpretative, constituting a case study in the vision of the teacher/research. From this proposed methodology, the experimental structure was compounded by the application of tasks in groups and a careful observation of the evolution of the students, considering the learning aspects as well as scenarios of difficulties and overcoming, including the use of technologies. Participatory observations, questionnaires, interviews and written documents constituted effective instruments for this assessment.

Based on this study, it was possible to state the potentialities of the exploratory tasks combined with technology support. It contributes with the teaching of Integral and Differential Calculus. These potentialities contains a diversity of topics – even considering the historical panoramic – and allows the students: the possibility to approach, from the numeric, graphic and analytical point of view, a series of relevant in-context problems; to develop typical skills of the mathematical investigative process; sharing knowledge and cooperating with the construction of the knowledge in small groups and work actively in the learning process. The results of this research strongly corroborate the benefits of the exploratory activities in the students learning and indicates unhesitatingly its regular use in the teaching of Calculus.

Keywords:
Differential and Integral Calculus; Investigative and exploratory activities; Educational technology.

Índice

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo faço uma sucinta introdução ao trabalho investigativo que me proponho a realizar. Inicialmente apresento alguns aspectos motivacionais que me conduziram à realização deste estudo, inclusive a preocupação com a problemática dos altos índices de reprovação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Apresento os objetivos e as questões investigativas da pesquisa. Realizo um breve contexto do estudo, destacando alguns aspectos do Cálculo e a necessidade de avançar das metodologias expositivas para práticas mais dinâmicas, reflexivas e construtivas na relação de ensino e aprendizagem da disciplina, inclusive servindo-se das tecnologias em relevantes tarefas exploratórias e investigativas. Apresento brevemente o plano geral metodológico desta pesquisa, a relevância do estudo e finalizo com a visão da organização estrutural dos capítulos deste trabalho.

1.1. Motivações do estudo

O meu interesse investigativo pelo tema ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral veio da minha longa experiência de ensino nesta disciplina e da necessidade que senti de mudar alguns aspectos da minha prática docente. Eu acreditava que para ensinar bem o Cálculo era suficiente seguir o exemplo didático dos meus melhores professores da época da graduação. Geralmente acabamos por seguir as nossas melhores referências e mais positivas experiências de aprendizagem. Desta forma, eu continuava a lecionar a matéria sem encontrar maiores dificuldades, seguindo uma linha mais tradicional de ensino, com ênfase na exposição teórica do programa e sempre estimulando a participação dialogada e reflexiva dos alunos. Ao final de cada semestre letivo, na contabilidade geral do número de aprovações, ressaltava sempre um número significativo de reprovações que giravam em torno dos 50%.

Diversos estudos nas últimas quatro décadas (e. g., Barufi, 1999; Fernandes Filho, 2001; Gomes, Lopes & Nieto, 2005; Saback, 1980) apontam altos índices de reprovação nas disciplinas iniciais dos cursos de exatas, particularmente na disciplina de Cálculo. Estes índices frequentes e "normais" que se observam (geralmente em torno dos 50%) aliviavam um pouco o meu desconforto ao divulgar a planilha com os resultados finais. Ainda assim permanecia certo pesar e eu sentia que precisava fazer efetivamente algo para tentar melhorar esta situação.

> O ensino do Cálculo Diferencial e Integral nas universidades brasileiras tem sido objeto de questionamento em diversos fóruns em função das dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem, bem como pela alta evasão e repetência dos estudantes dos primeiros períodos matriculados nesta disciplina. (Barreto 1995 apud Reis 2001, p. 4)

É também com esse destaque, constante no boletim informativo N° 6/1995, que a SBM – Sociedade Brasileira de Matemática – manifesta a sua preocupação e levanta a necessidade do aprofundamento das discussões em torno dos preocupantes números de reprovações observados na disciplina de Cálculo, nas diversas instituições de ensino superior do país, que oscilam na média dos 50%. Zuchi (2005), em sua tese doutoral, também reflete sobre esta temática e aponta que uma das principais dificuldades encontradas pelos alunos está na compreensão do conceito de limite, particularmente na definição formal com a simbologia ε–δ, conceito este que impacta no desenvolvimento dos demais assuntos da matéria.

Vale destacar que essa não é uma problemática verificada apenas em nosso país. As dificuldades que se observam no ensino e na aprendizagem do Cálculo, em diversos cursos profissionalizantes, são também objetos de pesquisa em nível internacional:

> En el Instituto Tecnológico de Querétaro, se tiene identificado que el 80% de los estudiantes, de las carreras de ingeniería, reprueban la materia de cálculo diferencial en el primer semestre, y aproximadamente el 40% se ve

> obligado, por reglamento a dejar sus estudios en el tercer semestre, debido a la reprobación de esa materia. (Riego, 2013, p. 29)

É um mero engano acreditar que esta problemática se dá no Brasil por questões culturais ou pelas condições sócio-econômicas de sua sociedade. Vamos encontrar também nos países desenvolvidos situações semelhantes, pois muitos são os trabalhos publicados nas literaturas especializadas, no âmbito da Educação, que destacam este fenômeno. O movimento *Calculus Reform,* por exemplo, surgido em meados dos anos 80 nos Estados Unidos, como veremos neste estudo, aparece como uma premente necessidade de refletir e buscar reverter este problema no país. Nesta mesma época vamos encontrar diversos pesquisadores do Grupo Internacional de Psicologia da Educação Matemática (IGPME) como Ed Dubinsky, Sholmo Vinner, Bernard Cornu, dente outros, debruçando-se sobre as questões que envolvem as dificuldades enfrentadas pelos alunos na aprendizagem dos conceitos mais elementares do Cálculo. Dentre estes investigadores podemos destacar o pesquisador inglês David Tall como um dos principais articuladores do *Advanced Mathematical Thinking*. Encontramos em Tall (2002), reflexões que correlacionam estes estudos com referenciais da filosofia do conhecimento, tendo por base a psicologia cognitiva.

Nos Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática podemos observar, conforme Wrobel, Zeferino e Carneiro (2013), que o recente estado da arte do tema "Ensino de Cálculo", aponta números bastantes significativos e preocupantes em relação as reprovações nessa disciplina. Assim os pesquisadores descrevem (p. 2):

- O índice de não-aprovação em cursos de Cálculo Diferencial e Integral oferecidos aos alunos da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – USP, no período de 1990 a 1995, varia de 20% a 75%.
- Na Universidade Federal Fluminense – UFF, entre os anos de 1996 e 2000, a variação do índice de não-aprovação encontra-se na faixa de 45% a 95%.
- Na Universidade Federal do Espírito Santo – UFES, dos 330 alunos matriculados nas disciplinas de Cálculo I nas Engenharias Ambiental, Civil, Elétrica e Mecânica, no semestre 2011.2, 152 alunos, ou seja, quase a metade, foram não-aprovados.

- No semestre 2012.2, 32% dos alunos de Cálculo I nas Engenharias Ambiental, Civil, Computação, Elétrica, Mecânica e Produção obtiveram menos do que 3,0 pontos na primeira avaliação (que valia 10,0 pontos).
- No ano de 1995, a taxa de não aprovação – isto é, reprovação por nota ou por falta, ou desistência em MAT 135 (Cálculo para funções de uma variável real) foi de 66,9 %, e, em MAT 131 (Cálculo Diferencial e Integral), de 43,8%.

É bastante natural, portanto, que muitos investigadores, motivados por esta temática e preocupados com estes números expressivos, busquem compreender melhor este fenômeno, apontando alternativas diversas que possam reverter ou amenizar este problema. A minha pesquisa insere-se nesta perspectiva.

Atualmente sou professor do Centro de Formação de Professores da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (CFP/UFRB). Esta é uma universidade nova, com apenas oito anos de existência e que encontra-se situada em seis municípios do interior do Estado da Bahia. A grande maioria dos seus estudantes são oriundos da classe média e baixa (71,89%) e são afrodescendentes autodeclarados (84,30%) – fonte http://www.ufrb.edu.br/. O Centro de Formação de Professores, com sede no município de Amargosa, interior do Estado da Bahia, tem atraído um grande número de estudantes com este perfil social que estudou na rede pública escolar desta cidade e que apresenta um baixo Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB médio de 30% nas maiores escolas do município em 2011 – fonte http://ideb.inep.gov.br/). Um dos grandes desafios que me deparei, particularmente no curso de Licenciatura em Matemática, era como garantir um ensino de qualidade para um público que apresentava deficiências graves na sua formação escolar básica, especificamente em Matemática.

Em função da minha experiência no mestrado em Matemática com o uso de tecnologias, passei a usar os programas matemáticos *Winplot*, *GeoGebra*, e mais recentemente o *Maple*, no cotidiano das minhas aulas. Percebi que a inserção dessas tecnologias educativas em classe vinha gerando um ambiente mais satisfatório para todos, além de ocasionar um maior estímulo para aprendizagem dos alunos. Através do *software* matemático é possível observar dinamicamente alguns resultados mais complexos e abstratos do Cálculo, além de ampliar a compreensão de uma série estratégica de exercícios e problemas.

Foi numa dessas cotidianas aulas da disciplina, ao explorar o conceito das derivadas com o auxílio do *Winplot*, que acabamos por descobrir propriedades geométricas interessantes na hipérbole de equação $y = 1/x$. Através do *software* foi possível perceber dinamicamente que a reta tangente determinava, com os eixos coordenados, uma série de triângulos retângulos, todos com a mesma área (figura 1). A situação inusitada foi bastante motivadora para todos, pois ao avançar nas explorações e investigações, novos achados surgiram. A comprovação algébrica das descobertas foi realizada por todos num clima geral de entusiasmo e satisfação.

Ficou então bastante claro para mim o percurso pelo qual eu deveria trilhar nesta pesquisa: realizar um estudo mais aprofundado sobre o uso das tecnologias em sala de aula; os tópicos do Cálculo Diferencial e Integral mais relevantes e apropriados de serem abordados com o uso da tecnologia; a construção e a aplicação de tarefas exploratórias e investigativas com o apoio de *software* matemático e a observação de como os estudantes evoluem a partir desta proposta. Esse percurso suscitou algumas questões de investigação que apresentarei a seguir.

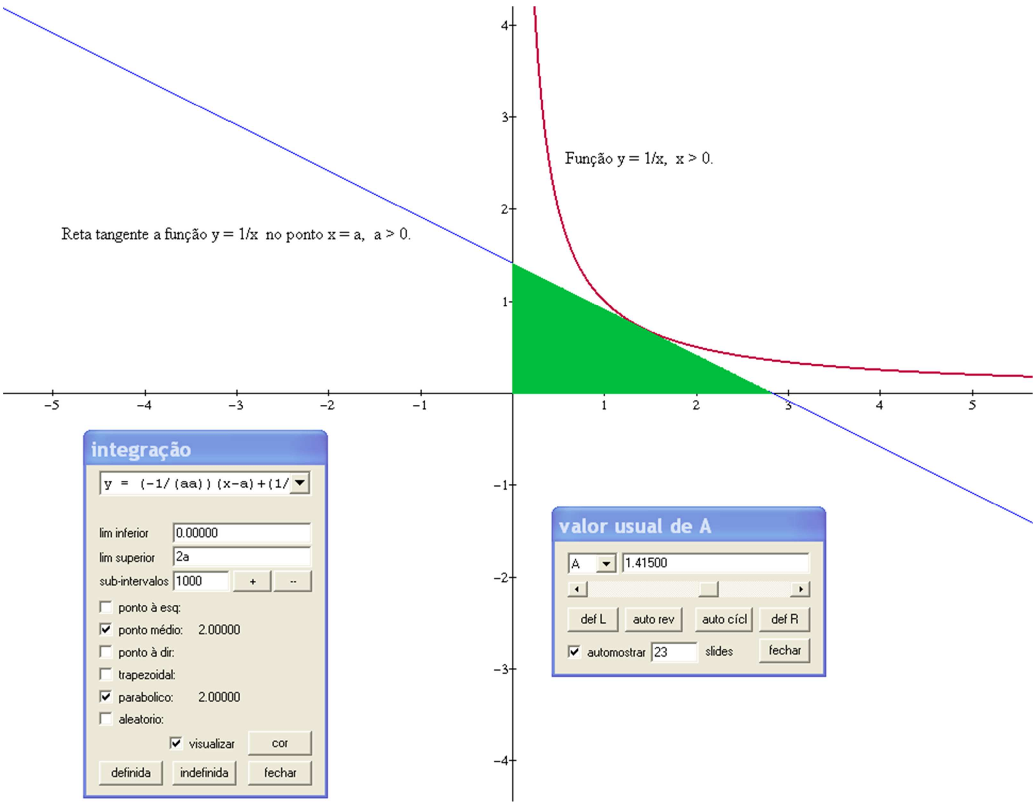


Figura 1: Visualização dinâmica do problema através do *software Winplot*.

1.2. Objetivos e questões de pesquisa

Em função da minha experiência no ensino do Cálculo, tenho como objeto de estudo investigar qualitativamente, a partir de uma aplicação sistematizada de tarefas exploratórias e investigativas, com o auxílio das tecnologias, os impactos gerados na aprendizagem dos alunos. Esta tendência atual, conforme Ponte (2005), consiste em envolver os estudantes em atividades matematicamente mais ricas e produtivas, sejam em contextos da realidade do estudante ou puramente matemáticos e lógicos. Nesse sentido, a tecnologia entra como um valioso instrumento em auxílio ao aprendizado, pois o computador equipado com um bom *software* matemático pode ser usado não somente como uma sofisticada calculadora, mas também como um precioso instrumento de ajuda no processo de aprendizagem (Andrade, 2004).

A proposta desta pesquisa é investigar uma estratégia diferenciada de ensino para o Cálculo Diferencial e Integral. Através de tarefas exploratórias e investigativas, realizadas em pequenos grupos, pretendo explorar os principais conceitos e aplicações da disciplina. Com isso, intenciono também estimular melhor o estudante para que este possa interagir mais proficientemente na aquisição do conhecimento. Examinarei se há uma mudança de postura no seu comportamento ao propor relevantes investigações amparadas nos modernos recursos de animação e análise computacionais. Verificarei, desta forma, se este avança de uma atitude mais passiva e espectadora para uma condição mais laborativa e reflexiva. Circunstâncias estas que devem conduzi-lo a desenvolver novas habilidades; fazendo-o compreender que ele também pode engendrar em Matemática; que ele pode explorar com criatividade os seus resultados, como referem Bianchini e Santos (2002), tornar o aluno um agente ativo na construção do seu próprio conhecimento:

> [...] ensinar e aprender matemática é uma atividade criativa que não pode e não deve ser baseada exclusivamente em aulas expositivas ou na resolução de extensas listas de exercícios. É uma tentativa de envolver o aluno no processo de "fazer matemática", transformando-o de observador em agente do processo educativo. A ênfase está na compreensão dos conceitos e não somente no desenvolvimento de habilidades mecânicas. (p. xiii)

Proponho, desta forma, um estudo de caso onde poderei, no cotidiano das aulas, observar a influência que um conjunto de investigações com o auxílio da informática faculta a aprendizagem dos alunos. Ao conduzi-los a um processo mais reflexivo na elaboração do conhecimento, sugiro, portanto, uma incrementação ao formato tradicional expositivo de ensino. Para alcançar tal objetivo, pretendo responder às seguintes questões investigativas:

a) Como evoluem os estudantes a uma aplicação sistematizada de tarefas exploratórias e investigativas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral?

b) Como os alunos utilizam os recursos tecnológicos ao longo da frequência na disciplina?

c) Que dificuldades enfrentam os alunos na realização das tarefas e na utilização do *software*?

1.3. Contexto do estudo

O Cálculo Diferencial e Integral consiste numa excelente ferramenta matemática para a resolução de diversos problemas dinâmicos, particularmente na área das ciências exatas. Historicamente, o Cálculo surgiu no século XVII através dos esforços independentes de dois grandes físico-matemáticos: Isaac Newton e Gottfried Leibniz (Boyer, 1996; Garbi, 2011). Na perspectiva de resolver o problema do traçado de retas tangentes à curvas, problema intimamente ligado com a determinação da velocidade instantânea de um corpo em movimento, Newton criou o Método das Fluxões, que numa linguagem moderna denotamos como Cálculo Diferencial. As bases do Cálculo Integral surgiram nas investigações de Newton para o problema da quadratura de áreas limitadas por curvas, que ele originalmente chamou de Método Inverso das Fluxões, problema correlacionado com o deslocamento realizado por um corpo em movimento. Newton foi conduzido a estas descobertas motivado por problemas empíricos da Física, que na época era denominada como Filosofia Natural.

Paralelamente, Leibniz, notável matemático alemão do século XVII, motivado por problemas geométricos no cômputo de áreas, mostrou que o traçado de retas tangentes e de quadraturas de curvas são operações inversas uma da outra (Garbi, 2011), a isto chamamos atualmente como o Teorema Fundamental do Cálculo. A partir dessa notável descoberta, o

Cálculo passou a servir como um instrumento imprescindível para a modelagem e a resolução de uma série de problemas dinâmicos da física-matemática, tais como o deslocamento, a velocidade e a aceleração de um corpo em movimento, vazão de fluidos em reservatórios e rios, taxas de evolução de epidemias, comprimentos, áreas e volumes de sólidos de revolução, dentre outros. Podemos perceber então a importância do Cálculo no progresso das ideias e na solução de uma série de problemas relevantes da ciência.

Como fazer então para que todo este novo mundo de conhecimentos chegue de uma forma motivadora e significativa para os estudantes na universidade? Por vezes as aulas são apresentadas de forma exclusivamente expositivas, com ênfase na oratória docente das “verdades inquestionáveis” do Cálculo e na atitude observadora dos alunos. Após a apresentação dos conteúdos, os alunos são conduzidos a resolverem uma série extensa de exercícios selecionados de uma lista para fixarem os aspectos teóricos abordados. Em todos estes processos não foram despertados neles, ou foram minimamente, a criatividade, a reflexão, a investigação, o debate e o exame de possíveis contextualizações do conhecimento no seu cotidiano. Exatamente partindo desta percepção que proponho uma estratégia didática alternativa, com ênfase nas tarefas exploratórias e investigativas. Estas abrangerão todas as dinâmicas ressaltadas em relevantes problemas da matéria. Os recursos computacionais servirão como valiosas ferramentas que auxiliarão os processos investigativos tais como as estratégias de análise de situações, as simulações gráficas, a formulação e a justificação de conjecturas, a identificação de padrões e regularidades, dentre outros, no apoio à aprendizagem.

Ao longo das últimas décadas no Brasil o ensino do Cálculo Diferencial e Integral nas licenciaturas segue uma programação bastante tradicional. A sua ênfase concentra-se principalmente na formalidade excessiva dos conceitos, na memorização demasiada das técnicas e fórmulas, no rigor das demonstrações algébricas e na sobrecarga de exercícios repetitivos e mecânicos, longe do efetivo campo de trabalho na educação básica do futuro estudante. Esta visão está de acordo com Montejunas (1995) referente ao ensino da Matemática nos níveis fundamental e médio, onde o destaque está majoritariamente voltado para as técnicas operatórias e para o automatismo das longas e cansativas séries de exercícios. Porém, a moderna sociedade exige uma formação mais dinâmica e reflexiva dos seus indivíduos. Neste aspecto, o ensino deve passar por um processo de aperfeiçoamento que desperte mais os elementos da criatividade, da cooperação e da comunicação. Os estudantes passariam assim a interagir mais na produção dos conhecimentos com as diversas ferramentas educativas ao seu alcance, principalmente as tecnológicas. Neste sentido, é indispensável que o professor esteja atento para as novas metodologias de ensino, para que estas possam incrementar valorosamente a sua rotina profissional. Conforme Valente (1999), é atribuição imanente do docente refletir e propiciar práticas didáticas que coloquem os seus alunos em situações mais ativas de aprendizagem. Foi sob o influxo desses pensamentos que elaborei uma sequência de aulas diferenciadas. As tarefas exploratórias deveriam atrair a atenção dos alunos por abordar significativos problemas do Cálculo em interessantes contextos históricos. As investigações teriam o valioso apoio da tecnologia. Indubitavelmente os programas matemáticos possibilitam um novo campo de compreensão aos estudantes e os conduzem ao prazer da descoberta:

> Uma grande descoberta envolve a solução de um grande problema, mas há uma semente de descoberta na solução de qualquer problema. Seu problema pode ser modesto; porém, se ele desafiar sua curiosidade e fizer funcionar sua capacidade inventiva, e caso você o resolva sozinho, então poderá experimentar a tensão e o prazer do triunfo da descoberta. (George Pólya apud Anton, 2007, p. ix)

O auxílio do *software* para explorar as tarefas deve fomentar uma formação mais reflexiva ao aluno. A cada mudança de parâmetro na simulação dinâmica de um problema, uma nova configuração o desperta para novas formulações e resultados. O professor, neste aspecto, deve assumir o papel de orientador e mediador do processo de aprendizagem, visto possuir formação e competência necessárias para tal. Certamente que este comportamento exige um repensar na sua postura de ensino, além de observar as condições e estruturas necessárias para a implementação dessas novas práticas. A proposta construcionista de Seymour Papert (1994), mencionada neste estudo, pode desempenhar um papel significativo neste contexto, pois o auxílio do computador em interessantes projetos laboratoriais facilitará e encantará o estudante na exploração do conhecimento. Sejam em atividades investigativas de cunho teórico ou mais pragmáticas, a utilização da tecnologia deve acrescentar excelentes fatores motivacionais aos trabalhos.

> Uma maneira de despertar o interesse dos alunos – e facilitar a aprendizagem – é fazer com que trabalhem (às vezes em grupos) em projetos mais aprofundados que transmitam um verdadeiro sentimento de realização quando completados. (...) os projetos de laboratório (que envolvem o uso da tecnologia) e os projetos de descoberta (que incentivam a descoberta por meio de reconhecimento de padrões) (...) estimulam o processo de aquisição do conhecimento como na ciência investigativa (Stewart, 2013, p. xi, xii).

Existe atualmente uma rica bibliografia para a exploração investigativa do Cálculo Diferencial e Integral, fruto de excelentes trabalhos de pesquisa. Por exemplo, Stewart (2013) e Anton, Bivens e Davis (2007) procuram incessantemente mostrar o caráter de dinamismo da disciplina nos seus livros. Uma série de expressivos problemas é proposta em cada capítulo buscando interagir o conhecimento numérico, geométrico (gráfico) e analítico. São situações que desafiam os docentes a evidenciarem o caráter fascinante da matéria; a convidarem os estudantes a atividades mais ricas e motivadoras, levando-os a conhecer mais ativamente o alcance maravilhoso desta poderosa ferramenta da Matemática que é o Cálculo. Portanto, o computador pode ser um potencializador das mudanças almejadas no processo educativo, se for entendido e utilizado como ferramenta para promover a aprendizagem segundo uma proposta contextualizada e construtiva (Morelatti, 2008).

1.4. Abordagem metodológica

O plano geral de investigação que desenvolvi nessa pesquisa foi de caráter qualitativo descritivo, num estudo de caso onde procurei compreender, como professor investigador, um fenômeno contemporâneo dentro do seu contexto real (Stake, 2007; Yin, 1989). Nesta conjuntura, passei a interagir mais com os alunos na complexa relação de ensino e aprendizagem do Cálculo, agora diante da associação das práticas exploratórias e investigativas na disciplina. Neste cenário, pude realmente resignificar uma série de singulares ocorrências que brotaram desta experiência, renovando definitivamente a minha visão para a educação.

As observações participativas e mais prolongadas que se deram no convívio semestral com os alunos possibilitaram valiosos processos narrativos e interpretativos. Uma extensa e expressiva base de dados foi catalogada ao acompanhar de perto as suas ações na realização das tarefas exploratórias. As entrevistas e os questionários aplicados também constituiram preciosas fontes de informação para este estudo, possibilitanto o seu aprofundamento. Relativamente à análise dos dados, o confronto das informações foi possível através da categorização dos principais padrões que emergiram das questões investigativas (Bogdan & Biklen, 1994; Goetz & LeCompte, 1984).

A necessidade que senti de repensar alguns aspectos particulares da minha prática docente está na base deste estudo e permeia alguns capítulos. Ao refletir sobre as possíveis contribuições da tecnologia em associação com o ensino exploratório – e a sua repercussão na aprendizagem dos alunos – busquei harmonizar os métodos expositivos às novas tendências da educação. Eu entrevia possibilidades mais dinâmicas e motivadoras para o ensino da disciplina. Além disso, a possibilidade que a pesquisa educacional confere para o aprofundamento desta temática, ampliando a sua base de conhecimentos, poderia permitir que a minha experiência, ao tempo em que contribuísse com outros estudos semelhantes, auxiliasse a prática de outros colegas de profissão. Estes singulares aspectos caracterizam a relevância deste estudo.

A investigação ocorreu no cotiano das minhas aulas de Cálculo no segundo semestre do ano de 2014 e a população foi formada por 36 indivíduos, com 19 anos de idade em média, e que foram os alunos dessa turma. Uma oficina instrutiva para iniciá-los nos comandos básicos do *Winplot* e *GeoGebra* – programas utilizados nesta experiência – foi necessária e ocorreu no início do semestre letivo. O roteiro e as atividades realizadas em cada *software* estão presentes neste estudo. As tarefas exploratórias foram elaboradas com a pretensão de harmonizar os aspectos numéricos, gráficos e analíticos dos conteúdos abordados, conforme as orientações do movimento *Calculus Reform*, como veremos adiante. Partindo do pressuposto de que os recursos tecnológicos empregados nas ações exploratórias deveriam favorecer o aprendizado da disciplina, todos os instrumentos ao meu alcance para examinar os efeitos dessa metodologia foram integralmente utilizados. As observações, os questionários, as entrevistas e os documentos escritos puderam captar eficientemente os sentimentos dos alunos, suas motivações e realizações didáticas.

1.5. Estrutura

Esta investigação foi estruturada em duas partes, a fundamentação teórica e o trabalho experimental. Na primeira parte encontram-se os fundamentos teóricos do estudo em três capítulos: o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral (capítulo 2); o ensino exploratório (capítulo 3) e a associação das tecnologias com as tarefas exploratórias (capítulo 4). No capítulo 2 focalizamos alguns aspectos que caracterizam o ensino e a aprendizagem do Cálculo e que o marcam profundamente pelas suas elevadas taxas de reprovação, desde os obstáculos que se observam na transição do ensino médio para o ensino superior até as dificuldades iniciais que os alunos apresentam na manipulação formal dos limites na sua designação $\varepsilon-\delta$. Contemplamos ainda uma alternativa introdutória para o curso com problemas históricos e significativos, afinal de contas o Cálculo é fantástico pela riqueza e o alcance das suas aplicações. No capítulo 3 adentramos no estudo do ensino exploratório, as principais características e benefícios que esta modalidade didática comporta. As perspectivas da sua inserção no atual cenário do ensino da Matemática são destacadas, juntamente com as dificuldades e os desafios a superar. Salientamos ainda alguns tipos de tarefas matemáticas e as principais características das tarefas exploratórias e investigativas que distinguem notoriamente a metodologia de ensino exploratório. Finalmente, no capítulo 4, ressaltamos o contributo da associação das tecnologias computacionais com as tarefas exploratórias para o ensino e a aprendizagem do Cálculo. Algumas experiências são destacadas dando notoriedade a esta associação. Os valiosos recursos do *software* para as investigações matemáticas nos mais variados assuntos do Cálculo e as dificuldades inerentes a esta associação também são evidenciados.

A segunda parte do estudo traz a sua componente experimental em quatro capítulos: a metodologia (capítulo 5); as tarefas e a realização da experiência (capítulo 6); os grupos de trabalho em ação (capítulo 7) e as conclusões (capítulo 8). No capítulo 5 fundamentamos a metodologia adotada para a pesquisa e apresentamos preliminarmente as tarefas exploratórias e investigativas aplicadas. No capítulo 6 descrevemos alguns aspectos mais gerais das tarefas no âmbito experimental, inclusive enquadrando-as no programa da disciplina. Uma análise preliminar da aprendizagem dos conceitos e das dificuldades enfrentadas pelos alunos é realizada, sobretudo no uso das tecnologias. O capítulo 7 complementa densamente o anterior realçando os principais episódios, diálogos e processos utilizados por eles na realização das tarefas. O detalhamento das ações dos grupos de trabalhos é feito juntamente com a análise dos dados catalogados dos questionários e entrevistas. Por fim, no capítulo 8, focalizamos as conclusões do estudo, onde apresentamos os cenários evolutivos da turma em face da nova metodologia empregada.

Capítulo 2

Ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral

> Um curso de Cálculo para o aluno inicial deve enfatizar não os aspectos teóricos exageradamente, mas deve ter uma visão um pouco mais pragmática porque, afinal de contas, o Cálculo é fantástico pelas aplicações, pelos exemplos maravilhosos, por explicar as coisas da natureza e certas situações científicas mais gerais.
>
> Lima, E. L., 2001 (p. 288)

A descoberta do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII foi um dos grandes marcos da história da matemática. Alguns relevantes problemas que haviam preocupado físicos e matemáticos por mais de vinte séculos passaram a ter uma solução relativamente elementar pelo que hoje conhecemos como o Teorema Fundamental do Cálculo. Essencialmente aplicamos os principais resultados teóricos do Cálculo Diferencial para medir taxas de variação em funções e perceber os efeitos dessas mudanças, além de usar o Cálculo Integral para resolver uma série de problemas da física-matemática que estão correlacionados com a quadratura de áreas limitadas por funções (Garbi, 2011; Rooney, 2012).

O alcance das suas aplicações tem levado o Cálculo a tratar de uma diversidade enorme de problemas dinâmicos da natureza e das ciências de uma forma geral. O problema é que a metodologia expositiva – majoritariamente difundida nas universidades brasileiras – costuma abordar os conteúdos da disciplina de uma forma pronta e acabada, numa mera transmissão de conhecimentos, sem que se consiga aproximar-se de processos mais reflexivos e construtivos para os alunos (Silva, 1994). O ensino expositivo se beneficiaria valiosamente por associar-se com propostas didáticas mais dinâmicas, exploratórias e investigativas, inclusive com o apoio dos recursos tecnológicos. Propostas que viabilizassem aprendizagens mais significativas para os alunos, que atraíssem a sua atenção pela riqueza dos temas e aplicações da matéria e que os colocassem ativamente diante de expressivas e motivadoras tarefas para serem discutidas e realizadas em pequenos grupos. É através desta perspectiva que trataremos, neste capítulo, de algumas questões alusivas ao ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Iniciaremos apresentando como o ensino através da linguagem formal dos limites, num curso introdutório de Cálculo, tem ocasionado grandes dificuldades iniciais aos alunos. Algumas reflexões sobre as minhas primeiras experiências de ensino nesta disciplina são colocadas de forma a respaldar este estudo de caso com a necessidade de progredir da metodologia formal expositiva para práticas mais dinâmicas de natureza exploratória e investigativa, como salientado anteriormente. Para isso, avançaremos no capítulo dando destaque a alguns problemas históricos e significativos do Cálculo como uma alternativa para introduzir os limites de uma maneira menos formal (em termos da definição $\varepsilon-\delta$), porém mais intuitiva e motivadora, sem perder a qualidade matemática que o tema merece. Finalizaremos o capítulo focalizando a transição dos alunos do ensino médio para o ensino superior e as dificuldades no ensino e aprendizagem do Cálculo. Serão apresentadas algumas situações e estudos que buscam apontar essas dificuldades e possíveis caminhos para superá-las ou amenizá-las.

2.1. A introdução ao curso de Cálculo e a linguagem formal dos limites

Os principais conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral, a saber, limites, derivadas e integrais, já fizeram parte do currículo do antigo ensino secundário brasileiro, atual ensino médio. Conforme Carvalho (1996), em 1891, nos primórdios da República, estes programas foram introduzidos por Benjamim Constant e prevaleceram nos currículos escolares até à década de 60, quando foram suprimidos em função do Movimento da Matemática Moderna nos anos 50 e 60 na Europa. Este movimento pretendia a internacionalização do ensino da Matemática, aproximando da escola básica as produções dos pesquisadores no âmbito acadêmico. Muitos países reformaram os seus currículos básicos de Matemática nesta época, inclusive o Brasil, que reestruturou o seu ensino e excluiu estes conteúdos dos programas oficiais do ensino médio. Estes assuntos passaram então a fazer parte do ementário de alguns cursos de formação superior.

Nesta época, era comum encontrarmos nos manuais didáticos a definição formal dos limites de funções por intermédio dos limites de sucessões, designada por Limite segundo Heine, em referência ao matemático alemão Heinrich Eduard Heine (1821 – 1881). Vejamos a definição extraída de Silva, Pinto e Machado (2012):

Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto a, podendo não estar definida no ponto a, e seja b um número real. Diz-se que o limite da função $f(x)$ quando x tende para a é b, e escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

se e só se, para toda a sucessão (x_n) que tenda para a, por valores diferentes de a, a sucessão $\left(f(x_n)\right)$ tende para b. Simbolicamente,

$$\forall (x_n)[(x_n) \to a \wedge x_n \neq a] \Rightarrow \left(f(x_n)\right) \to b$$

Porém, quando observamos os livros didáticos do ensino superior da atualidade (e. g., Anton, Bivens & Davis, 2007; Flemming & Gonçalves, 2007; Larson, 2011; Stewart, 2013) e ainda alguns do ensino médio (e. g., Iezzi, Murakami & Machado, 1993; Giovanni & Bonjorno, 2005) encontramos, tradicionalmente, a definição formal de limites segundo Cauchy (1789 – 1857). A definição abaixo foi extraída de Iezzi, Murakami e Machado (1993):

Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto a, podendo não estar definida no ponto a. Seja b um número real. Diz-se que o limite de $f(x)$ quando x tende para a é b, e escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

se e só se, para todo o $\varepsilon > 0$ podemos encontrar um número $\delta > 0$ tal que, para todo o x do domínio de f, se x é tal que $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - b| < \varepsilon$. Simbolicamente,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \forall x \in D(f), 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Uma prova da equivalência destas duas definições pode ser encontrada em Matos (1960) e Silva (1978). Os autores demonstram a equivalência em dois passos, inicialmente mostram que a definição de Heine implica a de Cauchy, em seguida comprovam a implicação contrária, isto é, a definição de Cauchy implica a de Heine.

Nas minhas experiências iniciais de ensino, explorando o conteúdo de limites conforme a definição de Cauchy, eu percebia muitas dificuldades enfrentadas pelos alunos no entendimento do assunto, dificuldades estas que Cornu (1983) e Rezende (2003), por exemplo, as conceberam como epistemológicas. Este fato me levava sempre ao seguinte questionamento: é necessário realmente que os alunos "aprendam" num curso introdutório de Cálculo toda a teoria formal dos limites? Quando digo toda a teoria, estão aí embutidos os seguintes tópicos: a definição ε–δ estabelecida por Cauchy; as propriedades operatórias dos limites e suas demonstrações; os limites laterais; os limites envolvendo funções limitadas e compostas; os limites infinitos e no infinito; os limites fundamentais trigonométrico e exponencial; todas as indeterminações matemáticas $(0/0,\ \infty/\infty,\ 0 \cdot \infty,\ \infty - \infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0})$ e todas as técnicas e fórmulas simplificativas dos limites.

Acredito que não se deve esgotar toda esta demasiada quantidade de conhecimentos em uma única "unidade curricular", conforme estabelece uma grande parte dos programas oficiais para o ensino do Cálculo (pois se deve ainda dividir o tempo letivo com os tópicos também extensos de derivadas e integrais). Provavelmente daí advém muitos dos conflitos e dificuldades no ensino e aprendizagem da disciplina, problemas estes que vão repercutir diretamente nos seus insatisfatórios índices de aprovação (Barto, 2003; Frescki & Pigatto, 2009; Rezende, 1994, 2003; Robert & Speer, 2001; Zuchi, 2005). É necessário refletir que os alunos necessitam de um tempo, que será percorrido ao longo do seu processo formativo, para o necessário amadurecimento desses conhecimentos. Este pensamento está de acordo com Tall e Vinner (1981), estes asseveram que toda esta nova estrutura de conhecimentos e simbologias não é assimilada de forma imediata em curto prazo. Eles sustentam que os alunos necessitam de laboriosos processos mentais para passar da simples memorização de conceitos para uma compreensão mais profunda e rica de significados.

Com base nos livros textos adotados naquelas primeiras experiências de ensino (e. g., Flemming & Gonçalves, 1992; Guidorizzi, 1987; Piskounov, 1997), eu seguia oferencendo um ensino muito semelhante ao que recebi como estudante de graduação. A ênfase estava na exposição formal e sistematizada do programa, num modelo bastante tradicional de ensino. A minha preocupação era realizar uma exposição rigorosa dos conteúdos, assim como fui ensinado, com ênfase na clássica definição $\varepsilon\text{–}\delta$ dos limites e suas consequências dedutivas. Posteriormente, conforme a sequência observada comumente nestes livros, a aprendizagem era fixada numa longa cadeia de exercícios que se assemelhavam, intercalando raríssimas aplicações, o que era bastante desalentador. Eu sentia que fazia um esforço enorme para me fazer compreender, expondo o programa daquela forma tradicional, perante um público passivo e observador. Público este composto na sua maioria por alunos oriundos de escolas com baixo IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica em torno dos 30%) e futuros professores de Matemática. Acredito que muito poucos realmente acompanhavam e compreendiam satisfatoriamente aqueles refinados conceitos introdutórios da teoria dos limites, conceitos estes carregados de uma nova estrutura simbólica. A passividade observativa deles dizia muito...

A simbologia e a linguagem empregada na definição formal dos limites, segundo Cauchy, parecia realmente ser uma novidade para os alunos, e realmente era para uma grande maioria, e parte das dificuldades iniciais no ensino e aprendizagem aí se localizavam (Barto, 2003; Celestino, 2008; Fischbein, 1994; Nasser, 2007; Robert & Speer, 2001; Silva Neto, 2006). Os quantificadores universais "para todo" ($\forall$) e "existe" ($\exists$); a sentença lógica "implica" ($\Rightarrow$); as expressões verbais usadas em "converge para", "tendem a" ou "na fronteira ou na vizinhança de" ao utilizarmos a simbologia da seta ($\rightarrow$); o próprio conceito de distância embutido em "$x - a$" e "$f(x) - b$" menor que números arbitrários positivos δ e ε, respectivamente, ao usarmos a simbologia de módulo; tudo parecia soar como algo completamente estranho e inabitual na vivência matemática deles. Inclusive a noção comum que eles traziam destas palavras no seu dia a dia impactavam o entendimento formal dos novos conceitos. A própria designação "limite" despertava uma série de interpretações distintas e dúbias que criavam barreiras no entendimento correto da definição. Perguntas como "a variável x toca em a?", "a função f é estática?", "$f(x)$ alcança b?" ou "a aproximação tem fim?" e o próprio processo algébrico empregado no cálculo formal do limite eram dificuldades que se apresentavam naturalmente na exposição do tema.

> Nós usamos palavras ou frases como convergência, fronteira, arbitrariamente próximo, tende a, e limite, quando trabalhamos com limites de funções. Os significados cotidianos dos termos podem influenciar as percepções dos estudantes sobre estes termos em um contexto matemático. Há uma ambiguidade na maneira como o conceito de limite pode ser percebido. Pode-se focar no processo de aproximar o limite e, então, considerá-lo como um procedimento que nunca chega ao fim. Mas pode-se pensar no limite como uma entidade estática, onde tais funções podem ser comparadas. (Celestino, 2008, p. 19)

As dificuldades apresentadas pelos alunos, além da sua postura passiva espectadora geralmente manifestada quando o professor expõe o assunto, evidenciam o grau de complexidade e abstração na exposição formal dos limites. Talvez por não ser mais um tema oficial do ensino médio, talvez pela inabilidade de explorar os conteúdos de maneira mais rigorosa, numa tendência quase sempre a "decorar" e aplicar fórmulas de maneira "macetosa" em detrimento de um entendimento mais amplo e significativo dos conteúdos: "Estes problemas [...] resultam da forma como os conteúdos de Matemática são estudados nos ensinos fundamental e médio, com muitos 'macetes' e fórmulas decoradas, sem compreensão dos conceitos básicos" (Frescki & Pigatto, 2009, p. 911). Talvez por estas e outras razões os alunos acabem por evidenciar grandes dificuldades ao adentrar um curso introdutório de Cálculo. Alguns estudos focalizam parte desta problemática no aluno, na sua falta de base ou até mesmo na sua metodologia de estudo (Curi & Farias, 2008; Gomes, 2012; Mendes & Giostri, 2008;). O problema estaria no fato da disciplina ser ministrada geralmente no início do curso, sendo, portanto, um primeiro contato do aluno com uma matemática "distinta" daquela trabalhada no ensino médio e "(...) somada às novidades de ser universitário, muitas vezes, a imaturidade e as algumas deficiências trazidas do processo educacional anterior, a reprovação e evasão no primeiro período do curso não é novidade" (Gomes, 2012, p. 1). Outros estudos apontam parte da problemática para o professor, para sua metodologia de ensino (Araújo, 2011; Garzella, 2013; Menestrina & Goudard, 2003). A qualidade na mediação dos assuntos ministrados pelo professor teria grande influência na aprendizagem dos alunos: "(...) é possível assumir que o sucesso do aluno na aprendizagem dos conteúdos de Cálculo depende, em grande parte, da qualidade da mediação desenvolvida em sala de aula pelo professor" (Garzella, 2013, p. 17). Estudos outros de natureza epistemológica (Rezende, 2003) realçam problemas que estão além das técnicas ou métodos empregados no ensino, localizando-os na concepção originária dos conceitos que estão na base estrutural do Cálculo. Um estudo mais detalhado acerca das dificuldades iniciais na exposição formal dos limites pode ser encontrado em Santos (2010) e Abreu e Reis (2011).

Apesar de perceber as dificuldades que a exposição rigorosa da teoria dos limites impunha, eu continuava sempre nesta mesma linha didática ao abordar os demais tópicos do programa da disciplina. O rigor na parte introdutória dos limites justificava-se, a meu ver, porque os demais assuntos que viriam à frente requisitavam, de certa forma, o seu domínio e as suas propriedades: a continuidade de uma função define-se em termos do limite, se este existe no ponto deve ser igual à imagem da função no mesmo; a derivada é um limite especial, é o limite da razão incremental $\Delta y/\Delta x$ de uma função e a integral também, pois esta é o limite da soma de Riemann de uma função (Flemming & Gonçalves, 2007; Stewart, 2013). Esta possivelmente é a razão da enorme tendência dos livros de Cálculo exaurirem preliminarmente toda a teoria dos limites, para depois passarem aos demais tópicos. Essa propensão está em conformidade com as influentes visões dos matemáticos Louis Cauchy (1789–1857) e Karl Weierstrass (1815–1897). Apesar desta tradicional sequência didática (limites $\rightarrow$ derivadas $\rightarrow$ integrais), diversos historiadores (e. g., Boyer, 1996; Garbi, 2011; Rooney, 2012) salientam exatamente a ordem inversa dessas ideias na evolução do Cálculo apontando, dentre outros importantes nomes, Arquimedes de Siracusa (287–212 A. C.) e o seu interesse em problemas que exigiam o cômputo de áreas e volumes; Isaac Newton (1642–1727) e o seu método das fluxões para determinar a velocidade instantânea de um corpo em movimento e Louis Cauchy no século XIX, com a formalização do Cálculo Infinitesimal, introduzindo a definição rigorosa do limite.

Uma exposição rigorosa dos limites através da simbologia $\varepsilon-\delta$, num curso introdutório de Cálculo, está fadada ao insucesso em termos de animar e ganhar o interesse dos alunos. Provavelmente este seja um forte fator de desmotivação inicial para uma grande parte deles, que acabam, inclusive, por engrossar as estatísticas que revelam os altos índices de evasão e reprovação na matéria. Além de trazerem consigo algumas deficiências de matemática básica da escola, eles também não estão familiarizados com os raciocínios refinados e abstratos que o tema exige. A abordagem rigorosa dos limites poderia ser mais bem tratada em etapas posteriores do curso, por exemplo, nos fundamentos de Análise Real:

> [...] e temos plena convicção de que os fundamentos da Análise, com a definição $\varepsilon-\delta$ de limite, não deve figurar no início do ensino do Cálculo. As coisas devem ser assim, não somente porque os alunos que ingressam nos cursos superiores ainda trazem muitas deficiências de formação básica, mas principalmente porque, só depois de terem entendido bem o conceito de derivada e visto algumas de suas aplicações, é que estarão devidamente preparados para prosseguir no estudo dos fundamentos. (Ávila, 2002, p. 85)

Zuchi (2005) também corrobora com este pensamento. A autora pondera que a noção formal do limite exige uma boa dose de abstração do aluno iniciante em um curso de Cálculo e que este conhecimento deveria ser adiado para um momento posterior do curso, na disciplina de Análise Matemática ou Fundamentos de Análise Real. Elon Lages Lima em Silva Reis (2001) ainda acrescenta que é possível desenvolver bem um curso de Cálculo sem entrar nos aspectos formais e sofisticados dos limites, isso não seria necessário, pois com a noção intuitiva já pode-se realizar muito: “não definir limites tudo bem, eu acho que é possível. A noção de limites é muito sofisticada para o aluno de Cálculo e não é necessária. Basta que se tenha uma noção intuitiva e com isso pode-se fazer bastante coisa” (p. 288). Além de todos esses aspectos, arrisco-me a ir um pouco mais além, ao considerar também desmotivante para o professor abordar os limites dessa maneira formalista. Nas minhas experiências iniciais de ensino, por exemplo, ao final de cada “primeira unidade” de um curso de Cálculo, onde o tema de limites era tratado conforme a clássica definição de Cauchy, ressaltava-se sempre um significativo número de notas baixas (tabela 1). Essas notas giravam em torno dos 3,3 pontos[1] em média (numa escala de zero a dez), apesar de surgirem sempre, como situações excepcionais, pouquíssimas notas acima dos 7,0 pontos.

Tabela 1. Média dos alunos ao final de cada "1ª unidade" de um curso de Cálculo.

Semestres	Quantidade de alunos	Média (numa escala de zero a dez)	Quantidade de alunos aprovados no curso e a respectiva porcentagem
1° de 2011 (turma 1)	33	2,5	8 (24,2%)
1° de 2013 (turma 1)	21	4,2	6 (28,5%)
1° de 2013 (turma 2)	34	3,3	7 (20,5%)
2° de 2014 (turma 1)	28	5,3	12 (42,8%)

Segundo Ávila (2002) os primeiros autores que perceberam que não era realista iniciar um curso de Cálculo com esta teoria rigorosa foram Serge Lang e Robert Seeley em meados dos anos sessenta. As obras desses autores marcaram mudanças significativas no modo de ensinar o Cálculo e por isso influenciaram muitos outros escritores na época. Apesar disso, ainda encontramos recentes publicações que dão ênfase a esta forma de tratamento, com excessivo formalismo didático ao assunto na sua etapa inicial. Como consequência dessa abordagem, que ainda é bastante utilizada, vemos uma espécie de ciclo repetitivo, onde os docentes, em função da sua formação acadêmica bastante pautada nestas técnicas, tendem a repeti-las em suas aulas, formando assim, alunos com esta mesma perspectiva de ensino. Estes alunos, futuros professores do ciclo básico educacional, acabam, por assim dizer, reproduzindo esta mesma metodologia em suas aulas, empobrecendo a perspectiva encantadora da Matemática.

Em meados dos anos 80 nos Estados Unidos surge o Movimento *Calculus Reform* que tinha o propósito discutir as diversas formas de como a disciplina poderia ser ensinada. De acordo com Tucker e Leitzel (1993) os altos índices de reprovação, as deficiências de aprendizagem e a necessidade de contextualização do Cálculo em outros campos do conhecimento foram demandas pragmáticas que nortearam vigorosamente as discussões na

[1] A média de 3,3 pontos refere-se ao período compreendido entre o 1° semestre de 2011 até o 1° semestre de 2013 (turmas 1 e 2). Já no 2° semestre de 2014, percebe-se um ligeiro aumento na média (5,3). O autor acredita que este aumento se deu em função da mudança de metodologia adotada neste semestre, onde pôs em prática as tarefas exploratórias e investigativas com o apoio dos recursos tecnológicos.

época. Ainda conforme os autores, como fruto das conferências e intensos debates produzidos, quatro princípios basilares foram sugeridos para abordagem do Cálculo Diferencial e Integral. São eles: i) incentivo do uso da tecnologia (calculadoras gráficas e programas computacionais); ii) aplicação da chamada "regra de três": a tripla abordagem (numérica, geométrica e analitica) dos conteúdos e problemas; iii) abordagem dos problemas com dados reais; iv) suprir as possíveis deficiências algébricas e numéricas dos estudantes com o uso dos SACs (Sistemas Algébricos Computacionais).

Todas estas orientações tinham a finalidade de apresentar um curso mais eficiente, onde estes quatro aspectos do conhecimento matemático seriam possivelmente integrados e equilibrados para favorecer o ensino e a aprendizagem. Com efeito, um número significativo de publicações para um curso introdutório de Cálculo realmente incorporou esse ideal. São livros modernos (e. g., Anton, Bivens & Davis, 2007; Larson, 2011; Stewart, 2013) com conteúdos ricos e diversificados em aplicações e projetos. Possuem muitas ilustrações e, sempre que possível, abordam os conceitos da disciplina do ponto de vista numérico, geométrico e analitico. Com o equilíbrio dessa tríade, o ensino e a aprendizagem do Cálculo foram bastante favorecidos. Esses aspectos foram destacados por Elon Lages Lima – que é autor de muitos livros na área da Análise Matemática – e assim ele se expressa numa entrevista concedida à Silva Reis (2001):

> [...] uma tendência recente de livros muito bem equilibrados, em que você tem essas três componentes dosadas adequadamente. E tem esse livro que é o melhor de todos que eu conheço que é o livro do James Stewart. (p. 288)

> [...] por isso que eu acho que essas tendências atuais de apresentar os conceitos do ponto de vista numérico, gráfico, geométrico e computacional, completam as coisas e substituem quase que perfeitamente a definição precisa de limites com épsilons e deltas. (p. 291)

Com efeito, ao tomar conhecimento dessas novas publicações, mudei significativamente a minha didática. Com eu sempre imaginava, a Matemática deveria ser desafiadora, estimulante e encantadora. Para o professor que já possui o domínio dos conteúdos, ensinar deve ser a arte de bem orientar o aluno na exploração do conhecimento.

Deve ele contagiar o estudande com o "prazer e o triunfo da descoberta", conforme dizia George Pólya; deve ele conduzir o aluno a compartilhar do mesmo entusiamo e sensação, nas devidas proporções, a que Newton, e outras mentes brilhantes, deve ter experimentado ao realizar as suas grandes conquistas. Com tudo isso, passei então a não mais abordar a teoria introdutória dos limites através da sua definição formal e rigorosa, com todo aquele algebrismo *"dado um ε encontre um δ..."*, porém de uma forma mais intuitiva e pragmática, utilizando-se de recursos numéricos, geométricos/gráficos e analiticos, conforme as sugestões do *Calculus Reform* e das modernas bibliografias. Resgatei alguns problemas históricos que estão na raiz evolutiva do Cálculo – e que tem por base as ideias infinitesimais dos limites – e explorei essas aplicações no laboratório de informática da instituição. Desta forma, procurei envolver os alunos em atividades mais atraentes e motivadoras. Ao fazer uso dos recursos tecnológicos em problemas significativos da disciplina, do ponto de vista histórico e conceitual, busquei despertar o entusiasmo e a motivação de todos para a aprendizagem dos limites – e do Cálculo Diferencial e Integral de uma forma geral.

2.2. Uma alternativa com problemas históricos e significativos

Diversos historiadores (e. g., Boyer, 1995; Garbi, 2011; Rooney, 2012) destacam os filósofos e matemáticos da Grécia antiga, dentre eles, Zenão, Eudoxo e Arquimedes, como os precursores das ideias fundamentais do Cálculo, apesar de não existir, na época, uma linguagem formal para os limites, tal como conhecemos na atualidade. Para se ter uma ideia do avanço do conhecimento grego, basta avaliar que Arquimedes (287 – 212 A. C.), antecipando os resultados do Cálculo Integral em aproximadamente dois mil anos, calculou com precisão áreas de arcos de parábolas e volumes de cones e esferas: "Para achar áreas e volumes, o versátil Arquimedes usou sua própria versão primitiva do Cálculo Integral, que, de alguma maneira, é muito semelhante, quanto ao espírito, ao cálculo atual" (Boyer, 1995, p. 57). Os livros de história vão situar nesta antiga cultura os primeiros problemas que envolviam os princípios matemáticos dos infinitésimos, questões que tocavam em temas como comprimentos, distâncias, áreas de regiões limitadas por curvas e volumes de sólidos. Somente cerca de vinte séculos depois de Arquimedes, com os trabalhos de Cauchy e Weierstrass, foi construída uma sólida teoria que estabeleceu o conceito formal dos limites; conhecimento este que viria para fundamentar com rigor a sua base teórica, de forma semelhante ao modo empregado por Euclides no âmbito da Geometria Plana, tal qual vemos nos seus *Elementos* (Euclides, 2009). Os problemas do Cálculo passariam então a ter uma abordagem mais consistente e segura. Por que então não valer-se desses componentes históricos nas aulas ao tempo em que o conceito intuitivo dos limites pudesse ser trabalhado? Foi desta forma, por exemplo, que procedi. Através da perspectiva exploratória de ensino, procurava despertar nos alunos algumas sensações, tais quais os filósofos gregos por certo experimentaram ao serem desafiados por Zenão, no famoso paradoxo de Aquiles e da tartaruga (Kasner & Newman, 1968); instigava-os a obter áreas de figuras planas delimitadas por linhas curvas, através de polígonos de áreas conhecidas, conforme o método de exaustão atribuído a Eudoxo de Cnido (408 – 355 A. C.) e usado com maestria por Arquimedes (Boyer, 1996); conduzia-os a refletir como obter a velocidade instantânea de um corpo em movimento, em termos da sua velocidade média, conforme os experimentos históricos de Galileu Galilei (1564 – 1642) (Stewart, 2013); interpelava-os sobre a evolução do cálculo da reta tangente, desde Descartes e Fermat, no século XVII, até Leibniz e Newton, no século XVIII, aproximando-os didaticamente do conceito geométrico das derivadas (Carvalho, 1919; Pires, 2004). Enfim, os fatos históricos constituíam excelentes formas de introduzir e explorar informalmente os limites, possibilitando, inclusive, o avanço das técnicas operatórias e das propriedades de uma maneira muito mais atraente e motivadora.

O conceito clássico dos limites passou então a surgir como um breve panorama histórico, ao destacar os tradicionais trabalhos de Cauchy e Weierstrass. Com exemplos simples, era salientada que a sua rigorosa abordagem se daria mais adiante do curso. Com isso se intencionava conquistar mais ativamente a atenção dos alunos, motivando-os à aprendizagem intuitiva dos limites paralelamente aos apreciáveis fatos históricos. No laboratório de informática eles iriam explorar, através dos recursos computacionais, vários assuntos da disciplina, evidenciando o caráter mais encantador e dinâmico do Cálculo. Na parte experimental deste estudo, mais à frente, serão relatadas algumas dessas experiências. Por ora vejamos como a ideia intuitiva dos limites ressalta de forma natural na abordagem de alguns desses problemas históricos.

A ideia de limites no paradoxo de Aquiles e a tartaruga

Zenão costumava desafiar os pensadores da sua época com uma série de paradoxos. Seu método consistia em não refutar diretamente as teses que estes defendiam, mas mostrar a fragilidade de algumas ideias e as falhas que por vezes estas apresentavam (Kasner & Newman, 1968). E que polêmica esses paradoxos geravam, e ainda geram, entre cientistas e filósofos no atual meio acadêmico! Para contra argumentar o pensamento dos eleatas de que o movimento nada mais era do que uma ilusão provocada pelos nossos sentidos, no paradoxo de Aquiles e da tartaruga, Zenão formalizava o seguinte pensamento:

Imagine uma corrida entre um atleta velocista (Aquiles) e uma tartaruga. Suponhamos que é dada para a tartaruga uma vantagem inicial em distância. Aquiles jamais a alcançará, porque quando ele chegar ao ponto de onde a tartaruga partiu, ela já terá percorrido uma nova distância; e quando ele atingir essa nova distância, a tartaruga já terá percorrido outra nova distância, e assim, ao infinito.

Para entendermos melhor este paradoxo, conforme Oliveira e Silva (1971), suponhamos que Aquiles corra 10 vezes mais rápido que a tartaruga e, para compensar esta diferença de velocidade, seja dada uma distância inicial de 1.000 metros para a tartaruga. Quando Aquiles atingir a posição inicial da tartaruga, isto é, correr os 1.000 metros, a tartaruga estará na posição de 1.100 metros, ou seja, 100 metros à frente de Aquiles. Continuando a corrida, quando Aquiles atingir a posição dos 1.100 metros, a tartaruga, por sua vez, correu mais 10 metros e encontra-se agora na posição de 1.110 metros, isto é, 10 metros à frente de Aquiles. Assim por diante, ao infinito, teremos sempre Aquiles tentando alcançar a tartaruga, mas sem jamais conseguir, pois a tartaruga estará sempre à frente deste! Mas como poderia o veloz Aquiles, herói da guerra de Tróia, correr tanto e jamais alcançar uma tartaruga?

Usando a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, assunto conhecido dos alunos no ensino médio, ambos estariam cada vez mais próximos um do outro e convergiriam para o mesmo ponto final:

$$1000 + 100 + 10 + \cdots = \frac{1000}{1 - \frac{1}{10}} = 1.111,\bar{1}$$

ou, usando uma linguagem de limites, $\forall n = 1, 2, 3, \dots$:

$$\lim_{n \to \infty} (1000 + 100 + 10 + \cdots + \ 10^{4-n}) = 1.111,\bar{1}$$

A ideia de limites no método de exaustão

Encontraremos também, dentre as diversas contribuições dos matemáticos gregos, a ideia primordial dos limites nos chamados problemas de áreas (quadraturas), concepção atribuída a Eudoxo e aperfeiçoada por Arquimedes. Considerado o maior matemático da antiguidade, pelo rigor dos seus métodos e pela elegância empregada em suas demonstrações, Arquimedes demonstrava interesse tanto por problemas de natureza puramente matemática quanto de características físicas.

> Em seu trabalho, desenvolveu também o método de exaustão, creditado a Eudoxo, pelo qual se aproxima a quantidade desejada pelas somas parciais de uma série ou pelos termos de uma sequência. Obteve aproximações da área de um círculo comparando-a com as áreas de polígonos regulares inscritos e circunscritos". Boyer (1995, p. 29)

Por não possuirem ainda o conceito de número real naquela época, os gregos, e nem mesmo Arquimedes, não poderiam considerar a soma de infinitas parcelas (Boyer, 1996), conforme usamos atualmente num curso de Cálculo. Apesar disso, no método de exaustão, vamos encontrar os fundamentos dos processos infinitesimais que serviram de base para a formalização rigorosa da teoria dos limites nos séculos XVII e XVIII por Cauchy e Weierstrass.

Para calcular o valor da área de um círculo, por exemplo, o método utilizado por Arquimedes consistia em inscrever e circunscrever este círculo por uma sequência de polígonos regulares. Ao aumentar sucessivamente o número de lados desses polígonos, as áreas internas e externas vão sendo exauridas, aproximando-se cada vez mais do valor exato da área do círculo (Oliveira & Silva, 1971).

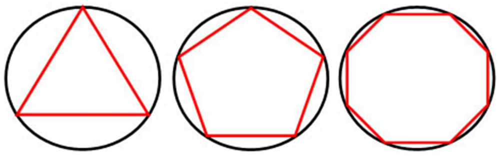


Figura 2: Polígonos inscritos num círculo.

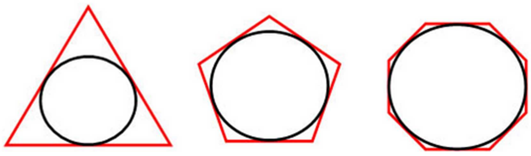


Figura 3: Polígonos circunscritos ao círculo.

A fórmula para calcular a área de polígonos regulares de n lados já era conhecida naquela época. Esta auxiliava a obtenção das sucessões dos números que aproximavam o valor da área do círculo, por excesso, pelo aumento sucessivo do número de lados dos polígonos circunscritos e, de forma semelhante, por falta, pelos polígonos inscritos.

Considerando $(e_n), n = 3, 4, 5, \ldots$ a sucessão de valores de áreas determinados para os polígonos externos ao círculo (circunscritos) e por $(i_n), n = 3, 4, 5, \ldots$ a sucessão obtida de forma análoga para os polígonos internos (inscritos), intuitivamente perceberemos que o valor exato da área do círculo S será confrontado, numa aproximação cada vez melhor, num processo infinito, por estas duas sucessões de números, a saber

$$i_3 < i_4 < i_5 < \cdots < S < \cdots < e_5 < e_4 < e_3, \text{ sendo:}$$

i_3 e e_3 os valores das áreas dos triângulos inscrito e circunscrito, respectivamente;
i_4 e e_4 os valores das áreas dos quadrados inscrito e circunscrito, respectivamente;
i_5 e e_5 os valores das áreas dos pentágonos inscrito e circunscrito, respectivamente; e assim sucessivamente.

Não é o objetivo desta pesquisa, mas é possível mostrar que estas duas sucessões numéricas convergem para aproximadamente $3{,}1415r^2$, isto é, tem como limites este valor, sendo r o raio do círculo (tabela 2). Dessa abordagem resulta a expressão para a fórmula da área do círculo como sendo $S = \pi r^2$, com $\pi \cong 3{,}1415$. Podemos também usar a notação de limites (1) e, de alguma forma, apresentar aos estudantes uma necessidade de aprender a calcular limites, por exemplo, indicando um grupo de atividades do tipo "resolva os seguintes limites", mas de forma moderada, em função de outras prioridades e importâncias que evidenciam um curso de Cálculo.

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} i_n = \pi r^2,\ \forall n = 3, 4, 5, \dots \tag{1}$$

É comum encontrarmos nos livros didáticos (e. g., Dolce & Pompeo, 1993) uma "demonstração" da área do círculo a partir da fórmula geométrica $A = p \cdot a$, sendo A a área de um polígono regular de n lados, p o valor do semi-perímetro e a o valor do apótema. No "infinito" o polígono regular (inscrito ou circunscrito) teria a medida do comprimento do lado infinitesimal, aproximando-se de um círculo perfeito, de tal forma que o semi-perímetro p seria o valor do comprimento πr da semi-circunferência e o apótema transformaria-se no raio r, resultando então $A = p \cdot a = \pi r \cdot r = \pi r^2$, como o valor da área do círculo.

Tabela 2: aproximações sucessivas do valor da área do círculo de raio r

Quantidade de lados	Área dos polígonos inscritos	Áreas dos polígonos circunscritos
$n =$	$i_n =$	$e_n =$
4	2,0000 r^2	4,0000 r^2
8	2,8284 r^2	3,3137 r^2
16	3,0612 r^2	3,1825 r^2
32	3,1214 r^2	3,1517 r^2
64	3,1363 r^2	3,1441 r^2
128	3,1405 r^2	3,1422 r^2
256	3,1411 r^2	3,1417 r^2
512	3,1414 r^2	3,1416 r^2
1024	3,1415 r^2	3,1415 r^2
⋮	⋮	⋮
∞	πr^2	πr^2

Foi a partir da ideia do método de exaustão, por exemplo, que busquei antecipar para os alunos, através de uma tarefa exploratória e investigativa com o apoio da tecnologia, o problema similar de calcular a área delimitada por um arco de parábola (Figura 4), por aproximações de áreas de retângulos. Habitualmente as literaturas (e. g., Anton et al., 2007; Flemming & Gonçalves, 2007; Guidorizzi, 1987; Larson, 2011; Stewart, 2013) apresentam este problema próximo ao fim de um curso regular de Cálculo, como uma das aplicações fundamentais das integrais definidas. Mais adiante farei o relato dessa experiência.

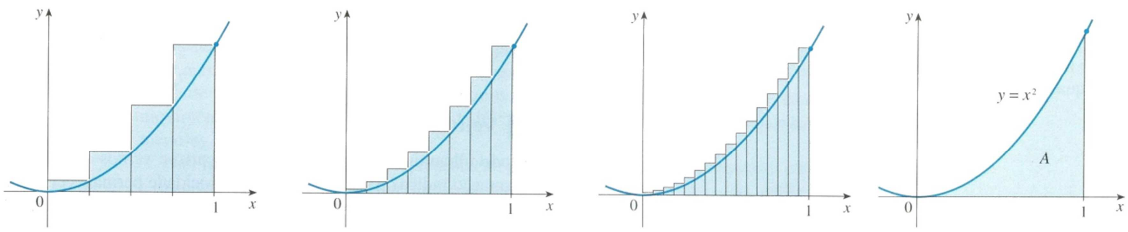


Figura 4: Área de um arco de parábola obtida por sucessivas aproximações de retângulos.

A ideia de limites no conceito de velocidade instantânea.

Uma das formas de motivar os alunos é trabalhar com situações que lhes são próximas, que fazem parte do seu cotidiano. Muitos fenômenos os cercam sem que eles percebam a possibilidade que têm de poder compreender cientificamente estes eventos. Possivelmente trilhando este caminho, o professor pode ganhar o seu interesse, conduzindo-os a explorar o Cálculo através das suas maravilhosas ferramentas.

Um desses fenômenos que ocorrem no nosso dia a dia, por exemplo, é o deslocamento que fazemos num automóvel em movimento com velocidade variável. Afinal de contas, quem nunca observou o velocímetro de um carro num tráfego urbano? Sabemos que o indicador da velocidade não fica parado por muito tempo e tão pouco marca uma velocidade sempre constante. Intuitivamente sabemos que o ponteiro marca a velocidade a cada instante do movimento do carro (velocidade instantânea), mas como essa velocidade é determinada? Está aí uma significativa atividade que pode ser perfeitamente introduzida no estudo dos limites e relacionada com as experiências de queda livre realizadas pelo físico Galileu Galilei no século XVII. Como os estudantes trazem o conhecimento prévio de velocidade média de um corpo em movimento $(V_m = \Delta s/\Delta t)$, que aprendem na disciplina de Física no ensino médio, este é, portanto, o ponto de partida para a compreensão do conceito de velocidade instantânea.

Conforme Stewart (2013) o modelo experimental estabelecido por Galileu na idade média diz que a distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda. Esse modelo teórico para queda livre despreza a resistência do ar. Se a distância percorrida após t segundos for chamada $s(t)$ e medida em metros, então a Lei de Galileu pode ser expressa pela equação

$$s(t) = 4{,}9t^2 \,.$$

Mais adiante no curso de Cálculo, quando os alunos abordam com mais detalhe os problemas de taxa de variação e iniciam o estudo da integral, eles aprendem que este resultado pode ser obtido revertendo-se o processo de derivação, isto é, a velocidade instantânea $v = v(t)$ é obtida integrando a função aceleração $a = a(t)$, e a função horária $s(t)$ é estabelecida de forma semelhante, isto é, integrando a função velocidade $v(t)$. Simbolicamente, se $a(t) = g \cong 9{,}8\,m/s^2$ é o valor constante da aceleração gravitacional próximo à superfície terrestre, então

$$v(t) = \int a(t)\,dt = \int g\,dt = g \cdot t + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$

e

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int g \cdot t + C_1\,dt = g \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Considerando a velocidade e a posição iniciais do movimento nulos, é fácil concluir que $C_1 = C_2 = 0$. Daí chegamos ao modelo experimental de Galileu para queda livre:

$$s(t) = g \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2 = 9{,}8 \cdot \frac{t^2}{2} = 4{,}9t^2$$

Supondo que queiramos estabelecer a velocidade do corpo no instante $5\ s$ da queda, como poderíamos descobrir este valor? A dificuldade que se impõe está no fato de tratarmos de um único instante de tempo $(t = 5\ s)$, ou seja, não temos um intervalo de tempo para determinar a velocidade média, pois este é o conhecimento que os alunos trazem do ensino médio. Eles sabem calcular velocidades médias! Porém, a velocidade no instante $5\ s$ pode ser obtida calculando a velocidade média no intervalo $[5,\ 5 + \Delta t]$, fazendo-se Δt tão pequeno quando se queira, isto é, fazendo-se $\Delta t \to 0$.

A tabela 3 abaixo exibe os resultados das velocidades médias $\left(V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}\right)$ para determinados valores de Δt:

$$velocidade\ média = \frac{variação\ de\ posição}{variação\ de\ tempo}$$

Tabela 3: Cálculo da velocidade instantânea

Δt	Intervalo de tempo $5 \leq t \leq 5 + \Delta t$	Cálculo da velocidade média $V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{s(5 + \Delta t) - s(5)}{\Delta t}$	Velocidade média (m/s)
1	$5 \leq t \leq 6$	$V_m = \frac{4{,}9 \cdot 6^2 - 4{,}9 \cdot 5^2}{1}$	$53{,}9$
$0{,}1$	$5 \leq t \leq 5{,}1$	$V_m = \frac{4{,}9 \cdot 5{,}1^2 - 4{,}9 \cdot 5^2}{0{,}1}$	$49{,}49$
$0{,}05$	$5 \leq t \leq 5{,}05$	$V_m = \frac{4{,}9 \cdot 5{,}05^2 - 4{,}9 \cdot 5^2}{0{,}05}$	$49{,}245$
$0{,}01$	$5 \leq t \leq 5{,}01$	$V_m = \frac{4{,}9 \cdot 5{,}01^2 - 4{,}9 \cdot 5^2}{0{,}01}$	$49{,}049$
$0{,}001$	$5 \leq t \leq 5{,}001$	$V_m = \frac{4{,}9 \cdot 5{,}001^2 - 4{,}9 \cdot 5^2}{0{,}001}$	$49{,}0049$

Intuitivamente, à medida que encurtamos o período de tempo, a velocidade média fica cada vez mais próxima de $49\ m/s$. A velocidade instantânea surge então como o valor limite dessas velocidades (médias) em períodos de tempo cada vez menores, começando em 5 segundos e fazendo $\Delta t \to 0$. Assim, a velocidade instantânea no ponto $t = 5\ s$ é $49\ m/s$.

Simbolicamente, em termos de limites, temos

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Os alunos acabam por se convencer do valor $49\ m/s$ como a velocidade do corpo no instante $t = 5\ s$, após calcularem o limite formal com os dados fornecidos. Eles passam do conhecimento intuitivo para a certeza. Além disso, é possível interpretar este problema do ponto de vista gráfico, associando as velocidades média e instantânea aos coeficientes angulares das retas secante e tangente, respectivamente (figura 5). Este mecanismo didático está conforme a tríade proposta pela Reforma do Cálculo, isto é, conjugar, sempre que possível, as análises geométrica, analítica e gráfica na abordagem dos tópicos da disciplina. Esta atividade consta como um dos casos relatados nesta pesquisa. Ela será mais bem tratada adiante, na parte experimental deste estudo.

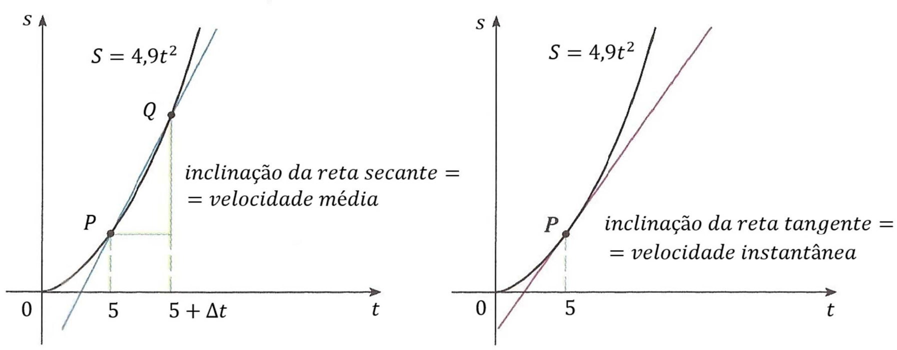


Figura 5: Retas secante e tangente no problema da velocidade instantânea.

A ideia de limites na determinação da reta tangente a uma curva.

Um dos registros escritos mais antigos para uma definição de tangentes é apresentada no terceiro livro da obra *Os Elementos* de Euclides (300 A. C.), como sendo a reta que toca a circunferência de modo a não cortá-la ao ser prolongada (Euclides, 2009). O estudo sobre as retas tangentes comumente fazia parte da antiga cultura grega, não do ponto de vista do Cálculo

Diferencial moderno, mas do ponto de vista puramente das construções geométricas (Boyer, 1996). Arquimedes já a utilizava nos seus trabalhos de geometria com a finalidade de circunscrever polígonos a circunferências (Carvalho, 1919; Pires, 2004). Mas somente aproximadamente dois mil anos mais tarde, no século XVII, este problema reaparece nos trabalhos de René Descartes (1596 – 1650) e Pierre de Fermat (1601 – 1665). Podemos apreciar o método apresentado por Fermat numa carta resposta dirigida a Descartes, onde este propôs a construção da tangente à curva $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, atualmente conhecida como "Folium de Descartes" (figura 6). Não que Descartes desconhecia a solução deste problema, mas era comum este tipo de "desafio" entre os matemáticos da época.

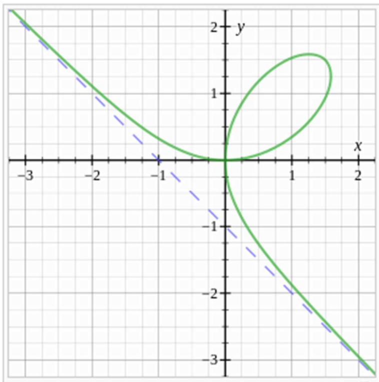


Figura 6: Traçado da Fólium de Descartes com o parâmetro $a = 1$.

Do ponto de vista da evolução do Cálculo, particularmente das ideias que antecederam o conceito formal dos limites no século XIX, este problema mostra-se bastante pertinente na perspectiva didática, por apresentar os "rudimentos" dessa ideia. De acordo com Carvalho (1919), Fermat, por intermédio de Mersenne, responde a carta de Descartes, descrevendo um método geral para a solução do problema que, numa linguagem moderna, pode ser expresso da seguinte forma:

Considere uma curva de equação $f(x, y) = 0$ onde queremos determinar a equação da reta tangente num ponto A, de coordenadas (x, y), sobre esta. De um ponto E, distinto de A, sobre a reta tangente esboçada, baixe uma perpendicular até encontrar o eixo x no ponto F. De forma semelhante, obtenha B a partir de A. Desta forma, $\overline{EF}$ é paralelo a $\overline{AB}$. Considere I o ponto de interseção do segmento $\overline{EF}$ com a curva. Sejam então e a medida do segmento $\overline{BF}$ e a a medida de $\overline{BD}$.

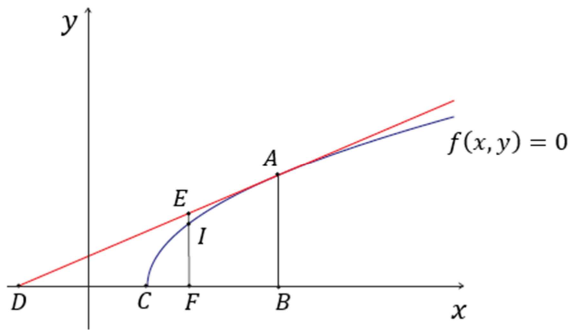


Figura 7: Método geral da tangente de Fermat.

Pela semelhança dos triângulos DFE e DBA deduzimos:

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{BD}} \Rightarrow \frac{\overline{EF}}{y} = \frac{a-e}{a} \Rightarrow \overline{EF} = y\left(\frac{a-e}{a}\right)$$

O segmento $\overline{EF}$ é diferente de $\overline{FI}$ mas, se fizermos e "tender a zero", o ponto F, "no limite", confunde-se com o ponto B e, neste caso, devemos ter a equação

$$f\left(x-e, y\left(\frac{a-e}{a}\right)\right) = 0 \tag{1}$$

conduzindo o ponto E, de coordenadas agora conhecida por $\left(x-e, y\left(\frac{a-e}{a}\right)\right)$, a confundir-se também com o ponto A. Numa linguagem moderna de limites, diríamos:

$$\lim_{e\to 0} E = A.$$

A condição exata para obter a reta tangente fica evidenciada posteriormente à solução da equação (1).

Apesar do método geral apresentado por Fermat estabelecer realmente a reta tangente, os procedimentos práticos adotados na resolução da equação (1), que levavam em consideração a magnitude "infinitesimal" da medida e, necessitavam de bases teóricas mais sólidas. Estes mecanismos formais somente viriam mais tarde, no século XIX, com a sofisticada teoria dos limites desenvolvida por Cauchy e Weierstrass, dentre a contribuição de outros notáveis matemáticos.

O método apresentado por Fermat não era o único na época. Outras formas de se obter a reta tangente podem ser encontradas em Pires (2004), inclusive a descrição do próprio método geral de Descartes para o seu Folium. A técnica desenvolvida por Descartes, por sinal muito elegante do ponto de vista geométrico e analítico, pretende determinar o raio de uma circunferência que tangencia a curva no ponto de contato da reta tangente (figura 8). Apesar de usarem técnicas distintas, ambos, Fermat e Descartes, chegaram à mesma equação (1). A visualização dinâmica computacional desta técnica é de uma beleza matemática excepcional.

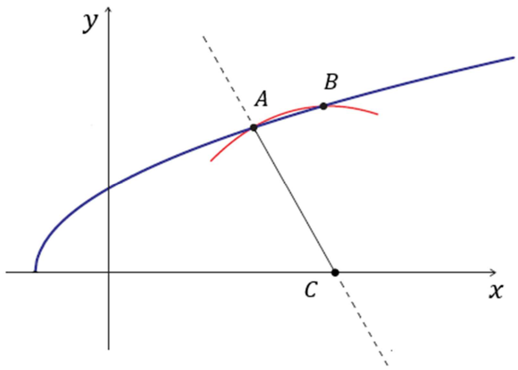


Figura 8: Método geral da tangente de Descartes: quando B tende a A, a circunferência (representada pelo arco $\widehat{AB}$) aproxima-se da posição de tangencia da curva e, neste caso, a reta (normal), suportada pelo raio $\overline{AC}$, fica determinada como um "limite".

2.3. A transição do ensino médio para o ensino superior e as dificuldades no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral

O Cálculo Diferencial e Integral por apresentar expressivos índices de reprovação tornou-se uma espécie de mito nas universidades, símbolo de "grande barreira" e "grande desafio" a ser superado pelos calouros que desejam seguir adiante nos seus cursos. Este fato não é novo e pode ser observado em outras áreas do conhecimento, onde algumas disciplinas, com elevados graus de dificuldade, apresentam este perfil. As expectativas dos "atores" envolvidos nesse contexto são sempre as melhores possiveis. Os estudantes recém-chegados na universidade esperam sempre lograr êxito nos seus estudos iniciais. Confiantes no aprendizado obtido na fase escolar esperam não enfrentar maiores problemas na aprendizagem do Cálculo. Os professores universitários, por sua vez, esperam receber estudantes bem capacitados, previamente selecionados por seus vestibulares e aptos a realizarem uma excelente experiência. Os professores do ensino médio também carregam consigo as suas esperanças. Otimistas de que proporcionaram a melhor formação possível para os seus alunos, acreditam que estes não encontrarão maiores dificuldades nos seus estudos. Por fim, muitos "acordam" dessa visão, um tanto utópica, ao se defrontarem com os primeiros resultados negativos apresentados e sentem frustradas as suas expectativas.

Vamos encontrar em Rezende (2003) reflexões sobre esta complicada temática: "onde reside tanta dificuldade? No processo de aprendizagem? No aluno? (...) ou estaria esta dificuldade no próprio professor, ou na metodologia de ensino, ou ainda, na estrutura curricular do ensino de matemática que não dá o suporte que esta disciplina mereceria?" (p. 5). O autor apresenta, dentre outras perspectivas, uma visão de natureza epistemológica no trato da questão. Nesta seção esboçaremos a sua concepção.

O alcance reflexivo das perguntas colocadas e a dificuldade de encontrar a solução "ideal" para esta problemática – que provavelmente não exista, em função dos múltiplos e divergentes olhares que confrontam tão subjetivo e conflituoso tema – é que justificam a importância das pesquisas educacionais nesta área. É por isso que vamos encontrar muitos professores do ensino superior que, preocupados com esta situação, buscam alternativas viáveis para enfrentar este problema. Através de investigações que se pautam na reflexão da sua própria prática docente – aspecto que tipifica também o estudo de caso dessa pesquisa – estes profissionais se debruçam profundamente no âmbito dessas questões. Conjugando esforços para melhor compreender o fenômeno e propor novos caminhos que possam minimizar os seus efeitos negativos, eles procuram melhorar, inclusive, o seu próprio ambiente de trabalho.

> [...] cada vez mais professores empreendem pesquisas sobre a sua própria prática profissional. Fazem-no porque sentem necessidade de compreender melhor a natureza dos problemas com que se defrontam, para poder transformar a sua prática e as suas condições de trabalho. (Ponte, 2004, p. 37)

É com este propósito que vamos encontrar alguns pesquisadores (e. g., Mariani, 2006; Müller, 2010; Santos & Matos, 2012) localizando na educação básica as dificuldades iniciais que os calouros enfrentam ao ingressarem no componente de Cálculo Diferencial e Integral. Segundo as autoras, as barreiras cognitivas estariam relacionadas com as deficiências dos conceitos básicos, principalmente algébricos e gráficos, necessários à introdução do ensino do Cálculo. Santos e Matos (2012) ainda destacam que muitos dos assuntos abordados na disciplina parecem desconhecidos para uma grande maioria dos calouros, apesar de terem sido tratados na educação básica, "chegando-se a pensar que muitos alunos não tiveram ou não assimilaram o mínimo de conhecimento dos conteúdos necessários, conteúdos estes que, na sua grande maioria, são repetições do que estudaram na educação básica" (p. 461). Todas essas dificuldades tenderiam a se intensificar ao longo do curso gerando grandes desestímulos aos estudantes, situação esta que acabaria por ampliar o número de evasão da disciplina.

Outros estudos, como a empreendida por Rehfeldt, Nicolini, Quartieri e Giongo (2012), tendo por base a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (2003), buscam compreender a problemática através dos conhecimentos prévios que os alunos trazem do ensino médio. Ao realizar um pré-teste com os calouros matriculados na disciplina de Cálculo I do curso de Engenharia do Centro Universitário Univates, as pesquisadoras constataram que os conhecimentos existentes estão relacionados com os cálculos simples de frações e as interpretações mais elementares de gráficos. O pré-teste tentou diagnosticar os conhecimentos que os estudantes trazem do ensino médio e que as autoras consideram necessários para um bom desempenho num curso introdutório de Cálculo, a saber: realizar cálculos a partir de representações de funções do 1° e 2° graus; operar logaritmos e exponenciais e reconhecer as suas propriedades; ler e interpretar gráficos; utilizar as fórmulas trigonométricas em situações-problemas; utilizar a calculadora científica; resolver um sistema linear com duas equações e duas incógnitas, dentre outros mais elementares. A análise criteriosa dos pré-testes aplicados indicou insuficiência de uma grande parte dessas competências nos alunos. Estes demonstraram muita dificuldade em trabalhar com as potências e raízes, os logaritmos e exponenciais, as fórmulas trigonométricas e suas propriedades nas situações-problemas que requisitavam estes conhecimentos para a aprendizagem inicial do Cálculo. Como seria então possível os estudantes "ancorarem" os novos conhecimentos da disciplina diante da fragilidade observada sobre essas competências? Aprofundando as investigações, as autoras sugeriram a inclusão de uma nova disciplina, denominada “Fundamentos de Matemática”, com temas que seriam imprescindíveis para uma boa performance num curso introdutório de Cálculo. A intenção seria dar um bom embasamento teórico aos alunos, preenchendo as lacunas que ficaram deficitárias no ciclo básico de ensino. Desta forma, eles poderiam ter um bom desempenho na disciplina de Cálculo e, consequentemente, nas próximas que a tivessem como pré-requisito. Com isso, pretendia-se estimular a permanência deles no curso, buscando, assim, minimizar os problemas de evasão.

Garzella (2013) lança outro olhar para esta problemática. Na sua pesquisa de doutoramento na Unicamp, ela caracteriza a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I como uma das que mais reprovam naquela universidade em todas as áreas. A motivação da sua investigação foi exatamente o cenário bastante preocupante em relação ao número de reprovações nesta disciplina, apesar de reconhecer que este não era um problema local e recente. A autora, na sua investigação, embora admita a complexa dimensão do assunto, pois leva em consideração outros aspectos da vida acadêmica e pessoal do calouro, assinala que a forma estrutural rígida da disciplina é um forte fator de insucesso na aprendizagem de significativa parcela dos estudantes. Ela ainda assevera, com base nas entrevistas realizadas com os alunos, que a qualidade da mediação desenvolvida pelo professor nas aulas corrobora em parte para esta situação, conforme já pudemos destacar. A pesquisadora também salienta que os impactos negativos dessas experiências geram frustração e desestímulo no início das vidas acadêmicas dos calouros. Outros aspectos contraproducentes que influenciam este quadro de grandes reprovações foram identificados pela investigadora: um grande número de estudantes por turma, dificultando o atendimento das necessidades particulares de determinados grupos de alunos; a presença de Cálculo I logo no primeiro semestre dos cursos, acontecendo paralelamente com outras disciplinas que já necessitam do conhecimento prévio de Cálculo, como Física I, por exemplo; a grande ruptura que acontece no modelo da Matemática na transição do ensino médio para o ensino superior; a grande quantidade de conteúdos previstos na disciplina ao longo do semestre; a predominância de uma única forma de avaliação (prova escrita), dentre outros, inclusive de caráter afetivo na relação de ensino e aprendizagem.

Uma experiência singular que merece destaque nesse cenário foi empreendida no início da década de 80 na Universidade Federal Fluminense (UFF/RJ). Ao se constatar um alto índice de reprovação nas disciplinas de Cálculo, nos diversos cursos de exatas daquela instituição, uma série de ações foi implementada na tentativa de reverter essa situação. Movimentos estes que não surtiram o efeito esperado. Ao apurar uma grande deficiência de conhecimentos básicos de matemática nos alunos ingressantes na instituição, tais como funções, logaritmos, exponenciais, polinômios, trigonometria e etc, uma das primeiras medidas tomadas foi o aumento da carga horária da disciplina de Cálculo, que passou de 60h para 90h semestrais, isso corresponde a um aumento de 4h para 6h de aulas semanais. Pretendia-se, com esta ação, ampliar a carga horária da disciplina para introduzir, na sua programação, os tais conteúdos diagnosticados como deficitários. A análise era simples e imediata, assim Soares de Mello, Soares de Mello e Silva Fernandes (2001) colocam: "se o aluno chega com menos conhecimento, e deve ao final do curso possuir todo o conhecimento necessário, é preciso tempo para ensinar o conhecimento que falta" (p. 9). De fato, ao partir desta análise, foi aceita a ampliação da carga horária do Cálculo. Mas o que se percebeu, contrariamente às expectativas, foi o aumento significativo dos índices de reprovação, acompanhado por um elevado nível de evasão. Ainda conforme os autores, ocorria o seguinte: apesar da ampliação da carga horária com a inserção dos tais conteúdos, estes eram abordados sem maiores preocupações com a fundamentação teórica e a construção dos conceitos. Os tópicos eram colocados de forma meramente operacional e tecnicista sem o devido tempo de maturação dos conhecimentos trabalhados. Com o aumento do índice de evasão ocorreu a ampliação do número de vagas nos cursos da instituição. Em decorrência desta ampliação, e levando-se em conta que a forma de ingresso dos estudantes preenchia as vagas até o limite, sem uma nota mínima de corte, uma quantidade calouros, ainda menos preparados, ingressavam na universidade agravando ainda mais os índices de reprovação. Como consequência de toda esta circunstância, chegou-se a situação inusitada do número de turmas de repetentes ser maior do que o número de turmas de novos alunos! Como alternativas para ajustar o rumo das ações empreendidas, uma série de novas medidas foi implementada para tal fim. Para manter a uniformidade dos cursos nas diversas turmas ofertadas (aproximadamente 12 turmas de Cálculo distribuidas nos turnos matutino e vespertino), as avaliações passaram a ser uniformes, com a mesma estrutura, e deveriam ser iguais em horários comuns. Acontece que os alunos que faziam as avaliações no primeiro horário, tinham o fator surpresa, enquanto que os alunos que faziam posteriormente, num outro horário adequado estabelecido, já possuiam o conhecimento da estrutura das provas, situação esta que gerou muitas discussões. Ao perceber-se que este procedimento não era apropriado, optou-se pela prova única, num mesmo dia e horário, para todos os alunos de Cálculo. Então, em conjunto, os professores passaram a se reunir para elaborar as avaliações que seriam aplicadas. Cada um apresentaria um grupo de questões que incorporassem os assuntos abordados. As avaliações passaram a ter um aspecto de "concurso", com questões soltas, satisfazendo o interesse de cada docente, sem maiores preocupações em termos estruturais. Este procedimento acabou por transformar as aulas de Cálculo numa espécie de "curso preparatório" para tirar boas notas nas provas. O aprendizado significativo que deveria nortear as ações de aprimoramento do curso, cedeu lugar para o "bom treinamento" dos estudantes, visando quase que exclusivamente os momentos avaliativos. Os resultados negativos vieram mais tarde: os índices de reprovação continuaram altos; houve um aumento da rejeição do Cálculo pelos alunos e os poucos aprovados apresentavam um rendimento insatisfatório nas disciplinas seguintes.

Outros pesquisadores como Flemming (2004) e Palis (2010) ao constatarem nos seus estudos a mesma problemática da dificuldade no ensino e aprendizagem do Cálculo, sugerem cursos como Pré-Cálculo. Estes cursos antecederiam a entrada dos alunos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Inclusive a aprendizagem conceitual dos principais tópicos seria auxiliada por ferramentas tecnológicas. Assim, o estudo das funções elementares do Cálculo, tais como as polinomiais de primeiro e segundo graus, as logarítmicas e exponenciais, as trigonométricas e suas inversas, dentre outras, seriam mais bem exploradas, inclusive do ponto de vista das translações gráficas, por intermédio de *software* matemático. Esta perspectiva de ensino também é vislumbrada por outros autores (e. g., Borba & Penteado, 2010; Meyer, Caldeira & Malheiros, 2001) que inclusive estimulam a adequação da informática em estudos dessa natureza. Ao se conceber a tecnologia neste cenário, novos aspectos dos assuntos explorados surgem, proporcionando uma compreensão mais ampla e sólida dos conceitos, favorecendo, desta forma, a aprendizagem.

Nesta mesma linha, Nasser (2009), ao investigar o desempenho de alunos de Cálculo, constatou muitas dificuldades no traçado de gráficos, inclusive sugerindo, nos seus estudos, estratégias de ensino que ressaltassem as transformações gráficas através das tecnologias. De fato, o Cálculo trata de variados problemas em diversos contextos dinâmicos, tais como as aproximações lineares (diferenciais); traçados de tangentes, taxas de variação e otimizações (derivadas); calculo de áreas limitadas por curvas (integrais), dentre outros, e uma abordagem gráfica computacional favorece a visualização e a compreenssão adequada dos problemas.

Alguns pesquisadores como Balomenos, Ferrini-Mundy e Dick (1994) defendem, nesse aspecto, a chamada "prontidão para o Cálculo". Eles justificam que os típicos problemas citados anteriormente poderiam ser abordados parcialmente – e obviamente numa linguagem mais elementar – no ensino médio, tornando mais suave a transição destes conhecimentos para o ensino superior. Nos seus estudos, puderam perceber que as dificuldades mais presentes nos alunos, não eram as aplicações das técnicas de derivadas ou integrais, mas nas representações e construções gráficas, nas interpretações geométricas e na identificação das possíveis relações dos objetos/variáveis em estudo. Os investigadores apontaram que a ausência de domínio dos conceitos geométricos dos estudantes se dá exatamente pela falta de ligação da Matemática (Geometria) vista no ensino médio com os temas que são abordados no ensino superior (Cálculo): "apesar da predileção dos professores de Cálculo por diagramas, nossa pesquisa indica que o aluno resiste ao uso de estratégias geométricas e espaciais na resolução efetiva de problemas de Cálculo" (p. 241). Os autores da pesquisa apresentam diversos problemas que frequentemente são vistos no Cálculo e que poderiam ter sua abordagem facilitada se estes fossem, de certa forma, antecipados no ensino médio. Isto caracterizaria a chamada "prontidão para o Cálculo". Citarei três desses problemas:

a) Uma esfera de raio r é inscrita num cone circular reto. Determine as dimensões do cone (raio de base R e altura h) de volume mínimo.

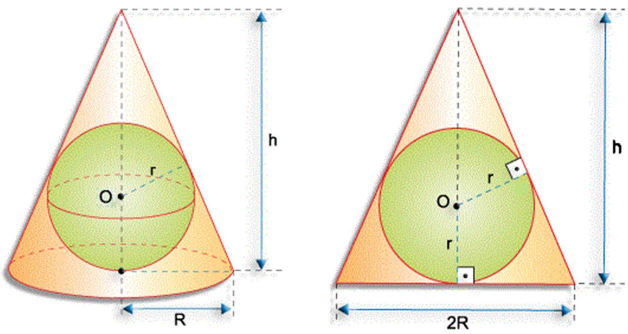
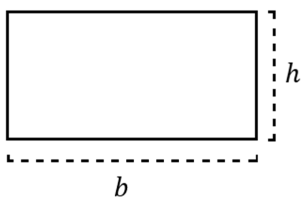


Figura 9: Esfera inscrita num cone.

Geralmente este tipo de problema é abordado num curso de Cálculo quando se estudam os problemas de otimização. A ideia básica para a sua solução consiste em determinar o volume do cone $(V = (1/3)\pi R^2 h)$ em função de uma única variável. Depois de obtida esta função, deve-se determinar o ponto crítico desta, através da derivada, examinando se o extremo encontrado é mínimo. A etapa de expressar o volume do cone em funcão de uma única variável (que pode ser R ou h) pode ser explorada no estudo da geometria espacial no ensino médio, pois esta etapa exige apenas a identificação de triângulos semelhantes numa seção transversal da figura espacial (figura 9). Este problema – e outros semelhantes com figuras espaciais – poderia ser explorado, por exemplo, com modelos concretos ou visualizações dinâmicas num *software* geométrico.

Nesta mesma linha de pensamento, porém com elementos da geometria plana, este outro notável problema é de simples abordagem, inclusive podendo ser resolvido no ensino médio através do ponto extremante (vértice) de uma parábola:

b) De todos os retângulos de mesmo perímetro p, determine as dimensões (base b e altura h) do retângulo de área A máxima.



$$A = b \cdot h$$
$$p = 2b + 2h$$

Figura 10: Determinando o retângulo de perímetro p com área máxima.

Ao expressar a área do retângulo como função de uma única variável (b ou h) e usando a derivada para a obtenção do ponto crítico, chega-se a conclusão de que o quadrado de lado $p/4$ é o retângulo procurado. No ensino médio este problema pode ser antecipado completamente, pois a área (por exemplo, em função da altura h) encontrada para o retângulo é a função quadrática $A(h) = -h^2 + (p/2) \cdot h$, em cujo vértice encontramos a solução procurada. Este problema também pode ser trabalhado com modelos concretos ou visualizações dinâmicas computacionais através de um *software* geométrico.

Para finalizarmos esta série de problemas, investigações com taxas relacionadas, como a descrita abaixo, também podem ser objetos de exploração no ensino médio, com uma abordagem cuidadosa a este nível de ensino.

c) Um tanque de água possui o formato de um cone circular invertido, com base de raio $2\,m$ e altura igual a $4\,m$. Se a água está sendo bombeada para o tanque a uma taxa de $2\,m^3/min$, encontre a taxa na qual o nível da água está subindo quando a água estiver a $3\,m$ de profundidade.

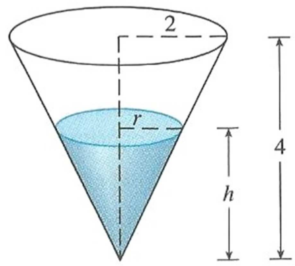


Figura 11: Velocidade do nível de subida da água num cilindro circular reto.

Num curso de Cálculo, espera-se que o aluno descreva o volume do cone $V = (1/3)\pi r^2 h$ em função apenas de uma variável, a altura h, por exemplo. Através da relação $(r/h) = (2/4)$ obtida dos triângulos semelhantes (figura 11), o volume então pode ser expresso como $V = (\pi/12)h^3$. Derivando esta função em relação ao tempo t e substituindo os valores adequados $(h = 3m$ e $dV/dt = 2\,m^3/min)$, chegamos ao resultado do problema. Uma possível abordagem deste problema em Geometria no ensino médio trataria apenas de expressar o volume ocupado pela água em função da altura. Para tanto, além de trabalhar com a seção transversal cônica, seria necessário identificar os triângulos semelhantes para obter a relação destaca acima, relação esta necessária para explicitar o volume do cone em função da altura.

As dificuldades no ensino e aprendizado do Cálculo também foram estudadas por Rezende (2003) que em sua tese de doutorado apontou fatores de natureza epistemológica na abordagem do problema. A partir das relações observadas entre os aspectos pedagógicos do ensino da matemática (em todos os níveis) e os principais fatos históricos e conceituais do

Cálculo, ele identificou cinco "macro-espaços" que possibilitaram refletir, do ponto de vista epistêmico, sobre as adversidades enfrentadas por professores e estudantes na relação de ensino e aprendizagem da disciplina. Os "macro-espaços" foram identificados, segundo o autor, pelas "cinco dualidades essenciais do Cálculo e de seu ensino: discreto/contínuo; variabilidade/ permanência; finito/infinito; local/global; sistematização/construção" (p. 325). Vejamos alguns aspectos relevantes da sua análise:

- **A dualidade discreto/contínuo.**

Desde os níveis mais elementares do ensino da matemática essa dualidade é ignorada e aprofunda a separação entre a aritmética e a geometria. O autor cita temas como "dízimas periódicas" e as "progressões aritméticas e geométricas" como excelentes momentos de aproximação dessas áreas de conhecimento no ciclo básico de ensino. Também destaca que o conceito do contínuo da reta real sofre um grande prejuízo pelas deficiências no ensino e caracterização dos números irracionais, inclusive do ponto de vista histórico, e que estes surgem de forma "nebulosa" no processo pedagógico.

> [...] define-se, em geral, um número irracional por exclusão, isto é, como sendo o número real que não é racional, exibindo alguns números "famosos" como $\sqrt{2}$ e π; mas, por outro lado, o conjunto dos números reais é definido pela reunião dos conjuntos dos numeros racionais e irracionais. (Rezende, 2003, p. 333)

Exatamente por esta "confusão", o domínio do conhecimento numérico, da maioria dos alunos ingressantes num curso superior, restringe-se aos números fracionários. Sustenta o autor que uma série de acúmulos de deficiências adquiridas na construção dos conhecimentos matemáticos, das estruturas discretas e contínuas, no ensino fundamental e médio, vão desempanhar papel crucial no quadro das dificuldades apresentadas pelos alunos num curso de Cálculo. Afirma ainda, já entrando nos domínios do Cálculo, o quanto é complicado para os estudantes estender o conceito local de continuidade de funções para o conceito global, através da definição clássica; e que o apelo da intuição geométrica, recurso muito utilizado pelos professores, não possibilita sequer o aluno dar exemplos, com conhecimento de causa, de funções contínuas.

- **A dualidade variabilidade/permanência.**

O autor apresenta, particularmente neste estudo, a importância, inclusive histórica, da construção de um conceito pilar do Cálculo (e também da Matemática) que é o conceito de função. A relação de interdependência dinâmica entre duas grandezas variáveis é essencial no processo de sedimentação do conhecimento de função na educação básica e que este processo, muitas vezes, é negligenciado ou superficialmente explorado: "A forma como este conceito é trabalhado em geral no ensino médio e fundamental provoca sérios desvios de natureza epistemológica no ensino de Cálculo e da própria Matemática" (p. 343).

Um destaque maior é dado aos conceitos de injetividade, sobrejetividade e bijetividade, com o uso extensivo dos diagramas de flechas, além do predomínio da identificação de uma função apenas por sua expressão algébrica $y = x,\ y = x^2,\ y = sen(x)$ e etc. Nestas ocasiões, sempre é dado um realce maior para a variável independente e universal x em detrimento da variabilidade também de y. Além disso, os aspectos de crescimento e descrescimento das funções praticamente se estabelecem pela observação de alguns parâmetros numéricos inertes das expressões. Outro aspecto importante, evidenciado também em outros estudos (e. g., Balomenos et al., 1994; Nasser, 2009), reside no processo de construção/identificação dos gráficos que representam tais funções. Muitas vezes os processos de "plotagens" das curvas são bastante superficiais, sem maiores significações e quase sempre o professor induz uma única forma estética ao traçado, a partir de alguns pares ordenados $(x, f(x))$ marcados no plano cartesiano. Os estudantes, ao terminarem o ensino médio e ingressarem num curso superior teriam, majoritariamente, esta forma estática de perceberem as funções e seus gráficos. Esta situação, portanto, constituiria um dos maiores obstáculos epistemológicos para um bom desenvolvimento de um curso de Cálculo.

Uma das sérias dificuldades, já adentrando os domínios do Cálculo Diferencial e Integral, ocorreria principalmente na abordagem dos problemas de Taxa de Variação e

Otimização. O autor inclusive apresenta algumas aplicações e ilustrações com esta temática, dando destaque às soluções deficientes descritas por alguns estudantes. Para o Cálculo, particularmente no estudo desses temas, interessa bastante o processo de identificação e construção da função envolvida nesses problemas, além da relação das variáveis envolvidas. Os procedimentos diferenciais para as soluções destes, que decorrem da obtenção adequada da função, quase sempre passam despercebidos pelos alunos, que dificilmente conseguem interpretar e modelar corretamente, em termos de função, a dinâmica das grandezas variáveis relacionadas. Os estudantes no ensino médio estariam acostumados, nas suas tarefas, a terem sempre como dadas as expressões das funções envolvidas e por isso sentem, naturalmente, dificuldades acentuadas em construir tais relações a partir das diversas situações apresentadas nos problemas do Cálculo. Essas dificuldades, também constatadas por Balomenos et al. (1994), constituiriam um "sério desvio" epistemológico do conceito de função originária na educação básica.

- **A dualidade finito/infinito.**

As dificuldades que se impõem na compreensão do infinito acompanham a história da evolução do Cálculo e inclusive o desenvolvimento da própria Matemática nos últimos vinte e três séculos (Boyer, 1996). Desde Eudoxo e Arquimedes, na Grécia antiga (século IV A. C.), passando pelos estudos empíricos de Kepler e Galileu, nos fins da idade média (século XVI), até as primorosas formulações de Dedekind e Cantor, na moderna Europa (século IX), a ideia do infinito passou por uma série de transformações, até mesmo por períodos de rejeição no trato matemático, gerando calorosos debates. Apesar da grande importância deste assunto para o pensamento matemático, inclusive para a compreensão de conceitos mais avançados, pouca atenção é dada ao tema no ciclo básico de ensino. Ainda que neste nível de conhecimento apareçam momentaneamente ideias esparsas do infinito na teoria dos conjuntos, no estudo das dízimas periódicas, na abordagem dos números irracionais, dentre outros possíveis temas, o conceito do infinito permance ainda longe das profícuas discussões, de atividades e projetos relevantes. Relativamente a esse aspecto, o autor aponta quatro "níveis de significações" do infinito, identificadas nos conceitos atribuídos por alunos oriundos do ensino médio, são eles:

"infinito como algo que não tem fim; infinito como algo incontável; infinito como algo ilimitado e infinito como forma indeterminada" (Rezende, 2003, p. 360). Esta classificação não é absoluta, os níveis não são excludentes e podem até mesmo ser confundidos a partir de novos sentidos espontâneos dados ao tema pelos estudantes. É exatamente com este "emaranhado" de ideias dispersas do infinito que os alunos chegam ao ensino superior para tratar das questões mais delicadas e refinadas do Cálculo Diferencial e Integral.

A noção precisa do infinito, inclusive do ponto de vista da dualidade discreto/contínuo, é de extrema importância para a compreensão de diversos conceitos do Cálculo. Ao iniciar os estudos dessa disciplina, já explorando os limites, o infinito já se impõe no entendimento das ideias de conjunto aberto, vizinhanças de um ponto, aproximações arbitrárias de um número, distâncias infinitesimais e etc. Adiante no assunto vamos encontrar as indeterminações matemáticas, tais como $\infty/\infty,\ \infty - \infty,\ 1^{\infty}$ dentre outras, que tratam majoritariamente das operações básicas de funções com esses aspectos comportamentais. Mais além, conceitos ainda mais aperfeiçoados do infinito surgem da determinação da reta tangente, no estudo dos comprimentos, áreas e volumes, que se firmam através de procedimentos *ad infinitum* da soma de Riemann, sustentados pela concepção infinitesimal e contínua da reta (Stewart, 2013).

O autor ainda registra um fato singular que ocorre com muita frequência nas operações básicas com o infinito. A transposição das regras operatórias dos números reais é notoriamente realizada pelos alunos de Cálculo, numa espécie de trato algébrico do infinito, de forma semelhante às costumeiras situações vivenciadas na aritmética do ensino médio. As simplificações consideradas "ingênuas" que estes fazem, e que refletem laboriosos estudos na trajetória evolutiva do Cálculo, sobrevêm naturalmente nos raciocínios dos estudantes. Para exemplificar esta situação, o autor destaca, dentre outras ocorrências, os limites abaixo resolvidos de forma errônea:

- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty} = (1+0)^{\infty} = 1^{\infty} = 1.$

Nesta situação ressalta-se a ideia de que "1 elevado a qualquer número é igual a 1".

- $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1} - x = \sqrt{\infty^2+1} - \infty = \sqrt{\infty+1} - \infty = \sqrt{\infty} - \infty = \infty - \infty = 0.$

Nesta colocação destaca-se "a soma de elementos simétricos é sempre nula".

- $\lim_{x\to\infty} x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right) = \infty \cdot sen\left(\frac{1}{\infty}\right) = \infty \cdot sen(0) = \infty \cdot 0 = 0.$

Nesta última circunstância sobressai-se a ideia de que “zero multiplicado por qualquer número resulta em zero”.

Apesar dos quatros níveis de significações catalogadas para o infinito, nestas ocorrências ressalta-se a interpretação do símbolo do infinito como um simples número real, porém “muito grande”.

A indeterminação do tipo $0/0$ geralmente é bastante explorada no ensino do Cálculo. Este fato frequentemente ocorre porque a derivada de uma função, obtida através da clássica definição[3], ocasiona sempre um limite com esta indeterminação e que precisa ser simplificado. Muitos são os estudantes que desconhecem inicialmente o significado desta indeterminação e acabam por fazer muitas confusões ao tentar exprimir o significado da divisão de zero por zero: *“o resultado é zero, pois zero dividido por qualquer número é zero”; “o resultado não existe, pois não existe divisão por zero”; “o resultado pode ser qualquer número real”.* O professor do ensino médio tem, inclusive, uma ótima oportunidade de tratar este “impasse” ao deparar-se com a equação $0 \cdot x = 0$, geralmente quando aborda o tema de equações do primeiro grau.

Indubitavelmente, é inegável a relevância do conhecimento mais expressivo do infinito para o bom desenvolvimento de um curso de Cálculo Diferencial e Integral, mas também é notória a insuficiente abordagem deste tema com representações significativas no ensino médio. Isto é posto de tal maneira que o autor cita a noção do infinito como uma das notáveis dificuldades que surgem no Cálculo, dificuldades estas de natureza epistemológica e que constituem grande obstáculo para a compreensão das ideias básicas desta disciplina, incluindo aí o refinado conceito de limites.

[3] Geralmente os livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral apresentam duas definições equivalentes para a derivada de uma função num ponto, a saber, $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-(x_0)}{x-x_0}$ e $f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. A equivalência entre estas definições pode ser mostrada a partir da mudança de variável $\Delta x = x - x_0$.

- **A dualidade local/global.**

Ao abordar esta dualidade o autor destaca o aspecto recente desse estudo, originada, segundo Petitot (1985 apud Rezende, 2003, p. 372), em meados do século XIX. A abordagem de Petitot inclui por demais as perspectivas do campo semântico e dialético da linguagem, acrescentando aspectos da estrutura lógico-sintático das línguas naturais e concluindo sobre as dificuldades da organização das formas linguísticas. Apesar de reconhecer a importância da contribuição da natureza epistemológica desta dimensão, muitos autores modernos questionam e criticam esta abordagem, quando esta se correlaciona com as teorias e os modelos matemáticos.

Do ponto de vista histórico, o pesquisador destaca os estudos originários de Newton e Leibniz no século XVIII, onde ressaltam majoritariamente as abordagens segundo os aspectos globais. Apesar deles realizarem, em certas ocasiões, cálculos de natureza local, os seus conceitos iniciais de diferenciabilidade das curvas eram considerados sob um prisma global. Esse aspecto deveria estar relacionado a duas condições: primeiro ao caráter das curvas abordadas nos seus estudos, cujos comportamentos, numa linguagem moderna eram, pelo menos, diferenciáveis; no segundo aspecto, constatamos que os métodos fundamentais para abarcar com profundidade a dualidade local/global viriam mais tarde, com Euler, Lagrange e Cauchy, dentre outros, incorporando conceitos mais precisos de função e limite no Cálculo.

A abordagem local/global passou a fazer parte essencial da preocupação estrutural do Cálculo a partir do século XIX, pelo demasiado cuidado na introdução desses conceitos de uma forma mais rigorosa. O que se pode notar é que esta nova percepção vinculou-se de tal forma ao alicerce do Cálculo que atualmente permeia uma boa parte dos seus tópicos de estudo nas universidade. O limite, pela definição de Cauchy ou Heine, é um conceito local de análise. A partir deste estudo local surgem também os conceitos locais de continuidade e derivada de uma função. A diferenciabilidade de uma curva, estabelecida a partir da sua representação algébrica, parte de um conceito local para uma extensão global "natural" – a função é dita diferenciável se esta for em todo ponto do seu domínio. Mais adiante, avançando nas aplicações das derivadas, no estudo gráfico das funções, a dualidade local/global surge de forma ostensiva na determinação dos pontos extremos (relativos e absolutos) de uma curva, cujo estudo é imprescidível para abordar com êxito os problemas de otimização.

Para sustentar o grau de dificuldade com que esta dualidade aparece num curso de Cálculo, o autor ainda apresenta um clássico exercício sobre derivadas[4]. A "confusão" se estabele a tal ponto que "nenhum dos alunos de uma das turmas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do curso de Matemática (2° semestre de 1998) conseguiu resolver" (p. 382). O problema reside exatamente nos conflitos observados na aprendizagem da dualidade local/global, além da depreciação das importantes hipóteses que sustentam boa parte dos principais resultados do Cálculo. Os professores apresentam um conceito local de derivada de uma função, inclusive com ênfase nos conceitos de derivadas laterais e, posteriormente, estendem esta noção para um conceito global, afim de trabalhar com as regras operacionais das derivadas. Nas respostas apresentadas pelos alunos ao exercício, ressaltam apenas as soluções advindas do uso indiscriminado das técnicas operacionais com suporte na regra da cadeia, sem maiores preocupações das hipóteses que sustentam esta regra. Eis a resposta majoritária apresentada:

$$f'(x) = 2xsen\left(\frac{1}{x}\right) + x^2cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2xsen\left(\frac{1}{x}\right) - cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Os alunos que chegavam a essa etapa paravam e apresentavam-na como solução, outros afirmavam ainda que $f'(0) = 0$ e alguns diziam que não existia $f'(0)$. O fato é que nenhum deles cogitava usar a definição formal de derivadas para apresentar a solução e ignoravam completamente que não podiam usar a regra da cadeia para o caso $x = 0$. Uma circunstância ainda ressaltou desta análise: o fato da função f apresentar valor nulo no ponto $x = 0$ não influenciava em absolutamente nada nas respostas dos alunos! A função poderia apresentar qualquer valor no ponto $x = 0$ que isto não influenciaria em grau nenhum a solução! O conceito global de derivada estava estabelecido simplesmente pelo uso direto e sem maiores dificuldades das técnicas operacionais – isto também está conforme os estudos de Balomenos et al. (1994) – tudo a ocorrer sem maiores preocupações nas ocorrências locais.

---

[4] Seja f uma função real de variável real definida por $f(x) = \begin{cases} x^2sen\left(\frac{1}{x}\right), se\ x \neq 0 \\ 0, se\ x = 0 \end{cases}$. Verifique se f é diferenciável e determine a função derivada de f.

- **A dualidade sistematização/construção.**

No macro-espaço sistematização/construção o autor localiza de forma mais intensa as maiores dificuldades no aprendizado do Cálculo do ponto de vista epistemológico. Partindo dos conceitos filosóficos e semânticos dos termos "sistematização" e "construção", segundo Mora (2000), ele identifica duas influentes escolas teóricas que exercem fortes ascendências nos atuais e predominantes modelos de ensino do Cálculo – e da Matemática de uma forma geral – o formalismo e o logicismo. Se bem que em suas análises o autor pondera que "o par sistematização/construção não constitui propriamente uma dualidade no sentido filosófico: não existe sistematização sem construção, nem construção sem sistematização" (p. 389). O processo de aquisição do conhecimento, de uma forma geral, entrelaça estes dois pensamentos.

Sob a ótica do ensino do Cálculo, este coloca que há uma predominância da lógica formal na constituição dos seus significados e construções. De um lado, o formalismo pretende alcançar um estado global e unitário na estruturação e desenvolvimento das ideias do Cálculo; por outro lado, esta metodologia se prende de forma extremada ao logicismo, ao ponto de vincular quase todos os seus conceitos de uma forma dedutiva, quase axiomática, a esta ciência. Ao apontar as fragilidades das correntes filosóficas formalista e logicista surge a perspectiva do "construtivismo matemático" a partir da "popularização" da ação de construir o conhecimento na universidade (p. 388). Porém esta perspectiva ocorre com o amplo apelo aos recursos interpretativos e intuitivos no ensino, como veremos adiante.

A partir da análise histórica da evolução das ideias do Cálculo, o autor situa diversas tentativas de "elaboração didática" das ideias desta disciplina. Desde os próprios Newton e Leibniz, considerados protagonistas na paternidade do Cálculo no século XVII, com os seus infinitésimos; passando por Cauchy e Weierstrass no século XIX, com a formalização dos limites; até os anos de 1960, por Robinson, retomando os conceitos infinitesimais. Apesar das elaborações concebidas neste período histórico percebe-se, na atualidade, uma metodologia majoritariamente lógico-formal no ensino do Cálculo, remanescentes aos moldes estabelecidos por Cauchy e Weierstrass:

> Por via de regra, a realização didática do ensino de Cálculo e os seus livros-texto seguem basicamente o mesmo princípio e padrão de

> sistematização propostos por Cauchy e Weierstrass (limite – continuidade – derivada – diferencial – integral). Em ambos os níveis, por exemplo, os conceitos são definidos formalmente e os resultados são demonstrados passo a passo segundo um modelo axiomático que parte da definição formal de limite e de alguns "postulados fundamentais" oriundos da Álgebra Moderna e da Análise Matemática, tais como: o conjunto dos números reais ser um corpo ordenado, propriedades relativas a ordem de $\mathbb{R}$, o postulado de continuidade de Dedekind-Cantor, etc... Cabe ressaltar, entretanto, que outros resultados são acrescidos e assumidos tacitamente como "postulados" durante o processo de execução do modelo. (Rezende, 2003, p. 391)

A esta metodologia lógico-formal predominante na atualidade, é comum observarmos dois procedimentos didáticos frequentemente usados pelos docentes no ensino do Cálculo: exercícios de fixação apresentados ao final de cada tópico programático e o treinamento de técnicas algébricas que servem à solução dos exercícios propostos, como, por exemplo, as fatorações de polinômios tão usadas nas simplificações dos limites. A ideia formal de apresentar os conceitos e teoremas e posteriormente ilustrar com exemplos, como se estes não antecedessem e nem tivessem valor histórico para os resultados apresentados, ocasiona grandes dificuldades na aprendizagem do Cálculo. A essas dificuldades de natureza epistemológica o autor designa como "desmaterialização dos resultados e conceitos básicos" (p. 391). Para justificar esta situação, um dos conceitos mais importantes do Cálculo é utilizado como ilustração: a derivada. A grande motivação histórica para o surgimento deste conceito foram os clássicos problemas da velocidade instantânea abordado pelos físicos (Stewart, 2013), e a determinação do coeficiente angular da reta tangente atacada pelos matemáticos (Carvalho, 1919; Pires, 2004). Anteceder a definição de derivada, para posteriormente significá-la com os aspectos cinemáticos e geométricos citados, apresentaria um contraste histórico com as ideias originárias e construtoras. Com relação ao processo do "construtivismo matemático", o autor defende que em muitas situações os estudantes passam a compreender melhor os conceitos do Cálculo e a aplicá-los, ampliando assim a sua rede de significados, quando o docente passa do aspecto puro do rigor da demonstração – quando os alunos, na maioria das vezes, apenas assistem-na passivamente – para o enfoque interpretativo, intuitivo, com os recursos algébricos ou geométricos mais "próximos" dos discentes. Para enfatizar as suas ideias, o Teorema de

Rolle[5] é ilustrado como um exemplo clássico onde é possível, a partir dos entendimentos mais simples de suavidade e continuidade de uma curva, gerar a interpretação geométrica do Teorema e o seu significado, sem partir para uma demonstração lógico-formal nos moldes dedutivos.

O autor aponta ainda a necessidade de realizar o que ele chama de “inversão de polaridade” da dualidade sistematização/construção. Na prática, deveria haver uma maior preocupação dos professores de partir das elaborações dos campos reais de significados dos principais resultados e ideias do Cálculo para, numa etapa posterior, buscar sistematizá-los didaticamente. Para que isso ocorresse de forma eficaz, uma discussão de caráter emergencial deveria ocorrer entre os professores de Cálculo. Estes deveriam promover profundas discussões sobre esta inversão de olhar, inclusive sob as reais necessidades e pretensões da oferta de um curso inicial de Cálculo, tudo isso com a finalidade de minimizar os graves problemas de ensino e aprendizagem dessa disciplina. O investigador finaliza o seu pensamento sugerindo uma correção de natureza epistemológica no rumo do ensino do Cálculo, ressaltando a importância do processo histórico evolutivo das principais ideias desta disciplina na sua construção didática, apesar de evidenciar que este longo caminho a trilhar nem sempre é o mais simples.

Como pudemos observar, diversos são os olhares voltados para o enfrentamento das dificuldades no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Muitos são os pesquisadores da educação que se debruçam sobre estas complexas e importantes questões na atualidade. Ao alicerçar os seus pensamentos em outras áreas do conhecimento, como a Filosofia, a Pedagogia e a Psicologia, por exemplo, estes investigam suas possíveis causas e propõem alternativas que possam, pelo menos, minimizar os efeitos negativos que ainda subsistem. As pesquisas realizadas sobre esta temática, que evidenciam sempre os desfavoráveis e expressivos índices estatísticos que envolvem a disciplina, sugerem alguns caminhos na direção de sanar ou reduzir esses efeitos: o uso da tecnologia computacional como recurso auxiliar de aprendizagem em atividades matematicamente mais ricas e relevantes (Palis, 2010); o desenvolvimento, ainda no ensino médio, da chamada “prontidão para o ensino de Cálculo” (Balomenos, Ferrini-Mundy & Dick, 1994); a introdução de disciplinas como Pré-Cálculo

[5] **Teorema de Rolle:** Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciável em (a, b) e contínua em $[a, b]$. Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

que antecederiam o ingresso dos alunos num curso de Cálculo (Flemming, 2004) e, sob o ponto de vista epistemológico, realizar a inversão de polaridade na dualidade sistematização/ construção na apresentação das principais ideias e resultados do Cálculo, inclusive sob a ótica cronológica e histórica (Rezende, 2003). Todas estas dimensões são importantes e devem fomentar ainda outros estudos que busquem defrontar o cenário realístico das dificuldades no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

Capítulo 3

Ensino exploratório

> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo.
>
> Braumann, 2002 (p. 5)

Iniciamos este capítulo apresentando a necessidade do ensino da Matemática avançar da metodologia expositiva para práticas mais dinâmicas, reflexivas e construtivas. As orientações preconizadas nos parâmetros curriculares oficiais assinalam a importância das renovações pedagógicas para o tratamento diversificado dos conteúdos matemáticos, inclusive pelas vias exploratórias e investigativas na abordagem de relevantes problemas. O destaque que damos, nesse aspecto, é para o ensino exploratório. Adentramos este modelo de ensino enfatizando as suas notórias características. Ressaltamos as peculiaridades das aulas exploratórias: descrevemos as três fases que, geralmente, envolve uma aula com tarefas de natureza exploratória e investigativa – o lançamento da tarefa, a exploração pelos alunos e a discussão/sintetização dos conhecimentos; salientamos como estas aulas promovem um ambiente mais dinâmico e participativo para os alunos e também retratamos algumas dificuldades e desafios a superar nesta modalidade de ensino. Avançamos o capítulo dando notoriedade a alguns diferentes tipos de tarefas matemáticas, desde os exercícios aos projetos, passando pelas investigações e tarefas exploratórias, abordando as suas particularidades e os seus variados contextos aplicativos.

3.1. Perspectivas atuais para o ensino da Matemática

A era da informação e da tecnologia que vige na sociedade moderna exige cada vez mais versatilidade e dinamismo das relações humanas. As necessidades que surgem inevitavelmente no mundo social e do trabalho, tornam necessárias novas maneiras de pensar e agir cotidianamente. Algumas importantes habilidades devem ser consideradas neste cenário: a competência para trabalhar em equipe – e interagir de forma construtiva – e a capacidade de pensar de forma autônoma, expressando criatividade para defrontar os problemas que se apresentam. A escola básica e a universidade desempenham papéis fundamentais nesta perspectiva. A primeira prepara o indivíduo para exercer plenamente a cidadania e a segunda o complementa, profissionaliza-o para o mundo do trabalho. E a Matemática nesses ambientes, como se apresenta? Como pode o professor colaborar com um ensino mais reflexivo, dinâmico e criativo no contexto desta sociedade moderna?

Conforme Ponte e Serrazina (2000) a Matemática da educação básica está bastante associada, em muitos casos, apenas aos processos tecnicistas. Situações que privilegiam demasiadamente a memorização de fórmulas e a aplicação repetitiva de exercícios. Os alunos preservam essencialmente domínios no campo aritmético, especificamente nos problemas que requerem habilidades somente nas quatro operações básicas. A predominância desses aspectos pedagógicos em detrimento de práticas mais laborativas e motivadoras impede que os alunos percebam formas diferenciadas de explorar os conteúdos matemáticos. Esse predomínio, além de realçar uma visão simplista e desalentadora da Matemática, contribui para ampliar o descontentamento de muitos com a matéria. Obviamente ninguém desmerece a importância da proficiência dos procedimentos mais elementares, mas estes conhecimentos poderiam emergir de significativos problemas que requisitassem tais técnicas (NCTM, 1991). Se é um consenso formar alunos mais autônomos, reflexivos e criativos, que desenvolvam autoconfiança e gosto pela Matemática, é importante diversificar as práticas pedagógicas. Nesse cenário, uma estratégia apontada por muitos pesquisadores (e.g., Bispo, Ramalho & Henriques, 2008; Christiansen & Walther, 1986; Ponte, 2005; Stein & Smith, 1998) para potencializar estas qualidades consistiria em envolver os alunos em tarefas exploratórias e investigativas, como veremos adiante.

A Matemática como é ensinada nos cursos superiores geralmente não difere muito da realidade das escolas básicas. Existe uma espécie de insatisfação geral tanto de professores quanto de alunos, onde todos almejam por mudanças e novidades nesse sistema educativo. É perceptível a defasagem e a desarticulação dos currículos perante o cenário dinâmico das transformações sociais e científicas da sociedade moderna. É de se notar o gradativo desinteresse dos alunos que cursam as disciplinas matemáticas, em particular o Cálculo, onde já pudemos salientar os seus altos índices de reprovação e evasão. A massificação do ensino, as expressivas taxas de insucesso e a necessidade de preparar adequadamente o indivíduo para o exercício profissional são problemas que desafiam os educadores da atualidade (Berger, 2002).

A universidade tem a tarefa de formar o cidadão competente e criativo, que saiba portar-se perante as novas situações da modernidade e que mantenha o espírito contínuo de aperfeiçoamento e aprendizagem. Neste sentido, as abrangências curriculares atuais precisam dar um passo além das necessárias competências técnicas e dos rigores científicos. Deve incentivar as habilidades comunicativas e investigativas, despertando o protagonismo e o cooperativismo na produção dos conhecimentos (APM, 1988, 1998; Brasil, 1998; MAA, 2004). Entretanto, o ensino da Matemática nos cursos superiores parece não visar estes objetivos. O predomínio do tradicional modelo expositivo acaba não oportunizando aprendizagens mais ativas e construtivas aos alunos. Em plena era da tecnologia e da informação, prevalece ainda vigorosamente a transmissão direta do conhecimento pelo professor, onde os alunos permanecem, na maioria das vezes, em condutas passivas e espectadoras. Para muitos docentes parece existir ainda uma grande barreira para atuar na educação superior diversificando as abordagens de ensino. Conforme Gonçalves (2008), os professores poderiam posicionar mais dinamicamente os alunos para uma aprendizagem mais laborativa, lançando mão, inclusive, dos recursos tecnológicos.

Particularmente no ensino do Cálculo é bastante comum verificarmos longos programas de estudo, com tempo insuficiente para abarcá-los com qualidade a sua totalidade.

Muitas vezes o ensino é concentrado apenas no rigor científico, ministrado independentemente das motivações e dos objetivos profissionais que uma licenciatura comporta, por exemplo. Nas aulas prevalecem as exposições teóricas, com exemplos demasiadamente descontextualizados, muito frequentemente abstratos e afastados dos interesses mais próximos dos alunos. Para ilustrar essa situação, descreverei uma antiga experiência minha ministrando uma aula no curso de licenciatura em Matemática sobre a derivada logarítmica de uma função, conforme sequência adaptada de Guidorizzi (1987). A exposição, auxiliada pelo quadro e o giz, seguia aproximadamente o seguinte aspecto:

Sejam f e g duas funções deriváveis num mesmo conjunto A, com $f(x) > 0$ para todo $x \in A$. Consideremos a função definida em A e dada por

$$y = f(x)^{g(x)}.$$

Aplicando o logaritmo neperiano, obtemos:

$$ln(y) = ln\left[f(x)^{g(x)}\right] = g(x)ln\big(f(x)\big).$$

Assim $y = e^{g(x)ln(f(x))}$,

ou seja, $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)ln(f(x))}$. Então,

$$\frac{dy}{dx}\left[f(x)^{g(x)}\right] = e^{g(x)ln(f(x))} \cdot \frac{dy}{dx}\left[g(x)ln\big(f(x)\big)\right]$$

e, portanto

$$\boxed{\frac{dy}{dx}\left[f(x)^{g(x)}\right] = f(x)^{g(x)} \cdot \frac{dy}{dx}\left[g(x)ln\big(f(x)\big)\right]}$$

Uma série de exemplos vinha a posteriori para ilustrar o uso desta fórmula.

O objetivo principal desta última fórmula é derivar funções do tipo $y = x^x$, $y = sen(x)^{cos(x)}$ e outras semelhantes (é possível gerar uma infinidade delas!), onde a base e o expoente da função são variáveis. Nesta fase do curso as derivadas das funções potenciais e exponenciais já são conhecidas. Mas as funções do tipo acima exemplificadas são situações meramente abstratas, excessivamente afastadas dos contextos mais práticos e realísticos. Mais ainda, excessivamente distantes das necessidades da futura atividade profissional dos alunos como professores da educação básica. Jamais afirmaria que este é um assunto desnecessário, longe disso! Mas que ele seria muito mais útil e necessário num curso de bacharelado, numa perspectiva de aprofundamento dos conhecimentos e para o desenvolvimento da pesquisa em Matemática pura. Mas por este assunto fazer parte da programação curricular da disciplina, existia a “obrigação” de ministrá-lo, para não ocasionar “deficiências de conteúdo” na aprendizagem da disciplina. Outras necessidades, outros temas, com novas abordagens, inclusive buscando a otimização do tempo, seriam mais úteis e interessantes numa licenciatura. Neste sentido, optei por não mais explorá-lo diretamente, apenas informava aos alunos que existia uma fórmula útil para derivar tais funções. Deixei então para os mais interessados pesquisarem e aprofundarem os seus estudos.

As dificuldades que os estudantes apresentam ao estarem inseridos unicamente no modelo expositivo de ensino, está relacionada também com o fato deles terem acesso exclusivamente aos resultados finais do conhecimento. Por não participarem ativamente no seu processo de construção, os conceitos fundamentais não são efetivamente assimilados e internalizados (Dorier, Robert, Robinet & Rogalsi, 1994). Quando se idealiza para a universidade, dentre outras missões, a formação reflexiva e criativa, o ensino deve avançar da via direta da transmissão para a aprendizagem centrada no estudante, com metodologias mais afinadas aos processos construtivos, exploratórios e investigativos.

Obviamente que podemos atribuir várias causas, umas mais acentuadas do que outras, ao problema do insucesso estudantil. Essa não é uma questão apenas institucional (da escola ou da universidade), diz respeito aos alunos e suas famílias, aos fatores políticos e econômicos, a sociedade e também a nós professores. A forma predominante como os conteúdos são apresentados (e a sua utilidade!), influenciam decisivamente a relação de ensino e aprendizagem e podem contribuir também para este insucesso. É por isso que vamos encontrar uma série de estudos, particularmente realizados a partir da década de 80, que evidenciaram (e evidenciam) esses problemas: o *Second International Assessment of Educational Progress* (IAEP II – 1988), o *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS – 1995) e o *Programme for International Student Assessment* (PISA – 2000).

Também em Portugal vamos encontrar inquietações sobre esta temática. As atenções sobre a forma de ensino da Matemática neste país datam também desta época. Essa foi uma das principais razões, por exemplo, para a criação da Associação de Professores de Matemática (APM) em 1986. Alguns pesquisadores e dirigentes de órgãos institucionais vêm refletindo sobre o tema desde então, apresentando valiosas contribuições ao assunto: Abrantes (1988), Ponte (1992), APM (1998a, 1998b) e o próprio Ministério da Educação (2001). Os documentos oficiais do ensino fundamental e médio, na área da Educação Matemática, já evidenciam características de um ensino mais ativo, centrado no aluno e voltado para as práticas de natureza exploratória (APM, 1988, 1998). Segundo estes documentos, os estudantes deverão ser capazes de:

- desenvolver uma profunda compreensão dos conceitos e princípios matemáticos;
- raciocinar com rigor e comunicar com clareza;
- reconhecer as aplicações matemáticas no mundo que os rodeia e enfrentar os problemas matemáticos com confiança;
- aprender a investigar, por si próprios, as ideias matemáticas;
- usar experiências e observações para formular conjecturas.

Obviamente que estas características devem ser focadas e também ampliadas no ensino superior: "todos os cursos devem incorporar atividades que ajudem o progresso de todos os estudantes no desenvolvimento do raciocínio analítico e crítico, da capacidade de comunicação e de resolução de problemas e na aquisição de hábitos de pensamento" (MAA, 2004, p. 1). Daí a necessidade de avançar para novas perspectivas de ensino e aprendizagem: prosperar do ensino direto, exclusivamente baseado na transmissão do conhecimento, para as práticas mais laborativas. É necessário, portanto, um esforço contínuo, principalmente de nós professores, para repensar nossas práticas e incentivar novas habilidades aos alunos. Certamente que para alcançar este objetivo é preciso otimizar o tempo de aula em atividades mais significativas e úteis. Por conseguinte são necessários ajustes nos conteúdos de forma a dispensar os "acessórios" e trabalhar com o que de fato é mais importante.

No Brasil vamos encontrar a mesma preocupação com o ensino da Matemática e a formação de professores. Desde a declaração "An Agenda for Action" do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) na década de 80 nos Estados Unidos – manifestação esta que tomou dimensões internacionais – a resolução de problemas e a abordagem exploratória da Matemática estão cada vez mais presentes nas salas de aula. Inclusive os exames nacionais do governo para avaliação do ensino médio (ENEM) e do ensino fundamental (Prova Brasil) vêm mudando gradualmente as suas concepções, ao explorar cada vez mais a Matemática sob estes prismas.

As orientações oficiais para a educação básica sugerem tratamentos diversificados dos conteúdos matemáticos, dando ênfase à resolução de problemas, como sendo esta uma atividade genuinamente matemática (São Paulo, 1991). Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o ensino médio orientam sobre a necessidade das renovações pedagógicas pelas vias exploratórias. Estes também indicam que os professoes devem estar atentos às novas atitudes na relação de ensino e aprendizagem (Brasil, 1999). Essas diretrizes destacam a necessidade do professor combinar adequadamente o conhecimento da matéria aos novos desafios que a modernidade exige:

> [...] a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios (Brasil, 1998, p. 27).

> [...] identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas (Brasil, 1998, p. 47).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino fundamental, direcionados para o ensino da Matemática, desde as primeiras séries deste nível escolar, indicam também atitudes investigativas e cooperativas na relação de ensino e aprendizagem:

> Nesse ciclo é importante que o professor estimule os alunos a desenvolver atitudes de organização, investigação e perseverança. Além disso, é fundamental que eles adquiram uma postura diante de sua produção que os leva a justificar e validar suas respostas e observem que situações de erro são comuns, e a partir delas também se pode aprender. Nesse contexto, é que o interesse, a cooperação e o respeito para com os colegas começam a se construir (Brasil, 2002, p. 69–70).

Como pudemos perceber, todos esses parâmetros e orientações apontam para novas concepções na relação de ensino e aprendizagem da Matemática. Todos destacam a necessidade da diversificação das práticas pedagógicas na disciplina. A modernização do ensino pode alcançar a todos os professores, desde a educação básica até à universidade. A abordagem da Matemática, em particular o Cálculo Diferencial e Integral, com significativos problemas através do ensino exploratório, pode associar-se muito bem aos momentos expositivos. Na seção que segue destacaremos os aspectos que caracterizam e notabilizam esse ensino.

3.2. O ensino exploratório e suas características

O aperfeiçoamento observado das metodologias didáticas, fruto de relevantes pesquisas no campo educacional, vem modernizando a prática de ensino de muitos professores. Estes profissionais têm procurado associar às suas atividades cotidianas elementos com características mais atraentes e dinâmicas. Sem diminuir o nível de exigência e qualidade que as práticas educacionais necessitam ter, busca-se favorecer aprendizagens mais interativas, laborativas e reflexivas para os alunos (Bispo et al., 2008; Chapman & Heater, 2010). O ensino exploratório destaca-se nesta perspectiva.

O ensino exploratório é aquele onde os alunos desempenham papéis mais ativos na aprendizagem. Esta se dá de uma forma mais construtiva e o pensamento autônomo dos alunos é incentivado (Ruthven, Hofmann & Mercer, 2011). Eles passam a aprender e a produzir conhecimentos a partir de relevantes tarefas produzidas e orientadas pelo professor. Nestes trabalhos as ideias matemáticas emergem com mais riqueza e expressividade, são discutidas em grupos, confrontadas e sistematizadas no coletivo (Canavarro, 2011; Ponte, 2005). Esta modalidade de ensino oportuniza aos alunos desenvolverem uma série de capacidades matemáticas ao possibilitar que os conhecimentos surjam com mais significados. A resolução de problemas, as estratégias de abordagem, os raciocínios analíticos e a comunicação matemática são algumas das habilidades potencializadas no ensino exploratório (Bispo et al., 2008; Martins, Maia, Menino, Rocha & Pires, 2002; Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003). Para que isto se verifique, a ação do professor é de fundamental importância neste cenário. A gestão da aula, a escolha apropriada das tarefas e a maneira de fazer ressaltar o conhecimento destes trabalhos são algumas das suas relevantes atribuições. Para além disso, o professor acompanha, interpreta e compreende as ações e respostas dos alunos de forma a articular e harmonizar o conjunto de saberes que brotam para garantir a aprendizagem matemática.

Muitos estudos vêm apontando que o modelo exploratório de ensino tem-se expandido desde a educação fundamental até a universidade, apesar dos desafios e complexidades que este impõe naturalmente à renovação das práticas docentes (Cengiz, Kline & Grant, 2011; Franke, Kazemi & Battey, 2007; Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008). Porém, estes mesmos desafios quando confrontados, acabam, de certa forma, por promover mais amplamente o seu entendimento e aperfeiçoamento. O ensino exploratório realmente apresenta perfis de complexidade para uma grande parcela de professores e esta é uma razão para muitos evitarem o seu emprego. O novo dinamismo que se percebe no ambiente das aulas, a coordenação das discussões coletivas (e em pequenos grupos) e a elaboração de tarefas que viabilizem a construção dos conhecimentos requerem significativos esforços e transformações. Estas são algumas das marcas emblemáticas desta modalidade de ensino. Tanto alunos quanto professores passam a conviver numa atmosfera mais rica de comunicações e descobertas (Franke et al., 2007; Stein et al., 2008).

Segundo Ponte (2005), quando comparada com o modelo tradicional expositivo, onde os conceitos são transmitidos diretamente do professor para os alunos, o ensino exploratório presume novos paradigmas para ambos. Eles passam a estar permanentemente ativos, obviamente à sua maneira cada um, de tal forma que “a ênfase desloca-se da atividade ‘ensino’ para a atividade mais complexa ‘ensino-aprendizagem’” (Ponte, 2005, p. 13). Os conceitos matemáticos surgem ou são construídos num processo de compartilhamento de ideias entre os estudantes, possivelmente organizados em pequenos grupos, em ricas tarefas exploratórias. A aprendizagem se dá numa via de mão dupla, onde o fruto do conhecimento é resultante da interação entre os próprios alunos (e professor), onde o individual sugere propostas que podem ser refutadas, aceitas ou aperfeiçoadas pela influência do coletivo (grupo), numa valiosa e construtiva troca de ideias. O docente, diferentemente de imaginar-se num papel menor, passa a ter, nesse sentido, um lugar de destaque. Ele inicia e dirige as discussões; mantém o interesse dos alunos nas tarefas; promove o debate de ideias; localiza questões elucidativas e valoriza adequadamente as diversas contribuições dos alunos (Canavarro, 2011). Sem dúvida estes são aspectos que requerem uma expressiva competência profissional. Por isso que é muito importante que o professor reflita sobre os desafios e as dificuldades subjacentes a estes trabalhos.

A gestão da aula exploratória pressupõe a realização de uma estratégia que perpassa uma série de notáveis e cuidadosos momentos, como será destacado mais adiante. O sucesso da atenção e da aprendizagem dos alunos, nesse aspecto, consiste no professor efetivamente os envolver em tarefas significativas, apoiando-se nos mais variados recursos, desde os tecnológicos e manipuláveis até os históricos e lúdicos. Conforme Matos e Serrazina (1996), estes expedientes desempenham importantes papéis nas explorações, especialmente quando o professor procura incentivar a autonomia e a criatividade nos alunos.

É sempre fantástico e maravilhoso o prazer da descoberta. O entusiamo que nos visita quando resolvemos com êxito alguns problemas desafiadores é algo indescritível. São com estes sentimentos que devemos contagiar os nossos alunos. Os processos investigativos em Matemática, além de estimularem um ambiente de conquistas, mostram-se essenciais ao desenvolvimento da emancipação criativa dos alunos (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003). Estes são incentivados a delinear estratégias, encontrar caminhos por tentativas e erros, intuir, descobrir relações e padrões, enfim, todos esses valiosos recursos de aprendizagem são provenientes das tarefas exploratórias.

Para Goldenberg (1999) quatro funções se destacam nos processos investigativos: 1) questionar; 2) explorar; 3) descobrir e 4) diversificar. Essas funções afloram naturalmente destes processos como frutos das interações e discussões entre o professor e os alunos na realização das tarefas. Inerente à metodologia investigativa, os questionamentos ressaltam das conjecturas propostas nos grupos para a solução dos problemas (e podem ser acolhidos ou refutados); concomitantemente são necessárias a exploração e a descoberta das relações matemáticas envolvidas nas questões; a diversidade de caminhos na abordagem dos problemas é saudável e deve ser estimulada, principalmente quando estes são de natureza mais aberta, como veremos mais à frente.

Por outro lado, Almeida (1994), confrontando os aspectos criativos com as técnicas matemáticas, constata o que mais observamos em sala de aula, que o processo criativo é árduo e sempre mais complexo que a assimilação de uma técnica específica. A idealização (capacidade imaginativa), nesta perspectiva, é fundamental e contribui imensamente para o despertar da criatividade, pois requer esquemas mentais mais elaborados, e até mesmo abstratos, que vão além das simples percepções físicas. Do ponto de vista do autor, os processos reflexivos vivenciados pelos alunos nas tarefas exploratórias, os conduzem e habilitam ao verdadeiro pensar e fazer Matemática. É um regime contínuo de construção, mas que se desenvolve de forma segura e avança à medida que as experiências permitem ultrapassar as dificuldades naturais que se impõem. Ainda segundo a sua ótica, as atividades investigativas que exploram as situações visuais e geométricas estimulam os cenários de análise/dicernimento e possibilitam verdadeiramente os processos criativos.

Conforme Fiorentini (1995), o professor que enxerga a Matemática apenas como uma ciência rígida, pronta e acabada certamente exercerá uma prática pedagógica bastante diferenciada daquele que a concebe como uma ciência em contínua transformação. Nesta mesma linha de pensamento, D'Ambrósio (2003) e Ponte (2001) enfatizam que as aulas exploratórias devem fazer parte da jornada formativa do professor – que é o caso desta pesquisa experimental, pois os alunos participantes deste estudo serão futuros professores de Matemática. Isto porque estas atividades ampliam a capacidade de raciocínio e aguçam a criatividade, além de melhorar naturalmente a competência para a resolução de problemas. Ainda com relação à formação de professores, esses autores ressaltam outras importantes razões que justificam a necessidade de integrar essas práticas nos processos formativos:

a) auxilia no discernimento e na construção de conhecimentos relevantes para sua prática profissional;
b) estimula a autoconfiança e amplia de forma segura a compreensão da sua própria aprendizagem;

c) favorece o desenvolvimento de novas competências e valores determinantes (espírito crítico e autônomo);
d) estabelece uma visão de estudo e trabalho que possibilitará uma maior disseminação para as práticas reflexivas.

Para tanto, é imprescindível que o professor possa investir com qualidade na preparação das tarefas. As aulas devem realmente constituir momentos significativos de aprendizagem para os alunos, ao tempo em que permitam a reflexão e o aprimoramento das suas próprias ações. O ensino exploratório, desta forma, apontará excelentes caminhos que podem ser trilhados por todos os docentes que almejam mudanças positivas em suas aulas de Matemática.

3.3. Aula exploratória

A realização de tarefas exploratórias representa um avanço nas ações educativas para o ensino da Matemática. Isto é válido em todos os níveis escolares e na universidade, principalmente nos cursos de formação de professores. Como vimos, essa prática é incentivada nos parâmetros oficiais e configura-se consensualmente como uma atividade genuinamente matemática, científica e entusiástica do ponto de vista das descobertas. A sua implantação no cotidiano das aulas não está livre de obstáculos e desafios. Mas são exatamente esses fatores que a tornam ainda mais atraente, por renovar, a cada experiência, a disposição dos professores para o aprimoramento do seu trabalho.

Habitualmente uma aula exploratória é descrita em três fases: o lançamento da tarefa, a exploração pelos alunos e a discussão e sintetização dos conhecimentos (Christiansen & Walter, 1986; Ponte et al., 2003; Stein et al.; 2008). No presente estudo esta perspectiva é contemplada.

A primeira etapa ou fase de lançamento se caracteriza principalmente pela apresentação da tarefa a turma. Normalmente um problema de natureza investigativa é apresentado com a finalidade de iniciar a exploração de um tema ou consolidar os conhecimentos trabalhados em aulas anteriores. Deve o professor estar atento para selecionar uma tarefa interessante em que se possa garantir a atenção dos alunos, especialmente para os esclarecimentos dos objetivos da atividade proposta (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012). Nesse momento também os desafios são lançados, como uma espécie de "boas provocações" que possam estimular o senso investigativo da turma para abordagem do problema (Anghileri, 2006; Tudella et al., 1999). Convém não esquecer os recursos necessários para o bom desenvolvimento da tarefa e os possíveis agrupamentos da classe (duplas, trios e etc.).

Após a turma compreender o teor da tarefa, a segunda fase, ou etapa de exploração, toma início com o professor acompanhando e sustentando o trabalho dos alunos que deverão "debruçar-se" sobre o problema. Ao invés de imaginar uma postura passiva, em função das ações protagonizadas pelos grupos, o professor participa ativamente da condução dos trabalhos. O êxito na fase seguinte deve-se, principalmente, pelas importantes intervenções e observações que ele registra das discussões que ressaltam dos grupos (Stein & Smith, 1998). É importante assegurar o envolvimento efetivo de todos os alunos, destacando a importância da cooperação na produção dos resultados. Outro aspecto relevante na gestão dos trabalhos é o cuidado que o professor deve ter para evitar a uniformização das soluções. Possíveis conversações paralelas entre os grupos poderiam prejudicar ou até mesmo impossibilitar os preciosos debates na etapa posterior. Stein e Smith (1998) ainda observam que os processos naturais de comunicação que se manifestam na interação do professor com os alunos devem pautar-se sempre na visão do suporte construtivo. Isto para que não ocorram prejuízos nos domínios cognitivos do problema proposto. É fundamental que eles possam, na medida do possível, desenvolver as suas próprias explicações e soluções para a tarefa. O professor que esteve atento às soluções produzidas pelos alunos, deve também assegurar um tempo para que os grupos organizem os seus resultados. Deve ainda gerir a ordem das apresentações e harmonizar o confronto das ideias na classe (Stein et al., 2008).

Vamos encontrar na literatura importantes aspectos que devem favorecer as intervenções do professor nas discussões realizadas nos grupos. Segundo Cengiz, Kline e Grant (2011) três relevantes "episódios de ampliação" norteiam as instruções docentes nesses instantes: (a) o encorajamento das reflexões matemáticas – é imprescindível orientar o aluno nos mecanismos das investigações matemáticas, no sentido de estimulá-lo à comparação de ideias e à compreensão efetiva dos conceitos que usa e que surgem na abordagem do problema. Incentivá-lo e desafiá-lo na busca da solução por caminhos alternativos que podem efetivamente enriquecer as discussões e ponderar de forma sensata os seus argumentos; (b) o avanço nas ideias – como consequência natural dos desdobramentos anteriores, impulsioná-lo, se necessário for, na sua estratégia, ainda que esta não seja a mais eficaz, mas que possa vislumbrar alguma resolução. Certamente que esta ação enriquece as discussões do grupo e amplia as suas experiências investigativas; (c) a consolidação dos raciocínios matemáticos – momento importante que envolve o esclarecimento das ideias procedentes das estratégias adotadas. Com isso os alunos devem organizar os resultados e justificações para posterior apresentação. Esses eventos muitas vezes ocorrem simultaneamente nos grupos em função do dinamismo que caracteriza este tipo de aula.

Posteriormente aos trabalhos realizados pelos grupos, num tempo pré-determinado, a classe volta a sua atenção para a plenária. Essa é a terceira fase ou momento de discussão e sintetização dos conhecimentos produzidos. Essa etapa exige do professor uma grande capacidade de gestão para orquestrar as discussões coletivas e sistematizar o conjunto das ideias que emergiram da abordagem do problema. Tanto as que promoveram as soluções das questões propostas quanto àquelas que não lograram êxito, mas que foram importantes no conjunto das experiências construtivas (Anghileri, 2006). O professor percebe-se num amplo espaço, onde precisa harmonizar as diversas intervenções. É o momento oportuno para que ele promova a participação de todos, valorizando as contribuições, confrontando as explicações e prestigiando a qualidade matemática produzida (Ruthven, Hofmann & Mercer, 2011; Yackel & Cobb, 1996). É nessa fase que a classe reconhece os raciocínios mais criativos, as formas mais eficientes de produzir as soluções e realiza vinculações com os conhecimentos anteriores. Conforme Canavarro (2011) é nesta fase que a classe institucionaliza as aprendizagens matemáticas, conforme os ricos debates que se sucederam.

Outro aspecto importante refere-se às reflexões posteriores às atividades exploratórias. Inegável que as apresentações dos grupos, o compartilhamento das ideias e as discussões coletivas representam momentos valorosos para a aprendizagem da turma, mas não se pode perder de vista a potencialidade da escrita em forma de relatórios. Segundo Borasi (1992) e Leal (1992) os relatórios desempenham funções privilegiadas por contribuirem significativamente no aprimoramento da comunicação escrita. Os relatos (individuais ou em grupos) teriam a finalidade de registrar as impressões; o resumo dos principais fatos explorados na aula; a visão acerca da compreensão do assunto, além de fomentar a auto-reflexão. Apesar de não ser tão comum a elaboração de relatórios no âmbito das disciplinas matemáticas, a sua produção vem a fortalecer a reflexão sobre os conhecimentos obtidos. Isto conduz a uma melhor articulação das ideias e uma explicação própria acerca das estratégias adotadas na resolução dos problemas. Com a disseminação das tarefas exploratórias, muitos modelos de relatórios são encontrados na atualidade. Existem modelos que podem ser produzidos em grupo ou individualmente, de forma mais objetiva ou subjetiva, e que atendem aos diversos propósitos de professores e alunos (Santos, Brocardo, Pires & Rosendo, 2002).

Apesar da realização de um bom planejamento, nem sempre o docente alcança satisfatoriamente todos os objetivos pretendidos. As dificuldades e os desafios, inerentes às ações e reações dos alunos, podem vir a acontecer e surpreender as expectativas. Mas esses aspectos devem ser encarados com naturalidade num contexto educacional. Eles certamente promoverão o aperfeiçoamento contínuo da sua prática, enriquecendo, portanto, a sua experiência.

Promovendo um ambiente participativo

Por envolver os alunos em tarefas mais reflexivas e laborativas, onde estes protagonizam papéis mais ativos para a aprendizagem, o ensino exploratório requer algumas mudanças e “contratos” na dinâmica da sala de aula. Esta nova referência de ensino contrasta fortemente com os formatos mais tradicionais de aulas, onde há pouca interatividade e o conhecimento flui praticamente num único sentido, como já mencionamos.

Nas aulas expositivas, onde os alunos permanecem numa atitude mais receptiva, os poucos diálogos ocorrem quando o professor é chamado a esclarecer algumas dúvidas, detalhar alguns tópicos ou corrigir eventuais equívocos individuais. Na perspectiva exploratória a dinâmica muda completamente. Geralmente dispostos em pequenos grupos, os alunos passam a estar mais à vontade e as comunicações ocorrem com muita frequência. Eles partilham mais ideias, defendem argumentos e assumem o processo das explorações, tudo isso com a participação do professor. O ambiente mostra-se mais adequado para a construção coletiva dos conhecimentos (Skovsmose, 2000; Tudella et al., 1999).

O “contrato” estabelecido pelo professor com a turma, que geralmente é detalhado e ocorre no início do ano letivo, deve prever as necessidades, obrigações e expectativas de todos para o êxito dos trabalhos. Assim, deve estar claro, por exemplo, os tipos de tarefas e a frequência em que ocorrerão, os conceitos (notas) que serão atribuídos (ou não), além de enfatizar a necessária participação de todos os membros dos grupos nas atividades que se sucederão. Esse último aspecto deve-se ao fato por demais conhecido nos ambientes escolares e acadêmicos de que nas tarefas em grupo “apenas um (ou poucos) a realiza e os outros ficam encostados”. Quais comportamentos são ou não aceitáveis, o respeito às diferenças e ritmos individuais de cada uma para aprendizagem. Tudo isso para que os alunos possam interagir adequadamente, tornando o ambiente da aula um local satisfatório para a exploração do conhecimento (Wood, Merkel & Uerkwitz, 1996).

Esse acordo entre a turma e o professor, que deve prevalecer num ambiente exploratório de ensino, revela-se também pelo fato dos alunos estarem predominantemente inseridos no paradigma expositivo de ensino. Por vivenciarem e ouvirem frequentemente que os professores ensinam e os alunos aprendem, que os professores é que perguntam e eles respondem, como práticas sociais já estabelecidas, os alunos acabam por interiorizar subliminarmente essas normatizações. Isto pode vir a ser um empecilho, uma barreira a ser superada, para que a aprendizagem possa ocorrer de forma interativa, como a aula exploratória convida. Dessa maneira, é imprescindível que o professor esteja atento a estes detalhes, se ele pretente inovar, inserir novas posturas e sustentar o espaço propício que as atividades investigativas exigem. Nessa nova atmosfera os alunos se sentirão mais à vontade para expor os seus pensamentos, emitir suas opiniões e colocar as suas dificuldades. Estarão também mais receptivos aos desafios, à cooperação entre os colegas, auxiliando uns aos outros na busca da solução para os problemas apresentados (César et al., 2000). Dessa forma, as novas posturas vão-se firmando, cada aluno sente-se útil e com acréscimo de ânimo para compartilhar as suas ideias. Ao perceber-se num ambiente de confiança e acolhimento todos ganham, inclusive o professor pela satisfação de um trabalho bem realizado.

Dificuldades e desafios a superar

A expansão das práticas exploratórias e investigativas se dá principalmente na educação básica. Elas permanecem ainda muito pouco utilizadas nos cursos de graduação. Mesmo existindo um consenso entre os professores de que estas práticas são importantes no processo da aprendizagem matemática, muita resistência ainda existe para que elas adentrem definitivamente o cotidiano das aulas nos cursos superiores. Um aspecto singular ocorre nos cursos de pós-graduação, onde majoritariamente os docentes são pesquisadores e investigadores. Estes conhecem a importância e a potencialidade das práticas investigativas para a aquisição e a produção do conhecimento. De fato, estes professores têm grande interesse na formação do estudante pesquisador, no entanto, o que vemos, com bastante frequência, é uma repetição da metodologia de ensino adotada na graduação: o método formal expositivo seguido de listas fechadas de exercícios e problemas.

É bem verdade que existem alguns empecilhos de ordem prática que desfavorecem a inclusão do ensino exploratório em algumas situações. A superlotação das salas de aula que dificultam a circulação e a configuração dos grupos de trabalho; a excessiva carga horária docente na atividade de ensino, em detrimento da pesquisa; a responsabilidade por ministrar aulas em muitas turmas; a falta de materiais didáticos, dentre outros. Realmente estes fatores representam alguns motivos de dificuldade e inviabilizam uma metodologia diferenciada de ensino. Mas, apesar disso, acredito que não devam constituir obstáculos definitivos para que as práticas exploratórias não venham a ser realizadas pelo menos esporadicamente.

Os professores, de certa forma, não desconhecem os benefícios e as vantagens das atividades investigativas. Eles também aprendem e constróem os seus conhecimentos investigando e explorando as situações. Mas parece que ao adentrar a sala aula, passam a desconhecer estes importantes aspectos, esquecem que os alunos necessitam vivenciar estas experiências para também aprenderem substancialmente (Pólya, 1985). Talvez considerem que as investigações e as descobertas não estejam ao alcance de todos e que somente são importantes as conquistas inéditas, de renomados pesquisadores e catalogadas na literatura. Talvez por não contemplarem uma Matemática dinâmica e ainda em construção, acabam por separar as metodologias investigativas da sua prática docente. O elo entre o ensino e a aprendizagem passa necessariamente pelos processos das construções das (pequenas) descobertas (Pólya, 1987). Este elo será fortalecido consideravelmente quando os alunos forem colocados em situações didáticas mais construtivas.

Muito professores possuem o receio de trabalhar com problemas abertos na perspectiva investigativa. A preocupação é que possam se deparar com situações adversas. Contextos onde não possuam o total controle das ocorrências e não possam prever criteriosamente todos os possíveis desdobramentos. Por este ângulo, realmente há de desanimar e restringir o ensino a mera transmissão dos conhecimentos prontos e historicamente produzidos (Sacristán & Goméz, 1998). Ocasionalmente situações desfavoráveis podem ocorrer e gerar algum tipo de desconforto em sala de aula. Estas são também características das atividades investigativas. Mas o professor atento saberá contorná-las. Faz parte também dos processos educativos conscientizar os alunos sobre estes possíveis percalços. Eles eventualmente os terão ao longo da sua jornada! Enfim, estes episódios esporádicos servirão certamente para ampliar o seu conhecimento, inclusive enriquecendo as suas próprias experiências didáticas.

3.4. As tarefas exploratórias e investigativas na Matemática

As tarefas exploratórias e investigativas na Matemática são tarefas que buscam envolver os alunos em situações mais ativas para a aprendizagem, que buscam desenvolver habilidades e capacidades mais elevadas ao posicioná-los mais ativamente na exploração e elaboração do conhecimento. Estas tarefas costumam proporcionar aos alunos contextos mais dinâmicos e significativos para a abordagem dos tópicos curriculares, onde estes se ocupam mais laboriosamente na construção de um conceito ou na solução de um relevante problema ao envolver-se nos processos característicos das investigações matemáticas. A importância dessas atividades tem sido defendida por muitos autores (e.g., Abrantes, Ponte, Fonseca & Brunheira, 1999; Ernest, 1996; Lerman, 1996; Martins et al., 2002; Mason, 1996) exatamente por estes notáveis aspectos e a sua inserção em sala de aula costuma trazer desafios, tanto para docentes quanto para discentes. Neste estudo de caso, alguns tipos de tarefas tais como os exercícios, os problemas, as investigações e explorações foram utilizados, algumas delas no laboratório de informática da instituição com o apoio da tecnologia, com as mais diversas finalidades didáticas.

A visão que o professor tem da Matemática afeta significativamente a sua didática. A perspectiva de um corpo de conhecimento em contínuo processo de construção e aperfeiçoamento é muito importante. Estes são aspectos especiais para criar um ambiente propício para as explorações e investigações. O professor, ao propor atividades de natureza investigativa, deve favorecer essa percepção aos alunos, pois se aprende Matemática fazendo-a também, pondo a "mão na massa" e explorando-a. Desta forma, eles avançam da percepção comum de que a disciplina tem um corpo pronto e acabado de conhecimentos para uma visão mais construtiva e moderna. Passam ainda a compreender que podem efetivamente contribuir para gerar novos conhecimentos e realizar as suas conquistas. Love (1988), em conformidade com este pensamento, afirma que os alunos ao estarem em contato com as investigações matemáticas, têm a oportunidade de "identificar e iniciar os seus próprios problemas; expressar as suas próprias ideias e desenvolvê-las ao resolver problemas; testar as suas ideias e hipóteses de acordo com experiências relevantes; defender racionalmente as suas ideias e conclusões e submeter as ideias dos outros a crítica ponderada" (p. 260).

Esse conjunto de situações desejáveis que emerge das atividades de natureza exploratória, além de favorecerem uma aprendizagem mais autônoma dos alunos, contribui para sustentar um ambiente mais agradável na sala de aula. São nos processos propriamente investigativos que os alunos exercitam o pensamento crítico e realizam as suas próprias descobertas. Eles redescobrem novas formulações para antigas concepções e ampliam o sentido dos conceitos já aprendidos. É com este entendimento que Porfírio e Oliveira (1999) conceituam o ato de investigar em Matemática:

> Investigar é um termo que, muitas vezes, é usado em sentido lato para descrever certo tipo de atividade a que se associam características, tais como, descoberta, exploração, pesquisa, autonomia, tomada de decisões, espírito crítico. (p. 111)

Escher, Miskulin e Silva (2006) ao conduzir atividades exploratórias em ambientes informatizados, assim se referem às tarefas investigativas:

> [...] atividades ou problemas nos quais os alunos envolvem-se em processo de soluções, buscando estratégias próprias, experimentando

> conjecturas e hipóteses a respeito das diversas partes que compõem o problema, discutindo-as com seus colegas e reelaborando-as no contexto prático no qual se insere o problema. (p. 3)

Alguns autores defendem que as tarefas exploratórias, com abordagem de relevantes problemas, além de oportunizarem aprendizagens mais significativas para os alunos, conduzem estes a autênticos momentos da atividade matemática, muito próximas do ofício de um matemático profissional. Schoenfeld (1992) destaca a importância da aproximação dos alunos desta percepção, inclusive as salas de aula constituiriam pequenas comunidades matemáticas. Ponte (2003), ao ponderar sobre essa perspectiva metodológica, corrobora com este pensamento e sustenta que as investigações matemáticas constituem ferramentas importantes na relação de ensino e aprendizagem:

> [...] ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor. (p. 23)

Segundo o ponto de vista de Matos (2005) não passaria de uma mera crença, inclusive com alguns agravos de ordem social, acreditar que o propósito das investigações matemáticas seria aproximar os alunos das funções de um matemático profissional:

> Pretender que a realização de actividades de "investigação matemática" constitui a recriação da actividade dos matemáticos é um mito. Não só não se trata de investigação (dado que não se tem um caráter público, sistemático e organizado para uma audiência de pares numa comunidade de prática de investigação) como recai tipicamente numa forma de actividade escolar que privilegia apenas alguns modos e formas tradicionais das práticas das comunidades de matemáticos (actualmente com pouca verossimilhança nalgumas áreas da Matemática). Equacionar a melhoria do desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos com base em atividades de investigação (puramente) matemáticas é deixar de

> lado as grandes preocupações da educação para o mundo social em que vivemos. (p. 13)

Apesar desta visão, o autor reconhece que ao envolver os estudantes em aulas com tarefas investigativas, estas não estariam necessariamente dissociadas das atenções que a Educação Matemática pretende com os aspectos sociais da vida; que estas atividades, ao incorporarem elementos genuinamente reflexivos e críticos, contribuiriam consideravelmente para tal fim (Skovsmose, 2008).

É bem verdade que as atividades investigativas possuem alcance e finalidades distintas quando se compara o cotidiano de um especialista e pesquisador matemático com as pretensões didáticas para os alunos numa sala de aula. Não se objetiva, na educação básica ou numa licenciatura, estruturar o desenvolvimento cognitivo dos estudantes de forma "idêntica" ao de um matemático profissional, mas, sobretudo, proporcionar-lhes uma experiência que de algum modo se aproxima ao trabalho deste. Esses profissionais laboram com problemas limítrofes do conhecimento, questões frequentemente abstratas, com elevado grau de complexidade e que pretendem avançar o conhecimento de um campo específico da Matemática. O que se propõe é algo distante do rigor dessa realidade, é uma alternativa pedagógica diversificada, que possa modernizar e aprimorar o ensino majoritariamente expositivo tão comum nas escolas e universidades. O que se busca é conduzir os alunos, orientá-los nas suas próprias descobertas, utilizando-se das ferramentas próprias das ciências experimentais e dedutivas, quais sejam observar, comparar, descrever, apresentar, conjecturar, testar, provar, dentre outras. Todo este arsenal de ações que caracteriza a exploração do conhecimento estimula a atitude de autonomia, do espírito crítico e reflexivo, de cooperação, além de potencializarem a comunicação oral e escrita dos estudantes (Ponte, 2003).

As tarefas exploratórias e investigativas partem de questões e problemas "controlados" pelos professores, mais ou menos estruturados, mais ou menos abertos, mas que devem estar ao alcance cognitivo dos alunos. E assim eles passam a explorar um determinado tema, testando hipóteses, buscando padrões e relações, intuindo conjecturas, construindo argumentos e partindo, se for o caso, para provas e demonstrações. Importante não perder de vista o pressuposto de que os estudantes sejam convidados pelos professores e envolvidos em trabalhos desafiantes e estimulantes, enriquecendo o aspecto das aulas tradicionais, levando, inclusive, motivação a todos.

Algumas tarefas e suas características

É natural que os professores ao planificarem as suas aulas e selecionarem as tarefas que serão desenvolvidas pelos alunos, se deparem com exercícios, problemas ou projetos que despertem a sua atenção pelas características e propriedades notáveis que existem neles. Um exercício interessante pode ser o ponto de partida para a elaboração de um problema mais amplo, de natureza exploratória, que poderá solicitar dos alunos as ações características de uma abordagem investigativa, que por sua vez poderá resultar num fascinante projeto. É importante que os alunos trabalhem os assuntos (conceitos matemáticos) diversificando os tipos de tarefas, desde os exercícios mais orientados até as investigações mais desafiadoras (Martins et al., 2002).

Na literatura vamos encontrar algumas classificações para as tarefas exploratórias e investigativas que nos auxiliam a compreender e a diferenciar melhor a sua essência. Ponte (2005) diferencia as tarefas segundo o nível de desafio (reduzido ou elevado) e também conforme a sua estrutura (aberta ou fechada). É importante salientar que estas classificações não pretendem ser absolutas em função da diversidade de percepções, tanto de professores quanto de alunos. Uma tarefa pode representar um desafio para uns e não para outros e ainda assim com graus variados de interesse.

Uma constante preocupação dos professores que trabalham com tarefas exploratórias e investigativas se relaciona com a sua estrututa mais aberta ou fechada. Geralmente os exercícios que fixam alguns conhecimentos teóricos e alguns problemas mais direcionados possuem uma estrutura mais fechada, enquanto que as algumas investigações e atividades exploratórias possuem a composição mais aberta. A estrutura mais fechada das tarefas geralmente conduz os pequenos grupos de trabalho a construções de respostas muito próximas (convergentes), reduzindo assim a riqueza dos momentos de discussão, enquanto que a estrutura mais aberta das tarefas oportuniza excelente fase discursiva, com soluções mais diversificadas (divergentes), ocasionando ricos debates (Ernest, 1996; Love, 1996). Apesar desta natureza estrutural para as tarefas, ela não deve constituir obstáculos e grandes preocupações à sua realização. As características do conteúdo abordado podem ou não permitir uma flexibilização maior na estruturação da tarefa e na condução desta pelo docente.

Vários autores (e.g., Bishop & Goffree, 1986; Christiansen & Walther, 1986; Ponte 2005) que se debruçam sobre a temática da aprendizagem matemática por intermédio das tarefas exploratórias e investigativas, apontam dois fatores essenciais na qualidade do aprendizado dos alunos: o tipo de atividade que realizam e o grau de reflexão que eles empreendem. Conforme Ponte (2005) o aluno quando está envolvido em alguma atividade realiza algum tipo de tarefa, esta, portanto, é o objetivo da atividade. Para Bishop e Goffree (1986) as tarefas e os variados contextos investigativos oportunizam os alunos a refletirem sobre o seu próprio processo de aprendizagem. As tarefas geralmente são apresentadas pelo docente para explorar os temas matemáticos, podem ser sugeridas pelos alunos ou podem também surgir das discussões que ocorrem no cotidiano da sala de aula. Os tipos mais comuns de tarefas que são amplamente utilizados no ensino da Matemática são: os exercícios, os problemas, as tarefas de exploração, as investigações e os projetos. Buscarei realizar uma conceituação de aspecto relativo para estes tipos de tarefas, caracterizando-as conforme uma notável experiência que ocorreu nas minhas aulas de Cálculo Diferencial e Integral.

Exercícios

Os exercícios geralmente são colocados como forma dos alunos treinarem conhecimentos teóricos adquiridos ou consolidarem estes conhecimentos (Abrantes, 1989; Orton & Frobisher, 1996; Ponte, 2005; Silva, 1964). É uma prática bastante difundida, mas que não desperta tanto o interesse dos alunos, principalmente quando são propostos numa longa série e de natureza semelhante. Deve o professor ter uma preocupação constante para não resumir o ensino da Matemática a esta prática, empobrecendo a aula e desmotivando os alunos. É nesse sentido que Silva (1964) destaca a importância dos exercícios para a aprendizagem matemática, mas que não sejam em quantidade demasiada e que sejam criteriosamente escolhidos pelo professor, objetivando proporcionar a clareza dos principais conceitos matemáticos, sem com isso desmotivar e cansar os alunos. Vamos à experiência...

Ao abordar em classe o significado geométrico da derivada, solicitei que os alunos determinassem (como um “simples” exercício) a equação da reta tangente a hipérbole $y = (1/x),\ x \neq 0,$ no ponto $x_0 = 1/2.$ Para evitar que os alunos pudessem olhar as respostas uns dos outros, refiz a solicitação e pedi que alguns determinassem no ponto $x_0 = 1/2$ e outros no ponto $x_0 = 2.$ Conforme a figura abaixo.

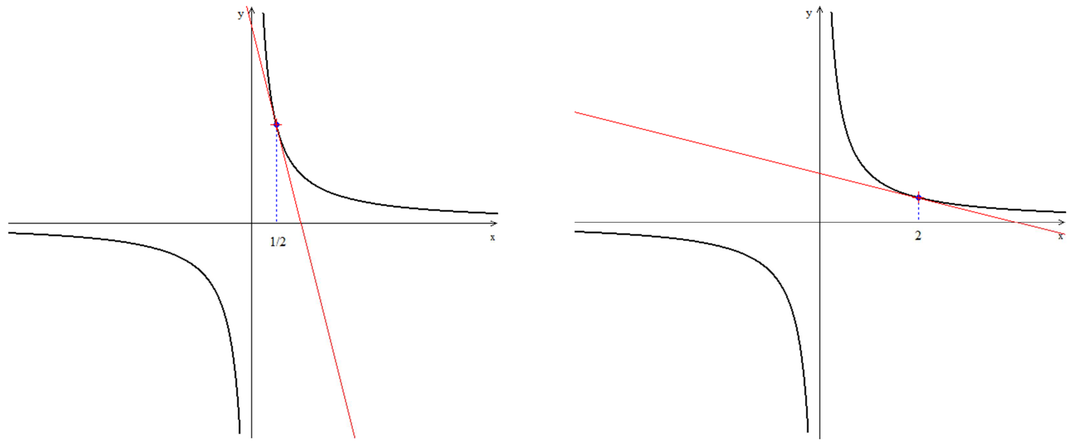


Figura 12. Retas tangentes à hipérbole.

Após as respostas surgirem, propus, com base nas visualizações gráficas projetadas no quadro, que eles calculassem as áreas dos triângulos localizados no 1° quadrante. Estes triângulos são formados pela reta tangente e os eixos coordenados. Essa solicitação se deu pelo fato de termos suspeitado (visualmente) de que as áreas poderiam ser iguais. Nesse sentido, o simples exercício já estava avançando para a abordagem de um “simples” problema...

Problemas

Os problemas constituem uma das mais antigas formas de colocar questões, explorar e avançar o conhecimento em Matemática. Se bem escolhidos pelo professor, os problemas podem inclusive servir para iniciar profícuas discussões em classe, conduzindo os alunos a reflexões mais ricas e significativas (Schoenfeld, 1996). De acordo com Ernest (1996) a formulação e a resolução de problemas são aspectos que estão muito próximos do trabalho investigativo e devem constituir naturalmente atividades de todos aqueles que se dedicam a aprendizagem da Matemática. Não é tão simples caraterizar uma questão matemática como um exercício ou um problema, visto que uma determinada situação poderá ser um problema estimulante para uns ou constituir simples exercício para outros. Importante, porém, ressaltar que os problemas possuem graus relativos de complexidade e desafio. Se ele for por demais exequível, não provocará a incitação necessária e se assemelhará a um simples exercício (Ponte, 2005). O professor deve conhecer a medida adequada para estimular corretamente os alunos e não desanimá-los, para que estes se sintam relativamente desafiados e não abandonem os problemas (ou nem sequer tentem resolvê-los).

Os problemas ganharam bastante notoriedade através dos trabalhos de Pólya (1975) que possibilitou a introdução criteriosa e fundamentada destes no ensino da Matemática. Vamos encontrar neste autor a exaltação da exploração da Matemática através de problemas desafiadores. Os problemas constituiriam uma imprescindível condição para os alunos experimentarem o prazer e o gosto pela descoberta, além de conhecerem verdadeiramente a natureza da Matemática. Retornemos então a experiência...

Ao propor aos alunos o cálculo das áreas dos triângulos (figura 13), chegamos à conclusão de que, em ambos os casos, o valor da área era igual a 2. Algumas questões foram colocadas:

a) Essa coincidência tem alguma relação com a simetria da hipérbole?

b) Só ocorrem em pontos do tipo k e $1/k\,, k \neq 0$?

c) Em outros pontos do domínio da função o valor da área será o mesmo?

Essas perguntas lançadas conduziam os alunos a calcularem o valor da área em outros pontos, chegando-se ao mesmo valor 2. O “simples problema” ganha então um desafio extra e obtem status de uma “tarefa exploratória”, pois neste estágio a conjectura proposta era de que o valor da área não alteraria, seria igual a 2, para qualquer reta tangente traçada, inclusive no outro ramo da hipérbole. Assim, eu solicitei que eles avançassem nas explorações e provassem algebricamente este resultado, com base na simulação computacional que evidenciava que a conjectura estava correta. Mais adiante novas questões seriam colocadas e o nível de desafio da tarefa ampliaria, tomando características de uma notória investigação.

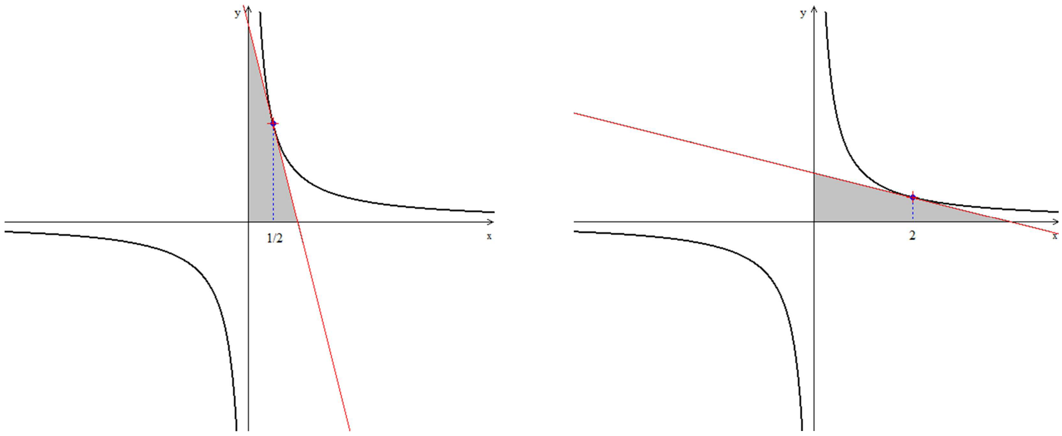


Figura 13. Triângulos determinados por tangentes a hipérbole.

Investigações e tarefas exploratórias

Muitos autores (e.g., Ernest, 1996; Goldenberg, 1999; Mason, 1996) vem defendendo a importância das investigações na sala de aula e inclusive costumam justificar essa importância com as mesmas razões que costumam apontar a relevância dos problemas para a aprendizagem da Matemática.

> [...] os argumentos principais utilizados para justificar a importância das investigações são análogos aos usados para justificar a importância dos problemas, acrescentando-se ainda que as investigações, mais do que os problemas, promovem o envolvimento dos alunos, pois requerem a sua participação activa desde a primeira fase do processo – a formulação das questões a resolver. (Ponte, 2005, p. 7)

A realização de investigações e a resolução de problemas, em certas circunstâncias, são conceitos muito próximos. Lamonato e Passos (2011) colocam que as estratégias metodológicas adotadas para a abordagem e as formas de condução das atividades, por parte dos professores, é que caraterizam os pontos divergentes. Quando ambas possuem natureza mais aberta e avançam na "formulação de questões, de conjecturas, de testes, de argumentação e de discussão de ideias" (p. 62) e permitem "o descortinar da criatividade" (p. 66), elas se assemelham bastante. Para Ponte (2005) as investigações estão muito próximas das tarefas de exploração e o que as diferencia é o relativo grau de desafio intrínseco da tarefa: “Se o aluno puder começar a trabalhar desde logo, sem muito planeamento, estaremos perante uma tarefa de exploração. Caso contrário, será talvez melhor falar em tarefa de investigação” (p. 8). De fato, são conceitos muito próximos e dependem bastante da gestão docente na abordagem e condução da tarefa. As investigações e as tarefas de exploração pretendem avançar além dos problemas na promoção do aprofundamento das reflexões, na formulação de estratégias e no envolvimento efetivo dos alunos com as atividades propostas. Elas costumam proporcionar a participação ativa dos alunos na construção do seu conhecimento, com bastante trabalho próprio a realizar, inclusive possibilitando novas questões e conjecturas que emergem da natureza deste tipo de atividade. Estas tarefas podem ser perfeitamente adaptadas em sala de aula tanto em contextos reais, próximos ou não das vivências estudantis, quanto em situações abstratas e puras da Matemática (Abrantes, Ponte, Fonseca & Brunheira, 1999). No presente estudo de caso, as tarefas experimentais de exploração e investigação foram concebidas como tarefas de natureza relativamente abertas e com variados graus de desafios. A ênfase maior nestas tarefas foi dada para os diversos processos matemáticos investigativos com o apoio dos recursos tecnológicos, tais como: as simulações computacionais, a colocação de questões, a formulação, a verificação e a demonstração de conjecturas, o delineamento de estratégias, dentre outros. Retornemos a experiência...

O exercício que avançou para a condição de “tarefa exploratória” prosseguirá, agora, com características de uma investigação. Ao chegarmos à demonstração algébrica de que a tangente em qualquer ponto da hipérbole $y = (1/x),\ x \neq 0,$ determinaria triângulos com medidas de áreas iguais a 2, novas questões e desafios são colocados:

a) Por que esta curva somente “gera” triângulos com medidas de área igual 2?
b) A constante “1” no numerador da função tem influência?
c) Será que o valor da área (igual a 2) será sempre o dobro do valor do numerador (igual a 1)?
d) Para a família de hipérboles $y = (k/x),\ x \neq 0$ e $k \neq 0$, o valor da área será sempre $|2k|$?

Ao simularmos dinamicamente esta situação no computador usando um *software* matemático, a questão (d) é facilmente verificada! Para os alunos essa constatação por simulação computacional foi suficiente para comprovar o resultado. Destarte, com “forte evidência" de que o resultado, de fato, era verdadeiro, solicitei que eles realizassem a demonstração algébrica. Após a demonstração ser finalizada, uma nova questão foi colocada: somente essa família de hipérboles possui esta notória característica? Outras curvas possuem também esta propriedade? Assim, o simples exercício que atingiu a condição de problema, avançou com características exploratórias, até alcançar o status de uma investigação, estava agora a caminhar para o patamar de um "projeto matemático".

Projetos

Os projetos em Matemática constituem uma maneira atraente de despertar o interesse dos alunos, além de colaborar ativamente no aprimoramento da sua aprendizagem (Stewart, 2013). Os projetos estão bastante associados com a ideia de realização de trabalhos extraclasse (que podem acontecer também em sala de aula), em pequenos grupos (ou individuais) e na execução de pesquisas orientadas. Estes trabalhos geralmente possuem a função de aprofundar os seus conhecimentos em alguns assuntos ou tarefas exploratórias e investigativas. Com boa dose de desafio e possivelmente vislumbrados em temas trabalhados em sala de aula, os alunos são colocados em contato mais próximo das ações de planejar, desenvolver, concretizar e apresentar. Conforme Hernandez e Ventura (1998) a realização de projetos contribui também para (re)significar o espaço de aprendizagem de tal forma a incentivar a formação de sujeitos mais ativos, reflexivos e participantes na produção dos conhecimentos. Os projetos podem ocorrer em parceria com outras disciplinas, promovendo, dessa forma, a interdisciplinaridade. Com isso, os conteúdos programáticos podem ser desenvolvidos aproximando algumas áreas do conhecimento. Podem ser escritos, favorecendo a habilidade da escrita; apresentados oralmente, ampliando a capacidade comunicativa; podem ocorrer em laboratórios de informática, envolvendo tecnologias; nas bibliotecas, estimulando a pesquisa bibliográfica, além de sobrevir também nos diversos espaços institucionais escolares (acadêmicos) ou comunitários.

Os projetos também constituem uma forma de trabalhar temas transversais de interesse da comunidade escolar, da turma e também designados por parâmetros curriculares oficiais. Os alunos demonstram bastante interesse e se envolvem nas ações do projeto quando estes se baseiam principalmente em temas do seu cotidiano. O papel do professor neste tipo de atividade é fundamental para o êxito dos trabalhos, visto que ele "ouve, questiona e orienta, propiciando a construção do conhecimento do aluno" (Prado, 2003, p. 3). Os projetos quando concretizados pelos estudantes costumam gerar veradeiros sentimentos de entusiasmo e satisfação para todos. Retornemos a experiência...

O exercício que inicialmente solicitou apenas a determinação da reta tangente ao gráfico de uma hipérbole num determinado ponto, estava para adquirir agora uma nova categoria: "projeto matemático" com características investigativas. Foi então que passei a elaborar melhor a proposta do projeto. Ocorre que para chegar à solução completa deste problema, inevitavelmente seria necessário usar os conhecimentos sobre as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Como eu já previa que a continuidade da investigação iria muito além da programação regular do Cálculo, coloquei o projeto como um trabalho opcional para aqueles alunos que quisessem avançar nos conhecimentos. De fato, ao pesquisar as curvas que satisfazem a condição proposta (e existe outra família de curvas!), surge uma equação diferencial ordinária do segundo grau muito difícil ainda para ser resolvida por eles! Portanto, vale recordar: o professor deve conhecer a medida adequada para estimular corretamente os alunos e não desanimá-los, para que estes se sintam relativamente desafiados e não abandonem os problemas (ou nem sequer tentem resolvê-los).

O relato dessa experiência nos mostra que um simples exercício pode vir a transformar-se numa investigação, quiçá num projeto, com propriedades singulares e que desperta a curiosidade dos alunos. Posteriormente, essa experiência transformou-se numa tarefa exploratória e investigativa que foi realizada no laboratório de informática da universidade. A sua descrição circunstanciada virá na parte experimental deste estudo.

Algumas dimensões das tarefas

Pudemos notar que duas dimensões se destacam na aplicação das tarefas exploratórias e investigativas, o nível do desafio matemático e o grau de estrutura. Conforme Ponte (2005) o nível de desafio relaciona-se com o grau de discernimento da dificuldade intrínseca ao exercício ou problema proposto, variando entre os pólos de "reduzido" ou "elevado", se bem que existe um caráter circunstancial nesta classificação. O professor ao estruturar uma tarefa exploratória depara-se também com os aspectos "aberto" ou "fechado" na sua composição. Nas tarefas fechadas geralmente costuma-se ter a noção precisa do que se quer e onde se precisa chegar, frequentemente por caminhos previsíveis. As tarefas abertas suportam certos níveis de indeterminação na sua solução, permitindo, dessa forma, uma maior diversidade de percursos ou caminhos a escolher. Ainda conforme o autor, estas dimensões existentes nas atividades exploratórias nos permitem classificar de forma resumida – e com certa relatividade – os tipos de tarefas da seguinte forma: um exercício é uma tarefa com estrutura mais fechada e com nível mais reduzido de desafio; um problema é uma tarefa com estrutura mais fechada e com nível mais elevado de desafio; uma tarefa exploratória é uma tarefa com estrutura mais aberta e com nível mais reduzido de desafio e uma investigação é uma tarefa com estrutura mais aberta e com nível mais elevado de desafio. Nem sempre é nítida a linha demarcatória que separa os tipos apresentados, porém é possível representarmos o cruzamento das dimensões vistas em quatro quadrantes (figura 14).

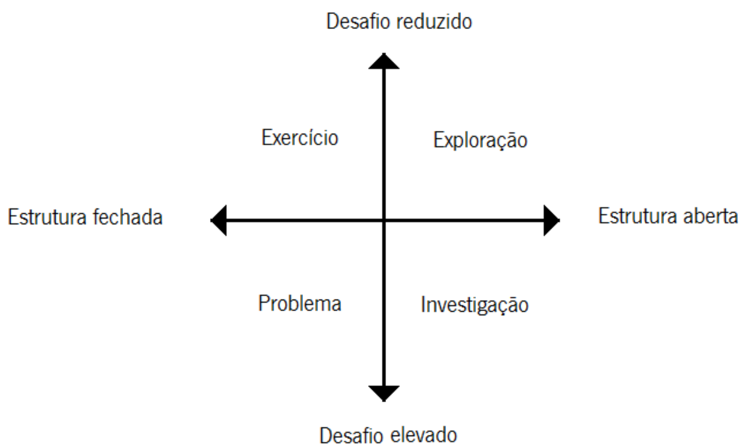


Figura 14. Mapeamento das tarefas e suas dimensões de desafio e estrutura (extraída de Ponte, 2005).

Uma terceira dimensão importante a considerar numa tarefa é o seu contexto. É bem comum encontrarmos na literatura três perspectivas contextuais para as tarefas matemáticas. Num extremo dimensional estariam os problemas "reais" que poderiam advir de situações práticas das vivências estudantis, de problemas realisticos da comunidade local/escolar ou de temas com as preocupações da atualidade, como as questões ambientais, econômicas, sociais e etc. Vale destacar que as chamadas atividades de modelagem matemática, sejam elas realizadas em qualquer nível de ensino, pretendem abranger contextos reais. A modelagem insere-se como uma alternativa potencial de ensino que visa atribuir um verdadeiro sentido utilitário da Matemática para as diversas necessidades e situações da vida (Almeida & Dias, 2004; Barbosa, 2004; D'Ambrosio, 2001). Aliada as tecnologias modernas, tais como os programas computacionais, as calculadoras gráficas, as planilhas eletrônicas, dentre outras, a modelagem contribui significativamente para dar importância prática a Matemática. Ao abordar modernas questões do âmbito de interesse dos alunos, as modelações compõem uma excelente ferramenta do ponto de vista motivacional para a construção e compreensão dos métodos e conteúdos matemáticos.

Num outro extremo dimensional estariam os problemas da "Matemática pura", em contextos mais abstratos para as aplicações das ideias matemáticas. As tarefas exploratórias e investigativas também se adequam perfeitamente a atividades dessa natureza, que pretendem construir, desenvolver e avançar o pensamento matemático. Uma quantidade considerável de exercícios e problemas encontrados nos manuais e livros didáticos se encaixa nessa natureza e constitui um desafio bastante interessante para o professor elaborar tarefas investigativas que pretendam explorar tais assuntos. Se bem que os estudantes demonstrem mais interesse para os problemas reais, é importante salientar que diversos problemas abstratos, considerados da Matemática pura, passaram a ter grande utilidade para a sociedade, assim como diversos problemas práticos avançaram nas suas estruturas conceituais, dando origem a novos campos do conhecimento teórico matemático.

Entre esses dois pólos extremos contextuais para as tarefas matemáticas, Skovsmose (2000) considera ainda uma dimensão intermediária que ele chama de "semi-realidade". Como o próprio nome sugere os problemas não estariam associados diretamente a realidade cotidiana dos estudantes, as suas necessidades e preocupações, mas sim às construções teóricas artificiais da Matemática. O cerne desses problemas seria a exploração das principais propriedades algébricas, geométricas ou aritméticas em destaque num estudo. Os alunos estariam na verdade sendo estimulados a exercitar os conhecimentos matemáticos em simulações de situações reais. Estes cenários também desempenham uma importante finalidade educativa, se bem dosada, para explorar o raciocínio e conduzir os alunos a praticarem e aperfeiçoarem certos conhecimentos. Segundo o autor, o contexto da semi-realidade é o que mais se destaca em termos de quantidade de exercícios e problemas encontrados na literatura. Na parte empírica deste estudo, as tarefas exploratórias e investigativas que foram elaboradas e aplicadas, como veremos adiante, se encontram nos domínios contextuais da Matemática pura e da semi-realidade. Considerando sempre o caráter relativístico das representações, a figura abaixo, extraída de Ponte (2005), procura ilustrar o contexto das tarefas matemáticas, salientando que os diversos tipos (exercícios, problemas, tarefas exploratórias e investigativas) ocorrem em todas essas situações.

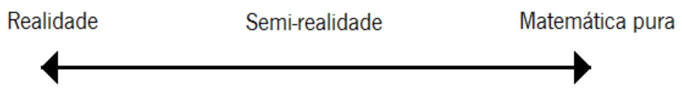


Figura 15. Enquadramento das tarefas quando ao contexto.

Como pudemos notar, as dimensões existentes nas tarefas, sejam elas referentes ao nível de desafio (reduzido ou elevado), a sua estrutura (aberta ou fechada) ou ao seu contexto de aplicação (realidade, semi-realidade ou matemática pura) são importantes e devem ampliar a visão do professor no seu processo de elaboração. Todos estes relevantes aspectos precisam ser cuidadosamente dosados e diversificados nas tarefas exploratórias e investigativas. Com isso, além de enaltecermos a perspectiva do ensino da Matemática, e do Cálculo particularmente, favoreceremos momentos mais ricos de significado para a aprendizagem dos alunos.

Capítulo 4

Associação da tecnologia com as tarefas exploratórias e investigativas

> A escola não pode ignorar as relações entre informática e educação. Deve o professor estar ciente da introdução da informática no ensino de modo a valer-se de seus recursos para colaborar com a construção do conhecimento do aluno.
>
> Borba & Penteado, 2001 (p. 1)

É raro encontrar na sociedade moderna algum ramo do conhecimento humano que não sofreu as influências benéficas do uso do computador. A informática está inserida em quase todas as profissões. Relativamente ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral, algumas pesquisas recentes destacam a importância da tecnologia em auxílio a sua aprendizagem. Alguns programas apresentam excelentes recursos que integram dinamicamente as funções numéricas, algébricas e gráficas de forma a privilegiar a abordagem e a compreensão de muitos assuntos. Se estas ferramentas forem utilizadas em sala de aula, em apoio às tarefas exploratórias e investigativas, devem contribuir significativamente para tornar o ambiente de ensino e aprendizagem mais atraente e produtivo, desobrigando os alunos de situações mais mecânicas e operacionais e envolvendo-os em cenários mais reflexivos e conceituais (Allevato, 2010). É comum encontrarmos relatos de experiências didáticas bem sucedidas nesse contexto, como veremos adiante. São trabalhos que descrevem situações onde os alunos estão envolvidos em significativas tarefas com o auxílio da tecnologia; onde eles desempenham papéis mais ativos na exploração de expressivos problemas, construindo conceitos, investigando soluções, enfim, produzindo conhecimento em pequenos grupos de discussões em classe: "Os professores que já tiveram oportunidade de observar os alunos nessas aulas são testemunhas da mudança que se opera tanto na atitude dos alunos, em geral passiva nas aulas tradicionais, quanto na maneira de encarar o aprender e o entender Matemática" (Bianchini & Santos, 2002, p. xiii).

Neste capítulo ressaltaremos a contribuição da tecnologia computacional para o ensino e aprendizagem do Cálculo por intermédio das tarefas exploratórias e investigativas. Os valiosos recursos dos modernos programas matemáticos permitem situações mais dinâmicas, motivadoras e reflexivas na abordagem de relevantes problemas da disciplina. Algumas experiências são destacadas com a finalidade de evidenciar estes aspectos. Também salientamos algumas dificuldades e desafios inerentes à associação das tecnologias com as tarefas exploratórias e investigativas matemáticas.

4.1. A contribuição da tecnologia para o ensino e aprendizagem do Cálculo

Frequentemente um curso de Cálculo Diferencial e Integral tem uma carga horária elevada e apresenta um roteiro bastante extenso de conteúdos programáticos. É comum encontrarmos no seu ementário os tópicos de limites, derivadas e integrais. Ao adentrarmos nos pormenores de cada um desses assuntos, um vasto mundo de conceitos, teoremas e técnicas ressaltam. Na perspectiva exploratória de ensino, o docente é então convidado a elaborar atraentes atividades de natureza investigativa com estes conteúdos, através de tarefas que possam gerar aprendizagens mais significativas e motivadoras para os alunos. Conforme D'Ambrósio (1999) "O problema maior do ensino de Ciências e Matemática é o fato das mesmas serem apresentadas de forma desinteressante, obsoleta e inútil, e isso dói para o jovem" (p. 1). Portanto, na perspectiva exploratória, um cenário com grandes possibilidades se abre para o professor que almeja mudanças na sua prática de ensino. Ele pode, por exemplo, enriquecer as suas aulas em ambientes informatizados, associando as tarefas exploratórias, com o apoio da tecnologia, aos momentos expositivos. O auxílio do *software* matemático, nesses ambientes, possibilita que o aluno participe mais ativamente da construção dos conhecimentos. Ele passa a modelar problemas, fazer simulações, formular conjecturas e a visualizar situações que seriam muito complicadas, ou até mesmo inviáveis, sem o suporte valoroso da tecnologia (Allevato, 2010). Os ambientes informatizados permitem situações mais dinâmicas para o ensino e a aprendizagem da Matemática, e do Cálculo especificamente; favorecem, inclusive, que os alunos passem a se comunicar mais expressivamente e a compartilhar os seus pensamentos e ideias em pequenos grupos de trabalho (Allevato, 2005; Gravina & Santarosa, 1998).

Algumas modernas literaturas do Cálculo abordam uma série de conteúdos percorrendo a sua evolução histórica (e. g, Anton, Bivens & Davis, 2007; Stewart, 2013;). Muitos temas relevantes são tratados paralelamente a apresentação da biografia dos principais físicos e matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento de uma aplicação ou a solução de um importante problema. Estas são circunstâncias notórias que surgem para o professor elaborar tarefas, por exemplo, que levem os alunos a comparar as ideias mais recuadas do Cálculo com as abordagens mais atualizadas (Stewart, 2013). Circunstâncias, inclusive, que viabilizam uma construção mais rica de significados para os diversos conhecimentos da matéria. Vimos no capítulo anterior, por exemplo, como Pierre de Fermat (século XVII) desenvolveu o seu método geral para calcular tangentes a curvas. Os conhecimentos avançaram e hoje as tangentes são determinadas de forma diferente, com a prontidão de uma única fórmula, inclusive por intermédio de modernas visualizações dinâmicas computacionais. Enfim, algumas tarefas investigativas podem relacionar perfeitamente os aspectos históricos evolutivos do Cálculo com os procedimentos técnicos, em simulações informatizadas, gerando uma maior motivação para a aprendizagem.

São muitos os programas matemáticos disponíveis na atualidade para as escolas e universidades, uns pagos e outros gratuitos de excelente qualidade. Todos eles possuem variados recursos gráficos, numéricos e algébricos, com atraentes mecanismos de animações e que permitem abordagens mais dinâmicas da Matemática. É possivel encontrar na internet, nos fóruns de discussões desses programas, uma quantidade considerável de atividades interativas. É possível associar muitas dessas atividades ao cotidiano das aulas, fomentando notáveis tarefas exploratórias e diversificando o ensino. Aos poucos o professor vai introduzindo estas atividades e modificando o ambiente de aprendizgem dos alunos, convidando-os a participarem mais ativamente na exploração do conhecimento. Passemos então a conhecer um pouco mais a contribuição de alguns desses programas para o ensino e aprendizagem do Cálculo, pois segundo Borba & Penteado (2001) "(...) a escola não pode ignorar as relações entre informática e educação. Deve o professor estar ciente da introdução da informática no ensino de modo a valer-se de seus recursos para colaborar com a construção do conhecimento do aluno" (p. 1).

Um *software* bastante divulgado nos ambientes acadêmicos é o *Maple* <http://www.maplesoft.com/>. Muitos pesquisadores que se dedicam ao estudo da tecnologia aplicada à educação dão um destaque especial a este programa como um excelente recurso didático para o ensino e a aprendizagem do Cálculo. (Allevato, 2005; Andrade, 2004; Bianchini & Santos, 2002; Escher, Miskulin & Silva, 2006; Olimpio Junior, 2005; Sousa, 2003). Atualmente tenho feito uso deste *software* nas minhas aulas de Cálculo. Este programa possui enormes potenciais numérico, algébrico e gráfico que permitem abordagens mais atraentes do Cálculo, enriquecendo o ambiente tradicional de ensino. O *Maple* oferece uma vasta aplicação computacional a diversos tópicos da disciplina e possui também uma série de linguagens de programação e interfaces gráficas *(maplets)*. Numa pesquisa pela internet é possível encontrar um número relevante de publicações acadêmicas que exploram os seus inúmeros recursos em diversificados modelos didáticos. Uma variedade enorme de pacotes de estudos e *maplets* são direcionadas para estudantes e professores. Estes recursos favorecem a compreensão de muitos assuntos da disciplina em "janelas" que permitem a interação do usuário com o objeto de estudo de forma bastante dinâmica. As *maplets* são de muito fácil manuseio, bastando apenas indicar ou ajustar os parâmetros desejados para obter e analisar os resultados desejados (figura 16). Conforme Sousa (2003) "As *maplets* comportam-se para o utilizador final como qualquer programa de um sistema operativo com janelas interactivas onde é possível realizar computação algébrica, numérica e gráfica, mesmo para quem não está familiarizado com o *Maple*" (p. 81).

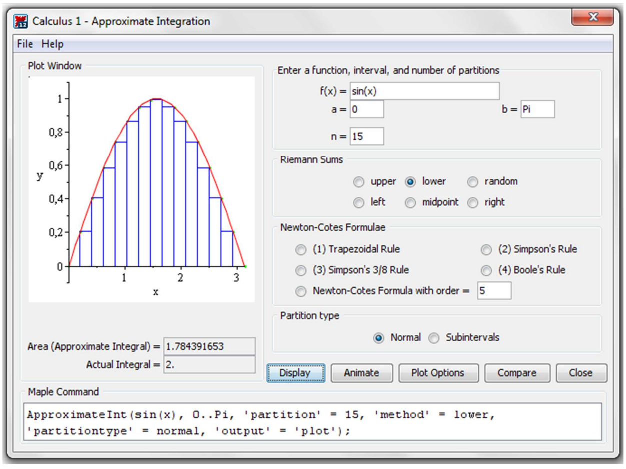


Figura 16: *Maplet* que explora a visualização dinâmica da integral definida de uma função.

O uso do *Maple* – e de outros programas equivalentes como o *Mathematica* e o *Matlab* – ficou bastante tempo restrito a alguns pesquisadores de matemática e um número também reduzido de estudantes de iniciação científica e pós–graduação nas universidades brasileiras. Nas primeiras versões desse *software* era necessário conhecer especificamente a sua sintaxe de programação. Somente dessa forma era possível manusear com desenvoltura os comandos que permitiam acesso aos aplicativos voltados para o ensino e a aprendizagem do Cálculo. O conhecimento desses códigos dava acesso às potencialidades dinâmicas do programa. Isso provocava certo distanciamento do uso desta tecnologia por parte de muitos professores, isto porque eles necessitavam de um dispêndio considerável de tempo para assimilar a sua linguagem específica. Além disso, os alunos deveriam também disponibilizar um tempo razoável, paralelamente ao aprendizado do Cálculo, para instruir-se na linguagem do programa e usufruir dos seus recursos: "De facto, para usar todas as potencialidades do *Maple*, era necessário saber o seu código, isto é, os utilizadores finais precisavam saber a linguagem de programação deste sistema, para trabalhar em *Maple*" (Sousa, 2003, p. 7).

Com a evolução do *software* e o advento das *maplets*, os aplicativos passaram a ter uma interação bastante simples para o utilizador final (estudante ou professor) que não necessitava mais conhecer a linguagem interna do programa, inclusive podendo criar as suas próprias "janelas". Através das *maplets* o professor, por exemplo, pode facilmente acessar os recursos do programa e criar uma série de tarefas investigativas laboratoriais. Portanto, pode explorar os conhecimentos do Cálculo, inclusive os mais teóricos e fundamentais, de uma forma mais atraente e orientar os alunos nas suas próprias descobertas (figura 17). O *Maple* tornou-se,

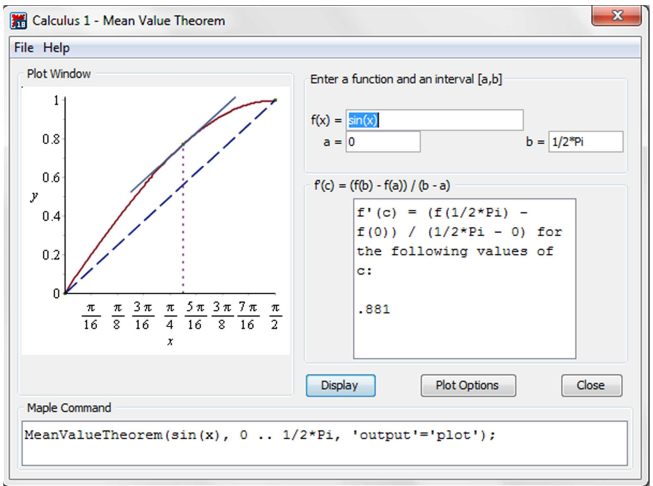


Figura 17: *Maplet* que calcula e anima o Teorema do Valor Médio de uma função.

desta forma, uma excelente ferramenta tecnológica para alcançar uma série de objetivos didáticos no ensino e aprendizagem do Cálculo. A sequência a seguir exibe algumas *maplets* e suas funcionalidades.

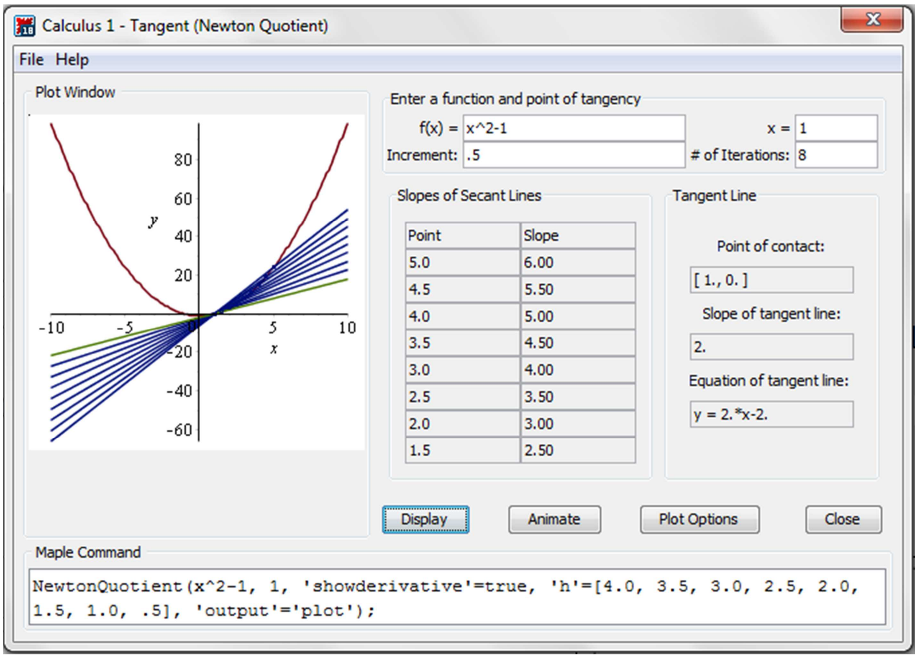


Figura 18: *Maplet* que anima a demonstração da reta tangente.

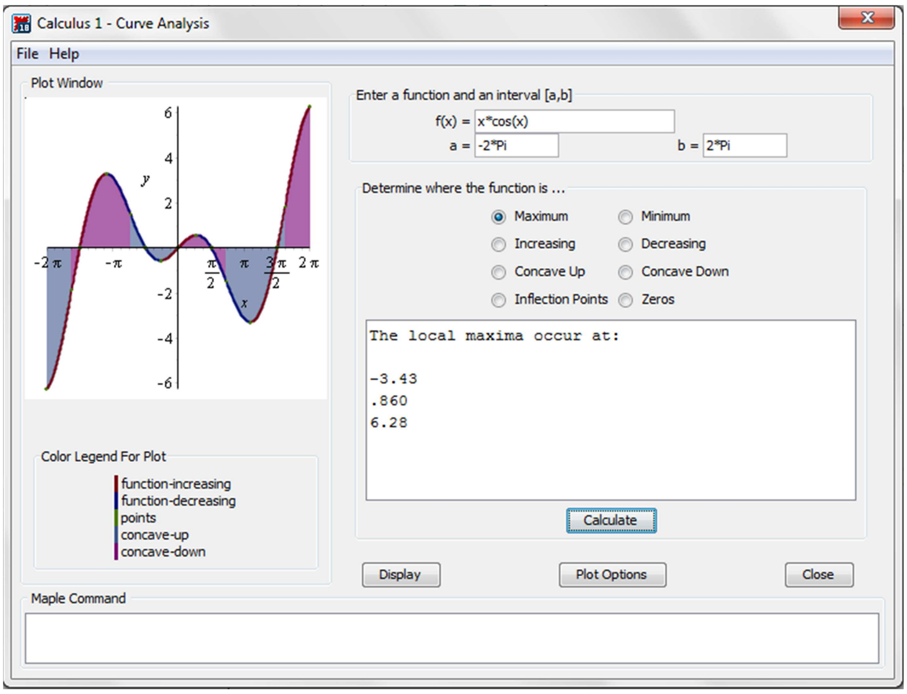


Figura 19: *Maplet* que realiza a análise gráfica total de uma função.

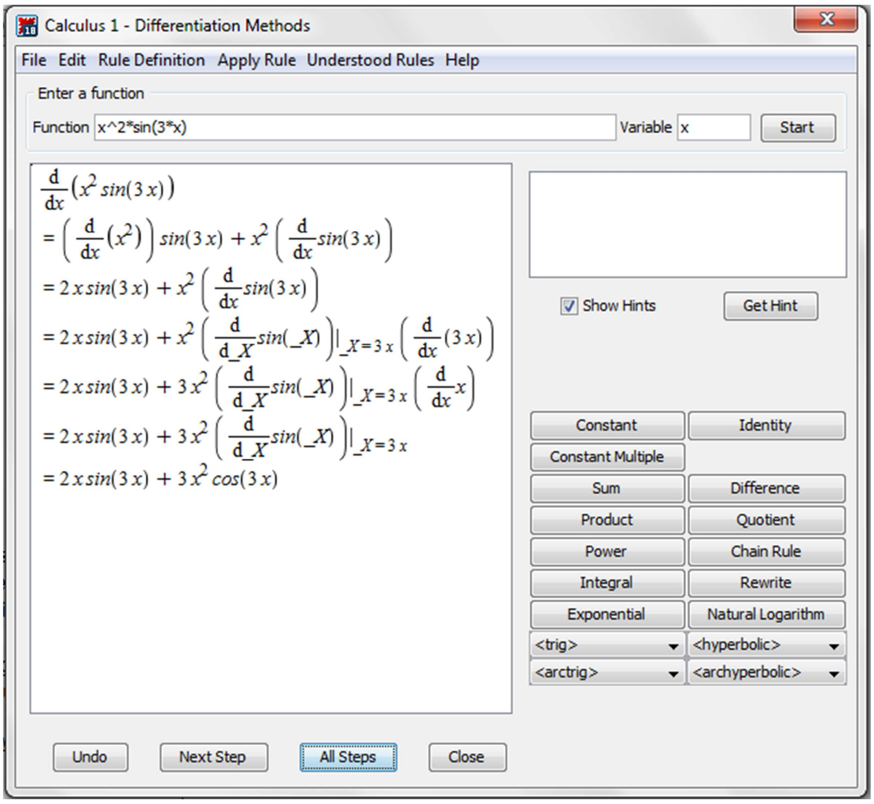


Figura 20: *Maplet* que descreve o passo a passo dos métodos de derivação.

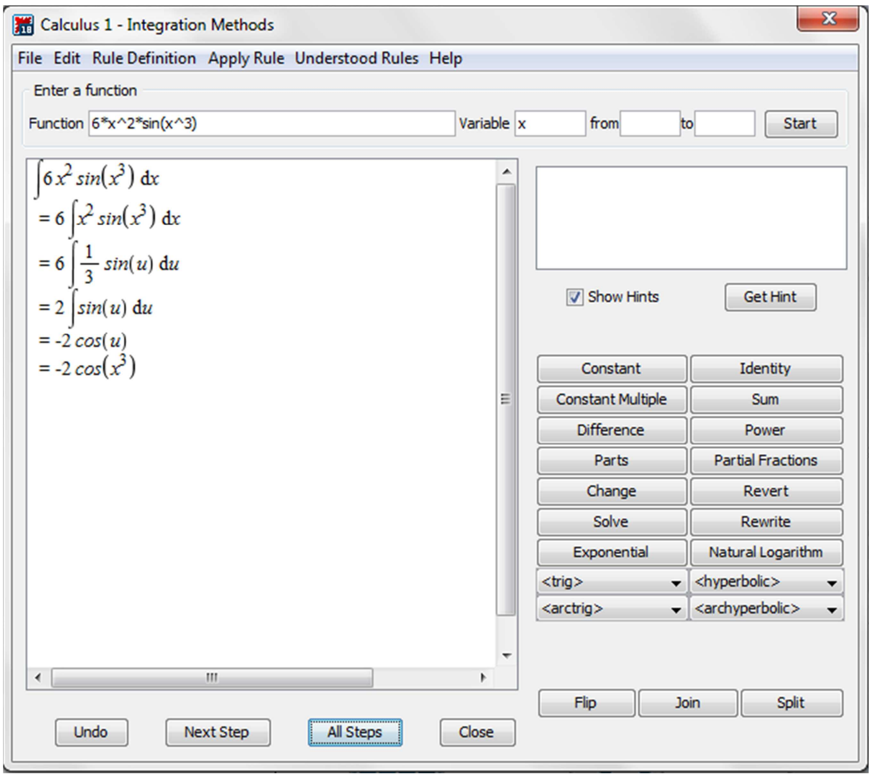


Figura 21: *Maplet* que mostra o passo a passo dos métodos de integração.

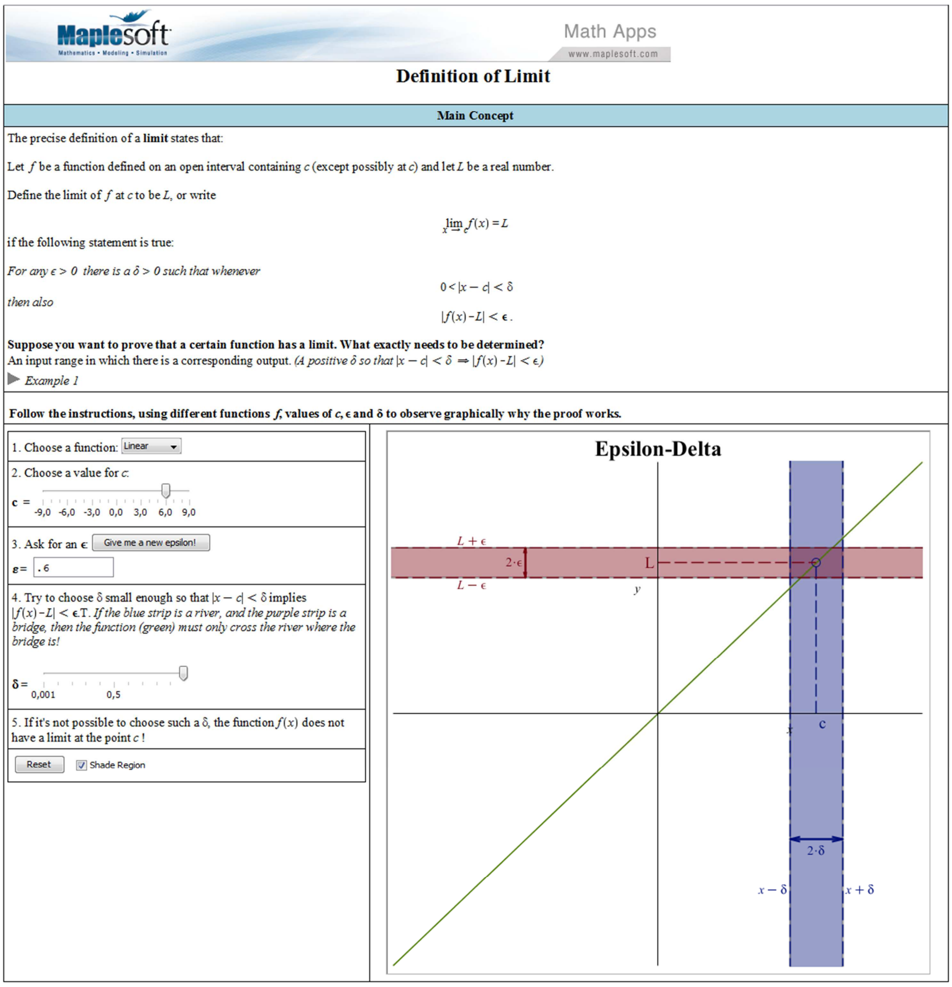


Figura 22: *Maplet* que calcula limites pela definição.

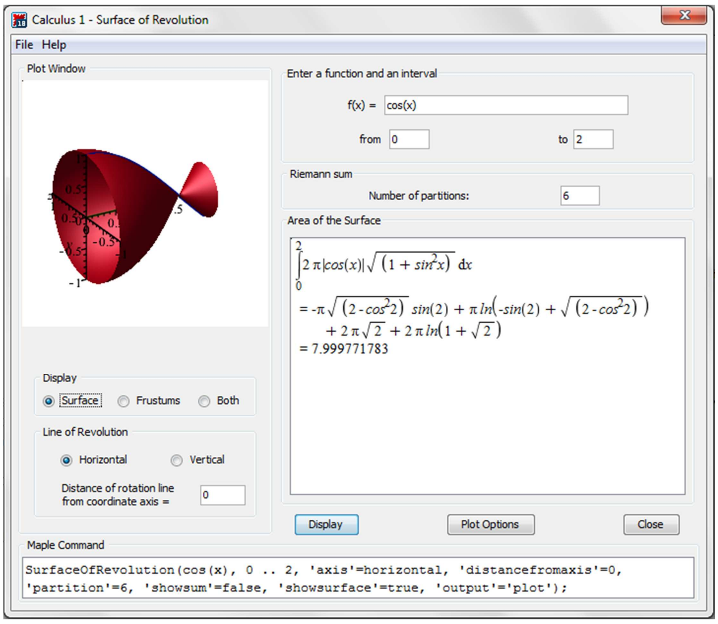


Figura 23: *Maplet* que calcula volume de sólidos de revolução.

Alguns programas livres, tão interessantes quanto os pagos citados anteriormente, possuem também muitas funcionalidades e podem auxiliar de forma eficiente a abordagem de diversos conteúdos do Cálculo. O *GeoGebra* e o *Winplot*, por exemplo, são programas que se enquadram nessa categoria e apresentam versões totalmente traduzidas para a língua portuguesa – e isso facilita por demais o trabalho do professor com os alunos recém-ingressos num curso superior. O *GeoGebra* <http://www.geogebra.org> consegue aliar com maestria, na sua interface de simples interação, os aspectos numéricos, gráficos e algébricos que possibilitam explorações bem interessantes numa série de problemas e investigações do Cálculo. O *software* permite vincular objetos matemáticos, realizar cálculos de formas simultâneas com essas estruturas, além de disponibilizar excelentes visualizações dinâmicas. O *Winplot* <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html> possui também uma interface bastante acessível. Não há necessidade do conhecimento de linguagens computacionais para trabalhas as suas funcionalidades. O *software* possui janelas onde se podem manusear objetos bi e tridimensionais com muita facilidade. Além disso, realiza também notáveis animações gráficas a partir de funções de uma ou duas variáveis, nas formas cartesiana (explícita e implícita), paramétrica e polar. Muitas atividades que requerem animações simultâneas de trajetórias de curvas podem ser realizadas com este programa que ocupa bem pouco espaço de memória no computador. A sequência abaixo exibe algumas funcionalidades desses dois programas.

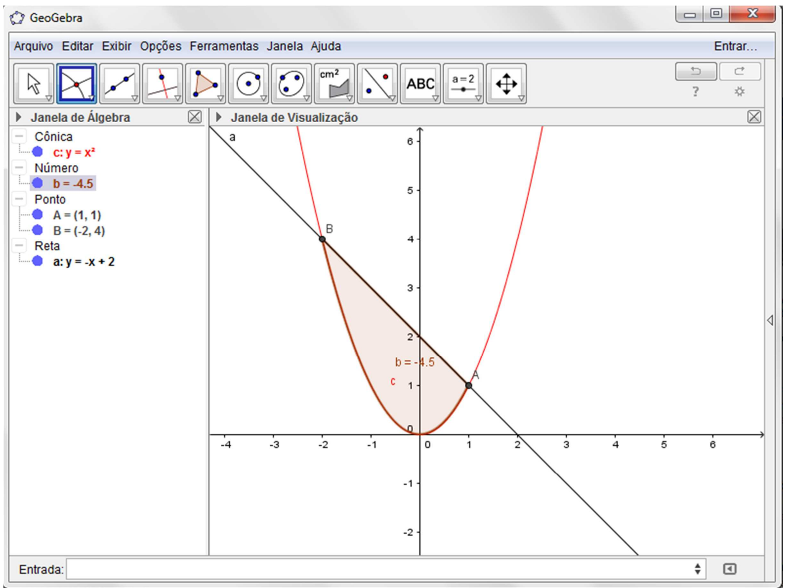


Figura 24: Aplicativo do *GeoGebra* que determina interseções e áreas entre duas curvas.

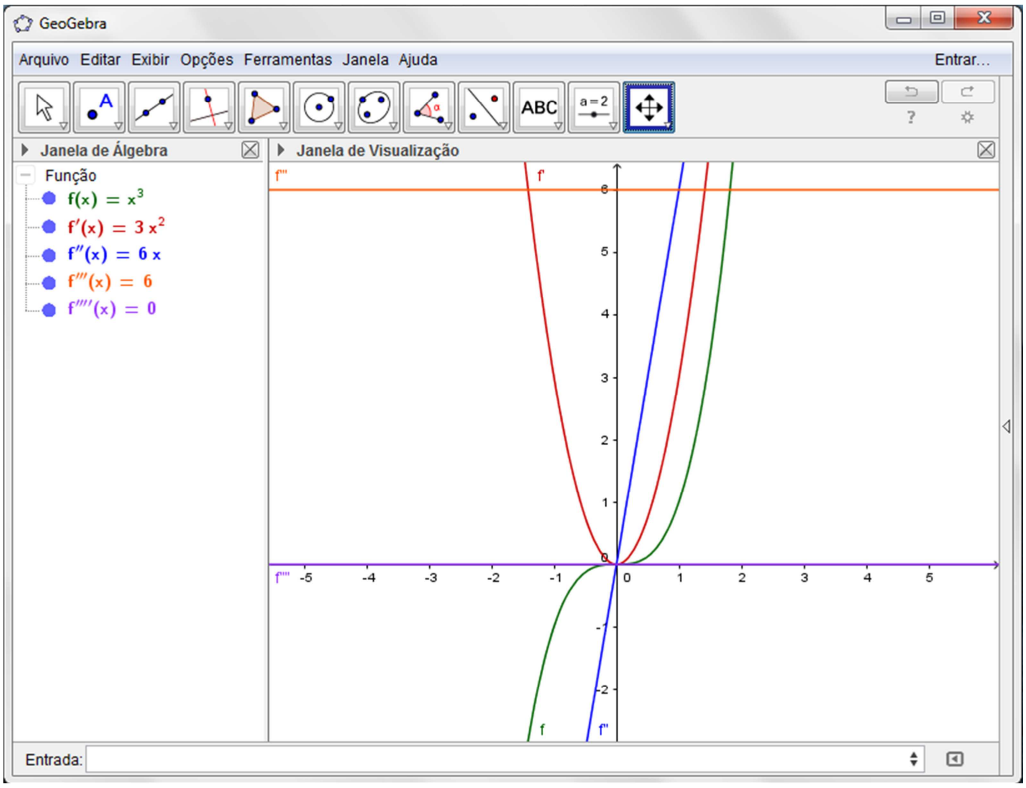


Figura 25: Aplicativo do *GeoGebra* que calcula derivadas sucessivas.

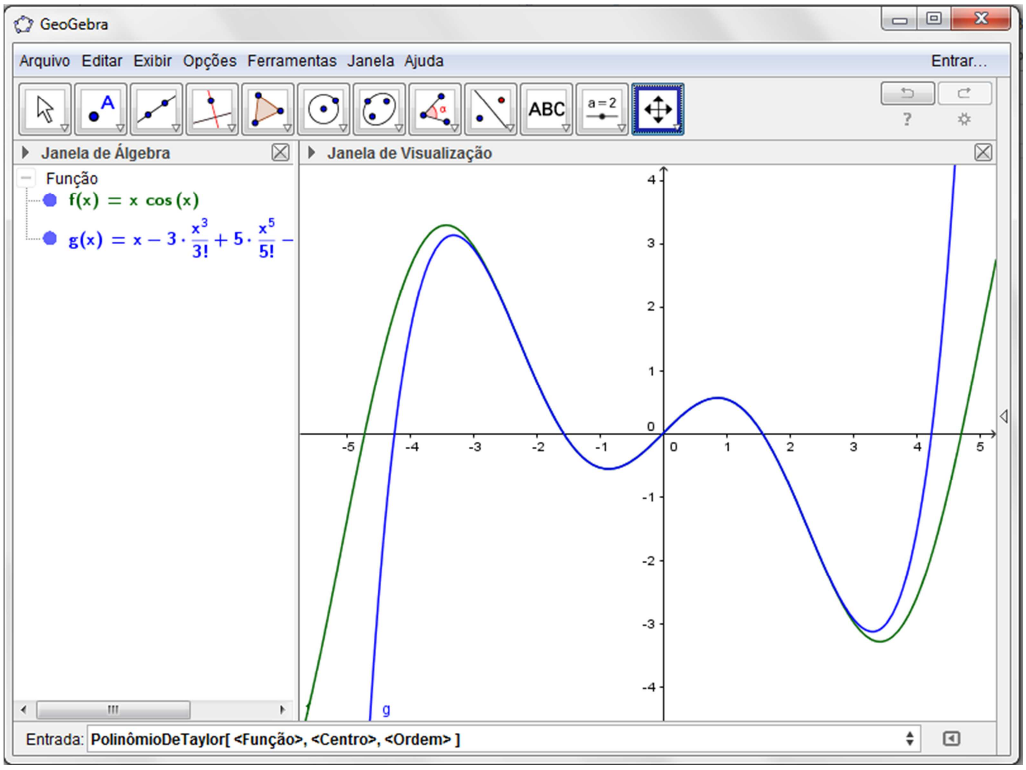


Figura 26: Aplicativo do *GeoGebra* que calcula o Polinômio de Taylor de uma função.

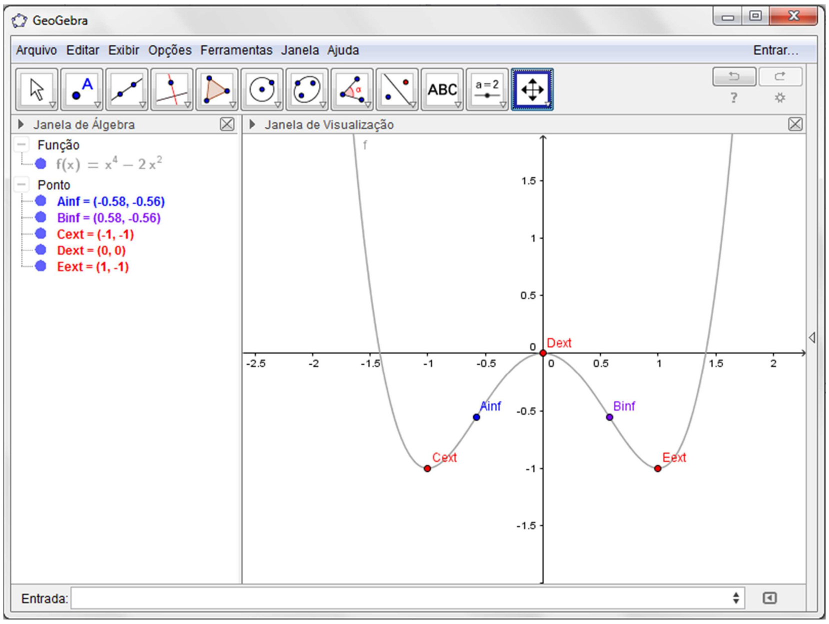


Figura 27: Aplicativo do *GeoGebra* que determina pontos extremos e de inflexão.

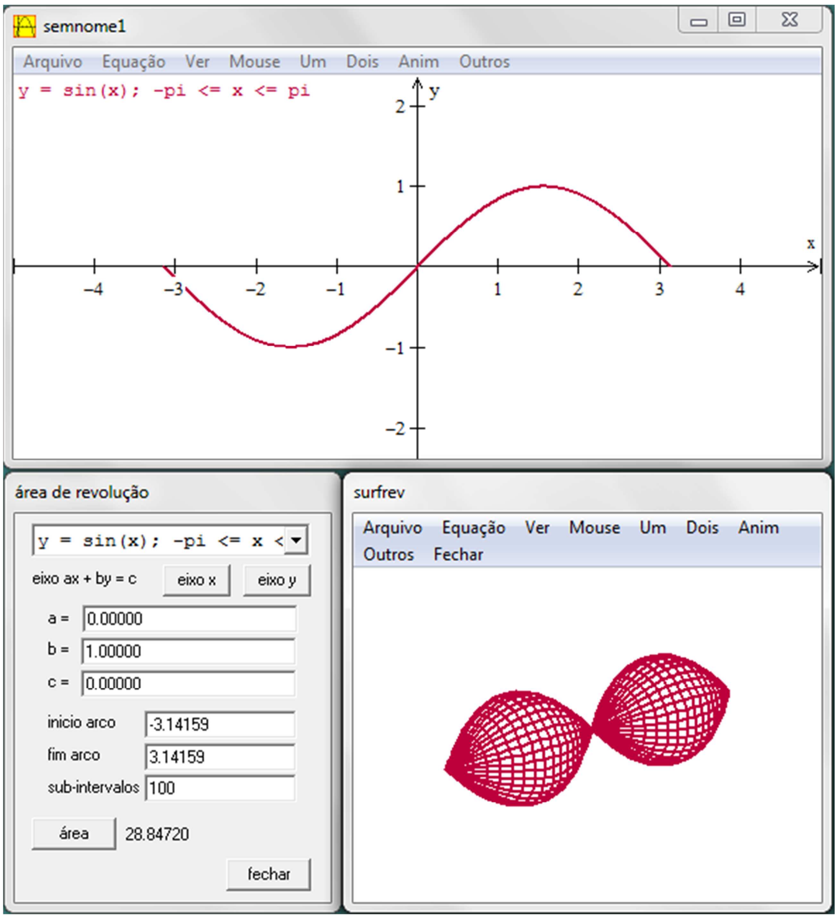


Figura 28: Aplicativo do *Winplot* que determina área de superfície de revolução.

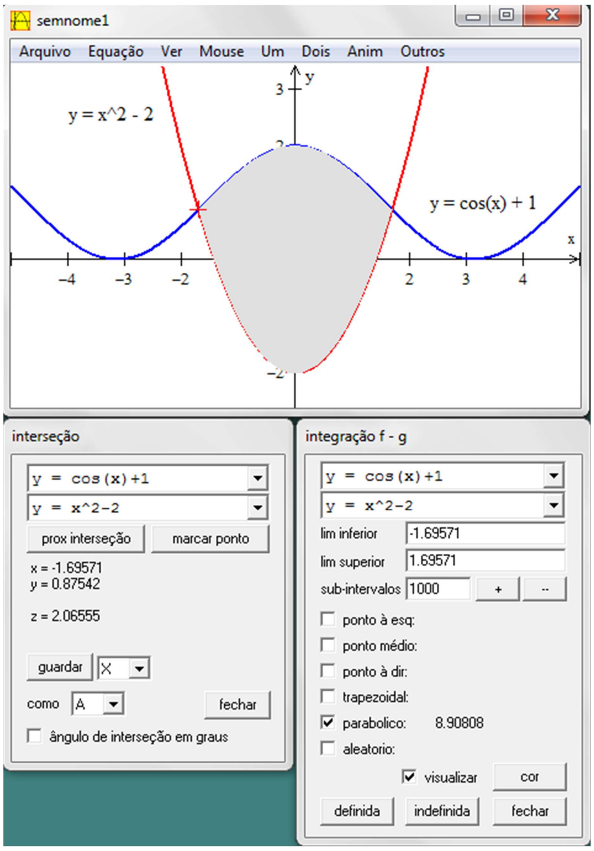


Figura 29: Aplicativo do *Winplot* que determina interseções e áreas entre duas curvas.

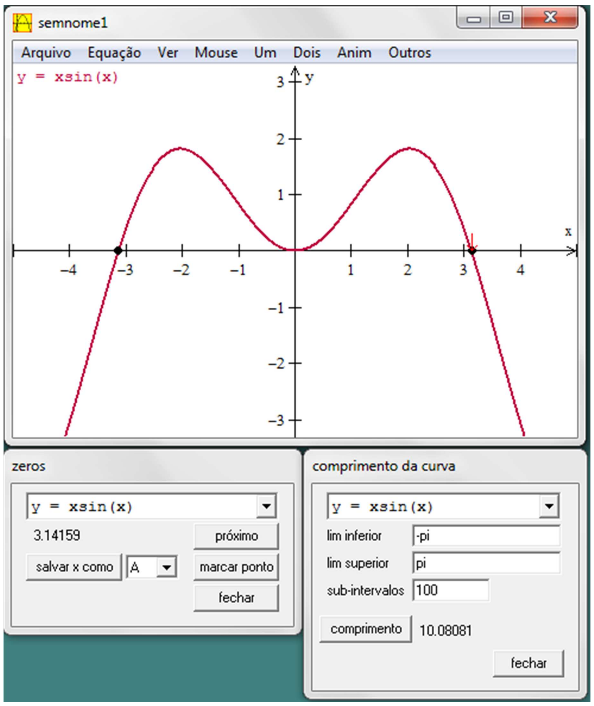


Figura 30: Aplicativo do *Winplot* que determina zeros e comprimento de curvas.

4.2. Algumas experiências

Dentre todas as disciplinas do campo das matemáticas, o Cálculo Diferencial e Integral é a que vem recebendo maiores atenções e investimentos internacionais para o desenvolvimento e o uso das tecnologias educacionais (Tall, Smith & Piez, 2008). Isto se dá em função da sua importância para uma grande quantidade de cursos superiores, nas mais variadas áreas de conhecimento, e também pelos seus expressivos índices de reprovação. Iniciativas de pesquisadores de todas as partes do mundo vêm estimulando o seu ensino a partir dos Sistemas Algébricos Computacionais (CAS), permitindo a associação da tríade algébrica, numérica e gráfica na abordagem dos seus principais conteúdos. Essas inovações surgem numa tentativa de melhorar estes insatisfatórios índices e aperfeiçoar o ensino majoritariamente tradicional que permeia as salas de aulas das universidades.

> Of all the areas in mathematics, calculus has received the most interest and investment in the use of Technology. Initiatives around the world have introduced a range of innovative approaches from programming numerical algorithms in various languages, to use of graphic software to explore calculus concepts, to fully featured computer algebra systems such as *Mathematica* (Wolfram Research, 2005), *Maple* (Maplesoft, 2005), *Derive* (Texas Instruments, 2005), *Theorist* (no longer available, replaced by Livemath, 2005) and *Mathcad* (Mathsoft, 2005). The innovations arose for a wide range of reasons, some because a traditional approach to calculus was considered fundamentally unsatisfactory for many students, others because "technology is available, so we should use it." (Tall, Smith & Piez, 2008, p. 1)

Esses fatores têm possibilitado que um número crescente de professores passe a modernizar as suas aulas através de notáveis experiências investigativas, viabilizadas pelos recursos tecnológicos. Essa renovação não se verifica apenas nos cursos de Matemática, mas também em outras áreas de conhecimento que demandam o Cálculo na estrutura curricular dos seus cursos. Os alunos são envolvidos em contextos práticos e mais próximos da realidade das suas formações profissionais. Por exemplo, Morelatti (2008), em seu artigo denominado *"A abordagem construcionista no processo de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral"*, descreve a experiência bastante interessante de um projeto significativo e contextualizado de modelagem. A investigação foi realizada numa turma de Cálculo do curso de Estatística da Universidade Estadual Paulista (Unesp/SP). Nesta iniciativa, os alunos desenvolveram estudos práticos sobre a análise gráfica das funções ao abordar os tópicos de crescimento e decrescimento, assíntotas e extremos, concavidades e inflexões, dentre outros. Foi possível também trabalhar de forma interdisciplinar com alguns conceitos chaves da Estatística Descritiva, tais como média, mediana, moda e probabilidade. Todas as ações tiveram suporte na tecnologia e as funções obtidas foram modeladas em campo a partir dos seguintes temas:

- peso de coelhos em uma granja;
- tempo de vida de um fusível;
- tempo entre chegadas sucessivas na fila de um banco;
- demanda diária de arroz em um supermercado;
- temperatura mensal média em Presidente Prudente/SP;
- umidade relativa mensal em Presidente Prudente/SP;
- ganho de peso na gravidez.

> O termo construcionismo foi utilizado por Seymour Papert, na década de oitenta, para descrever a construção do conhecimento por meio da realização de uma atividade no computador. Nesta ação, que originalmente utilizava a linguagem de programação Logo, o aprendiz realiza projetos, isto é, constrói algo de seu interesse no computador. O fato de estar realizando uma atividade do seu interesse faz com que o aprendiz se envolva afetivamente com a atividade, tornando-a mais significativa. Isto acontece quando a atividade é contextualizada e está vinculada à realidade do aprendiz. (Morelatti, 2008, p. 5)

O autor enfatiza uma série de aspectos positivos dessa experiência que possibilita o leitor vislumbrar possibilidades reais de trabalhar os conteúdos do Cálculo de uma forma diferenciada. O ambiente de trabalho modifica-se, o currículo renova-se e os alunos apresentam posturas mais motivadoras para a aprendizagem. Além disso, o autor ainda destaca que estas atividades implicam a modernização dos métodos avaliativos e impactam positivamente a visão que os alunos têm da disciplina.

Falcade, Laborde e Mariotti (2007), na Itália, mostram a possibilidade dos alunos construirem o conceito de função a partir de tarefas exploratórias intermediadas pela tecnologia. Essa experiência foi alicerçada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica do filósofo e psicólogo francês Raymond Duval. Os autores ponderam sobre a necessidade de avançar das abordagens mais tradicionais, com uso exclusivo da lousa, lápis e papel, para situações realmente construtivas com a manipulação de *software* educativo. Circunstâncias que possibilitam mudanças essenciais de atitude em uma nova relação com a Matemática.

Borba e Penteado (2001) apresentam uma série de experiências interessantes do uso da informática ao explorar translações gráficas e representações algébricas de funções através de planilhas eletrônicas e calculadoras gráficas, tanto para alunos quanto para professores. Os autores refletem desde as questões políticas governamentais para informatização dos ambientes educacionais, até os problemas epistemológicos e pedagógicos relacionados ao uso das tecnologias. Em seus estudos, eles argumentam favoravelmente pela inserção qualificada das tecnologias nas salas de aula e evidenciam possibilidades efetivas de incrementar o dominante ensino tradicional desses ambientes. Essas pesquisas apontam promissores rumos para os alunos, ao envolvê-los em atividades matematicamente mais ricas, numa diversidade de situações investigativas.

Barufi (1999), Melo (2002) e Saraiva (2000) também vêm debruçando-se sobre as questões alusivas ao emprego das tecnologias digitais no ensino e aprendizagem da Matemática. Os autores apresentam experiências satisfatórias sobre o uso da informática em sala de aula, como uma ferramenta eficaz na exploração dos principais conceitos do Cálculo. Em seus estudos destacam-se, particularmente, a caracterização formal dos limites por intermédio dos recursos gráficos e algumas contextualizações das derivadas e integrais e suas respectivas interpretações geométricas. São promitentes perspectivas de ensino que apontam cenários mais favoráveis, com relações mais dinâmicas entre alunos e professores. São circunstâncias que possibilitam o alinhamento de contextos históricos, tecnologias interativas e investigações em pequenos grupos. Todas essas experiências são relatas em seus estudos, onde as ações ocorrem mais expressivamente na abordagem de problemas.

Miquelino e Resende (2013) pesquisaram a influência do uso das tecnologias nas aulas de Cálculo de 14 professores da cidade de Uberaba-MG, em diversas instituições de ensino superior. Os seus trabalhos evidenciam principalmente a renovação no aspecto motivacional dos professores que participaram desse estudo. Os autores destacam como a realização das aulas exploratórias com os recursos computacionais melhora significativamente a relação dos professores com os alunos, através do contato mais comunicativo em sala de aula. As investigações evidenciam também que o uso da informática melhora a compreensão de alguns assuntos mais complexos da matéria. Isto porque, ao substituir, em algumas situações, as demonstrações formais algébricas pelos aspectos intuitivos geométricos, favorecidos pelo dinamismo dos recursos gráficos, o entendimento tornava-se mais claro, conforme os relatos dos alunos. Os autores ressaltam ainda a melhora contínua do ponto de vista negativo que os alunos faziam inicialmente da disciplina, permitindo um maior envolvimento deles com os trabalhos acadêmicos. Inclusive sublinham que a inserção sistematizada da tecnologia nas atividades pôde resgatar a natureza dinâmica e visual do Cálculo: "(...) a ênfase na visualização encontra explicação na própria natureza do Cálculo que tem forte apelo geométrico. Desse modo, os recursos tecnológicos permitem que a natureza geométrica e dinâmica do Cálculo seja resgatada" (Miquelino & Resende, 2013, p. 11).

Villarreal (1999) desenvolveu estudos sobre a aplicação das derivadas nas aulas de Cálculo ofertadas a um curso de Biologia da Universidade Estadual Paulista (UNESP). Este assunto foi escolhido em função das grandes dificuldades enfrentadas pelos alunos na sua compreensão. A tecnologia (a pesquisadora utilizou o *software derive* em seus estudos) foi o canal mais eficiente encontrado para explorar o tema num contexto mais próximo das práticas experimentais daquele curso. Além disso, foi oportunizada uma alternativa de estudo que pudesse levá-la a compreender melhor tais dificuldades. A autora destaca que a utilização da informática, além de favorecer um melhor entendimento das derivadas, inclusive do ponto de vista gráfico, produz um ganho motivacional, pois os alunos passam a lidar com as técnicas operacionais mais rotineiras com maior conhecimento de causa.

Palis (1995), ao estudar o uso das tecnologias digitais no ensino e aprendizagem do Cálculo, salienta as mudanças positivas que se verificam na postura de alunos e professores. A realização de tarefas investigativas, apoiadas em recursos tecnológicos, proporciona maior interação e comunicação na sala de aula, situação esta raramente observada no modelo tradicional de ensino. Atividades que demandavam dos professores maiores esforços de visualizações gráficas, bi e tridimensionais, passaram a ser realizadas em situações exploratórias, onde os alunos participavam mais produtivamente dos trabalhos: "(...) tem-se constatado que algumas mudanças na qualidade do aprendizado dos alunos ocorrem simplesmente porque eles participam mais ativamente em aulas ou trabalhos apoiados em computadores e/ou calculadoras, seguem o curso mais de perto e fazem mais perguntas, do que em ambientes de ensino tradicionais" (Palis, 1995, p. 25). As renovações no ensino, tão almejadas pelos docentes, passam, portanto, em envolver os alunos em situações mais ativas de aprendizagem. Nos seus estudos, a autora enfatiza a significativa mudança no comportamento dos estudantes quando estes participam de práticas colaborativas, em contextos investigativos em ambientes informatizados. Nesta situação, os recursos computacionais constituiriam instrumentos valiosos para a produção do conhecimento, trazendo mais motivação e dinamismo para a abordagem dos conteúdos. Neste cenário, a criatividade é mais bem estimulada, inclusive melhorando a relação entre professores e alunos.

Olimpio Junior (2005), em sua tese de doutorado, descreve algumas experiências interessantes no âmbito da matemática pura. Ele associa os aspectos oral, escrito e tecnológico no estudo de limites e derivadas para estudantes recém-ingressos na disciplina de Cálculo I da UNESP/Rio Claro. Numa dessas situações o autor explora sob essas óticas, e com os alunos dispostos em duplas, a continuidade e a diferenciabilidade da função:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen(1/x); & x \neq 0 \\ 0; \ x = 0 \end{cases}$$

A riqueza da investigação, repleta de conjecturas e experimentações, está no fato da função apresentar um comportamento visual bastante "confuso" no ponto $x = 0$. O autor descreve, com base apenas na abordagem oral e escrita, a insegurança dos alunos em concluir sobre a continuidade da função na origem. Com a inserção da tecnologia e a sua visualização gráfica (o *Maple* foi utilizado nesta experiência), esperava-se uma conclusão relativamente simples. Porém, por mais que se aplicasse o recurso "zoom" para enxergar melhor o gráfico na origem, mais as dúvidas persistiam, inclusive, agora, em relação à diferenciabilidade no mesmo ponto. O autor ainda destaca que mesmo o programa calculando a derivada e exibindo o resultado numérico, muitos alunos ainda permaneciam hesitantes: "como a derivada na origem poderia existir se a função apresentava comportamento tão caótico neste ponto?" (p. 89). Após os alunos se debruçarem sobre a resolução algébrica, amparados pela teoria dos limites, a solução encontrada foi compatível com a apresentada pelo programa. Apesar disso, muitos ainda tentavam compreender aquele resultado com base nas visualizações gráficas.

É bem provável que um problema interessante como este, abordado nos moldes exclusivamente expositivos, perderia muitas das peculiaridades experimentais relatadas detalhadamente pelo autor. O sistema algébrico computacional possibilitou o enriquecimento da aula, permitiu uma ampla variedade de conjecturas e aprofundou a reflexão e a comunicação entre os alunos. Essas características intensificaram o entendimento dos conceitos trabalhados e qualificaram ainda mais as discussões na turma. É por isso que o autor, em sua pesquisa, sugere uma ampliação de atividades com esse perfil. Defende, ainda, um aumento das situações exploratórias no ensino que permitam aliar a versatilidade dos programas matemáticos com a natureza dinâmica do Cálculo.

Dentre os conteúdos do Cálculo, os problemas de máximo e mínimo apresentam excelentes oportunidades para abordagens investigativas com o apoio da tecnologia. A literatura moderna traz contextos interessantes onde a derivada é utilizada para otimizar uma série de grandezas envolvidas nestes problemas. Medidas como distâncias, perímetros, áreas, volumes, dentre outras, aparecem em muitas situações. Porém, os alunos geralmente apresentam muitas dificuldades no seu tratamento. Isto ocorre porque vários outros conhecimentos subjacentes são requisitados para sua resolução, inclusive muitas fórmulas da geometria. Tanto é assim que os livros didáticos frequentemente apresentam um roteiro que busca orientar a ação dos estudantes no trato das questões. Vejamos a descrição de um “passo a passo”, extraído de Stewart (2013, p. 294), que orienta a abordagem desses problemas:

1) Compreendendo o problema. A primeira etapa consiste em ler cuidadosamente o problema até que ele seja entendido claramente. Pergunte-se: o que é desconhecido? Quais são as quantidades dadas? Quais são as condições dadas?
2) Faça um diagrama. Na maioria dos problemas é útil fazer um diagrama e marcar as quantidades dadas e pedidas no problema.
3) Introduzindo uma notação. Atribua um símbolo para a quantidade que deve ser maximizada ou minimizada (por ora vamos chamá-la Q). Selecione também símbolos $(a, b, c, \dots, x, y)$ para outras quantidades desconhecidas e coloque esses símbolos no diagrama. O uso de

iniciais como símbolos poderá ajudá-lo, por exemplo, A para área, h para altura e t para o tempo.

4) Expresse Q em termos de alguns dos outros símbolos da etapa 3.
5) Se Q for expresso como uma função de mais de uma variável na etapa 4, use as informações dadas para encontrar as relações (na forma de equações) entre essas variáveis. Use então essas equações para eliminar todas, menos uma, das variáveis na expressão de Q. Assim, Q será expresso como uma função de uma única variável x, digamos $Q = f(x)$. Escreva o domínio dessa função.
6) Use os métodos teóricos vistos preliminarmente para encontrar os valores máximo e mínimo absolutos de f.

Ao apresentar este roteiro, o autor passa a desenvolver alguns modelos que servirão como referência para a resolução dos problemas propostos. Foi com o tema *"Contribuições de um software de geometria dinâmica na exploração de problemas de máximos e mínimos"* que Menk (2005) explorou uma série de problemas de otimização em aulas investigativas com o apoio da tecnologia. As experiências realizadas com o *software Cabri-Géomètre II* foram baseadas nas seguintes situações:

Problema 1: Rodney tem 100 m de grade com os quais pretende construir um cercado retangular para seu pequeno poodle francês. Quais as dimensões do cercado retangular de área máxima?

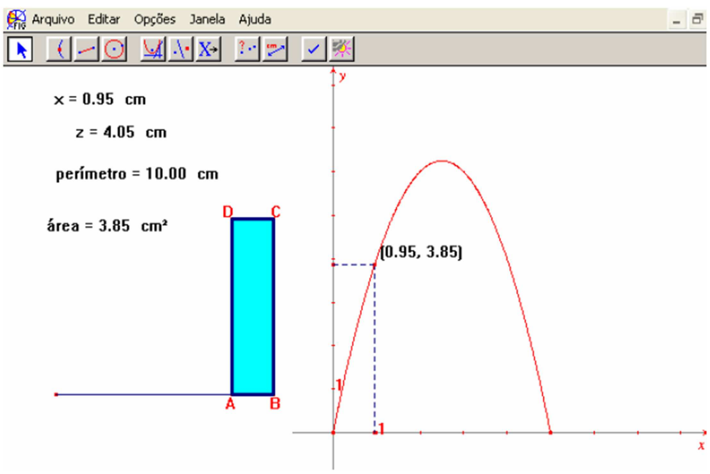


Figura 31: Representação da situação investigativa do problema 1 com o *software Cabri-Géomètre*.

Problema 2: Cris possui um pequeno pedaço de cartolina no formato de um quadrado de lado 4 cm e deseja recortar um pentágono utilizando essa cartolina de modo que esse pentágono tenha a maior área possível. Para tanto, ela pensou em nomear esse quadrado por ABCD, marcar os pontos M, N e P sobre os lados AB, BC e CD, respectivamente, de modo que as medidas AM, NC e CP fossem iguais a um valor conveniente x, uma vez que há várias possibilidades para essa marcação. Ajude Cris a encontrar a medida x de modo que ao recortar o pentágono AMNPD, ela obtenha a figura desejada.

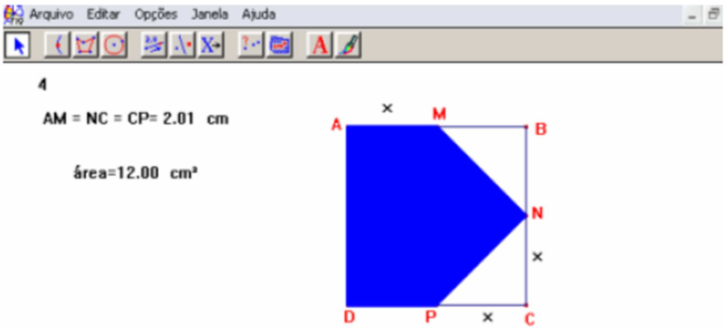


Figura 32: Representação da situação investigativa do problema 2 com o *software Cabri-Géomètre*.

Problema 3: Um arame de 10 cm de comprimento deve ser cortado em 2 pedaços, um dos quais será torcido de modo a formar um quadrado e o outro, a formar um círculo. De que modo deverá ser cortado para que a soma das áreas limitadas pelas figuras obtidas seja mínima?

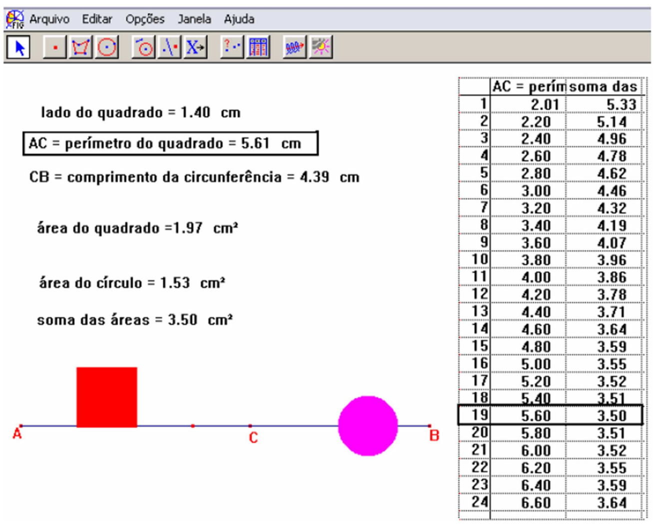


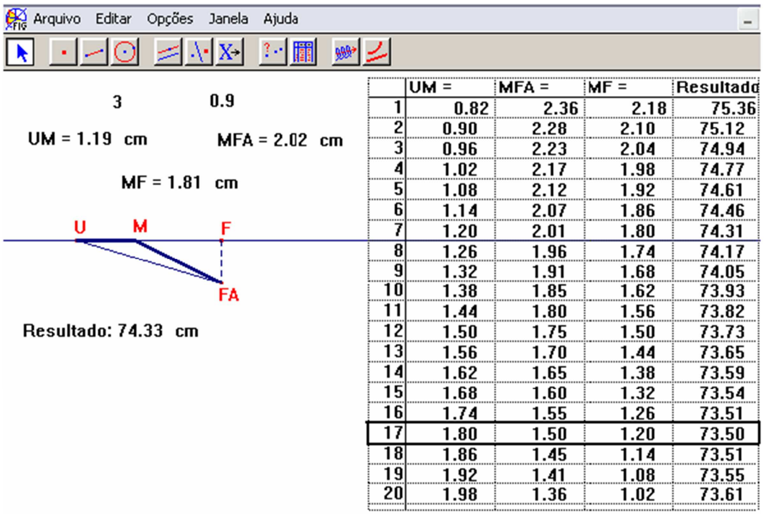
Figura 33: Representação da situação investigativa do problema 3 com o *software Cabri-Géomètre*.

Problema 4: Um cabo de eletricidade ligará uma usina hidrelétrica situada à margem de um rio de 900 m de largura a uma fábrica situada na outra margem do rio, 3000 m a jusante da usina. O custo de instalação do cabo submerso é de R$ 25,00 por metro, enquanto que em terra é de R$ 20,00 por metro.

a) Qual a forma mais econômica de se instalar esse cabo?

b) Qual seria a forma mais econômica de se instalar esse cabo, se a fábrica estivesse a 4000 m a jusante da usina? E a 5000 m? E a 6000 m? E a 2000 m? E a 1000 m?

c) Através do Cálculo, haveria alguma maneira de justificar essas respostas?



	UM =	MFA =	MF =	Resultado
1	0.82	2.36	2.18	75.36
2	0.90	2.28	2.10	75.12
3	0.96	2.23	2.04	74.94
4	1.02	2.17	1.98	74.77
5	1.08	2.12	1.92	74.61
6	1.14	2.07	1.86	74.46
7	1.20	2.01	1.80	74.31
8	1.26	1.96	1.74	74.17
9	1.32	1.91	1.68	74.05
10	1.38	1.85	1.62	73.93
11	1.44	1.80	1.56	73.82
12	1.50	1.75	1.50	73.73
13	1.56	1.70	1.44	73.65
14	1.62	1.65	1.38	73.59
15	1.68	1.60	1.32	73.54
16	1.74	1.55	1.26	73.51
17	1.80	1.50	1.20	73.50
18	1.86	1.45	1.14	73.51
19	1.92	1.41	1.08	73.55
20	1.98	1.36	1.02	73.61

Figura 34: Representação da situação investigativa do problema 4 com o *software Cabri-Géomètre*.

A escolha de Menk (2005) por estes contextos reforçam a eficácia do *software* para apreciar com mais clareza e profundidade os conceitos e as propriedades geométricas intrínsecas nos problemas. A autora destaca que os estudantes envolvidos na experiência puderam vivenciar situações significativas para aprendizagem matemática. Isto porque os temas trabalhados, além de serem contextualizados – o que possibilita uma maior motivação para a aprendizagem – privilegiaram os aspectos das simulações e visualizações gráficas dinâmicas. Os alunos puderam experimentar algumas características notáveis das investigações matemáticas oriundas das práticas exploratórias em ambientes informatizados, tais como a formulação de conjecturas, busca por padrões e regularidades, ensaios, validações e refutações, aspectos estes que não são frequentemente vivenciados nas aulas mais tradicionais do Cálculo. Além de enfatizar as vantagens decorrentes do compartilhamento de conhecimentos entre os alunos, a autora destaca ainda que estas experiências permitem uma visão privilegiada do docente. Ao trabalhar mais próximo aos grupos investigativos e orientar as suas ações, o professor passa a enxergar mais claramente a construção e o desenvolvimento dos seus raciocínios. Isto oportuniza verificar de perto as suas aprendizagens e evolução. Mais detalhes sobre esta experiência podem ser encontrados na pesquisa publicada pela autora.

Ao longo de aproximadamente vinte e quatro séculos de evolução, desde Eudoxo (século IV A. C.) até Riemann (século XIX), o Cálculo Diferencial e Integral mostrou-se sempre repleto de desafiadores problemas ao intelecto humano. Esta é uma das suas principais características e que continua gerando muita admiração àqueles que se dedicam ao seu estudo e divulgação. Desde os fascinantes trabalhos de Newton e Leibniz, quando os conhecimentos dispersos do Cálculo começaram ganhar uma ordenada estruturação, o seu ensino vem se aprimorando cada vez mais. As interpelações numéricas, algébricas e gráficas – intuitivas e formais – avançaram gradativamente, porém sempre com os recursos do lápis e do papel. Mas foi com o advento das calculadoras gráficas eletrônicas, e mais ainda, com a introdução dos computadores e dos programas matemáticos que o seu processo de ensino se modernizou. Esta visão global deve contribuir para que os professores passem a usufruir, na atualidade, dessas inovadoras ferramentas em suas aulas, valorizando a natureza dinâmica do Cálculo.

4.3. Alguns desafios e dificuldades inerentes a esta associação

O emprego das investigações nas aulas apresenta uma série de vantagens, e se forem acompanhadas dos recursos tecnológicos, podem potencializar ainda mais a aprendizagem, inclusive do ponto de vista motivacional. É certo, porém, que a sua utilização vem acompanhada de alguns desafios e dificuldades. Brunheira (2000) destaca que muitos professores sentem-se inseguros perante as atividades exploratórias, por isso evitam completamente o seu uso. Diante das tarefas mais abertas, sem a previsão e o domínio dos resultados, as incertezas compõe um elemento de alto risco que muitos preferem distanciar-se. Os caminhos investigativos, principalmente apoiados em análises computacionais, podem tomar rumos inesperados que fogem ao seu controle e conhecimento, fragilizando a sua posição. Neste sentido, cabe ao professor moderar a *estrutura* da tarefa e o seu grau de *desafio*, ao invés de recusá-la definitivamente. Diante desse cenário de incertezas e inexperiências, cabe avançar gradualmente com essas dimensões, elaborando investigações mais sucintas e com níveis mais reduzidos de dificuldade. Isso permite uma expansão segura e eficiente para alcançar estágios mais avançados de explorações por intermédio dos recursos computacionais. Além desse aspecto, cabe salientar que o distanciamento de muitos professores pelas abordagens dessa natureza, deve-se ao fato da carência desses modelos de ensino e da falta de contato com a tecnologia ao longo da sua própria formação. Por não terem sido formados nesses ambientes, eles são evitados posteriormente. É por isso que os cursos de formação de professores devem criar condições efetivas, inclusive curriculares, para que o uso das ferramentas tecnológicas, em significativas tarefas, passe a ser circunstância habitual na relação de ensino e aprendizagem (Bairral, 2005; Kenski, 2003). Os docentes podem adequar estes recursos às suas práticas de ensino para que os seus os alunos (futuros professores) possam incorporá-la a posteriori.

Nesta mesma linha de pensamento, Borba & Penteado (2001) tecem considerações acerca dos caminhos trilhados pelos professores nas chamadas "zonas de conforto" e "zona de risco" ao trabalhar com investigações matemáticas apoiadas nos recursos tecnológicos. A "zona de conforto" seria o caminho de ensino de "pouca movimentação", onde o professor teria um maior controle sobre o objeto de estudo, onde "(...) quase tudo é conhecido, previsível e controlável" (p. 56). Aspectos muito próximos das exposições tradicionais. Ainda que alguns professores demonstrem certa insatisfação por este caminho, eles evitam tomar direções que os conduzam, e também os alunos, a um "território desconhecido" que seria a "zona de risco", onde as incertezas e imprevisibilidades poderiam advir. Como um dos aspectos relacionados à "zona de risco", os autores destacam que a perda de controle no domínio do objeto de estudo poderia originar-se em virtude das dúvidas, das questões colocadas e da diversidade de estratégias decorridas das ações dos alunos na abordagem informatizada das investigações. Novas disposições e situações surgem nas simulações computacionais, no "apertar da tecla" ou "mexer do *mouse*", além de perguntas imprevisíveis. Todas estas novas conjunturas requerem, às vezes, maiores tempos para análise e compreensão. Muitas dessas circunstâncias inesperadas necessitam de explorações mais cuidadosas e acuradas, inclusive valendo-se do auxílio de outros colegas professores mais experientes nos domínios tecnológicos ou no uso do *software*. Ao perceberem todas estas dimensões de risco, muitos professores então desistem das explorações matemáticas apoiadas nos recursos tecnológicos. Outros, porém, avançam nesta área de incertezas com determinação e flexibilidade. Procuram mudar a rotina e os processos do ensino e aprendizagem, valendo-se das potencialidades que a tecnologia pode oferecer, inclusive para aprimorar a sua própria didática. As possíveis dificuldades e desafios impostos no quadro das imprevisibilidades das investigações matemáticas, em ambientes informatizados, servem como potenciais elementos para o desenvolvimento de todos os atores envolvidos neste cenário, até mesmo para o enriquecimento das circunstâncias de ensino e aprendizagem.

> "[...] ao caminhar em direção à zona de risco, o professor pode usufruir o potencial que a tecnologia informática tem a oferecer para aperfeiçoar sua prática profissional. Aspectos como incerteza e imprevisibilidade, geradas num ambiente informatizado, podem ser vistos como possibilidades para desenvolvimento: desenvolvimento do aluno, desenvolvimento do professor, desenvolvimento das situações de ensino e aprendizagem". (Borba & Penteado, 2001, p. 66)

Também encontramos na literatura (e. g., Bianchini & Santos, 2002; Melo, 2002) algumas reflexões em torno das dificuldades preliminares observadas relativamente a inexperiência dos alunos no manuseio do *software* utilizado para as investigações matemáticas. Os embaraços iniciais para a familiarização dos diversos recursos que os programas oferecem, e o entendimento mais preciso das suas variadas funções numéricas, algébricas e gráficas, constituem também desafios aos professores que pretendem diferenciar as suas aulas. Alguns obstáculos são observados nas primeiras atividades, quando os programas são apresentados aos alunos, porém a crescente autonomia vai se verificando ao longo da continuidade das experiências. Daí a necessidade de reservar algumas aulas para iniciá-los no uso das ferramentas computacionais, estes momentos constituem valiosos investimentos para o êxito dos trabalhos futuros. É muito frequente encontrar, nesse sentido, a introdução dos recursos do *software* em minicursos ou oficinas instrutivas. Neste estudo de caso, uma breve oficina instrutiva foi necessária para iniciar os alunos nos domínios do *Winplot* e *GeoGebra*, programas utilizados na parte empírica desta pesquisa. Importante salientar, neste aspecto, que os alunos iniciem a exploração dos programas com assuntos matemáticos mais elementares, já conhecidos e consolidados. Os trabalhos acontecem de forma mais segura e motivadora e ainda permitem que eles avancem progressivamente para os novos conhecimentos. Estes encontros preliminares constituem também excelentes momentos de aprendizagem, onde os alunos percebem a natureza dinâmica da Matemática, e do Cálculo especificamente, ao realizarem as suas primeiras manipulações gráficas computacionais. Compreendem, ainda, que as investigações matemáticas, através dos recursos informatizados, podem representar valiosas oportunidades para a ampliação dos seus conhecimentos.

Melo (2002), em seus estudos, relata algumas dificuldades iniciais para os alunos se adaptarem aos comandos do *software* (ele utilizou o *GeoGebra* em suas experiências). Ainda que esses prévios obstáculos se apresentassem, em termos de visualização e simulação, eles propiciaram entusiasmadas e úteis discussões que envolviam conceitos importantes sobre limites, derivadas e integrais. Esses aspectos, que são oriundos dos ambientes informatizados, segundo o autor, também auxiliam o docente na busca de novas formas de validar/refutar resultados e gerar conhecimentos. É perfeitamente natural e compreensível que essas dificuldades manifestem-se àqueles alunos que se deparam pela primeira vez ou não estão frequentemente envolvidos em tarefas dessa natureza. Com o passar do tempo, e com a aplicação de novos trabalhos, as habilidades básicas se estabelecem e eles conseguem avançar com mais dedicação e entusiasmo.

Alguns docentes, entrevendo possíveis dificuldades para introduzir as práticas exploratórias em ambientes informatizados, por exemplo, em laboratórios de informática, acabam por empregar os recursos computacionais nas suas aulas apenas em seções "ilustrativas", servindo-se do datashow. É nesse sentido que Morelatti (2008) pondera que apesar dos computadores estarem cada vez mais presente nos ambientes educacionais, isto não implica diretamente na melhora da qualidade na relação de ensino e aprendizagem. Todo o instrumental tecnológico à disposição serve apenas como uma espécie de "ornamento" que reforçam as práticas pedagógicas tradicionais do professor. Não há uma mudança significativa na sua postura didática. Ele apenas dá um aspecto de modernidade a sua atividade docente com o uso do computador, sem efetivamente envolver os alunos nos processos investigativos que derivam das práticas exploratórias. O computador é utilizado, nessa perspectiva, apenas como coadjuvante na transmissão dos conteúdos. Isto porque os alunos ainda continuam em atitudes passivas, somente que agora, talvez, “maravilhados” frente a um panorama de grandes possibilidades que a tecnologia oferece. Conforme Almeida (2000) a associação da tecnologia nos moldes “ilustrativos”, somente como recurso de projeções de algumas situações gráficas, apenas informatiza os métodos clássicos expositivos. Por não envolver mais ativamente os alunos na produção dos conhecimentos, esse método acaba por não desenvolver as competências e habildades fundamentais que as tarefas exploratórias pretendem, dentre elas a educação mais reflexiva, laborativa e dinâmica.

Segurado (1997), ao implementar as suas investigações matemáticas, observou que inicialmente os estudantes mostram-se mais inseguros e ansiosos por estarem participando mais ativamente dos trabalhos. Porém, com o transcorrer da experiência, ao propiciar orientações mais diretas e próximas dos grupos laborativos, eles já conseguiam envolver-se mais com as tarefas, inclusive desenvolvendo expressões mais argumentativas nos raciocínios. Ao longo do seu estudo, a autora pôde verificar o progresso dos alunos que passaram a apresentar posições mais reflexivas na apresentação dos resultados. A autora está também de acordo que a postura de cada aluno vai progredindo com a evolução das tarefas. Concorda ainda que estas preferencialmente devem partir de estruturas mais fechadas e com reduzidos graus de dificuldade, até alcançarem sustentações mais abertas e desafiadoras. Neste estágio, por exemplo, os recusos tecnológicos poderiam ser introduzidos mais eficientemente em auxílio às investigações.

Por fim, ainda que algumas adversidades surjam nas práticas exploratórias conjugadas aos recursos tecnológicos, os relatos frequentemente acentuam a prevalência dos aspectos positivos sobre as transitórias e superáveis dificuldades. Cada vez mais se ampliam as certezas sobre os benefícios que as investigações trazem para as aulas. As experiências confirmam isso! Elas revelam algo bastante animador para qualquer professor: um aumento considerável no envolvimento e entusiasmo dos alunos pela Matemática.

Capítulo 5

Metodologia

> Cada indivíduo tem a sua prática. Todo professor, ao iniciar sua carreira, vai fazer na sala de aula, basicamente, o que ele viu alguém, que o impressionou, fazendo. E vai deixar de fazer algo que viu e não aprovou. Essa memória de experiências é impregnada de emocional, mas aí entra também o intuitivo – aqueles indivíduos que são considerados "o professor nato". Mas sem dúvida o racional, isto é, aquilo que se aprendeu nos cursos, incorpora-se à prática docente. E à medida que a vamos exercendo, a crítica sobre ela, mesclada com observações e reflexões teóricas, vai nos dando elementos para aprimorá-la. Essa nossa prática, por sua vez, vai novamente solicitar e alimentar teorizações que vão, por sua vez, refletir em sua modificação. O elo entre teoria e prática é o que chamamos pesquisa.
>
> D'Ambrósio, 1996 (p. 91)

O objetivo desta pesquisa é examinar, em forma de estudo de caso, como as tarefas exploratórias e investigativas – apoiadas nos recursos tecnológicos – impactam a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Ao aplicar sistematicamente tarefas com essas características no cotidiano das aulas pretende-se analisar as contribuições dessa prática ao associar-se com a metodologia clássica do ensino expositivo. Almeja-se também compreender como os alunos evoluem em face dessa forma diferenciada de explorar os conteúdos do Cálculo. É uma alternativa didática que se coloca para que eles possam perceber a disciplina de uma maneira distinta do seu formato tradicional. Isto em função das abordagens mais reflexivas e laborativas privilegiadas pela nova metodologia. Assim, por tratar-se de um trabalho qualitativo de caráter descritivo, proponho também contribuir com um novo olhar que possa ampliar a compreensão da modalidade experimental que lhes foi oportunizada.

Neste capítulo justifico as opções metodológicas que fundamentam a escolha pelo estudo de caso nessa pesquisa. A natureza qualitativa e descritiva do fenômeno educativo investigado pelo próprio professor da turma onde se dá a experiência, acompanhando detalhadamente o seu cotidiano, permite um nível de compreensão mais profundo em toda a sua complexidade. A diversificação das fontes de produção de dados e a possibilidade da convivência mais próxima e prolongada com os alunos, no contexto da investigação, sondando as suas dificuldades e progressos, são peculiaridades que vêm a favorecer e legitimar um estudo dessa natureza. Na sequência apresento os procedimentos que embasam a natureza da metodologia adotada, o contexto do estudo, a caracterização dos participantes, alguns aspectos da experiência, incluindo uma apresentação preliminar das tarefas exploratórias e investigativas aplicadas, e, finalmente, a recolha e o tratamento dos dados.

5.1. Opções metodológicas

A metodologia adotada neste estudo pauta-se nos preceitos da pesquisa qualitativa, alicerçada no paradigma interpretativo que se sustenta nas perspectivas circunstanciais da realidade. A diversidade das experiências e dos distintos comportamentos apresentados por todos os personagens nos ambientes educacionais, em particular na sala de aula, fomentam construções de significados que compõem os ricos cenários da relação de ensino e aprendizagem. Portanto, este modelo metodológico busca explorar e compreender um conjunto de conhecimentos que emergem de particulares contextos experimentais, além de aprofundar as explicações, sob determinados prismas, que abrangem o conjunto de atitudes dos seus participantes.

A pretensão de entender um fenômeno educativo no cotidiano onde este se desenvolve, de forma contínua e longeva, mostra-se adequada pela opção descritiva da metodologia. Esta escolha está de acordo com a visão de Bogdan e Biklen (1994) que apresentam como uma das características essenciais na pesquisa qualitativa, o contato *in loco* mais duradouro e próximo do investigador com o objeto de estudo para a aquisição dos dados. Também Goetz e LeCompte (1984) asseveram que o investigador possui excelentes oportunidades de interação com os sujeitos do estudo ao permanecer mais demoradamente no próprio ambiente natural da experiência. Este convívio permite compreender mais proficuamente todas as ocorrências e comportamentos que poderiam deixar de ser captados num contato inconstante e passageiro. No presente estudo de caso todos estes aspectos são ainda mais facilitados em função da minha permanente proximidade com os alunos ao longo de todo um semestre letivo como professor da turma.

A investigação qualitativa possui caracterizações bem singulares que valorizam fortemente os aspectos interpretativos e indutivos, baseados nas leituras particulares dos participantes e assentadas em relevantes teorias. É habitual encontrarmos na literatura propriedades intrínsecas desta modalidade de pesquisa que podem ser resumidas nos perfis abaixo (Bogdan & Biklen, 1994; Cohen & Manion, 1994; Stake, 2007; Yin, 1989).

1) a fonte direta dos dados é o ambiente natural, sendo o investigador o instrumento principal tanto na recolha como na análise dos dados;
2) os dados recolhidos são na sua essência descritivos, sendo ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas e o seu tratamento estatístico é muito complexo ou impossível;
3) o maior interesse do investigador está nos processos e não nos resultados;
4) a análise dos dados é, sobretudo, indutiva, não tendo o investigador como objetivo a confirmação de hipóteses colocadas previamente, mas antes a construção de abstrações com base na análise de dados particulares;
5) a preocupação central do investigador é com as perspectivas dos participantes.

Neste trabalho a investigação qualitativa mostra-se bastante adequada para sondar os potenciais da nova metodologia de ensino facultada aos alunos. A realização de uma experiência didática de caráter inovador, longe ainda das práticas educacionais vigentes, apresenta-se naturalmente apropriada para tal fim (Borasi, 1992; Shulman, 1986). As práticas exploratórias e investigativas no ensino superior, particularmente no ensino do Cálculo, vêm se ampliando, mas demandam ainda muitas investigações para a sua aprimoração e consolidação definitiva. A metodologia expositiva clássica é ainda dominante e sozinha tem se mostrado insuficiente para reverter (ou minimizar) o quadro negativo dos seus altos índices de reprovação. É então neste contexto que a inovação das práticas exploratórias e investigativas na disciplina vem colaborar para melhorar este cenário estatístico ao privilegiar aos alunos uma aprendizagem mais ativa e motivadora.

As tarefas exploratórias e investigativas foram realizadas em grupos no laboratório de informática da instituição com desdobramentos posteriores em sala de aula. Nesses ambientes os dados foram recolhidos pelo próprio professor investigador que recorreu aos instrumentos inerentes a um estudo de caso, tais como observações e registros, aplicação de questionários e entrevistas, além dos documentos elaborados pelos próprios grupos. Vale destacar o permanente contato do professor com os alunos numa frequência de três dias semanais em encontros de duas horas de duração cada. Este convívio permite um olhar mais atencioso do investigador sobre todas as ações empreendidas na pesquisa e as expectativas dos participantes (Goetz & LeCompte, 1984; Merriam, 1988).

Ao longo da aplicação de cada tarefa – e após o seu término – foi possível coletar os dados que são substancialmente descritivos e constituem os instrumentos fundamentais de análise, interpretação e confronto com estudos semelhantes e atuais. Nesta pesquisa, a importância dos processos sobrepõe-se aos produtos finais. Isso porque os singulares aspectos que promovem as ações dos pequenos grupos, debruçados na realização das tarefas, compõem os valiosos momentos de apreciação das construções dos significados, das motivações e das principais dificuldades/superações vivenciadas na experiência. A continuidade da aplicação das tarefas ao longo do semestre letivo permitiu vislumbrar e compreender com maior clareza a evolução dos estudantes, o nível de interesse e estímulo perante o novo modelo didático que lhes foi oportunizado.

O estudo de caso aqui presente parte de um olhar particular, construído sobre dados específicos e relacionados entre si. É nesse cenário que busco, numa visão pluralista e indutiva, dar um amplo sentido a temática em destaque. Sem hipóteses preconcebidas, essa pesquisa contribui com um novo olhar, que deve enriquecer ainda mais essa área de conhecimento da educação. Num tipo de estudo como este, com perspectivas interpretativas, não se enseja a generalização dos resultados a outros contextos de ensino. Apesar dessa característica, e de algumas objeções a estudos desse porte, as investigações no campo das Ciências da Educação vêm colaborando proficuamente com as principais transformações nos cenários educacionais. A complexidade e a variedade das conjunturas nesses ambientes, sejam os fatores humanos, as concepções e os propósitos, dentre outros, impossibilitam a caracterização de leis universais ou proposições demonstráveis (Ponte, 2006). É exatamente por este aspecto que o presente trabalho intenciona engendrar conhecimentos, que brotam de contextos específicos, para fomentarem novos cenários teóricos investigativos na relação de ensino e aprendizagem da Matemática e, particularmente, do Cálculo no ensino superior.

As entrevistas e os questionários aplicados no final de cada sessão experimental permitem explorar e compreender com mais detalhe o ponto de vista dos participantes, o significado que eles atribuem a experiência vivenciada em todos os seus aspectos. A partir das suas respostas, novas perguntas são originadas e oportunizam identificar possíveis aperfeiçoamentos nos processos e nas ideias que constituem todo o projeto. É nesse sentido que a opção pelo estudo de caso como modelo investigativo enquadra-se neste trabalho de natureza empírica. Apesar dessa pesquisa não propor a universalização dos seus resultados, ela lança um novo olhar sobre modernos episódios experimentais que devem ampliar ainda mais os horizontes sobre as tarefas exploratórias apoiadas em recursos tecnológicos. O acúmulo de experiências que venham problematizar os modelos pedagógicos deve fertilizar ainda mais este campo, contribuindo e engrandecendo os debates sobre as variadas concepções teóricas existentes (Yin, 1989). É assim que a presente investigação, pautada numa abordagem qualitativa com panoramas interpretativos, deve fomentar ainda mais as discussões no ambiente educativo, estendendo novas perspectivas investigativas.

5.2. O contexto do estudo

A preparação da turma para um tipo de pesquisa como esta, que envolve um estudo de caso em longo prazo (um semestre letivo!), deve estar permanentemente cercada de atenções e cuidados. Foi com essa postura que iniciei uma série de comunicações aos alunos, desde a primeira semana de aulas, informando-os detalhadamente sobre a natureza das ações que empreenderíamos. Ao tomar conhecimento do ineditismo das tarefas exploratórias e investigativas em suas vivências estudantis, conversamos sobre a importância da inserção destas para o ensino e a aprendizagem da Matemática, e particularmente do Cálculo. Destaquei as suas principais características e os convidei a participar de todas as atividades que realizaríamos. Um termo circunstanciado de participação (anexo 15) foi entregue a cada aluno para que este avaliasse a possibilidade de sua colaboração. Após as explicações pormenorizadas dos objetivos da pesquisa, destaquei que todas as identidades registradas nos questionários e entrevistas ficariam preservadas em anonimato, fazendo-se o uso de pseudônimos. Assinalei ainda que as informações prestadas não constituiriam vínculo com quaisquer tipos de notas ou conceitos dos participantes, mas que serviriam para compreender, no âmbito da pesquisa, a evolução deles a partir da estratégia didática oportunizada. Após os esclarecimentos prestados, todos os alunos concordaram em participar da experiência. Houve o consentimento da classe de que todas as informações obtidas poderiam ser utilizadas e divulgadas, cientes que tais fatos não procederiam em prejuízo de ninguém e nem estariam em desacordo com os princípios éticos, mas em consonância das necessidades do estudo. Assim, busquei sempre preservar, durante todas as fases da investigação, a regra do anonimato, preocupando-me sempre para que a divulgação das informações não pudessem idenficar algum aluno. Todos os pressupostos legais que devem nortear qualquer tipo de estudo no âmbito educacional, tais como a voluntariedade, a preservação da identidade, o conhecimento prévio, a transparência em todas as fases da investigação, dentre outros importantes fatores, foram plenamente atendidos pelo pesquisador (André, 2008; Bravo, 1991; Gomes, 2007).

Os alunos que participaram desta pesquisa vieram da disciplina de Introdução ao Cálculo, matéria que estuda tópicos elementares, tais como conjuntos, funções, logaritmos, trigonometria, dentre outros. Ainda na primeira semana de aulas, tomei conhecimento da inexperiência deles com os programas matemáticos computacionais. Com isso, uma das minhas primeiras decisões foi iniciá-los nos domínios do *Winplot* e *GeoGebra*, programas que seriam utilizados na realização das tarefas. Adentramos então o laboratório de informática onde os alunos, dispostos em pequenos grupos, passaram a explorar todos os seus recursos básicos. As aulas da disciplina ocorriam no turno vespertino e as oficinas instrutivas dos programas aconteciam no matutino. Ao todo realizamos quatro encontros num espaço de duas semanas. A programação consta na tabela 4 e as atividades desenvolvidas podem ser vistas nos anexos de 1 ao 4.

Tabela 4. Cronograma das oficinas de exploração do *software*

Software	Atividades desenvolvidas	Data
GeoGebra	1° Encontro: • Aspectos gerais do menu do programa. • Exploração das funções geométricas: pontos, segmentos, retas, polígonos dentre outros. 2° Encontro: • Aspectos dinâmicos do programa. • Função do 1° grau e algumas propriedades.	19/01/2015 das 8h às 10h no laboratório de informática. 23/01/2015 das 8h às 10h no laboratório de informática.
Winplot	3° Encontro: • Aspectos gerais do menu do programa. • Funções do 1° e 2° graus e algumas propriedades. • Translações com animações. 4° Encontro: • Explorando as animações do programa. • Funções modulares, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.	26/01/2015 das 8h às 10h no laboratório de informática. 30/01/2015 das 8h às 10h no laboratório de informática.

Para a realização das oficinas instrutivas foi proposta uma forma mais dinâmica e independente para familiarizar os alunos nas funções básicas dos programas. Eles deveriam resolver livremente as atividades descritas no roteiro com base nos conhecimentos adquiridos anteriormente na disciplina de Introdução ao Cálculo. Dispostos em pequenos grupos, eles remexeriam e descobririam as potencialidades oferecidas por estas tecnologias. As oficinas de iniciação representaram as primeiras experiências desses alunos no manuseio de programas matemáticos para resolver problemas e explorar dinamicamente as suas soluções. Todos os exercícios apresentados foram resolvidos no período proposto e ao final de cada encontro, um problema mais desafiador era deixado para eles trabalharem em casa. Estes encontros foram bem interessantes e começaram a despertar o entusiasmo da turma para as tarefas exploratórias e investigativas que viriam mais adiante. Estas serão detalhadas mais à frente na seção "A experiência".

Em termos de avaliação de conhecimento na disciplina, ficou acordado com a classe que as atividades exploratórias a serem realizadas em grupo no laboratório valeriam 30% dos pontos da unidade; um teste individual recobrando os assuntos abordados nestes trabalhos contariam 20% e os 50% restantes corresponderiam a uma avaliação, também individual, com os assuntos integrais da unidade. Apesar da turma ter aceitado participar de todas as atividades e fases da pesquisa, dois grupos se voluntariaram para uma observação mais criteriosa do ponto de vista das gravações e entrevistas que seriam realizadas. Ao final de cada encontro no laboratório, todos os alunos da turma responderiam aos questionários da pesquisa, porém os dois grupos selecionados seriam entrevistados. Como investigador tive sempre a preocupação de registrar, através de gravações de áudios, os episódios que mais se destacaram nesses momentos. Todos os registros seriam de fundamental importância para o entendimento mais profundo da experiência.

5.3. Os participantes

Os participantes deste estudo compõem uma turma de 36 alunos, sendo 26 novatos e 10 que frequentavam pela segunda vez a matéria. Todos já cursaram a disciplina anterior de Introdução ao Cálculo e foram aprovados. Isso, de alguma forma, nivela, teoricamente, o conhecimento da classe. Não houve um critério específico firmado previamente para selecioná-los para esta pesquisa, pois todos se mostraram interessados em participar das investigações. A impossibilidade de acompanhar individualmente as interações e os processos de raciocínio de cada um deles motivou a formação dos pequenos grupos de trabalho. Foram então formadas 12 equipes com 3 elementos cada uma para a realização das tarefas. Ainda assim, a observação detalhada de todos os grupos tornara-se inviável, mesmo equipado com os recursos tecnólogicos necessários. Perante isso, solicitei que dois grupos se voluntariassem. Eles participariam mais ativamente da pesquisa, do ponto de vista das entrevistas e das gravações.

A literatura menciona o fator da flexibilidade do docente ao referir-se sobre os critérios de composição dos grupos (Curcio & Artzt, 1998). Aspectos motivacionais, de afinidade e compromisso, quando os alunos já se conhecem, acabam por viabilizar, dentre eles, a própria constituição das equipes de trabalho. As recomendações da NCTM (1994) e da APM (1998a) preconizam também o trabalho em grupo como uma excelente forma de promover a interação entre os alunos e favorecer a comunicação instrutiva para a aprendizagem matemática. Além desses aspectos, figuram também de forma bastante comum, nos estudos sobre a natureza dos trabalhos exploratórios e investigativos, por exemplo, em Brunheira (2000) e Tudella et al. (1999), a organização dos alunos em pequenos grupos. Neste sentido, preferi que eles formassem voluntariamente as equipes e me encaminhassem a lista com os nomes, apenas ressaltando a importância da regularidade dos integrantes na execução dos trabalhos. Também encontramos em outras experiências arranjos e circunstâncias outras onde os grupos são constituídos por um número maior de alunos. Porém, o controle sobre a participação efetiva de cada membro, nas discussões e elaborações dos trabalhos, torna-se mais complexa. Assim, foi oportuno conversar com a turma sobre a importância dos trabalhos em grupo, destacando as suas vantagens e desvantagens. Sobressaíram, nesse sentido, muitas falas apontando os proveitos dessa forma de organização: “o que um colega não sabe, outro pode auxiliar”; “as dúvidas que surgem são discutidas no grupo e as trocas de informações favorecem a aprendizagem”; “as diferentes formas de enxergar e resolver os exercícios e problemas ensejam novas descobertas”; “fixamos uma aprendizagem quando temos a oportunidade de explicar ao colega que não entendeu bem”, dentre outras. Porém, foi muito importante realçar nesta conversa franca a responsabilidade de cada membro para a participação ativa nas ações que seriam empreendidas. Destaquei também que apesar deles trabalharem em grupo e granjearem uma nota parcial nas tarefas exploratórias, eles também seriam avaliados individualmente sobre a produção do grupo. Esta apreciação teria a finalidade de verificar a participação legítima de cada um na elaboração dos resultados, compondo parte da nota conceitual da unidade letiva.

Não é intenção deste estudo discutir quantitativamente o desempenho individual dos alunos, e nem dos grupos de trabalho, mas realizar uma síntese qualitativa sobre a proposta do ensino exploratório com o suporte da tecnologia. A elaboração e aplicação das avaliações mensuráveis podem não exprimir verdadeiramente as expectativas, podendo, inclusive, desvirtuá-las. O que busco é a percepção de como este modelo pedagógico pode realmente vir a contribuir com a melhoria do ensino e da aprendizagem do Cálculo. Através do olhar mais atento aos grupos em ação nas atividades investigativas, as entrevistas realizadas e os questionários aplicados, será possível assimilar a importância da metodologia adotada. Em suma, procuro compreender como eles evoluem a uma aplicação sistematizada de tarefas com abordagens exploratórias e investigativas; como utilizam os recursos tecnológicos ao longo da frequência na disciplina e as principais dificuldades enfrentadas na realização destas tarefas. A interação, a proximidade e a constância do professor com os alunos em sala de aula, inclusive em prosas informais, torna possível sondar com mais detalhe o que eles pensam a respeito das tarefas, ampliando a compreensão almejada.

É importante frizar que os alunos da turma ainda não haviam trabalhado com tarefas exploratórias de investigação, com suporte na tecnologia, até ao presente estudo. Durante a conversa que tivemos na primeira semana de aulas, ficou evidenciado que as suas experiências em matemática restringiam-se majoritariamente à resolução de exercícios. Neste sentido, esta pesquisa representou uma primeira oportunidade para introduzir esta modalidade experimental na vivência escolar/acadêmica deles. Foi possível manter, ao longo de todo o desenvolvimento desta pesquisa, um ótimo relacionamento com a classe. Todos se mostraram sempre interessados e cordiais, favorecendo um agradável ambiente de trabalho.

5.4. A experiência

Nas minhas experiências didáticas como professor de Cálculo, sempre que houvesse a possibilidade de utilizar os recursos tecnológicos para melhorar a compreensão da classe sobre determinados assuntos da disciplina, isso era feito. A oportunidade de apresentar modelos dinâmicos computacionais despertava o interesse dos alunos pela matéria, favorecia a abordagem e a compreensão de alguns tópicos além de estimular o uso da tecnologia para a aprendizagem.

As salas de aula do Centro de Formação de Professores da UFRB são todas equipadas com projetores multimídia, porém o único laboratório de informática da instituição – que também é equipado com projetor – é bastante disputado pelos demais cursos. Esta estrutura facilita as projeções em sala, mas dificulta a realização de atividades sistemáticas no laboratório. Em função disso, sempre surgiam experiências gratificantes em classe que me estimulavam a investigar, em futuras oportunidades, a aprendizagem dos alunos em tarefas exploratórias auxiliadas pela tecnologia.

Nesta experiência várias tarefas exploratórias e investigativas foram realizadas ao longo do semestre letivo, mas apenas quatro foram escolhidas para o estudo mais minucioso. Algumas atividades por similitude de tema não iriam impactar novas e substanciais compreensões neste trabalho e por isso não foram acrescentadas. As tarefas foram inseridas seguindo a programação curricular estabelecida para a disciplina. Nesse sentido, busquei sempre conciliar os tópicos em estudo com a possibilidade de abordar atraentes problemas, todos em contextos que pudessem despertar o senso investigativo numa motivadora interação com a tecnologia. A seguir descreverei as tarefas que foram aplicadas e escolhidas para análise.

Tarefa 1: Aplicação de limites no cálculo de áreas (anexo 5). A finalidade essencial desta tarefa é antecipar para os alunos uma aplicação muito importante da teoria dos limites. Habitualmente o cálculo de áreas de regiões planas limitadas por curvas é visto na etapa final do curso, quando se introduz o conceito de integral definido. Os limites foram concebidos e aprimorados desde as aplicações práticas de Eudoxo na Grécia antiga até aos trabalhos formais de Cauchy na Europa moderna, num lapso de aproximadamente vinte e dois séculos. Os alunos sentem-se mais motivados para o estudo dos limites quando vislumbram contextos históricos e possibilidades efetivas de aplicar os conhecimentos em situações mais realísticas e atraentes. Geralmente os livros didáticos abordam este conteúdo de maneira muito formal, com ênfase nas técnicas operatórias que visam meramente a sua simplificação. Sem uma finalidade mais estimulante para explorar o assunto – senão dizer que ele será útil na compreensão dos próximos (derivadas e integrais) – o puro aprendizado das suas técnicas tende a tornar as aulas mais enfadonhas nesta fase. Na antecipação da aplicação, além de gerarmos um maior incentivo para o seu aprendizado, ganhamos um tempo extra na época de explorar as integrais. Também é possível mostrar aos alunos o aspecto evolutivo da Matemática no sentido de resolver problemas antigos com técnicas mais sofisticadas, ao vislumbrarmos o Teorema Fundamental do Cálculo. No caso especial desta tarefa que foi aplicada ao longo do estudo dos limites, os alunos passaram a investigar, com o auxílio da tecnologia, o valor da área de uma região plana limitada por uma função polinomial do terceiro grau. A natureza exploratória desta tarefa consiste basicamente em conjecturar o valor da área através do *software* e posteriormente proceder a sua demonstração formal através da fórmula da soma de Riemann. Um aspecto bastante interessante que surge na atividade é a pesquisa que deve ser "obrigatoriamente" feita sobre a fórmula da soma dos cubos dos n primeiros números naturais. Esta é imprescindível para simplicar o limite envolvido no problema e concluir a prova com êxito.

Tarefa 2: Áreas de regiões delimitadas por retas tangentes (anexo 6). Esta tarefa explora o conceito das retas tangentes no contexto do cálculo de áreas de triângulos. Alguns lugares geométricos apresentam características e aplicações interessantes e que tomam contornos investigativos. As tangentes traçadas nas hipérboles de equações $y = (a/x), a \in \mathbb{R}^*$, determinam, com os eixos ox e oy, triângulos cujas áreas possuem sempre um mesmo valor, independente do ponto de tangência. Esta tarefa visa colocar os alunos diante de uma notável situação exploratória, onde eles desempenham verdadeiros papéis de investigadores matemáticos, lançando suposições e realizando provas algébricas. A possibilidade que o *software* oferece da visualização dinâmica das tangentes, deslizando sobre as curvas e gerando uma infinidade de triângulos distintos, todos com a mesma área, não deixa dúvida da veracidade do resultado. Porém, o maior desafio é demonstrar algebricamente a conjectura principal (que não é complexa!). Esta tarefa insere-se após os alunos terem trabalhado a interpretação gráfica da derivada e aprenderem a fórmula geral da reta tangente. A oportunidade de aplicar os conhecimentos numa atividade investigativa e contextualizada, com o auxílio dos recursos computacionais, deve favorecer momentos com aprendizagens mais atraentes e significativas.

Tarefa 3: Projetando uma montanha-russa (anexo 7). Esta tarefa consta como um projeto no livro de Stewart (2013). O objetivo é aplicar os conhecimentos teóricos sobre continuidade e diferenciabilidade para projetar uma primeira subida e descida de uma montanha-russa. Uma tarefa investigativa que permite aos alunos contemplarem a utilidade da Matemática em simulações práticas da engenharia. Além de explorar os conhecimentos citados, ela aborda diversos outros, tais como: retas tangentes, coeficientes angulares, funções quadráticas, sistemas de equações lineares, dentre outros. Ao "colar" duas curvas, o *software* permite observar, de forma dinâmica, se o ponto de contato gerou uma continuidade suave, isto é, se a função é diferenciável neste ponto. A inserção curricular desta tarefa é realizada após os alunos explorarem a interpretação gráfica da derivada e suas regras operacionais. É necessário que conheçam o teorema que relaciona diferenciabilidade vs continuidade e esta tarefa serve também a este propósito. Esta é uma atividade exploratória que permite que os alunos trabalhem no contexto da Matemática aplicada. É um cenário que deve incentivar muitas reflexões e conjecturas, viabilizadas pelos recursos computacionais.

Tarefa 4: O problema da velocidade instantânea (anexo 8). Esta tarefa exploratória visa construir o conceito de velocidade instantânea. Esta é uma importante aplicação da derivada no campo da Física. Partindo de uma situação particular e abordada historicamente pelo físico Galileu Galilei, pretende-se chegar à sua definição clássica através da teoria dos limites. É uma atividade investigativa no horizonte dos problemas de taxa de variação e que permite, inclusive, uma abordagem interdisciplinar. A possibilidade de visualizar graficamente "o deslizar das secantes que tendem a posição de tangência" enseja uma melhor compreensão da transição conceitual da velocidade média (taxa média de variação) para a velocidade instantânea (taxa instantânea de variação). Esta tarefa, além de evidenciar uma importante aplicação dos limites, tem estreita relação com a interpretação gráfica da derivada. Exatamente por isso pode até ampliar e consolidar a compreensão deste assunto. Esta experiência é uma alternativa ao método exclusivamente expositivo e busca uma motivação maior para a aprendizagem dos alunos.

5.5. A recolha dos dados

Os processos cognitivos utilizados pelos alunos nas tarefas exploratórias tais como as argumentações e as estratégias, além dos aspectos comportamentais que demonstram entusiasmo e produtividade constituem os mais importantes interesses desse estudo. Para dar um genuíno significado aos diversos cenários desta experiência, certamente que foi necessário recolher uma série de informações com os mais variados instrumentos que dispõe a pesquisa educacional. Levando-se em conta o panorama qualitativo assumido nesta investigação e o amplo conjunto de percepções, tanto dos participantes quanto do professor/investigador, as distintas ferramentas utilizadas na recolha das informações devem privilegiar o confronto das variadas perspectivas do fenômeno em destaque (Bogdan & Biklen, 1994). Esta triangulação de dados, expressão comumente utilizada na literatura, deve possibilitar uma análise mais profunda dos elementos constituídos, enriquecendo o significado da natureza exploratória no ensino do Cálculo. A recolha dos dados ocorreu ao longo de todo o segundo semestre letivo do ano de 2014, mais intensamente nos momentos de execução das tarefas investigativas, onde se destacaram as seguintes técnicas qualitativas: observação participativa, aplicação de questionários, realização de entrevistas e documentos que descrevo a seguir.

Observação participativa

O olhar atento e detalhista do investigador sobre as variadas ocorrências e posturas apresentadas pelos participantes da experiência constitui uma das formas mais eficientes de descrição do fenômeno em estudo. Conforme Gall, Borg e Gall (1996) é através da observação que se podem captar as nuances comportamentais que favorecem uma maior descrição das situações, complementando valorosamente as informações recolhidas por outras fontes.

Essencialmente naturalista, a observação *in loco* permite captar e registrar dinamicamente os episódios que se sucedem no exato momento em que eles ocorrem, fato este que geralmente não é acessível por outros meios. É possível encontrar na literatura níveis diferenciados de participação do investigador no decorrer das observações. Segundo Ludke e André (1986) as características da pesquisa e dos participantes determinarão o grau de interação do observador com estes. O pesquisador pode estar inserido na população experimental como ativo participante das atividades ou como passivo expectador. Uma linha sutil interliga esses extremos dimensionais de tal forma que se torna complexa uma caracterização absoluta do nível de convívio, inclusive por fatores singulares da subjetividade humana. Além do mais, a postura observativa pode alterar a depender das etapas investigativas. Em alguns contextos, a simples presença do investigador, ainda que de forma discreta e silenciosa, pode ocasionar notáveis interferências no fenômeno de interesse.

No presente estudo, a minha participação como professor da disciplina e investigador do fenômeno permitiu uma observação mais próxima e ativa dos grupos de trabalho, favorecendo uma maior compreensão dos processos cognitivos e comportamentais apresentados. Perceber as sensações, dificuldades e raciocínios no exato momento em que os alunos interagem com a tecnologia na busca de solução para os problemas privilegia a condição deste estudo. Apesar da literatura destacar o "efeito do observador" sobre as possíveis alterações comportamentais dos participantes, acrescentando um grau de dificuldade na captação do fenômeno na sua perfeita essência, a boa convivência do professor com a turma pode minimizar ou até anular esse efeito.

Durante as observações realizadas nos momentos de execução das tarefas laboratoriais mantive sempre um gravador ligado no bolso da camisa. Essa constância na gravação dos áudios permitiu uma maior eficiência nas minhas observações. Além da simultaneidade das gravações dos grupos de trabalho, captando os seus diálogos, eu pude catalogar as minhas impressões num nível de detalhe que poderiam ser perdidas ou esquecidas se fossem deixadas para posteriores anotações. O guião com as descrições sobre as observações das tarefas (anexo 9) mostrou-se bastante útil nesse sentido. À medida que eu transitava pela sala, visitando e orientando os grupos de trabalho, numa espécie de monólogo, eu assinalava pormenorizadamente os acontecimentos mais significativos. Esses registros permitiriam compreender melhor, a posteriori, a postura e o envolvimento de cada aluno e dos grupos perante as atividades realizadas. Para Bogdan e Biklen (1994), a extensão e o detalhe compilados das observações participativas facultam uma notória eficiência na pesquisa educacional. No final de cada sessão experimental, após a aplicação dos questionários e entrevistas, eu ainda anotava algumas reflexões de ordem geral sobre a tarefa proposta. Quais foram os maiores fatores de motivação (para mim e para os alunos)? Onde surgiram as principais dificuldades? Em que ponto se poderia melhorar para as tarefas seguintes? No que esta experiência didática se diferenciava das minhas aulas mais usuais e tradicionais? Qual foi minha impressão geral sobre o comportamento e o aprendizado dos alunos? Estas questões subjetivas seriam desenvolvidas e amadurecidas com o passar do tempo. A realização de novas tarefas permitiria um maior aprofundamento da análise que seria feita em momento oportuno, porém prevalecia um sentimento positivo, o ânimo dos alunos impulsionava-me a seguir adiante.

Aplicação de questionários

Ao longo dessa investigação foram elaborados e aplicados cinco questionários que podem ser vistos nos anexos de números 10 até 14. Eles foram aplicados no laboratório de informática ao final de cada seção empírica, quando eram reservados aproximadamente trinta minutos para o seu preenchimento. A opção dos alunos responderem em casa, dispondo de mais tempo e atenção, também foi ofertada. Esta alternativa foi seguida por muitos deles.

Os questionários tinham a finalidade essencial de conhecer individualmente a opinião dos alunos sobre os mais variados aspectos qualitativos proporcionados pela experiência exploratória de ensino. Os quatro primeiros versavam mais especificamente sobre as questões intrínsecas das tarefas e a respeito da vivência deles naquele modelo diferenciado de aula. Por exemplo: O tema em estudo foi compreendido através da tarefa realizada? Quais foram as maiores dificuldades encontradas? O computador auxiliou o entendimento do assunto? De que forma? Como foi trabalhar em grupo? Estas e outras perguntas destinavam compreender melhor aquele momento, objetivando responder as questões da pesquisa. O último questionário abordava reflexões mais amplas, relacionadas com a experiência como um todo. Indagações que buscavam captar o grau de motivação em trabalhar o Cálculo daquela forma no laboratório; se eles faziam (e como faziam) uso do *software* em momentos extraclasse; como o uso do computador impactou a aprendizagem dos conteúdos da disciplina; as principais dificuldades experimentadas e como foram superadas, enfim, uma visão geral acerca da experiência vivida.

Por tratar-se de um estudo qualitativo, optei por questões mais abertas nos questionátios de forma que os alunos tivessem maior liberdade para manifestar-se. As poucas perguntas objetivas vinham sempre acompanhadas de um "justifique" ou um "comente" a sua escolha. Cuidei de orientar que eles se expressassem de forma crítica, sem receios, realçando tanto os aspectos positivos ou negativos das experiências, inclusive propondo sugestões de melhoria. É bem provável que em situações como estas, por temerem algum tipo de represália ou perseguição por respostas mais "ácidas" ou duras, os alunos acabem por responder em conformidade com as expectativas do docente/investigador. Apesar de manter um ótimo relacionamento com a turma, ainda assim propus que os questionários fossem anônimos e que eles não precisariam se identicar. Essa precaução justifica a segurança e o aumento da confiança da turma para se exprimir livremente, propiciando maior credibilidade a esta ferramenta de pesquisa.

Realização de entrevistas

Uma das finalidades deste estudo é ampliar a compreensão acerca dos efeitos gerados na aprendizagem dos alunos através da aplicação sistemática de tarefas exploratórias e investigativas com o auxílio da tecnologia. Neste sentido, a diversificação das fontes de informações é imprescindível para atingir com maior clareza e profundidade tais propósitos. Deste modo, a realização de entrevistas vem a complementar efetivamente as observações realizadas.

As entrevistas permitem a complementação de informações e detalhes que eventualmente passam despercebidos nas observações. É uma forma bastante apropriada de apreciar o ponto de vista dos participantes, conforme as suas próprias descrições, ideias e linguagens. As literaturas clássicas costumam designá-las em estruturadas, semi-estruturadas e não estruturadas a depender do nível de controle a ser gerenciado pelo entrevistador, além de serem também realizadas individualmente ou em coletivos (Bogdan & Biklen, 1994; Denzin & Lincoln, 1994; Yin, 1989). Como mantive uma participação mais ativa nas observações, inclusive comunicando-me frequentemente com os grupos de trabalho, optei por um formato pouco estruturado na realização das entrevistas. Conforme Gall et al. (1996) o formato pouco estruturado nas pesquisas qualitativas permite uma maior interação com os sujeitos, de forma a penetrar e explorar mais a fundo as suas expectativas e concepções. Com esse pressuposto, realizei entrevistas semi-estruturadas em grupos e estimulei bastante o confronto de ideias visando, inclusive, que os alunos viessem a descobrir ou dar novos significados aos fatos ocorridos na execução das tarefas. A possibilidade interessante de um componente do grupo poder complementar a expressão do outro, desenvolvendo uma percepção, permite um estímulo maior para a fluência e desinibição comunicativas (Bogdan & Biklen, 1994; Bravo, 1991).

As entrevistas não foram todas realizadas após o término das tarefas exploratórias no laboratório. Pelo fato dos alunos responderem a um questionário ao final destas, seria prudente não esgotá-los, submetendo-os a um novo empenho. É natural imaginar que após as ações exploratórias, haveria certa fadiga mental inerente aos trabalhos investigativos matemáticos. Além do mais, o horário não era conveniente e os alunos poderiam responder rapidamente as questões apenas para "se verem livres" para compromissos posteriores. Neste sentido, um ou outro grupo foi convidado a realizar a entrevista em momento oportuno, após o período das aulas, onde teríamos as condições mais propícias para uma conversa mais produtiva.

As entrevistas foram realizadas preferencialmente no gabinete do professor, com cada grupo separadamente e duraram cerca de 30 minutos cada. Os alunos puderam se expressar com bastante liberdade e franqueza, possibilitando uma interação apreciável entre todos os presentes. Algumas questões mais gerais sobre a experiência investigativa foram previamente preparadas, mas o roteiro da atividade serviu eficientemente para orientar a interlocução. As perguntas foram sendo desenvolvidas a partir das respostas registradas nas tarefas. Busquei compreender os raciocínios, as estratégias, os debates e as dificuldades em cada etapa, inclusive no manejo do *software*. Procurei captar o envolvimento, a satisfação e a aprendizagem de cada componente na experiência oportunizada. Novas indagações eram formuladas a partir das respostas fornecidas, com a finalidade de melhor abarcar e compreender o fenômeno em estudo. As questões colocadas não priorizavam especificamente os acertos e os erros nas tarefas (apesar dos alunos inevitavelmente buscarem focalizar estes aspectos), mas procuravam reportar perspectivas mais amplas. Pretendi também assimilar a opinião a respeito da validade daquela metodologia; a motivação sobre as aulas com aquele formato, ao invés das aulas com formato mais clássico, recorrendo essencialmente a exposição do professor; as percepções sobre a forma exploratória e investigativa de abordar alguns temas matemáticos; sobre o recurso da tecnologia para auxiliar o estudo da matéria; a oportunidade de trabalhar em grupos, em suma, como aquela experiência influenciou o seu aprendizado.

Documentos

A análise de documentos constitui neste trabalho uma excelente fonte de informações que complementa proficuamente as observações, os questionários e as entrevistas. Ao longo da experiência foram gerados relatórios e avaliações escritas relativas às tarefas exploratórias e investigativas realizadas. Diferentemente das outras fontes que teve o pesquisador como protagonista na sua idealização e produção dos dados, estes foram diretamente originados pelos alunos. Nestes documentos ficaram registrados os procedimentos, os conhecimentos, os raciocínios e argumentos mobilizados na realização das tarefas. Com a finalidade de enriquecer a análise deste estudo, todas estas produções foram digitalizadas, corrigidas e posteriormente devolvidas.

A constituição de documentos escritos como fonte de dados na pesquisa educacional tem sido referenciada por muitos autores. Esta é uma forma comum, porém bastante preciosa de informação, que permite exames qualitativos mais profundos que contribuirão fortemente na formalização dos resultados (Bravo, 1991; Gomes, 2007; Ludke & André, 1986). Não são completos, pois evidentemente não registram as comunicações em grupo, os fatores emocionais, as interpretações procedentes das visualizações computacionais e outros elementos dinâmicos que são captados por outras fontes. Ainda assim, Bogdan e Biklen (1994) apontam os documentos escritos como elementos importantes e essenciais aos propósitos investigativos, principalmente na triangulação das informações, onde os fatos originados por outros instrumentos são confrontados com estes. Além desses aspectos, as resoluções apresentadas pelos alunos nas investigações serviram como um excelente roteiro para a condução das entrevistas.

Neste trabalho, os registros escritos procedentes das tarefas exploratórias e investigativas constituíram inestimáveis documentos que permitiram acrescentar complementos valiosos as outras informações compiladas. A tabela 5 resume as ferramentas de recolha de dados que foram utilizadas ao longo desta pesquisa e quais serviram para responder as três questões investigativas: Q_1 – Como evoluem os estudantes a uma aplicação sistematizada de tarefas exploratórias e investigativas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral? Q_2 – Como os alunos utilizam os recursos tecnológicos ao longo da frequência na disciplina? Q_3 – Que dificuldades enfrentam os alunos na realização das tarefas e na utilização do *software*?

Tabela 5. Ferramentas de recolha dos dados e sua relação com as questões investigativas

Ferramentas	Fontes	Técnica de registro	Questões de investigação
Observações	Professor	Gravações em áudio e anotações	Q_1, Q_2, Q_3
Questionários	Alunos (individual)	Questionários escritos	Q_2, Q_3
Entrevistas	Alunos (em grupo)	Gravações em áudio	Q_1, Q_2, Q_3
Documentos	Alunos (individual e em grupo)	Avaliações e relatórios escritos	Q_1, Q_3

5.6. A análise dos dados

Ao longo de toda a experiência que serviu de base para este estudo, uma série de informações foi recolhida dos alunos através dos mais diversos instrumentos. As observações participativas, as gravações dos grupos, os questionários aplicados e as entrevistas realizadas compõem o alicerce em que proponho fundamentar toda a análise descritiva dos dados. O labor que envolve o processamento descritivo de todas estas informações tem o propósito de melhor respaldar as respostas para as questões investigativas norteadoras desta pesquisa. Também é importante ressaltar a contribuição desse estudo com mais um olhar qualitativo na análise deste moderno tema com a finalidade de enriquecê-lo, ampliando, desta forma, o debate no campo da educação superior. Conforme Bogdan e Biklen (1994) todo este complexo exame "envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros" (p. 205).

Em função desta complexidade, é bastante comum localizarmos nos artigos especializados a sugestão para que os principais fatos de interesse do fenômeno em estudo já possam constituir, desde a sua recolha, um princípio de estruturação das ideias que fomentarão as respostas para as questões investigativas. E foi exatamente observando estas orientações que pude definir, desde o início do processo de recolha de dados, uma sistematização para este trabalho. Objetivamente eu buscava compreender de que forma a metodologia adotada poderia gerar uma melhoria na aprendizagem dos alunos e também nas suas condições motivacionais. De fato, ao substituir algumas aulas expositivas por investigações/explorações que deveriam construir conceitos e aplicar conhecimentos de uma maneira não tradicional, estas impactariam, de alguma forma, a passividade habitual dos estudantes. Com os olhos voltados para os objetivos do estudo e realizando análises preliminares nos dados recolhidos, pude vislumbrar algumas categorias (e subcategorias) para análise. Estas precisariam abarcar suficientemente o conjunto das indagações propostas na pesquisa. As categorias podem ser vistas na tabela 6.

Em Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) constam alguns referenciais pragmáticos e importantes que possibilitam a apreciação dos raciocínios dos alunos empenhados em atividades exploratórias. A procura de regularidades, os diálogos reflexivos, a formulação de conjecturas, a colocação de questões e as estratégias esboçadas, dentre outros elementos, foram permanentemente observados. Tais fatores devem ocorrer com relativo destaque na fluência dos trabalhos, ou pelo menos precisam ser estimulados, para que esta metodologia surta o efeito desejado. E, de fato, as tarefas foram preparadas com este propósito. As dificuldades encontradas, inclusive na manipulação do *software*, mereceram especial atenção na análise dos dados.

Tabela 6. Categorias e subcategorias propostas para análise dos dados

Categorias	Subcategorias
Aprendizagens	• Nos processos utilizados na realização das tarefas • No âmbito geral da disciplina de Cálculo
Utilização dos recursos tecnológicos	• Na realização das tarefas • Ao longo da disciplina de Cálculo
Dificuldades gerais	• Na realização das tarefas • Na utilização do *software*

A análise dos materiais recolhidos foi então gradativamente passando por um processamento que envolvia a seleção e categorização com vistas à fundamentação das conclusões. A busca por similaridades e relevâncias nos aspectos cognitivos e comportamentais, de uma forma geral, constituiu um importante critério norteador no processo de demarcação das informações. Nas gravações, nas entrevistas, nos questionários, enfim, em todos os registros catalogados buscou-se, sempre respeitando a contextualização, similitudes e também singularidades notáveis que pudessem respaldar algumas asserções. As classes apresentadas na tabela 6 foram sendo então aprimoradas à medida que as tarefas exploratórias avançavam e novas análises eram produzidas. A forma definitiva exibida acima somente foi possível depois da realização da última tarefa.

Ao fim dos trabalhos e de posse de todos os materiais para análise, optei por uma estrutura de apresentação que respeitava a ordem cronológica das atividades realizadas. Busquei contemplar todos os aspectos da experiência vivenciada, desde a concepção da tarefa e sua inserção curricular até as discussões finais. Habitualmente eu sempre conversava com alguns alunos ao final de cada aula, buscando extrair os seus sentimentos e percepções sobre esta nova forma de explorar o conhecimento. Além de cursarem Cálculo Diferencial e Integral, alguns ainda frequentavam outras disciplinas matemáticas e, inevitavelmente, comparações surgiam nesses bate papos, principalmente sobre as metodologias diferenciadas de ensino e o uso das tecnologias. Essas interlocuções certamente que vieram a aprimorar ainda mais esta persquisa e serão detalhadas mais adiante.

Para que o leitor pudesse ter uma noção mais exata das situações vivenciadas na experiência, fragmentos das tarefas realizadas, além de alguns trechos originais extraídos das entrevistas foram incluídos na redação dos resultados. As principais dificuldades encontradas e como foram superadas também constituem uma parte muito importante da análise. Os depoimentos dos alunos que trazem pontos de vistas interessantes sobre a relação de ensino e aprendizagem da Matemática também foram destacados. São reflexões que podem vir a melhorar o trabalho docente, pois acredito que estamos em contínuo estado de aprendizagem e aperfeiçoamento. Apenas para não tornar a escrita longa e reiterada, em certos exames evitou-se o acréscimo de excertos muitos semelhantes. A objetividade nesse aspecto não descaracteriza o tema principal em estudo e traduz mais diretamente as evidências.

Capítulo 6

As tarefas e a realização da experiência

> Não é de se estranhar que o rendimento esteja cada vez mais baixo, em todos os níveis. Os alunos não podem aguentar coisas obsoletas e inúteis, além de desinteressantes para muitos. Não se pode fazer todo aluno vibrar com a beleza da demonstração do Teorema de Pitágoras e outros fatos matemáticos importantes.
>
> D'Ambrósio, 2008 (p. 59)

As tarefas exploratórias e investigativas foram realizadas no laboratório de informática da instituição e cada uma teve um tempo total de 3 horas – 3 aulas de 60 minutos cada. O tempo destinado para cada uma delas foi pouco mais de 2 horas, pois havia um período reservado para o preenchimento dos questionários. Uma rotina procedimental configurava os trabalhos em suas etapas introdutória, de desenvolvimento e discussão final. Após a distribuição das tarefas, eu sempre destacava a importância da participação e da colaboração ativa de todos os membros dos grupos. Ressaltava ainda a necessidade de registro de todas as etapas da atividade, inclusive os detalhes captados computacionalmente com *prints* de telas. Alguns comentários gerais acerca dos problemas que eles defrontariam se faziam necessários às vezes. A regra era deixar os grupos trabalharem da forma mais autônoma possível, reservando-me apenas para as orientações imprescindíveis que estimulassem o bom andamento das atividades, evitando que alguns grupos "travassem" e desanimassem no seu prosseguimento. Na etapa de desenvolvimento eu costumava sempre caminhar pelo laboratório e sondar o andamento das ações nos grupos. Eventualmente era necessário encorajar a participação de um, esclarecer o pensamento de outro e motivar o confronto de ideias. Ao perceber algum ponto de dificuldade generalizada, algumas orientações coletivas se faziam necessárias com a finalidade de impulsionar o ritmo dos trabalhos. Apesar de perceber que alguns grupos não tomavam boas perspectivas na solução dos problemas, ainda assim deixava que eles caminhassem e reparassem por si próprios eventuais equívocos, essas experiências faziam parte do aprendizado e seriam úteis nas discussões finais. Ao chegar nesta etapa, estimulava sempre algumas equipes a partilharem os seus resultados com a finalidade de iniciar os debates que deveriam gerar uma melhor compreensão e aprofundamento dos conhecimentos trabalhados. Sem dúvida este é um excelente momento de aprendizagem, onde os colegas conhecem os raciocínios e as estratégias trilhadas pelos outros, os caminhos que se mostraram ou não viáveis, as curiosidades que brotaram das investigações, enfim, o momento de formalizar os conceitos e saberes que foram frutos das explorações. Para o docente este é um momento que se diferencia frontalmente da rotina expositiva da metodologia tradicional. Ele está ali como um moderador que de forma harmoniosa promove a manifestação das ideias; valoriza o esforço e a criatividade; sublinha os caminhos alternativos que serviram as investigações e os aprecia adequadamente; realiza intervenções instrutivas, em suma, proporciona um ambiente fértil para a valorização e a sedimentação do conhecimento.

Essa foi a rotina básica seguida nos momentos de realização dos trabalhos laboratoriais. A experiência descrita nesta pesquisa abarcou um conjunto total de aulas que mesclou momentos de exposições teóricas, resolução de exercícios e tarefas exploratórias e investigativas. Neste capítulo relatarei os aspectos mais gerais relativos à aplicação das tarefas, incluindo o enquadramento destas no programa da disciplina. Um exame preliminar da aprendizagem dos conceitos e das dificuldades gerais enfrentadas pelos alunos é realizado, sobretudo no uso das tecnologias. No próximo capítulo, que complementa densamente este, farei o relato detalhado dos episódios que mais se destacaram das tarefas aplicadas. Serão evidenciandos os principais diálogos e processos observados nas ações dos grupos, inclusive a análise das entrevistas e questionários respondidos.

6.1. Tarefa 1 – Aplicação de limites no cálculo de áreas

Nesta primeira tarefa realizada (anexo 5) pretendia-se que os alunos explorassem, com o uso do computador, o conceito de áreas de regiões curvas delimitadas por gráficos de funções contínuas, pondo em prática alguns aspectos teóricos vistos sobre limites. A ideia central é antecipar uma importante aplicação do Cálculo que utiliza esta teoria, com a finalidade de estimular os alunos a compreenderem uma utilidade do assunto que eles estavam a desenvolver. Algumas perspectivas históricas sobre o avanço do cálculo de áreas, desde os registros mais elementares de exaustão até a sofisticada fórmula de Riemann, foram “pinceladas” em aulas anteriores. Esta ação configurava-se como uma espécie de preparação para a tarefa que viria mais à frente. Esses aspectos históricos estão presentes na tarefa como elementos motivadores e também para enriquecer a aprendizagem do assunto. Por isso foi focalizado logo no início do roteiro como os polígonos mais simples eram utilizados para determinar a área dos mais complexos através da decomposição (figura 35). A cronologia histórica em destaque segue com ênfase nas técnicas engenhosas de Arquimedes de Siracusa que aprimorou o método de exaustão, atribuido a Eudoxo de Cnido, para avaliar áreas de regiões limitadas por curvas (figura 36).

A ideia do limite é então evidenciada, possibilitando que os alunos percebam a evolução dos métodos num exemplo onde a área de um círculo “A” é calculada através do limite da soma das áreas dos polígonos regulares inscritos “A_n” quando o número de lados tende para o infinito, em símbolos $A = \lim_{n\to\infty} A_n$. Os conceitos avançam até ao século XVII onde os alunos são informados que os maiores progressos neste assunto foram realizados independentemente por Newton e Leibniz. Através de um método geral que revertia o processo de derivação – que eles ainda estudariam – o valor da área era obtido mais facilmente. Esta descoberta marcava um momento importante na história da Matemática e muitos a designariam como o começo do Cálculo Diferencial e Integral. O método de exaustão, comentado brevemente em sala de aula no caso da parábola (figura 37), seria então utilizado como uma referência para os grupos determinarem a área da região delimitada pela cúbica $f(x) = 16x^3$ no intervalo $[0, 1]$. As consultas bibliográficas e pela internet foram permitidas, de tal forma que os alunos puderam acompanhar as estruturas que os livros traziam relativamente a este assunto.

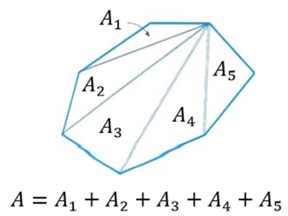


Figura 35: Heptágono decomposto em triângulos (figura 1 da tarefa).

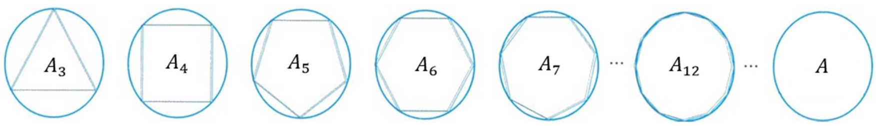


Figura 36: Polígonos regulares inscritos numa circunferência (figura 2 da tarefa).

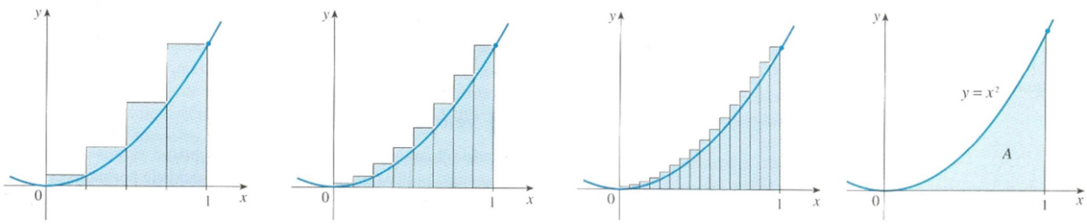


Figura 37: Exaustão por retângulos de uma região limitada por uma parábola (figura 3 da tarefa).

Na questão 1 *"Use no Winplot o comando "integrar f(x) dx" para determinar a soma das áreas dos retângulos e preencha a tabela abaixo..."* pretendia-se que os alunos explorassem o *software* apenas no sentido geométrico, isto é, usar esta função específica do programa para acrescentar retângulos sob a curva e aproximar o valor da área. Eles desconheciam o termo "integrar", pois ainda estavam no início do curso estudando a teoria dos limites e continuidade. Neste sentido, uma indicação do comando a ser utilizado no *software* era necessária, além de que o seu uso agora facilitaria a abordagem do assunto de integrais definidas no futuro. Uma série de indagações surge, desde a visualização precária da primeira tela que aparece com os retângulos sob a curva, até o significado dos valores exibidos em "ponto à esquerda", "ponto médio", "ponto à direita", "trapezoidal" e etc. (figura 38).

Foi solicitado que os grupos justificassem e registrassem todos os passos da resolução da tarefa, inclusive gravando as telas mais importantes e anexando ao roteiro na entrega. A função designada no problema "$f(x) = 16x^3$" iria estimular os alunos a futucarem mais o programa no sentido de aperfeiçoar as visualizações e apresentar um trabalho mais estético. De tal forma isso foi observado que a tela seguinte (figura 39) já foi apresentada com aprimorado aspecto, inclusive para melhorar a compreensão do grupo. As perguntas e os diálogos que surgem no desenvolvimento da tarefa é que enriquecem a aula, põem os estudantes em situações mais dinâmicas de aprendizado e mudam completamente o ambiente de ensino do Cálculo. Ainda com relação à primeira questão, por sinal mais direcionada, a tabela que lhe seguia foi preenchida corretamente pela maioria dos grupos. Isto foi verificado posteriormente no momento da correção. Desde que não se enganem na introdução dos dados e na manipulação dos comandos do programa, espera-se realmente que os alunos a preencham coerentemente.

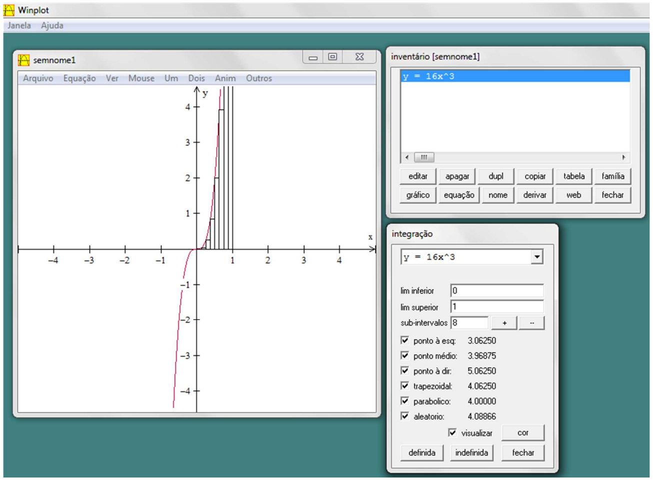


Figura 38: Tela registrada por um grupo na resolução da questão 1.

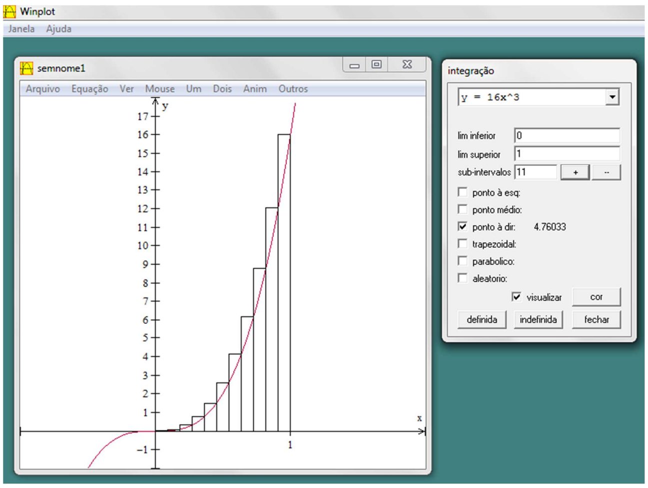


Figura 39: Tela melhorada pelo mesmo grupo na resolução da questão 1.

Na questão 2 *"Pelo comportamento percebido dos valores de* A_n *na tabela, intuitivamente você diria que o valor da área é quanto?"* também era esperado que a maioria dos grupos conjecturassem 4 como o valor da área. Alguns alunos inclusive acrescentaram tantos retângulos, indo muito além do que a tabela comportava, na ordem dos milhões, que todos os métodos descritos na tela "integração" do *software* apresentavam este valor, chegando ao extremo do programa travar em algumas situações. O fato dos grupos conjecturarem um único valor de área não descaracteriza o processo investigativo, isto pode inclusive reforçar a evidência de que este valor esteja correto e que realmente estejam num caminho coerente. Além do mais, a demonstração formal que será exigida na sequência confrontará este resultado. Cada tarefa tem as suas particularidades! Foi exatamente nesta etapa (na terceira questão) onde os alunos apresentaram as maiores dificuldades, como será destacado na seção mais à frente. Outro ponto que mereceu uma boa reflexão nas discussões finais, e que foi alvo de alguns interessantes comentários, foi o significado do pensamento intuitivo em Matemática, a utilidade de uma evidência computacional e a relevância dos rigores em uma demonstração, nesse aspecto relativizamos o nível do ensino (básico, graduação, pós-graduação e etc).

Na questão 3 *"Use agora a fórmula de Riemann $A = lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ para calcular o valor exato da área e verifique a sua resposta anterior"* é onde se encontra o maior desafio da atividade. De fato, é nesta etapa onde a complexidade é maior, onde os diálogos surgiram com maior intensidade e riqueza. Desde o entendimento da simbologia do somatório (1) – pouco utilizada até aquele momento no curso – até à interpretação geométrica das parcelas. Tudo era relativamente novo e suscitava boas discussões na construção.

$$lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = lim_{n\to\infty} f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n \qquad (1)$$

Ao procederem o desenvolvimento da fórmula acima, os alunos se depararam com um limite que envolvia o somatório $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$, algo novo que eles não tinham ainda experiência de como tratar. Em todas as situações vivenciadas em sala de aula eles estavam habituados a trabalhar limites de funções cujas expressões eram finitas. Daí a previsão de liberar as consultas bibliográficas e pela internet, pois oferecer "de bandeja" no roteiro o valor da expressão $[(n^2 + n)/2]^2$, que resumia o somatório, não ensejava os processos exploratórios e investigativos. Eles deviam sentir a necessidade e pesquisar! Alguns alunos perceberam no livro texto uma fórmula semelhante para o caso da parábola, mas por este não trazer a fórmula da cúbica, foram pesquisar na biblioteca algum livro de Álgebra que tratasse do assunto. Outros partiram para efetuar a busca pela internet na tentativa de encontrar a expressão desejada. De fato, foi um momento singular e bastante produtivo que se diferenciou da rotina que estamos acostumados a observar nas aulas de Cálculo.

Enquadramento da tarefa e aprendizagem dos conceitos

Como fruto das discussões que aprofundaram as diversas questões relativas ao ensino do Cálculo, no movimento que ficou conhecido como *Calculus Reform* em meados dos anos 80 nos Estados Unidos, prevaleceu a orientação que buscava conjugar os aspectos numéricos, geométricos e analíticos na abordagem dos conteúdos da disciplina. Esse esforço visava o enfrentamento dos sérios problemas que gravitavam em torno do ensino da matéria na época — e que continuam nos tempos atuais — tais como os altos índices de reprovação, as deficiências de aprendizagem e a necessidade de contextualização do conhecimento, como já foi dito em capítulo anterior. Dentre os princípios fundamentais que foram sugeridos para enriquecer o ensino e aprendizagem da disciplina destacava-se o incentivo ao uso da tecnologia como um auxílio precioso à tríade citada. Tais abordagens aliadas aos objetivos didáticos que almejam as tarefas exploratórias, quando alicerçadas em relevantes problemas contextualizados, devem fomentar um melhor ambiente de aprendizagem para os alunos. Tanto é assim que uma série de novas publicações do Cálculo, como já salientadas, integraram de forma equilibrada esse ideal e vêm contribuindo gradativamente com uma nova visão para o seu ensino.

As tarefas que constituem a base desta pesquisa foram pensadas e construídas buscando exatamente harmonizar todos estes fatores. Na tarefa 1, em análise, é perceptível a composição da tripla abordagem em sua estrutura. Os aspectos numéricos, geométricos e analíticos têm o suporte na tecnologia. Através do *software* os alunos puderam construir e determinar as áreas dos retângulos sob o gráfico da função. A expressão grafada na fórmula de Riemann toma um aspecto, até certo ponto, "material", ampliando a compreensão do objeto em estudo. A perspectiva interdisciplinar também está presente na atividade, com elementos da Álgebra e da Geometria. Todas estas dimensões convergem para as atuais tendências de modernização do ensino do Cálculo, onde a associação desses componentes deve sobrepor-se a intensa e exclusiva abordagem dos limites com épsilons e deltas. Procedendo desta forma, valorizaremos a noção intuitiva, a perspectiva histórica e outros importantes elementos na exploração das maravilhosas aplicações da disciplina.

Os assuntos tratados na matéria anterior de Introdução ao Cálculo foram também observados no processo de elaboração da tarefa. Os alunos já traziam alguns conhecimentos tais como números reais, intervalos e funções polinomiais que somados aos conceitos introdutórios dos limites, recentemente abordados na disciplina, integrariam um conjunto apropriado de competências para explorar com relativa desenvoltura a tarefa. Apesar de registrarem naturais dificuldades não houve manifestações que apontassem um grau tão elevado de complexidade que comprometesse a realização da atividade. Aliás, esse aspecto foi sempre observado no seu processo de construção. O cuidado para não exagerar na dose de desafio e complexidade esteve sempre presente para não gerar frustrações e desestímulos nos alunos. Ao longo da atividade pôde ser notado o grau de motivação que eles tinham para executá-la, mas também seriam exigidos os seus esforços e comprometimentos nos estudos. Isso ficou proeminente nos itens que foram requisitados na tarefa e nas orientações que foram facultadas para o seu desenvolvimento. O cuidado contrário também foi observado. As atividades simples que não demandam labor, criatividade e esforço intelectual dos alunos, não cumprem com as características essenciais dos processos exploratórios e investigativos e por isso foram evitadas.

O enquadramento da tarefa naquele momento também vinha a responder aos anseios que os alunos sentem quando passam a estudar certos assuntos matemáticos e questionam ou refletem sobre a sua importância e utilidade. Esta é uma questão relevante e acredito que não devemos ignorá-la num curso de licenciatura. Os conteúdos que faziam parte da unidade letiva giravam em torno dos tópicos de limites e continuidade e abrangiam: a definição intuitiva e as propriedades dos limites; limites infinitos e no infinito; limites fundamentais e funções contínuas. Apesar de serem temas extremamentes importantes no contexto e na estruturação do Cálculo, os alunos estão num curso de licenciatura em Matemática e são capacitados para atuar profissionalmente no ensino básico. Não que estes não devam prosperar nos conhecimentos e nas abstrações matemáticas, longe disso, mas considero de fundamental importância que os docentes possam, sempre que possível, vincular os conhecimentos mais avançados da Matemática aos objetos que serão trabalhados pelos alunos – futuros professores – neste nível de ensino. Inclusive esta é uma forma interessante de estimulá-los a propagarem uma Matemática mais útil e contextualizada. É também aí que o professor deve mostrar o valor e o benefício da Matemática para a vida, ao entusiasmar os seus alunos com os encantos dessa disciplina tão valiosa e necessária à solução dos diversos problemas práticos que nos cercam. Considero lamentável, por exemplo, que os alunos concluam o estudo das derivadas e não saibam que a fórmula do vértice de uma parábola qualquer de equação $y = ax^2 + bx + c$ pode ser obtida como o ponto crítico da equação $f'(x) = 0$. Muitas vezes os professores passam pelos assuntos e não se dão conta da importância desse e outros detalhes. Apesar do tópico "derivadas" não fazer parte do programa oficial do ensino médio, apesar da fórmula $x = -b/(2a)$ ser obviamente ensinada por um outro método neste nível de ensino, quando eles percebem uma razão e uma utilidade no que estão aprendendo a satisfação é maior. Nessas circunstâncias é comum ouvirmos *"Olha que interessante!"*, *"Ah que legal! Então é assim!?"*. Esta vinculação é apropriada e possível para uma série de outras situações e tópicos do Cálculo. Cabe ao professor ter a sensibilidade e estar atento a essas questões que parecem ser pequenas, mas que ocorrem com muita frequência no cotidiano das aulas e constituem excelentes momentos de aprendizagem.

Retornando aos aspectos da tarefa, era sabido que os alunos ao simplificarem a fórmula de Riemann, se depararia com o limite de uma função racional do tipo $\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x^1 + b_0}$ envolvendo a indeterminação ∞/∞. Geralmente este tema é tratado com um fim nele mesmo e algumas bibliografias inclusive trazem uma técnica simples que apenas "num olhar atento aos termos de maiores graus do numerador e denominador" já se conhece a resposta do limite, sendo indispensável a realização dos cálculos. Não que esta técnica seja desnecessária, pois considero-a útil e importante, e que outras semelhantes sejam descobertas e ensinadas, mas o que julgo notável destacar aqui é a finalidade dela em si própria. Como já destaquei anteriormente, o puro aprendizado das técnicas, sem enquadramentos históricos e possibilidades atraentes de explorar os conhecimentos na prática, pouco motiva os alunos. Foi refletindo sobre estas perspectivas que antecipei o tema "cálculo de áreas limitadas por curvas" com abordagens históricas e computacionais. Considerei esta uma excelente forma de incentivar o estudo dos limites, contextualizando alguns aspectos teóricos em situações práticas e interessantes, ampliando o raio de alcance para a aprendizagem dos conceitos.

A utilização dos recursos tecnológicos

O auxílio da tecnologia nas investigações matemáticas representa sempre um desafio a mais para o docente quando os alunos não estão habituados ao seu uso. De fato, esta foi a primeira experiência didática deles em tarefas exploratórias com assistência de *software* matemático. Ao identificar esse desconhecimento foi tomada a iniciativa de habilitá-los na exploração desses recursos, como já foi destacado. Porém, as instruções básicas não permitem abarcar com totalidade as variadas ferramentas dos programas. É de esperar que estes momentos de formação favoreçam e os impulsionem a seguirem adiante nos estudos das suas demais potencialidades. Nesta primeira tarefa esperava-se que os alunos utilizassem basicamente o *software* para traçar o gráfico da função, realizar aperfeiçoamentos na visualização e utilizar a ferramenta *"integrar f(x) dx"* para conjecturar o valor da área. Esta última função não foi trabalhada nas oficinas instrutivas, pois naquele momento não havia a necessidade de explorá-la. E, de fato, os alunos responderam coerentemente os questionários, apontando majoritamente essas utilidades do programa na resolução da tarefa. Apesar da específica ferramenta não ter sido examinada nos momentos de formação, os alunos não tiveram maiores dificuldades no seu uso. Ela é de fácil manuseio e simples entendimento geométrico. Além disso, as orientações gerais para a utilização dos recursos digitais certamente fazem parte dos ambientes investigativos informatizados e favorecem o bom desenvolvimento dos trabalhos. Como já relatado, as curiosidades centralizaram-se nos significados dos diversos métodos oferecidos pelo programa para calcular as áreas dos retângulos (ponto a esquerda, ponto médio, ponto a direita e etc.). Este foi um aspecto que gerou boas discussões na etapa final, inclusive conduzindo um grupo a apresentar, por minha orientação ao observar as suas construções, uma tela gravada e melhorada posteriormente (figura 40) onde se destaca a eficiência do *software* na contabilidade e exatidão no cálculo da área. A ideia da figura é mostrar como as "sobras" das regiões externas tendem a sumir (os valores de área tendem a zero como num processo de limite) à medida que mais retângulos são acrescentados sob o gráfico. Na etapa inicial de um curso de Cálculo, essa é uma ideia nova que desperta o interesse dos alunos para o entendimento global do que eles estão a construir na tarefa e a explorar teoricamente no assunto.

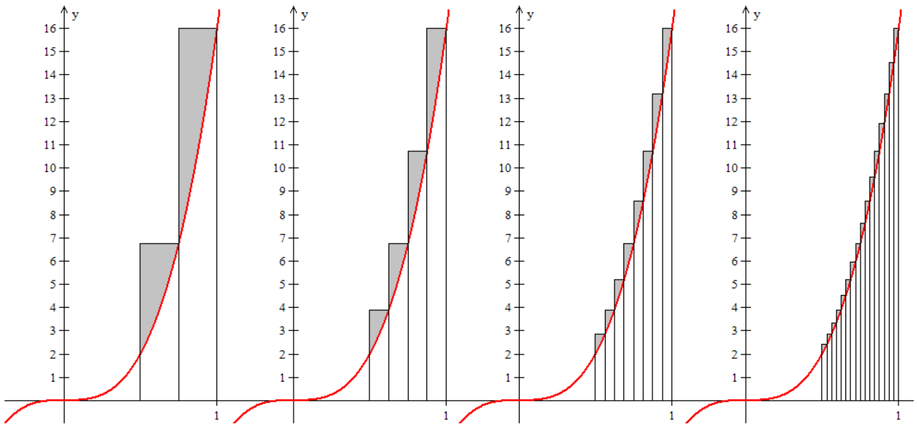


Figura 40: A eficiência do *software* no cálculo da área com a exibição de 2, 4, 8 e 16 retângulos.

Uma reação que geralmente é esperada dos alunos diante das respostas fornecidas pelos programas computacionais é sobre a necessidade de demonstrar algebricamente o resultado. Como a resposta está ali "visivelmente estampada" na tela, qual a razão de provar? Possivelmente a imaturidade dos alunos recém-ingressos num curso de licenciatura em Matemática e que não foram habituados aos processos de análise, investigação e demonstração no ensino médio (obviamente relativizando estes processos neste nível de ensino) conduzem a esta percepção. Esta situação deve ser encarada de forma bastante natural, pois serão a partir dessas e outras circunstâncias semelhantes que eles desenvolverão essas e outras habilidades. Pôde-se perceber alguns comentários nesse sentido durante a aplicação da tarefa e nos questionários. Porém, com algumas orientações realizadas ao longo da tarefa, muitos grupos conseguiram realizar com êxito a prova algébrica e a satisfação também ficou registrada. Inclusive este ponto foi considerado nos debates, gerando importantes reflexões coletivas. O *software* matemático é uma excelente ferramenta que nos auxilia eficientemente nos processos investigativos, nos levando, em algumas situações, a graus elevados de confiança, quase a certeza. Porém, são imprescindíveis nas estruturas das ciências, e também para a produção segura dos raciocínios matemáticos, as formalizações dos métodos demonstrativos. Ainda deu tempo de apresentar o quadro (figura 41) nas discussões finais e perguntar para turma a seguinte "pegadinha": observando estes cálculos apresentados pelo *Excel*, que resposta você daria para o limite $\lim_{x\to\infty} sen(x)$? Como esperado a resposta foi zero! E isto serviu para iniciar o estudo sobre os limites fundamentais.

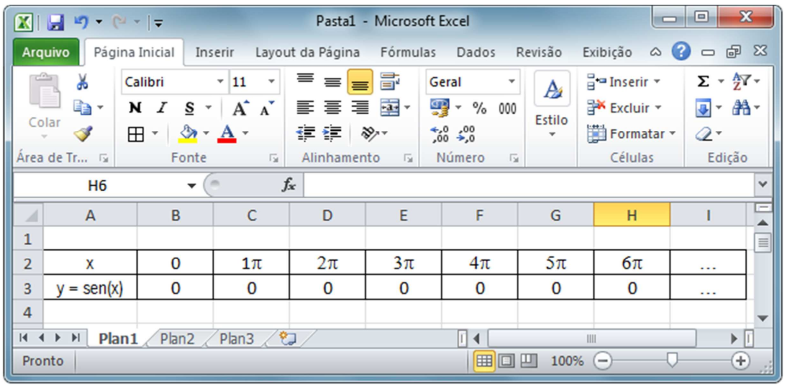


Figura 41: Tabela do *Excel* numa situação de análise didática de limite

Dificuldades gerais

A impressão geral dos alunos ao concluirem a tarefa foi de satisfação, em função do grau mediano de complexidade e desafio que viabilizou que a grande maioria obtivesse êxito. As respostas registradas no questionário desta tarefa apontou, majoritariamente, que a maior dificuldade encontrada, como esperado, ocorreu no processo de construção do limite através da fórmula de Riemann. Precisamente por se tratar da etapa demonstrativa, onde se exigiria a maior capacidade de elaboração algébrica e raciocínio analítico. Porém, ao alcançar a expressão já simplificada do limite, em virtude da fórmula pesquisada do somatório dos cubos, a dificuldade cessou. Os alunos então puderam perceber a utilidade e a simplicidade do uso da técnica específica do cálculo do limite naquela situação.

Outro aspecto de destaque nas respostas foi a possibilidade de resolver a tarefa em grupo. Uma série de comentários ressaltava que apesar das dificuldades encontradas, a oportunidade de abordar o problema em equipe reduziu, significativamente, o grau de complexidade da tarefa. As reflexões sublinhavam a permissão das consultas bibliográficas e a troca de ideias como importantes fatores no avanço e concretização da tarefa. Uma boa parte das ponderações indicava que se a tarefa fosse para ser resolvida individualmente, as dificuldades seriam ainda maiores e muitos não alcançariam a solução definitiva. Não foram levantadas objeções em relação ao tempo destinado para a execução da atividade. As três horas estabelecidas para a sua realização e o preenchimento do questionário foram suficientes.

Do ponto de vista do uso da tecnologia era esperada a dificuldade de encontrar, dentre as variadas funções do *software*, a ferramenta específica para construir os retângulos e determinar o valor da área. Mas em função das orientações que indicaram o caminho adequado para o uso da ferramenta *"integrar f(x) dx"*, não foram vistas, nas respostas, indicações de dificuldades nesse aspecto. Alguns alunos indagaram sobre outras funções "ocultas" no programa que os auxiliassem na demonstração algébrica do valor da área, sem se darem conta de que a consulta bibliográfica proporcionaria uma colaboração efetiva nessa dimensão.

No meu ponto de vista, a tarefa *"aplicação de limites no cálculo de áreas"*, a priori, não se mostrava tão simples para alunos que estão iniciando um curso de Cálculo, em função mesmo do seu grau de maturidade e conhecimento. O fato de enveredá-los nas funções dinâmicas ainda não utilizadas no *software*, além de trabalharem com a refinada fórmula de Riemann, indicava-me que as dificuldades seriam enormes. Mas, por outro lado, o cuidado de apresentar o método de exaustão no caso da parábola em aulas anteriores e a permissão da consulta bibliográfica revelaram-se bastante oportunas, resultando numa boa experiência de ensino.

6.2. Tarefa 2 – Áreas de regiões delimitadas por retas tangentes

Esta segunda tarefa, que pode ser vista no anexo 6, tem um caráter especial. Foi através da sua ocorrência espontânea e inédita em sala de aula que vislumbrei, pela primeira vez, a possibilidade de aprofundar o estudo das tarefas exploratórias e investigativas. Eu entrevia através destas tarefas uma alternativa completamente viável, segura e interessante de melhorar a minha prática e enriquecer o ambiente das aulas de Cálculo. Se eu me encantei com a beleza daquele resultado que surgia inesperadamente, por que os alunos, que optaram por dedicar-se ao estudo da Matemática e serem futuros professores, também não poderiam maravilhar-se um pouco? Antes mesmo desse episódio, eu já havia percebido que a inserção das tecnologias em sala de aula – mesmo que num aspecto ilustrativo – gerava mais atenção e satisfação na classe. Eles comentavam e se empolgavam com as possibilidades dinâmicas que os programas ofereciam e isso ocasionava um maior estímulo para o estudo da disciplina. Sempre que possível eu utilizava o *software* de forma projetiva para proporcionar uma maior compreensão dos resultados mais complexos e abstratos do Cálculo. Foi então que numa dessas antigas experiências, mais particularmente numa aula sobre a interpretação gráfica da derivada, ao ilustrar com o *Winplot* um conjunto de retas tangentes sobre o gráfico da hipérbole $y = 1/x$, acabamos por perceber que os triângulos retângulos delimitados pelas tangentes e pelos eixos coordenados possuiam áreas "muito parecidas" visualmente. A medida que a tangente deslizava sobre a curva, um cateto diminuia enquanto o outro aumentava. Será que a área permanecia constante? Tudo isso acontecia "ao vivo", com os alunos acompanhando a situação e opinando sobre os possíveis desdobramentos. Foi então que encaminhamos a construção do polígono dinâmico no *software* (figura 42) e constatamos que área permanecia constante e igual a 2. Após essa apuração computacional, partimos para a demonstração algébrica do resultado. Esta etapa foi lançada como um desafio para a classe que estava iniciando os estudos sobre reta tangente. As investigações prosseguiram e ainda pudemos ampliar a descoberta, agora ao verificarmos a constância dos valores das áreas dos triângulos sobre os gráficos da família de hipérboles $y = a/x,\, a$ constante real não nula. A pesquisa sobre outras possíveis curvas com estas mesmas características viriam posteriormente.

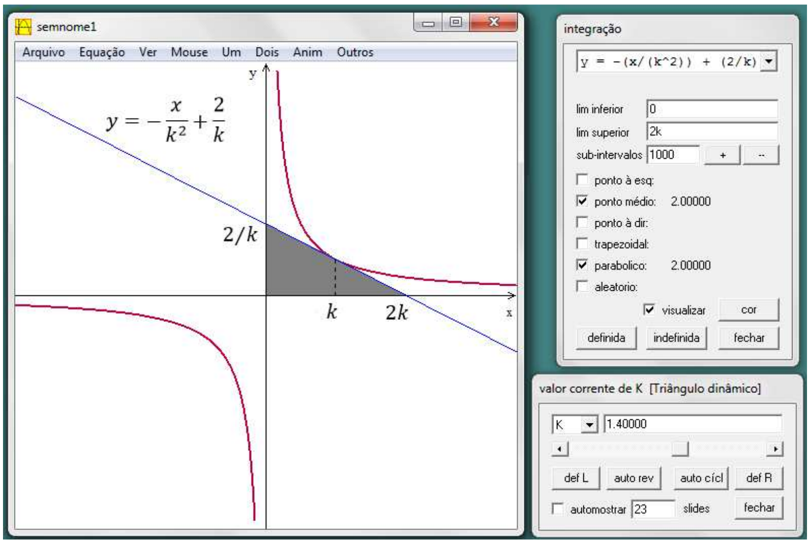


Figura 42: Triângulo dinâmico traçado no *software Winplot*.

Em função da familiaridade da turma com o tema "cálculo de áreas", abordado na primeira tarefa, o contexto desta segunda atividade mostrava-se adequado, visto que ele tocava no mesmo tema e avançava no estudo das derivadas. Nesta atividade se pode perceber claramente os principais elementos que constituem as investigações matemáticas. As construções conceituais que resultariam da sua realização apoiadas nas visualizações dinâmicas favorecidas pela tecnologia, deveriam fomentar maiores motivações para a aprendizagem dos alunos.

No problema 1 cujo enunciado é *"Considere a função* $f(x) = 1/x\,, x \neq 0.$ *Verifique se é constante (e sempre o mesmo valor!) a área do triângulo* AOB*, sendo* A *e* B *os pontos de interseção de qualquer reta tangente ao gráfico desta função com os eixos coordenados* x *e* y*, respectivamente, conforme..."* está enunciada a investigação preliminar que os alunos deveriam se empenhar. Procurei destacar a expressão "sempre o mesmo valor" porque em outras ocasiões de aplicação desta atividade, alguns alunos tinham o entendimento "simplista" de que a área seria sempre constante, pois em cada ponto de tangência o valor desta seria um número real (constante!), não necessitando, portanto, proceder qualquer tipo de verificação. À medida que percebo alguns entendimentos diferenciados acerca do enunciado de algum problema, procuro torná-lo mais claro, para que não haja interpretações controversas em futuras investigações. Desta forma, evito dar maiores esclarecimentos sobre o objeto a ser explorado, diminuindo o nível de intervenções. Logo abaixo deste enunciado, explicito o seguinte item *"use o GeoGebra para investigar este problema e, caso a sua resposta seja afirmativa, demonstre este resultado"*. A intenção é realmente direcionar os alunos para que eles possam fazer uso da ferramenta computacional, como um poderoso auxílio a esta investigação. Nesta tarefa, em especial, eles são convidados a utilizarem efetivamente as funções dinâmicas do programa. Diferentemente do uso que fizeram na atividade anterior, desta vez eles iriam explorar os recursos de animação do *software* para verificar, a princípio, se o valor da área permanecia constante à medida que a tangente deslizava sobre a curva. Ao responder afirmativamente a esta questão é que eles deveriam proceder a demonstração formal do resultado. Isto é colocado porque alguns alunos poderiam partir para a tentativa de demonstrar o resultado sem ter uma evidência favorável. Eles deveriam compreender a importância das ferramentas computacionais nas modernas investigações matemáticas.

A escolha do *GeoGebra* para realização desta tarefa vinha diversificar o uso do *software* por eles terem utilizado o *Winplot* no primeiro trabalho. Achei importante direcionar o uso dos programas nas duas primeiras experiências para, posteriormente, deixá-los à vontade na adoção dos recursos que eles identificassem mais adequado em cada situação. Ao conhecer mais diretamente as potencialidade de cada um, eles teriam a independência e a capacidade de escolher a ferramenta tecnológica que se mostrasse mais últil em cada contexto investigativo.

Mais uma vez os grupos puderam desempenhar papéis de investigadores matemáticos nesta notável situação exploratória. Ao construir a situação do problema no computador e visualizar a movimentação de uma infinidade de triângulos distintos sob a tangente, todos com a mesma área, foi notória a conjectura dos grupos em favor da tese da área constante. Poucos demoraram para chegar a esta constatação, pois ainda mostravam algumas dificuldades no processo de elaboração computacional. Já persuadidos das necessidades de comprovações algébricas, desde as frutíferas discussões realizadas na primeira tarefa, eles partiram para a demonstração requisitada no roteiro. Novamente as maiores dificuldades aí se concentraram, apesar das consultas bibliográficas terem sido novamente permitidas. A turma já conhecia a fórmula da reta tangente, porém esta era empregada em situações mais simples, basicamente no uso direto *"dada tal função e ponto, determine a equação da reta tangente"*. No contexto desta tarefa eles teriam que trabalhar algebricamente, inclusive para determinar as dimensões do triângulo. Esta etapa do problema era ainda "suave", pois adiante o nível de desafio se ampliaria um pouco mais, eles trabalhariam não apenas com uma única função, mas com uma família de funções.

Concluída esta etapa, com algumas orientações gerais que se fizeram necessárias, os grupos estavam agora instigados a avançar nas investigações. Se a hipérbole resultante do gráfico da função $y = 1/x$ apresentava uma característica tão peculiar, será que as outras da sua "família" apresentariam comportamento análogo? No problema 2 *"ainda com relação a construção anterior, trace sucessivamente os gráficos das funções* $f_2(x) = 2/x,\ f_3(x) = 3/x,\ f_4(x) = 4/x$ *e observe o comportamento das áreas dos triângulos..."* os alunos iriam prosseguir nos exames, porém estendendo a construção dinâmica anterior para o caso "$f_a(x) = a/x\,, a = 2, 3, 4, ...$". A maior dificuldade já estava superada na demonstração do caso "$a = 1$", isto foi observado nas respostas dos alunos ao questionário. A construção e a prova nesta nova situação seriam semelhantes ao primeiro caso, daí a clareza que muitos tiveram no seu prosseguimento. Ao completar adequadamente a tabela 1 do roteiro, com o auxílio do programa, a regularidade no comportamento das áreas e a consequente conjectura se evidenciariam com força na solicitação feita no item a) deste segundo problema. E, de fato, a maioria dos grupos teve essa percepção e, no item seguinte, já "embalados" com a primeira demonstração, partiram para estabelecer a prova neste novo caso.

As discussões finais foram engrandecidas pela ocasião da turma está também abordando as propriedades da hipérbole na disciplina de Geometria Analítica. Essa possibilidade de "tema transversal" realçou o momento e mostrou-se bastante favorável para firmar alguns conceitos em torno das derivadas. A experiência desta tarefa revelou-se tão significativa quanto a primeira. As conjecturas, as análises computacionais e as construções algébricas, todos estes e outros preciosos aspectos modificaram o ambiente corriqueiro das aulas. A riqueza dos diálogos verificados nos grupos foi registrada e será objeto de análise detalhada no próximo capítulo.

Enquadramento da tarefa e aprendizagem dos conceitos

São perceptíveis também nesta tarefa os elementos numéricos, geométricos e analíticos harmonizando as investigações. Por reconhecer essa conjugação notável de saberes que busco sempre equilibrar esses componentes nas atividades exploratórias. Nesta tarefa, por exemplo, os alunos não foram limitados apenas a investigar padrões e executar cálculos. Eles realizaram importantes construções algébricas que deram suporte às demonstrações. Apesar das dificuldades mais acentuadas nestas construções, a satisfação que eles apresentam ao superá-las é gratificante. As repostas registradas nos questionários apontam essas singulares dimensões.

O enquadramento curricular desta tarefa ocorria num momento onde a turma estava explorando os seguintes temas: *Introdução ao estudo da derivada: a definição clássica; a interpretação gráfica; a equação da reta tangente; Teorema derivabilidade versus continuidade; derivada da função potência* $f(x) = x^n$ *e as regras operacionais das derivadas.* A preocupação que tenho e que vai ao encontro dos anseios dos alunos é procurar dar um significado mais prático ao corpo teórico de assuntos que estão sendo desenvolvidos. Ao invés de exercitar exclusivamente as aplicações mais tradicionais que são encontradas nos livros, procuro envolvê-los também em situações mais laborativas. Foi com esse pensamento que conduzi a turma, em outra tarefa que será detalhada mais adiante, a investigação de um projeto em matemática aplicada. Nesta atividade os alunos projetariam a primeira subida e descida de uma montanha russa aplicando o conhecimento das derivadas.

Um aspecto singular que mereceu destaque nesta tarefa foi o processo diferenciado de derivação. Alguns grupos utilizaram a definição clássica da derivada, outros pegaram o "atalho" da regra da potência e outros ainda utilizaram a regra operacional do quociente. Este era um procedimento aberto no problema, cada um poderia calcular da maneira que achasse melhor. Obviamente, quem usou a regra da potência ganhou um pouco mais de tempo. Eu tinha essa percepção no momento em que circulava pelo laboratório e observava os trabalhos. Não orientei a "melhor" forma, pois considero que os alunos devem seguir o seu próprio caminho. No entanto, registrei e aproveitei essa diversidade para ser apresentada e destacada nas discussões finais. E assim realmente aconteceu! Quando os grupos se apresentaram, foi dessa forma que cada um descreveu o seu processo de derivação:

1ª forma: derivada pela regra da potência:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f'(x) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

2ª forma: derivada pela regra do quociente:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

3ª forma: derivada pela definição:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x - x - \Delta x}{x^2 + x \cdot \Delta x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{x^2 + x \cdot \Delta x} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x^2 + x \cdot \Delta x} = -\frac{1}{x^2}$$

Essas três formas diferenciadas de obter a derivada impactou no tempo destinado a realização da tarefa. Enquanto uns concluiram a atividade mais rapidamente, outros requisitaram um pouco mais de tempo. Até esse aspecto foi tocado nas discussões finais, pois alguns alunos argumentaram que precisariam de um prazo adicional para a conclusão, mas, por outro lado, outros acharam o tempo adequado, sendo estes últimos os que obtiveram a derivada mais rapidamente pela regra da potência. Esta tarefa não tinha um grau elevado de complexidade e isso foi observado nas respostas dos questionários, mas alguns alunos expressaram certo grau de dificuldade, principalmente, na determinação da área do triângulo. O problema não era a fórmula (base vezes altura dividido por dois), pois todos a conheciam, mas os procedimentos analíticos para encontrar as suas dimensões (base e altura). O *software* apresentava dinamicamente estes valores (figura 43) à medida que a tangente deslizava sobre a curva, mas alguns grupos tiveram dificuldades em reconhecer que estas dimensões poderiam ser obtidas calculando-se as interseções da tangente com os eixos coordenados. Este foi um ponto crucial que estagnou o andamento de alguns trabalhos. Eles estavam visualizando as interseções, mas não sabiam como as obter analiticamente. A dificuldade residia no reconhecimento das equações das retas que representavam os eixos coordenados. Alguns alunos desconheciam enquanto outros não recordavam que também os eixos coordenados são retas do plano cartesiano e que possuem equações algébricas. Somente depois de algumas orientações os grupos ganharam entendimento e um novo ânimo para prosseguirem nos seus trabalhos.

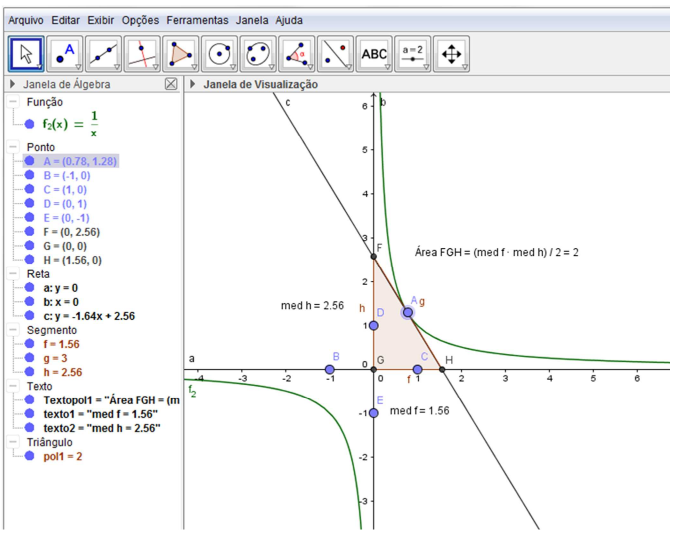


Figura 43: Apresentação dinâmica no *GeoGebra* das dimensões do triângulo.

De uma foma geral, com esta tarefa, pudemos apresentar uma aplicação geométrica atraente sobre as retas tangentes, diferenciando-se um pouco dos clássicos exercícios que geralmente acompanham este assunto. Demos um significado prático às derivadas, por conta do estudo teórico que eles estavam a desenvolver naquele momento. Resgatamos e aplicamos o tema de limites em um novo contexto. Exploramos elementos comparativos na forma de derivação e progredimos nas técnicas operatórias. Estes certamente constituiram aspectos muito interessantes na atividade. Uma questão colocada ao final dos trabalhos serviu como ponte para avançarmos no conhecimento: e se a função abordada nesta tarefa fosse trigonométrica, por exemplo, $f(x) = sen(x)$, como obteríamos a derivada? E assim prosseguimos nos estudos.

A utilização dos recursos tecnológicos

Os alunos estavam cada vez mais envolvidos com uso dos programas computacionais nas aulas de Cálculo. Habitualmente, nos momentos de exposição teórica, eu continuava a explorar alguns conteúdos com o auxílio projetivo da tecnologia, por exemplo, nos problemas que envolviam limites e continuidade, além do auxílio à análise gráfica de algumas funções, dentre outros tópicos da disciplina. Além de facilitar a compreensão de alguns assuntos, isso constituia, por assim dizer, uma estratégia, uma forma de manter os alunos estimulados a utilizar a tecnologia nas suas atividades rotineiras de estudo.

Na tarefa em análise, eu imaginei que os alunos fossem apresentar algumas dificuldades na manipulação do *GeoGebra*. Apesar de já terem realizado a atividade anterior com o *Winplot* as funções utilizadas agora teriam ainda mais elementos de dinamicidade. A escolha do *GeoGebra* para esta tarefa também atendia a este requisito. Daí a escolha antecipada que fiz em iniciá-los nos dois programas. Em algumas situações investigativas um apresenta melhores características do que o outro em termos de simplicidade de análise gráfica. No *GeoGebra*, por exemplo, inserindo a equação da curva e marcando um ponto sobre esta, já existe um ícone específico, "reta tangente", que traça a reta e, inclusive, apresenta a equação algébrica desta a medida que o ponto é movimentado. No *Winplot*, para realizar esta mesma função, exige-se uma maior habilidade. Estas competências eles conquistariam com o tempo e com uma maior experiência no uso dos programas. Por isso que é muito importante que o docente tenha a percepção sobre o uso adequado de cada ferramenta tecnológica nos variados tipos de exploração. Além das dificuldades inerentes à própria tarefa, a utilização do programa mais satisfatório e as limitações de tempo devem constituir fatores de cuidado e atenção para o êxito dos trabalhos.

No tocante a investigação sobre o comportamento das áreas dos triângulos, à medida que os grupos completavam a tabela do problema 2 e percebiam a relação de "dobro", a conjectura principal que ressaltava dos padrões observados era de que *"para a curva de equação $f_a(x) = a/x$ o triângulo teria área sempre constante e igual a $2a$"*. Daí que no caso anterior, $f(x) = 1/x$, foi encontrado o valor 2 para a área. A figura 44 foi captada da análise de um grupo e ilustra essa percepção.

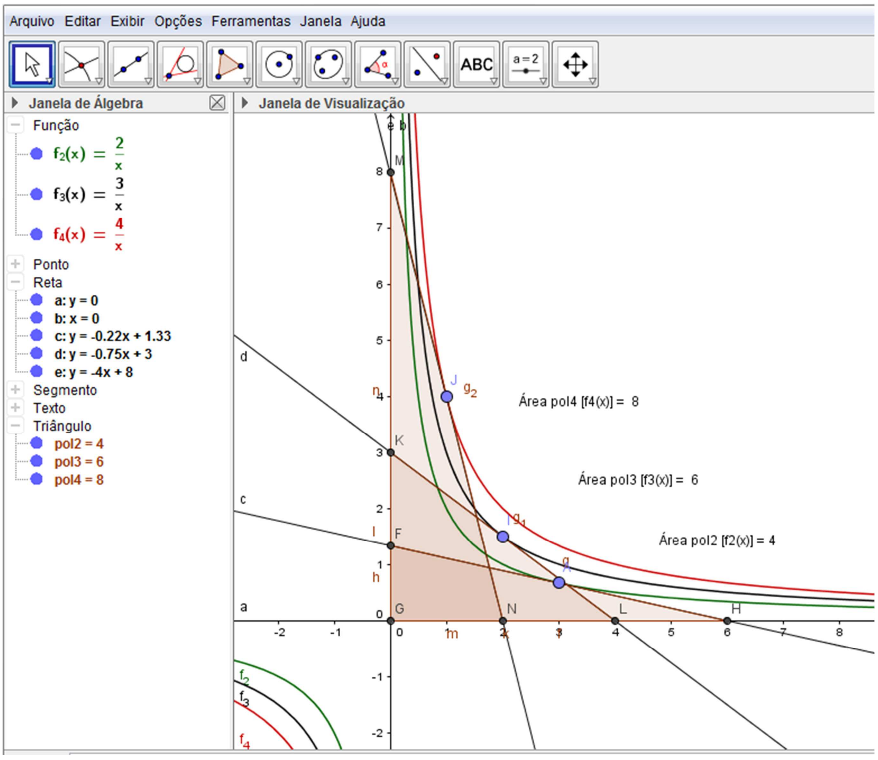


Figura 44: Apresentação das hipérboles, suas tangentes e as respectivas áreas dos triângulos.

Alguns grupos já haviam finalizado a demonstração do problema 1, porém apresentavam ainda embaraços na demonstração do segundo problema, apesar da natureza semelhante dos casos. Isto porque uma nova constante arbitrária se apresentava para ampliar o grau de desafio do problema. Além do ponto de tangência, o numerador da função também passaria a ter uma nova constante. A função agora seria $f_a(x) = a/x$, sendo $a \neq 0$. Eles teriam que trabalhar doravante com a fórmula da equação da reta tangente com duas novas constantes arbitrárias! A beleza nesta fase do problema reside no fato de que apesar dessas constantes estarem conjugadas na expressão da tangente, ao final da demonstração, para a obtenção da área do triângulo, uma delas naturalmente é cancelada e o resultado surge admiravelmente. Este fato levou alguns grupos, após o término imediato da questão, a um estado de satisfação que se percebia nas atitudes de superação. Vale ressaltar ainda que apesar da tabela apresentar apenas valores naturais para a constante a, alguns alunos testaram posteriormente valores fracionários e perceberam que a proposição se mantinha válida. Esse foi um aspecto também relevante e colocado na fase de discussões.

Em função das dificuldades observadas para avançar no segundo problema, alguns poucos alunos ainda questionavam a necessidade de provar algebricamente o resultado, pois o *software* já deixava bastante evidente que ele era verdadeiro. Apesar das discussões realizadas sobre este assunto na primeira tarefa, eles ainda resistiam em debruçar-se sobre as necessárias e úteis demonstrações. Este era um quesito que "pesava" nas tarefas, pois os alunos estavam muito mais habituados nos cálculos mecanizados e na aplicação direta das técnicas para a resolução dos exercícios.

Dificuldades gerais

Como focalizamos ainda a pouco, as dificuldades que mais se destacavam nas tarefas estavam relacionadas com as questões que exigiam as demonstrações algébricas das conjecturas. Este fato era precisamente apontado pelos alunos nas respostas aos questionários. As etapas exploratórias que requisitavam o reconhecimento de padrões e a aplicação direta das técnicas operacionais eram relativamente mais tranquilas. Ao perceber este problema, passei a refletir mais com a turma sobre a importância das construções algébricas para a Matemática. Isto para destacar a necessidade dessas estruturas para a produção dos conhecimentos. Eu realizava algumas comparações sobre o valor que tem a abordagem axiomática para a Geometria Euclidiana, pois eles já haviam cursado esta disciplina. Apesar do Cálculo não possuir um alicerce semelhante, axiomaticamente falando, ela não estava isenta de uma organização sustentada por proposições, teoremas e corolários, mas que estas estruturas teriam uma dose adequada de abordagem na disciplina, sendo estes aspectos mais apreciados e aprofundados no componente curricular de Análise Matemática.

Apesar da maior independência observada nas ações dos grupos, algumas explicações coletivas eram sempre necessárias para o bom andamento dos trabalhos. À medida que o semestre letivo corria e novas tarefas eram colocadas, as orientações ficariam mais escassas. Os alunos já estavam conscientizados que nas últimas atividades eles precisariam estar mais "emancipados", buscando o apoio necessário no próprio grupo, nos programas e nas consultas as notas de aulas. Apesar de reconhecer que este seria um processo gradual, eu considerava importante realçar este aspecto. De fato, nas primeiras tarefas eu estava muito mais próximo dos grupos, pois tudo era novo, desde o ambiente até ao uso do *software* de apoio às investigações. Nestes primeiros momentos, o suporte pessoal e as orientações gerais desempenham um papel primordial do ponto de vista motivacional. É preciso investir fortemente contra as dificuldades que ocasionalmente surgem. Vencendo estas primeiras fases e sublinhando as conquistas, de modo a transparecer os benefícios, a turma segue adiante até a autonomia mais acentuada observada nas últimas tarefas.

A possibilidade de trabalhar em grupo era novamente destacada pelos alunos. Essa perspectiva sempre era ressaltada, de tal forma que me levou, inclusive, a realizar todas as tarefas em pequenos grupos, pois havia um planejamento inicial de realizar uma ou outra individualmente. As estratégias que alguns grupos montavam para abordar os problemas revelavam verdadeiros trabalhos em equipe. Enquanto um tinha maior familiaridade com o *software*, outro mostrava mais eficiência nas consultas e um terceiro na organização da escrita, e todos mostravam uma habilidade notável na exploração da tarefa. Reiteradamente eles explicitavam que sem a ajuda mútua seria muito difícil alcançar um resultado satisfatório nas tarefas. As discussões, os raciocínios e as estratégias produzidas na abordagem dos problemas realmente deveriam produzir bons frutos para a aprendizagem do Cálculo.

A dificuldade de utilização da tecnologia nesta atividade seria amenizada em função de algumas orientações dadas antecipadamente. Como o *GeoGebra* seria utilizado neste trabalho, mais precisamente a ferramenta de traçado de tangentes, este comando foi utilizado em sala de aula em algumas abordagens. Além disso, a turma foi orientada a praticar um pouco mais esta função em casa, em alguns exercícios previamente selecionados. Por isso, os menores contratempos foram observados na manipulação do *software*. Por exemplo, depois que ficou estabelecida a construção gráfica do primeiro problema, isto é, eles já sabiam plotar a reta tangente da função $f(x) = 1/x$ e exibir simultaneamente o valor da área do triângulo, a construção seguinte seria ainda mais simples. No segundo problema eles repetiriam este mesmo procedimento nas outras curvas, isto é, reproduziria esta mesma situação para cada curva da família $f_a(x) = a/x$, $a = 2, 3, 4, \ldots$, observando o padrão das áreas.

De uma forma geral, apesar do uso mais intenso dos recursos dinâmicos do *GeoGebra*, sobressairam-se nas respostas dos questionários a percepção de que as maiores dificuldades não estavam no uso do *software*, mas nas questões que envolviam as construções algébricas.

6.3. Tarefa 3 – Projetando uma montanha-russa

Esta tarefa exploratória foi adaptada do livro de Stewart (2013) e pode ser vista no anexo 7. Através da simulação de uma primeira subida e descida de uma montanha-russa, o autor busca aproximar os estudantes das situações cotidianas defrontadas por engenheiros, tecnólogos e projetistas que fazem o uso das ferramentas matemáticas na concepção dos seus projetos. É bem conhecido pelos professores que se dedicam ao ensino da Matemática o desejo e a ansiedade que os alunos às vezes demonstram em “usar na prática” os conhecimentos que adquirem. Quantas vezes nos perguntamos na época em que abraçamos a graduação “onde vou aplicar isto, pra que serve este assunto?”. É como um desejo indisfarçável de elaborar, de construir, de projetar, de fazer um uso funcional da Matemática tal qual fazem os profissionais citados. Num curso de licenciatura acredito ser de fundamental importância que o docente possa minimizar estes efeitos e mostrar, ainda que seja na forma de “simulação de projetos”, a aplicabilidade da Matemática nos mais diversos campos do conhecimento. É assim, por exemplo, que ao explorar o tema de “Matrizes” ele possa não apenas mostrar a sua utilidade intrínseca na disciplina, mas que também conduza os estudantes a perceberem a sua maravilhosa aplicação nos sistemas computacionais, na criptografia, na economia, dentre outros contextos. Foi refletindo sobre estes aspectos e com essa motivação que propus a presente tarefa.

A pretensão desta atividade é conduzir os alunos a aplicarem os conhecimentos teóricos adquiridos sobre continuidade e diferenciabilidade na projeção de um primeiro trecho de uma montanha-russa. É uma tarefa exploratória que permite aos alunos apreciarem a utilidade do Cálculo nas simulações da engenharia. É uma oportunidade de motivar e refletir com a turma: *"olha, aí tem muita matemática, e matemática sofisticada, ainda que fiquemos no campo das construções teóricas, observe como estes conhecimentos são utilizados na prática pelos profissionais capacitados para tal"*. Esta tarefa aborda, além dos conceitos mencionados, outros adjacentes tais como: inclinações de retas (coeficientes angulares), retas tangentes, função quadrática, sistemas de equações lineares, dentre outros.

Eis o problema em destaque:

"Suponha que lhe pedem para projetar a primeira subida e descida de uma montanha-russa. Estudando fotografias de montanhas-russas (Figura 1), você decide fazer a subida com inclinação $0{,}8$ *(ângulo de inclinação de aproximadamente* $38{,}66\,°$*) e a descida com inclinação* $-1{,}6$ *(ângulo de inclinação de aproximadamente* $-57{,}99\,°$*). Você decide ligar esses dois trechos retos* L_1 *e* L_2 *com parte de uma parábola* $y = f(x) = ax^2 + bx + c$*, em que* x *e* y *são medidos em metros. Para o percurso ser liso, não pode haver variações bruscas na direção, de modo que você quer que os segmentos* L_1 *e* L_2 *sejam tangentes à parábola nos pontos de transição* P *e* Q *(Figura 2). Para simplificar as equações, você decide colocar a origem do sistema em* P*."*

Fig. 1: Montanha-russa (imagem da internet)

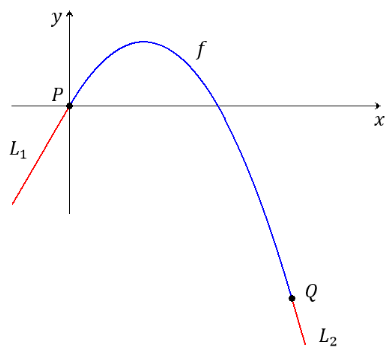


Fig. 2: Tangentes comuns nos pontos P e Q.

Responda:

a) Suponha que a distância horizontal entre P e Q seja de $30\ m$. Escreva equações em a, b e c que garantam que o percurso seja liso nos pontos de transição.

b) Resolva as equações da parte (a) para a, b e c para encontrar uma fórmula para $f(x)$.

c) Determine a diferença de elevação entre P e Q.

d) Trace os gráficos de L_1, f e L_2 e verifique se as transições são lisas.

A atividade apresenta uma estrutura mais aberta, apesar das orientações que são dadas que pretendem, tão somente, servir como uma espécie de guia para o direcionamento dos raciocínios. Não é uma tarefa simples, elementar, onde se espera que os alunos tenham uma imediata intuição sobre o caminho mais apropriado e seguro para trilhar. As limitações de tempo para a realização e a dosagem no grau de dificuldade devem ser cuidadosamente observadas na sua elaboração, vislumbrando o bom andamento e êxito dos trabalhos.

A natureza mais aberta e motivadora desta tarefa propiciou um ambiente bastante produtivo onde pude observar uma série de discussões de ideias, repletas de argumentações e conjecturas. Nos itens a) e b), por exemplo, alguns grupos perceberam que o termo independente na equação da parábola $y = ax^2 + bx + c$ deveria ser zero, pois o seu gráfico passava pela origem do sistema cartesiano, ganhando um precioso tempo nesta análise. Outros ainda utilizaram este argumento para afirmar o mesmo sobre o coeficiente linear da reta tangente $L_1: y = mx + n$. Pela mesma razão n deveria ser zero. A consulta bibliográfica novamente foi permitida para que os grupos pudessem realizar as suas pesquisas, revisar os aspectos teóricos necessários e esclarecer as suas dúvidas, liberando-me um pouco mais desta incumbência. Uma dimensão bastante exigida nesta atividade foi a interpretação gráfica da derivada. Este conhecimento foi bastante solicitado em termos de análise, pois o próprio enunciado do problema traz informações sobre "ângulo de inclinação", "ponto de transição lisa" e "reta tangente".

As investigações seguiram de forma bastante motivadora, pois esta tarefa, a princípio bastante desafiadora, induzia os alunos a pesquisarem dois pequenos problemas que resolvemos em sala de aula. Foi quando estávamos explorando o teorema que relaciona diferenciabilidade *versus* continuidade e os gráficos de funções com pontos "angulosos" (não lisos). Nesta ocasião, investigamos os seguintes problemas, inclusive apoiando-se nos recursos tecnológicos:

Problema: Verifique se as funções abaixo possuem derivada no ponto x_0. Estes pontos são angulosos? Esboce os gráficos e verifique as soluções com um *software*.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, \ se\ x > 0 \\ e^x, \ se\ x \leq 0 \end{cases}$ no ponto $x_0 = 0$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, \ se\ x > 0 \\ e^x, \ se\ x \leq 0 \end{cases}$ no ponto $x_0 = 0$.

Na verdade esses dois problemas contêm a essência das análises que são imprescindíveis para a realização da tarefa proposta. Quando os resolvemos em sala de aula, tocamos nos diversos assuntos que permeiam a investigação em questão, de tal forma que os temas abordados na tarefa não constituíam maiores novidades. Inclusive o que motivou a exploração destes problemas foi uma situação vivenciada por alguns alunos no trajeto das suas casas para a faculdade. Num determinado trecho do percurso existe uma pequena ladeira que não tem uma finalização lisa (suave), pois ao passar de carro por determinado ponto, sente-se um grande tombo e uma mudança brusca na direção. Talvez um erro de projeto ou na sua execução. Esta situação real serviu magistralmente para ilustrar os diversos assuntos em estudo: ponto anguloso, transição lisa, diferenciabilidade, continuidade, dentre outros.

A questão c) tem o propósito de explorar um pouco mais o assunto do ponto de vista geométrico. Ao estabelecer as coordenadas do ponto de transição Q, a diferença de elevação segue pelo valor absoluto da ordenada deste ponto. Apesar da simplicidade desta análise, alguns grupos apresentaram dificuldades no entendimento da expressão "diferença de elevação" e solicitaram uma orientação que trouxesse um pouco mais de compreensão neste quesito. Após alguns esclarecimentos os trabalhos seguiram até a sua etapa final. A investigação proposta consistia basicamente em verificar, por intermédio de um *software*, as condições de suavidade nos pontos de "colagem" da parábola com as tangentes, conforme previsto no item d).

Esta tarefa diferenciou-se um pouco da antecedente no aspecto contextual. Enquanto que a anterior focava mais nas questões da matemática pura, esta explorou a simulação de um projeto da engenharia, num cenário da matemática aplicada. Ambas se destacam, cada uma a seu modo, pela riqueza dos mecanismos inerentes as explorações e investigações. Estas variedades experimentais revelam-se de grande importância para a aprendizagem dos alunos.

Enquadramento da tarefa e aprendizagem dos conceitos

As dificuldades que os alunos apresentam na compreensão de alguns assuntos mais complexos da Matemática conduzem os docentes, quase sempre, a buscarem alternativas didáticas que objetivem melhorar o seu entendimento. Alguns assuntos do Cálculo provavelmente se enquadram nesse aspecto. A diferenciabilidade é um deles. Notamos claramente, no cotidiano das aulas, os embaraços que os estudantes manifestam para assimilar e aplicar com clareza tal conceito. Neste sentido, as tarefas exploratórias que buscam trabalhar estes temas no campo prático, tendem a minimizar as dificuldades e a melhorar expressivamente a motivação para o estudo. Esse ponto de vista está de acordo com a percepção que tive com base nas entrevistas e questionários aplicados. Tais aspectos serão explorados com detalhes no próximo capítulo. Uma coisa é a exposição teórica de um tema para uma platéia, com as explanações que se fazem necessárias a sua compreensão. Outra, que a complementa, é a tarefa exploratória num contexto mais realístico, com orientações focalizadas, onde os alunos têm a oportunidade de interagir na produção dos conhecimentos. Essa impressão eu captava dos alunos também nos momentos posteriores a realização das tarefas. Após a correção e a entrega dos trabalhos eventualmente tínhamos a oportunidade de realizar mais algumas discussões, vinculando as questões da tarefa, os seus erros e acertos, aos assuntos trabalhados. A maturidade e a compreensão deles se alargam com a metodologia exploratória, pois os objetos teóricos mais complexos tomam dimensões mais práticas, e estas alcançam os seus interesses de uma forma mais imediata.

Ao adaptar o projeto da montanha-russa como uma tarefa exploratória, eu buscava aliar as abordagens numéricas, geométricas e analíticas que o problema comporta com as necessidades destacadas anteriormente. A turma estava apresentando algumas dificuldades no entendimento da diferenciabilidade e interpretação gráfica da derivada. A propósito, os cuidados que sempre me norteiam na idealização das atividades exploratórias compõem-se dos seguintes elementos, com pesos relativos em cada um deles:

1) associar o desejo que os alunos têm de "verem na prática" os conhecimentos teóricos desenvolvidos em sala de aula;
2) aproveitar contextos mais realísticos e próximos das vivências estudantis, inclusive problemas que possam gerar maiores motivações para aprendizagem;
3) aprofundar temas que apresentam um maior grau de complexidade e abstração matemática;
4) aliar possivelmente os recursos tecnológicos as tarefas exploratórias e investigativas.

O enquadramento curricular desta tarefa ocorreu num momento aonde os seguintes conteúdos vinham sendo abordados: *derivada da função exponencial e logarítmica, derivada das funções trigonométricas (e das trigonométricas inversas), a regra da cadeia e derivação implícita.* Nesta etapa do curso as derivadas das funções elementares do Cálculo são apresentadas, pois é imprescindível que os alunos avancem neste conhecimento. Em muitas situações práticas estas funções surgem com muita naturalidade e frequência. Esta é uma fase do curso onde se tem maiores momentos expositivos em sala de aula, pois o conhecimento dessas derivadas é que possibilitará, mais adiante, os alunos abordarem uma série de outros problemas empíricos e interessantes. Nesses momentos procuro inserir pequenas tarefas exploratórias que visam a complementação do assunto. É assim, por exemplo, que ao demonstrar a derivada da função seno, oriento os alunos, através de sucintos roteiros impressos, a demonstrarem a derivada das demais funções trigonométricas. Alguns problemas mais significativos mesclam estes instantes e buscam dar um sentido prático aos conhecimentos produzidos. É um trabalho conjunto e dinâmico, onde uma parte, geralmente a inicial, fica sob a minha responsabilidade e a parte complementar, sob a incumbência dos grupos de trabalho, porém com a minha supervisão. Para diversificar esses momentos expositivos, algumas tarefas investigativas são realizadas no laboratório de informática, a exemplo desta sobre a montanha-russa. Os alunos então são convidados a aplicarem ou aprofundarem diversos tópicos da matéria em problemas expressivos e desafiadores.

Retornando aos aspectos da tarefa, foi percebida uma maior familiaridade dos alunos no manuseio do *software*. Eles já requisitavam menos a minha orientação nos aspectos funcionais dos programas. Na maioria das circunstâncias as explicações estavam mais voltadas para as particularidades teóricas das questões. Explicarei. Uma preocupação sempre esteve presente comigo: como fomentar uma maior aproximação dos alunos aos recursos tecnológicos de forma que o seu uso não ficasse restrito exclusivamente aos momentos das tarefas laboratoriais? Como estimular o contato frequente com estas tecnologias, para que eles explorassem cada vez mais as suas potencialidades? Foi então que destaquei, em alguns exercícios e problemas selecionados dos livros, a necessidade de empregar o *software* como apoio a aprendizagem. Era comum os alunos encontrarem as sugestões *"verifique com software..."*, *"visualize no computador..."*, *"confira no programa..."*, como recomendações auxiliares para a resolução de algumas questões que não vinham acompanhadas das respostas. Por exemplo, um simples exercício como "calcule o limite $\lim_{x\to\infty}[sen(x)/x] + 1$" deixado propositadamente sem a resposta e com a indicação *"confira a resposta num programa computacional"*, já estimulava o estudante a futucar algum *software* para constatar a sua solução (figura 45). Em sala de aula, nos momentos em que estes exercícios eram postos para discussão, a turma era instigada a se manifestar e a indicar o recurso computacional especificamente utilizado naquela situação. Esses estímulos rotineiros do apoio tecnológico buscavam familiarizar a classe nesses processos e alguns alunos já revelavam certa desenvoltura e independência nas tarefas laboratoriais.

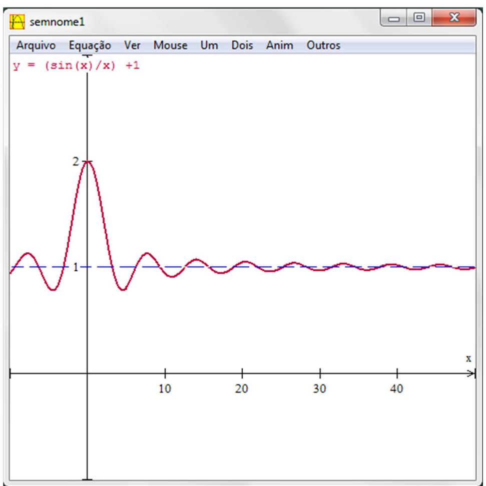


Figura 45: Visualização gráfica da resposta de um exercício sobre limites.

Novamente, ao final da tarefa exploratória, depois de preencherem o questionário, nos diálogos coloquiais que precederiam as entrevistas formais, os alunos já sinalizavam certo estado de satisfação. A possibilidade efetiva de explorar os conhecimentos através de atraentes problemas investigativos com o auxílio da tecnologia renovava por completo o ambiente da sala de aula. Eles manifestavam esta percepção, inclusive porque argumentavam comparativamente em relação a outras experiências já vivenciadas no ensino da Matemática. Essas novas práticas convergiam para as atuais tendências da educação: diversificar e harmonizar todas as alternativas didáticas disponíveis para melhorar a aprendizagem dos alunos.

A utilização dos recursos tecnológicos

Esta foi a primeira atividade onde os alunos tiveram a livre escolha de *software* para auxiliar as investigações. No roteiro não existia qualquer indicação sobre qual programa deveria ser utilizado ou qual seria o mais adequado para a exploração da tarefa, de tal forma que foi verificada a seguinte divisão: sete grupos usaram o *Winplot* enquanto outros cinco serviram-se do *GeoGebra*. Apenas no item "d" do roteiro observa-se uma solicitação para traçar os gráficos da parábola e das duas retas, afim de verificar se as transições determinadas nos ponto P e Q eram realmente lisas. Se bem que não há uma indicação direta de como eles deveriam traçar esses gráficos, todos os grupos realizaram esta verificação com o auxílio da tecnologia. O esboço a mão, sem o apoio das calculadoras gráficas, foi tema bastante trabalhado na disciplina de Introdução ao Cálculo, quando eles estudaram as funções do primeiro e segundo graus.

Quando elaborei essa tarefa imaginei que os grupos fossem utilizar a tecnologia somente no último item "d", apenas no aspecto da verificação final das transições lisas, depois de obterem algebricamente as três equações: uma da parábola e duas das retas. Mas na prática outros caminhos foram utilizados. Outras funções dos programas foram aproveitadas para enriquecer ainda mais os trabalhos. Ao circular pelo laboratório e observar de perto as discussões, percebi que alguns grupos – que particularmente utilizavam o *Winplot* – tentavam "colar" tangencialmente a parábola genérica de equação $y = ax^2 + bx + c$ no ponto P do segmento de reta L_1. Esta era uma tentativa de encontrar a sua equação computacional. Explico. Depois de certo tempo decorrido, algumas equipes já tinham a "segurança" de ter determinado a equação da reta L_1, pela informação fornecida no enunciado do problema sobre a inclinação (coeficiente angular) e pelo fato desta passar pela origem. Ao consultar um exercício que fizemos em sala de aula (figura 46), onde exploramos as funções dinâmicas do *Winplot* para aproximar, de forma tangente, uma curva dependente de um parâmetro real a uma reta fixa (figura 47), eles procuravam proceder da mesma forma, isto é, variavam os parâmetros a, b e c na busca de unir tangencialmente a párabola à reta L_1 através do ponto P.

Exercício: Seja $f(x) = K - (x^4/16)$. Determine o valor da constante K de modo que a reta que passa pelos pontos $M(0,5)$ e $N(5/2,0)$ seja tangente ao gráfico de f. Investigue este exercício com o auxílio de um software.

Figura 46: Exercício a ser explorado com o auxílio da tecnologia.

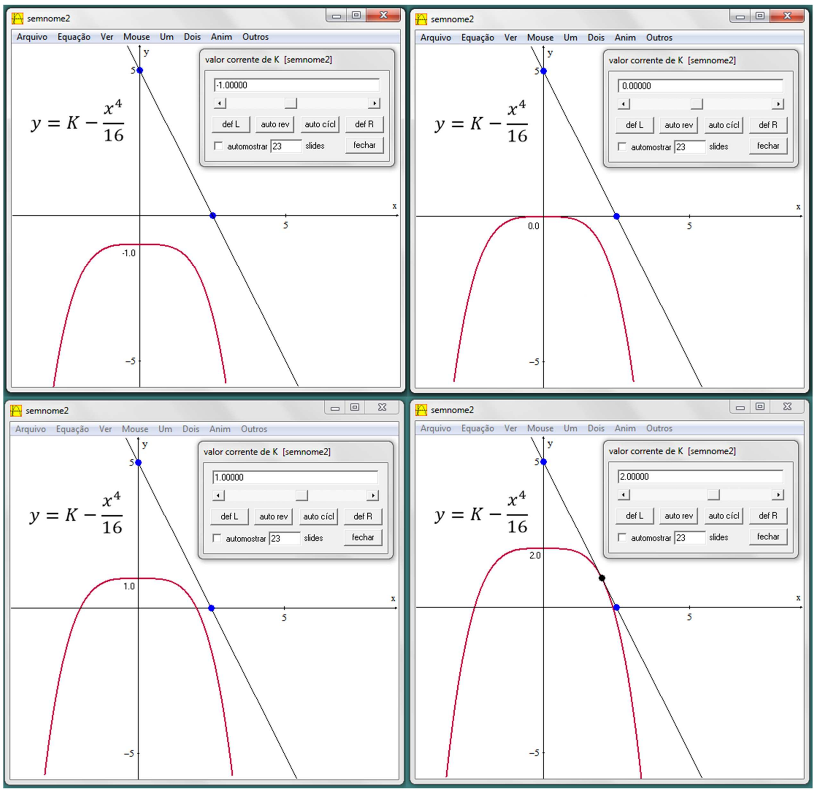


Figura 47: Aproximação da curva de forma a tangenciar a reta determinada por dois pontos fixos.

Na figura 48 podemos visualizar uma tela salva por um grupo em sua análise. Apesar deste empreendimento, algumas equipes abortaram este ensaio, enquanto outras apenas paralisaram, em função das dificuldades que encontravam para aferir as coordenadas do ponto

Q (onde terminaria o gráfico da parábola também de forma tangencial a L_2). Este foi um aspecto bastante produtivo que serviu para enriquecer as discussões finais, onde o embate se travou na possibilidade de determinar as coordenadas deste ponto antes de estabelecer a equação definitiva da parábola.

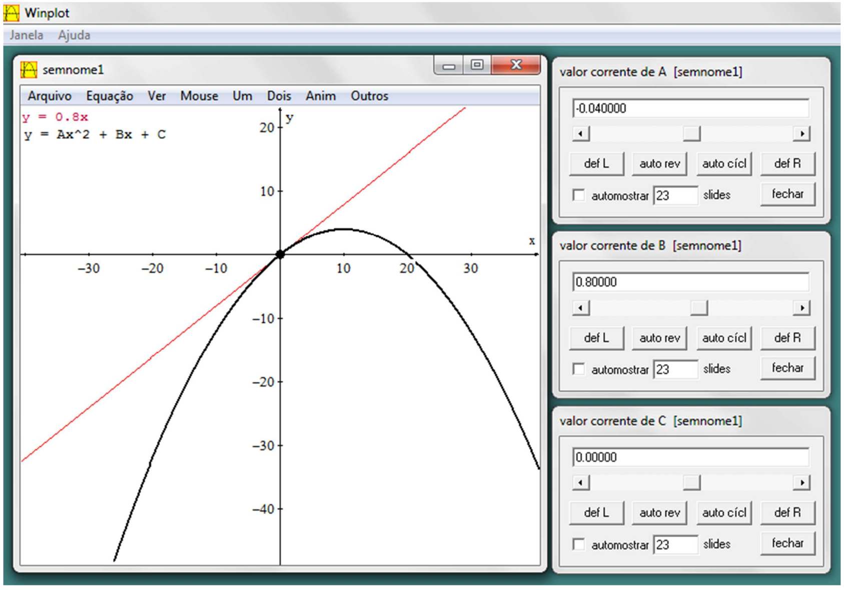


Figura 48: Situação de tangência entre a parábola e a reta no *Winplot*.

Conforme já mencionamos anteriormente, à medida que os recursos computacionais vinham sendo propositadamente utilizados no cotidiano das aulas, em apoio a algumas investigações, os alunos eram cada vez mais incentivados e ganhavam mais traquejo com os programas. As preferências estavam divididas, e isso era bom, pois a depender das necessidades, eles mesmos optavam e decidiam que *software* utilizar em cada situação. Vez ou outra, sempre ao final das aulas, eu corrigia um exercício deixado na semana anterior e buscava sondar os alunos sobre a utilização de alguma tecnologia no seu tratamento. Majoritariamente eles indicavam que os recursos auxiliavam as investigações e validavam eficientemente as respostas dos exercícios.

Retornando aos aspectos da tarefa, mais especificamente o item “d”, em função da familiaridade que os alunos vinham apresentando com os programas percebi estratégias distintas de verificação dos resultados. Enquanto que no *Winplot* alguns grupos utilizavam o valor do coeficiente angular das tangentes para constatar a transição lisa à direita e à esquerda dos pontos, outras equipes, que faziam uso do *GeoGebra*, realizavam este exame por intermédio do traçado dinâmico das tangentes, também por ambos os lados, observando que elas deveriam sobrepor-se. Estes aspectos interessantes motivaram boas discussões na etapa final dos trabalhos, quando os grupos apresentaram as suas produções. Essas formas diferenciadas de abordagem suscitaram boas reflexões, inclusive nos conduzindo a evidenciar a importância prática das derivadas laterais, relembrando o episódio da ladeira que não tinha uma finalização suave.

A utilização dos recursos tecnológicos nesta tarefa permitiu um debate distinto do que estamos acostumados a vivenciar na rotina da sala de aula. Muitos conceitos foram explorados e "vistos" na tela do computador, através de um contexto mais realístico, próximo das atribuições práticas dos engenheiros e projetistas. Ao unir suavemente segmentos de reta e parábola, o *software* permitiu, além da construção dinâmica, o esclarecimento de muitos assuntos, dentre os quais diferenciabilidade, continuidade, ponto de transição suave e etc. Ao final da tarefa os alunos comentavam sobre a sua complexidade e desafios, mas, por outro lado, não disfarçavam o entusiamo que transpareciam em seus semblantes ao concluirem com êxito os trabalhos.

Dificuldades gerais

A classe já estava mais habituada com a realização das tarefas exploratórias. Algumas atividades investigativas também aconteciam em sala de aula, buscando intercalar os trabalhos laboratoriais. Nestas ocasiões os alunos não contavam com o apoio dos recursos tecnólogicos, salvo alguns que possuiam *notebooks* e utilizavam nas aulas. Essas atividades se diferenciavam um pouco das tarefas em pequenos grupos implementadas no laboratório. Um problema interessante e desafiador era projetado no quadro para que o coletivo dividido em dois grandes grupos se debruçasse sobre a sua solução. A ideia subliminar era promover (simular) um ambiente semelhante aos trabalhos laboratoriais, porém com a atenção simultânea de todos. As consultas eram liberadas e as sugestões apontadas para a solução do problema eram elencadas no quadro. Eram estratégias e conjecturas que os grupos podiam apoiar ou refutar. O embate argumentativo era incentivado, as ideias corretas ou equivocadas eram ponderadas e sempre valorizadas e os alunos realizavam explicações e intervenções na lousa. Enfim, além de quebrar um pouco a rotina das aulas, esses ensaios objetivavam estimular e alargar a compreensão geral da classe sobre os aspectos intrínsecos dos trabalhos investigativos matemáticos em ambientes informatizados.

À medida que o semestre avançava as tarefas exploratórias prosseguiam normalmente. Não havia rejeições declaradas ou registradas nos questionários a esta forma de desenvolver parte do programa da disciplina. Muito pelo contrário, a possibilidade de explorar em grupo alguns tópicos do Cálculo no laboratório animava os alunos. As equipes de trabalho já estavam consolidadas e as opiniões manifestadas vinham sempre a elogiar esta maneira de proceder. As dificuldades relatadas estavam cada vez mais voltadas aos aspectos teóricos dos assuntos ao invés do manuseio dos programas computacionais. Nesta tarefa, por exemplo, os maiores contratempos apontados estavam relacionados com os domínios conceituais. Algumas discussões internas dos grupos salientavam ainda algumas inseguranças. Temas como coeficiente angular e interpretação gráfica da derivada, dentre outros, ainda não estavam plenamente consistentes que permitissem uma maior desenvoltura dos alunos. A tarefa exploratória vinha também a contribuir para sanar ou minimizar estes efeitos, pois o problema abordado permitia uma associação direta entre os aspectos teóricos e práticos dos assuntos, ensejando uma maior clareza em sua compreensão.

Do ponto de vista do uso dos programas, já eram esperadas certas habilidades nos comandos que seriam utilizados, tanto no *Winplot* quanto no *GeoGebra*. Isto em função do emprego projetivo e costumaz que eu fazia em sala de aula. O frequente auxílio às exposições teóricas criava na classe uma atmosfera favorável à utilização da tecnologia. Porém, um aspecto singular foi registrado no andamento da tarefa: a dificuldade ainda presente na manipulação das calculadoras científicas. Alguns alunos ainda apresentavam grande embaraço ao trabalhar com as medidas de ângulo nessas máquinas. Eles desconheciam por completo as codificações DEG (do inglês *degree*, que significa grau), RAD (do inglês *radian*, que significa radiano) e GRAD (do inglês *grads*, que significa grado). As informações sobre os ângulos no enunciado do problema (38,66° e −57,99°) remetiam os grupos a utilizarem tais funções na calculadora e o desconhecimento era quase generalizado. Apesar de trabalharem frequentemente no ensino médio – e também na disciplina anterior de Introdução ao Cálculo – com as medidas angulares de "grau" e "radiano", o manuseio das científicas é muito pouco explorado ou quase nem visto. Os diálogos verificados nos grupos sobre esta situação serão explorados detalhadamente no próximo capítulo. Uma orientação geral para a turma foi providente naquele instante. As nomeclaturas e as funções angulares nas científicas foram esclarecidas e a tarefa seguiu. Este episódio ensejou maiores compreensões conceituais na etapa discursiva. De fato, foram momentos bastante proveitosos.

Apesar das eventuais dificuldades encontradas nas tarefas, a sensação positiva que eu captava das reações dos alunos indicavam-me que estas vinham definitivamente para ficar. Sem dúvida elas transformariam significativamente a rotina das minhas aulas. As atividades descritas até aqui basicamente exploraram aplicações e consolidações de conhecimentos. A próxima seria diferente. Ela iniciaria a turma na construção de um novo conceito: o de velocidade instantânea. Uma notável aplicação das derivadas no campo da Física, particularmente na cinemática, surgiria para que os alunos a pudessem explorar com os recursos da tecnologia. É o que veremos a seguir.

6.4. Tarefa 4 – O problema da velocidade instantânea

A tarefa exploratória que destacaremos agora foi adaptada do livro de Stewart (2013) e pode ser vista no anexo 8. Esta é uma atividade que pretende guiar o aluno na construção do conceito de velocidade instantânea. Como bem sabemos, os estudantes já trazem do ensino secundário alguns conhecimentos básicos sobre a cinemática, mais particularmente sobre velocidade e aceleração médias, porém não avançam nos domínios dos limites e das derivadas. Este trabalho objetiva então aprofundar este estudo, descortinando uma das primeiras e mais importantes aplicações do Cálculo Diferencial no campo da Física.

Tradicionalmente eu costumava, em tempos recuados, apresentar de forma exclusivamente expositiva a definição clássica da velocidade instantânea através do limite. Eu vinha reiteradamente reproduzindo a forma didática pela qual fui ensinado na época da graduação. Desta vez, ao invés de expor o assunto conforme os moldes pretéritos, entendi que os alunos poderiam, através de uma tarefa investigativa, explorar este conhecimento no laboratório. Após esta primeira abordagem a complementação dos conceitos com exercícios e problemas continuaria em sala de aula. Certamente que ao avançar no desenvolvimento do assunto oportunidades não faltariam para esclarecer eventuais dúvidas e resgatar possíveis itens conceituais. Eis o problema:

Suponha que uma bola seja solta a partir do ponto de observação de 450 m acima do solo do alto da Torre CN em Toronto/Canadá. Determine a velocidade da bola no instante 5 segundos.

Figura 1: A Torre CN em Toronto foi o maior edifício do mundo por 32 anos (imagem da internet)

A parte introdutória do roteiro busca situar os grupos de trabalho a um fenômeno bastante comum e vivenciado no dia a dia. A partir da clara percepção que todos têm de que a medida indicativa do velocímetro de um automóvel costuma variar ao longo do tempo num determinado percurso, a atividade pretende gerar uma motivação inicial ao assunto. Nesse contexto, a afirmação de que o carro possui uma velocidade em cada instante do movimento procura despertar a curiosidade dos alunos para o tema. Como é possível através do Cálculo Diferencial compreender tal circunstância? Apesar do enunciado referir-se a uma outra situação, o da queda livre de um objeto do alto de uma torre, a semelhança fenomenal de abordagem permite tal aproximação.

Os aspectos históricos não poderiam ficar esquecidos no roteiro da atividade. Ao tratarmos de assunto tão significativo do ponto vista científico, os experimentos pioneiros do italiano Galileu Galilei (1564 – 1642) serviriam magistralmente para enriquecer a tarefa e motivar a turma. Seria a partir da sua descoberta que os alunos iniciariam a investigação do problema proposto. É da seguinte forma que o texto indica o caminho pelo qual os alunos deveriam trilhar:

Por meio de experimentos físicos feitos séculos atrás, Galileu descobriu que a distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda (esse modelo para queda livre despreza a resistência do ar). Se a distância percorrida após t

segundos for chamada $s(t)$ *e medida em metros, então a Lei de Galileu pode ser expressa pela equação*

$$s(t) = 4{,}9t^2$$

Ao adaptar o problema sugerido por Stewart (2013) para abordar o assunto da velocidade instantânea, eu pretendia deixar os alunos mais independentes no desenvolvimento dos trabalhos, de tal forma que o roteiro fosse um guia suficiente para as suas investigações. Inclusive cabe ressaltar que nesta tarefa não foram permitidas as consultas bibliográficas. Os alunos tiveram acesso somente às notas de aula. Nestas, eles poderiam resgatar, possivelmente, algumas informações relevantes sobre limites e derivadas, imprescindíveis a construção do novo conceito. Se eles tivessem acesso aos livros poderiam se antecipar aos resultados. Isto porque a maioria das obras estampa claramente a definição clássica da velocidade instantânea, através do limite, além de vinculá-la à primeira derivada da função horária do movimento, isto é, $v(t) = s'(t)$. Estes seriam exatamente os conceitos que os alunos deveriam estabelecer e a consulta bibliográfica prejudicaria frontalmente esta intenção.

Por se tratar de uma tarefa exploratória que pretendia iniciar os alunos na construção de um novo conceito, a sua estrutura foi elaborada através de uma sequência sistemática de reflexões que deveriam conduzi-los aos resultados principais. Não se trata de uma atividade tão elementar, pois os alunos precisam incorporar às investigações os conceitos de limite e derivada na sua definição clássica. Além disso, a tarefa dedica-se a abordar um assunto de outro campo do conhecimento. As limitações de tempo e a dosagem do grau de desafio também foram elementos que ensejaram cuidadosas atenções na sua elaboração. Tudo objetivava o bom andamento dos trabalhos.

Seguindo o esquema da tarefa, os alunos deveriam preencher primeiramente a tabela 7. Esta pretende fornecer as principais informações que serão úteis no desenvolvimento das questões que virão em seguida. Na tabela pode-se observar a definição da velocidade média e a sua fórmula clássica *"espaço final menos espaço inicial sobre tempo final menos tempo inicial"*. Isto para que os alunos possam se recordar do conceito. Esta é uma etapa relativamente simples da tarefa, pois os alunos têm somente que efetuar os cálculos com os valores de Δt e $s(t) = 4{,}9t^2$ fornecidos. Ao preencher corretamente a tabela, os seguintes valores devem surgir: 53,9; 49,49; 49,245; 49,049 e 40,0049. Eventualmente alguns grupos se confundiram nos cálculos, mas isso seria observado e corrigido quando eles alcançassem o item a) da segunda questão, onde o *software* indicaria categoricamente os valores corretos. E, de fato, assim ocorreu! Alguns grupos tiveram que retornar a tabela para efetuar os ajustes necessários depois que visualizaram a situação dinâmica pelo computador. Aqueles que preencheram corretamente a tabela não hesitaram intuitivamente em conjecturar, já na questão 1, que a velocidade média estava cada vez mais próxima de 49 m/s.

Tabela 7. Tabela proposta na tarefa “O problema da velocidade instantânea”

Δt	Intervalo de tempo: $[5,\ 5+\Delta t]$	Velocidade média (Vm): $Vm = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(5+\Delta t)-s(5)}{(5+\Delta t)-5} =$
1		
0,1		
0,05		
0,01		
0,001		

Na segunda questão, no item a), conforme mencionamos anteriormente, os grupos tiveram a oportunidade de visualizar o gráfico da função $s(t) = 4{,}9t^2$ e verificar detalhadamente os cálculos realizados na tabela. Nesta tarefa o *software Winplot* foi indicado por este apresentar uma maior facilidade e brevidade na análise da situação. Por ser um assunto novo a ser explorado, o quesito “tempo” deveria ser bastante considerado. Numa única janela o programa permite examinar simultaneamente as retas secantes e tangente num mesmo ponto base. Além disso, indica o valor do coeficiente angular destas retas de forma bastante simples e direta, sem maiores manobras operacionais. Esta mesma questão permite também que os alunos possam compreender que o coeficiente angular da reta secante indica exatamente o valor da velocidade média em cada intervalo de tempo $[5,\ 5+\Delta t]$. A figura 49 que acompanha a questão deve auxiliar e fomentar um melhor entendimento. Ao comparar computacionalmente o movimento da secante com os valores obtidos na tabela, espera-se que os alunos já possam ir associando a resposta da questão 1 com o coeficiente angular da reta tangente. Isto será solicitado em seguida.

As discussões seguiam intensamente nos grupos de trabalho. As possibilidades advindas da tecnologia em auxílio à compreensão da tarefa geravam excelentes diálogos, como serão relatados no capítulo seguinte. O ambiente era completamente distinto de quando eu costumava apresentar o mesmo assunto exclusivamente na forma expositiva. No item b) onde se pedia simultaneamente a visualização da tangente e o valor do seu coeficiente angular, os alunos puderam constatar que as suas conjecturas iniciais estavam corretas. Os grupos agora tinham mais elementos para asseverar que à medida que Δt tendia a zero a velocidade média ficava mais próxima de 49 m/s. O *software* apresentava categoricamente este valor como o coeficiente angular da reta tangente. A figura 49 acompanhava a questão e auxiliava este entendimento.

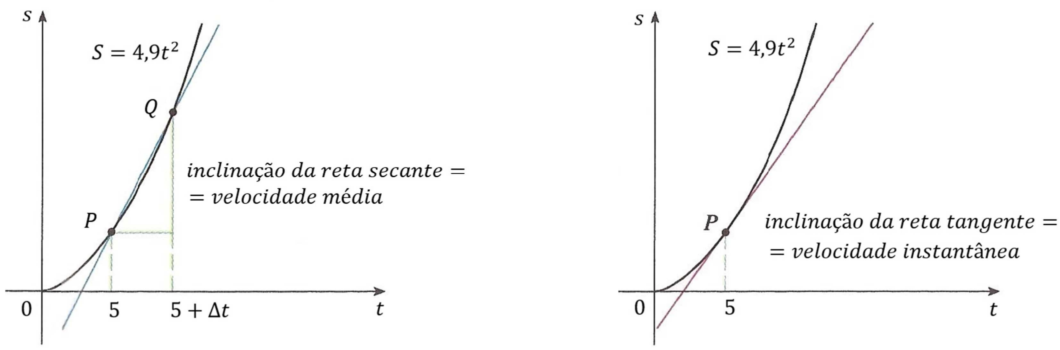


Figura 49: Figuras apresentadas na tarefa "O problema da velocidade instantânea".

Um tanto de dificuldade foi observado no item c) e algumas orientações gerais foram então necessárias. A partir das observações anteriores, os alunos deveriam concluir que a inclinação da reta tangente deveria fornecer a velocidade instantânea do corpo em queda livre. As maiores dificuldades estavam na compreensão do termo "instantânea" na questão. Afinal de contas é exatamente nesta passagem que saímos do conceito de variação "média" para variação "instantânea". O fato de Δt tender para zero conduzia os alunos a perguntarem se o intervalo $[5,\ 5 + \Delta t]$ deixaria de exisitir, se não teria comprimento ou se transformaria num único ponto. Foram momentos bastante produtivos que viriam a enriquecer ainda mais as discussões finais. Neste item, após as elucidações gerais, foi observado que uma grande parte dos grupos respondeu textualmente que *"a velocidade instantânea do corpo é o limite da sua velocidade média quando* Δt *tende para zero"*, com algumas variações na escrita. Mas ao se depararem com a questão seguinte (item d) que pedia para calcular formalmente o limite, as equipes se viram "obrigadas" a explicitar a ideia textual através de um limite matemático. Foi então que as consultas às notas de aula tornaram-se mais intensas. De uma forma geral, as expressões surgiram e variaram dentre as seguintes:

$$\lim_{\Delta t\to 0} Vm \quad \text{ou} \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{ou} \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(5+\Delta t)-s(5)}{(5+\Delta t)-5}.$$

Estas expressões são equivalentes e, calculadas corretamente, resultam na resposta esperada de 49 m/s. E assim ocorreu, depois de alguns percalços nas passagens algébricas.

O item e) surge então com a finalidade de generalizar o estudo. Se ao invés do ponto $t = 5\ s$ quiséssemos determinar a velocidade instantânea num instante t qualquer, qual seria a expressão geral do limite? Observe que no próprio enunciado já se induz a ideia de apresentar uma fórmula para a velocidade "pontual" $v(t)$. Após os grupos passarem pela etapa antecedente, esta se mostrou bem mais tranquila. De fato, basta trocar o valor numérico 5 pelo parâmetro t na fórmula determinada anteriormente. Não foram observados maiores contratempos neste item, de tal forma que majoritariamente a expressão $v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$ foi frequente como resposta. Faltava então vincular esta nova expressão de limite a derivada da função horária do movimento. A questão f) seguinte faria essa solicitação para finalizar a tarefa.

Ao ler posteriormente os questionários pude perceber algumas observações no sentido de que as consultas foram por demais importantes. Alguns alunos afirmaram que sem consultar os registros nos cadernos e realizarem uma comparação, seria mais difícil concluir a tarefa (item f). Isto também ficou evidenciado nas entrevistas. Em relação à "comparação", eles queriam dizer que sem rever os antigos apontamentos sobre derivadas que dizia que

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

seria mais difícil concluir que

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} = s'(t), \text{ isto é, } v(t) = s'(t).$$

Nesta fase do curso todas as derivadas vinham sendo calculadas através das regras práticas e a definição clássica ficou sem uso. Foi somente nas discussões finais que pudemos todos contemplar, após a consolidação desta última relação, que a velocidade instantânea poderia ser obtida muito mais rapidamente através da derivada da função horária $s = s(t)$ no ponto $t = 5\ s$, isto é, a velocidade do corpo em queda livre nesse instante seria

$$s'(t)|_{t=5} = 4{,}9 \cdot 2t|_{t=5} = 4{,}9 \cdot 2 \cdot 5 = 49\ m/s.$$

Esta etapa não foi solicitada diretamente na tarefa. Esperava-se que os grupos pudessem avançar espontaneamente nas explorações e realizar estes cálculos. Caso isso não viesse a ocorrer, este fato seria evidenciado na parte final dos trabalhos. Apenas um grupo prosperou nas investigações e conseguiu apresentar esta conclusão para a classe. Este episódio levou muitos alunos a exclamarem algo do tipo *"Poxa, tão fácil e rápido! Professor, por que não nos disse isso antes!?"*

Esta foi uma atividade bastante interessante onde pudemos novamente aliar, aos processos investigativos, os recursos da tecnologia. Os conhecimentos numéricos, geométricos e analíticos estiveram intrinsecamente interligados viabilizando a exploração mais abrangente do assunto. Foram resgatadas as principais ideias dos limites e derivadas, evidenciando a utilidade das ferramentas do Cálculo em outras áreas do conhecimento. Mais uma vez os alunos puderam desempenhar papéis de investigadores matemáticos, associando a tecnologia às criteriosas consultas. Num renovado ambiente de ensino e aprendizagem eles participaram de forma ativa da construção do conhecimento.

Enquadramento da tarefa e aprendizagem dos conceitos

Novamente pudemos perceber na estrura da tarefa a tríade de conhecimentos orientados pelo *Calculus Reform*. Esta composição buscou harmonizar a abordagem do assunto viabilizando a aprendizagem mais significativa do novo conceito. As ferramentas computacionais integraram a atividade permitindo maiores possibilidades dinâmicas a investigação. As calculadoras científicas também foram utilizadas acrescentando eficiência aos trabalhos. As consultas as notas de aula oportunizaram as pesquisas e reforçaram a cooperação entre os alunos. Todos estes recursos conjugados permitiram uma maior liberdade investigativa para que eles pudessem se debruçar sem maiores pressões na exploração do problema.

Ao propiciar esse ambiente diferenciado de aula repleto de instrumentos e possibilidades didáticas, a classe mostrou-se mais interessada e animada para a aprendizagem. Nas entrevistas e questionários os alunos notabilizaram esta forma singular de trabalhar a disciplina. Alguns destacaram o ineditismo da experiência, principalmente pela possibilidade das discussões em grupos. Diziam não imaginar que poderiam estudar e aprender de uma forma diferente na faculdade. Essa renovação nas aulas de Cálculo representava uma interessante novidade para os alunos, pois eles vinham majoritariamente de experiências mais tradicionais de ensino.

O enquadramento curricular desta tarefa vinha num momento do curso onde as aplicações das derivadas faziam-se mais intensas. Os conteúdos versavam agora sobre problemas de taxa de variação, análise geral do comportamento gráfico de uma função e problemas de otimização. Nesta fase do curso os momentos expositivos eram intercalados por atividades mais práticas, onde alguns problemas interessantes sobre máximos e mínimos eram explorados em sala de aula. São notáveis as dificuldades que os alunos apresentam na abordagem desses problemas. Certamente por estes necessitarem uma série de outros conhecimentos mais sofisticados que lhes são pre-requisitos. Foi numa dessas atividades em sala que disponibilizei algumas latas cilíndricas de mesmo volume (300 ml), porém com formatos diferenciados. Os alunos foram então convidados a efetuar medições nos diferentes raios de base e alturas dessas latas. O objetivo era abordar um problema clássico de otimização presente nas modernas bibliografias do Cálculo. O problema busca determinar as dimensões (raio da base e altura) de uma lata cilíndrica com tampa e volume constante dado de forma que a sua área total seja a menor possível. Depois de realizadas as medições e calculadas as áreas, chegamos à conclusão de que a lata cuja altura media o dobro do raio da base possuia a menor área total. Será que outras latas de mesmo volume e que não foram ali analisadas teriam área total menor? O desafio estava lançado e partimos então para a prova algébrica. Realizamos conjuntamente a demonstração e o resultado foi estabelecido: *de todas as latas cilíndricas de mesmo volume, aquela cuja medida da altura é igual ao dobro do raio, possui a menor área* *total*. Inclusive alguns aspectos econômicos foram levantados na discussão final. Os custos que as empresas têm com os materiais e impressões dos rótulos nas latas deveriam ser levados em consideração nas produções em larga escala, daí encontrarmos no mercado uma grande variedade de embalagens cilíndricas, de mesmo volume, que obedeciam ao padrão calculado. Esta foi uma atividade que se revelou interessante e que motivou a classe para resolver outros problemas semelhantes sobre otimizações.

A utilização dos recursos tecnológicos

Para a exploração da tarefa em destaque nesta seção foi sugerido o uso do *Winplot* nas investigações. Essa escolha estava bastante vinculada à sua utilização na aula sobre a interpretação gráfica da derivada. Naquela época, este programa foi empregado em função da simplicidade e da facilidade dos seus recursos destinados a ilustração do tema. Numa única janela o *software* exibe a reta tangente, as retas secantes, além de informar numericamente os seus coeficientes angulares. A possibilidade de observar simultaneamente todos estes elementos numa única tela certamente viabilizaria uma maior eficiência as investigações, além de impactar o tempo total destinado à sua realização. Todos estes aspectos deveriam ser cuidadosamente considerados no planejamento da tarefa. A indicação do *Winplot* revelou-se propícia também em função da semelhança notável entre as interpretações gráficas da velocidade instantânea e da derivada. De fato, eu pude registrar os comentários de alguns alunos que reconheciam como as análises eram muito parecidas. Enfim, a semelhança e o uso projetivo do *software* na época foram determinantes para sua recomendação.

Na realização da atividade, principalmente no item a) da segunda questão, após compararem os resultados da tabela com os obtidos computacionalmente, os alunos ganharam mais confiança para seguir adiante nas explorações. Eles passaram a compreender graficamente a relação que existia entre a velocidade média e o coeficiente angular da reta secante. A figura 50 exibe a tela capturada por um grupo em ação. Constantemente a minha presença era requisitada para “arrematar” alguma ideia ou esclarecer alguns pontos conflitantes nos grupos de trabalho. Apesar de querer bastante dar uma dica mais direta, eu limitava-me a indicar algumas notas de aulas que eles poderiam consultar em auxílio às questões. Eventualmente algumas orientações gerais eram fornecidas na perspectiva de melhorar a compreensão do novo conceito que surgia.

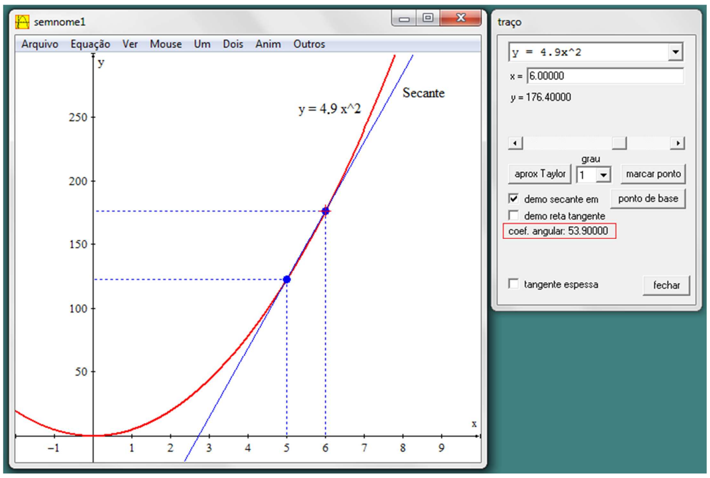


Figura 50: Análise da velocidade média através do *Winplot*.

A estratégia que eu preservara ao longo das aulas para manter a classe em contato frequente com as tecnologias parecia surtir efeito. O emprego projetivo em auxílio às exposições e os exercícios que eles resolviam em casa com o auxílio do *software* revelavam-se eficientes neste aspecto. Obviamente alguns alunos mostravam-se mais estimulados do que outros em futucar e avançar nas possibilidades que os programas ofereciam. As demandas direcionadas a mim, em ocasião das tarefas, eram quase todas voltadas para esclarecer os aspectos teóricos dos assuntos abordados. Vez ou outra, muito raramente, as requisições sinalizavam orientações na manipulação dos comandos dos programas. Obviamente que eu já havia sinalizado para a turma, desde o início do curso, que nas últimas tarefas laboratoriais eles deveriam estar bem mais independentes no uso das tecnologias. A minha interferência seria cada vez menor nesse aspecto. Por conta disso, eles aproveitavam bem as oportunidades de aprendizagem em sala de aula e ganhavam cada vez mais habilidade nos programas.

A utilização do *Winplot* nesta investigação foi bastante destacada pelos alunos nos questionários. Nas entrevistas também pôde-se perceber a positiva referência deste *software* na exploração da tarefa. A sua eficiência gráfica na análise da velocidade média ampliou consideravelmente o entendimento do novo conceito que surgia. A visualização simultânea e dinâmica de todos os elementos geométricos viabilizou a inserção conceitual do limite na caracterização clássica da velocidade instantânea. Posteriormente em sala de aula alguns exercícios de aplicação foram realizados com a finalidade de consolidar a aprendizagem. Um por sinal, bastante interessante, permitiu uma revisita a esta tarefa quando o seguinte desafio foi lançado para a turma: *"Determine a velocidade de impacto da bola, levando-se em conta a altura total da Torre CN"*.

Dificuldades gerais

Relativamente à presente tarefa, foi possível captar das entrevistas as dificuldades que alguns alunos apresentaram na construção do novo conceito físico. Eles afirmavam não recordar com precisão dos estudos de cinemática realizados na disciplina de Física no ensino médio. Isto não ficou perfeitamente claro visto que outros alunos conseguiram avançar com mais desenvoltura nos trabalhos. Ainda que estas sensações tenham sido registradas, outro aspecto ficou também evidente em suas declarações: as discussões finais foram por demais proveitosas. Quando os grupos foram chamados a apresentar as suas produções para a classe, todas as ideias puderam ser confrontadas e esclarecidas. Os alunos foram unânimes em destacar a relevância do professor nessa etapa final da tarefa. As intervenções e explicações realizadas consolidavam com segurança os conceitos explorados e proporcionavam a compreensão integral da tarefa. Tudo isso realmente reforça a importância desta fase nos trabalhos exploratórios. Se ela não acontecer ou acontecer com precariedade, o sentimento que fica é o da incompletude das ações e do estabelecimento seguro do conhecimento.

Na etapa discursiva pudemos ainda produzir valiosas reflexões acerca da expressão "instantânea" do novo conceito que surgia. A transição da taxa média da velocidade para sua taxa instantânea gerou entusiásticos debates. O que ocorria com o intervalo $[5,\ 5+\Delta t]$ quando Δt tendia para zero? Uns defendiam que o intervalo deixaria de existir e se transformaria num ponto. Outros que ele continuaria existindo, porém com comprimento infinitesimal. Realmente estes entendimentos eram muito próximos e a compreensão exata somente viria a se firmar no desenlace das discussões. Esses momentos, sem dúvida alguma, são bastante significativos e renovam por completo a relação de ensino e aprendizagem.

Conforme já foi mencionado no capítulo anterior, outras tarefas exploratórias foram realizadas, porém não foram catalogados neste estudo. Nesta, já foi possível notar uma menor dependência dos alunos relativamente à manipulação das tecnologias. E assim continuou até os útimos trabalhos. As suas maiores demandas estavam mais vinculadas aos aspectos teóricos da disciplina. As dúvidas e as dificuldades que surgiam eram amenizadas em função das criteriosas consultas permitidas, inclusive nesta atividade, onde as anotações sobre a definição da derivada auxiliou a formulação clássica da velocidade instantânea. As investigações realizadas no laboratório favorecia a aprendizagem dos alunos ao tempo em que traziam uma motivação maior para as aulas de Cálculo.

Capítulo 7

Os grupos de trabalho em ação

> As investigações potencializam o desenvolvimento da capacidade de reflexão dos alunos sobre a sua própria experiência matemática. Elas motivam, ajudam a desenvolver capacidades de ordem superior, em particular, o raciocínio e a perspicácia, para além de constituírem um contributo significativo para que os alunos percepcionem a Matemática como uma ciência em permanente evolução e construção. O desenvolvimento do espírito investigativo suscita uma maior autonomia de trabalho e promove excelentes interações entre os pares.
>
> Cunha, M. H., 1998 (p. 57)

Neste capítulo adentraremos nos aspectos mais intrínsecos das tarefas do ponto de vista dos grupos em ação. As estratégias e raciocínios utilizados, os diálogos e conjecturas formuladas, as dificuldades específicas e as superações, a evolução da aprendizagem, a visão de todos os atores envolvidos na experiência, enfim, as principais características procedentes dos processos exploratórios e investigativos. A percepção e a análise destes elementos, em todas as suas nuances por intermédio dos variados instrumentos de pesquisa empregados, constituem a essência fundamental deste estudo e fazem também parte deste capítulo.

Como já foi salientado, a turma era composta por 36 alunos, sendo 26 novatos e 10 que frequentavam pela segunda vez a matéria, todos oriundos da disciplina de Introdução ao Cálculo. Esta disciplina realiza uma revisão geral da Matemática ensinada no nível médio e serve como uma espécie de nivelamento para o ingresso no componente curricular de Cálculo Diferencial e Integral I. Para efeito desta pesquisa, foram formados 12 grupos, com três alunos cada, para realização das tarefas exploratórias no laboratório de informática da instituição. Destes 12 grupos, dois se voluntariaram para as observações mais criteriosas desta pesquisa. Designaremos, quando necessário, esses dois grupos por G1 e G2. Os seus componentes serão nomeados com os seguintes pseudônimos: Alberto, Ricardo e João, membros do G1 e Mônica, Sandra e Flávia, membros do G2. Com a finalidade de dinamizar a leitura dos principais fatos extraídos das atividades exploratórias, evitando-se observações repetidas e diálogos semelhantes, mesclaremos as ações dos grupos de trabalho, permitindo a continuidade e a fluidez da análise nas tarefas.

Os estudantes já se conheciam deste o semestre pregresso, quando frequentaram as aulas de Introdução ao Cálculo. Preservavam um bom relacionamento entre si e também em sala de aula na convivência com o professor. Mantive algumas conversas com o docente da disciplina anterior, onde pude levantar algumas informações de cunho acadêmico. Os alunos eram considerados, de uma forma geral, medianos, muito esforçados e participativos. Numa escala de zero a dez, a média dos alunos que foram aprovados para cursar Cálculo Diferencial e Integral I era de 7,1. Não haviam participado de trabalhos em grupo, não realizaram tarefas exploratórias e investigativas e nem fizeram uso formal dos programas computacionais *Winplot* e *GeoGebra*. As aulas eram majoritariamente expositivas e com avaliações escritas tradicionais. Esta seria então a primeira experiência deles com a metodologia de ensino exploratório e a utilização dos recursos tecnológicos em tarefas investigativas.

7.1. Tarefa 1 – Aplicação de limites no cálculo de áreas

Nesta tarefa foi possível adequar, aos estudos iniciais que os alunos realizavam sobre a teoria dos limites, uma notável aplicação sobre o cálculo de áreas de regiões planas. Os contextos históricos enriqueceram ainda mais os trabalhos, exibindo um painel evolutivo desta teoria, desde a Grécia antiga até os modernos tempos da Europa. A possibilidade de antecipar esse conteúdo, que geralmente é abordado ao introduzir o conceito de integral definida, gerou uma motivação maior para o estudo dos limites. Os alunos sempre perguntavam sobre a utilidade deste assunto. Ao trabalhar as ideias subjacentes aos tópicos dos limites, numa perspectiva mais atraente e realística, objetivava-se também complementar o conteúdo, cujas bibliografias tradicionais frequentemente trazem apenas as conceituações e as técnicas operatórias, conforme já pudemos explicitar.

Ao tempo em que os alunos ampliavam os seus conhecimentos sobre os limites e se capacitavam nas técnicas, eles passariam a investigar o valor da área da região delimitada pela cúbica $f(x) = 16x^3$ no intervalo $[0, 1]$. Uma série de ingredientes novos caracterizariam os trabalhos: análises gráficas e construções geométricas computacionais, consultas bibliográficas e virtuais, exame da fórmula de Riemann, demonstrações matemáticas, conjecturações, dentre outros. O cenário estava pronto para os grupos iniciarem as suas primeiras experiências exploratórias. Apresento na seção que se segue as principais circunstâncias que caracterizaram este momento. O anexo de número 5 deverá ser útil para o acompanhamento das ações.

Raciocínios e processos

Antes de apresentar o roteiro da tarefa aos grupos, busquei refletir brevemente com a turma sobre a importância daquele trabalho e relembrei algumas perguntas que foram colocadas em classe: *Qual a necessidade de estudar limites? Quais as aplicações práticas dos limites?* Frequentemente os alunos indagavam sobre a utilidade dos conteúdos matemáticos que estavam a estudar. Esta tarefa veio também a responder a estes questionamentos. Expliquei que aquela atividade deveria conduzi-los na exploração do tema (limites) num contexto prático, útil e muito importante para o curso. Justifiquei ainda a relevância dos aspectos históricos presentes no roteiro e destaquei a atenção que eles deveriam ter nas construções algébricas e nas consultas. Requisitei ainda que eles encaminhassem por e-mail todas as imagens de tela que justificassem as suas análises e argumentações na resolução da tarefa.

Antes que eles iniciassem as explorações fixamos um pouco mais a atenção nos aspectos históricos. A ordem cronológica em destaque no texto evidenciava os avanços das técnicas engenhosas para o cálculo de áreas, desde as primitivas e brilhantes estratégias de Eudoxo e Arquimedes, passando pelas descobertas geniais de Newton e Leibniz e aprimorando-se com as habilidades de Bernhard Riemann. Relembramos ainda as discussões realizadas em sala de aula quando ilustramos a aplicação do limite no cálculo da área delimitada pela parábola de equação $y = x^2$ no intervalo $[0, 1]$. Estas ponderações precederam as ações práticas dos grupos que partiriam agora para as explorações.

Já se percebia um ambiente renovado e dinâmico, completamente diferente das costumeiras aulas de Cálculo em sala de aula. Os alunos já se mostravam mais ativos em seus grupos. As discusões internas aumentavam os "ruídos" no laboratório, mas cada equipe estava concentrada na exploração inicial da tarefa. Ao tempo em que eu circulava pelo laboratório e observava discretamente as produções das equipes de trabalho, o grupo 1 já discutia estrategicamente o preenchimento da tabela 1 (episódio A_{T1}):

Episódio A_{T1}:

Ricardo: Eu lanço [os números] no computador e você preenche a tabela.

João: Ok! Quanto deu pra 4?

Ricardo: 6,25.

Alberto: E pra 10?

Ricardo: 4,84. (e seguem)

Esse procedimento continua até o grupo extrapolar os valores indicados na tabela, inserir dez milhões de retângulos e o *software* travar! Porém, antes disso, eles registram um milhão de retângulos e afirmam (conjecturam!) que o valor exato da área é de 4 unidades (episódio B_{T1}). Por mais que busquemos elucidar precisamente o conceito de conjecturar em Matemática, como uma presunção, uma evidência ou uma forte suposição que necessita de uma demonstração cabal, os alunos acabam sempre por afirmar categoricamente os resultados que encontram. Obviamente as provas ou demonstrações são relativizadas em cada nível de ensino, porém o tempo, a continuidade dos estudos e a maturidade se encarregam de aprimorar e consolidar este conhecimento.

Episódio B_{T1}:

Alberto: E pra 1.000.000?

Ricardo: 4,00001. O valor da área é 4! (neste instante conjecturam o valor da área)

João: Verdade! Ponha mais um zero aí... E pra 10.000.000?

Ricardo: Travou!

Em épocas recuadas eu costumava realizar todas as etapas e análises desta tarefa em sala de aula, de forma expositiva e com o auxílio do datashow. A vantagem que constatei, do ponto de vista didático, é que ao invés deles acompanharem passivamente estas construções, eles mesmos os produzem em pequenos grupos. A postura mais laborativa dos alunos nas investigações proporciona a mudança significativa na relação de ensino e aprendizagem. Certamente que este é um ganho motivador e qualitativo inestimável que não pode ser mensurado integralmente no momento exato da ação, mas as respostas registradas nos questionários[1] e entrevistas[2] já demonstram isso. Algumas foram selecionadas para evidenciar estes aspectos:

> Após a introdução do assunto em sala de aula, que por sinal foi muito bem explicado, realizar uma tarefa exploratória em grupo, podendo discutir as ideias e comparar as respostas com o auxílio de um computador, torna a atividade muito mais interessante. (Ricardo, E_1)

> Só o fato de saírmos [da sala de aula] para realizar uma atividade no laboratório, diferente das que estamos acostumados, a aprendizagem fica muito mais motivadora. (João, E_1)

> São [atividades] bastante motivadoras, diferentes e que contribuem muito com a nossa aprendizagem. O conteúdo abordado torna-se mais prático e agradável! É como se estivéssemos construindo o nosso conhecimento a partir das investigações e das observações no *software*. (Alberto, E_1)

No grupo 2 as discussões eram semelhantes e as ações eram também estrategicamente divididas. Uma aluna manipulava mais o computador, outra fazia os registros escritos enquanto uma terceira mediava as discussões de posse do livro. Nesse instante as alunas requisitam a minha presença em função das dificuldades que sentiam para ampliar o

[1] Designaremos com a notação Q_n as respostas dos alunos ao questionário de número n.

[2] Designaremos com a notação E_n as respostas dos alunos a entrevista de número n.

gráfico e visualizar melhor a totalidade dos retângulos. A primeira visualização realmente não permite ver com precisão toda a composição. Propositadamente a função $f(x) = 16x^3$ também havia sido escolhida para estimular os alunos a futucarem mais o programa. Com isso, foi possivel constatar nas respostas aos questionários, como veremos adiante, que ao tempo em que eles exploravam a tarefa, aprendiam um pouco mais dos seus recursos. Ao perceber que a visualização gráfica adequada era uma dificuldade mais generalizada, dei algumas orientações coletivas que permitiram que os grupos realizassem uma apresentação esteticamente melhor. A figura 51 abaixo foi capturada pelo grupo 2 depois de procederem os ajustes.

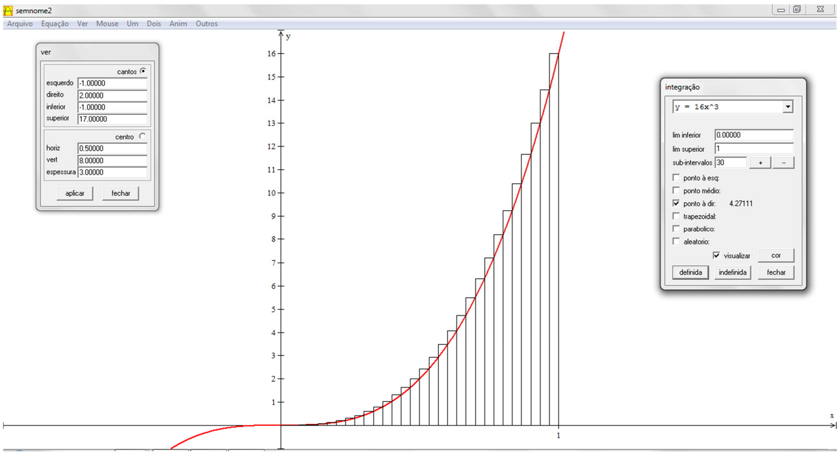


Figura 51: Tela capturada pelo grupo 2 nas suas investigações.

Em função da ótima precisão fornecida pelo *Winplot* no cômputo das áreas dos retângulos, tanto G1 quanto G2 apresentaram respostas iguais a 4 para a questão 2. De fato, esta é a resposta intuitivamente esperada quando se realiza corretamente os procedimentos computacionais. Após a correção das tarefas pude constatar que todos os demais grupos conjecturaram este mesmo valor. Se algum valor diferente fosse encontrado, certamente que este seria confrontado na etapa posterior, quando se exigiria o valor exato da área através da manipulação algébrica da fórmula de Riemann.

Alguns grupos tomaram a evidência computacional como uma prova matemática. Após constatarem, através do *software*, que o valor da área requisitada era de 4 unidades, alguns alunos indagaram a necessidade de demonstrar algebricamente o resultado "(...) pra que demonstrar se o computador já calcula o valor exato?" (E_1); "(...) o computador ao exibir o valor exato não deve substituir a longa demonstração?" (E_1). Certamente por esta etapa ser a mais laboriosa e exigente, em termos de análise e raciocínio, algumas resistências a etapa demonstrativa foram percebidas. Nesse instante foi necessário estimulá-los para prosseguirem nas explorações, inclusive orientando-os sobre as possíveis consultas bibliográficas e as notas de aula, quando ilustramos o caso semelhante da parábola. Já na questão 3, na parte demonstrativa, as discussões seguiam no grupo 2 (episódio C_{T1}):

Episódio C_{T1}:

Sandra: Qual o valor da base?

Mônica: É igual a 1. Não é o tamanho do intervalo?

Sandra: Não! Não tem que dividir [o intervalo] em n partes!? Observe aqui... (apontando para um trecho do livro)

Flávia: Quantos retângulos vamos colocar?

Mônica: São muitos! Vai tender a infinito... (observando o livro)

Sandra: Acho que por isso usaremos este limite aqui. (novamente apontando para um trecho do livro). Vamos verificar com o professor...

As consultas contribuíram bastante para o desenvolvimento da tarefa. As ilustrações realizadas em sala de aula, no caso da parábola, não foram aprofundadas exatamente para que os alunos pudessem estudar um pouco mais o tema e se prepararem minimamente para a atividade laboratorial. No diálogo acima se percebe ainda um pouco de insegurança nas afirmações preliminares que visam a determinação do valor exato da área através da manipulação da fórmula de Riemann. Porém, com o auxílio eficiente da consulta, o grupo consegue avançar nos raciocínios e investigações. A comunicação prossegue ativa revelando o caráter de protagonismo das alunas na exploração dos conhecimentos:

Sandra: Professor, o valor da [medida] base [de cada retângulo] é $1/n$? Esse é o valor de Δ_{x_1}? (como eu estava por perto do grupo, a aluna aproveita e faz uma pergunta. Eu limito-me a apontar para o livro e digo: observem atentamente este exemplo, ele é muito semelhante! Aí vocês encontrarão a sua resposta!)

Mônica: Deve ser o valor de todos Δ_{x_i}...

Flávia: Por que?

Mônica: Ora, não foi dividido tudo [todo o intervalo] em partes iguais? Olhe isto... (analisou no livro e indicou na tela do computador a divisão equitativa dos retângulos. A aluna raciocinava conforme o modelo apresentado no livro)

Sandra: Deve ser... E a altura [do retângulo]?

Mônica: Observe (apontando para o livro), aqui ele usa o valor da função no ponto. É a imagem! (novamente a aluna raciocina conforme o modelo pesquisado no livro)

Sandra: Vai ficar grande demais! (reportando-se a expressão do limite apresentado no livro). Vamos verificar com o professor...

De fato, o limite que expressa o valor da área exata tem desenvolvimento bastante longo e trabalhoso. Elas puderam notar claramente esse aspecto e isso foi bastante comentado nas discussões finais. Mas essa também era uma percepção importante a ser evidenciada na tarefa, pois a turma iria estudar mais adiante, no capítulo das integrais definidas, o Teorema Fundamental do Cálculo que simplifica por demais estes resultados. Pude perceber que apesar do notável envolvimento e entusiasmo com a tarefa, este grupo requisitava mais a minha presença para certificar-se dos seus desenvolvimentos.

As investigações seguiam e alguns grupos, a exemplo do grupo 1, já conseguiam montar a expressão do limite que determinaria o valor exato da área (cabe observar que pelo limite ser expresso através de uma única fórmula – a fórmula de Riemann – as equipes tinham raciocínios e soluções muito próximas). Ao se depararem com soma $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$, tiveram dificuldades em avançar no problema em função das infinitas parcelas que surgiam no cálculo do limite. Alguns grupos realizaram cálculos equivocados e chegaram a conclusões contraditórias. Percebendo os enganos, procederam aos ajustes necessários (depois de algumas orientações coletivas) e seguiram. Esta circunstância foi bastante útil para as discussões, onde os grupos puderam comentar sobre os equívocos produzidos. Nas entrevistas realizadas posteriormente aos trabalhos exploratórios, os alunos recordaram os erros cometidos (inclusive por outras equipes) e revelaram a importância desses momentos para a aprendizagem. As expressões abaixo evidenciam este aspecto:

> Nas discussões finais acabo por aprender mais, pois os erros cometidos por outros grupos esclarecem também as nossas dúvidas. (Flávia, E_1)

> Os debates finais são muito bons, pois nos estimula a falar sobre as nossas soluções. Com isso melhoramos o nosso raciocínio e reforçamos o nosso aprendizado. (Sandra, E_1)

Ainda em relação à soma dos cubos, algumas equipes, a exemplo da equipe 2, requisitaram a minha presença para que eu desse a fórmula desejada para a simplificação do limite, pois o livro trazia apenas a expressão quadrática $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = [(n^2 + n)(2n + 1)]/6$. Eu expliquei que esta também era uma etapa investigativa, onde eles deveriam pesquisar a fórmula necessária para dar continuidade à solução do problema. Foi assim que alguns alunos partiram para a biblioteca em busca de alguma obra de Álgebra que abordasse o tema, enquanto outros optaram por pesquisar a fórmula pela internet. Esta situação demonstra o caráter de dinamismo na exploração da tarefa e do protagonismo dos alunos na construção do conhecimento.

O grupo G1 demonstrava mais segurança no desenvolvimento da tarefa. Os alunos conseguiram a fórmula $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = [n(n + 1)/2]^2$ através da internet e já discutiam os procedimentos demonstrativos finais (episódio D_{T1}):

Episódio D_{T1}:

Ricardo: E agora que já temos [a fórmula]?

Alberto: Aqui ela foi substituída... (apontando para um trecho do livro)

Ricardo: Vamos lá, substitua então e vamos calcular [o limite].

(após a substituição os alunos sentem algumas dificuldades na simplificação. Novamente os raciocínios algébricos utilizados estão baseados no caso pesquisado da parábola)

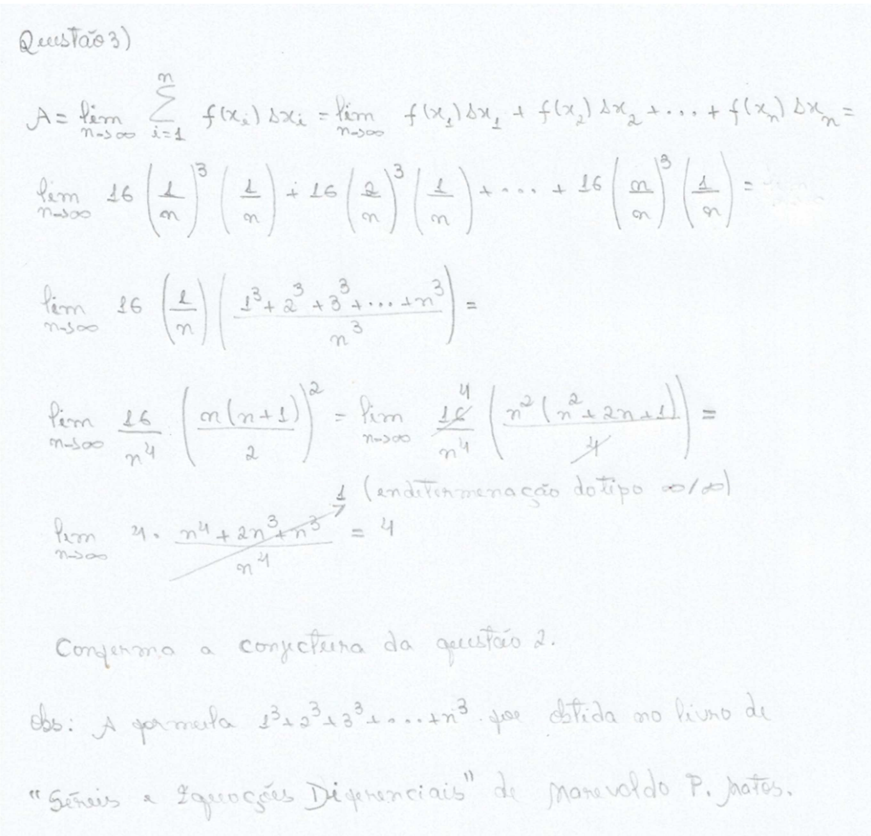
João: Deu errado... Deu 8! (eles já esperavam encontrar 4 como resposta em função da conjectura que fizeram diante das evidências computacionais)

Ricardo: Vamos refazer as contas com calma.

Alberto: Deve ter sido algum sinal...

(depois que observo detalhadamente as passagens algébricas, percebo equívocos nas contas e solicito que refaçam, desta vez com mais atenção, os cálculos numéricos)

Apesar do contratempo que o grupo apresentou na simplificação da expressão algébrica, que consistia basicamente nas regras de potenciação e fatoração, ao alcançar a sua forma mais simples, calcularam com facilidade o limite. Nesse instante recordaram as técnicas dos limites estudadas em sala de aula e perceberam a sua importância. Fiz questão de frizar este aspecto, realçando a relevância desse tópico disciplinar. Depois que o grupo finalmente chegou ao resultado esperado a satisfação foi notória. Alberto ainda pôde-me perguntar: *"... e se não existisse uma fórmula pronta para a expressão [soma dos cubos], como chegaríamos até a resposta? Existem fórmulas matemáticas para todas as expressões?"* Essa questão proposta era ótima e seria mais bem explorada nos debates finais, onde todos poderiam localizar as principais dificuldades encontradas na tarefa, como foram superadas e as estratégias utilizadas. A solução desenvolvida pelo grupo 1 e o raciocínio utilizado na simplificação da fórmula de Riemann podem ser vistas na figura 52. Pode-se perceber que o grupo desenvolveu bem a fórmula. Eles fizeram a substiuição apropriada da expressão que reduz o somatório dos cubos, identificaram a indeterminação (do tipo ∞/∞), aplicaram a técnica adequada e confirmaram a conjectura.



Questão 3)

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_n)\Delta x_n =$$

$$\lim_{n\to\infty} 16\left(\frac{1}{n}\right)^3\left(\frac{1}{n}\right) + 16\left(\frac{2}{n}\right)^3\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + 16\left(\frac{n}{n}\right)^3\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} 16\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1^3+2^3+3^3+\dots+n^3}{n^3}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{16}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{16}^{\,4}}{n^4}\left(\frac{n^2(n^2+2n+1)}{\cancel{4}}\right) =$$

1 (indeterminação do tipo ∞/∞)

$$\lim_{n\to\infty} 4 \cdot \frac{n^4+2n^3+n^3}{n^4} = 4$$

Confirma a conjectura da questão 2.

Obs: A formula $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$ foi obtida no livro de "Séries e Equações Diferenciais" de Marivaldo P. Matos.

Figura 52: Solução apresentada pelo grupo 1 a tarefa exploratória.

Ao final dos trabalhos, os alunos tiveram um tempo aproximado de meia hora para responderem o questionário (anexo 10). As questões versavam mais especificamente sobre o que eles acabaram de vivenciar e produzir na tarefa e buscavam objetivamente focalizar: a compreensão acerca de uma utilidade prática dos limites, as principais dificuldades enfrentadas e a utilização dos recursos tecnológicos. As questões de marcar vinham sempre acompanhadas de uma solicitação de justificativa ou um comentário mais reflexivo, isto para permitir uma manifestação mais livre e espontânea dos participantes. Com a finalidade de facilitar e dinamizar a leitura e análise dos dados, estes vieram acompanhados de gráficos ilustrativos. Por ora, fiquemos com a análise do questionário aplicado ao fim desta tarefa.

Questionário

A primeira pergunta do questionário era bastante direta e objetiva *"Você considera que esta atividade, realizada em grupo e com auxílio do computador, o ajudou a compreender melhor uma utilidade prática dos limites?".* Os alunos deveriam marcar apenas "sim" ou "não" a esta pergunta, mas, além disso, deveriam tecer comentários sobre *"Que aspectos na realização dessa atividade você considera que mais contribuíram para formar a sua opinião? Explique."*. Para a pergunta principal 90% dos alunos responderam "sim" e outros 10% responderam "não", sendo que estes últimos disseram já possuir algum conhecimento sobre o assunto e a sua importância prática.

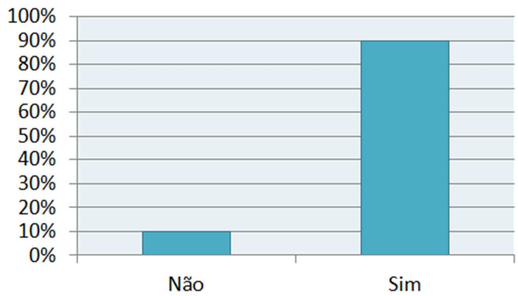


Figura 53: Resposta dos alunos a primeira pergunta do questionário n° 1.

Não era adequado, neste momento, questionar sobre a aprendizagem da turma sobre o tema limites. Paralelamente a esta tarefa, realizada no laboratório, ainda estávamos a abordar o assunto e avançar nos conhecimentos em sala de aula. Esta pergunta objetivava mais a responder sobre a inquietação ou a curiosidade que os alunos colocavam sobre a utilidade prática deste conteúdo. É frequente encontrarmos nas bibliografias este conteúdo sendo tratado majoritariamente por técnicas e fórmulas que pretendem, tão somente, simplificar os limites, num contexto extremamente fastidioso e mecânico. O cenário das respostas já era relativamente esperado visto que a tarefa os conduziu a exploração do tema num contexto prático e muito importante para o curso. Além disso, a atividade possibilitou abordagens históricas, formulações de conjecturas, construções algébricas, investigações computacionais e os mais diversos tipos de consultas, sem contar os preciosos diálogos em grupos. Nos comentários, em geral, os alunos afirmaram que o uso do computador propiciou encontrar eficientemente a solução do problema e a entendê-lo, além de compreenderem uma aplicação prática do limite, no caso da exaustão por retângulos: "Eu que sempre perguntava sobre a utilidade, pude compreender melhor, através do método de exaustão, a utilidade e o significado dos limites. O programa ajudou bastante no entendimento da fórmula e também para encontrar o valor da área" (Q_1). Destacaram também que as discussões em grupo favoreceram bastante a compreensão do tema: "Compreendi melhor a utilidade dos limites. Um dos aspectos que mais contribuiram para a compreensão foi a realização da atividade em grupo. Isto permitiu a troca de informações com os colegas para resolver integralmente a tarefa e entender o método de exaustão" (Q_1). Os alunos também evidenciaram novas aprendizagens do *software* em função das necessidades das investigações: "Sim, a tarefa ajudou a entender a utilidade [dos limites]. O auxílio do computador para a visualização gráfica nos ajudou a compreender melhor a fórmula e a entender o limite. Pude também aprender mais recursos do programa em função da necessidade de enxergar melhor o gráfico" (Q_1). Todos esses aspectos comprovaram a eficiência da atividade diferenciada aplicada. Os alunos puderam realmente compreender uma utilidade prática dos limites através da tarefa exploratória e investigativa oportunizada com o apoio da tecnologia.

Para a realização da tarefa foi sugerido o uso do computador com o *software Winplot*. Perguntados sobre a forma como utilizaram o recurso tecnológico, eles deveriam marcar uma das seguintes alternativas: para toda a resolução da atividade; apenas para visualização do gráfico; apenas para verificação da solução ou outra (qual ?). Posteriormente deveriam comentar acerca das opções escolhidas.

As respostas foram distribuídas da seguinte forma: “apenas para a visualização do gráfico” 46% dos alunos; “apenas para a verificação da solução” 45% dos alunos e “para toda a resolução da atividade” os 9% restantes.

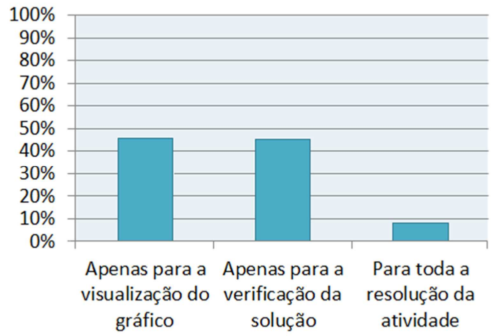


Figura 54: Resposta dos alunos a segunda pergunta do questionário n° 1.

Observe que 91% dos alunos utilizaram o *software* apenas para visualizar o gráfico ou verificar a solução. A limitação de tempo para a realização da tarefa não permitiria que os alunos esboçassem à mão o gráfico e construíssem também manualmente os retângulos para conjecturarem o valor da área, neste sentido o programa mostrou-se bastante útil na otimização do tempo das investigações. Também o *software* revelou-se vantajoso na contabilidade eficiente do somatório das áreas dos retângulos. Nos comentários, em geral, os alunos evidenciaram o auxílio do programa para visualizar o gráfico da função e a disposição dinâmica dos retângulos, além de compreenderem o desenvolvimento algébrico do limite: “A partir da visualização do gráfico pudemos observar os [sub] intervalos, que eram as bases dos retângulos, e passamos a entender o processo do limite” (Q_1). Revelaram também que o programa foi eficaz para conjecturar o valor da área e para confirmar os cálculos: “Usamos o *Winplot* para visualizar o gráfico, encontrar o valor da área e conferir o resultado, pois todos os cálculos demonstrativos foram feitos à mão” (Q_1); “Com o auxílio do *Winplot* pudemos visualizar melhor a função, os retângulos e obter o valor da área. Com tudo isso foi possível verificar a validade do resultado obtido através do cálculo” (Q_1). Fica patente a utilidade da tecnologia em auxílio valoroso as investigações e explorações no Cálculo.

Relativamente às dificuldades encontradas na realização da tarefa, os alunos deveriam responder objetivamente "sim" ou "não", porém a resposta deveria vir acompanhada das explicações sobre a opção escolhida. As particularidades das justificativas representariam, em essência, a finalidade do questionamento. Para aqueles que tiveram algum tipo de dificuldade, algumas das seguintes alternativas deveriam ser marcadas para balizar as suas reflexões: na compreensão da tarefa; na construção da fórmula do limite que calcula o valor da área; no uso do *software;* na realização dos cálculos ou outra (qual ?).

76% dos alunos responderam que "sim", isto é, apresentaram algum tipo de dificuldade e outros 24% responderam "não". Todos os que manifestaram dificuldades apontaram que estas se encontraram "na construção da fórmula do limite que calcula o valor da área" (52% dos alunos) e "na realização dos cálculos" (48% dos alunos). De fato, estas duas características são muito próximas e alguns alunos marcaram simultaneamente estas duas alternativas.

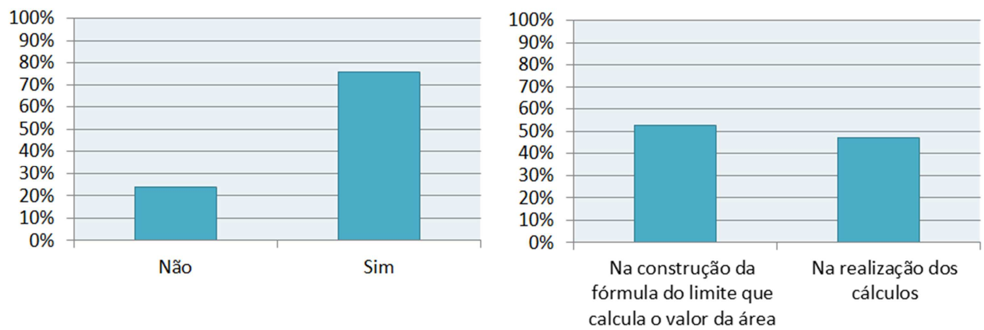


Figura 55: Resposta dos alunos a terceira pergunta do questionário nº 1.

Esse era um resultado relativamente esperado por duas razões: a primeira porque o comando *"integrar f(x)dx"* do *Winplot* é de fácil manuseio e entendimento geométrico, daí os alunos não expressarem maiores contratempos no uso do programa, sem contar que houve uma orientação geral e específica para a sua utilização. Esta ação facilitou o uso do *software:* "Tive mais dificuldades nos cálculos. Não tive dificuldades no programa, pois as orientações do professor foram claras" (Q_1). A segunda porque é notória que as maiores demandas de análise, raciocínio e habilidades matemáticas, estavam na manipulação da fórmula de Riemann e nos cálculos algébricos procedentes desta elaboração. Ficou evidenciado que os maiores obstáculos concentraram-se nesta etapa demonstrativa, mas as consultas, as discussões em grupo e a ilustração do caso da parábola serviram eficientemente para contornar as dificuldades: "A maior dificuldade foi no tratamento da fórmula. As discussões em grupo e as consultas [bibliográficas] foram muito úteis, nos auxiliaram bastante, principalmente o caso da parábola" (Q_1); "No início a tarefa parecia bem difícil e complicada, mas ao final, quando as coisas ficaram prontas, percebemos como tudo ficou bastante claro e compreensível. Sem as consultas dificilmente chegaríamos à solução do problema" (Q_1). Apesar da maioria dos alunos (74%) ter apresentado algum tipo de dificuldade, os recursos mobilizados, tais como as orientações, as consultas criteriosas e o compartilhamento de informações entre eles minimizaram substancialmente os obstáculos.

Síntese

A minha preocupação constante como docente em buscar situações interessantes e motivadoras para explorar os assuntos do Cálculo é que influenciou decisivamente a antecipação desta tarefa. A oportunidade de contextualizar o tema de limites no início do curso, numa referência ao cálculo de áreas delimitadas por curvas, com o auxílio da tecnologia, estimularia os alunos a adentrarem o conteúdo não mais com a visão meramente mecânica do aprendizado, mas sim motivados por uma notável aplicação da disciplina. Desde o ensino fundamental até ingressarem na universidade, o círculo (e setores deste) é a única região curva que eles conhecem a área, e raramente por construções geométricas, mas geralmente por simples apresentações da fórmula $A = \pi r^2$. Eles passariam a conhecer, de maneira inédita, como são obtidas as áreas de regiões curvas mais gerais, com abordagens evolutivas do ponto de vista histórico, pondo em prática alguns aspectos da teoria dos limites.

O momento de introdução da tarefa foi relativamente rápido, excetuando-se o breve instante onde relembramos os questionamentos feitos sobre a importância dos limites e o diálogo que travamos sobre os aspectos históricos presentes na tarefa. Já havia programado com o técnico de laboratório deixar o local preparado, inclusive com o *software* instalado em todas as máquinas. Estas deveriam estar prontamente ligadas. Ao distribuir o roteiro, deixei que os grupos tomassem a iniciativa de avançar na abordagem das questões da forma mais autônoma possível. Raramente fiquei estático, pois além de visitar periodicamente as bancadas para realizar as observações que comporiam as análises deste estudo, frequentemente eu era acionado para orientar as discussões internas dos grupos. Em algumas situações as dificuldades estavam relacionadas ao uso do programa, como no caso da visualização do gráfico e dos retângulos, em outras, as dúvidas giravam em torno do assunto explorado nos livros, como no caso das simplificações das fórmulas de Riemann e da soma dos cubos dos n primeiros números naturais, mas em todas estas circunstâncias ficou constatada a nova dinâmica na relação de ensino e aprendizado da disciplina. Alguns grupos mostravam mais segurança e desenvoltura no desdobramento da atividade, como foi o caso do grupo 1 que apresentou a solução correta que pôde ser vista na figura 52, outros menos confiança e mais dependência nas solicitações de auxílio, como foi o caso do grupo 2 que requisitava mais a minha presença. A inquietação percebida, de uma forma geral, estava relacionada à falta de experiência e costume dos alunos em tarefas exploratórias e investigativas com o suporte da tecnologia. As suas vivências escolares anteriores inexistiam ou eram quase nulas nesta modalidade de ensino que eles estavam a experimentar. As maiores dificuldades observadas nos grupos realmente estavam relacionadas a demonstração algébrica do valor exato da área, como ficou evidenciado, pois esta exigia uma boa visão geométrica e uma cuidadosa manipulação na fórmula de Riemann. Mas estes fatores foram minimizados em função das consultas bibliográficas, das discussões em grupo e das ilustrações realizadas previamente em sala de aula no caso da parábola. Esta foi a forma que eles evidenciaram para ultrapassar as dificuldades. Eu sempre evitava uma orientação mais direta, indicando que uma estrutura semelhante encontrava-se no livro e que as dúvidas se dissipariam através de uma análise mais criteriosa e atenta do grupo.

Ao término do tempo estimado para a realização escrita da tarefa, as equipes já se encontravam relativamente prontas para proceder as apresentações dos seus resultados. Foi incentivada a participação de todos, mas geralmente nota-se uma maior manifestação daqueles que têm uma melhor desenvoltura para a comunicação. De forma equilibrada, os grupos colocavam as suas produções e eram interpelados por outros alunos. Sempre que eu sentia a necessidade de uma intervenção mais direta para manter a boa ordem das discussões, isso era feito sem maiores problemas. Geralmente as minhas interposições visavam clarear alguns pontos conflitantes, elucidar novas dúvidas que surgiam e formalizar matematicamente os conhecimentos adquiridos.

Relativamente aos questionários, ao analisar as respostas dadas pelos alunos, pude constatar objetivamente que esta tarefa permitiu que eles compreendessem efetivamente uma importância e uma utilidade prática dos limites. Esta atividade respondeu aos seus anseios e curiosidades num importante contexto do assunto. Em relação ao *software Winplot*, não apresentaram maiores dificuldades no manejo e utilizaram os seus recursos para a visualização gráfica da função e a formação dinâmica dos retângulos, para conjecturar o valor da área requisitada no problema e para ampliar a compreensão da tarefa. Em referência às principais dificuldades encontradas na resolução da tarefa, conforme já aludido, a maioria apontou para a realização dos cálculos, etapa intrinsecamente relacionada com a manipulação da fórmula de Riemann, expressão esta que permite determinar o valor exato da área.

De uma forma geral, esta primeira experiência deles em tarefa exploratória com o auxílio da tecnologia foi bastante satisfatória. Apesar das dificuldades registradas, o clima da aula foi completamente renovado. As tarefas exploratórias e investigativas imprimiam um novo ânimo na relação de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

7.2. Tarefa 2 – Áreas de regiões delimitadas por retas tangentes

Nesta tarefa os temas introdutórios das derivadas foram contextualizados paralelamente a abordagem de alguns tópicos elementares da geometria, tais como triângulos, áreas e interseções. Através dos recursos computacionais, particularmente do *software GeoGebra*, os alunos investigaram uma notável propriedade da hipérbole. Não faltaram os preciosos recursos dos diálogos, das conjecturas, das abordagens numéricas, geométricas e analíticas que tanto enriqueceram o momento. Fazendo uso dos conhecimentos teóricos explorados em sala de aula e das consultas bibliográficas, os grupos adentrariam em mais uma investigação matemática. Acompanhemos então as suas ações. Uma vista preliminar no anexo de número 6 certamente será útil para a leitura a seguir.

Raciocínios e processos

Os grupos já estavam formados e aguardavam nas bancadas a distribuição das tarefas.

Realizamos juntos a leitura integral do roteiro. Informei brevemente que avançaríamos nos estudos das derivadas, explorando o conceito de reta tangente, dentre outros, num importante problema geométrico. Os alunos então iniciaram as atividades. Após um tempo preliminar de discussões internas, relativamente ao item a) do primeiro problema, o grupo 1 já analisa a questão com o auxílio do *software* (episódio A_{T2}):

Episódio A_{T2}:

Ricardo: Entre com a função f [no computador] e ponha um ponto sobre o gráfico.

Alberto: Qual ponto?

Ricardo: Ponha aí um ponto qualquer (acompanhando a figura do roteiro) e vamos tentar calcular a área [do triângulo]!

Os alunos criam no programa o ponto de coordenadas $(1,1)$ e partem para obter a reta tangente. Depois de certo tempo tentando realizar os cálculos no rascunho, continuam:

João: Não deu certo. Não está tangente...

Alberto: Olhe aqui (apontando para o caderno). A regra do "x^n" (derivada da função potência) é mais rápida... Lembra-se desse exercício? Tem que transformar em potência!

João: Mas será que dá o mesmo resultado?

Alberto: Ela também não veio do limite?

João: Pode ser... Professor, podemos usar esta fórmula para "$1/x$"?

Esse diálogo já é fruto de um conhecimento trabalhado anteriormente em sala de aula. Enquanto Ricardo se concentra mais nas construções computacionais, João e Alberto desenvolvem os cálculos. Eles estavam tentando obter a derivada através da definição (pelo limite) e estavam se complicando nas contas. Eu estava por perto e então João solicitou a minha orientação. Depois que eu apontei o equívoco numa passagem simplificativa, ele corrigiu as operações e prosseguiu no desenvolvimento. Ainda assim, solicitei que ele calculasse a derivada através da regra da potência, afim de que ele comparasse os resultados. Este fato seria útil nas discussões finais.

É muito comum que os alunos acabem por fazer uso dos conhecimentos mais imediatos que dispõem, o que vem mais rápido na cabeça, sem ponderar antes qual melhor técnica empregar em determinadas situações. Enquanto isso, no grupo 2, as dificuldades surgem para gerar o cenário dinâmico no programa (episódio B_{T2}). Apesar das alunas terem conseguido plotar a função e a tangente no ponto de abscissa $x_0 = 1$, quando moviam o ponto com o *mouse,* a reta não o acompanhava, e quando tentavam movimentar a reta, esta não acompanhava o movimento.

Episódio B_{T2}:

Sandra: (...) mas quando tento movimentar a reta, ela não vai...

Flávia: Deixe a reta aí parada e movimente o ponto.

Sandra: Mas a reta não acompanha (o ponto). Tem alguma coisa errada...

Mônica: Professor, o que está errado aqui? (solicitam a minha intervenção)

Constatei que as alunas haviam calculado corretamente a reta tangente no ponto $x_0 = 1$. A tela indicava de forma precisa a situação de tangência desta sobre o gráfico da função. Aparentemente tudo estava perfeito! Porém, o problema é que elas não haviam usado o comando geral de traçado de tangentes do programa, daí essa "confusão". O ponto era móvel, porém a reta era tangente apenas no ponto $x_0 = 1$. Após a minha orientação, elas perceberam o equívoco, viabilizaram a disposição dinâmica e prosseguiram as suas análises. Este episódio evidencia a dificuldade preliminar do grupo 2 para visualizar a situação dinâmica no computador, porém o auxílio específico do comando permitiu o desenvolvimento da questão.

Apesar de já ter utilizado o *GeoGebra* em sala de aula, em algumas sessões demonstrativas em exercícios com retas tangentes, alguns grupos, a exemplo do grupo 2, apresentaram dificuldades em usar este comando. Por se tratar de uma tarefa que exigia bastante o uso dos recursos dinâmicos do *software* – e esta foi a primeira experiência deles com essas funções – tive que estar mais próximo das equipes de trabalho. Depois da orientação prestada as alunas do G2 fiz algumas observações coletivas sobre este domínio específico do programa. A turma parou um instante para acompanhar as breves explicações e seguiram as suas investigações. Apesar deste contratempo, as alunas se mantiam animadas na exploração do problema.

Foi possível constatar que o conhecimento estava sendo construído pouco a pouco. A compreensão global do problema se ampliava à medida que as funções dinâmicas do programa eram utilizadas corretamente. O grupo 2 não tinha se dado conta ainda de que o caso particular que eles vinham elaborando não serviria para provar a proposição. Mesmo assim deixei que prosseguissem com os raciocínios, pois os seus cálculos certamente viabilizariam o que viria a ser feito mais à frente de forma generalizada. Depois que estruturaram o triângulo e visualizaram a medida da área no programa, Sandra comentou "Que legal! O triângulo se move, mas a área fica constante e igual a 2! No outro lado [no 3° quadrante] continua o mesmo resultado! (...) pronto, o valor da área é sempre 2, não importa o ponto! Finalizamos esta parte".

Conforme ressaltamos, o grupo 2, de posse da equação da reta tangente, passa agora a calcular a área do triângulo. A equipe busca provar que esta é de 2 unidades, porém toda a estrutura analítica está baseada apenas no ponto de abscissa $x_0 = 1$, isto é, particularizam a demonstração. Ao afirmarem (conjecturarem!) que o valor da área era constante em qualquer ponto de tangência, com base na visualização gráfica, equivocadamente partiram para obter a área apenas em um único ponto ($x_0 = 1$). Apesar das discussões já realizadas na primeira tarefa, Sandra ainda direciona-me reflexões sobre a necessidade da demonstração, argumentando que era suficiente confirmar a situação pelo programa para ter a certeza. Apontando para o gráfico plotado na tela do computador, ela diz: "olha isto aqui, professor, pra que demonstrar? Em todos estes pontos o programa indica o valor de área igual a 2!". Percebi que esta fala não era exclusiva dela, outros alunos não sentiam a necessidade de comprovar o resultado após perceberem, através do computador, que o resultado era verdadeiro "aos olhos"! A evidência computacional era tomada por uma prova matemática. Esse foi mais um importante aspectou que gerou excelentes considerações na fase discursiva.

O grupo 1 compreendeu de forma mais imediata e segura, a partir das visualizações computacionais, que deveria encaminhar a prova para o caso geral, isto é, demonstrar o resultado num ponto arbitrário do domínio. Eles já entendiam, naquele contexto, que casos particulares não serviam para provar situações abrangentes, mas apenas para formar indícios ou suposições. Esta circunstância mostrou-se bastante útil também para os debates. Inclusive foi interessante relembrar para a classe a conjectura de Fermat (sec. XVII) no diálogo que se seguiu (episódio C_{T2}):

Episódio C_{T2}:

Professor: Fermat também se deu por satisfeito ao enunciar um resultado geral com base na evidência de alguns casos particulares na sua famosa conjectura (vou ao quadro pra descrever a situação): ele afirmava que todos os números obtidos a partir da sequência

$$f(n) = 2^{2^n} + 1, n = 0, 1, 2, 3 \ldots,$$

seriam primos.

Alberto: E não são?

Professor: Vamos ver... Quanto dá $f(0)$ e $f(1)$?

Alberto: Pra $n = 0$ dá 3 e pra $n = 1$ dá 5, que são primos!

Professor: João, por favor, calcule agora $f(2)$ e $f(3)$. Ricardo, use o *software* e obtenha $f(4)$. (depois de um tempo analisando os valores os alunos apresentam as respostas)

João: Pra $n = 2$ deu 17 que é primo e pra $n = 3$ deu 257... Aí eu já não sei!

Professor: Está ficando grande, mas posso asseverar que 257 é primo também!

Ricardo: Pra $n = 4$ deu aqui no *GeoGebra* 65.537 (figura 56). É primo?

Professor: Sim, é primo! Porém Fermat só testou até aí e generalizou erroneamente o resultado! Mais tarde, no século XVIII, Leonard Euler provou que para $n = 5$,

$$f(5) = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4.294.967.297 = (641)(6.700.417)$$

era composto, "quebrando" a conjectura de Fermat! No caso da tarefa, mesmo diante das evidências computacionais, necessitamos demonstrar o valor da área para validarmos algebricamente o resultado. Vamos prosseguir... (este episódio foi bastante singular e serviu para demonstrar que casos particulares não serviam para generalizar uma conjectura matemática. O episódio evidencia também as ricas situações comunicativas e reflexivas que procedem dos contextos investigativos das tarefas exploratórias apoiadas nos recursos computacionais).

Ao observar as discussões no grupo 2 percebo que este usou a regra operacional do quociente para estabelecer a derivada e montar a equação da reta tangente. Outras equipes utilizaram a regra da potência e outros ainda calcularam pela definição, isto é, serviram-se do limite (despenderam mais tempo e se complicaram um pouco mais no desenvolvimento). Depois que o grupo 2 pecebeu que estava no caminho errado – algumas orientações foram úteis pra isso – concluíram esta etapa do problema e me chamaram para apresentar a sua solução (figura 57). Percebe-se que o grupo calculou adequadamente os pontos de interseção da reta tangente com os eixos coordenados e determinou, de forma correta, o valor da área do triângulo. As formas distintas utilizadas pelos grupos para a obtenção da derivada evidenciam a variedade estratégica oriunda das tarefas investigativas. As ricas discussões que brotaram dos pequenos grupos de trabalho permitiram uma maior autonomia para que os alunos decidissem o caminho que julgassem mais adequado para a solução do problema. Ao invés do professor indicar o "melhor" caminho, eles tomaram a iniciativa para alcançar as respostas. Nos debates finais pudemos sistematizar todos os conhecimentos produzidos.

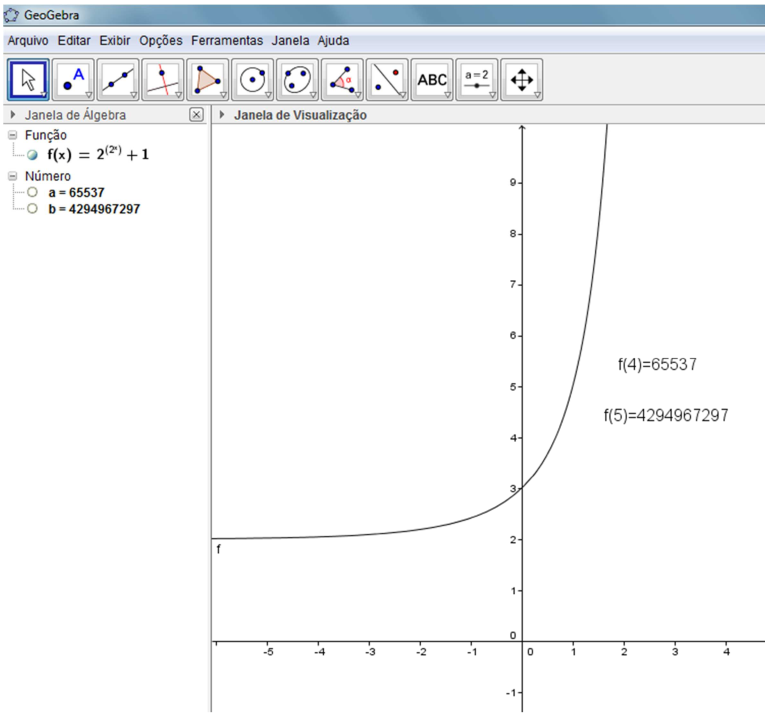


Figura 56: Tela capturada pelo grupo 2 para a obtenção dos números de Fermat

Apesar da percepção do grupo 1 de realizar a prova genérica para verificar a validade do resultado, outra dificuldade surge, dessa vez no cálculo das dimensões do triângulo. Pelo programa eles conseguem, através do comando "interseção de dois objetos", observar essas grandezas, porém na parte escrita encontram alguns embaraços (episódio D_{T2}):

Episódio D_{T2}:

João: (...) use a fórmula da reta tangente [$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$].

Alberto: Qual o valor de y_0?

João: É o valor da função quando substitui x_0. Substitua aí $f(x_0)$. (os alunos se concentram no cálculo da reta tangente e obtem a sua equação depois de certo tempo)

Alberto: Pronto! Vamos calcular agora a área do triângulo... Qual o valor da base?

João: Estava tentando calcular o valor da altura primeiro. Não é o mesmo valor de y_0?

Alberto: Acho que não, vamos ver... (observando a figura no roteiro, discutem por algum tempo e não chegam a um denominador comum).

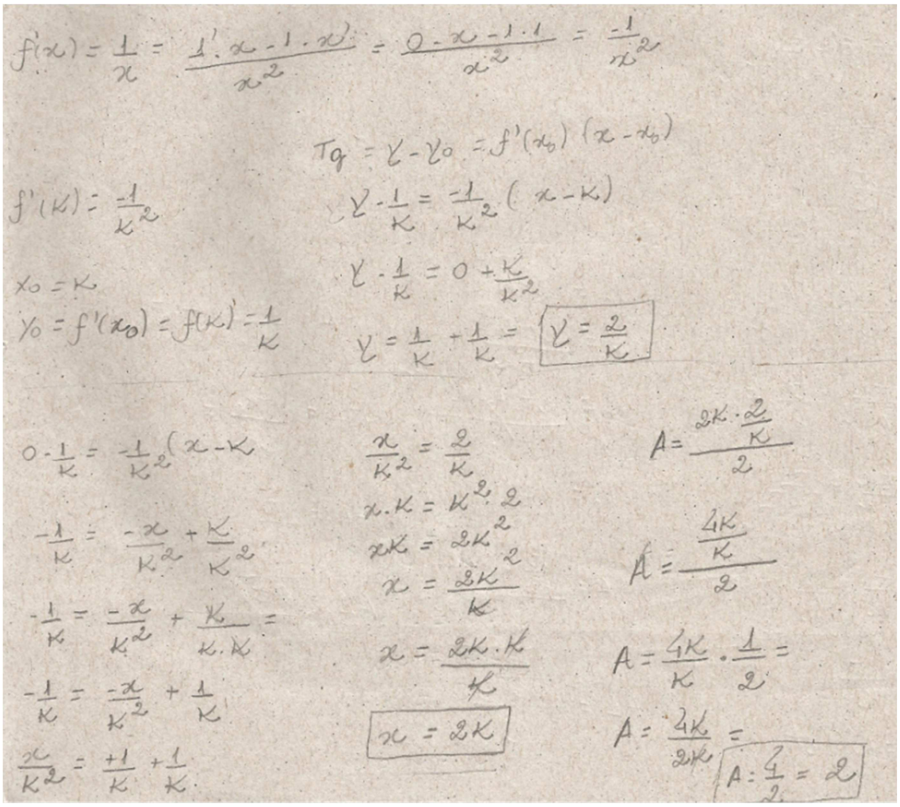


Figura 57: Solução apresentada pelo grupo 2 ao problema 1

O grupo sente alguma dificuldade para determinar algebricamente a base e a altura do triângulo. Novamente sou acionado para orientá-los no processo de obtenção dessas medidas, mas, ao observar o desenvolvimento, limito-me a informá-los para ter mais atenção nas simplificações. Os demais grupos estavam aproximadamente na mesma etapa e apresentam alguns obstáculos também nesta parte algébrica. Mais uma vez solicitei a atenção da classe para uma explicação geral sobre o cálculo das interseções (envolvendo parâmetros algébricos). Pude constatar, posteriormente, nas entrevistas, que os maiores impasses realmente estavam concentrados nesta etapa. A resolução do primeiro problema gerou mais dificuldade do que a resolução do segundo, isto devido à semelhança dos procedimentos. Para aqueles que conseguiram demonstrar o valor da área no primeiro caso (a exemplo do G2), a segunda fase mostrou-se mais tranquila. Isso ficou patente nas suas respostas:

> Foi preciso muita atenção nos pequenos detalhes, principalmente na demonstração do primeiro problema, pois o segundo caso foi muito parecido. Quando o grupo resolveu focar na solução, esta saiu com mais facilidade. (Sandra, E_2)

> As maiores dificuldade foram na parte algébrica, na hora de determinar as interseções e estabelecer o valor da área do triângulo no primeiro problema. O *software* exibia os valores [das interseções e da área], mas estávamos com dificuldades de calcular. (...) o programa ajudou bastante na compreensão geral da tarefa. (Alberto, E_2)

No segundo problema da tarefa, a partir da simulação gráfica computacional, o grupo 1 conseguiu captar a relação que existia entre os valores das áreas dos triângulos e os respectivos numeradores das funções. De fato, para cada função do tipo $f_a(x) = a/x$, $a = 1, 2, 3, \ldots$, o valor da área é igual a $2a$. *"A conjectura está lançada!"* — foi desta forma que João se expressou animadamente ao preencher a tabela 1 do roteiro e descobrir o padrão. Bastava então partir para a demonstração solicitada no item b). Foi da seguinte forma que eles procederam ao identificar a relação (episódio E_{T2}):

Episódio E_{T2}:

João: Quando (a função) é $1/x$, dá 2 (o valor da área do triângulo); quando é $2/x$, dá 4; quando é $3/x$, dá 6, quando é $4/x$, dá 8...

Alberto: Então é sempre o dobro, não é!?

João: Isso! O valor da área é o dobro do número que tiver em cima [no numerador da função]. A conjectura está lançada!

Ricardo: Hum, então por isso que no caso anterior a resposta deu 2! Vamos então agora demonstrar!

Em função da semelhança deste problema com o primeiro da tarefa, o grupo já apresentou um pouco mais de confiança e requisitava menos a minha presença. Eles ainda especularam (colocaram uma questão) se o resultado geral continuaria válido para um número real qualquer (diferente de zero) no numerador da função. Apesar desta análise não fazer parte direta da atividade, a proposição permaneceria válida e esta reflexão foi aproveitada nas discussões, enriquecendo o debate e ampliando a percepção da turma. Eles simularam esta situação no *GeoGebra* e constataram a validade do resultado. Estas circunstâncias evidenciam o protagonismo dos alunos na exploração dos conhecimentos e o caráter dinâmico das descorbertas viabilizadas pelas análises computacionais. Foi através do seguinte diálogo que eles iniciaram a demonstração no segundo item (episódio F_{T2}):

Episódio F_{T2}:

João: No lugar de 1 (na função $y = 1/x$) vamos usar uma variável. (decidem utilizar "t").

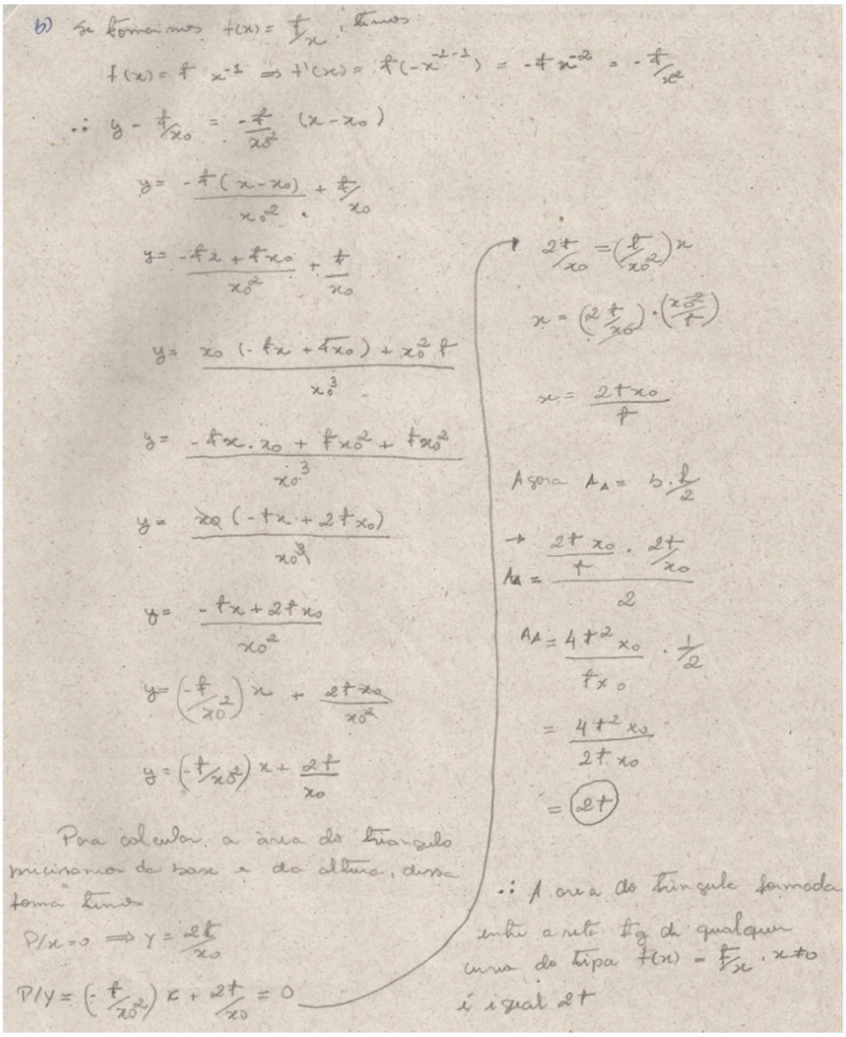
Alberto: (...) temos então $f(x) = t/x$. Mas qual o valor de x_0 agora?

João: Vamos deixar x_0 mesmo, acho que pode.

Alberto: Sim. Agora (o procedimento) não é igual ao problema 1?

Ricardo: Penso que deve ser. Vamos calcular a reta tangente e depois obter a área...

Houve uma discussão longa e bastante produtiva no grupo para estabelecer a resposta final. No decurso da demonstração para confirmarem a conjectura, os integrantes debateram intensamente em todas as etapas, desde a estruturação da reta tangente até ao estabelecimento do valor algébrico da área do triângulo. No final, fizeram uma série de simulações no programa para consolidar a veracidade da resposta encontrada e encaminharam a solução que pode ser vista na figura 58. Cabe ressaltar a estratégia diferenciada deste grupo para obter a derivada. Enquanto outros grupos utilizaram a regra do quociente, este fez uso da regra da potência. Eles obtiveram mais facilmente as dimensões do triângulo nesta segunda etapa, como se pode constatar, em função das orientações coletivas realizadas no primeiro problema. Foi notável a satisfação dos alunos por terem demonstrado algebricamente o resultado e confrontá-lo com o valor obtido computacionalmente. Este ânimo característico das descobertas provenientes das investigações revelou-se notória nesta tarefa.



b) Se tomarmos $f(x) = t/x$, temos

$f(x) = t\,x^{-1} \Rightarrow f'(x) = t(-x^{-1-1}) = -t\,x^{-2} = -t/x^2$

$\therefore\ y - t/x_0 = \dfrac{-t}{x_0^2}(x - x_0)$

$y = \dfrac{-t(x-x_0)}{x_0^2} + t/x_0$

$y = \dfrac{-tx + tx_0}{x_0^2} + \dfrac{t}{x_0}$

$y = \dfrac{x_0(-tx + tx_0) + x_0^2 t}{x_0^3}$

$y = \dfrac{-tx \cdot x_0 + tx_0^2 + tx_0^2}{x_0^3}$

$y = \dfrac{\cancel{x_0}(-tx + 2tx_0)}{x_0^{\cancel{3}}}$

$y = \dfrac{-tx + 2tx_0}{x_0^2}$

$y = \left(\dfrac{-t}{x_0^2}\right)x + \dfrac{2tx_0}{x_0^2}$

$y = \left(-t/x_0^2\right)x + \dfrac{2t}{x_0}$

Para calcular a área do triangulo precisamos da base e da altura, dessa forma temos

$P/x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{2t}{x_0}$

$P/y = \left(-\dfrac{t}{x_0^2}\right)x + \dfrac{2t}{x_0} = 0$

$2t/x_0 = \left(\dfrac{t}{x_0^2}\right)x$

$x = \left(2\dfrac{t}{x_0}\right)\cdot\left(\dfrac{x_0^2}{t}\right)$

$x = \dfrac{2tx_0}{t}$

Agora $A_\Delta = b \cdot h/2$

$A_\Delta = \dfrac{\dfrac{2tx_0}{t} \cdot 2t/x_0}{2}$

$A_\Delta = \dfrac{4t^2x_0}{tx_0} \cdot 1/2$

$= \dfrac{4t^2x_0}{2tx_0}$

$= 2t$

$\therefore$ A area do triangulo formado entre a reta tg de qualquer curva do tipo $f(x) = t/x$, $x \neq 0$ é igual $2t$

Figura 58: Solução apresentada pelo grupo 1 ao problema 2

No grupo 2 as discussões eram encaminhadas de forma parecida. As alunas aproveitaram a construção computacional feita na etapa precedente, fizeram alguns ajustes e não apresentaram maiores dificuldades para perceber o padrão. No preenchimento da tabela, puderam constatar efetivamente a relação de dobro. Ao perceberem que estavam no caminho certo, confirmando a solução do primeiro problema, manifestaram ainda mais entusiasmo na sequência. Elas haviam se equivocado na demonstração do caso anterior, apesar de apresentarem uma boa estrutura nos cálculos, por isso requisitei mais atenção no presente desenvolvimento. Depois de algumas discussões em grupo, chegaram também ao resultado esperado. A equipe apresentou uma organização textual semelhante ao grupo 1, porém utilizando uma forma diferenciada para a derivada (usaram a regra do quociente) e uma notação distinta para o novo parâmetro da função.

Após o término das explorações passamos então para a etapa das discussões finais. Pudemos ressaltar e refletir conjuntamente uma série de situações. À medida que os grupos iam apresentando as suas produções, os principais fatos registrados naquele encontro foram realçados: as três formas possíveis para derivar a função; o equívoco de particularizar as demonstrações; a necessidade das provas algébricas diante das evidências computacionais; a conjectura de Fermat foi destacada; a extensão do resultado para os números reais; outras propriedades das hipérboles foram lembradas, além da continuidade daquelas investigações na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, onde seria possível explorar outras curvas com aquele mesmo comportamento. Alguns alunos mostraram-se curiosos para conhecer tais curvas e iniciar um projeto de pesquisa. Ao final dos trabalhos os alunos tiveram um tempo para responder o questionário (anexo 11). Outros discentes solicitaram para preencher em casa e trazer na próxima semana, o que foi consentido. As questões buscaram sondar aquela sessão, sobre o que eles acabaram de experimentar e produzir. Buscaram indagar sobre as dificuldades, o uso que fizeram da tecnologia, a aprendizagem e o sentimento deles em respeito às tarefas exploratórias e investigativas. Examinemos então as suas respostas.

Questionário

"Você considera que esta atividade, realizada em grupo e com auxílio do computador, o ajudou a compreender melhor a abordagem de problemas investigativos matemáticos, conjecturas e demonstrações?" Esta primeira pergunta buscava extrair a opinião dos alunos sobre a oportunidade daquele encontro, onde eles puderam vivenciar uma notória situação de investigação matemática. Eles deveriam marcar objetivamente "sim" ou "não" a esta pergunta, mas, logo em seguida, deveriam justificar criteriosamente a sua escolha: *"Que aspectos na realização dessa atividade você considera que mais contribuíram para formar a sua opinião? Explique.".* Em unanimidade 100% dos alunos responderam "sim" a pergunta formulada. Este cenário evidencia o valor das tarefas exploratórias no Cálculo para ampliar a visão dos alunos sobre os processos de conjecturações e demonstrações nas investigações.

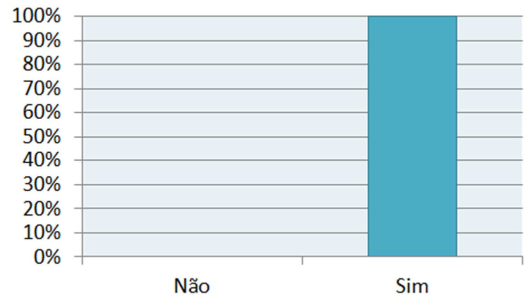


Figura 59: Resposta dos alunos a primeira pergunta do questionário nº 2.

De fato, a tarefa possibilitou um cenário bastante diferenciado de aprendizagem. Os alunos puderam explorar no laboratório uma série de conhecimentos teóricos, inclusive geométricos, num problema que permitiu análises dinâmicas computacionais, formulação de conjecturas, percepção de padrões, construções algébricas, consultas bibliográficas, dentre outros notáveis aspectos. Os comentários, de uma forma geral, manifestaram o valor das investigações em grupo e o auxílio eficiente do *software*, que este proporcionou a compreensão do problema e contribuiu apropriadamente para respaldar as demonstrações: "A compreensão amplia quando resolvemos o problema em grupo e com o auxílio do computador. Temos mais segurança no desenvolvimento das demonstrações para a obtenção das respostas" (Q_2); "A abordagem investigativa é bem interessante! As demonstrações não são fáceis, mas a possibilidade de resolver em grupo com ajuda do programa melhora a compreensão" (Q_2). Ficou evidenciada também a importância do programa para a formulação de conjecturas e para construção do conhecimento: "Através do programa podemos observar dinamicamente o comportamento das funções. A possibilidade de movimentar pontos e retas ajudam na formulação de conjecturas e na construção do conhecimento" (Q_2).

Para a realização desta atividade foi sugerido o uso do computador com o *software GeoGebra*. Indagados a cerca do uso do programa, os alunos deveriam marcar uma ou mais das seguintes alternativas: para toda a resolução da atividade; apenas para a visualização do gráfico; apenas para a verificação da solução e outra (qual ?). Posteriormente deveriam justificar as suas escolhas.

Os alunos responderam da seguinte forma a esta pergunta: 50% manifestaram que o *software* foi útil "para toda a resolução da atividade"; 40% "apenas para visualização do gráfico" e 10% "apenas para verificação da solução".

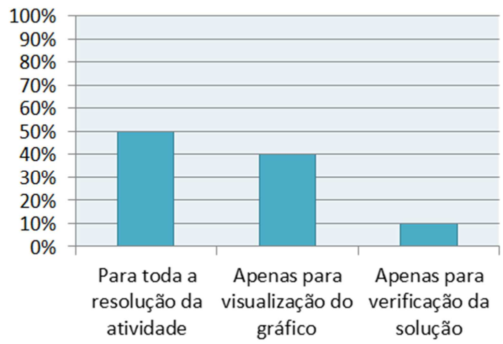


Figura 60: Resposta dos alunos a segunda pergunta do questionário n° 2.

Quando os alunos assinalam que o *software* ajudou em "toda a resolução da atividade" obviamente se referem também que o programa foi útil tanto para a visualização quanto para a verificação dos resultados. Nos comentários, de uma forma geral, os alunos evidenciaram que os recursos tecnológicos auxiliaram a ampliar o entendimento do problema e a validar a demonstração: "A visualização no computador foi muito importante para tornar a tarefa mais compreensível. O *software* ajudou a construir os gráficos e a determinar ao mesmo tempo as áreas dos triângulos. Nos deu a certeza de que a demonstração estava correta" (Q_2). Eles ressaltaram o auxílio valoroso do programa nas construções gráficas para a análise do comportamento dinâmico do triângulo e para a obtenção da medida da sua área, confirmando as conjecturas e os cálculos: "O *software* ajudou bastante na determinação do valor da área, através do conhecimento da função e do comportamento dinâmico das tangentes. Ao fim tínhamos a certeza de que os cálculos estavam certos" (Q_2); "Na resolução do primeiro problema [o programa] ajudou a encontrar a área do triângulo e a perceber que era sempre constante. Quando partimos para o segundo problema, apenas mudamos os valores do numerador para perceber a relação que existia com a área do triângulo. Pudemos verificar que a conjectura estava correta" (Q_2). Estes aspectos comprovam a utilidade e a eficácia do *software* em auxílio aos processos investigativos no Cálculo.

Interpelados acerca das dificuldades encontradas na realização da tarefa, os alunos deveriam responder objetivamente "sim" ou "não" a pergunta. Para aqueles que responderam afirmativamente, deveriam marcar algumas das seguintes alternativas: na compreensão da tarefa; no uso do *software;* na demonstração formal dos resultados; na realização dos cálculos e outra (qual ?). Posteriormente deveriam justificar as suas escolhas.

85% dos alunos encontraram dificuldades na realização da tarefa, enquanto outros 15% afirmaram o contrário. Daqueles que encontraram dificuldades, 55% apontaram que os maiores contratempos foram "na realização dos cálculos", enquanto 45% indicaram "na demonstração formal dos resultados".

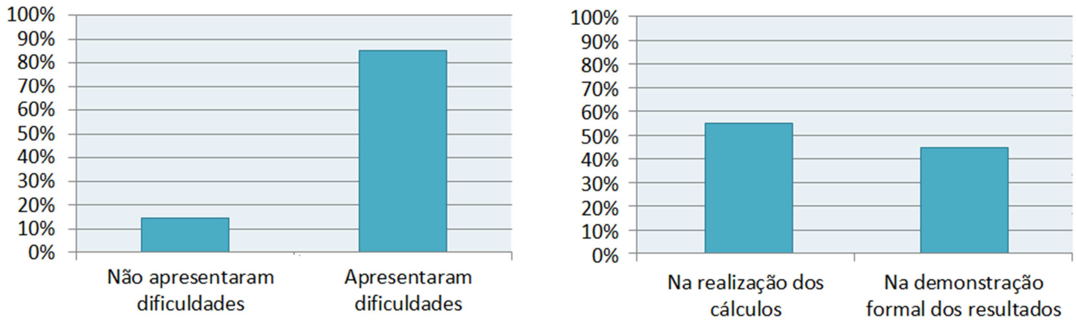


Figura 61: Resposta dos alunos a terceira pergunta do questionário n° 2.

De fato, durante a realização da tarefa, as maiores demandas de orientação estavam voltadas para as construções e provas algébricas. Obviamente que todos os cálculos situavam-se nas etapas demonstrativas das conjecturas, de forma que podemos afirmar que majoritariamente as dificuldades dos alunos aí se encontravam: "A compreensão do problema é simples, porém a parte demonstrativa é a que apresenta a maior dificuldade" (Q_2); "Não tenho o costume de realizar demonstrações e isso representa uma dificuldade a mais na abordagem do problema" (Q_2). Importante observar que não foram assinaladas dificuldades "na compreensão da tarefa" e nem "no uso do *software*", o programa auxiliou eficientemente a ampliar a compreensão do problema: "A etapa dos cálculos foi a que senti maior dificuldade. O *software* ajudou bastante na compreensão da tarefa, principalmente para determinar o valor da área do triângulo" (Q_2). A manipulação do *GeoGebra*, especificamente para esta atividade, não representou maiores entraves. O programa é de fácil interação, possui ícones específicos e claramente localizados para o traçado de retas tangentes, construções de polígonos e medidas de áreas.

Síntese

A rotina para a preparação desta tarefa seguiu os moldes do trabalho anterior. Após a leitura inicial da tarefa, com algumas orientações básicas e coletivas, os grupos se empenharam na sua realização. As visitas periódicas aos grupos para realizar observações, verificar o andamento dos trabalhos e explicar algumas dúvidas se faziam necessárias. Alguns grupos avançam mais rapidamente em relação a outros, inclusive pela percepção que tiveram na forma de derivar a função do problema. Aqueles que usaram a regra da potência, como foi o caso do grupo G1, conseguiram agilizar mais os trabalhos; os que fizeram o emprego da definição clássica retardaram um pouco mais as ações.

As construções geométricas com o *software* seguiam à frente das produções algébricas necessárias a validação dos resultados. Não se via um grupo inerte, pois o trabalho que eles estavam a explorar continham todos os elementos característicos das investigações matemáticas: as elaborações computacionais com as suas riquezas de visualização e dinamicidade; os raciocínios analíticos, a busca por padrões e as conjecturas; as reflexões e os diálogos internos; as consultas bibliográficas, enfim, a atividade exigia um notável esforço intelectual para aplicar os conhecimentos ora em estudo em face das ferramentas disponibilizadas. Um renovado ambiente de ensino se apresentou para a aprendizagem do Cálculo daquela turma.

Após o término das ações investigativas dos grupos, passamos para a fase das discussões gerais com a formalização dos conhecimentos produzidos. Apesar do "roteiro investigativo" ser essencialmente o mesmo (arrisco-me a dizer isso!), no sentido de estabelecer a equação da reta tangente, determinar as interseções com os eixos coordenados, dimensionar os catetos do triângulo e calcular a sua área, os procedimentos conceituais para alcançar o resultado final foram distintos e relevantes. Após os grupos apresentarem as suas estratégias de abordagem, inclusive indicando o método utilizado para obter a derivada, alguns alunos ficaram surpresos ao ver como uma forma de derivar se mostrava tão mais rápida que a outra. Nesses instantes que ouvimos *"poxa, porque não pensei nisso!?"* As oportunidades então surgiam para fixar um conceito, aprofundar um entendimento e mostrar a necessidade de avançar nos estudos.

Além das notórias situações já elencadas anteriormente na fase discursiva, o fato que realmente mereceu destaque nesta etapa foi a curiosidade despertada por alguns alunos em conhecer outras curvas que possuiam aquelas mesmas características das hipérboles: "existem outras?". Assim eles perguntavam. Acredito que este interesse tinha estreita relação com o tema "lugar geométrico" em evidência naquele momento na disciplina de Geometria Analítica. Ao conhecer algumas propriedades fascinantes das cônicas e outras curvas o entusiasmo surgia. Ao ser questionado sobre a existência respondi que sim, existia outro lugar geométrico com aquelas mesmas peculiaridades. Ressaltei que a famíla de hipérboles não era a única a gozar de tal característica, que para avançar nas investigações seria necessário o conhecimento das Equações Diferenciais Ordinárias, tema que seria objeto de estudo na próxima disciplina curricular. Estava lançado então algum estímulo para que eles prosseguissem no curso e conhecessem mais algumas maravilhas da Matemática.

Em relação aos questionários, foi possível constatar que a tarefa auxiliou realmente a turma a ampliar a sua concepção sobre investigações matemáticas, conjecturas e demonstrações. Em unanimidade assim eles se expressaram. A abordagem deste problema permitiu que os alunos aplicassem os assuntos teóricos ora em estudo e aprofundassem os conhecimentos. Num ambiente diversificado de aprendizagem, em grupos e fazendo uso dos recursos computacionais, eles vivenciaram os notáveis aspectos das atividades investigativas. Em referência ao uso do *software*, ficou patente a importância deste para os trabalhos. Nas suas respostas, os alunos indicaram a sua utilização para a visualização gráfica, descoberta do padrão e verificação da etapa demonstrativa. Ficou também evidenciado que os recursos do programa que possibilitaram o movimento da tangente, a construção do triângulo e a medida simultânea da sua área efetivamente promoveram a ampla compreensão do problema. Relativamente às dificuldades encontradas na realização da tarefa, a grande maioria (85%) respondeu afirmativamente, porém ressaltando que as suas dificuldades eram preponderantes nos aspectos formais das demonstrações. Este aspecto revelou-se das suas respostas ao questionário.

7.3. Tarefa 3 – Projetando uma montanha-russa

A tarefa que segue foi adaptada do livro de Stewart (2013) e possui a particularidade de aproximar os estudantes de um contexto mais prático, vivenciado por profissionais das engenharias e das tecnologias, dentre outros. Os conhecimentos sobre continuidade e diferenciabilidade presentes foram utilizados para projetar uma primeira subida e descida de uma montanha-russa. Além desses conceitos, outros adjacentes como retas tangentes, funções quadráticas e sistemas de equações lineares também integram a tarefa e enriquecem ainda mais os processos exploratórios. Os recursos computacionais e as calculadoras científicas trouxeram mais elementos motivadores que facilitaram e permitiram investigações mais dinâmicas e eficientes.

Num ambiente diferenciado de aprendizagem os alunos puderam trabalhar os conhecimentos teóricos que por hora desenvolviam numa situação aplicada da matemática. No laboratório de informática da instituição, dispostos em pequenos grupos, eles protagonizaram uma experiência diversificada, viabilizada pelo modelo exploratório e investigativo. As circunstâncias mais notáveis que caracterizaram as suas ações serão apresentadas a seguir. Uma leitura preliminar no anexo 7 deverá ser útil.

Raciocínios e processos

Após distribuir as tarefas para os grupos realizei uma leitura completa do roteiro e destaquei a importância daquela atividade. Eles estariam diante da simulação de um projeto de engenharia. As ferramentas da Matemática, e do Cálculo especificamente, seriam utilizadas numa perspectiva prática e bastante expressiva. Além dos conceitos teóricos de continuidade e diferenciabilidade outros assuntos basilares da disciplina incrementariam as explorações daquele dia, tornando os trabalhos mais significativos. Comuniquei ainda que eles poderiam realizar consultas e que estariam livres na escolha do *software* que auxiliaria as investigações. Após algum tempo, o grupo G1 discutia sobre a equação da reta L_1, conforme o episódio A_{T3}:

Episódio A_{T3}:

Ricardo: (...) mas L_1 é uma reta, vamos usar então a forma geral (conforme os seus registros, usaram $y = mx + n$).

Alberto: Olha aqui (apontando para o roteiro). Ela passa pela origem! (...) o valor de n não é zero!?

Ricardo: Isso! Coloque aí... Falta determinar então o valor de m.

João: (...) m não é o coeficiente angular?

Ricardo: Vamos usar então o valor do ângulo de inclinação [de $38{,}66°$]?

Alberto: Acho que não... É o valor da tangente. Olhe aqui (aponta alguns cálculos registrados no caderno). Calcule aí a tangente desse ângulo...

João: (...) deu isso aqui $1{,}431061106$. (Exibe o *display* da calculadora e apresenta o resultado. Este está errado, pois o aluno usou a função "RAD" para obter a tangente de um ângulo dado em graus. Posteriormente as orientações, o aluno percebe o equívoco e avança corretamente no desenvolvimento do problema).

As consultas são permitidas e os alunos analisam a primeira questão da tarefa com o livro texto e o caderno abertos. Estes materiais possibilitam diálogos mais produtivos onde as discussões ganham mais respaldo. Apesar da insegurança inicial, as explorações são fundamentadas nos exercícios resolvidos em sala de aula e também nos problemas referenciais da literatura. Este é um aspecto notável das investigações, os alunos habituam-se ao estudo compartilhado e a pesquisa criteriosa, agindo de forma mais ativa na aquisição do próprio conhecimento. O professor diminui a ênfase expositiva, passando a orientá-los nas suas ações, ponderando nas intervenções e alargando a compreensão geral da classe. Eles continuam a analisar a questão:

Alberto: (...) e essa inclinação de $0{,}8$ dada, não seria o valor "m"?

João: Mas "m" é o valor do coeficiente angular... E esse valor de $1{,}43$?

Ricardo: (...) e o valor do ângulo que foi dado, vai ser usado?

João: Não sei, vamos ver...

Observo silenciosamente certa incerteza que se estabelece no grupo, pois não há um claro entendimento sobre os significados de "ângulo de inclinação de $38{,}66°$", "coeficiente angular", "valor de a" e "inclinação de $0{,}8$". Estes conceitos não estão ainda plenamente consolidados e por isso acabam por gerar essa pertinente discussão interna. Estas dúvidas acarretaram uma maior compreensão desses elementos na etapa final, quando o grupo apresentou as suas dificuldades ao narrar tal episódio. Ricardo evidencia isso: "As discussões com os colegas [de grupo] são muito importantes, pois trocamos informações e conseguimos avançar no problema, mas nas explicações finais do professor aprendemos muito e ganhamos mais segurança” (E_3). Os alunos também apresentam algum embaraço para trabalhar com as medidas angulares na calculadora científica, pois ainda confundem (ou desconhecem) as funções DEG, RAD e GRAD. Essas nomenclaturas são pouco utilizadas no ensino médio e os estudantes acabam por chegar à universidade sem conhecerem ou saberem muito bem diferenciá-las. Inclusive na disciplina anterior de Introdução ao Cálculo não fizeram uso de tais recursos. Assim João se expressa: “Eu não conhecia essas funções [da calculadora científica] e por isso senti muitas dificuldades. Ainda não havia utilizado em nenhuma disciplina. Aprendi bastante com aquela tarefa, inclusive a trabalhar melhor com a calculadora científica” (E_3). Ao perceber tais dificuldades e constatar que estas também se manifestavam em outros grupos de trabalho, passo então a fornecer algumas orientações gerais para a classe. Este seria um ponto importante a destacar nas discussões coletivas. Após as orientações sobre as funções angulares da científica, o grupo 1 prossegue (episódio B_{T3}):

Episódio B_{T3}:

João: A tangente [de $38{,}66°$] é $0{,}800005488435$ (exibindo o *display* da calculadora) e o problema diz que a inclinação é de $0{,}8$. (agora o aluno calculou corretamente a tangente do ângulo!)

Alberto: Mas também o ângulo de inclinação não é aproximado!? Veja aqui...

João: Então a equação da reta é $y = 0{,}8x$!? (João induz a resposta com base no diálogo estabelecido com Alberto e também em função do resultado obtido da calculadora).

Alberto: Acho que sim... Vamos visualizar no computador.

A plotagem que o grupo realiza no computador se assemelha bastante com a figura fornecida no roteiro, daí eles dão por certo e continuam:

Ricardo: Quem é a [reta] tangente [à parábola] no ponto P?

Alberto: É L_1.

Ricardo: A mesma reta?

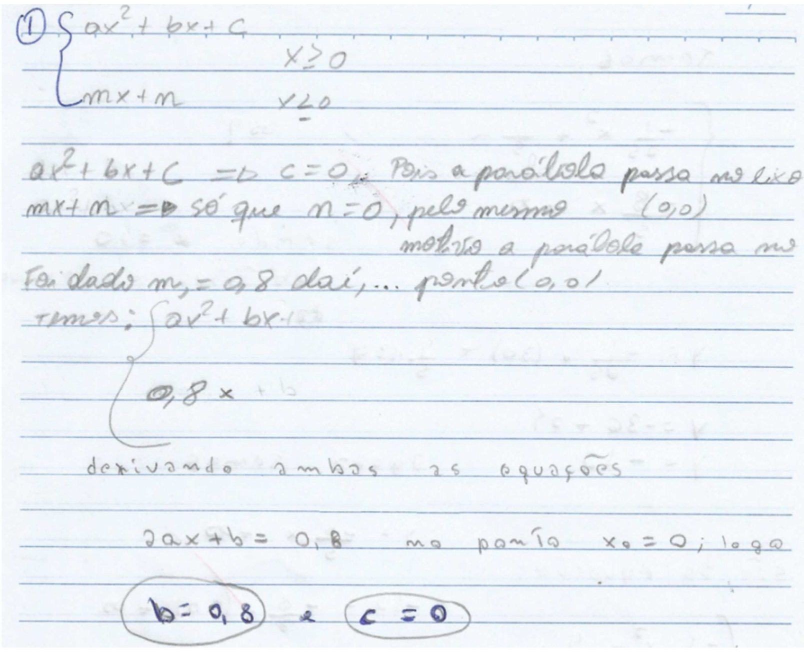
Alberto: O problema diz isso...

Ricardo: Mas o professor falou que na transição suave as tangentes [laterais] são as mesmas! (...) então as tangentes são iguais! (o aluno raciocina conforme alguns exercícios explorados anteriormente em sala de aula onde pudemos evidenciar estes aspectos).

Após mais algumas discussões internas, o grupo apresenta a solução parcial que pode ser vista na figura 62. O grupo raciocina que tanto a parábola quanto a reta L_1 passam pela origem e por isso ganham um tempo ao estabelecer os valores nulos para as constantes "c" e "n". Além disso, determinam também o valor da constante "b" pela igualdade das derivadas laterais, pois percebem que as tangentes são iguais no ponto de "colagem" das curvas. Estes aspectos revelam interessantes estratégias na exploração do problema.

Alguns alunos recordam os conceitos trabalhados em classe sobre a interpretação geométrica da derivada, derivadas laterais e alguns exercícios resolvidos sobre transição suave entre duas curvas. Eles buscam explorar estas ideias no problema examinando algumas notas de aulas sobre o assunto. A possibilidade da consulta na realização das tarefas exploratórias estimula os alunos a participarem mais em sala, a terem interesse em tomar os registros, pois sabem que poderão, possivelmente, utilizá-los nestas ocasiões. Inclusive há o contrato estabelecido com a turma de que o grupo que não possui essas anotações não pode tomar emprestado do outro. Isso é uma questão de responsabilidade e cada equipe usa apenas o seu próprio material. Na etapa discursiva existe o compartilhamento coletivo dos conhecimentos trabalhados e estes assuntos são ressaltados. Sempre procuro refletir com eles sobre a importância do estudo contínuo, dos apontamentos e participações produtivas em sala de aula. Constato como estes aspectos influenciam positivamente os momentos das tarefas e como estas impactam decisivamente no cotidiano das aulas.

As investigações seguem e as alunas do grupo G2 também realizam consultas e suas análises partem de alguns exercícios praticados em sala aula onde contextualizamos, dentre outros temas, os pontos angulosos e as derivadas laterais. Inclusive a equipe recorda o episódio que motivou a exploração de alguns exemplos específicos sobre estes assuntos. Elas buscam as questões resolvidas na aula em que alguns colegas relataram sobre o "tombo" que sentiam ao passar de carro por determinado trecho do percurso para a faculdade. Como a transição não era suave nesta passagem, todos os automóveis que trafegavam naquele ponto sentiam uma mudança brusca de direção. Solicitei que elas registrassem esses aspectos práticos e interessantes e expusessem na sua apresentação final. Pudemos então, no momento oportuno, fixar alguns conceitos relacionados às derivadas laterais e seu exame detalhado nos pontos de interseção entre as duas curvas. Estes aspectos práticos estão "próximos" das vivências estudantis e demonstram a sua importância para a aprendizagem dos conceitos mais complexos da matéria. Depois de já terem estabelecido a equação da primeira reta, elas agora se concentravam na determinação de L_2 (episódio CT3):


① $\begin{cases} ax^2+bx+c & x \geq 0 \\ mx+n & x < 0 \end{cases}$

$ax^2+bx+c \Rightarrow c=0$, Pois a parábola passa no eixo $(0,0)$
$mx+n \Rightarrow$ só que $n=0$, pelo mesmo motivo a parábola passa no ponto $(0,0)$
Foi dado $m_1 = 0{,}8$ daí, ...
temos: $\begin{cases} ax^2+bx+c \\ 0{,}8x + b \end{cases}$

derivando ambas as equações

$2ax+b = 0{,}8$ no ponto $x_0 = 0$; logo

$b = 0{,}8$ e $c = 0$

Figura 62: Solução parcial do problema apresentada pelo grupo 1.

Episódio C_{T3}:

Sandra: (...) no ponto Q o processo deve ser o mesmo... (a aluna procura raciocinar conforme a mesma estratégia utilizada no ponto P anterior).

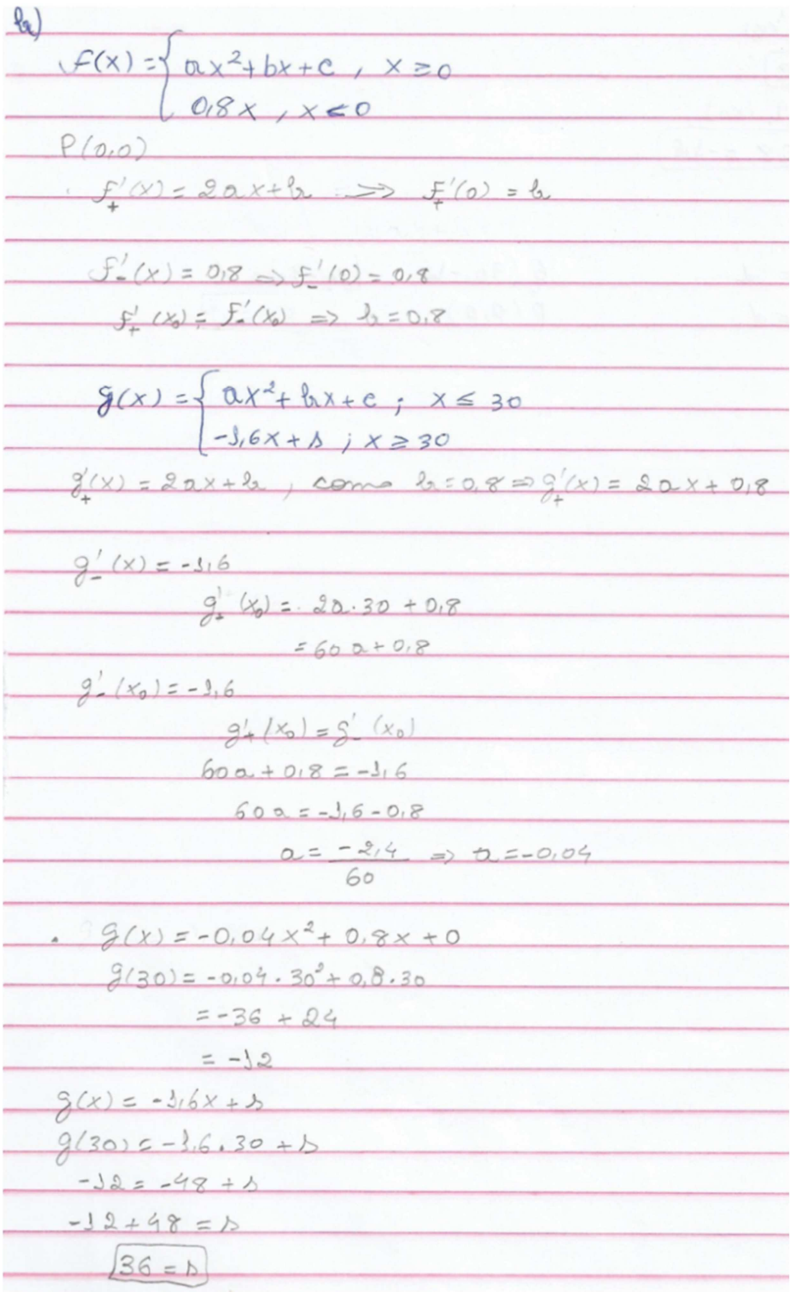
Mônica: Mas agora o valor da derivada é $-1{,}6$, não é isso?

Flávia: Acho que sim... No primeiro caso foi $0{,}8$.

Sandra: Então tem que igualar de novo a "$2ax + b$"? (este argumento também foi utilizado pelo grupo G1 na sua exploração, porém utilizam uma simbologia diferenciada).

Flávia: Observe aqui (apontando para o roteiro), o valor de x agora é outro...

Nesta etapa, as alunas percebem a semelhança com o caso anterior (na determinação da reta L_1) e resolvem com um pouco mais de segurança (figura 63). De fato, o cálculo que elas realizam é bastante parecido. O grupo acaba por igualar as derivadas laterais para determinar o valor do coeficiente "a" e exibir a equação da parábola corretamente. Utilizam um raciocínio eficiente para determinar o coeficiente linear "s" da reta L_2: descobrem as coordenadas de $Q(30, -12)$ por intermédio da equação da parábola e usam este ponto na equação da reta. Elas apresentam também corretamente a equação de L_2. Depois de realizados todos os cálculos, elas apresentam a resposta e partem para fazer a verificação no computador.



b)

$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x \geq 0 \\ 0{,}8x, & x \leq 0 \end{cases}$

$P(0,0)$

$f'_+(x) = 2ax + b \Rightarrow f'_+(0) = b$

$f'_-(x) = 0{,}8 \Rightarrow f'_-(0) = 0{,}8$

$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow b = 0{,}8$

$g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c; & x \leq 30 \\ -3{,}6x + s; & x \geq 30 \end{cases}$

$g'_+(x) = 2ax + b$, como $b = 0{,}8 \Rightarrow g'_+(x) = 2ax + 0{,}8$

$g'_-(x) = -3{,}6$

$g'_+(x_0) = 2a \cdot 30 + 0{,}8$

$= 60a + 0{,}8$

$g'_-(x_0) = -3{,}6$

$g'_+(x_0) = g'_-(x_0)$

$60a + 0{,}8 = -3{,}6$

$60a = -3{,}6 - 0{,}8$

$a = \frac{-2{,}4}{60} \Rightarrow a = -0{,}04$

$g(x) = -0{,}04x^2 + 0{,}8x + 0$

$g(30) = -0{,}04 \cdot 30^2 + 0{,}8 \cdot 30$

$= -36 + 24$

$= -12$

$g(x) = -3{,}6x + s$

$g(30) = -3{,}6 \cdot 30 + s$

$-12 = -48 + s$

$-12 + 48 = s$

$\boxed{36 = s}$

Figura 63: Solução parcial do problema apresentada pelo grupo 2.

Após algumas orientações para aperfeiçoar a visualização gráfica, com ajustes nas dimensões dos eixos, elas encaminham a imagem de tela que pode ser vista na figura 64. Esta imagem evidencia a eficiência do *software* nos processos investigativos e confirmam os raciocínios e cálculos realizados pelo grupo. O entusiasmo que as alunas apresentaram ao certificarem os seus resultados revelam o caráter animador das investigações e das descobertas nas aulas de Cálculo. É desta forma que Flávia se reporta: "A princípio achávamos que não conseguiríamos resolver o problema, mas fomos evoluindo no entendimento. As consultas e as trocas de ideias no grupo favoreceram isso. Nos animamos mais à medida que vamos confirmando os resultados pelo computador (E_3).

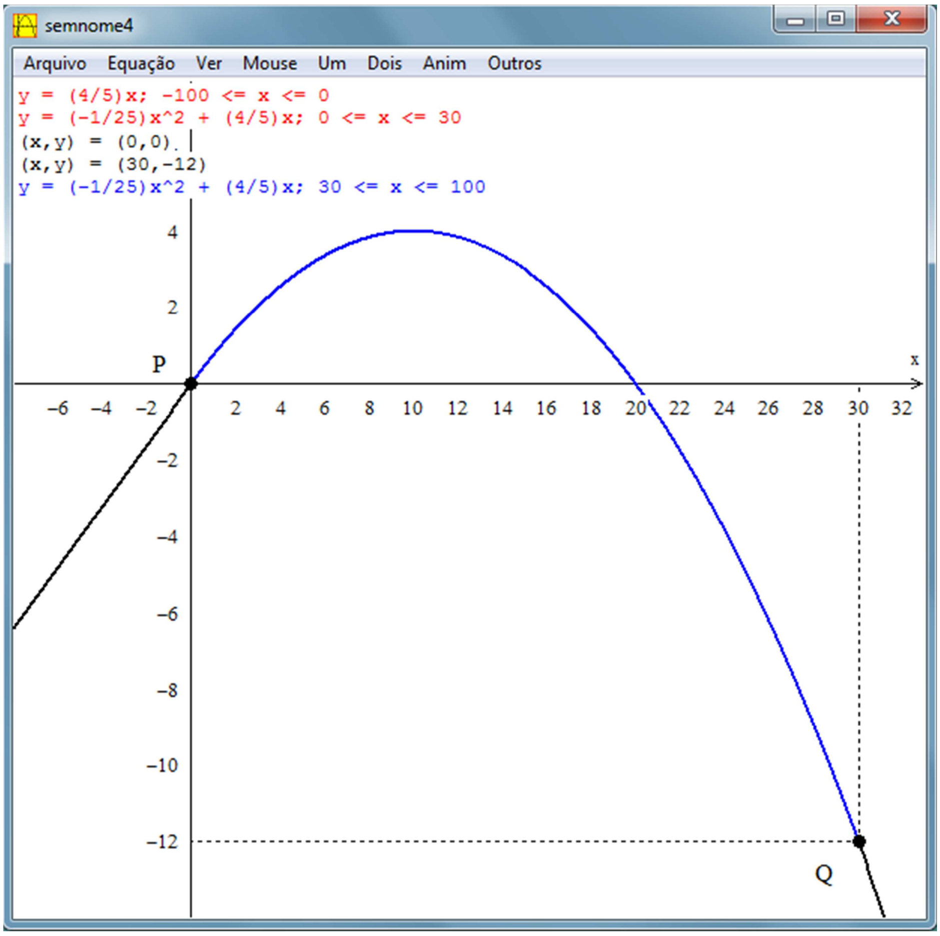


Figura 64: Resolução computacional apresentada pelo grupo 2.

De uma forma geral, os alunos vinham apresentando mais familiaridade com os recursos computacionais. Foi possível constatar, circulando pelo laboratório, que metade dos grupos utilizava o *Winplot* nas suas investigações, enquanto a outra parte fazia uso do *GeoGebra*. As orientações solicitadas estavam mais relacionadas aos aspectos teóricos dos assuntos explorados e menos em auxílio aos programas. Em sala de aula, eu continuava a requisitar da classe o emprego do *software* na abordagem dos exercícios, nem que fosse apenas para auxiliar nas visualizações gráficas. No momento da correção, alguns alunos relatavam os recursos utilizados em suas análises e estes episódios traziam elementos mais motivadores para as aulas. Nesta atividade, evidenciei diferenças estratégicas na investigação computacional. Enquanto que o grupo G2 utilizou a medida numérica do coeficiente angular no *Winplot* para verificar a condição de suavidade nos pontos de encontro das curvas (figura 65), o grupo G1 usou o traçado das tangentes laterais no *GeoGebra* para apurar esta condição (figura 66). Esse notável aspecto enriqueceu as discussões e as apresentações finais das equipes.

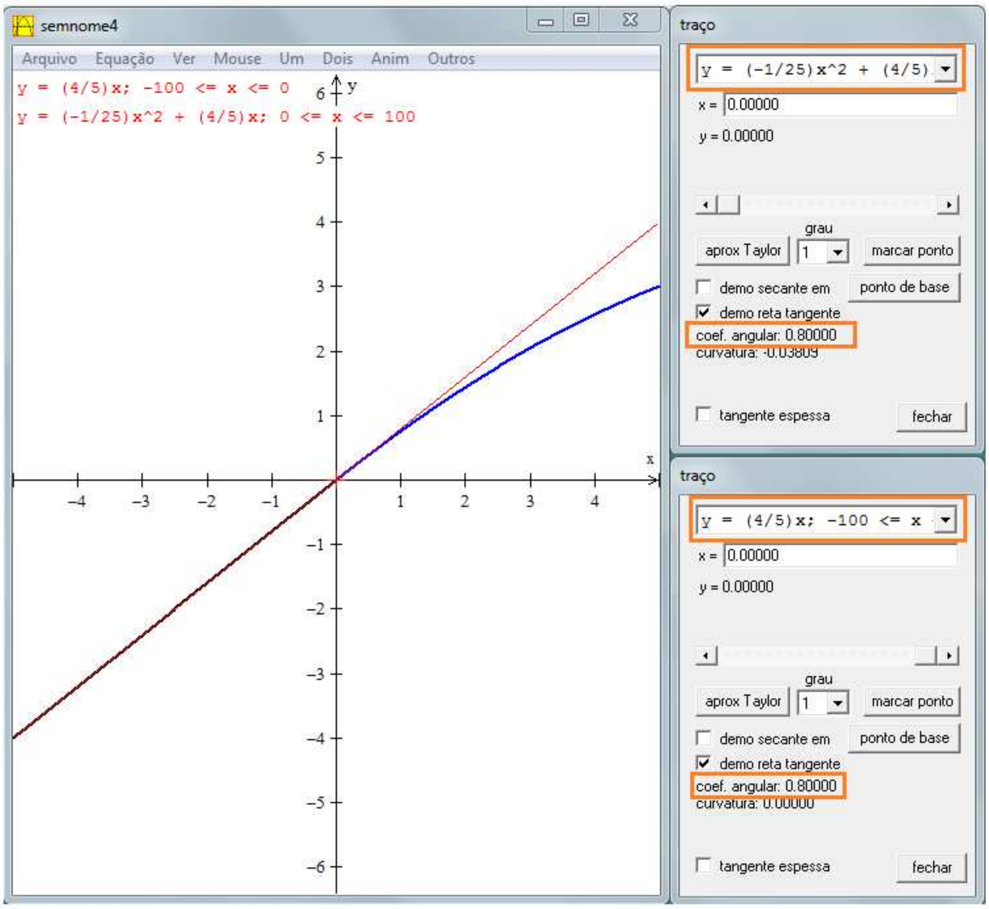


Figura 65: Estratégia usada pelo grupo 2 para verificar a condição de suavidade da curva

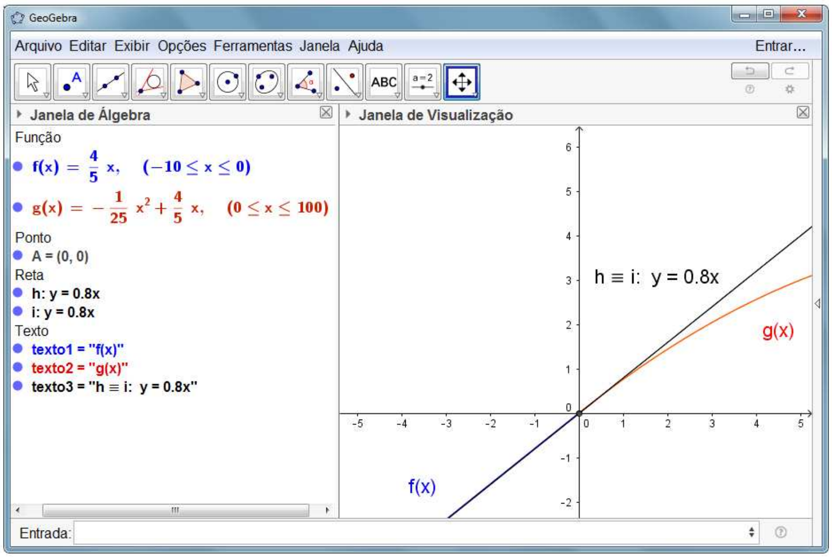


Figura 66: Estratégia usada pelo grupo 1 para verificar a condição de suavidade da curva

Questionário

A primeira questão indagou aos alunos: "*Você considera que esta atividade, realizada em grupo e com auxílio do computador, o ajudou a compreender melhor os conceitos teóricos de continuidade, derivada, reta tangente, dentre outros, em aplicações práticas?".* Eles deveriam responder objetivamente "sim" ou "não", mas, posteriormente, deveriam tecer comentários acerca da sua escolha: *"Que aspectos na realização dessa atividade você considera que mais contribuíram para formar a sua opinião? Explique.".* A maioria dos alunos, 85%, respondeu afirmativamente a pergunta, enquanto outros 15% assinalaram "não". Esta maioria evidencia a relevância da tarefa investigativa, com o auxílio da tecnologia, para a ampliação da compreensão dos conceitos teóricos envolvidos na tarefa.

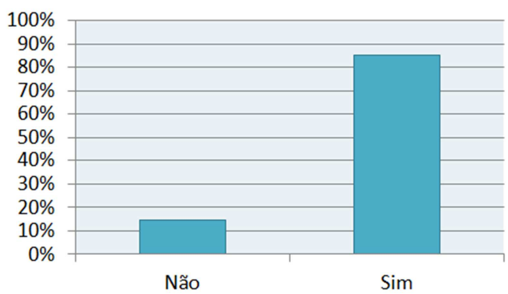


Figura 67: Resposta dos alunos a primeira pergunta do questionário n° 3.

O encontro possibilitou que os alunos aplicassem alguns conhecimentos teóricos da matéria numa circunstância prática (simulativa), fronteiriça às atividades dos profissionais projetistas. Ao tempo em que a tarefa se propôs a aproximar os estudantes de atividades diversificadas e atraentes, com o auxílio da tecnologia, estes ampliaram os seus conhecimentos e perceberam a utilidade dos assuntos trabalhados: "Saímos da teoria e vimos o assunto na prática. Pude perceber a aplicação prática das derivadas. O auxílio do programa melhora a nossa compreensão" (Q_3); "A tarefa amplia a nossa visão em relação aos conteúdos teóricos, pois praticamos os conceitos com o auxílio do computador, diferente da aula expositiva. Passei a compreender melhor as derivadas" (Q_3). As ponderadas orientações, as consultas bibliográficas e a cooperação mútua entre os alunos nas investigações também foram elementos que auxiliaram eficientemente a compreensão dos conceitos trabalhos da tarefa e permitiram a superação das dificuldades: "As orientações do professor, as consultas e as trocas de informações com os colegas [de grupo] foram fundamentais para compreender a tarefa e superar as dificuldades" (Q_3). Todas estas perspectivas positivas notabilizam as experiências investigativas e exploratórias no Cálculo.

Nesta tarefa os alunos puderam escolher o *software* que lhes auxiliariam nas investigações. Houve uma divisão aproximada na preferência, sete grupos utilizaram o *Winplot* enquanto outros cinco fizeram uso do *GeoGebra*. A segunda questão buscou sondar como foi utilizado o programa nas explorações. Eles teriam que marcar uma das seguintes alternativas e comentar acerca das suas escolhas: para toda a resolução da atividade; apenas para a visualização do gráfico; apenas para a verificação da solução ou outra (qual ?). Houve um equilíbrio nas respostas, de forma que 50% dos alunos marcaram a opção "para toda a resolução da atividade" e outros 50% assinalaram "apenas para visualização do gráfico".

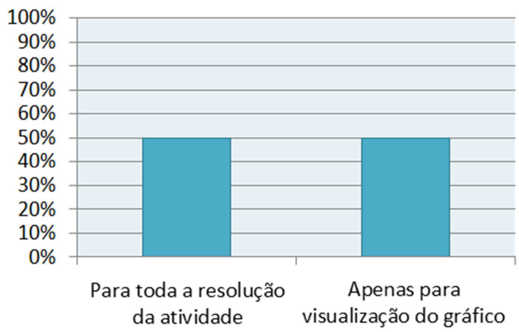


Figura 68: Resposta dos alunos a segunda pergunta do questionário n° 3.

Esta tarefa apresentou uma característica diferenciada em relação às anteriores. Enquanto nas outras os alunos necessitavam realizar demonstrações algébricas para generalizar resultados e comprovar proposições, nesta os cálculos marcaram fortemente as explorações. Foi possível constatar que os programas foram bastante requisitados em termos de visualização gráfica em auxilio aos raciocínios analíticos dos alunos: "As visualizações gráficas nos ajudaram a verificar as transições lisas e nos ajudaram nos raciocínios" (Q_3). Também foram úteis para investigar as respostas encontradas, permitindo que os alunos avançassem com segurança na tarefa: "A cada cálculo realizado na tarefa o computador auxiliava bastante na verificação dos resultados. Isto nos dava mais segurança para seguir adiante" (Q_3). Além das estratégias já destacadas para verificar a suavidade nos pontos de transição, outra forma distinta e interessante de investigação foi utilizada por alguns grupos. Eles buscavam unir a parábola com as retas utilizando os recursos de animação do *Winplot*. Conforme pudemos destacar no capítulo anterior, eles procuravam variar dinamicamente os coeficientes da parábola $y = ax^2 + bx + c$ para que esta se ajustasse tangencialmente as retas. Apesar do empenho, este raciocínio não seguiu adiante em função das dificuldades encontradas para determinar as coordenadas do ponto Q. Somente depois das equações calculadas eles utilizaram tal recurso para verificação. Malgrado a frustração da tentativa, ela foi elogiada pelos demais colegas no momento das discussões coletivas e ampliaram o conhecimento dos alunos sobre os assuntos e sobre o programa. Esta circunstância evidencia o protagonismo e a autonomia dos alunos na elaboração dos conhecimentos: "A simulação computacional ajudou muito no entendimento geral da tarefa. Apesar de não ter dado certo a estratégia com os coeficientes, aprendemos mais ainda do programa" (Q_3). A relevância do *software* para a aprendizagem do Cálculo através das tarefas exploratórias e investigativas ficou comprovada nesta tarefa em função do seu intenso uso em auxílio às estratégias, às simulações gráficas e aos raciocínios analíticos.

Relativamente às dificuldades encontradas na realização da tarefa, os alunos deveriam responder sucintamente "sim" ou "não". Para aqueles que respondessem afirmativamente, deveriam destacar, dentre as alternativas "na compreensão da tarefa", "no uso do *software*", "na realização dos cálculos" ou "outra (qual ?)" os aspectos predominantes das suas dificuldades. As respostas deveriam seguir com algumas reflexões.

70% dos alunos apresentaram algum tipo de dificuldade na realização da tarefa, outros 30% disseram não ter encontrado dificuldades. Os maiores obstáculos apontados referiam-se a realização dos cálculos, 85% dos alunos se manifestaram nesse sentido. Outros 15% salientaram embaraços na compreensão da tarefa.

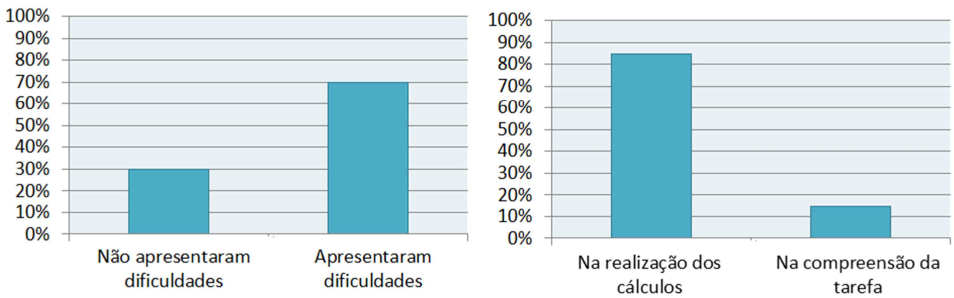


Figura 69: Resposta dos alunos a terceira pergunta do questionário nº 3.

De fato, as maiores dificuldades se concentraram na realização dos cálculos, não nas técnicas operatórias das derivadas, porém na aplicação dos conceitos ao contexto prático da tarefa. Foi dessa forma que Ricardo se expressou: "Derivar $y = ax^2 + bx + c$ é fácil, é simplesmente $y' = 2ax + b$, difícil é associar esta derivada à solução do problema" (E_3). Sandra também "Não é fácil usar os conceitos numa situação prática. Derivar é fácil, mas aplicar a derivada na solução do problema que é difícil" (Q_3).

Pude constatar, através dos episódios A_{T3} e C_{T3} relatados, a insegurança em alguns grupos de trabalho nos domínios conceituais. Os conteúdos abordados na tarefa não estavam ainda plenamente consolidados. As solicitações de orientações estavam praticamente voltadas para as questões teóricas ao invés da manipulação dos programas. Uns confundiam ângulo de inclinação com coeficiente angular (grupo G1 no episódio A_{T3}); outros apresentavam dúvidas na interpretação gráfica da derivada (grupo G2 no episódio C_{T3}) e boa parte dos alunos ainda tinham dificuldades em utilizar as funções angulares da calculadora científica. Alberto assevera: "praticamente aprendi a usar [a calculadora científica] naquela tarefa, pois não usei na disciplina anterior de Introdução ao Cálculo e desconhecia aquela simbologia DEG, RAD e GRAD" (E_3). Apesar das dificuldades observadas, a tarefa foi bastante útil também no sentido de retomar estes tópicos e esclarecer muitos conceitos nas discussões finais. João evidencia "Tinha dúvida ainda no assunto de continuidade e diferenciabilidade, mas a tarefa ajudou a compreender melhor estes conceitos" (Q_3). Nos comentários, em geral, pude constatar bastante esse aspecto.

Os alunos puderam registrar também o entusiarmo por “ver na prática” uma aplicação interessante das derivadas. Mônica destaca “É muito bom compreender na prática os assuntos vistos em sala de aula. A tarefa nos mostrou a utilidade de muitos conceitos teóricos e difíceis de entender. Me senti mais motivada para estudar o assunto” (E_3). Isto evidencia o benefício das tarefas exploratórias e investigativas que aproximam a teoria da prática e favorecem a aprendizagem dos estudantes.

Síntese

Através da simulação de uma primeira subida e descida de uma montanha-russa a tarefa examinada presentemente buscou aproximar os alunos de algumas situações vivenciadas por profissionais projetistas. Esta foi uma forma atraente deles verem “na prática” a aplicabilidade dos conhecimentos teóricos adquiridos no estudo do Cálculo, particularmente nos tópicos de continuidade e diferenciabilidade.

As dificuldades de entendimento que alguns tópicos mais sofisticados ou complexos da disciplina costumam oferecer para os alunos, devem constituir permanentes preocupações para o professor. Foi também imbuído com este propósito que busquei associar esta tarefa com as necessidades de ampliar a sua compreensão no assunto, dando um significado mais prático a tais estudos. Esta também compõe uma notável atribuição das tarefas exploratórias. Ao aliar no problema as abordagens numéricas, geométricas e analíticas, com o apoio da tecnologia, procurei envolver os alunos num contexto mais realístico, viabilizando uma maior motivação para o estudo.

A situação real e inusitada vivenciada por alguns discentes no percurso para faculdade também ensejou a percepção desta tarefa. O “tombo” experimentado por eles ao trafegar de carro por determinado trecho, que não tinha uma continuidade suave, oportunizou explorar na prática alguns tópicos ora em estudo: transição lisa, ângulo de inclinação, continuidade, diferenciabilidade, dentre outros.

As consultas bibliográficas foram permitidas de forma a enriquecer e a dinamizar as investigações, além de evitar as fatigantes memorizações de fórmulas. De fato, é muito mais valioso que os estudantes, em algumas circunstâncias e de posse dos “manuais” e dos "formulários", saibam utilizá-los adequadamente do que, por um simples esquecimento, deixem de produzir os conhecimentos esperados. É um cenário que se assemelha, por exemplo, a um mecânico que diante de um painel enorme de ferramentas, sem ter memorizado a nomeclatura de todas – e essa memorização ocorrerá naturalmente com o tempo e o uso frequente – sabe escolher criteriosamente aquela que será útil à solução de determinado problema. A estrutura relativamente mais aberta da tarefa oportunizou um ambiente bastante produtivo, onde se pôde constatar discussões mais fundamentadas, incrementadas por cautelosas orientações.

Sob a ótica contextual, este trabalho diferenciou-se um pouco mais dos anteriores. Nos outros foram explorados temas relacionados a determinações de áreas e lugares geométricos, aspectos relativamente mais intrínsecos da Matemática. Neste, o foco estava no campo da matemática aplicada, num projeto simulado da engenharia. De qualquer forma, em ambas as situações, os alunos desempenharam notáveis papéis de investigadores matemáticos. Não faltaram os recursos inestimáveis da tecnologia que tanto auxiliaram as análises e ampliaram o entendimento das questões.

Do ponto de vista da manipulação dos programas, foi constatada uma maior desenvoltura dos alunos. Estes já demandavam mais as minhas orientações nos aspectos conceituais das tarefas. A utilização frequente da tecnologia em sala de aula, ao ilustrar e enriquecer as explanações teóricas, além do incentivo para que eles abordassem alguns exercícios, fomentavam ainda mais o seu uso. Por sinal, na realização desta atividade, que foi a primeira com livre escolha de *software*, a turma mostrou-se bastante dividida. Praticamente pouco mais da metade dos grupos escolheu o *Winplot* para as suas investigações, enquanto a outra parte serviu-se do *GeoGebra*. As estratégias diferenciadas utilizadas para o exame das transições lisas, nos pontos de encontro das curvas, evidenciaram-se bastante significativas. Alguns grupos, a exemplo do G2, verificaram a condição de suavidade pela medida do coeficiente angular à direita e à esquerda dos pontos de contato e outros, a exemplo do G1, pela sobreposição das retas tangentes laterais a estes. Tais aspectos valorizaram as discussões dos trabalhos, onde os alunos acabaram por perceber que ambas eram formas alternativas de apurar o mesmo resultado. Ainda em relação ao uso das tecnologias, particularmente das calculadoras científicas, um breve tempo foi destinado para as explicações das terminologias DEG, RAD e GRAD presentes nessas máquinas e a utilização correta de tais funções. Isto foi necessário porque alguns alunos apresentaram dificuldades no manuseio desses comandos angulares.

Reportando-se aos questionários respondidos, foi possivel extrair algumas relevantes evidências. A tarefa favoreceu uma maior percepção sobre a importância dos assuntos abordados em sala de aula. O encontro permitiu que eles se afastassem momentaneamente do campo exclusivamente teórico para aplicar os conhecimentos na situação simulativa de um projeto prático. Em função dos trabalhos permitirem também maiores elucidações dos conceitos de continuidade e diferenciabilidade, dentre outros, a grande maioria da classe (85% dos alunos) manifestou nítida satisfação na realização da tarefa.

Os programas computacionais foram muito úteis para as investigações. Desde as visualizações gráficas até a verificação dos resultados, todas as equipes fizeram uso ativo das suas variadas funções dinâmicas. Além de auxiliar eficientemente a compreensão global da tarefa, os recursos tecnológicos agregaram fatores motivacionais às investigações.

As dificuldades certamente se farão presentes nas tarefas exploratórias, importante é dosá-la adequadamente e criar alternativas para minimizar os seus efeitos. Uma atividade sem uma boa dose de desafio e complexidade não desperta o interesse dos alunos. A possibilidade deles trabalharem em grupos, trocarem conhecimentos e realizarem consultas, todos esses fatores conjugados ajudam a suavizar os obstáculos. Apesar da maioria (70%) ter registrado algum tipo dificuldade na resolução do problema – conforme as respostas dadas no questionário – a satisfação foi perceptível após a finalização dos trabalhos. Os alunos sinalizavam positivamente a experiência que estavam vivenciando.

7.4. Tarefa 4 – O problema da velocidade instantânea

Uma das primeiras aplicações do estudo das derivadas, fora do âmbito da própria Matemática, é a determinação da velocidade instantânea de um corpo em movimento. É na disciplina de Cálculo que os alunos têm uma primeira noção deste conceito e, por certo, desenvolverão com mais propriedade no componente de Física Teórica. Nesta tarefa exploratória os alunos partiram da concepção elementar da velocidade média, constituída no ensino médio, para estabelecer a clássica definição instantânea desta grandeza através do limite infinitesimal.

Os ensaios empíricos de queda livre do físico Galileu Galilei estão presentes no roteiro, situando o contexto histórico das experiências e fornecendo o elemento inicial das investigações. Os recursos computacionais incrementaram a atividade numa situação bastante semelhante à interpretação gráfica da derivada. As funções dinâmicas do *software* proporcionaram um maior entendimento na transição do conceito de velocidade média para o de velocidade instantânea. Isto porque o movimento contínuo das secantes, indo ao encontro da tangente, complementou graficamente o significado dos cálculos realizados pelos alunos. Além de ter resgatado o tópico de limites, num contexto bastante expressivo, esta tarefa permitiu a exploração do tema de uma forma diversa ao método expositivo. Vejamos a seguir os principais fatos que marcaram as ações dos grupos de trabalho. O anexo de número 8 traz o roteiro da atividade e certamente será útil para acompanhar estas ações.

Raciocínios e processos

Conforme já relatado no capítulo anterior, as consultas bibliográficas não foram permitidas, os alunos poderiam servir-se apenas das notas de aulas. O *Winplot* foi recomendado em função da simplicidade deste programa para a análise específica do problema e também pela proximidade deste com o tema "interpretação gráfica da derivada" realizada em classe. As calculadoras científicas também foram liberadas, para que eles realizassem mais rapidamente os cálculos da tarefa, principalmente o preenchimento da tabela. Procedemos então à leitura preliminar do roteiro e nos detivemos brevemente na parte histórica, destacando a importante descoberta de Galileu no século XVII. Expliquei que naquela tarefa eles deveriam, a partir do prévio conhecimento que tinham sobre velocidade média, avançar no conceito e elaborar, por intermédio dos limites e das derivadas, o conceito de velocidade instantânea. Requisitei, como hábito já consolidado, que eles justificassem suficientemente todas as respostas e salvassem as imagens de tela que considerassem mais úteis e importantes as suas argumentações. Os grupos então iniciaram as explorações ao tempo em que eu circulava pela sala a observar mais detalhadamente as discussões. O grupo 1 estava a preencher a tabela (episódio A_{T4}):

Episódio A_{T4}:

João: O primeiro intervalo é de 5 a 6, não é?

Alberto: Acho que sim... O valor inicial é 5 e o final é $5 + 1 = 6$. Não é isso?

João: É... Deu quanto então a velocidade média?

Ricardo: Deu 1.

Observo reservadamente o grupo e percebo que eles acabam por confundir os valores de espaço e tempo e calculam de forma errada a velocidade média. Ao invés de realizar $s(5 + \Delta t) - s(5) = s(5 + 1) - s(5) = s(6) - s(5)$, através da fórmula de Galileu $s(t) = 4{,}9t^2$, eles fazem simplesmente $6 - 5$ e encontram 1. Dividem este valor por $\Delta t = 1$ e registram 1 como resposta para a velocidade média. Esse procedimento errôneo vai se repetir ainda na próxima linha da tabela, a tal ponto deles encontrarem novamente o mesmo valor para a velocidade média e suspeitarem que exista algum erro. Abstenho-me de qualquer intervenção, limitando-me a observar:

João: Calcule agora no segundo intervalo de 5 a $5{,}1$.

Ricardo: Deu $0{,}1$ dividido por $0{,}1$ que é 1. Deu 1 de novo...

João: Estranho...

Aberto: Mas os cálculos estão corretos!

(como eu estava por perto, João aproveita e lança uma pergunta...)

João: Professor, por que o intervalo agora é diferente e a velocidade [média] deu a mesma?

Como eu já havia percebido o erro reservo-me a orientar que a fórmula da velocidade média divide *"espaço por tempo"* e não *"tempo por tempo"*. Nesse instante afasto-me e deixo o grupo discutir sobre a orientação que foi dada. Não demora para que eles percebam o erro que estavam cometendo. Novamente requisitam a minha presença para informar onde estavam equivocados e lamentam ter cometido uma falha tão elementar! Dessa vez procedem corretamente os cálculos. A tabela com os valores determinados pelo grupo pode ser vista na figura 70. Em função da orientação fornecida, os alunos se mantêm ativos na busca pelo equívoco cometido. Ao invés do professor transmitir diretamente o conhecimento, este apenas orienta os alunos nas investigações e cuida em manter a boa discussão entre eles.

Δt	Intervalo de tempo: $[5,\ 5+\Delta t]$	Velocidade Média (Vm): $Vm = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(5+\Delta t)-s(5)}{\Delta t} =$
1	[5 ; 6]	$\frac{176,4 - 122,5}{1} = 53,9$
0,1	[5 ; 5,1]	$\frac{127,449 - 122,5}{0,1} = 49,49$
0,05	[5 : 5,05]	$\frac{124,96225 - 122,5}{0,05} = 49,245$
0,01	[5 ; 5,01]	$\frac{122,99049 - 122,5}{0,01} = 49,049$
0,001	[5 , 5,001]	$\frac{122,549049 - 122,5}{0,001} = 49,0049$

Figura 70: Tabela apresentada pelo grupo 1.

Constatei que este episódio foi isolado, pois as demais equipes de trabalho estavam preenchendo corretamente a tabela, pelo menos conceitualmente, apesar de eventuais erros de contas que passariam posteriormente pelo crivo do programa. Após o grupo 1 ter completado a tabela, os alunos perceberam, através do padrão que surgia, que a velocidade média estava cada vez mais próxima de $49\,m/s$ e conjecturam exatamente este valor ao responderem a primeira questão (eles ainda iriam confirmar este resultado através do limite!). Outras equipes também avaliaram da mesma forma. Realmente esta medida intuitiva é esperada se os cálculos são realizados corretamente. Enquanto isso, no grupo 2, as discussões estavam um pouco mais adiantadas e as alunas já estavam a realizar a análise gráfica solicitada na segunda questão item a). Assim elas procediam (episódio B_{T4}):

Episódio B_{T4}:

Sandra: (...) não é $4,9$ (quatro *vírgula* nove), assim o programa não entende, é 4.9 (quatro *ponto* nove).

Flávia: Ah, é mesmo! Mas [o gráfico] ficou pequeno, não dá pra ver!

Mônica: O professor disse que precisa ajustar o “zoom” para visualizar melhor...

Flávia: Ok! Vamos lá...

(geralmente é necessário realizar ajustes no *software* para melhorar a visualização gráfica. Elas procedem aos ajustes com algumas orientações e continuam as suas investigações...)

Sandra: (...) vá observando os [valores dos] coeficientes angulares [da reta secante].

Mônica: Em que ponto?

Flávia: Aqui no roteiro diz que o ponto base é 5. Vou colocar 5...

(O *software* possui um recurso dinâmico que permite variar a reta secante até esta coincidir com a reta tangente no ponto base. Simultaneamente a janela ainda exibe os valores de coeficientes angulares. Esta função facilita por demais a correção dos valores da tabela e ainda permite a interpretação gráfica dos cálculos realizados. O grupo interage com a tecnologia e passa a comparar os resultados registrados na tabela com as inclinações fornecidas pelo programa)

Sandra: Ponha agora 6 (passam a verificar o primeiro intervalo). Deu quanto?

Flávia: Deu 53,9.

Mônica: Olha aqui o nosso... Está correto!

Sandra: Vê agora com 5,1.

Flávia: Deu 49,49 (e continuam...)

Voltei a relembrar que todas as telas com visualizações importantes fossem melhoradas, salvas e enviadas por e-mail, como anexos da tarefa realizada. A figura 71 exibe a tela da análise anterior enviada pelo grupo 2.

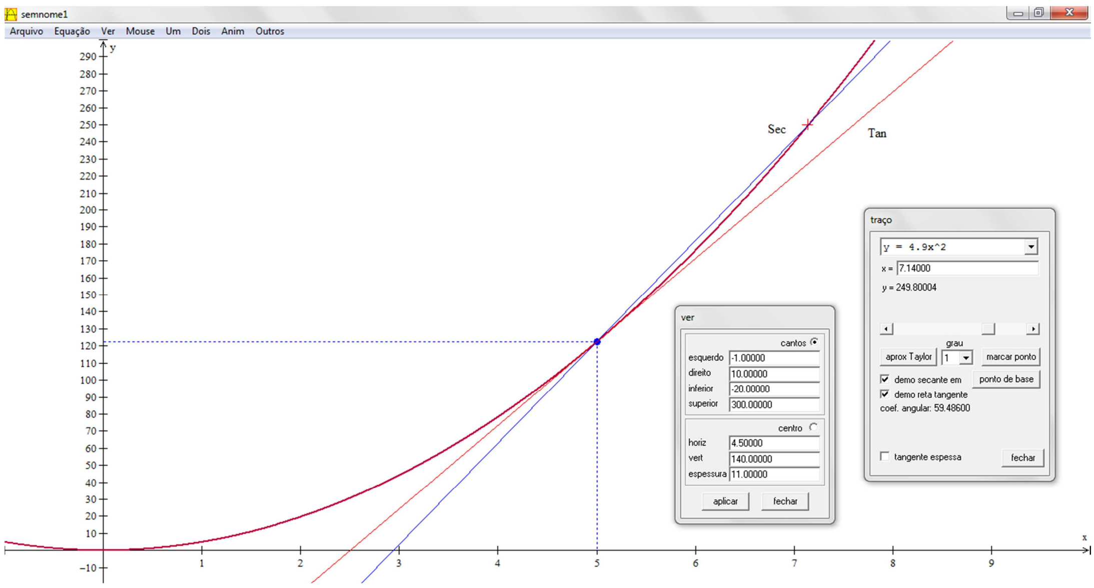


Figura 71: Análise da velocidade média realizada pelo grupo 2.

Era notória a interação nos grupos de trabalho através dos diálogos que se produziam. Sempre que alguns impasses surgiam no desenvolvimento da tarefa, os alunos costumavam requisitar a minha presença para mediar as discussões. Vale destacar aqui um fato importante. Algumas equipes somente perceberam os erros cometidos no preenchimento da tabela nesta etapa investigativa. Alguns valores de velocidade calculados nos intervalos não coincidiam com os respectivos coeficientes angulares das secantes exibidos na visualização computacional. O recurso dinâmico do programa permitiu o confronto, o ajuste e o melhor entendimento conceitual do que eles estavam a investigar.

Na sequência da tarefa, constatei que o grupo G1 visualizou adequadamente a reta tangente no computador e registrou no roteiro o coeficiente angular indicado pelo programa. Como este valor coincidiu exatamente com a conjectura firmada na primeira questão, eles ganharam mais confiança e continuaram as explorações. Vejamos como prosseguiram nas investigações (episódio C_{T4}):

Episódio C_{T4}:

Alberto: (...) aqui diz (no item “c” do roteiro) que as inclinações das secantes determinam as velocidades médias. A velocidade instantânea deve surgir daí...

Ricardo: ...e a velocidade no ponto $t = 5$? O intervalo some? Olhe aqui na tabela...

João: Ora, o intervalo vira um ponto. Deixa de ser intervalo, não é?

Ricardo: Não sei... É?

Alberto: Mas no limite ela (a reta secante) vira a tangente... Olhe aqui a figura (observa a figura 2 no roteiro). Aqui diz que a inclinação da tangente é a velocidade instantânea.

Ricardo: Se for assim, então a velocidade instantânea é o limite das retas secantes. Deve ser isso! Vamos chamar o professor...

Conforme já dissemos no capítulo anterior, algumas dificuldades coletivas foram percebidas neste item da tarefa. É justamente nesta etapa que os grupos precisam estabelecer corretamente a definição de velocidade instantânea. Caso isto ocorra, as demais questões fluem com mais tranquilidade, pois dependem desta concepção. Todas as fases realizadas anteriormente, através dos cálculos e das análises computacionais, visam exatamente criar as condições adequadas para a elaboração precisa do novo conceito. Depois que eu forneci algumas orientações gerais, principalmente sobre o significado de “instantâneo” naquele contexto, isto é, no sentido de “pontual”, de velocidade “no ponto $t = 5s$” ou “no instante $t = 5s$”, os grupos passaram a compreender melhor o fenômeno em estudo e continuaram as explorações. As orientações coletivas são necessárias em algumas circunstâncias para que os alunos possam prosseguir com segurança nas investigações, principalmente nas tarefas que objetivam introduzir novos conceitos.

Depois das orientações, o grupo 1 estabeleceu sucintamente e de forma textual que *"a velocidade instantânea é o limite da velocidade média quando $\Delta t \to 0$"*. Apesar de apresentarem uma justa caracterização, eles teriam que transcrevê-la para a simbologia de limites, pois o item seguinte solicitaria o cálculo da velocidade instantânea no instante $t = 5s$ para confrontar o resultado apresentado computacionalmente. E assim procederam. Constatei que depois de algumas discussões internas, o grupo formalizou a expressão através do limite e realizou os cálculos que podem ser vistos na figura 72. Cabe ressaltar os raciocínios diferenciados na fatoração, enquanto este grupo utilizou "a diferença de quadrados" para simplificar o limite, outros desenvolveram "o quadrado da soma" para alcançar o mesmo objetivo.

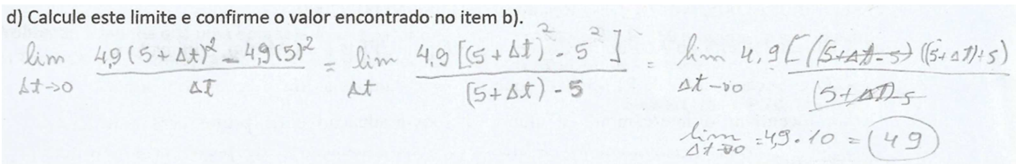


Figura 72: Cálculo da velocidade instantânea apresentado pelo grupo 1.

De uma forma geral, os grupos avançam na tarefa e conseguem resolver o limite específico. Restaria agora estender o conceito da velocidade instantânea calculada na situação particular $t = 5s$ para o caso geral $(t > 0)$ e associá-la a derivada da função horária do movimento. Constatei que a extensão foi relativamente simples, pois bastaria substituir o valor numérico do ponto por uma variável que representasse o tempo (episódio D_{T4}). Porém, para o estabelecimento da associação com a derivada, as notas de aula foram bastante úteis (episódio E_{T4}). Na entrevista realizada após a tarefa algumas expressões evidenciaram a importância da consulta nesta etapa, ressaltando que sem ela a vinculação teria sido mais difícil: "(...) nós somente calculávamos as derivadas pelas regras, por isso havíamos esquecido a definição [do limite]. A consulta foi importante para finalizar a tarefa" (João, E_4); "Somente depois da associação tudo ficou mais claro, pois no início as coisas estavam confusas. Sem a consulta tudo seria muito mais complicado" (Alberto, E_4).

No grupo 2 as alunas estabeleceram um interessante diálogo nesta etapa. Com o caderno aberto a realizarem as consultas, as investigações prosseguiram (episódios D_{T4} e E_{T4}):

Episódio D_{T4}:

Mônica: (...) a velocidade média é a que é calculada no intervalo, a instantânea é no ponto.

Flávia: No caso anterior usamos o ponto 5, mas agora é geral, não pode usar número...

Mônica: Sim... A expressão agora fica "função no tempo final menos a função no tempo inicial, tudo sobre Δt", mas no lugar de 5 agora fica uma variável.

Flávia: Ponha então t... (as alunas conseguem estabelecer a fórmula geral da velocidade instantânea)

Mônica: Ah, olha ela aqui (observam o caderno aberto), fica parecida realmente com esta [fórmula] da derivada... (elas raciocinam por comparação para concluir a tarefa).

O grupo procura relacionar o limite da razão incremental que define a derivada (1) com o caso geral que elas estabeleceram (2). É através dessa comparação que pretendem concluir, por analogia, que $v(t) = s'(t)$, ao trocar "f" e "x" por "s" e "t", respectivamente (episódio E_{T4}).

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \tag{1}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = v(t) \tag{2}$$

Episódio E_{T4}:

Flávia: (...) a gente não tinha percebido, mas a velocidade instantânea é igual ao coeficiente angular da [reta] tangente.

Mônica: (...) mas o coeficiente angular quem dá é a derivada... Olha aqui esse resumo (observam no caderno a fórmula do limite da razão incremental que define a derivada (1)).

Flávia: Então ela (a velocidade instantânea) é a derivada!

Mônica: Deve ser!

Flávia: (...) no lugar de "f" é o "s" e no lugar de "x" é o "t", e o "$v(t)$" é o mesmo que "$s'(t)$" (as alunas conseguem comparar com êxito e finalmente concluem que $v(t) = s'(t)$).

Apesar de concluirem que $v(t) = s'(t)$, o grupo não avança nos cálculos específicos $v(5) = s'(5) = 4{,}9 \cdot 2(5) = 49$. Este detalhe somente seria evidenciado nas discussões finais, quando todos os resultados e conhecimentos produzidos seriam confrontados. Na aula seguinte dedicaríamos ainda algum tempo ao tema resolvendo alguns problemas específicos e dando sequência aos estudos.

Mas uma vez foi possível proporcionar aos alunos uma experiência diferenciada de ensino. A partir da definição clássica da velocidade média eles elaboraram o conceito físico de velocidade instantânea. Avançando nos domínios dos limites e derivadas, e fazendo uso das tecnologias nas suas investigações, os grupos puderam exercitar ativamente as notórias habilidades facultadas pelas tarefas exploratórias. Ao final dos trabalhos um momento foi reservado para que todos pudessem responder o questionário (anexo 13).

Questionário

Relativamente à aprendizagem do novo conceito, os alunos deveriam responder objetivamente se a tarefa que realizaram em grupo e com o auxílio do computador ajudou a construir o conceito físico de velocidade instantânea. Caso respondessem que "sim", deveriam proferir algumas considerações sobre os aspectos na atividade que mais contribuíram para sua aprendizagem. Os alunos foram unânimes em responder afirmativamente.

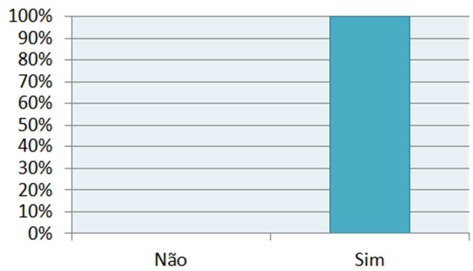


Figura 73: Resposta dos alunos a primeira pergunta do questionário n° 4.

A tarefa ocasionou uma maneira diversificada dos alunos vivenciarem a aprendizagem. A rotina da sala de aula era frequentemente alterada em ocasião das tarefas laboratoriais. Ao invés de expor o conteúdo tradicionalmente, sistematizando as definições e seguindo com alguns exemplos e exercícios, os alunos experimentaram uma metodologia diferenciada. Os novos "ingredientes" das ações exploratórias viabilizaram uma dinâmica distinta para classe. Pudemos evidenciar que os alunos compreenderam o conceito de velocidade instantânea através da tarefa e o *software* foi bastante útil para este fim: "Aprendi o assunto. O programa auxiliou bastante na compreensão da tarefa. A visualização gráfica no movimento das retas ajudou a entender os cálculos da tabela" (Q_4). As consultas e as comunicações em grupo também proporcionaram a aprendizagem: "Compreendi o conceito de velocidade instantânea. As dificuldades foram reduzidas pelas consultas e também nas trocas de informações com os colegas de grupo (Q_4)". As discussões finais foram muito produtivas e os alunos tiveram a oportunidade de ampliar também os conhecimentos: "Compreendi melhor o assunto com as discussões finais. Aprendo também com as experiências dos colegas e com as explicações do professor" (Q_4).

Em função da simplicidade e das notáveis qualidades dinâmicas para ilustração do tema, o *Winplot* foi sugerido em auxílio às investigações na tarefa. Na segunda questão, os alunos deveriam ponderar sobre o uso deste recurso: *"Ao longo da realização desta atividade, foi-lhe sugerido o uso do computador com o software Winplot. Como foi utilizado este recurso tecnológico?"* Após marcarem uma das alternativas "para toda a resolução da atividade", "apenas para visualização do gráfico", "apenas para verificação da solução" ou "outra (qual ?)" eles comentariam acerca das suas escolhas. Os alunos responderam da seguinte forma a esta pergunta: 75% manifestaram que o *software* foi útil "para toda a resolução da atividade"; 15% "apenas para visualização do gráfico" e 5% "apenas para verificação da solução".

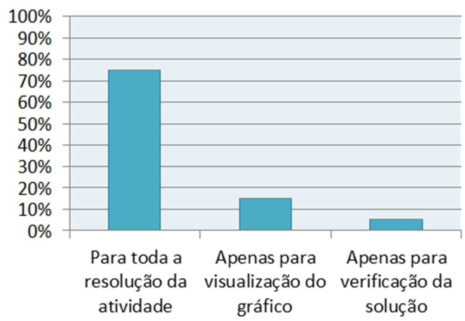


Figura 74: Resposta dos alunos a segunda pergunta do questionário n° 4.

De fato, pela semelhança do conteúdo trabalhado nesta atividade com o tema "interpretação gráfica da derivada", explorado em sala de sala com o auxílio do mesmo programa, a sua utilização aqui foi bastante significativa. Por efeito da grande maioria dos alunos (90%) terem registrado que o *software* foi útil para resolver toda a tarefa ou apenas para a visualização gráfica, comprova o quanto ele mostrou-se proveitoso na assimilação do novo conceito: "Pude compreender a velocidade instantânea através da visualização gráfica. O movimento das retas permite entender melhor o limite da velocidade média" (Q_4). Desde as visualizações dinâmicas até a constatação dos cálculos, todos estes recursos juntos ampliaram consideravelmente o entendimento do assunto: "Compreendi melhor o assunto por meio das visualizações gráficas do programa. Ele nos deu a segurança de avançar no problema, pois à medida que realizávamos os cálculos, conferíamos as respostas usando os seus recursos" (Q_4).

Na terceira questão os alunos informariam sobre as principais dificuldades encontradas na realização da tarefa. Eles deveriam responder "sim" ou "não" a pergunta: *"Você encontrou dificuldades na realização desta atividade?"* Em seguida, para aqueles que respondessem afirmativamente, as seguintes alternativas balizariam as suas respostas: na compreensão da tarefa; na compreensão do conceito de velocidade instantânea; no uso do *software;* na realização dos cálculos ou outra (qual ?).

70% dos alunos encontraram dificuldades na compreensão da tarefa, enquanto outros 30% não apresentaram. Dos que apresentaram dificuldades, 80% assinalaram que as dificuldades foram "na compreensão do conceito de velocidade instantânea" (isto é, 56% da classe deparou-se com esta dificuldade específica), enquanto outros 20% apontaram dificuldades "na realização dos cálculos".

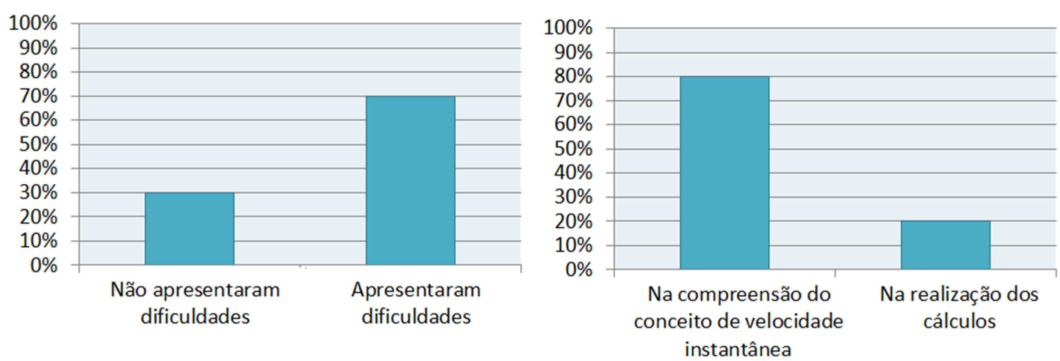


Figura 75: Resposta dos alunos a terceira pergunta do questionário nº 4.

As respostas dos alunos confirmaram a impressão que tive durante a realização da tarefa. Esta foi a atividade onde eles requisitaram mais a minha presença em busca de orientações. As suas demandas estavam voltadas majoritariamente para os aspectos teóricos do conteúdo abordado e bem menos para os recursos computacionais. Nas respostas apresentadas para justificar as dificuldades encontradas na exploração da tarefa, alguns deles chegaram a destacar o esquecimento dos assuntos básicos vistos em Física no ensino médio: "Não lembrava mais dos assuntos da Física vistos no colégio, mas as discussões em grupo ajudaram bastante a entender a tarefa" (João, Q_4); "Há muito tempo que tinha visto esse assunto na Física e não me recordava mais. Tive muitas dificuldades, mas gostei da tarefa" (Flávia, Q_4).

Diferentemente dos outros trabalhos laboratoriais, neste os alunos partiram para elaborar uma nova formulação, numa outra área de conhecimento. Acredito que estes aspectos conjugados tenham também gerado algumas dificuldades, inclusive conduzido a maioria a apontar dificuldades na compreensão do conceito de velocidade instantânea: "Os colegas [de grupo] e as consultas ajudaram bastante na compreensão do assunto, sem isso as dificuldades seriam maiores" (Flávia, Q_4); "No início tive dificuldade para entender o conceito [de velocidade instantânea], só fui compreender melhor no momento das discussões finais através das explicações do professor" (Ricardo, Q_4). Não foram salientadas dificuldades na manipulação do programa nesta última tarefa, inclusive já se notava a maior desenvoltura apresentada pelos alunos na utilização desses recursos nas suas investigações. Isso evidencia a evolução deles ao longo de toda a experiência nos domínios dos programas utilizados.

Síntese

A pretensão desta tarefa foi introduzir o conceito físico de velocidade instantânea através da sua formulação clássica pelo limite infinitesimal. Por ser uma das mais importantes aplicações advindas do estudo inicial das derivadas, os alunos concebem a ideia preliminar desta grandeza no Cálculo para desenvolvê-la com mais profundidade no componente de Física. Esta atividade diferenciou-se singularmente das antecedentes. Enquanto que nos trabalhos exploratórios anteriores os alunos consolidaram relevantes tópicos da disciplina, através da abordagem de problemas contextualizados, neste, eles construiram um novo conceito.

Ao invés de apresentar o tema conforme a metodologia tradicional optei por trabalhar o assunto de uma forma diferenciada: aliei as características mais ativas das explorações aos aspectos dinâmicos das tecnologias. Já acostumados com a rotina das atividades laboratoriais, os alunos também puderam realizar consultas às notas de aulas. Nestes registros eles puderam pesquisar e relembrar os elementos essenciais ao desenvolvimento das novas ideias.

Esta tarefa foi adaptada do livro de Stewart (2013), que por sinal é uma das obras modernas mais citadas para um primeiro curso de Cálculo Diferencial e Integral. Além das suas atraentes e variadas aplicações, a sua renovada forma de apresentar e ilustrar os temas da disciplina vem agradando tanto a professores quanto alunos. Nesta atividade os grupos de trabalho partiram dos conhecimentos secundários sobre cinemática, particularmente sobre velocidade média, para refinar e avançar os estudos através dos limites e derivadas. A tarefa pretendeu aprofundar os conceitos por intermédio do clássico problema da queda livre, por sinal assunto abordado com pioneirismo e maestria por Galileu Galilei no século XVII. Os elementos históricos também foram contemplados no roteiro. Posteriormente a atividade laboratorial, já em sala de aula, a turma prosseguiu os estudos com uma série de exercícios e problemas sobre a temática.

Novamente não faltaram os elementos numéricos, geométricos e analíticos que constituiram um conjunto harmônico no tratamento do conteúdo. Os alunos fizeram uso do *Winplot* e também das calculadoras científicas ao longo das explorações. Ficou evidenciada a utilidade desses recursos na tarefa, principalmente para o preenchimento e a interpretação dos resultados obtidos na tabela. As investigações ganharam mais agilidade e dinamicidade com todas estas ferramentas. Como consequência da maior familiaridade dos alunos com o programa a tarefa mostrou-se bastante motivadora. Diversos conceitos trabalhados anteriormente sobre limites e derivadas foram resgatados e utilizados nesta atividade, possibilitando as novas idealizações. Dispostos em pequenos grupos e desempenhando papéis de investigadores matemáticos, os alunos enveredaram por outra área do conhecimento científico. Num ambiente renovado de ensino e aprendizagem as suas potencialidades foram ativamente exploradas. Munidos das ferramentas e das condições adequadas, empreenderam efetivos esforços cognitivos na elaboração dos conhecimentos.

Ao término das investigações, já na fase das discussões finais, os alunos foram convidados a partilharem os seus resultados. Dispostos em semicírculo, eles foram encorajados a relatarem os seus produtos, a exporem as suas dúvidas e evidenciarem os conhecimentos produzidos. Os questionamentos e as reflexões surgiram principalmente sobre a nova conceituação "instantânea" da velocidade. Os alunos puderam debater o tema e esclarecer as suas dúvidas, ampliando a compreensão sobre o novo conceito que surgia. O modelo exploratório e investigativo no ensino do Cálculo trazia um novo ânimo para todos, inclusive para mim, que continuava cada vez mais entusiasmado com a experiência que se sucedia.

Em relação aos questionários respondidos, foi possível comprovar a boa percepção dos alunos relativamente à tarefa realizada. Eles foram uníssonos em afirmar a validade da atividade para a aprendizagem do novo conceito físico. Muitos aspectos foram evidenciados nas suas respostas, desde a maneira distinta de vivenciarem a aprendizagem, passando pela "quebra" da rotina da sala de aula em ocasião das tarefas laboratoriais, até as notórias possibilidades oferecidas, como as consultas, as discussões em grupo e a utilização dos recursos tecnológicos.

A maioria dos alunos (75% deles) manifestou a valorosa contribuição do *software* na exploração integral da tarefa. De fato, o programa foi um aliado fundamental no estabelecimento e na compreensão do assunto. Os seus recursos, além de ampliarem o entendimento dos cálculos efetuados, trouxeram elementos motivadores para a realização da tarefa.

A respeito das principais dificuldades, estas foram majoritariamente concentradas na compreensão do conceito da velocidade instantânea (por 56% da classe). Nos questionários alguns alunos pontuaram a deficiência ou o esquecimento dos conceitos físicos básicos trabalhados no ensino médio. A turma já apresentava uma notável familiaridade com os recursos computacionais. O frequente uso em sala de aula vinha a contribuir nesse aspecto. Sem maiores obstáculos registrados na manipulção do programa, considero que esta experiência exploratória foi bastante gratificante e relevante para todos os envolvidos.

7.5. Questionário final

As experiências investigativas no componente curricular de Cálculo Diferencial e Integral proporcionaram um modo alternativo para o desenvolvimento das capacidades cognitivas dos alunos. As habilidades favorecidas pela metodologia exploratória, tais como a formulação de conjecturas, as estratégias analíticas, as comunicações em pequenos grupos, as articulações argumentativas, as apresentações orais, dentre outras, foram ainda estimuladas com o uso criterioso das tecnologias: os programas computacionais, as calculadoras científicas, as consultas a internet e etc. Eles se distanciavam das posturas mais passivas e espectadoras de aprendizagem para participarem de forma ativa e protagonista na elaboração do próprio conhecimento.

Todos os aspectos destacados anteriormente foram também acompanhados de uma maneira distinta de verificar a aprendizagem na disciplina. Diversos instrumentos e formas avaliativas foram utilizados para contemplar todos os trabalhos desenvolvidos. As atividades laboratoriais realizadas em grupo tiveram um peso de 30% dos pontos da unidade. A nota seria obtida em função das respostas fornecidas aos problemas apresentados, levando-se em conta a qualidade das justificativas e das argumentações, acompanhadas das análises capturadas da tela do computador. Um miniteste individual no valor de 20% dos pontos recobraria os assuntos tratados no laboratório. Este exame abrangeria problemas e raciocínios semelhantes aos realizados na tarefa em grupo e indiretamente também pretendia verificar o nível efetivo de participação do aluno nos trabalhos. Uma avaliação individual com os assuntos integrais do período, que corresponderia aos 50% dos pontos restantes, encerraria a classificação final na unidade. Certamente que esta forma diferenciada, particionada e contínua de avaliar a aprendizagem impactaria a visão geral dos estudantes sobre toda a experiência vivenciada. Foi então, depois de ter percorrido todas as suas fases, de posse de uma visão mais abrangente, justa e criteriosa sobre a sua aprendizagem geral no curso que eles responderam o questionário final desse estudo. Foram seis questões que buscaram incorporar todos os aspectos qualitativos das circunstâncias experimentadas ao longo de toda a trajetória da pesquisa. Uma leitura no anexo de número 14 poderá ser útil para a análise que virá a seguir.

A primeira questão *"Como você classificou o seu grau de motivação na execução das diversas tarefas exploratórias e investigativas com o auxílio do computador?"* apresenta quatro alternativas de respostas: pouco motivado; indiferente; muito motivado ou outra (qual ?). Solicitava ainda uma explicação para a escolha da resposta.

A metodologia exploratória e investigativa utilizada para abordar alguns tópicos da disciplina deveria suscitar alguns fatores motivacionais, afinal de contas os alunos contariam com formas e recursos diferenciados de explorar os conhecimentos. Ainda muito habituados com o ensino tradicional, desde os tempos escolares, essa experiência poderia despertá-los, inclusive, para uma nova visão da Matemática. Objetivamente 100% das respostas indicaram que eles se sentiram muito motivados na realização das atividades exploratórias laboratoriais.

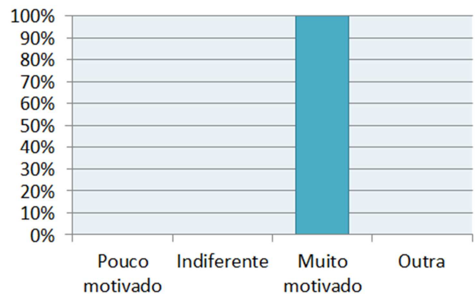


Figura 76: Resposta dos alunos a primeira pergunta do questionário final.

De fato, a abordagem investigativa de problemas matemáticos em pequenos grupos, com o uso criterioso das consultas, fomenta maiores reflexões aos alunos. Ao pesquisar os recursos necessários à sua solução e ao discutir com os colegas as estratégias para alcançar os resultados, eles desenvolvem mais os raciocínios: "Me senti muito motivado! As tarefas foram muito interessantes porque estimularam mais 'o pensar' do aluno ao invés da simples memorização. O aluno reflete e cresce mais quando tem a possibilidade de construir em grupo com as contribuições dos colegas" (Q_f). A possibilidade de discutirem significativos problemas em grupo, trocarem ideias e compartilharem os conhecimentos também notabilizaram as experiências, principalmente pelos contextos mais realísticos do Cálculo: "Me senti muito motivado, principalmente porque eram realizadas em grupo. A gente podia se comunicar, trocar informações e conhecimentos. As tarefas que são contextualizadas nos trazem uma melhor percepção da realidade, de que o Cálculo é útil na prática. É possível mostrar para o aluno que o que se estuda na disciplina pode ser útil pra vida" (Q_f). O conhecimento é construído aos poucos e de forma segura, de tal maneira que as ponderadas orientações do professor oportunizam a reavaliação dos raciocínios e estratégias: "O processo investigativo é muito interessante, pois permite que através das orientações a gente volte atrás nos erros cometidos e conserte, discutindo em grupo" (Q_f). A rotina das aulas expositivas é alterada e o auxílio da tecnologia, com as suas funções dinâmicas de interação, além de trazerem uma maior motivação para as investigações, fomentam uma aprendizagem mais laborativa: "Me senti bastante motivado nas tarefas! As tarefas realizadas no laboratório mudam completamente a visão da disciplina, onde se está bastante acostumado com a rotina 'sala de aula' vs 'quadro' vs 'método expositivo'. As investigações realizadas com o auxílio do computador permitiam realmente a construção do conhecimento. Os trabalhos eram complicados, tínhamos que pesquisar e correr atrás. A gente 'quebrava a cabeça', mas no final das contas, a experiência era muito gratificante" (Q_f).

Relativamente à questão *"O que você achou de resolver as atividades exploratórias e investigativas em grupo?"* foram apresentadas quatro opções de respostas: preferia ter resolvido(a) sozinho(a); não foi estimulante resolvê-la em grupo; foi "muito interessante" resolvê-la em grupo ou outros motivos (quais ?). Os alunos ainda deveriam explicar a escolha da resposta. É de se esperar a simpatia dos alunos por estas formações. Além da constatação que realizei através das observações participativas e dos episódios exibidos ao longo da realização das tarefas, as respostas dos alunos confirmaram esta expectativa. Por unanimidade eles assinalaram a alternativa "foi 'muito interessante' resolvê-la em grupo". A preocupação docente recai sobre o desempenho efetivo de todos nas produções e apresentações. É bem provável que um manifeste maior afinidade com as tecnologias, que outro demonstre mais interesse nas escritas e consultas e um terceiro destaque-se nos aspectos comunicativos, é bastante natural essa diversidade. Eles acabam por definir internamente uma estratégia para a abordagem dos problemas. Cabe ao docente criar mecanismos de ajustes que possam equilibrar adequadamente esses fatores e promover a participação legítima e responsável de todos nos trabalhos.

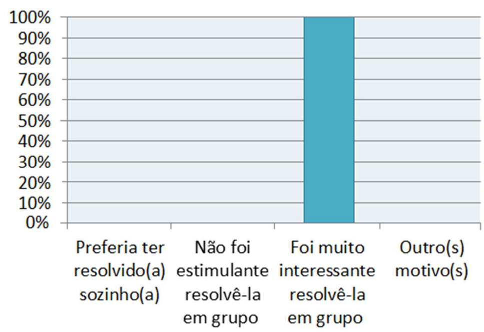


Figura 77: Resposta dos alunos a segunda pergunta do questionário final.

Na análise de conteúdo dos comentários pude verificar uma série de benefícios proporcionados pelas organizações em pequenas equipes de trabalho. A importância desses agrupamentos nas tarefas exploratórias e investigativas ficou evidenciada porque os alunos passaram a compartilhar mais ideias e conhecimentos e tiveram maior estímulo para o estudo, favorecendo a aprendizagem do Cálculo: "Aprender com os colegas é algo muito interessante. As discussões em grupo promoviam o compartilhamento das informações, o complemento das ideias e o conhecimento das particularidades dos programas. Era preciso estar continuamente estudando para não atrapalhar e atrasar o grupo" (Q_f); "A possibilidade de interação com o colega de grupo na elaboração do conhecimento é algo inquestionável e as tarefas no laboratório proporcionaram isso. Esta oportunidade gerava mais estímulo para estudarmos juntos também extraclasse na biblioteca" (Q_f). As estratégias para abordagem das tarefas foi destacada: "Usamos uma estratégia para ganhar tempo nas tarefas: um escrevia, o outro usava mais o computador e um terceiro realizava as consultas. Os raciocínios colocados eram debatidos por todos e a troca de conhecimentos favorecia a aprendizagem geral" (Q_f). Todas essas características notabilizaram a exploração das tarefas investigativas em pequenos grupos.

Os programas computacionais bem empregados servem como precioso auxílio às investigações matemáticas. Os jovens da atualidade têm uma familiaridade enorme com as tecnologias e estes recursos vêm sendo cada vez mais difundidos nas escolas e universidades. Além de oferecerem fatores motivacionais nas tarefas exploratórias, viabilizam maiores entendimentos nos tópicos mais complexos da disciplina. Não apenas fomentei o uso do *software* nas atividades laboratoriais, mas incentivei que os alunos pudessem empregá-lo nos seus estudos extraclasse. Nos momentos de exposição teórica eu eventualmente requisitava o auxílio projetivo do *Winplot* ou *GeoGebra* nas minhas análises ao tempo em que apresentava novas funções dos programas. Alguns exercícios selecionados eram propositamente deixados sem respostas para que eles também utilizassem estes recursos em suas investigações. Um breve tempo ao final das aulas era dedicado a esta discussão. Alguns alunos, individualmente ou em grupos, exibiam (ou comentavam) o uso que fizeram da tecnologia na abordagem dos exercícios designados. Esta era uma forma de mantê-los em contato frequente com os programas. Um conceito qualitativo era a contrapartida ofertada como retribuição aos trabalhos produzidos. Quando questionados sobre o uso do computador fora da sala de aula, todos os alunos afirmaram fazer uso do computador nos estudos da disciplina (figura 78). De fato, o emprego frequente em sala de aula em auxílio às exposições teóricas e o incentivo para que eles fizessem uso extraclasse impactaram positivamente as respostas.

Quando questionados sobre a frequência e a forma de uso, não especificaram objetivamente a frequência de utilização, isto em função mesmo do caráter aberto da indagação, porém ficou evidenciado que os programas computacionais foram muito úteis extraclasse e motivaram a aprendizagem do Cálculo. Os programas serviram para a conferência das respostas dos exercícios, para a investigação de alguns problemas e para compreender melhor os aspectos gráficos das funções: “O computador dá uma maior motivação para a gente aprender. Usei o *Winplot* principalmente para visualizar os gráficos mais complicados, em auxilio a resolução dos problemas e na investigação dos exercícios passados para casa” (Q_f); “Quando a gente começa a perceber que de fato está compreendendo um assunto, e o computador auxilia bastante para isso, nos sentimos mais motivados para estudar e ir mais além. Usei bastante para conferir as respostas dos exercícios” (Q_f); “Usei frequentemente o *GeoGebra* para visualizar gráficos e verificar as respostas dos exercícios quando eles não vinham acompanhados das respostas” (Q_f).

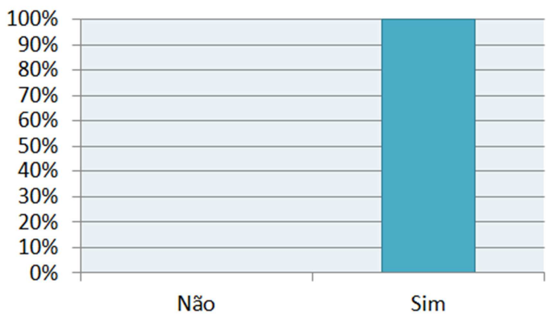


Figura 78: Resposta dos alunos a terceira pergunta do questionário final.

A quarta questão *“Você achou que o uso do computador ampliou a sua compreensão acerca dos conteúdos da disciplina de Cálculo?”* apresenta duas alternativas sucintas de respostas, sim ou não, porém eles deveriam tecer algumas reflexões que justificassem as suas escolhas.

As tarefas exploratórias laboratoriais viabilizam papéis mais ativos para os alunos na aquisição dos conhecimentos. Elas complementam eficientemente os momentos expositivos teóricos em sala de aula. A inserção do computador nessas atividades, na abordagem de relevantes problemas temáticos da disciplina, amplia o entendimento dos assuntos trabalhados. Essa perspectiva evidencia-se mais ainda quando se oportuniza a conjugação dos aspectos numéricos, algébricos e gráficos nas investigações. Além de auxiliar a compreensão dos conceitos mais refinados do Cálculo, a tecnologia, com os seus modernos recursos, oferece o fator motivacional. Os alunos perceberam estas dimensões! Tanto é assim que unanimemente responderam afirmativamente a questão formulada.

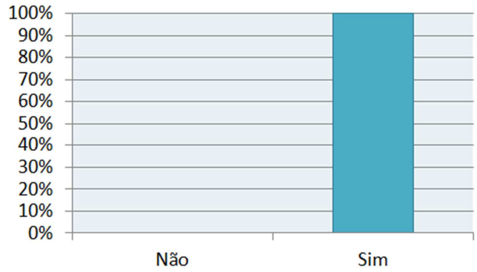


Figura 79: Resposta dos alunos a quarta pergunta do questionário final.

Na análise das respostas destacaram-se os benefícios do computador para a aprendizagem do Cálculo, principalmente nos momentos das atividades laboratoriais. O seu útil emprego nestas ocasiões ajudou a esclarecer os assuntos em evidência nas tarefas, impactando a aprendizagem geral dos alunos na matéria: "A interação com o computador nas tarefas exploratórias aumentou a minha compreensão de uma forma geral na disciplina" (Q_f). Como trabalhamos muito com as funções no Cálculo, os aspectos gráficos foram também salientados, inclusive o computador mostrou-se como mais uma alternativa para os estudos: "Nas atividades realizadas em sala de aula e no laboratório o computador ajudava a melhorar a minha percepção dos assuntos de uma forma geral, principalmente nos aspectos gráficos. Não ficava mais limitado ao caderno e ao livro" (Q_f). A ampliação da compreensão acerca dos conteúdos evidenciou-se também porque a tecnologia facilitou o entendimento de alguns assuntos mais difíceis da disciplina: "O entendimento geométrico da derivada visto em sala de aula ficou mais fácil com as visualizações pelo computador. No livro era mais complicado" (Q_f). De fato, a tecnologia configurou-se como mais uma autêntica aliada à aprendizagem dos alunos.

A quinta questão buscou localizar as dificuldades experimentadas pelos alunos na realização das tarefas e a maneira como elas foram superadas: "*Ao longo da experiência realizada com as atividades exploratórias e investigativas, provavelmente você encontrou algumas dificuldades. Explique como você enfrentou e superou essas dificuldades".* Foi possível catalogar objetivamente as respostas dos alunos em dois grupos, de acordo com as principais dificuldades relatadas: 75% deles destacaram que as maiores dificuldades localizavam-se nos conteúdos explorados nas tarefas, enquanto outros 25% apontaram para o uso do *software* nas investigações.

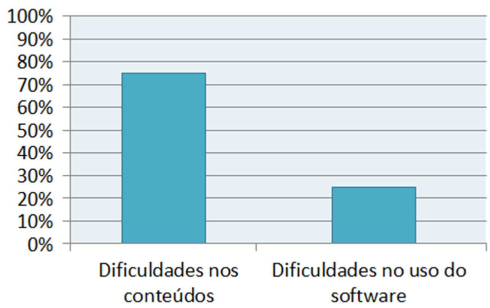


Figura 80: Resposta dos alunos a quinta pergunta do questionário final.

As respostas apresentadas pelos alunos a esta questão mostraram-se bastante coerentes com o perfil das respostas registradas às perguntas semelhantes realizadas nos quatro questionários parciais anteriores. Nestes, em média, 75,25% deles afirmaram, logo após a realização das tarefas, que as suas principais dificuldades encontravam-se nos aspectos teóricos contemplados nas investigações. É razoável esperar que as suas maiores dificuldades localizem-se na assimilação dos conteúdos, pois tanto o *Winplot* quanto o *GeoGebra* são programas já consolidados na língua portuguesa, bastante difundidos e de fácil interatividade. Há também que se registrar que ao longo das experiências investigativas os grupos de trabalho ganharam cada vez mais familiaridade com os programas, mostrando mais autonomia nas últimas tarefas. Os domínios dos comandos básicos das ferramentas tecnológicas abriam espaço para que as maiores demandas de orientações se concentrassem nos assuntos explorados. Importante também salientar que não foram apontadas dificuldades na metodologia exploratória adotada, pelo contrário, as observações foram positivas como veremos adiante.

Ao responderem sobre a superação das dificuldades, foi possível identificar nas respostas três horizontes que se complementavam. ***Muito estudo extraclasse*** – os alunos destacavam a necessidade de se manterem permanentemente atualizados nos estudos. Como o programa da disciplina era extenso, não poderiam deixar acumular as deficiências: "Não era fácil obter a compreensão global do assunto somente no instante da tarefa. Foi preciso muito estudo extraclasse para melhorar a minha condição. Calcular os limites, derivadas e integrais não era tão difícil, porém compreender a utilização desses assuntos nos problemas e situações práticas era bem mais complicado. Os colegas de grupo me ajudaram bastante" (Q_f); "Eram muitos assuntos e eu não podia deixar juntar com as dificuldades das outras matérias. Precisei estudar muito também fora da sala de aula com outros colegas" (Q_f). ***Estudos com os colegas de grupo*** – as mesmas equipes que se reuniam para realizar as tarefas exploratórias também combinavam de realizar estudos extraclasse. O vínculo criado entre eles permitia uma cooperação com uma troca benéfica de conhecimentos que promovia a superação dos obstáculos: "Muito estudo! Os colegas de grupo me ajudaram bastante. O que um não sabia o outro ajudava e quando ninguém conseguia resolver, buscávamos o atendimento do professor. Foi difícil, mas valeu a pena a dedicação" (Q_f). ***As orientações do professor extraclasse*** – muitos alunos compareciam ao plantão de atendimento do professor e traziam as suas dificuldades nos assuntos. Era um momento exclusivamente reservado para orientações e para sanar as dúvidas da matéria: "Estudava muito com os colegas na biblioteca e tirava muitas dúvidas no atendimento docente fora da sala de aula. Nas tarefas era preciso ter uma noção básica sobre aquilo que seria investigado e eu não podia deixar as dificuldades se acumular" (Q_f).

Certamente que seria de grande utilidade para este estudo sondar a opinião dos alunos acerca de toda a experiência vivenciada ao longo do semestre letivo. Depois de terem passado por todas as fases, experimentado todas as situações e competências potencializadas pelas tarefas exploratórias, eles poderiam refletir com mais propriedade sobre a metodologia empregada no desenvolvimento da matéria e sobre o seu aprendizado. Eis a última questão: "Comente acerca dessa experiência e do seu aprendizado geral a partir das atividades exploratórias e investigativas com auxílio do computador". Pelo caráter aberto da pergunta, eles poderiam destacar os fatores que mais marcaram a experiência, desde a forma avaliativa, passando pelas dificuldades e enfrentamentos, o uso das tecnologias, até a efetiva aprendizagem dos tópicos disciplinares explorados por intermédio das tarefas investigativas. De uma forma geral, os comentários foram positivos e realçaram a diversidade dos benefícios advindos da metodologia diferenciada e inédita adotada. Os alunos evidenciaram que as tarefas foram motivadoras, potencializaram o raciocínio e a criatividade, além de afirmarem que o uso dos recursos computacionais melhora o desempenho da aprendizagem: "As atividades exploratórias são motivantes e desenvolvem mais o raciocínio e a criatividade. Os recursos computacionais utilizados e a possibilidade de trabalhar em grupo, trocando conhecimentos, melhora o desempenho de todos" (Q_f). Revelaram também que as tarefas ajudaram a construir o conhecimento: "As atividades exploratórias nos conduzem a construir o conhecimento e isso é muito bom! Nunca tinha usado os programas, aprendi e achei muito legal as suas funções, apesar das dificuldades" (Q_f). Prestigiaram o sistema de avaliação adotado: "A divisão das notas em cada unidade entre tarefas exploratórias no laboratório, minitestes e avaliações individuais foi muito interessante. Não foi apenas uma única prova com um monte de conteúdos onde se decidia tudo. As tarefas e avaliações parciais nos mantém em constante atualização e estudo. Tive outra visão da disciplina" (Q_f). Destacaram a importância dos agrupamentos e a relevância dos problemas abordados nas tarefas: "Gostei muito da experiência! Os problemas foram interessantes e desafiadores. Sozinho eu acho que não teria condições de resolver, mas em grupo a gente se anima mais" (Q_f). Afirmaram também a importância da experiência e que outras matérias poderiam seguir a metodologia adotada: "A experiência foi muito boa, me ajudou a compreender melhor muitos conceitos da matéria. Outras disciplinas poderiam seguir a mesma metodologia" (Q_f). De fato, as tarefas exploratórias e investigativas, com apoio o dos recursos computacionais, mostraram-se eficientes e valorosas para a aprendizagem dos alunos e marcaram positivamente esta experiência de ensino do Cálculo Diferencial e Integral.

Capítulo 8

Conclusões

> No ensino fundamental e médio, tal como no ensino superior, cada vez mais existem professores que empreendem pesquisas sobre a sua própria prática profissional. Fazem-no porque sentem necessidade de compreender melhor a natureza dos problemas com que se defrontam, para poder transformar a sua prática e as suas condições de trabalho.
>
> Ponte, J. P., 2004 (p. 1)

As minhas primeiras experiências como professor na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I foram bastante próximas da minha própria vivência como aluno de graduação. A matéria lecionada era exatamente a mesma cursada, com as mesmas características de carga horária, conteúdo programático e divisão de unidades letivas. Pelo fato de ter considerado uma boa experiência, nos moldes tradicionais, levando-se em conta ainda o meu bom desempenho na matéria, eu acreditava que repetir o moldelo didático daquela vivência anterior seria a "receita do sucesso". Porém, como já destacado na parte introdutória deste estudo, os altos índices de reprovação que se apresentavam ao final de cada curso semestral, mesmo dentro de um chamado "padrão de normalidade", verificado comumente para a disciplina, geravam-me grande descontentamento.

Na minha época de estudante não se falava de aulas exploratórias; não existiam atividades investigativas laboratoriais com o auxílio dos recursos computacionais; também inexistiam as discussões e debates em grupos em torno de relevantes problemas contextualizados; não se podia usar as calculadoras científicas nas provas; as consultas bibliográficas em algumas etapas avaliativas eram terminantemente proibidas; o sistema de avaliação preconizava excessivamente a memorização em prejuízo às elaborações mais criativas, enfim, como se percebe, foi uma outra época...

Vinte e dois anos se passaram desde a minha experiência como estudante para esta pesquisa. Uma série de fatores conjugados colaboraram e me conduziram a uma mudança de postura do ponto de vista didático: a insatisfação já mencionada com os altos índices de reprovação na disciplina; o uso exclusivo da metodologia expositiva já me desanimava; a introdução dos recursos tecnológicos em classe passou a gerar circunstâncias mais prazerosas de ensino e aprendizagem; o auxílio do *software* na abordagem de expressivos problemas ocasionava uma motivação a mais para os alunos (e para mim!); as leituras de artigos educacionais especializados sobre as práticas exploratórias e investigativas passaram a me agradar, enfim, todos estes aspectos associados produziram um importante efeito. Oportuno registrar também o episódio inédito e espontâneo ocorrido em sala de aula sobre as investigações das tangentes e hipérboles que deu origem à tarefa 2. Esta ocorrência, juntamente com a posterior leitura sobre a temática do ensino exploratório, foram decisivas para que eu aprofundasse o conhecimento sobre o assunto e vislumbrasse a possibilidade desta pesquisa.

Neste capítulo finalizaremos o presente estudo. Realizaremos inicialmente uma síntese de toda a experiência vivenciada e, em seguida, levando-se em conta os objetivos e as questões propostas de investigação, apresentaremos as suas principais conclusões. Por fim, encerraremos o capítulo com uma breve reflexão pessoal, destacando os contributos deste estudo para o campo educacional e para o meu desenvolvimento profissional enquanto investigador/professor. Algumas recomendações também serão feitas, focalizando futuros trabalhos com esta temática.

8.1. Síntese do estudo

Com esta pesquisa busco investigar qualitativamente e compreender – a partir de uma aplicação sistematizada de tarefas exploratórias e investigativas com o auxílio das tecnologias –

os impactos gerados na aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do Centro de Formação de Professores da UFRB. Interessa-me entender de que forma essas atividades interferem no cotidiano das aulas e no comportamento dos alunos relativamente à aquisição dos conhecimentos. Para tanto, o seu emprego sistemático ao longo do segundo semestre letivo do ano de 2014 permitiu observações criteriosas no quadro das principais dificuldades e superações enfrentadas pelos alunos, inclusive no uso das tecnologias. As tarefas propostas foram bastante diversificadas, elaboradas com a finalidade de introduzir novos conceitos, aplicar alguns conhecimentos e aprofundar outros mais sofisticados da matéria. Organizados em pequenos grupos de trabalho, os estudantes exploraram uma série de problemas, todos contextualizados em significativas situações exploratórias e investigativas. Os importantes elementos históricos que situavam cada tópico disciplinar abordado, sempre que possível, se destacavam nas atividades. Estas se notabilizaram também pelo conjunto harmônico dos aspectos numéricos, geométricos e analíticos na sua composição, conforme as sugestões resultantes do movimento *Calculus Reform* da década de 80 nos Estados Unidos.

No que diz respeito aos objetivos deste estudo, três questões nortearam as investigações:

a) Como evoluem os estudantes a uma aplicação sistematizada de tarefas exploratórias e investigativas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral?
b) Como os alunos utilizam os recursos tecnológicos ao longo da frequência na disciplina?
c) Que dificuldades enfrentam os alunos na realização das tarefas e na utilização do *software*?

As tarefas exploratórias e investigativas adentram o corpo da disciplina com a proposta de enriquecer e diversificar as estratégias de ensino e aprendizagem. Através do apoio da tecnologia, com os seus recursos de animações gráficas, simulações e análises dinâmicas, os alunos passam exercer papéis ativos e construtivos na exploração dos conhecimentos. Os expedientes tecnológicos, a exemplos dos programas computacionais, das planilhas eletrônicas, das calculadoras científicas, dentre outros, incrementam de forma eficiente e motivadora as atividades. Ao dispensar os alunos de exaustivos e tediosos cálculos, as tarefas associadas às modernas tecnologias os colocam em situações mais criativas e reflexivas, ao tempo em que potencializam as habilidades analíticas, argumentativas e comunicativas.

O panorama teórico da investigação assenta-se na transversalidade de três temas fundamentais para este estudo: i) o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral; ii) o ensino exploratório e investigativo e iii) a associação da tecnologia na exploração das tarefas. No primeiro tema ressaltam-se os contextos históricos e as notáveis possibilidades aplicativas da disciplina na perspectiva didática. Um curso de Cálculo não deve se destacar tão somente por suas características teóricas intrínsecas, por sua estrutura repleta de proposições, corolários e teoremas que fundamentam um largo conjunto de técnicas para simplificar limites, derivadas e integrais. A sua riqueza também está no alcance prático dos seus sofisticados conceitos. Através do seu corpo de conhecimentos é possível abordar com maestria os mais diversos fenômenos da natureza, as mais variadas situações científicas e sociais. Os elementos teóricos mais complexos e abstratos do seu programa devem ser cuidadosamente dosados para não tornar o seu ensino enfadonho e desmotivante. Como a disciplina encontra-se no início da estrutura curricular do curso, os alunos certamente avançarão em maturidade e conhecimento para tratarem esses elementos, com mais propriedade e rigor, no componente de Análise Matemática. No segundo tema vislumbramos a metodologia exploratória e investigativa de um ponto de vista mais elevado e amplo para a compreensão da Matemática e a formação do indivíduo. A matéria geralmente é vista como um conjunto de departamentos temáticos repletos de técnicas e fórmulas complexas para resolver os mais variados problemas. Problemas estes que muitas vezes são focalizados unicamente do ponto de vista teórico disciplinar, completamente distanciados de outras importantes necessidades formativas e profissionais. As práticas exploratórias e investigativas vêm continuamente se expandindo e transformando a visão de muitos professores e alunos. A sua natureza mais dinâmica e construtiva de trabalhar os conhecimentos favorece uma série de outras importantes habilidades e competências. Ao colaborar de forma eficiente com os momentos expositivos, este modelo pedagógico consegue envolver a todos num ambiente mais atraente e valoroso de ensino e aprendizagem. O terceiro tema entra de forma a interligar os outros dois de forma harmoniosa e motivadora. Ao associar os recursos tecnólogicos no estudo do Cálculo Diferencial e Integral, amplia-se consideravelmente a compreensão de muitos dos seus tópicos programáticos. Os modernos programas computacionais, quando aliados à exploração de relevantes problemas da disciplina, além de alargarem o entendimento de muitos assuntos, favorecem as capacidades analítica e reflexiva dos estudantes. Obviamente que a escola, a universidade e a sociedade, de uma forma geral, reconhecem os benefícios da informática para a educação no mundo contemporâneo. Os recursos tecnológicos já fazem parte do nosso cotidiano e os professores devem fomentar o seu uso inteligente para a construção do conhecimento dos alunos.

Com base nos objetivos pretendidos, levando-se em conta ainda os aspectos subjetivos da experiência de ensino, o panorama descritivo e qualitativo norteou substancialmente esta pesquisa. O contato perene do professor com os alunos nas mais variadas circunstâncias experimentais, observando criteriosamente os principais episódios que marcaram a sua ocorrência, favorece um estudo de caso dessa natureza. A turma composta de 36 alunos foi dividida em 12 grupos de 3 alunos cada para a realização das tarefas laboratoriais, sendo que dois grupos se voluntariaram para uma observação mais criteriosa do ponto de vista das gravações e entrevistas que seriam realizadas. Ao longo do semestre letivo tivemos a oportunidade de empreender diversas tarefas exploratórias, porém, principalmente por parâmetros de semelhanças temáticas, foram catalogadas apenas quatro para um exame mais fundamentado. A diversificação das tarefas permitiu que os alunos ampliassem os seus olhares sobre a disciplina ao tempo em que desenvolviam as habilidades oriundas dos processos investigativos. Debruçados em pequenas equipes puderam empenhar-se na solução de expressivos problemas, montando variadas estratégias de abordagem. Ao findar das ações, os grupos compartilhavam as suas produções com os demais alunos da classe. Ao apresentar os seus resultados, o laboratório de informática da instituição transformava-se num palco de preciosos debates e discussões. As tarefas exploratórias transformavam a rotina da tradicional aula de Cálculo. A comunicação era estimulada, os argumentos eram debatidos e os raciocínios eram apreciados. A análise detalhada dos documentos entregues após os trabalhos, enriquecidos das imagens capturadas das telas do computador, formaram a base analítica dos dados experimentais. Estes foram valiosamente acompanhados dos demais instrumentos de pesquisa, tais como as observações participativas, os questionários e as entrevistas.

Nas duas seções que seguem apresentarei as principais conclusões do estudo com base nas categorias e subcategorias elencadas no capítulo da metodologia. A questão investigativa c), que trata das dificuldades na realização das tarefas e das dificuldades na utilização do *software*, será desdobrada e respondida em duas seções distintas. Na seção 8.2 buscarei focalizar as respostas relativas às questões de investigação voltadas para as aprendizagens dos alunos em face das tarefas e as dificuldades enfrentadas na realização destas. Nesta seção responderei a questão a) "Como evoluem os estudantes a uma aplicação sistematizada de tarefas exploratórias e investigativas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral?" e responderei parcialmente a questão c) "Que dificuldades enfrentam os alunos na realização das tarefas?". Na seção 8.3 buscarei focalizar as respostas às questões de investigação alusivas ao uso dos recursos tecnológicos. Nesta seção responderei a questão b) "Como os alunos utilizam os recursos tecnológicos ao longo da frequência na disciplina?" e concluirei a resposta da questão c) "Que dificuldades enfrentam os alunos na utilização do *software*?". Passemos então as conclusões.

8.2. Conclusões sobre a evolução dos estudantes em face das tarefas

Tendo em vista os objetivos deste estudo, busquei focalizar a evolução dos estudantes – suas aprendizagens e dificuldades – consoante os seguintes aspectos: (i) as aprendizagens e os processos utilizados na realização das tarefas; (ii) as aprendizagens no âmbito geral da disciplina de Cálculo; e (iii) as dificuldades provenientes das tarefas e os meios de superação.

(i) As aprendizagens e os processos utilizados na realização das tarefas

De acordo com a análise dos resultados foi possível reconhecer os benefícios advindos da introdução das tarefas exploratóriais e investigativas nas aulas de Cálculo. Confirmando muitos dos argumentos sustentados por diversos autores (e. g., Allevato, 2005; Bianchini & Santos, 2002; Bispo et al., 2008, Escher et al., 2006; Olimpio Junior, 2005; Ponte et al., 2003; Sousa, 2003), as experiências investigativas despertaram e potencializaram uma série notáveis fatores: desde a incorporação de um ambiente mais motivado para a aprendizagem, favorecendo as capacidades reflexiva, comunicativa e argumentativa dos alunos, até a promoção da participação ativa deles na elaboração dos conhecimentos, através da diversificação das estratégias de análise das situações investigativas, da busca por padrões e regularidades em ensaios dinâmicos computacionais (nas tarefas com o suporte da tecnologia) e na formulação, testes e justificações de conjecturas na realização das investigações.

A motivação para a aprendizagem é uma das frequentes considerações salientadas para a inserção das tarefas com o auxílio das tecnologias no cotidiano da classe (Menestrina & Goudard, 2003; Miquelino & Resende, 2013; Morelatti, 2008; Saraiva, 2000; Sousa, 2003). Um dos primeiros fatores que se evidenciaram nesse sentido foi o entusiamo apresentado pela turma por conta da alteração do ambiente rotineiro das aulas. Pelo fato de saírem do espaço da sala, dos costumeiros momentos expositivos amparados no quadro e no giz, os alunos apresentaram uma maior motivação por estarem experimentando a aprendizagem da disciplina num laboratório de informática. De fato, ao longo da experiência vivenciada com os estudantes, foi notória esta percepção, inclusive pelas frequentes constatações observadas nos dados levantados do estudo.

A expectativa de realizarem tarefas investigativas em pequenos grupos e com o auxílio do computador alteravam os seus ânimos, até mesmo por conta do ineditismo da metodologia empregada. O cooperativismo percebido no desenvolvimento das atividades – e que são características intrínsecas das explorações coletivas – tinha continuidade extraclasse. As mesmas equipes de trabalho, por manterem interesses comuns, dedicavam-se continuamente aos estudos na biblioteca da instituição. Era frequente, por exemplo, me procurarem no plantão de atendimento para tirarem as suas dúvidas e buscarem orientações. Certamente que este comportamento impactava a aprendizagem e o desempenho deles na disciplina. No entanto, é importante frizar que ao longo de toda a experiência de ensino, houve o incentivo do professor para criar este ambiente. O contato prolongado dos alunos com as tarefas laboratoriais facultou sucessivos progressos na aprendizagem geral da turma. Isto é colocado em função da qualidade gradual observada nos documentos escritos, entregues após a realização das tarefas; pela permanência de grande parte dos alunos ao longo de toda a frequência do curso e também pelo registro das suas próprias opiniões nos questionários e entrevistas. Ao possibilitar uma forma ativa e prazerosa para as investigações e descobertas, a metodologia exploratória revelou-se com excelente potencial para associar-se aos momentos expositivos no ensino do Cálculo.

Citada pelos alunos como uma das fases mais importantes e interessantes das tarefas exploratórias, as discussões coletivas tiveram um destaque especial nesta experiência. Muitos depoimentos destacavam que os esclarecimentos do professor nesta etapa final das atividades produziam maiores níveis de segurança e aprendizagem relativamente aos assuntos abordados. Porém, outro aspecto também se notabilizava nestas circunstâncias, era principalmente nesta fase dos trabalhos que as suas capacidades comunicativa e argumentativa eram mais solicitadas. Enquanto que é comum nas aulas mais tradicionais os estudantes permanecerem mais passivos, observando mais atentamente a oratória docente na apresentação dos conteúdos, nas atividades exploratórias eles são muito mais estimulados oralmente. Além dos naturais diálogos que se verificam nos pequenos grupos para a abordagem dos problemas, eles são chamados a apresentarem e debaterem as suas produções abertamente. Era frequente eles salientarem que a aprendizagem ocorria muito também em decorrência dos relatos das demais equipes. No momento dos debates, a troca dos conhecimentos ajudava bastante a clarear o entendimento geral, principalmente em função dos erros cometidos por outros colegas. Com tudo isso, foi possível observar, ao longo de todo o semestre letivo, a evolução gradual das suas faculdades comunicativas. Alguns alunos que no início das atividades laboratoriais eram mais silenciosos e introspectivos, ao final da experiência estavam muito mais a vontade e participativos.

O ambiente gerado em face das investigações e descobertas, ambiente este que estimula os estudantes a realizarem dinâmicas análises computacionais, através de simulações, erros, acertos e novas tentativas, estimula também o compartilhamento de ideias entre eles (Allevato, 2010; Menk, 2005). Neste intercâmbio, as produções argumentativas, ainda que não possuam uma extensão lógico-dedutiva elevada e rigorosa, em função até mesmo das naturais limitações e do próprio processo gradativo de aprendizado, revelam-se de um valor incomensurável na experiência de aprendizagem. A linguagem que no início dos trabalhos apresenta-se ainda muito contida e próxima da coloquial habitual, sem maiores cuidados na sua expressão formal matemática, melhora com o prolongamento das atividades até as últimas experiências. Obviamente que nesta perspectiva não se tem a pretensão imediata dos resultados, mas o incentivo ocasionado no âmbito rotineiro das tarefas provavelmente repercutirá nas próximas disciplinas curriculares do curso. Indubitavelmente que a observação atenta do professor em todos estes aspectos, chamando a atenção da classe nas ocasiões adequadas, revelou-se de fundamental importância em todo o processo experimental.

Foi possível também constatar, ao longo da experiência, que os alunos são capazes de trilhar estratégias diferenciadas e criativas nas investigações, buscando caminhos alternativos para a solução dos problemas (Cengiz et al., 2011; Escher et al., 2006; Goldenberg, 1999; Ponte et al., 2003). Sem dúvida que os recursos computacionais auxiliam eficientemente esse aspecto. Em algumas tarefas, enquanto alguns grupos utilizavam o *Winplot* nas suas investigações, outros empregavam o *GeoGebra*. As próprias características diferenciadas dos programas para o tratamento e a visualização dos objetos matemáticos viabilizavam tais condutas. Os seus distintos e úteis recursos para apreciar o comportamento dinâmico das funções, do ponto de vista geométrico, permitiam análises diversificadas e interessantes, como por exemplo ocorreu na terceira tarefa (projetando uma montanha-russa), quando os grupos verificaram e justificaram a transição suave nos pontos de encontro das curvas de formas diferentes e criativas. Este fato certamente que enriqueceu a abordagem dos problemas e ampliou a aprendizagem geral da classe.

Ainda com relação às estratégias utilizadas na abordagem das tarefas, a depender do grau de abertura das questões solicitadas, diversificados expedientes foram utilizados para sua resolução e justificativa. Foi possível observar claramente e com bastante frequência o emprego das análises e representações gráficas, em função dos recursos computacionais oferecidos (Borba & Penteado, 2001; Olimpio Junior, 2005); em alguns casos, os argumentos geométricos, ao invés das manipulações algébricas, serviram para fundamentar os raciocínios (Melo, 2002; Miquelino & Resende, 2013); o reconhecimento de padrões e regularidades surgiu em algumas tarefas permitindo induções e conjecturações (Menk, 2005; Ponte et al., 2003); com pouca frequência, porém, foi vista a simplificação de um problema com base na sua decomposição ou associação com casos mais simples. Esta última estratégia, apesar de ter sido evocada pelo professor em algumas situações específicas, por exemplo, no cálculo de alguns limites, derivadas e integrais mais complexos em sala de aula, foi pouco explorado nas atividades laboratoriais. Enfim, todos estes aspectos realçaram e reforçaram objetivamente os benefícios que as tarefas exploratórias e investigativas trouxeram para o ensino e aprendizagem do Cálculo.

As estratégias também foram utilizadas na divisão dos trabalhos. Enquanto um aluno manipulava mais os recursos tecnológicos, outro se empenhava mais na escrita e um terceiro realizava mais as consultas. Desta forma, todos participavam e cooperavam ativamente na realização das tarefas. Este mecanismo foi observado com frequência nos encontros laboratoriais e eles confirmavam isso nos questionários e entrevistas. Eles buscavam empregar e otimizar as suas competências. Era natural que isto ocorresse em função mesmo das peculiares aptidões e habilidades de cada um. As circunstâncias colaborativas foram bastante diversificadas e úteis, enquanto uns apresentavam mais curiosidades pelo *software* e avançavam nos seus domínios, outros agregavam mais valia aos recursos bibliográficos e as anotações de aula. O importante é que ocorria a troca de ideias e conhecimentos na realização dos trabalhos e todos contribuiam, mesmo porque as avaliações individuais posteriores requisitariam tais competências.

Os dados recolhidos permitiram também constatar que a formulação de questões na realização das tarefas era pouco frequente de forma direta. Nas dúvidas manifestadas e nas solicitações de orientações, sem que utilizassem peremptoriamente o modo interrogativo, este processo surgia em forma de algumas afirmações. Esta conduta, conforme Schoenfeld (1992), não parece estar relacionada com a inexperiência dos estudantes nas atividades investigativas, mas assenta-se sobre a habitual visão educacional de que os professores colocam as questões que devem ser respondidas por eles. Isto foi perceptível nesta pesquisa, principalmente pelo fato dos alunos receberem um roteiro com um problema a ser explorado e defrontarem-se com os fatores limitantes de tempo para realização. A expectativa e a concentração voltavam-se quase que exclusivamente para responder adequadamente os tópicos exigidos no intervalo de tempo determinado. Visto por este ângulo, é bastante natural que eles acabem por propor mais afirmações do que questões nos trabalhos dessa natureza, apesar da liberdade que têm na utilização dos recursos – incluindo as consultas – para o auxílio das suas investigações.

A formulação de conjecturas e a sua comprovação através da observação de certas regularidades e padrões indutivos foram os procedimentos de maior destaque nas atividades descritas nesta pesquisa. De fato, em quase todas as tarefas exploratórias esses elementos surgiram com alguma intensidade. Na primeira tarefa, após as evidências computacionais apontarem para um determinado valor de área, os alunos deveriam realizar a sua constatação através da fórmula de Riemann. Na segunda tarefa, o movimento das tangentes sobre os gráficos da família de hipérboles induziam os valores das áreas dos triângulos e novamente a validação seria exigida. Na quarta tarefa, os padrões observados na obtenção das velocidades (médias) remetiam à nova conceituação instantânea desta grandeza com a sua confirmação numérica posterior através do limite. Apenas a terceira tarefa contrastou dessas caraterísticas investigativas. Os recursos computacionais, através das suas poderosas ferramentas de análise, serviram valiosamente para a prontidão e a concisão das conjecturas (Escher et al., 2006; Olimpio Junior, 2005).

Nas primeiras atividades laboratoriais as afirmações surgiam como traços nascentes do entendimento mais amplo que ainda se verificaria sobre as conjecturações. Se bem que a sua precisa conceituação fosse objeto de constantes reflexões, os alunos afirmavam peremptoriamente os resultados, com base nas informações obtidas pelo computador. As evidências logradas por intermédio dos programas mostravam-se tão patentes que eles não nutriam a pretensão de realizar demonstrações algébricas. Indubitavelmente por estas destacarem-se como uma das mais complexas etapas das tarefas, senão a maior. Nas experiências iniciais a "resistência" para que os alunos engrenassem nos aspectos demonstrativos das conjecturas notabilizou-se em alguns grupos. Foi preciso um incentivo a mais e algumas orientações para vencer este obstáculo inicial. Com o avançar das experiências, ao vivenciarem mais os processos matemáticos envolvidos na exploração das tarefas, os alunos já defrontavam com mais naturalidade as construções algébricas e compreendiam mais o estatudo das conjecturas (Brocardo, 2001). Importante também registrar a satisfação que alguns grupos expressavam ao finalizar com êxito as demonstrações algébricas e alcançar os valores esperados. Depois que conseguiam estruturar corretamente o problema, provando as conjecturas, era perceptível o entusiasmo apresentado por alguns grupos. Nesses instantes que geralmente costumamos rememorar Pólya com o "prazer e o triunfo da descoberta" na Matemática.

A evolução da turma, ao longo da experiência, ao apropriar-se satisfatoriamente dos processos investigativos foi apreciável. Com base nos aspectos apresentados pode-se afirmar que os alunos envolvidos neste estudo, na realização das tarefas exploratórias e investigativas laboratoriais, evoluiram as suas aprendizagens nos processos e raciocínios matemáticos, pois puderam, num ambiente mais motivado, realizar ensaios computacionais, formular, testar e provar conjecturas, procurar e estabelecer padrões e regularidades, realizar construções e demonstrações algébricas, examinar estratégias diferenciadas, expressar-se mais oralmente nas discussões coletivas, enfim, participaram de forma ativa na aquisição dos conhecimentos.

(ii) As aprendizagens no âmbito geral da disciplina de Cálculo

A partir da análise dos dados recolhidos ficam evidentes os benefícios que as tarefas exploratórias e investigativas trazem para a aprendizagem dos alunos no âmbito geral da disciplina. São as opiniões dos mesmos, registradas nos questionários e entrevistas, que afirmam o valor dessas atividades para uma compreensão mais ampla e contextualizada do programa da matéria. Fora isso, o contato mais próximo do professor/investigador nas observações participativas – ao acompanhar de perto as ações dos grupos, o compartilhamento dos conhecimentos e o desenvolvimento dos seus raciocínios – permitiu também uma visão privilegiada do quadro evolutivo das suas aprendizagens (Menk, 2005).

As tarefas exploratórias e investigativas enriqueceram a disciplina ao permitir a abordagem distinta e notável de uma série de assuntos considerados mais complexos e "sem utilidade". Este aspecto destacou-se, por exemplo, na parte introdutória do curso, momento considerado de grande expectativa para os alunos. Ao invés deles passarem um longo tempo dedicado apenas às técnicas e formulações simplificativas dos limites – sem nenhuma motivação imediata a não ser "calcular limites" (e isso realmente não é muito motivador!) – eles colocaram a "mão na massa" no laboratório da instituição, numa tarefa contextualizada historicamente e conceitualmente importante para a matéria. Na atividade *"Aplicação de limites no cálculo de áreas"* a turma se defrontou com um relevante e inédito problema. Os alunos passaram a conhecer também os limites como uma ferramenta sofisticada do Cálculo, utilizada para determinar áreas de regiões curvas. Esta experiência, além de ter permitido a abordagem construtiva de um tema fundamental da disciplina, gerou uma maior motivação para a aprendizagem, inclusive para o estudo das técnicas operatórias dos limites. Assim como foi este episódio, outros, com novas tarefas, em renovados contextos investigativos, impulsionaram a classe para uma aprendizagem mais dinâmica e significativa dos conteúdos do Cálculo.

Outro fator que se notabilizou com o advento das tarefas exploratórias foi a possibilidade dos alunos trabalharem em pequenos grupos realizando consultas virtuais, bibliográficas e às notas de aula. O contato mais próximo entre eles permitiu o compartilhamento mais eficiente das ideias e conhecimentos na abordagem dos problemas. Não foram poucos os estudantes que relataram a evolução da sua aprendizagem geral na disciplina por conta da ajuda dos colegas. Um conhecia mais expressivamente a matemática básica, outro dominava mais os recursos tecnológicos e a troca de informações acabava beneficiando a todos. A cooperação entre eles ia além dos encontros laboratoriais, pois a continuidade dos estudos se dava ainda extraclasse na biblioteca da instituição. Eles se reuniam para avaliar as suas produções, analisar os erros e acertos e aprofundarem os conhecimentos. Nesses instantes também requisitavam a minha orientação no plantão de atendimento. Portanto, as tarefas exploratórias realizadas em grupos ampliavam a aprendizagem geral dos alunos na matéria ao favorecer a aproximação entre eles.

Além de todos os aspectos destacados anteriormente, cabe ressaltar ainda que a aprendizagem dos alunos não deve finalizar-se com a simples aquisição dos conhecimentos vinculados aos conteúdos do Cálculo. As atividades exploratórias, apoiadas nos recursos tecnológicos, ao potencializar uma série de características importantes dos processos investigativos, como vimos, ampliam o entendimento sobre a própria natureza da Matemática, renovando a visão da disciplina (Miquelino & Resende, 2013; Morelatti, 2008). Esta avança da comum percepção de que é um conjunto estático, pronto e acabado de conteúdos, para uma ciência viva em permanente evolução. As condutas incentivadas nos trabalhos exploratórios acabam por renovar gradualmente as atitudes dos alunos. Com novas posturas, estes acabam por notabilizar tanto a Matemática quanto o próprio Cálculo, assim alguns deles se expressaram. Em face do que foi constatado, reconhecemos o contributo das tarefas exploratórias e investigativas no cenário evolutivo da aprendizagem geral da disciplina.

(iii) Dificuldades provenientes das tarefas e os meios de superação

Antecipando-se as dificuldades gerais que se manifestariam com o advento das tarefas exploratórias e investigativas com o apoio da tecnologia no cotidiano das aulas, um bom exercício foi refletir sobre as formas de atenuá-las. Se bem que só foi possível tomar conhecimento do ineditismo dessas atividades na vida escolar e acadêmica dos alunos na primeira semana letiva, algumas ações já haviam sido planejadas para enfrentar os trabalhos que viriam. Podemos destacar quatro movimentos realizados neste sentido: as oficinas instrutivas nos programas que seriam utilizados nas tarefas (Melo, 2002); algumas aulas "simulativas" sobre a experiência investigativa em Matemática; a seleção de alguns exercícios estratégicos para serem resolvidos extraclasse com o auxílio do *software* (Stewart, 2013) e o emprego frequente das projeções computacionais em sala de aula, em apoio aos momentos expositivos. As oficinas foram necessárias em função mesmo do desconhecimento dos alunos na manipulação dos programas. Obviamente que as instruções foram básicas, nos principais comandos e funções que seriam utilizados mais imediatamente nas primeiras tarefas. As limitações de tempo também influenciaram para que não avançássemos mais nas instruções. Em algumas aulas acabei por abordar alguns problemas mais dinâmicos, do ponto de vista gráfico, simulando as experiências investigativas que eles defrontariam no laboratório. Ao explorar a solução com os alunos, pudemos vivenciar e estimular os processos demandados nessas atividades: a formulação e o teste de conjecturas, as estratégias de abordagem, as simulações computacionais, o confronto de ideias, dentre outros notáveis aspectos (Menk, 2005; Olimpio Junior; 2005). A fim de mantê-los frequentemente em contato com os programas, remexendo os seus recursos e aprofundando os conhecimentos, alguns exercícios, inclusive deixados propositamente sem respostas nas listas, eram destinados para serem realizados extraclasse com o apoio da tecnologia. Além dessas ações, empreguei costumeiramente o *Winplot* e o *GeoGebra* nas minhas aulas, esclarecendo e analisando mais detalhadamente os pontos mais delicados dos assuntos abordados. Todos estes procedimentos adotados foram bastante eficazes nesta experiência de ensino.

De acordo com os dados analisados foi possível constatar que as dificuldades mais acentuadas no âmbito das tarefas exploratórias ocorreram nas primeiras experiências laboratoriais (Bianchini & Santos, 2002). Os obstáculos mais proeminentes se verificaram em função da novidade da metodologia empregada na disciplina. Os alunos não estavam ainda familiarizados com os novos procedimentos, os recursos tecnológicos e o ambiente, ou seja, tudo parecia novo e, de certa maneira, era. Os mecanismos cognitivos exigidos pelas características intrínsecas das atividades investigativas demandavam singulares esforços. Ainda que fossem observados criteriosamente a estrutura e o grau de desafio das tarefas, nos primeiros trabalhos estive muito mais próximo dos grupos, realizando orientações mais diretas e estimulando as suas produções. As ações descritas anteriormente para enfrentar as dificuldades que viriam, certamente não teriam efeito imediato, mas ao longo de toda a experiência de ensino. Com o prolongamento das tarefas, das suas peculiares rotinas processuais e frequentes encontros, os alunos evoluiam claramente, inclusive no manejo dos programas computacionais, mostrando-se mais independentes das orientações docentes e mais autônomos na realização dos trabalhos.

Relativamente às dificuldades observadas nas ações investigativas, pôde-se perceber claramente que estas se localizaram, com mais frequência, nas etapas demonstrativas das conjecturas e muito pouco frequentes nas técnicas simplificativas dos limites e derivadas (Balomenos, Ferrini-Mundy & Dick, 1994; Rezende, 2013). Esta ocorrêcia era relativamente esperada justamente porque as demonstrações matemáticas mobilizam muitos recursos cognitivos para as elaborações algébricas e analíticas. De fato, na primeira tarefa isto se verificou no processo de construção do limite, através da fórmula de Riemann. Porém, ao alcançar a expressão simplificada, os alunos perceberam a praticidade e utilidade das técnicas operatórias. Na segunda tarefa, os obstáculos surgiram para a demonstração da conjectura principal e a sua generalização. A prova exigida para atestar o valor constante da área dos triângulos, obtidos por intermédio das tangentes às hipérboles, demandou bastante conhecimento de geometria e habilidade algébrica. Nas demais tarefas estas circunstâncias foram também observadas, porém com menor intensidade, em função do acúmulo de experiências e dos contínuos progressos na aprendizagem. Os processos matemáticos que se aproximavam mais do reconhecimento de padrões e aplicações de técnicas operacionais eram relativamente mais tranquilas nas atividades. A formulação de conjecturas teve destaque em quase todas as tarefas, mas, em função dos eficientes recursos analíticos computacionais, elas vinham quase sempre confundidas sob a forma de afirmações, como já pudemos destacar.

Foi também possível extrair dos dados catalogados deste estudo, alguns elementos que auxiliaram a superação das dificuldades enfrentadas pelos alunos na realização das tarefas. Obviamente que eles destacavam sempre a necessidade contínua do estudo extraclasse, porém outros aspectos foram salientados. A possibilidade de realizar consultas foi notabilizada pelos alunos. As informações que eles obtinham por intermédio das notas de aulas, dos livros e da internet auxiliavam eficientemente as investigações e amenizavam as suas dificuldades. Ao invés de memorizar uma quantidade extensa de técnicas e fórmulas, ao liberá-los dessa “pressão”, eles utilizavam criteriosamente essas ferramentas em apoio valioso às estratégias e raciocínios. A oportunidade de trabalhar em grupo nas tarefas também foi ressaltada. Reiteradamente este aspecto era frisado nos questionários e entrevistas. Sem a ajuda mútua, dificilmente um resultado satisfatório seria alcançado nas atividades. As trocas de informações e conhecimentos vericadas nos grupos de trabalho foram fatores determinantes para suplantar os obstáculos que se apresentavam. Cabe também destacar os atendimentos extraclasse realizados pelo professor.

Os mesmos grupos de alunos que se formaram para realizar as atividades laboratoriais se reuniam fora da sala de aula para estudar juntos. Nessas ocasiões, eles buscavam orientações para esclarecer as suas dúvidas e superar as dificuldades.

Conforme já ressaltado, o emprego das tarefas exploratórias e investigativas no cotidiano das aulas trouxeram algumas dificuldades aos alunos em função do ineditismo da experiência. Apesar de mostrarem-se mais entusiasmados para a realização dos trabalhos laboratoriais, inicialmente eles apresentaram alguma insegurança na abordagem das investigações, isto porque estavam envolvidos mais ativamente na produção dos conhecimentos (Segurado, 1997). Neste sentido, alguns incentivos e explicações mais expressivas aos grupos foram necessários para superar estes estágios iniciais. Com o transcorrer das experiências, eles manifestavam cada vez mais envolvimento e gosto pelas tarefas. Os benefícios que se verificaram a médio e longo prazo foram superiores às dificuldades preliminares. Afinal de contas, não se estava a exigir deles a maturidade e a competência dos investigadores mais experientes, muito pelo contrário, visto que ainda estavam em fase de aprendizado e com as limitações naturais impostas pelo seu grau de conhecimento. Mas o despertar das principais habilidades viabilizadas pelos processos investigativos foi notório. Os progressos observados na aprendizagem dos alunos, com o advento das tarefas exploratórias em ambientes informatizados, foram contínuos ao longo de toda a experiência.

8.3. Conclusões sobre o uso dos recursos tecnológicos ao longo da experiência

Sem dúvida que os recursos tecnológicos utilizados ao longo da experiência, em apoio às explorações, agregaram valorosos elementos às investigações. De acordo com as informações catalogadas pelos diversos instrumentos de pesquisa, principalmente os questionários e entrevistas, pudemos constatar o retorno positivo dos alunos relativamente ao uso dessas ferramentas nas atividades. Corroborando com o ponto de vista de muitos autores (e. g., Barufi, 1999; Melo, 2002; Menk, 2005; Miquelino & Resende, 2013; Morelatti, 2008; Saraiva, 2000), pude perceber que a introdução criteriosa da informática no ambiente das aulas favorece circunstâncias mais atraentes, motivadoras e reflexivas para a aprendizagem. Nos trabalhos exploratórios o *software* auxilia eficientemente as descobertas, apresentando excelentes características para o aprofundamento da análise de situações, formulação de conjecturas e justificações (Allevato, 2010; Olimpio Junior, 2005). Neste sentido, em função da natureza dinâmica do Cálculo e da versatilidade dos programas computacionais, é altamente recomendável a ampliação de atividades com este perfil no seu ensino.

Tendo em vista as finalidades deste estudo, busquei focalizar a evolução dos estudantes, do ponto de vista da utilização dos recursos tecnológicos, conforme os seguintes aspectos: (iv) a utilização dos recursos tecnológicos nas tarefas exploratórias; (v) a utilização dos recursos tecnológicos ao longo da disciplina de Cálculo; e (vi) as dificuldades provenientes da utilização do *software* e os meios de superação.

(iv) A utilização dos recursos tecnológicos nas tarefas exploratórias

Desde meados dos anos 80, com o advento do movimento *Calculus Reform*, muitos pesquisadores (e. g., Allevato, 2010; Bianchini & Santos, 2002; Gravina & Santarosa, 1998; Menk, 2005; Nasser, 2009; Palis, 1995) vêm salientando os benefícios do uso criterioso dos sistemas algébricos computacionais (CAS) para o ensino e aprendizagem do Cálculo. Ao privilegiar, sempre que possível, o tratamento dos conteúdos da disciplina do ponto de vista numérico, gráfico e analitico, pondo os estudantes em papéis ativos na construção dos conhecimentos, o processo de ensino e aprendizagem torna-se mais interativo, dinâmico, motivador e repleto de significados. Neste estudo de caso foi possível constatar estes efeitos ao associarmos a utilização dos recursos tecnológicos às práticas exploratórias e investigativas no laboratório de informática da instituição. Ao longo de toda a experiência foi perceptível o progresso gradual dos alunos na realização das tarefas. Ao participarem mais laboriosamente das produções, trabalhando em pequenos grupos na abordagem de relevantes problemas da disciplina, eles evoluiram particularmente na manipulação do *software*.

Dentre as ações de planejamento para a realização das atividades laboratoriais, destacou-se a oficina de iniciação aos programas utilizados na experiência. Se bem que existem algumas vantagens de se trabalhar com apenas um *software*, porque os alunos concentram os seus esforços de aprendizagem apenas num único sistema algébrico computacional, acontece que a depender do tópico disciplinar a ser explorado, um apresenta condições melhores e mais simples de manuseio e análise do que o outro. Isto foi verificado em algumas tarefas onde usamos simultaneamente o *Winplot* e o *GeoGebra*, a exemplo da terceira tarefa "projetando uma montanha russa". Além desse aspecto, a utilização dos dois programas em algumas atividades, onde a turma se dividia na sua escolha, as discussões ficavam mais produtivas em função da abordagem diferenciada que os grupos faziam. As conjecturas e os resultados eram verificados de formas distintas e com isso ampliava-se a compreensão do assunto.

As oficinas de iniciação mostraram-se primordiais para o êxito dos trabalhos. Foi um grande e produtivo investimento que produziu excelentes retornos de aprendizagem e motivação. Os primeiros encontros não foram suficientes para abarcar o conjunto das funções dos programas – e isto não se mostrava necessário em curto prazo – porém, à medida que os alunos avançaram nas experiências, eles aprofundaram o conhecimento dos recursos e ganharam mais familiaridade, sendo constatado permanentemente o seu progresso ao longo de toda a disciplina. A antecipação em sala de aula de algumas funções específicas do *software*, ainda desconhecidas pelos alunos e que seriam demandadas para colaborar nos trabalhos investigativos, foi necessária e eficiente em alguns momentos. Assim se verificou, por exemplo, com o comando *"integrar f(x) dx"* do *Winplot* na primeira tarefa. Ainda estávamos a explorar os limites quando necessitamos utilizar esta ferramenta para investigar o problema da área. Antecipando-se a este desconhecimento, pude utilizar em sala de aula este comando na ilustração do tema, além disso, algumas breves orientações, no exato momento da tarefa, conseguiram atenuar significativamente os obstáculos que se apresentaram, suscitando êxito aos trabalhos.

De acordo com as informações colhidas ao longo de toda a experiência, foi possível comprovar a eficácia dos recursos tecnológicos nos processos de descobertas, no reconhecimento de padrões e regularidades, na formulação de conjecturas e justificações e nas estratégias diferenciadas de análise nas situações investigativas. Todos estes aspectos colaboraram efetivamente para a aprendizagem do Cálculo e para melhorar a visão dos alunos sobre a disciplina (Morelatti, 2008). O uso das tecnologias tem sido bastante recomendado por diversos pesquisadores, pelo simples fato de ampliarem essas e outras possibilidades nas investigações matemáticas (Allevato, 2010; Palis, 1995; Sousa, 2000; Villarreal, 1999). Há que destacar, porém, um ponto com o qual me deparei em algumas tarefas. Diante da eficiência que os programas computacionais ofereciam para as investigações, e também em função das evidências fornecidas, ocorria uma restrição no conjunto de suposições ou conjecturas formuladas pelos alunos. Como justificamos ao longo deste estudo, este fato não traduz prejuízo para as atividades exploratórias, muito pelo contrário, nesta experiência essa restrição pôde apontar um caminho mais seguro e coerente para as investigações. Por mais de uma vez foi possível constatar esta ocorrência. Por exemplo, na primeira tarefa, ao realizarem corretamente os procedimentos computacionais, os grupos conjecturaram, com base na evidência fornecida pelo *software*, apenas um único valor de área. Os alunos, portanto, trabalharam algebricamente a fórmula de Riemann buscando incessantemente demonstrar este resultado. Na segunda tarefa também este aspecto foi observado. Após a constatação computacional do padrão das áreas dos triângulos, determinados pelas tangentes traçadas sobre os gráficos das hipérboles, que induzia valores de áreas iguais a $2t$ para cada função $f_t(x) = t/x\,, t = 1, 2, 3, \ldots$, – e os grupos conjecturarem este único valor – os alunos partiram de forma mais segura e determinada para a comprovação algébrica da conjectura. Além do mais, ainda que por alguma razão ocorresse algum tipo de equívoco nos procedimentos computacionais, que viesse a prejudicar a adequada verificação ou formulação de uma conjectura ou resultado, as comprovações algébricas, numéricas ou geométricas, realizadas no âmbito das demonstrações formais, confrontariam os resultados obtidos. Estas circunstâncias enriquecem ainda mais os trabalhos e as discussões coletivas, em virtude da aprendizagem verificada com o equívoco produzido. Algumas situações semelhantes a esta ocorreu, por exemplo, na segunda tarefa, quando o grupo 2 calculou corretamente a reta tangente à hipérbole mas se complicou nos procedimentos computacionais para a visualização. Ao comparar o cálculo realizado com a construção dinâmica, os resultados não batiam e este fato impeliu o grupo a novas investigações.

Além do aspecto destacado anteriormente, ainda foi possível apurar, no contexto das tarefas, particularmente na primeira e segunda, algumas relutâncias apresentadas por alguns alunos quando se propunham as demonstrações dos resultados evidenciados pelos computadores. Novamente o caráter inequívoco das respostas oferecidas pelos programas mostrava-se suficiente do ponto de vista comprobatório: “Pra que demonstrar se o computador já atesta a validade do resultado?”. Essa era a pergunta geralmente colocada. Com o prolongamento das experiências os alunos passaram a entender melhor o significado das conjecturas (Brocardo, 2001). Além disso, passaram a compreender também a necessidade dos aspectos formais que caracterizam as descobertas e suas validações no âmbito da ciência matemática. Este amadurecimento contínuo possibilitou melhores condições aos trabalhos vindouros, pois os alunos já não manifestavam mais objeções aos processos demonstrativos nas investigações.

As observações participativas realizadas pelo investigador permitiram comprovar as potencialidades ofertadas pelos recursos tecnológicos às tarefas exploratórias. Ao invés da postura mais passiva frequentemente observada nas aulas expositivas, os alunos estavam experimentando ativamente as tensões e os prazeres das descobertas. Ao participarem mais proficuamente da produção dos conhecimentos, em pequenos grupos de trabalho, valendo-se do precioso auxílio do *software*, percebia-se uma melhora, inclusive, nos processos comunicativos e interativos entre os alunos e entre eles e o professor (Palis, 1995). Os dados experimentais confirmam, portanto, os benefícios da introdução criteriosa dos recursos tecnológicos nas tarefas exploratórias e investigativas e o avanço que alunos apresentaram progressivamente na sua utilização ao longo da experiência.

(v) A utilização dos recursos tecnológicos ao longo da disciplina de Cálculo

Como destacamos anteriormente, ao reportarmos as oficinas de iniciação dos alunos aos programas, também tive o cuidado planejar outras ações que pudessem incentivar o seu uso ao longo da disciplina. Depois de transcorrida toda a experiência é que pude perceber, com clareza, os benefícios dessas ações. Seria natural esperar que os alunos fizessem o uso mais expressivo dos recursos tecnológicos somente nos momentos das tarefas laboratoriais. Para evitar esse distanciamento e estimular o frequente contato deles com o *software*, outras três ações tomadas foram eficientes e salientadas por eles nos questionários e entrevistas. Recordemos então as ações: a realização de algumas aulas “simulativas” sobre a experiência investigativa em Matemática; a seleção de alguns exercícios estratégicos para serem resolvidos extraclasse com o auxílio do *software* (Stewart, 2013) e o emprego frequente das projeções em sala de aula em apoio aos momentos expositivos. Em algumas aulas “simulativas” eles puderam ampliar a compreensão sobre algumas das características mais importantes das investigações matemáticas, dentre elas, a formulação e a justificação de conjecturas, o reconhecimento de padrões e regularidades, simulações gráficas informatizadas, inclusive a relação *evidência* *computacional vs demonstração formal;* na resolução dos exercícios extraclasse eles faziam o emprego mais frequente dos recursos tecnológicos e aprofundavam os seus conhecimentos e no uso projetivo em sala de aula novas funções dos programas eram apresentadas à medida que o *software* era utilizado em auxílio à compreensão de algumas situações mais complexas e abstratas da disciplina. Todas essas circunstâncias foram fundamentais para que os alunos ganhassem mais familiaridade e proficiência com os programas no decurso de toda a experiência.

A visão mais justa e completa sobre os impactos ocasionados pelo uso do *software* no decorrer da matéria seria extraída das entrevistas e questionários finais. Foi precisamente nesta ocasião que pude constatar que eles realmente fizeram uso das tecnologias ao longo da disciplina e como estas efetivamente beneficiaram a sua aprendizagem. A unanimidade dos alunos afirmou isso, porém eles não informaram a frequência de uso e limitaram a indicar que a utilização estava bastante vinculada a conferência de respostas de exercícios e análises gráficas. De fato, os efeitos esperados dos incentivos iniciais se confirmaram. O emprego frequente da tecnologia ampliava a compreensão dos alunos sobre alguns assuntos abordados em sala de aula e o uso extraclasse auxiliava a resolução dos exercícios e o entendimento gráfico em algumas situações da matéria. Podemos, portanto, concluir que a tecnologia configurou-se como uma aliada da aprendizagem dos alunos e que eles serviram-se dela para os seus estudos ao longo da disciplina.

(vi) As dificuldades provenientes da utilização do software e os meios de superação

As ações destacadas ainda pouco buscaram incentivar a utilização dos recursos tecnológicos ao longo de toda a disciplina, evitando-se o seu uso exclusivo nos momentos das tarefas exploratórias e investigativas laboratoriais. Os programas computacionais certamente que trariam valiosos recursos às investigações, porém acrescentariam também alguns embaraços, principalmente nos primeiros trabalhos (Bianchini & Santos, 2002). O ineditismo das tarefas e a inexperiência dos alunos na manipulação do *software* certamente se manifestariam. Porém, o que se depreende, depois de toda a experiência realizada, é que as ações surtiram o efeito desejado e reduziram significativamente as suas dificuldades.

Novamente podemos nos reportar aos questionários e entrevistas finais onde os alunos puderam apresentar com mais propriedade as suas opiniões a esse respeito. Conforme já evidenciavam as observações participativas que pude realizar, as suas maiores dificuldades não estavam na utilização do *software*, mas nos conteúdos, nos aspectos teóricos da disciplina contemplados nas investigações, principalmente nas etapas demonstrativas, como já salientamos. A grande maioria dos alunos (75% deles) manifestava este pensamento. Tanto o *Winplot* quanto o *GeoGebra* são programas já bastante disseminados e de fáceis interatividade. De tal forma que as poucas dificuldades localizadas quando surgiam eram quase sempre resolvidas no mesmo instante com orientações gerais. Eram dificuldades mais voltadas para a localização dos comandos e ajustes nas visualizações gráficas. Pequenos contratempos que não impactavam significativamente os processos investigativos mais importantes, tais como as análises dinâmicas, a formulação de conjecturas e as suas justificações.

No cotidiano das aulas, ao abordar alguns conteúdos com o auxílio dos programas, algumas das suas funções mais avançadas eram utilizadas. Nessas ocasiões, eles realizavam registros que seriam úteis posteriormente para as tarefas laboratoriais. Foi desta forma, por exemplo, que ilustrei o comando *"reta tangente"* do *GeoGebra* que seria usado na segunda e quarta tarefas, quando exploramos alguns assuntos na fase intermediária do curso. Estas ações também objetivavam diminuir as dificuldades que se revelariam no momento das tarefas. Enfim, a satisfação que os alunos demonstravam ao conseguir resolver os problemas com o auxílio dos programas se sobrepunham às dificuldades localizadas. Ao realizarem as suas descobertas, viabilizadas pelos recursos do *software*, eles ganhavam mais confiança para avançar no conhecimento. Importa salientar também o estudo extraclasse que eles realizaram para tal fim, contando principalmente com a ajuda dos colegas de grupo. Assim ficaram registrados nos questionários e entrevistas as suas formas de superação às dificuldades provenientes da utilização dos programas.

8.4. Reflexão final

Tendo este estudo alcançado a sua etapa final, cumpre realizar agora uma reflexão sobre os principais aspectos que foram vivenciados ao longo da sua realização. Cabe avaliar, neste momento, o notório conjunto de ideias e percepções que emergiu do ponto de vista do professor/investigador e que pode ser útil para futuras pesquisas ou até mesmo contribuir para renovar a experiência de outros colegas. Apesar de compreender o alcance deste trabalho e que este não comporta generalizações, em função das suas intrínsecas características, podemos asseverar o seu valor e importância para todos os níveis de ensino da Matemática, particularmente para o ensino superior. Isto é colocado em função da positiva repercussão desta experiência com base nos depoimentos dos próprios participantes, que foram os alunos que vivenciaram todas as suas fases.

A motivação principal que me conduziu a este estudo foi a necessidade de aperfeiçoar a minha prática de ensino e colaborar efetivamente para melhorar o ensino e a aprendizagem da Matemática, com foco para o Cálculo Diferencial e Integral que foi objeto de estudo nesta pesquisa. As notáveis dificuldades enfrentadas pelos alunos ao cursá-la e a insatisfação geral pelos seus significativos índices de reprovação me tocaram o suficiente para buscar possíveis soluções para estes problemas.

A tensão e o prazer pela descoberta são sensações valiosas para todos aqueles que se dedicam ao estudo da Matemática. A motivação nos toma quando, defrontados por desafiadores problemas, logramos êxito ao mobilizar todos os conhecimentos e recursos à nossa disposição para tal fim. Como professores temos essa percepção e sabemos que os estudantes naturalmente têm gosto também pelas descobertas. Todavia, é imprescindível que possamos incorporar à nossa prática cotidiana de ensino ações efetivas que oportunizem aos alunos verdadeiros momentos de exploração e investigação que são os caminhos naturais para as descobertas. Obviamente estes movimentos precisam ser planejados, sistêmicos e bem estruturados, intencionando colocá-los em posições ativas para a aprendizagem, como foi o caso dessa experiência de ensino. Desta forma, todo o potencial proveniente das atividades investigativas se manifestará e será conduzido e orientado pela competência e sabedoria do professor. É assim que se despertará e desenvolverá mais intensamente no aluno as competências tão preconizadas nos parâmetros oficiais de ensino e as notáveis habilidades oriundas dos processos investigativos tão referenciadas neste trabalho.

As observações realizadas no exato momento em que os alunos se dedicavam à resolução dos problemas, não deixam dúvida dos benefícios que as tarefas exploratórias e investigativas oferecem ao ensino do Cálculo. O comportamento ativo dos grupos de trabalho, viabilizado pelo valioso auxílio dos recursos computacionais, permitia um ambiente completamente renovado e motivador para a aprendizagem da disciplina. Era notória a satisfação dos alunos ao concluirem as investigações e participarem das discussões gerais de sistematização dos conhecimentos. O laboratório de informática da instituição transformava-se num espaço de ricos debates, diferenciando-se dos tradicionais momentos expositivos da matéria, onde o conhecimento flui praticamente num único sentido, do professor para o aluno. Depois de toda a experiência realizada, foi possível constatar que, apesar das dificuldades manifestadas, eles não somente aprenderam os conteúdos do Cálculo, mas vivenciaram prazerosamente outras apreciáveis características da atividade matemática.

Importa salientar nestas reflexões finais os ganhos pessoais e profissionais originados por este estudo. Não cabem nestas poucas linhas derradeiras encerrar toda a satisfação e aprendizagem constituida ao longo da experiência. Esta representou um marco pessoal muito importante e transformou definitivamente a minha visão como professor e investigador. Dentre os vários contributos deste trabalho, posso assegurar como se ampliou consideravelmente a minha percepção sobre a natureza do ensino. A inserção das tarefas exploratórias e investigativas no cotidiano da disciplina possibilitou-me renovadas e distintas reflexões a este respeito. Ao continuar transitando exclusivamente pela tradicional metodologia expositiva, dificilmente os meus horizontes se alargariam para outras realidades e possibilidades. Com o decorrer da experiência, a cada encontro com os alunos no laboratório, pude constatar a relevância do trabalho que estava sendo realizado e a necessidade contínua do seu aperfeiçoamento. Ao findar de uma tarefa, uma inquietação saudável se constituia para a formulação e o aprimoramento da próxima: os cuidados na sua estruturação e contextualização para favorecer o aprendizado; a sua integração curricular; a inserção criteriosa dos recursos computacionais; a potencialidade para gerar produtivas discussões; a capacidade para estimular raciocínios e correlacionar os diversos conhecimentos da matéria; enfim, todos estes e outros aspectos eram novos e proporcionavam mais motivações para o meu trabalho. A minha prática como docente realmente havia se transformado com os desdobramentos da experiência. A perspectiva tradicional do ensino, muito caracterizada pelas exposições teóricas, agora convivia perfeitamente com o modelo exploratório. Os alunos passaram a compartilhar de momentos mais ricos e diferenciados nas aulas, com posturas mais dinâmicas e laborativas na produção dos conhecimentos. Todas estas novas circunstâncias facultaram excelentes oportunidades de crescimento pessoal e profissional.

Convém destacar também nestas reflexões finais algumas recomendações para futuros estudos. As pesquisas sobre as práticas exploratórias e investigativas frequentemente destacam as potencialidades e as vantagens deste tipo de atividade para o ensino e a aprendizagem da Matemática, contudo estas pesquisas estão ainda muito vinculadas às experiências na educação básica. É comum encontrarmos relatos de professores/investigadores que fazem uso das investigações no ensino fundamental e médio, porém no ensino superior essas práticas são ainda muito pouco utilizadas. Apesar do consenso que existe sobre o privilégio desta metodologia de ensino para a aprendizagem dos alunos, ainda percebe-se certa relutância para sua introdução nos cursos de graduação. Por isso acredito que existe ainda muito trabalho a fazer para a sua consolidação como prática frequente neste nível de ensino. Daí a relevância de estudos de caso como este que trazem novos olhares e novas experiências que enriquecem este campo do conhecimento. Os estudos das tarefas exploratórias com o suporte da tecnologia também não são muito comuns. Nesta pesquisa, o *software* matemático constituiu uma excelente ferramenta em apoio aos processos investigativos e foi introduzido sem maiores dificuldades. Portanto, futuras investigações, com estas características, podem avaliar cada vez melhor o impacto dessas práticas no ensino superior. Eventualmente outras experiências distintas de ensino exploratório podem ser feitas, com outros temas e problemas relevantes do Cálculo, com outras ferramentas computacionais, viabilizando novas descobertas das suas potencialidades. Novas investigações também podem ser realizadas para compreender o efeito a longo prazo nos alunos quando estes participam de experiências de ensino exploratório com o suporte dos recursos tecnológicos. Até mesmo quando eles vierem a desempenhar papéis de professores na educação básica. Replicarão as práticas exploratórias e investigativas, em ambientes informatizados, vivenciadas na sua formação, no cotidiano das suas aulas? Eis algumas ideias e sugestões para futuros estudos.

Por fim, espero que este estudo possa contribuir para alterar um pouco o semblante do ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Que ele seja divulgado com outros professores que ministram disciplinas semelhantes e acrescente mais valor à sua experiência de ensino. Que este estudo possa ampliar a visão sobre o tema das tarefas exploratórias e investigativas e estimular outros trabalhos que notabilizem o ensino e a aprendizagem da Matemática de uma forma geral.

Referências

Abrantes, P. (1988). Um (bom) problema (não) é (só) .... *Educação e Matemática, 8*, 7–10.

Abrantes, P., Ponte, J. P., Fonseca, H., & Brunheira, L. (Eds.). (1999). Investigações matemáticas na aula e no currículo. In Ponte, J. P. (Ed), *Gestão Curricular em Matemática* (pp. 1–26). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Abreu, O. H. de, & Reis, F. da S. (2011). Uma discussão sobre o papel das definições formais no ensino e aprendizagem de limites e continuidade em Cálculo I. *Pesquisa em Educação Matemática, 13* (3), 439–459.

Allevato, N. S. G. (2005). *Associando o computador à resolução de problemas fechados: Análise de uma experiência* (Tese de Doutoramento, Universidade Estadual Paulista).

Allevato, N. S. G. (2010). Utilizando animação computacional no estudo de funções. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *1* (2), 111–125.

Almeida, L. M. W., & Dias, M. R. (2004). Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema*, *17* (22), 19–36.

Almeida, M. E. (2000). *Informática e formação de professores*. Brasília: Proinfo/MEC.

Almeida, P. (1994). Imaginar para aprender: O caso da Matemática. *NOESIS, 32,* 29–32.

Andrade, L. N. (2004). *Introdução à computação algébrica com o Maple.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

André, M. (2008). Vantagens do estudo de caso e qualidades do pesquisador. In *Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional* (pp. 33–46). Brasília: Líber Livro Editora.

Anghileri, J. (2006). Scaff olding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*, 33–52.

Anton. H., Bivens I., & Davis, S. (2007). *Cálculo – Um novo horizonte.* Porto Alegre: Bookman.

Araújo, P. R. (2011). Reprovação nas disciplinas básicas: Uma reflexão dos aspectos pedagógicos, na perspectiva dos docentes e discentes aprovados. In *Anais do XXXIX Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*. Blumenau: ABENGE.

Associação de Professores de Matemática (1998a). *A renovação do currículo de Matemática.* Lisboa: APM.

Associação de Professores de Matemática (1998b). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.

Ausubel, D. P. (2003). *Aquisição e retenção de conhecimentos: Uma perspectiva cognitiva.* Lisboa: Plátano Edições Técnicas.

Ávila, G. (2002). O ensino do Cálculo e da Análise. *Revista Matemática Universitária, 33*, 83–95.

Bairral, M. A. (2005). Desenvolvendo-se criticamente em Matemática: A formação continuada em ambientes virtualizados. In D. Fiorentini & A. M. Nacarato (Orgs.). *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática: Investigando e teorizando a partir da prática* (pp. 49–67). São Paulo: Musa Editora.

Balomenos, R., Ferrini-Mundy, J., & Dick, T. (1994). Geometria: Prontidão para o Cálculo. In M. Lindquist & A. Shulte (orgs.). *Aprendendo e ensinando Geometria* (pp. 240–257). São Paulo: Atual Editora.

Barbosa, J. C. (2004). *Modelagem Matemática: O que é? Por que?* Rio de Janeiro: Veritati.

Barufi, M. C. B. (1999). *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral* (Tese de Doutoramento, Universidade de São Paulo).

Barto, M. C. (2003). *Um olhar sobre as idéias matemáticas em um curso de cálculo: A produção de significados para a continuidade* (Dissertação de Mestrado, PUC de São Paulo).

Berger, T. (2002). *Mathematics and mathematical sciences in 2010: What should students know?* Retirado a 2 de setembro de 2015 de http://www.maa.org/news/students2010.html

Bianchini, W., & Santos A. R. (2002). *Aprendendo Cálculo com o Maple - Cálculo de uma variável.* Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora.

Bishop, A. & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Bispo, R., Ramalho, G., & Henriques, N. (2008). Tarefas matemáticas e desenvolvimento do conhecimento matemático no 5.º ano de escolaridade. *Análise Psicológica*, *26* (1), 3–14.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Borba, M. C., & Penteado, M. G. (2001). *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Editora Autêntica.

Boyer, C. B. (1995). *Cálculo - Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula*. São Paulo: Atual Editora Ltda.

Boyer, C. B. (1996). *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blucher.

Brasil (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): Secretaria de Educação Fundamental.* Brasília: Ministério da Educação.

Brasil (1999). *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): Secretaria de Educação Média e Tecnológica*. Brasília: Ministério da Educação.

Brasil (2002). *Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Básico.* Brasília: Ministério da Educação.

Braumann, C. (2002). Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores* (pp. 5–24). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Bravo, R. S. (1991). *Técnicas de investigação social: Teoria e ejercicios*. Madrid: Paraninfo.

Breunig, R. T., & Nehring, C. M. (2013). A passagem da matemática da educação básica para o ensino superior: Concepção inicial de função por alunos de Cálculo. In *XII Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 1–13). São Paulo: SBEM.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula da Matemática: Um projecto curricular no 8.º ano* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Brunheira, L. (2000). *O conhecimento didático e as atitudes de uma professora estagiária face à realização de atividades de investigação matemática* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Cañadas, M., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D., & Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: Tipos y Pasos. *Enseñanza de las Ciencias*, *26* (3), 431–444.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11–17. Évora: Universidade de Évora

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: O caso de Célia. In L. Santos (Ed.), *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 255–266). Portalegre: SPIEM.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, *22* (2), 30–56.

Carvalho, J. B. P. de. (1996). O Cálculo na escola secundária: Algumas considerações históricas. *Caderno CEDES*, 40, 68–81. Campinas: Papirus.

Carvalho, S. G. (1919). *A teoria das tangentes antes da invenção do Cálculo Diferencial.* Coimbra: Imprensa da Universidade. Retirado a 15 de agosto de 2015 de https://www.fc.up.pt/fa/index.php?p=nav&f=books.0048.0

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14* (5), 355–374.

Celestino, M. R. (2008). *Concepções sobre limite: Imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do ensino superior* (Tese de Doutoramento, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo).

César, M., Torres, M., Rebelo, M., Castelhano, A., Candeias, N., & Candeias, A. (2000). Interacções sociais e matemática: Ventos de mudança nas práticas de sala de aula. In C. Monteiro, F. Tavares, J. Almiro, J. P. da Ponte, J. M. Matos & L. Menezes (Eds.), *Interacções na aula de matemática* (pp. 47–83). Viseu: SPCE - Secção de Educação Matemática.

Chapman, O., & Heater, B. (2010). Understanding change through a high school mathematics teacher's journey to inquiry-based teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13* (6), 445–458.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Cohen, L., & Manion, L. (1994). *Research methods in education*. London: Routledge.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: Conceptions e obstacles* (Tese de Doutoramento, Université Scientifique et Medicalede Grenoble).

Curcio, F., & Artzt, A. (1998). Students communicating in small groups: Making sense of data in graphical form. In H. Steinbring, M. Bartolini Bussi & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 179–190). Reston, VA: NCTM.

Curi, R. C., & Farias, R. M. S. (2008). Métodos de estudo e sua influência no desempenho dos alunos em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. In *Anais do XXXVI Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*. São Paulo: ABENGE.

D'Ambrosio, B. S. (2003). Formação de Professores de Matemática: Apontando perspectivas e enfrentando desafios. In *Anais XI CIAEM - Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Blumenau/SC.

D'Ambrosio, U. (1999). *Informática, Ciências e Matemática: Série Informática na Educação*. Brasília: MEC.

D'Ambrosio, U. (2001). *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction: Entering the field of qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1–17). Thousand Oaks: Sage Publications.

Dolce, O., & Pompeo, J. N. (1993). *Fundamentos de Matemática Elementar* (Vol. 9). São Paulo: Atual Editora.

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalsi, M. (1994). The teaching of linear algebra in first year of french science university: Epistemological difficulties, use of 'meta level', long term organization. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 137–144). Lisboa: PME.

Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 25-48). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Escher, M. A., Miskulin, R. G. S., & Silva, C. R. M. (2006). *Atividades no Maple: Uma atividade Exploratório-Investigativa em uma aula de Cálculo Diferencial I*. Campinas: UNICAMP.

Euclides. (2009). *Os Elementos*. São Paulo: UNESP.

Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, *66* (3), 317–333.

Fernandes Filho, O. P. (2001). O desenvolvimento cognitivo e a reprovação no curso de engenharia. In *Anais do XXIX Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*. Porto Alegre: ABENGE.

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In R. S. Rolf Biehler, Rudolf Straber e Bernard Winkelmann (Ed.), *Didactics of mathematics as a Scientific Discipline*: Kluwer Academic Publishers.

Fiorentini, D. (1995). Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. *Zetetiké*, *3* (4), 1–16.

Flemming, D. M. (2004). O Ensino de Cálculo nas Engenharias: Relato de uma caminhada. In Cury, Helena Noronha. (Org.). *Disciplinas matemáticas em cursos superiores: Reflexões, relatos, propostas* (pp. 271–292). Porto Alegre: EDIPUCRS.

Flemming, D. M., & Gonçalves, M. B. (1992). *Cálculo A: Funções, Limite, Derivação e Integração.* Porto Alegre: Makron Books.

Flemming, D. M., & Gonçalves, M. B. (2007). *Cálculo A: Funções, Limite, Derivação e Integração.* Porto Alegre: Pearson Prentice Hall.

Franke, K. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225–356). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Frescki, F. B., & Pigatto, P. (2009). Dificuldades na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral na Educação Tecnológica: Proposta de um curso de nivelamento. In *Anais do Simpósio Nacional de Iniciação Científica* (pp. 910–917). Curitiba: UTFPR.

Gall, M. D., Borg, W. R., & Gall, J. P. (1996). *Educational research: An introduction*. New York: Longman Publishers USA.

Garbi, G. G. (2011). *A Rainha das Ciências*. São Paulo: Livraria da Física.

Garzella, F. C. (2013). *A disciplina de Cálculo I: A análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos* (Tese de Doutoramento, Unicamp).

Giovanni, J. R., & Bonjorno, J. R. (2005). *Matemática completa*. São Paulo: FTD.

Goetz, J. P., & LeCompte, M. D. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. San Diego, CA: Academic Press.

Goldenberg, E. P. (1999). Quatro Funções da Investigação na Aula de Matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35–49). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Gomes, E. (2012). Ensino e aprendizagem do Cálculo na engenharia: Um mapeamento das publicações nos COBENGEs. In *Anais do XVI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*. Canoas: ULBRA.

Gomes, G. H., Lopes, C. M. C., & Nieto, S. S. (2005). Cálculo Zero: Uma experiência pedagógica com calouros nos cursos de engenharia. *In XXXIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*. Campina Grande: Cobenge.

Gomes, R. (2007). Análise e interpretação de dados de pesquisa qualitativa. In S. F. Deslandes, R. Gomes & M. C. S. Minayo (Orgs.), *Pesquisa social: Teoria, método e criatividade* (pp. 79–108). Petrópolis: Vozes.

Gonçalves, S., & Kalish, A. (2008). *Método Expositivo*. Retirado a 2 de setembro de 2015 de http://ndsim.esec.pt/pagina/opdes/brochuras/01.pdf

Gravina, M. A., & Santarosa, L. M. (1998). A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. In *Anais do IV Congresso Ibero- Americano de Informática Educativa.* Brasília: *RIBIE*.

Guidorizzi, H. L. (1987). *Um curso de Cálculo*. São Paulo: Livros Técnicos e Científicos.

Hernández, F., & Ventura, M. (1998). *A organização do currículo por projetos de trabalho*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Iezzi, G., Murakami, C., & Machado, J. N. (1993). *Fundamentos de Matemática Elementar* (Vol. 8). São Paulo: Atual Editora.

Kasner, E., & Newman, J. (1968). *Matemática e imaginação*. Rio de Janeiro: Zahar Editores.

Kenski, V. M. (2003). *Tecnologia e as alterações no espaço e tempo de ensinar e aprender*. São Paulo: Papirus.

Kenski, V. M. (2007). *Educação e Tecnologias: O novo ritmo da informação*. São Paulo: Papirus.

Lamonato, M., & Passos, C. L. (2011). Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: Reflexões para o ensino de matemática. *Zetetiké, 19* (36), 51–74.

Larson, R. (2011). *Cálculo Aplicado - Curso Rápido*. São Paulo: Cengage Learning.

Lerman, S. (1996). Investigações: Para onde vamos? In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 107-115). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Lopes, A. (1999). Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS. *Matemática Universitária,* 26*,* 123–146. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Love, E. (1988). Evaluating mathematical activity. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children: A reader* (pp. 249–262). London: Hodder & Stoughton.

Love, E. (1996). Avaliando a actividade Matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 89-105). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Ludke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas.* São Paulo: EPU.

Mariani, R. C. P. (2006). *Transição da Educação Básica para o Ensino Superior: A coordenação de registros de representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no curso de Cálculo* (Tese de Doutoramento, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo).

Martins, C., Maia, E., Menino, H., Rocha, I., & Pires, M. (2002). O trabalho investigativo nas aprendizagens iniciais da Matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação dos professores* (pp. 59-80). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Mason, J. (1996). Resolução de problemas matemáticos, no Reino Unido: Problemas abertos, fechados e exploratórios. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 89-105). Lisboa: Projecto MPT e APM.

MAA (2004). *Undergraduate Programs and Courses in the Mathematical Sciences: CUPM Curriculum Guide 2004*. Retirado a 2 de setembro de 2015 de http://www.maa.org/cupm/cupm2004.pdf.

Matos, A. C. (1960). *Funções reais de uma variável real (Teoria elementar)*. Porto: Centro de Estudos Matemáticos do Porto.

Matos, J. F. (2005). Matemática, educação e desenvolvimento social: Questionando mitos que sustentam opções actuais em desenvolvimento curricular em Matemática. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 69–81). Lisboa: APM.

Matos, J. F., & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Melo, J. M. R. (2002). *Conceitos de integral: Uma proposta computacional para o ensino e aprendizagem* (Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo).

Mendes, K. B., & Giostri, E. C. (2008). O ensino de Cálculo I e a realidade dos alunos de engenharia e tecnologia. In: *Anais do XXXVI Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia*. São Paulo: ABENGE.

Menestrina, T. C., & Goudard, B. (2003). Atualização e revisão pedagógica de Cálculo e Álgebra: Concepções e atitudes inovadoras. In *Anais do XXXI Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*. Rio de Janeiro: ABENGE.

Meyer, J. F., Caldeira, A. D., & Malheiros, A. P. (2011). *Modelagem em Educação Matemática.* São Paulo: Editora Autêntica.

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. São Francisco, CA: Jossey-Bass.

Ministério da Educação Básica (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais.* Lisboa.

Miquelino, L. H., & Resende, M. R. (2013). As tecnologias de informação e comunicação e o desenvolvimento profissional do professor de Cálculo. *In XI Encontro Nacional de Educação Matemática.* Curitiba: SBEM.

Montejunas, P. R. (1995). A evolução do ensino da Matemática no Brasil. In W. E. Garcia (Coord.). *Inovação Educacional no Brasil*. Campinas: Autores Associados.

Mora, J. F. (2000). *Dicionário de Filosofia*. São Paulo: Edições Loyola.

Morelatti, M. R. M. (2008). *A abordagem construcionista no processo de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral*. São Paulo: FCT/UNESP.

Müller, T. J. (2010). Análise de erros como uma alternativa para promover a aprendizagem de Cálculo. In *Anais* do *Congresso Internacional de Educação Matemática*. Porto Alegre: ULBRA.

Nasser, L. (2007). Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de Cálculo. In *Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática*. Belo Horizonte: SBEM.

Nasser, L. (2009). Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In M. C. R. Frota & L. Nasser (orgs.). *Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e debates* (pp 43–58). Recife: SBEM.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar* (tradução de E. Veloso, F. Nunes, H. Guimarães, J. F. Matos, J. M. Duarte, L. Leal, L. Moreira, L. Serrazina & R. Carvalho). Lisboa: APM/IIE.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática* (tradução de A. P. Canavarro, L. Moreira, L. C. Leal, M. J. Veloso & M. M. Graça). Lisboa: APM/IIE.

NCTM (1999). *Normas para a avaliação em matemática escolar* (tradução portuguesa da edição original de 1995). Lisboa: APM e IIE.

Neto, H. B. (1992). *O uso de interface computacional no ensino de matemática*. Retirado a 29 de maio de 2013 de http://www.multimeios.ufc.br/arquivos/pc/pre-print/O_uso_de_interface.pdf

Olimpio Junior, A. (2005). *Compreensões de conceitos de Cálculo Diferencial no primeiro ano de matemática: Uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática* (Tese de Doutoramento, Universidade Estadual Paulista).

Oliveira, M. A., & Silva, A. (1971). *Biblioteca da Matemática Moderna – Tomo IV*. São Paulo: Livros irradiantes.

Orton, A., & Frobisher, L. (1996). *Insights into teaching mathematics*. London: Cassell.

Palis, G. R. (1995). Computadores em Cálculo: Uma alternativa que não se justifica por si mesma. *Temas e Debates*, *8* (6), 22–38.

Palis, G. R. (2010). A transição do ensino médio para o ensino superior. In *X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador: ENEM.

Papert, S. (1994). *A máquina das crianças: Repensando a escola na era da informática.* Porto Alegre: Ed. Artmed.

Petitot, J. (1985). Local/Global. Enciclopédia Einaudi. In W. M. Rezende (Tese de Doutoramento), *O ensino de Cálculo: Dificuldades de natureza epistemológica* (pp. 372–386). São Paulo: Faculdade de Educação – USP.

Pires, J. A. L. (2004). *Cálculo Diferencial: Estudo histórico sobre a evolução do Cálculo Diferencial no século XVII* (Dissertação de Mestrado, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro).

Piskounov, N. (1997). *Cálculo Diferencial e Integral* . Porto: Livraria Lopes da Silva.

Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Editora Interciência.

Pólya, G. (1985). O Ensino por meio de problemas. *Revista do Professor de Matemática*, *7,* 11–16.

Pólya, G. (1987). Dez mandamentos para professores. *Revista do Professor de Matemática*, *10,* 1–10.

Ponte, J. P. (1992a). Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos & J. P. Ponte (Eds.), *Educação e matemática: Temas de investigação* (pp. 185–239). Lisboa: IIE/SPCE.

Ponte, J. P. (1992b). *O computador: Um instrumento da educação*. Lisboa: Editora Texto.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1° Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (2001). Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. In T. J. Cooney & F. L. Lin (Eds), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 53–72). Dordrecht: Kluwer.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autentica Editora.

Ponte, J. P. (2004). Pesquisar para compreender e transformar a nossa própria prática. *Educar em Revista*, 24, 37–66. Curitiba: Editora UFPR.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de trabalho de investigação (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em Educação Matemática. *Bolema*, *25*, 105–132.

Porfírio, J., & Oliveira, H. (1999). Uma reflexão em torno das tarefas de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 111–118). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.

Prado, M. E. B. B. (2003). *Pedagogia de Projetos e Integração de Mídias*. Campinas: Unicamp.

Rehfeldt, M. J. H., Nicolini, C. A. H., Quartieri, M. T., & Giongo, I. M. (2012). Investigando os conhecimentos prévios dos alunos de Cálculo do Centro Universitário Univates. *Revista de Ensino de Engenharia*, *31* (1), 24–30.

Reis, F. S. (2001). *A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos* (Tese de Doutoramento, Unicamp).

Rezende, W. M. (1994). *Uma Análise Histórica-Epistêmica da Operação de Limite* (Dissertação de Mestrado, Universidade Santa Úrsula).

Rezende, W. M. (2003). *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de natureza epistemológica* (Tese de Doutoramento, Universidade de São Paulo).

Riego, M. A. (2013). Factores Académicos que Explican la Reprobación en Cálculo Diferencial. *Conciencia Tecnológica*, 46, 29–35. México: Instituto Tecnológico de Aguascalientes.

Robert, A., & Speer, N. (2001). Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary Analysis. In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (Vol. 7). Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Rooney, A. (2012). *A História da Matemática: Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito*. São Paulo: Makron Books.

Ruthven, K., Hofmann, R., & Mercer, N. (2011). A dialogic approach to plenary problem synthesis. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 81–88. Ankara, Turkey: PME.

Saback, M. S. O. (1980). *O Desenvolvimento cognitivo e o desempenho em Cálculo na Universidade: Um estudo de caso* (Dissertação de Mestrado, PUC/Rio de Janeiro).

Sacristán, J. G., & Gomez, A. I. P. (1998). *Compreender e transformar o ensino*. São Paulo: ARTMED.

Santos, L., Brocardo, J., Pires, M., & Rosendo, A. I. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2.º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 83–106). Lisboa: SEM-SPCE.

Santos, H. M. C. (2010). *"Limite": Um estudo sobre manuais escolares e exames em Portugal* (Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho).

São Paulo (1991). *Proposta curricular para o ensino de Matemática: 2º grau.* São Paulo: SE/CENP.

Saraiva, R. P. (2000). Novas tecnologias no ensino do conceito de limite de função (Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo).

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). New York: Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (1996). Por que toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 61–71). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Segurado, M. I. (1997). *A investigação como parte da experiência matemática dos alunos do 2º ciclo* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Shulman, L. S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 3–36). New York, NY: MacMillan.

Silva, J. C., Pinto, J., & Machado, V. (2012). *Manual de Matemática para o 12º Ano* (Vol. 3). Coimbra.

Silva, J. F. (1994). *Questões metodológicas do ensino do Cálculo Diferencial e Integral* (Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará).

Silva, J. S. (1964). *Guia para a utilização do compêndio de Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação.

Silva, J. S. (1978). *Compêndio de Matemática* (Vol. 2): GEP do MEC.

Silva Neto, J. P. (2006). *Um estudo sobre o ensino de limite: Um tratamento computacional com aplicações* (Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo).

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema, 14*, 66–91.

Skovsmose, O. (2008). *Desafios da reflexão em educação matemática crítica.* Campinas: Papirus.

Soares de Mello, J. C. C. B., Soares de Mello, M. H. C., & Silva Fernandes, A. J. (2001). Mudanças no ensino de Cálculo I: Histórico e perspectivas. In *XXVIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*. Rio de Janeiro: Cobenge.

Sousa, A. J. R. (2003). *Maplets - Modelos interactivos no ensino da Matemática* (Tese de Mestrado, Universidade do Porto).

Stake, R. E. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *10* (4), 313–340.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3* (4), 268–275.

Stewart, J. (2013). *Cálculo - Volume I*. São Paulo: Cengage Learning.

Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *2* (12), 152–160.

Tall, D. O. (2002). *Advanced Mathematical Thinking*. New York: Kluwer Academic Publishers

Tall, D. O., Smith, D., & Piez, C. (2008). Technology and Calculus. In M. K. Heid, & G. M. Blume (Eds), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 207–258). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Tudella, A., Ferreira, C., Bernardo, C., Pires, F., Fonseca, H., Segurado, I., & Varandas, J. M. (1999). Dinâmica de uma aula com investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 87–96). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Tucker, A. C., & Leitzel, J. R. C. (1995). A report to the community. In J. R. C. Leitzel & A. C. Tucker (Eds). *Mathematical Association of America Reports* (pp. 97). Washington: MAA

Valente, J. A. (1999). *O computador na sociedade do conhecimento*. Campinas: Gráfica Central da UNICAMP.

Villarreal, M. E. (1999). *O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas* (Tese de Doutoramento, Universidade Estadual Paulista).

Wood, T., Merkel, G., & Uerkwitz, J. (1996). Criar um ambiente na aula para falar sobre Matemática. *Educação e Matemática*, *40*, 39–43.

Wrobel, J. S., Zeferino, M. V. C., & Carneiro, T. C. J. (2013). Ensino de Cálculo Diferencial e Integral na última década do ENEM: uma análise usando o Alceste. In *Anais do XI ENEM*, Curitiba/PR.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*, 458–477.

Yin, R. K. (1989). *Case study research: Design and methods.* London: Sage.

Zuchi, I. (2005). *A abordagem do conceito de limite via sequência didática: Do ambiente lápis e papel ao ambiente computacional* (Tese de Doutoramento, Universidade Federal de Santa Catarina).

Anexo 01: I Atividade com o *GeoGebra*

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I
Prof. Álvaro Fernandes Serafim

I ATIVIDADE COM O *GEOGEBRA*

1°) Crie dois pontos A e B e uma reta r que passe por ambos.

2°) Construa um segmento de reta determinado por dois pontos cuja medida seja de 5 unidades.

3°) Construa um hexágono identificando e medindo cada um dos seus ângulos.

4°) Construa um triângulo e identifique seu incentro* denominando-o de P.

* incentro é o ponto de encontro das bissetrizes de um triângulo.

5°) Construa um segmento AB e seu ponto médio M. Crie uma perpendicular passando por M.

6°) Construa duas retas paralelas r e s. Construa agora uma reta t paralela e equidistante as retas r e s.

7°) Construa um quadrilátero inscrito em uma circunferência.

8°) Construa um triângulo circunscrito a uma circunferência.

9°) Construa duas circunferências C_1 e C_2, de tal forma que uma seja tangente interna da outra no ponto P.

10°) Construa um triângulo no primeiro quadrante e faça a reflexão dele em relação ao eixo ox.

Problema: Ilustre dinamicamente o Teorema de Pitágoras.

Anexo 02: II Atividade com o *GeoGebra*

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I
Prof. Álvaro Fernandes Serafim

II ATIVIDADE COM O *GEOGEBRA*

1º) Construa o gráfico da função do primeiro grau $f(x) = ax + b$ e anime os coeficientes angular (a) e linear (b).

a) O que podemos concluir sobre o efeito da variação do coeficiente angular sobre o gráfico?
b) O que podemos concluir sobre o efeito da variação do coeficiente linear sobre o gráfico?

2º) Ainda com relação ao gráfico de $f(x) = ax + b$, verifique que:

a) A função f é crescente se o coeficiente angular é positivo.
b) A função f é decrescente se o coeficiente angular é negativo.

3º) Construa o gráfico da função $f(x) = 2 - (3/4)x$.

a) Determine o zero (ou raiz) da função.
b) A função f é crescente ou decrescente?
c) Qual o efeito no gráfico da função f quando multiplica-se $f(x)$ por -1?
d) Qual o efeito no gráfico da função f quando subtrai-se 1 unidade de $f(x)$?

4º) Resolva o sistema de equações $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$ e confira a resposta com o *GeoGebra*.

5º) As retas determinadas pelos gráficos das funções f, g e h determinam um triângulo. Obtenha os vértices desse triângulo, sabendo que as leis das funções são $f(x) = x + 3$, $g(x) = -x + 3$ e $h(x) = 6$.

6º) Construa o gráfico da seguinte função: $f(x) = \begin{cases} x, & se\ x \geq 2 \\ -1, & 0 \leq x < 2 \\ x - 1, & se\ x < 0 \end{cases}$.

Problema: Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções: A e B. O plano A cobra \$ 100,00 de inscrição e \$ 50,00 por consulta num certo período. O plano B cobra \$ 180,00 de inscrição e \$ 40,00 por consulta no mesmo período. O gasto total de cada plano é função do número x de consultas.

Determine:

a) A lei de formação da função correspondente de cada plano.

b) Em que condição é possível afirmar que:

i) O plano A é mais econômico.
ii) O plano B é mais econômico.
iii) Os dois planos são equivalentes.

Anexo 03: I Atividade com o *Winplot*

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I
Prof. Álvaro Fernandes Serafim

I ATIVIDADE COM O *WINPLOT*

1°) Crie os pontos $(1,2)$ e $(-1,3)$ e determine a equação da reta que passa por eles.

2°) Trace as retas de equação $4x - 2y - 5 = 0$ e $x + 2y - 1 = 0$. Qual a posição relativa entre elas? Determine o ponto de interseção.

3°) Trace a reta de equação $y = ax + 1$ e anime o parâmetro a no intervalo real $[-5,5]$. Estude os diversos comportamentos da reta quando $a > 0$ e quando $a < 0$. Conclua.

4°) Trace a reta de equação $y = x + b$ e anime o parâmetro b no intervalo real $[-5,5]$. Estude os diversos comportamentos da reta quando $b > 0$ e quando $b < 0$. Conclua.

5°) Trace a parábola de equação $y = x^2 - 5x + 6$. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento, a concavidade, as raízes e o vértice.

6°) Determine os pontos de interseção entre $y = x + 1$ e $y = -x^2 + 5x + 1$.

7°) Determine os pontos de interseção entre $y = -x^2 - x + 7$ e $y = x^2 - 3$.

8°) Trace a parábola de equação $y = ax^2$ e anime o parâmetro a no intervalo real $[-5,5]$. Estude os diversos comportamentos da parábola quando $a > 0$ e quando $a < 0$. Conclua.

9°) Trace a parábola de equação $y = x^2 + bx$ e anime o parâmetro b no intervalo real $[-5,5]$. Estude os diversos comportamentos da parábola quando $b > 0$ e quando $b < 0$. Conclua.

Obs.: Recorde-se da fórmula do vértice de uma parábola!

10°) Trace a parábola de equação $y = x^2 + x + c$ e anime o parâmetro c no intervalo real $[-5,5]$. Estude os diversos comportamentos da parábola quando $c > 0$ e quando $c < 0$. Conclua.

Problema: Suponha k uma constante real que possa assumir valores no intervalo real $[0, 5]$ e considere a parábola de equação $f(x) = x^2$. Determine o efeito sobre os gráficos das funções abaixo, levando em consideração os diversos valores assumidos por k no intervalo dado. Conclua.

a) $y = f(x) + k$ b) $y = f(x) - k$ c) $y = f(x + k)$ d) $y = f(x - k)$

Anexo 04: II Atividade com o *Winplot*

UFRB

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I
Prof. Álvaro Fernandes Serafim

II ATIVIDADE COM O *WINPLOT*

1°) Construa o gráfico da função $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 1 \\ -x + 4, & 1 < x \leq 3. \\ 3/x, & x > 3 \end{cases}$

2°) Construa o gráfico da função modular $y = |2x - 4|$. Determine o conjunto imagem.

3°) Determine os pontos de interseção entre $y = \big||x| - 3\big|$ e $y = x^2 - 3$.

4°) Trace o gráfico da função trigonométrica dada por $f(x) = a \cdot sen(bx + c) + d$, considerando a, b, c e d constantes reais.

Responda qual o efeito sobre o gráfico de f quando:

a) Fixamos $b = 1, c = 0, d = 0$ e variamos o parâmetro $-3 \leq a \leq 3$?
b) Fixamos $a = 1, c = 0, d = 0$ e variamos o parâmetro $-3 \leq b \leq 3$?
c) Fixamos $a = 1, b = 1, d = 0$ e variamos o parâmetro $-3 \leq c \leq 3$?
d) Fixamos $a = 1, b = 1, d = 0$ e variamos o parâmetro $-3 \leq d \leq 3$?

5°) Trace o gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$ e anime o parâmetro a no intervalo real $[1/5\,,\ 5]$. Estude os diversos efeitos sobre o gráfico de f quando $0 < a < 1$ e quando $a > 1$. Conclua.

6°) Trace o gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_a(x)$ e anime o parâmetro a no intervalo real $[1/5\,,\ 5]$. Estude os diversos efeitos sobre o gráfico de f quando $0 < a < 1$ e quando $a > 1$. Conclua.

Problema: Determine todos os pontos do plano que são equidistantes do ponto fixo $A(0,1)$ e da reta horizontal $r: y = -1$. Anime esta situação e visualize a curva que satisfaz esta propriedade.

Obs.: Pesquise a fórmula da distância entre dois pontos e entre ponto e reta.

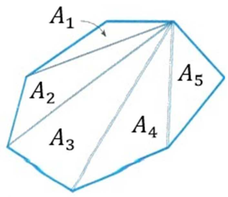
Anexo 05: Tarefa 1 – Aplicação de limites no cálculo de áreas

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I
Prof. Álvaro Fernandes Serafim

Aplicação de limites no cálculo de áreas

As fórmulas para as áreas das figuras geométricas básicas, tais como triângulos, retângulos e polígonos datam dos primeiros registros sobre matemática. O primeiro avanço real, além do nível elementar no cálculo de áreas, foi feito pelo matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 AC – 212 AC), que aprimorou uma técnica engenhosa, mas incômoda, para achar as áreas de regiões limitadas por parábolas, por espirais e por várias outras curvas, a qual é chamada de “método da exaustão”. Este método consistia em “exaurir” ou “esgotar” a figura dada por meio de outras figuras de áreas conhecidas (veja a figura 1).



$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

Figura 1: Heptágono decomposto em triângulos

Com o método da exaustão (que é atribuído ao grego Eudoxo de Cnido / 406–355 A.C.) podemos inscrever a figura, cuja área se quer calcular, com polígonos e então aumentar o número de lados desses polígonos até alcançar a área desejada. A figura 2 ilustra esse procedimento, no caso especial do círculo, com polígonos regulares inscritos. Se A_n é a área do polígono inscrito com n lados, à medida que aumentarmos n, fica evidente que A_n ficará cada vez mais próxima da área A do círculo. Dizemos então que a área do círculo é o limite das áreas dos polígonos inscritos quando $n \to \infty$, e escrevemos $A = \lim_{n\to\infty} A_n$.

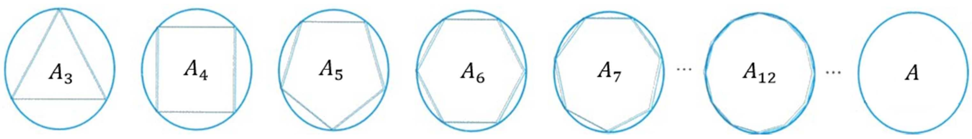


Figura 2: Polígonos regulares inscritos numa circunferência

No século XVII, vários matemáticos descobriram como obter áreas mais facilmente usando a teoria dos limites. Porém, o maior avanço em relação a um método geral para o cálculo de áreas foi feito independentemente por *Newton* e *Leibniz*, os quais descobriram que as áreas poderiam ser obtidas revertendo o processo da derivação. Esta descoberta é vista como o começo do Cálculo Diferencial e Integral.

Usaremos a ideia do método da exaustão para encontrarmos a área de regiões do tipo mostrado na figura 3. Vamos aproximar a área desejada A por áreas de retângulos, fazendo decrescer infinitesimamente a largura das bases desses retângulos, e então calcularemos A como o limite dessas somas de áreas.

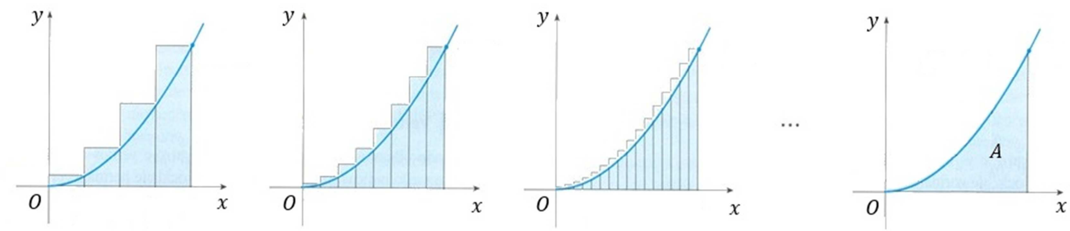


Figura 3: Exaustão por retângulos de uma região limitada por uma curva.

Problema: Determine, através do método da exaustão e de forma semelhante à figura 3, a área da região limitada pela função $f(x) = 16x^3$ no intervalo $[0, 1]$.

Adaptado de Stewart (2013).

Questão 1) Use no *Winplot* o comando "integrar f(x) dx" para determinar a soma das áreas dos retângulos e preencha a tabela abaixo:

n (quantidade de retângulos)	A_n (área total dos retângulos)
4	
10	
50	
100	
500	
1000	
⋮	

Questão 2) Pelo comportamento percebido dos valores de A_n na tabela, intuitivamente você diria que o valor da área é quanto?

Questão 3) Use agora a fórmula de Riemann $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ para calcular o valor **exato** da área e verifique a sua resposta anterior.

Anexo 06: Tarefa 2 – Áreas de regiões delimitadas por retas tangentes

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I
Prof. Álvaro Fernandes Serafim

Áreas de regiões delimitadas por retas tangentes

Problema 1: Considere a função $f(x) = 1/x\,, x \neq 0.$ Verifique se é constante (e sempre o mesmo valor!) a área do triângulo AOB, sendo A e B os pontos de interseção de qualquer reta tangente ao gráfico desta função com os eixos coordenados x e y, respectivamente, conforme a figura 1.

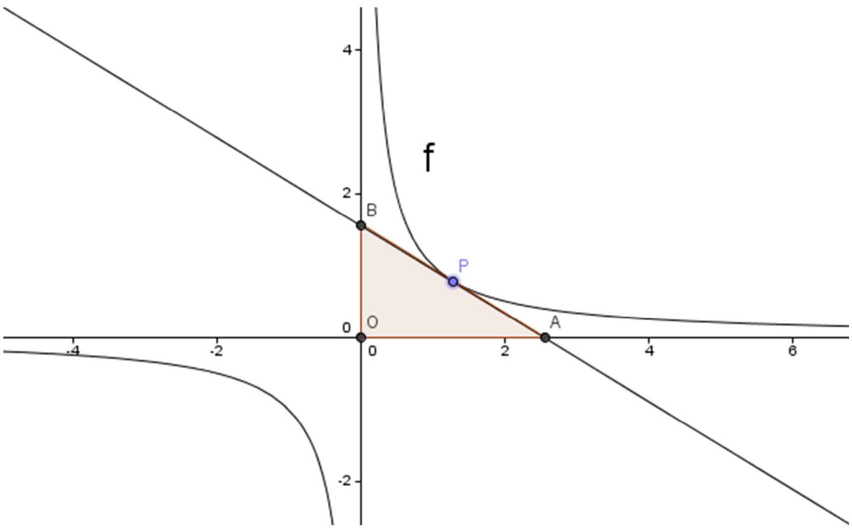


Figura 1

a) Use o *GeoGebra* para investigar este problema. Caso a sua resposta seja afirmativa, demonstre este resultado.

Problema 2: Ainda com relação à construção anterior, trace sucessivamente os gráficos das funções $f_2(x) = 2/x$, $f_3(x) = 3/x$, $f_4(x) = 4/x$ e observe o comportamento das áreas dos triângulos (complete a tabela 1).

Tabela 1

Função:	Área do triângulo AOB:	Função:	Área do triângulo AOB:
$f_1(x) = 1/x$		$f_4(x) = 4/x$	
$f_2(x) = 2/x$		$f_5(x) = 5/x$	
$f_3(x) = 3/x$		$\vdots$	

a) A partir da observação da tabela 1 é possível estabelecer alguma relação entre a família de funções $f(x) = a/x\,, x \neq 0$, sendo a constante real não nula e as respectivas áreas dos triângulos? Justifique.

b) A partir da sua resposta anterior, demonstre algebricamente a sua afirmação usando os seus conhecimentos do Cálculo.

Anexo 07: Tarefa 3 – Projetando uma montanha-russa

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I
Prof. Álvaro Fernandes Serafim

Projetando uma montanha-russa

Problema: Suponha que lhe pedem para projetar a primeira subida e descida de uma montanha-russa. Estudando fotografias de montanhas-russas (Figura 1), você decide fazer a subida com inclinação $0{,}8$ (ângulo de inclinação de aproximadamente $38{,}66°$) e a descida com inclinação $-1{,}6$ (ângulo de inclinação de aproximadamente $-57{,}99°$). Você decide ligar esses dois trechos retos L_1 e L_2 com parte de uma parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, em que x e y são medidos em metros. Para o percurso ser liso, não pode haver variações bruscas na direção, de modo que você quer que os segmentos L_1 e L_2 sejam tangentes à parábola nos pontos de transição P e Q (Figura 2). Para simplificar as equações, você decide colocar a origem do sistema em P.

Adaptado de Stewart (2013)

Figura 1: Montanha-russa (imagem da internet)

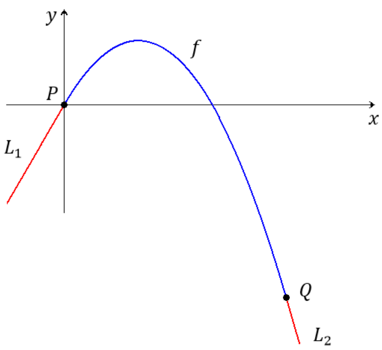


Figura 2: tangentes comuns nos pontos P e Q.

Responda:

a) Suponha que a distância horizontal entre P e Q seja $30\ m$. Escreva equações em a, b e c que garantam que o percurso seja liso nos pontos de transição.
b) Resolva as equações da parte (a) para a, b e c para encontrar uma fórmula para $f(x)$.
c) Determine a diferença de elevação entre P e Q.
d) Trace os gráficos de L_1, f e L_2 e verifique se as transições são lisas.

Anexo 08: Tarefa 4 – O problema da velocidade instantânea

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I
Prof. Álvaro Fernandes Serafim

O problema da velocidade instantânea

Se você observar o velocímetro de um carro no tráfego urbano, verá que o ponteiro não fica parado por muito tempo, isto é, a velocidade do carro não é constante. Podemos conjecturar pela observação do velocímetro, que o carro tem uma determinada velocidade em cada momento. Como definir esta velocidade "instantânea"? Para compreender este conceito, vamos investigar um problema semelhante, o problema histórico da queda livre de uma bola, pois esta também apresenta velocidades distintas em cada instante do movimento...

Problema: Suponha que uma bola seja solta a partir do ponto de observação de 450 m acima do solo do alto da Torre CN em Toronto/Canadá. Determine a velocidade da bola no instante 5 segundos.

Adaptado de Stewart (2013)

Figura 1: A Torre CN em Toronto foi o maior edifício do mundo por 32 anos (imagem da internet)

Por meio de experimentos físicos feitos séculos atrás, Galileu descobriu que a distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda (esse modelo para queda livre despreza a resistência do ar). Se a distância percorrida após t *segundos for chamada* $s(t)$ *e medida em metros, então a Lei de Galileu pode ser expressa pela equação*

$$s(t) = 4{,}9t^2$$

A dificuldade em determinar a velocidade da bola no instante 5 segundos está em tratarmos de um único instante de tempo $(t = 5\ s)$, *ou seja, não temos um intervalo de tempo para medir as variações de espaço e tempo. Porém, podemos determinar a quantidade desejada calculando a velocidade média sobre o intervalo de tempo* $[5,\ \ 5 + \Delta t]$, *sendo* Δt *positivo e muito próximo de zero, isto é,* $\Delta t \to 0$.

Use uma calculadora científica e complete a tabela 1 abaixo:

Δt	Intervalo de tempo: $[5,\ \ 5 + \Delta t]$	Velocidade média (Vm): $Vm = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(5+\Delta t)-s(5)}{(5+\Delta t)-5} =$
1		
$0{,}1$		
$0{,}05$		
$0{,}01$		
$0{,}001$		

Tabela 1

Responda as questões abaixo:

Questão 1) À medida que encurtamos o intervalo de tempo, intuitivamente a velocidade média fica cada vez mais próxima de que valor? Justifique.

____

____

____

____

Questão 2) Use o *software Winplot* e esboce o gráfico da função $s(t) = 4{,}9t^2$. Responda:

a) Visualize as retas secantes ao gráfico desta função conforme os intervalos definidos na Tabela 1, tomando $t = 5\ s$ como ponto base (ver figura 1). Registre os coeficientes angulares obtidos e compare com os resultados obtidos na tabela 1. Comente.

____

____

____

____

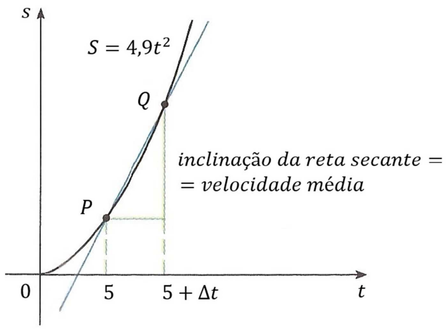


Figura 1

b) Visualize a reta tangente ao gráfico desta função no ponto $t = 5\ s$ (ver figura 2). Qual o coeficiente angular obtido? Compare este resultado com a sua resposta na questão 1. Comente.

____

____

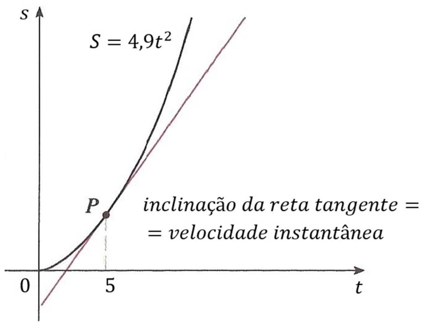


Figura 2

c) Levando em consideração que as inclinações das retas secantes determinam as velocidades médias da bola calculadas na Tabela 1, como você definiria, em termos de limites, a velocidade instantânea da bola no momento $t = 5\ s$?

____

____

d) Calcule este limite e confirme o valor encontrado no item b).

e) Que definição você daria para um caso geral, isto é, para a velocidade instantânea $v(t)$ de um corpo em movimento, sendo $s = s(t)$ a sua função horária?

____

____

f) É possível afirmar que a função velocidade instantânea $v(t)$ é igual a derivada da função horária em relação ao tempo, isto é, $v(t) = s'(t)$? Por que?

____

____

Anexo 09: Guião de observação das aulas de realização de tarefas investigativas

GUIÃO DE OBSERVAÇÃO DAS AULAS DE REALIZAÇÃO DAS TAREFAS EXPLORATÓRIAS

1) Sobre a aula:

- ✓ A data e a duração;
- ✓ A organização dos grupos;
- ✓ A gestão da aula.

2) Sobre a exploração das tarefas:

Nos grupos:

- ✓ O tempo foi suficiente para realizar toda a tarefa?
- ✓ Como os alunos se envolveram?
- ✓ Quais foram as maiores dificuldades encontradas?
- ✓ Que tipo de interação ocorreu com mais frequência nos grupos?
- ✓ Quais foram as principais estratégias e raciocínios usados?
- ✓ Houve formulação de conjecturas?
- ✓ Os grupos se comunicavam e trocavam ideias?

O professor:

- ✓ Quando se dirigiu diretamente aos grupos?
- ✓ Fez orientações somente ao grupo que solicitou ajuda ou pra toda turma?
- ✓ Colocou questões gerais e esclarecedoras para a turma?
- ✓ Lançou desafios para os grupos?
- ✓ Respeitou o raciocínio e autonomia dos alunos e dos grupos?
- ✓ Que dificuldades encontrou na aplicação das tarefas?
- ✓ Realizou um quadro comparativo entre as aulas tradicionais e as tarefas exploratórias?

3) Sobre a discussão ao final das tarefas:

- ✓ O tempo foi suficiente?
- ✓ Promoveu o confronto das diferentes ideias?
- ✓ Realizou o esclarecimento das questões mais complexas?
- ✓ Como os alunos se envolveram nesta etapa?
- ✓ Fatos novos se destacaram nesta fase?

4) Sobre as impressões gerais da aula:

- ✓ Comentários gerais destacando os fatos mais notáveis sobre a experiência realizada.

Anexo 10: Questionário de investigação da tarefa nº 1

QUESTIONÁRIO DE INVESTIGAÇÃO Nº 1

Caro estudante

Este questionário tem como objetivo principal avaliar o grau de satisfação e aprendizado de alguns tópicos do Cálculo Diferencial e Integral a partir do uso de atividades exploratórias investigativas em grupo com o auxílio do computador. Em particular, almejo verificar se esta é uma estratégia que favorece a compreensão acerca do uso dos limites e suas aplicações práticas. As informações que serão prestadas neste questionário não visam estabelecer qualquer tipo de nota ou conceito dos respondentes, servem, porém, para melhor compreender o comportamento e evolução dos discentes a partir dessa estratégia didática para o aperfeiçoamento do aprendizado do Cálculo Diferencial e Integral.

Enquanto docente e responsável por essa investigação, comprometo utilizar as informações aqui fornecidas apenas no âmbito desta pesquisa, assegurando também o anonimato, de forma que não há necessidade de sua identificação. Assim, conto com a veracidade das informações aqui prestadas e agradeço antecipadamente a sua colaboração.

Atenciosamente,
Prof. Álvaro Fernandes Serafim Filho.

Após a realização da atividade, solicito que responda com bastante atenção e cuidado as seguintes questões:

1. Você considera que esta atividade, realizada em grupo e com auxílio do computador, o ajudou a compreender melhor uma utilidade prática dos limites?

(   ) Sim   (   ) Não

Que aspectos na realização dessa atividade você considera que mais contribuíram para formar a sua opinião? Explique.

____
____
____
____
____

2. Ao longo da realização desta atividade, foi-lhe sugerido o uso do computador com o *software Winplot*. Como foi utilizado este recurso tecnológico?

( ) Para toda a resolução da atividade.
( ) Apenas para visualização do gráfico.
( ) Apenas para verificação da solução.
( ) Outra. Qual?

____

Explique a(s) opção(ões) escolhida(s).

____
____
____
____
____
____
____

3. Você encontrou dificuldades na realização desta atividade?

( ) Sim ( ) Não

Se marcou "sim", que dificuldades encontrou?

( ) Na compreensão da tarefa
( ) Na construção da fórmula do limite que calcula o valor da área
( ) No uso do *software*
( ) Na realização dos cálculos
( ) Outra. Qual(ais)?

____

Explique a(s) opção(ões) escolhida(s).

____
____
____
____
____
____
____

Muito obrigado por sua colaboração!

Anexo 11: Questionário de investigação da tarefa nº 2

QUESTIONÁRIO DE INVESTIGAÇÃO Nº 2

Caro estudante

Este questionário tem como objetivo principal avaliar o grau de satisfação e aprendizado de alguns tópicos do Cálculo Diferencial e Integral a partir do uso de atividades exploratórias investigativas em grupo com o auxílio do computador. Em particular, almejo verificar se esta é uma estratégia que favorece a compreensão acerca da abordagem de problemas investigativos matemáticos, conjecturas e demonstrações. As informações que serão prestadas neste questionário não visam estabelecer qualquer tipo de nota ou conceito dos respondentes, servem, porém, para melhor compreender o comportamento e evolução dos discentes a partir dessa estratégia didática para o aperfeiçoamento do aprendizado do Cálculo Diferencial e Integral.

Enquanto docente e responsável por essa investigação, comprometo utilizar as informações aqui fornecidas apenas no âmbito desta pesquisa, assegurando também o anonimato, de forma que não há necessidade de sua identificação. Assim, conto com a veracidade das informações aqui prestadas e agradeço antecipadamente a sua colaboração.

Atenciosamente,
Prof. Álvaro Fernandes Serafim Filho.

Após a realização da atividade, solicito que responda com bastante atenção e cuidado as seguintes questões:

1. Você considera que esta atividade, realizada em grupo e com auxílio do computador, o ajudou a compreender melhor a abordagem de problemas investigativos matemáticos, conjecturas e demonstrações?

(   ) Sim   (   ) Não

Que aspectos na realização dessa atividade você considera que mais contribuíram para formar a sua opinião? Explique.

____
____
____
____
____

2. Ao longo da realização desta atividade, foi-lhe sugerido o uso do computador com o *software GeoGebra*. Como foi utilizado este recurso tecnológico?

(   ) Para toda a resolução da atividade.
(   ) Apenas para visualização do gráfico.
(   ) Apenas para verificação da solução.
(   ) Outra. Qual?

____

Explique a(s) opção(ões) escolhida(s).

____
____
____
____
____
____
____

3. Você encontrou dificuldades na realização desta atividade?

(   ) Sim   (   ) Não

Se marcou "sim", que dificuldades encontrou?

(   ) Na compreensão da tarefa
(   ) No uso do *software*
(   ) Na demonstração formal dos resultados
(   ) Na realização dos cálculos
(   ) Outra. Qual(ais)?

____

Explique a(s) opção(ões) escolhida(s).

____
____
____
____
____
____
____

Muito obrigado por sua colaboração!

Anexo 12: Questionário de investigação da tarefa nº 3

QUESTIONÁRIO DE INVESTIGAÇÃO Nº 3

Caro estudante

Este questionário tem como objetivo principal avaliar o grau de satisfação e aprendizado de alguns tópicos do Cálculo Diferencial e Integral a partir do uso de atividades exploratórias investigativas em grupo com o auxílio do computador. Em particular, almejo verificar se esta é uma estratégia que favorece a compreensão do estudo das retas tangentes e suas aplicações em problemas investigativos matemáticos. As informações que serão prestadas neste questionário não visam estabelecer qualquer tipo de nota ou conceito dos respondentes, servem, porém, para melhor compreender o comportamento e evolução dos discentes a partir dessa estratégia didática para o aperfeiçoamento do aprendizado do Cálculo Diferencial e Integral.

Enquanto docente e responsável por essa investigação, comprometo utilizar as informações aqui fornecidas apenas no âmbito desta pesquisa, assegurando também o anonimato, de forma que não há necessidade de sua identificação. Assim, conto com a veracidade das informações aqui prestadas e agradeço antecipadamente a sua colaboração.

Atenciosamente,
Prof. Álvaro Fernandes Serafim Filho.

Após a realização da atividade, solicito que responda com bastante atenção e cuidado as seguintes questões:

1. Você considera que esta atividade, realizada em grupo e com auxílio do computador, o ajudou a compreender melhor os conceitos teóricos de continuidade, derivada, reta tangente, dentre outros, em aplicações práticas?

(   ) Sim   (   ) Não

Que aspectos na realização dessa atividade você considera que mais contribuíram para formar a sua opinião? Explique.

____
____
____
____
____
____

2. Ao longo da realização desta atividade, foi-lhe sugerido o uso do computador com livre escolha de *software*.

Qual *software* você utilizou?

____

Como foi utilizado este recurso tecnológico?

(   ) Para toda a resolução da atividade.
(   ) Apenas para visualização do gráfico.
(   ) Apenas para verificação da solução.
(   ) Outra. Qual?

____

Explique a(s) opção(ões) escolhida(s).

____
____
____
____
____
____
____

3. Você encontrou dificuldades na realização desta atividade?

(   ) Sim   (   ) Não

Se marcou "sim", que dificuldades encontrou?

(   ) Na compreensão da tarefa
(   ) No uso do *software*
(   ) Na realização dos cálculos
(   ) Outra. Qual(ais)?

____

Explique a(s) opção(ões) escolhida(s).

____
____
____
____
____
____
____

Muito obrigado por sua colaboração!

Anexo 13: Questionário de investigação da tarefa nº 4

QUESTIONÁRIO DE INVESTIGAÇÃO Nº 4

Caro estudante

Este questionário tem como objetivo principal avaliar o grau de satisfação e aprendizado de alguns tópicos do Cálculo Diferencial e Integral a partir do uso de atividades exploratórias investigativas em grupo com o auxílio do computador. Em particular, almejo verificar se esta é uma estratégia que favorece o aprendizado acerca do conceito de velocidade instantânea como a derivada da função espaço em relação ao tempo, explorando o conceito de limites. As informações que serão prestadas neste questionário não visam estabelecer qualquer tipo de nota ou conceito dos respondentes, servem, porém, para melhor compreender o comportamento e evolução dos discentes a partir dessa estratégia didática para o aprendizado do Cálculo Diferencial e Integral.

Enquanto docente e responsável por essa investigação, comprometo utilizar as informações aqui fornecidas apenas no âmbito desta pesquisa, assegurando também o anonimato, de forma que não há necessidade de sua identificação. Assim, conto com a veracidade das informações aqui prestadas e agradeço antecipadamente a sua colaboração.

Atenciosamente,
Prof. Álvaro Fernandes Serafim Filho.

Após a realização da atividade, solicito que responda com bastante atenção e cuidado as seguintes questões:

1. Você considera que esta atividade, realizada em grupo e com auxílio do computador, o ajudou a construir o conceito físico de velocidade instantânea?

(   ) Sim   (   ) Não

Que aspectos na realização dessa atividade você considera que mais contribuíram para sua aprendizagem? Explique.

____

____

____

____

____

2. Ao longo da realização desta atividade, foi-lhe sugerido o uso do computador com o *software Winplot*. Como foi utilizado este recurso tecnológico?

( ) Para toda a resolução da atividade.
( ) Apenas para visualização do gráfico.
( ) Apenas para verificação da solução.
( ) Outra. Qual?

____

Explique a(s) opção(ões) escolhida(s).

____
____
____
____
____
____
____

3. Você encontrou dificuldades na realização desta atividade?

( ) Sim ( ) Não

Se marcou "sim", que dificuldades encontrou?

( ) Na compreensão da tarefa
( ) Na compreensão do conceito de velocidade instantânea
( ) No uso do *software*
( ) Na realização dos cálculos
( ) Outra. Qual(ais)?

____

Explique a(s) opção(ões) escolhida(s).

____
____
____
____
____
____
____

Muito obrigado por sua colaboração!

Anexo 14: Questionário final de investigação

QUESTIONÁRIO FINAL DE INVESTIGAÇÃO

Caro estudante

Este questionário tem como objetivo principal avaliar o grau de satisfação e aprendizado do Cálculo Diferencial e Integral a partir do uso de atividades exploratórias investigativas em grupo com o auxílio do computador. As informações que serão prestadas neste questionário não visam estabelecer qualquer tipo de nota ou conceito dos respondentes, servem, porém, para melhor compreender o comportamento e evolução dos discentes a partir dessa estratégia didática para o aprendizado do Cálculo Diferencial e Integral.

Enquanto docente e responsável por essa investigação, comprometo utilizar as informações aqui fornecidas apenas no âmbito desta pesquisa, assegurando também o anonimato, de forma que não há necessidade de sua identificação. Assim, conto com a veracidade das informações aqui prestadas e agradeço antecipadamente a sua colaboração.

Atenciosamente,
Prof. Álvaro Fernandes Serafim Filho.

Solicito que responda com bastante atenção e cuidado as seguintes questões:

1. Como você classificou o seu grau de motivação na execução das diversas tarefas exploratórias e investigativas com o auxílio do computador?

(   ) Pouco motivado.
(   ) Indiferente.
(   ) Muito motivado.
(   ) Outra. Qual? ____

Explique a sua resposta:
____
____
____
____

2. O que você achou de resolver as atividades exploratórias e investigativas em grupo?

(   ) Preferia ter resolvido(a) sozinho(a).
(   ) Não foi estimulante resolvê-la em grupo.
(   ) Foi “muito interessante” resolvê-la em grupo.
(   ) Outro(s) motivo(s). Qual(ais)? ____

Comente a sua resposta:

3. Você usou o computador para auxiliar os seus estudos de Cálculo fora da sala de aula?

(   ) Sim.   (   ) Não.

Com que frequência você usou e de que forma? Explique.

4. Você achou que o uso do computador ampliou a sua compreensão acerca dos conteúdos da disciplina de Cálculo?

(   ) Sim.   (   ) Não.

Explique a sua resposta:

5. Ao longo da experiência realizada com as atividades exploratórias e investigativas, provavelmente você encontrou algumas dificuldades. Explique como você enfrentou e superou essas dificuldades.

6. Comente acerca dessa experiência e do seu aprendizado geral a partir das atividades exploratórias e investigativas com auxílio do computador.

Muito obrigado por sua colaboração!

Anexo 15: Termo de participação

TERMO DE PARTICIPAÇÃO

Caro estudante

Ao longo de todo o semestre letivo de 2014.2 estarei aplicando uma série de tarefas exploratórias e investigativas no cotidiano das aulas de Cálculo Diferencial e Integral I. Estas atividades compõem parte do estudo que estou a desenvolver no âmbito da minha pesquisa de doutoramento. O objetivo da pesquisa é examinar como estas tarefas – que terão o apoio dos recursos tecnológicos – impactam a aprendizagem dos alunos na disciplina. Almejo compreender como os alunos evoluem em face dessa forma diferenciada de explorar os conteúdos da matéria. Esta é uma alternativa didática que deve se associar ao formato tradicional do ensino expositivo e privilegiar abordagens mais reflexivas e laborativas de diversos tópicos programáticos do Cálculo. Neste sentido, venho solicitar a sua participação e colaboração neste estudo. Todas as informações prestadas e coletadas visam apenas fundamentar a experiência e não servirão para estabelecer qualquer tipo de nota ou conceito dos participantes. Enquanto docente e responsável por essa investigação, comprometo utilizar os dados recolhidos apenas no âmbito da pesquisa, assegurando também o anonimato e a confidencialidade das informações. Fico à sua disposição para prestar outros esclarecimentos que julgue necessários. Conto com a sua participação e agradeço antecipadamente a sua colaboração.

Atenciosamente,
Prof. Álvaro Fernandes Serafim Filho.

***

Eu, ____, aceito participar das experiências exploratórias e investigativas que serão realizadas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I e que comporão a pesquisa de doutoramento do professor Álvaro Fernandes Serafim Filho.

Amargosa, _____ de ________________ de 2014.