Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria do Rosário da Silva Freitas

As TIC no estudo das Funções: uma experiência com uma turma de 9º ano

outubro de 2016

UMinho | 2016

Maria do Rosário da Silva Freitas

As TIC no estudo das Funções:
uma experiência com uma turma de 9º ano

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria do Rosário da Silva Freitas

As TIC no estudo das Funções:
uma experiência com uma turma de 9º ano

Relatório de Atividade Profissional
Mestrado em Ensino de Matemática no
3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho efectuado sob a orientação da
Doutora Maria Helena Silva de Sousa Martinho

outubro de 2016

AGRADECIMENTOS

Antes de mais gostaria de apresentar os meus sinceros agradecimentos a quem mais diretamente contribuiu para a realização deste trabalho e que sempre me encorajaram.

Aos alunos que participaram no estudo, pela sua colaboração e porque sem eles este estudo não seria possível.

À direção do Agrupamento de Escolas do Vale de S. Torcato, por ter permitido a implementação deste estudo.

Ao professor Nuno Dinis, por ter disponibilizado as instalações físicas necessárias para a realização de algumas das tarefas implementadas, e por ter instalado o software GeoGebra nos computadores da sala em questão.

Ao Sr. Lima, pela disponibilidade em ajudar a superar as dificuldades surgidas.

À Doutora Maria Helena Silva de Sousa Martinho, pela disponibilidade com que acompanhou este trabalho, e pelas sugestões, tranquilidade, confiança e incentivo que me foi dando ao longo de todo o trabalho.

À minha família pelo encorajamento e animo prestado ao longo deste trabalho, em particular ao meu marido, Nélson Costa, pelo carinho e apoio incondicional, e ao meu filho, Afonso Costa, pela compreensão das minhas limitações de tempo para lhe fazer companhia nas horas de diversão e brincadeira.

A todos, os meus sinceros agradecimentos.

RESUMO

Atualmente, as escolas estão equipadas com materiais tecnológicos que permitem diversificar as estratégias e metodologias de ensino. No caso particular do estudo das Funções, várias investigações apontam para o facto da visualização simultânea de múltiplas representações, promovida pela utilização das novas tecnologias, permitir ao aluno observar relações e fazer conexões, o que possibilita uma aprendizagem mais significativa e efetiva do conceito em estudo. Com este trabalho procurou-se compreender o papel das TIC no estudo das Funções, e até que ponto é que estes recursos são explorados pelo seu caráter informativo e de aprendizagem. De forma a operacionalizar este estudo, formularam-se as seguintes questões de investigação: (1) Como é que os alunos reagem ao uso das TIC na sala de aula; (2) Até que ponto a utilização das TIC promove, nos alunos, uma evolução na perceção das diferentes representações de uma função e consequentemente, a compreensão do conceito de função. Desenvolvida numa turma de 9.º ano de escolaridade, nesta intervenção foram propostas cinco tarefas investigativas, com recurso ao computado, ao ambiente de geometria dinâmica (GeoGebra), à calculadora gráfica e ao sensor de movimento. Os dados foram recolhidos através das produções dos alunos nas tarefas, em duas fichas de trabalho, em duas questões de aula, numa ficha de avaliação diagnóstica e num questionário implementado no início deste estudo, bem como numa ficha de avaliação escrita e num questionário final. Além disso, foram analisadas as gravações vídeo das aulas e as anotações de campo. Observou-se que os alunos reagem com entusiasmo à utilização das TIC na sala de aula. No entanto, apesar de no dia-a-dia estarem rodeados e familiarizados com recursos tecnológicos, quando estes são aplicados na sala de aula ao serviço do processo ensino e aprendizagem, deparamo-nos com dificuldades da sua utilização. Estas dificuldades são ultrapassadas pela facilidade com que estes "nativos digitais" têm em acostumar-se aos ambientes tecnológicos. A visualização simultânea de múltiplas representações, promovida pelo GeoGebra, permitiu estabelecer e testar conjeturas, o que promoveu o desenvolvimento de conexões entre a representação gráfica e algébrica da função. Consequentemente, os alunos conceituaram uma função independentemente do seu formato, privilegiando as informações obtidas pela observação direta. A utilização da calculadora gráfica e do sensor de movimento possibilitou a modelação de situações em contexto de sala de aula, o que fomentou o entusiasmo, fascínio e o interesse pela disciplina, uma vez que permitiu a constatação da aplicabilidade da Matemática.

PALAVRAS-CHAVE

Funções, Representações, TIC, Calculadora gráfica, GeoGebra.

ABSTRACT

Currently, schools are equipped with technological materials allowing diversification of teaching strategies and methodologies. In the particular case of the study of functions, various investigations point to the fact that the simultaneous display of multiple representations, promoted by the use of technologies, allows the student to observe relationships and make new connections, which enables a more meaningful learning and effective study of the concept. With this work we tried to understand the role of ICT in the study of functions, and the extent to which these resources are exploited for its informative character and learning enablers. In order to operationalize this study, we formulated the following research questions: (1) How did the students react to the use of ICT in the classroom; (2) To what extent the use of ICT promotes, in students, an evolution in the perception of the different representations of a function and therefore the understanding of the concept of function. Developed in a 9th grade class, this intervention had five proposals of investigative tasks, namely by using the computed, the environment of dynamic geometry (GeoGebra), the graphing calculator and the motion sensor. Data collected through the productions of students in the following tasks: two question sheets, two class queries, a diagnostic evaluation form and a questionnaire implemented at the beginning of this study, as well as a writing evaluation form and a final questionnaire. In addition, we analysed the video recordings of the lessons and field notes. It was observed that the students respond with enthusiasm to the use of ICT in the classroom. However, being surrounded and familiar with technological resources when they are applied in the classroom, in the teaching and learning process, we were faced with difficulties of its use. These difficulties were overcome by the ease that these "digital natives" have to use the technological environments. The simultaneous display of multiple representations, promoted by GeoGebra, allowed establishing and testing conjectures, which promoted the development of connections between the graphic and algebraic representation of the function. Consequently, students conceptualized a function regardless of its format, focusing on information obtained by direct observation. The use of graphic calculators and motion sensors enabled modelling of situations in the context of the classroom, which nurtured the enthusiasm, fascination and interest in the discipline, since it allowed the confirmation of the applicability of mathematics.

KEYWORDS

Functions, Representation, ICT, Graphic calculator; GeoGebra.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

Lista de Abreviaturas, Siglas e Acrónimos

AEVST	Agrupamento de Escolas do Vale de S. Torcato.
CBL	Calculator-Based Laboratory.
CBR	Calculator-Based Ranger.
GAAF	Gabinete de Apoio a Alunos e à Família.
MINERVA	Meios Informáticos No Ensino: Racionalização, Valorização, Atualização.
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics.
NEE	Necessidades Educativas Especiais.
PERA	Programa Escolar de Reforço Alimentar.
PTE	Plano Tecnológico da Educação.
QI	Quadro Interativo
SIC	Sociedade da Informação e da Comunicação.
TEIP	Território Educativo de Intervenção Prioritária.
TIC	Tecnologias da Informação e da Comunicação.
VALE	Ver-Agir-Ler-Experimentar.

1. Introdução

Este capítulo encontra-se dividido em três subcapítulos. No primeiro subcapítulo apresenta-se o tema em estudo e as questões de investigação. No segundo, discute-se a pertinência deste estudo segundo as atuais orientações para o ensino da matemática, e no terceiro, faz-se uma breve descrição da estrutura deste relatório.

1.1 Tema e questões de investigação do estudo

As tecnologias de informação e comunicação (TIC) no ensino das Funções, é o tema sobre o qual incide este estudo, nomeadamente, no ensino do tópico das Funções do 9.º ano de escolaridade. A escolha deste tema deve-se a uma razão de conveniência, uma vez que me foi atribuída uma turma composta por alunos com bastantes dificuldades, com reduzidas espectativas e interesses divergentes ao estudo e à escola em geral. Possuindo várias retenções ao longo do seu percurso escolar, o objetivo destes alunos era o de ingressar num curso vocacional, contudo tal não foi possível de concretizar. Deste modo, foi minha preocupação primária, encontrar um recurso que motivasse estes alunos e potenciasse a sua aprendizagem, seguindo as orientações dos Princípios e Normas para a Matemática Escolar:

> ensinar bem Matemática envolve a criação, o enriquecimento, a manutenção e a adaptação do ensino de modo a atingir os objetivos matemáticos, a captar e a manter o interesse dos alunos e a envolve-los na construção ativa do conhecimento matemático. (NCTM, 2008, p. 19)

Uma vez que a atual sociedade é regida pelas tecnologias de informação e comunicação, e estando os nossos alunos rodeados e fascinados por estas tecnologias, a realização de tarefas investigativas com recurso às novas tecnologias, nomeadamente, computadores, software de geometria dinâmica, calculadora gráfica e sensores, pareceu-me uma boa alternativa para cativar os alunos, proporcionando-lhes um papel mais ativo na construção do seu conhecimento. A este respeito, os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM) referem que: "a tecnologia poderá ser bastante apelativa para aqueles alunos que não se interessam por outro tipo de abordagem à matemática, que não as tecnológicas" (NCTM, 2008, p. 14), e "As possibilidades de envolver os alunos em desafios matemáticos aumentam de forma acentuada com a utilização de tecnologias" (NCTM, 2008, p. 27).

Mas será que os alunos efetivamente dominam estas tecnologias quando adaptadas a ambientes de ensino e aprendizagem? Será que estes novos recursos não serão meios de distração na sala de aula?

O tópico das Funções envolve, na minha perspetiva, conteúdos dinâmicos, apelativos e que facilmente se relacionam com o mundo real, revelando assim a utilidade e aplicação da Matemática, o que por sua vez poderá fomentar nos alunos o gosto pela disciplina. Apesar do estudo das Funções estar presente em todo o percurso escolar dos alunos, na minha experiência enquanto professora, constato que os alunos no 9.º ano de escolaridade continuam a manifestar bastantes dificuldades no estudo deste tópico. Vários estudos apontam para a diversidade de interpretações e representações do conceito de função, como origem destas dificuldades. Será que a utilização de recursos tecnológicos na sala de aula pode ajudar a mitigar tais dificuldades?

Assim, face ao exposto, o presente trabalho pretende averiguar o modo como os alunos interagem com as TIC na sala de aula, nomeadamente, no estudo das Funções. Quais as dificuldades registadas e as aprendizagens que efetivamente concretizam e encorparam? De modo a operacionalizar este estudo, formularam-se as seguintes questões de investigação:

1- Como é que os alunos reagem ao uso das TIC na sala de aula?
2- Até que ponto a utilização das TIC promove nos alunos uma evolução na perceção das diferentes representações de uma função e consequentemente, a compreensão do conceito de função?

1.2 Pertinência do estudo

Nos últimos anos o programa curricular de Matemática do ensino básico e secundário, tem vindo a sofrer constantes reformulações. No ensino básico, em particular, a extensão dos programas tem vindo a aumentar, o que aliado à exigência das demonstrações e à utilização de conceitos mais abstratos e pouco adequados à faixa etária dos alunos, promove um distanciamento entre estes alunos e a disciplina de Matemática. Assim, torna-se cada vez mais necessário criar momentos na sala de aula, que impliquem um maior envolvimento dos alunos no processo de ensino e aprendizagem, e que despertem o interesse dos alunos. A par de vários estudos, os Princípios e Normas para a Matemática Escolar apontam para o recurso às ferramentas e ambientes tecnológicos: "A tecnologia é essencial no ensino aprendizagem e o fazer matemática" (NCTM, 2008, p. 26), "A tecnologia pode ajudar os alunos a aprender matemática" (NCTM, 2008, p. 27), "Por meio das ferramentas tecnológicas, os alunos poderão raciocinar sobre temas mais abrangentes, como a mudança de parâmetros, e poderão modelar e resolver problemas que, até então, lhes eram inacessíveis" (NCTM, 2008, p. 28).

Numa sociedade dominada pelas tecnologias da informação e da comunicação, as crianças de hoje interagem de uma forma bastante empenhada e intuitiva com o manuseamento de ferramentas e ambientes tecnológicos. Estas crianças não se prendem com tarefas morosas ou rotineiras, preferindo resultados mais imediatos, e imagens e gráficos, em detrimento dos textos. Neste sentido, também as tecnologias desempenham um importante papel, uma vez que simplificam a parte rotineira do trabalho e permitem uma aprendizagem mais ativa e dinâmica através da exploração de uma maior variedade de situações. O imediato feedback que a tecnologia pode oferecer na exploração de diferentes situações, pode proporcionar aos alunos um papel mais ativo, interventivo e autónomo na construção do seu conhecimento.

No caso particular do estudo das Funções, as ferramentas e ambientes tecnológicos revestem-se de especial interesse, uma vez que poderão "proporcionar aos alunos oportunidades de terem mais e diferentes experiências com a utilização de múltiplas representações" (NCTM, 2008, p. 78). Efetivamente, diversos estudos revelam que as dificuldades sentidas pelos alunos relativamente ao conceito de função, estão associadas à diversidade de representações deste conceito e à mobilidade entre estas diferentes representações. O recurso a programas de construção de gráficos, seja no computador ou na calculadora gráfica, permitem a exploração e comparação de caraterísticas de diferentes tipos de funções, o que por sua vez permite aos alunos "testar algumas conjeturas mais facilmente do que com os métodos "papel" e "lápis"" (NCTM, 2008, p. 268). Manipulando um programa de geometria dinâmica que relacione a expressão algébrica de uma função com o respetivo gráfico, os alunos poderão alterar parâmetros com o simples arrastar de um ponto e observar, de forma imediata, as alterações produzidas nestes dois tipos de representação de uma mesma função. Este feedback visual "realça os vários significados de equivalência" (Chazan & Yerushalmy, 2003, p. 132) e proporciona aos alunos um papel mais ativo e dinâmico no seu processo de aprendizagem, que por sua vez é mais "profunda e duradoura" (NCTM, 2008, p. 71).

O estudo das Funções reveste-se de especial interesse, no sentido em que permitem estudar, descrever e prever fenómenos naturais, possibilitado a modelação de situações reais e a compreensão da informação constante em gráficos e notícias da imprensa, em geral, o que por sua vez destaca a aplicação e interesse do estudo da Matemática. Deste modo torna-se necessário proporcionar aos alunos um ambiente de ensino e aprendizagem que lhes permita desenvolver o pensamento funcional, aprender a interpretar as diferentes representações de uma função, e realizar uma correta articulação entre estas representações.

1.3 Estrutura do relatório

O presente relatório encontra-se dividida em cinco capítulos. No primeiro capítulo, *Introdução*, apresenta-se o tema em estudo, questões de investigação e pertinência do estudo segundo as atuais orientações para o ensino da matemática.

O segundo capítulo, *Enquadramento teórico*, dividido em quatro subcapítulos, inicia-se com uma breve referência à *Evolução do conceito de função*, ao longo dos tempos. No segundo subcapítulo, *Funções no currículo do Ensino Básico e a importância do seu estudo*, faz-se uma análise da evolução do estudo das funções ao longo do currículo do Ensino Básico, segundo os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008) e os Programas e Metas Curriculares para o Ensino Básico (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2012). No terceiro subcapítulo, *Representações e dificuldades dos alunos na aprendizagem das funções*, faz-se uma descrição dos diferentes modos de representar uma função, bem como uma análise das principais dificuldades dos alunos, manifestadas no âmbito do estudo das Funções, segundo vários estudos. No quarto e último subcapítulo, *Importância do uso das tecnologias no ensino e aprendizagem das funções*, aborda-se as vantagens da utilização de diferentes recursos tecnológicos na sala de aula, nomeadamente aquando do estudo das Funções, segundo os resultados obtidos em diferentes estudos.

O terceiro capítulo, *Enquadramento contextual*, divide-se em dois subcapítulos. No primeiro subcapítulo, *Contexto de intervenção*, apresenta-se uma breve caraterização da escola e turma onde decorreu o presente estudo. No segundo subcapítulo, *Plano geral de intervenção*, descreve-se as metodologias de ensino aprendizagem implementadas durante a fase de intervenção, bem como as estratégias de intervenção e de avaliação desta ação.

O quarto capítulo, *Intervenção de conhecimentos,* apresenta-se dividido em três subcapítulos. No primeiro subcapítulo, *Intervenção pedagógica*, apresenta-se a planificação de toda a intervenção pedagógica, bem como a análise das tarefas resolvidas pelos alunos. No segundo subcapítulo, *Avaliação da intervenção*, apresenta-se a análise dos instrumentos de avaliação utilizados durante a intervenção. No terceiro subcapítulo, *Perceção dos alunos relativamente às estratégias de ensino e aprendizagem utilizadas*, analisam-se as opiniões dos alunos relativamente às tarefas investigativas aplicadas, bem como em relação aos recursos tecnológicos utilizados.

No quinto e último capítulo, *Conclusões, limitações e recomendações*, apresentam-se e examinam-se as principais conclusões resultantes desta intervenção, com vista a responder às questões de investigação formuladas. Segue-se uma reflexão sobre as limitações do presente estudo, bem como algumas recomendações para futuros estudos.

2. Enquadramento teórico

Neste capítulo, dividido em quatro subcapítulos, apresenta-se a fundamentação teórica para o desenvolvimento do presente estudo, com base na literatura existente. No primeiro subcapítulo faz-se uma breve referência à evolução do conceito de função ao longo dos tempos, seguindo-se uma análise da presença e importância do estudo das funções no currículo do Ensino Básico. Na terceira parte deste capítulo, apresenta-se a caraterização das diferentes formas de representar uma função, e as dificuldades geradas nos alunos pelo modo como estes identificam e interpretam as referidas representações. A última parte do capítulo, refere-se à importância do uso da tecnologia no ensino e aprendizagem do tópico das Funções.

2.1 Evolução do conceito de função

O conceito de função, que segundo Ponte (1992), é um dos mais importantes da Matemática é atualmente definido como:

> dados dois conjuntos *A* e *B*, dá-se o nome de "função f (ou aplicação) de *A* em *B*", quando a cada elemento x de *A* (objeto) se associa um elemento único de *B* (imagem) representado por $f(x)$. Uma função f de *A* em *B* designa-se por "$f: A \to B$", onde *A* é o domínio da função e *B* é o conjunto de chegada. (Bivar et al., 2012, p. 54)

Este conceito tem uma longa história. Até à Idade Média era bastante vago, apesar de estar presente já na antiguidade, desde a simples contagem (que implica uma correspondência entre um conjunto de objetos dados e uma sequência de números de contagem), às tabelas babilónicas dos recíprocos, dos quadrados, das raízes quadradas, dos cubos e das raízes cúbicas (Ponte, 1992).

Foi Nicolau Oresme (1323 - 1382) quem primeiro apresentou uma representação gráfica de uma quantidade variável, usando um gráfico para representar o tempo numa direção e na outra a velocidade de um móvel movendo-se com aceleração constante (Boyer, 1968). Apesar de designar as coordenadas por longitude e latitude, em vez de abcissa e ordenada, pode-se considerar que o seu sistema é o "precursor da representação gráfica de funções" (Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes, & Nápoles, 1997, p. 11).

Apesar das noções gerais de variável independente, dependente e função estarem presentes na teoria de Oresme, é Galileu Galilei (1564 - 1642) e Johann Kepler (1571 - 1630) quem lhes dá precisão matemática, nos seus trabalhos sobre os movimentos dos planetas e a queda dos graves, respetivamente (Boyer, 1968). A noção de função surge assim como um instrumento matemático "próprio para o estudo das leis" da natureza, como defendeu Bento Jesus Caraça (Caraça, 1984, p. 129).

Para o desenvolvimento do conceito de função contribuiu também o francês François Viète (1540 - 1603), que fez a primeira distinção em álgebra, entre o conceito de parâmetro e de incógnita, com a introdução da convenção de usar a vogal para representar quantidades, que em álgebra se assume serem desconhecidas (variáveis), e consoantes para representar medidas ou números, que em álgebra se assume serem conhecidos (parâmetros) (Boyer, 1968).

René Descartes (1596 - 1650) interessou-se bastante pela álgebra simbólica, a par da interpretação geométrica da álgebra. O uso de letras do início do alfabeto para representar parâmetros, e as do fim para representar incógnitas, assim como a adaptação da notação exponencial nas letras, conduziram a notação algébrica de Descarte para a que hoje usamos. Contudo, enquanto que atualmente se considera que os parâmetros e as incógnitas representam números, Descartes pensava neles como segmentos de reta. Os trabalhos de Descartes e de Pierre Fermat (1601 - 1665) no estudo das curvas, contribuíram muito para a evolução do conceito de função, uma vez que introduziram o método analítico de definir uma função (Boyer, 1968).

Outra contribuição importante para o conceito de função foi dada por Isaac Newton (1642 – 1727) pela a sua habilidade para expressar funções em termos de séries infinitas. Ele usou "fluentes" para designar variáveis independentes, "relata quantias" para designar uma variável dependente, e "genita" para designar uma quantia obtida a partir de outras, através das quatro operações aritméticas elementares. É também este físico, matemático quem apresentou a primeira tentativa de definir o limite de uma função (Boyer, 1968).

Nos seus estudos de curvas, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) em 1673, usou pela primeira vez o termo "função", para designar a dependência de uma curva de quantidades geométricas, como as subtangentes e subnormais. Mais tarde, entre 1694 e 1698, Leibniz adotou este termo, em correspondência trocada com o seu discípulo suíço, Jean Bernoulli (1667 - 1748), para designar quantidades dependentes de alguma variável por meio de uma expressão analítica. Contudo, o termo "função" apenas foi disseminado pela comunidade matemática em 1718, após a publicação de um artigo por Jean Bernoulli. Este, apresenta a primeira definição explicita de função: "Chamamos aqui função de uma magnitude variável à quantidade que é composta de qualquer modo possível desta variável e de constante" (Boyer, 1968, p. 462). Esta definição foi retificada por um aluno de Bernoulli, Leonhard Euler (1707 - 1783), que substituiu o termo "quantidade" por "expressão analítica", apresentando na sua obra de Introductio in Analysin Infinitorium, publicada em 1748, a definição de função de uma variável quantitativa como "qualquer expressão analítica que seja constituída de quantidade variável e de números ou quantidades constantes" (Boyer, 1968, p. 485). Euler, o matemático que mais contribuiu para a construção da notação da Matemática moderna, foi o primeiro a introduzir a expressão $f(x)$ para designar o valor da função em x (Boyer, 1968).

A identificação da noção de função como uma expressão analítica, apesar de limitativa e incoerente, vigorou até ao fim do Século XVIII e início do Século XIX. Por esta altura, Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830), nos seus trabalhos de condução de calor nos objetos materiais, considerou a temperatura de um corpo como uma função de duas variáveis (tempo e espaço), e conjeturou que qualquer função poderia ser decomposta em séries trigonométricas, num intervalo apropriado, não dando provas matemáticas desta afirmação. Só em 1837, é que Lejeune Dirichlet (1805 - 1859), conseguiu formular as condições suficientes para que uma função pudesse ser representada por uma série de Fourier (Boyer, 1968). Para isso ele precisou separar o conceito de função da sua expressão analítica, e definiu-a como uma correspondência unívoca entre os valores de duas variáveis: "y é função de variável x, definido no intervalo $a < x < b$, se para cada valor da variàvel x neste intervalo existe um correspondente valor definido pela variável y. Além disso, é irrelevante em que situação esta correspondência é estabelecida" (Burton, 2010, p. 614).

No Século XX, a noção de função foi estendida de modo a incluir qualquer correspondência unívoca entre quaisquer conjuntos, numéricos ou não. Nos atuais currículos escolares, o conceito de função é essencialmente o dado por Dirichlet, e o estudo das funções visa a sua compreensão enquanto relação entre variáveis e como correspondência unívoca entre dois conjuntos (Ponte, 1992, 1990; Ponte, Branco, & Matos, 2009).

2.2 Funções no currículo do Ensino Básico e a importância do seu estudo

Segundo Bento de Jesus Caraça (1984, p. 120), "uma das tarefas mais importantes no trabalho de investigação da Natureza é a procura de regularidades dos fenómenos naturais". Ora, tendo o conceito de função surgido como um instrumento necessário para o estudo dos fenómenos que ocorrem na natureza e de relações entre quantidades que variam juntas, parece-nos evidente a importância do estudo das funções. Mas qual a importância do seu estudo nos currículos escolares do Ensino Básico?

Os Programas e Metas Curriculares para o Ensino Básico (Bivar et al., 2012), destacam três finalidades para o ensino da Matemática: 1) A estruturação do pensamento; 2) A análise do mundo natural; 3) A interpretação da sociedade. Nesta perspetiva, o estudo e ensino das funções é de facto relevante, pois enquanto estudo das relações entre quantidades que variam, da procura de regularidades em sequências (que são funções de variável natural) e consequente estabelecimento de generalizações, promove o desenvolvimento do raciocínio hipotético e dedutivo. Segundo Ponte, Branco e Matos (2009), as tarefas que envolvem generalizações promovem o desenvolvimento da capacidade de abstração, da capacidade de comunicação e o raciocínio matemático. Por outro lado, o trabalho com as múltiplas representações de uma função permite a localização de falácias e o estabelecimento de conexões entre as aprendizagens. Deste modo, o estudo das funções contribui para a concretização da primeira finalidade para o ensino da Matemática – A estruturação do pensamento. Como já foi referido, as funções são um instrumento essencial na descrição e interpretação das leis que regulam os mais variados fenómenos e no estabelecimento de previsões, pelo que a sua importância e aplicação não se restringe apenas à Matemática, mas também a outras disciplinas, contemplando assim a segunda finalidade para o ensino da Matemática – A análise do mundo natural. Relativamente à terceira finalidade para o ensino da Matemática, cada vez mais as notícias e a imprensa em geral apresentam gráficos e ideias envolvendo o conceito de variável e de função, pelo que é necessário proporcionar aos alunos a compreensão destes conceitos, estando assim a contribuir para uma melhor interpretação da sociedade.

Função é um dos conceitos fundamentais da Álgebra curricular. Chazan e Yerushalmy (2003) referem que uma abordagem à Álgebra baseada nas funções é potencial para a compreensão do significado de equivalentes formas de expressões, equações, inequações e relações, uma vez que promovem a interpretação de letras como variáveis e não apenas como incógnitas; das expressões como regras que traduzem funções; do sistema de coordenadas Cartesiano como um espaço de visualização dos resultados obtidos por procedimentos de cálculo, em vez de simples pontos de um conjunto solução; e do sinal de igual como a identificação da designação de um determinado processo computacional ($f(x) = \cdots$).

Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2008), defendem que noções como proporcionalidade, função e taxa de variação, são fundamentais e "deverão ocupar um lugar proeminente no currículo de matemática, uma vez que permitem que os alunos compreendam outras noções e as relacionem através de diferentes áreas da matemática" (NCTM, 2008, p. 16). A norma relativa à Álgebra "dá enfase às relações entre quantidades, incluindo funções; às formas de representar relações matemáticas; e à análise da variação" (NCTM, 2008, p. 39). A mesma norma defende que os programas de ensino desde o pré-escolar até ao 12.º ano, devem capacitar todos os alunos para: 1) Compreender padrões, relações e funções; 2) Representar e analisar situações e estruturas matemáticas utilizando símbolos algébricos; 3) Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; 4) Analisar a variação em diversos contextos. Também Blanton e Kaput (2011) defendem que desde cedo as crianças são capazes de desenvolver um pensamento funcional, e que se este pensamento por exercitado no início da escolaridade vai afetar positivamente o sucesso destas crianças em todo o seu percurso académico.

Apesar do estudo das Funções não estar referido explicitamente nos currículos escolares antes do 3.º ciclo, o pensamento funcional está presente mesmo antes do seu ensino formal. As crianças aprendem a reconhecer padrões em cantigas e imagens do seu meio ambiente. Este reconhecimento, a comparação, a análise desses padrões e o consequente estabelecimento de generalizações, contribuem para o desenvolvimento intelectual destas crianças e constituem as primeiras evidências do pensamento funcional (NCTM, 2008).

Nos Programas e Metas Curriculares para o Ensino Básico (Bivar et al., 2012), pode-se encontrar evidências do pensamento funcional em algumas das metas estabelecidas para o 1.º e 2.º ciclos. Por exemplo, no 1.º ano de escolaridade, este pensamento está presente nomeadamente, na correspondência entre os numerais do sistema decimal e os seus respetivos nomes, ou na associação de diferentes contagens ao mesmo número natural. No 2.º ano as "Sequências e Regularidades", são abordadas como tema de estudo, focando a resolução de problemas envolvendo a determinação de termos de uma sequência, dada a respetiva lei de formação, e a resolução de problemas envolvendo a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida. Por exemplo, dada a sequência 2, 4, 6, ... determinar que a forma de obter o número seguinte é somar 2. Estamos aqui, perante o "início do pensamento recursivo" (NCTM, 2008, p. 40). Este trabalho com sequências pode constituir uma base para a compreensão do conceito de função, como refere as NCTM (2008). No 3.º ano de escolaridade, uma das metas curriculares definidas é a resolução de problemas envolvendo a análise de dados representados em tabelas, diagramas ou gráficos, o que por sua vez promove a abordagem à ideia de "variação", cuja compreensão é essencial para a compreensão das funções.

No 5.º ano, são introduzidas as expressões algébricas. Neste nível de aprendizagem, a noção e utilidade de uma variável começam "a despontar e a desenvolver-se de forma mais completa" (NCTM, 2008, p. 186). É também neste ano letivo que se inicia a construção de

> gráficos cartesianos, referente a dois conjuntos de números tais que a todo o elemento do primeiro está associado um único elemento do segundo, representado nesse plano os pontos cujas abcissas são iguais aos valores do primeiro conjunto, e as ordenadas iguais aos valores associados às abcissas no segundo conjunto. (Bivar et al., 2012, p. 36)

No 6.º ano de escolaridade retoma-se o estudo das sequências e regularidades através: da resolução de problemas envolvendo a determinação de termos de uma sequência definida por uma expressão geradora, ou dada por uma lei de formação, que permite obter cada termo a partir dos anteriores, conhecidos os primeiros termos; da determinação de expressões geradoras de sequências definidas por uma lei de formação que na determinação de um dado elemento recorra aos elementos anteriores; e da resolução de problemas envolvendo a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida, e formulá-la em linguagem natural e simbólica. É ainda neste ano de escolaridade que se inicia o estudo da noção de proporcionalidade direta entre grandezas, não se fazendo qualquer referência à noção de função.

Finalmente, é no 7.º ano que o tema das Funções é apresentado explicitamente aos alunos. Neste ano de escolaridade os alunos devem saber definir e identificar funções; operar com funções; identificar funções lineares, afim e constantes, reduzindo as expressões dadas para essas funções à respetiva forma canónica; definir funções de proporcionalidade direta e definir sequências e sucessões. No 8.º ano de escolaridade, o tema das Funções volta a fazer parte do currículo de forma explícita, abordando-se os gráficos das funções afim. Aqui os alunos começam a manusear com os conceitos de declive e ordenada na origem, devendo reconhecer que duas retas não verticais são paralelas quando têm o mesmo declive, bem como determinar a expressão algébrica de uma função afim dados dois pontos do respetivo gráfico, ou resolver problemas envolvendo equações de retas em contextos diversos. No 9.º ano de escolaridade, o tema das Funções centra-se no estudo das funções de proporcionalidade inversa, e na interpretação gráfica de soluções de equações do segundo grau, enquanto conjunto das abcissas dos pontos de interseção do gráfico da função dada por $y = ax^2$ (parábola de eixo vertical e vértice na origem), com o gráfico da função afim dada pela expressão da forma $y = -bx - c$ (Bivar et al., 2012).

Em suma, apesar do estudo das funções ser apresentado formalmente aos alunos apenas no início do 3.º ciclo, o pensamento funcional está presente nos currículos escolares desde cedo, nomeadamente, na simples contagem em sequências, na observação e procura de regularidades, ou mesmo na análise das tabuadas em que a qualquer par de números corresponde um único número por intermédio de uma das quatro operações aritméticas elementares. O desenvolvimento deste pensamento funcional, incluindo o trabalho com a noção de variação, desde os primeiros anos de escolaridade, contribui para o desenvolvimento do raciocínio abstrato, bem como a estruturação do pensamento matemático, o que por sua vez constituiu uma base para a compreensão das noções relativas ao estudo das funções, e da álgebra, em geral. Deste modo, o estudo das funções torna-se relevante na medida em que proporciona aos alunos o domínio de instrumentos matemáticos e a compreensão de noções essenciais para o estudo, análise, interpretação e previsão de fenómenos, objeto de atenção de outras disciplinas, bem como para a compreensão das informações transmitidas pelos média, em geral. O estudo das funções estará, assim, a contribuir "para o exercício de uma cidadania plena, informada e responsável" (Bivar et al., 2012, p. 2).

2.3 Representações e dificuldades dos alunos na aprendizagem das funções.

Uma função pode ser representada por diferentes modos, nomeadamente: i) Verbalmente, através da linguagem normal; ii) Graficamente, por meio de diagramas sagitais e de gráficos cartesianos; iii) Tabularmente ou numericamente, que normalmente envolvem operações entre números que são dispostos na forma de tabela ou pares ordenados; iv) Algebricamente, utilizando expressões analíticas.

Cada uma destas formas de representação tem as suas vantagens e desvantagens. Por exemplo, a *representação verbal* permite dar significado às variáveis envolvidas. Friedlander e Tabach (2001) defendem que este tipo de representação permite fazer a conexão entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, e entre a Matemática e o quotidiano. Contudo qualquer linguagem pode gerar dificuldades inerentes às ambiguidades da própria língua. A *representação gráfica* é eficaz no sentido em que proporciona uma imagem que por sua vez favorece a observação direta de determinadas caraterísticas. No caso dos diagramas sagitais facilmente observamos a correspondência entre um elemento do domínio e um elemento do conjunto de chegada, sendo por isso muitas vezes utilizado para exemplificar quando uma correspondência é ou não função. Contudo este tipo de representação limita-se aos casos em que o domínio e contradomínio têm um número reduzido de elementos. A representação por meio de gráficos cartesianos permite a visualização de determinados comportamentos da função, que noutras representações não são percetíveis de forma tão imediata, contudo a precisão da leitura dos valores, objetos e imagens, pode depender da escala utilizada. A *representação tabular ou numérica*, especialmente importante na compreensão inicial de um problema, permite a imediata observação da imagem de determinado objeto, mas apenas se estiver representada na tabela. A propósito deste tipo de representação, Ponte (1990, p. 7) enaltece a importância de "construir tabelas, calcular valores numéricos, desenvolver um sentido quantitativo e adquirir sensibilidade para o que são aproximações aceitáveis e não aceitáveis", no ensino das funções. A *representação algébrica* fornece "simplicidade e rigor", como afirma Ponte (1990, p. 5), e é "concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos", como referem

Friedlander e Tabach (2001, p. 3). A expressão analítica de uma função, tal como afirmou Dirichlet em 1837 (Teixeira et al., 1997), é uma regra que associa os objetos às respetivas imagens. Contudo é necessário o recurso a cálculos para determinar essas imagens.

Para além desta diversidade de representações, o conceito de função contempla uma variedade de noções associadas, nomeadamente domínio, contradomínio, conjunto de chegada, objeto, imagem, variável dependente, variável independente e regras de correspondência. Além disso, este conceito possui diferentes conceções, por exemplo, como o estudo de relações entre variáveis, ou como a máquina que transforma um objeto numa imagem. Toda esta abrangência acaba por produzir nos alunos algumas dificuldades na compreensão do conceito de função como um todo (Andrade & Saraiva, 2012; Barreto, 2008; L. M. Silva & Andrade, 2010).

Vários estudos (Barreto, 2008; Bolota, 2011; Gagatsis, Elia, & Mousoulidis, 2006; Lima & Pontes, 2006; Machado, Silva, & Almeida, 2007; Oliveira, 1997; Pelicano, 2014; Ponte, 1990; Silva & Andrade, 2010) referem que as principais dificuldades manifestadas pelos alunos no estudo das funções localizam-se essencialmente: na compreensão do próprio conceito de função, confundindo-o com o de função injetiva; na compreensão da noção de variável; na identificação da variável dependente e independente; na manipulação de expressões analíticas; na procura de generalizações; na interpretação e representação gráfica e algébrica; na construção e interpretação de tabelas; na mobilização entre as diferentes representações, nomeadamente na correspondência direta entre as representações gráficas e as expressões algébricas, tendo necessidade de recorrer, como passo intermédio, à representação numérica.

Um outro obstáculo à compreensão do conceito de função pelos alunos, é a simbologia utilizada como referem outros autores (Andrade & Saraiva, 2012; Ponte et al., 2009), o que está de acordo com a ideia de dualidade do próprio conceito de função defendido por Sajka (2003), citado por Andrade e Saraiva (2012), uma vez que $f(x)$ representa simultaneamente quer o nome da função f, quer o seu valor. A interpretação do seu significado depende do contexto, o que pode gerar confusão nos alunos, e consequentemente levar a erros.

Nos seus estudos com alunos de 9.º ano de escolaridade, Bolota (2011), verificou que no pensamento destes predomina a representação algébrica, apesar destes discentes apresentaram dificuldades em atribuir-lhes significado. Também Zachariades, Christou e Papageorgiou (2001) referem que, nos seus estudos, os alunos identificam mais facilmente uma função na sua representação algébrica do que na representação gráfica. Semelhante conclusão foi obtida por Andrade e Saraiva (2009), que num estudo com alunos do secundário, utilizando tarefas de exploração e de investigação, verificaram que apear de se observar evoluções na compreensão das funções, os alunos continuaram a não utilizar primeiramente a representação gráfica como a associação a uma função. Os resultados obtidos por Lima e Pontes (2006) com alunos do 2.°ano do ensino médio, mostram que estes enfatizam, de igual modo, mais as representações algébricas do que os outros tipos de representação. Estes alunos conceituaram função mais pelo formato da sua representação do que pelo seu significado. Em suma, todos estes estudos sugerem que a ideia de função associada ao estudo das expressões algébricas, imposta na era Bernoulli-Euler, "continua a impregnar a linguagem atual", como defendia Ponte (1990, p. 4).

Gagatsis, Elia e Mousoulides (2006) mostram nos seus estudos, que as dificuldades que os alunos se deparam quando trabalham com diferentes modos de representação matemática deve-se ao "fenómeno da compartimentalização", em que o aluno realiza diferentes conceções do mesmo conceito quando este é apresentado por diferentes representações de forma autónoma, sem se estabelecer relações entre elas. Para estes autores, o trabalho dos alunos com funções também se restringe ao domínio da álgebra.

Diversos autores (Andrade & Saraiva, 2012; Barreto, 2008; Bolota, 2011; Domingos, 1994; Friedlander & Tabach, 2001; Lima & Pontes, 2006; Oliveira, 1997; Ponte, 1990, 1992; Ramos & Raposo, 2008; M. J. Saraiva, Teixeira, & Andrade, 2010; Silva & Andrade, 2010) defendem que a múltipla representação e a articulação entre as diferentes representações beneficiam a compreensão do conceito de função. A utilização das múltiplas representações promove nos alunos a capacidade de os interligar, conseguindo identificar a mesma função em diferentes representações. Assim, quanto maior for o conhecimento e compreensão que um aluno tem sobre as várias representações e correspondências entre elas, mais desenvolvida será a sua imagem mental do conceito de função. Matos e Serrazina (1996, p. 43) referem que "imagens mentais pobres do conceito de função são responsáveis por muitas das dificuldades dos alunos nos primeiros anos das universidades, habituados a trabalhar apenas com fórmulas".

Numa experiência com uma turma de 9.° ano e outra de 10.° ano, Ramos e Raposo (2008) verificaram que os alunos de ambas as turmas apresentaram dificuldades em passar da representação verbal para a representação numérica, e só conseguiram ultrapassar esta dificuldade quando estabeleceram relações entre as representações envolvidas. No mesmo estudo, surgiram dificuldades na escrita da expressão algébrica, que foi ultrapassada à medida que os alunos a verbalizaram. Neste sentido, os autores referem que as representações verbais e algébricas se complementam, e que foi essencial o trabalho em simultâneo com a representação gráfica e algébrica para que o significado atribuído às variáveis em estudo não fosse alterado e estivesse sempre presente.

Friedlander e Tabach (2001) referem que a habilidade para trabalhar com as diferentes representações permite eliminar as desvantagens de cada uma delas. O uso combinado das diferentes representações, diminui as lacunas de uma representação sobre a outra. A informação obtida pela combinação de múltiplas representações permite ao aluno observar relações e fazer conexões, o que possibilita que o processo de aprendizagem do conceito em estudo seja mais significativo e efetivo. A mesma ideia é defendida pelos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2008, p. 266): "os alunos poderão identificar as potencialidades e as limitações das diferentes formas de representação".

Assim, segundo os estudos já citados, grande parte das dificuldades manifestadas pelos alunos na compreensão do conceito de função, parecem estar bastante relacionadas com o modo como os alunos identificam e interpretam as suas diferentes representações. Por outro lado, a utilização de múltiplas representações permite que cada uma se complemente entre si, proporcionando ao aluno a visualização de relações e o estabelecimento de conexões contribuindo, deste modo, para uma aprendizagem concetual mais significativa: "Quando os alunos conseguem estabelecer conexões entre ideias matemáticas, a sua compreensão é ainda mais profunda e duradoura" (NCTM, 2008, p. 71).

2.4 Importância do uso das tecnologias no ensino e aprendizagem das funções

As Tecnologias de Informação e Comunicação são um conjunto de ferramentas que permitem manipular informação e promover a comunicação, incluindo hardware e software. Elas têm desempenhado um papel catalisador e relevante na nossa sociedade, de tal modo que a atual sociedade é denominada de Sociedade de Informação e Comunicação (SIC) (Pereira & Silva, 2009; Ricoy & Couto, 2012). Neste sentido, Jukes e Dosaj (2006) designam as crianças de hoje como "Nativos Digitais", uma vez que a maioria delas cresce rodeada pelas tecnologias digitais, sejam elas televisão, computadores, telemóveis, vídeo – jogos, tabletes, ou internet. Estes autores afirmam que pesquisas nas áreas da psicologia e neurociências, mostram que esta geração da "Mensagem Instantânea", adquire, interpreta, processa e usa a informação de maneira diferente relativamente às gerações anteriores. Os "nativos digitais" estão completamente confortáveis com o bombardeamento simultâneo de imagens, textos e sons, o que lhes permite adquirir mais informação em segundos do que adquiridos pela leitura de um livro.

Deste modo, as escolas terão de se tornar um lugar que permita aos alunos serem ativos na construção do seu próprio conhecimento. Os modelos pedagógicos baseados na transmissão de conteúdos e que apelam à memorização e à prática de procedimentos repetitivos, deverão ser substituídos por atividades que envolvam exploração dinâmicas, resolução de problemas, e interação com experiências da vida real. Para promover o desenvolvimento da compreensão, novas competências e capacidades, é essencial o uso das novas tecnologias, sejam elas o computador, a calculadora gráfica, a internet ou outros sistemas de multimédia (Jukes & Dosaj, 2006; NCTM, 2008; Pereira & Silva, 2009; Ponte, 2014; Torres, Coutinho, & Fernandes, 2008).

Em Portugal, a utilização das TIC no ensino começaram a ser foco de atenção com o Projeto MINERVA (Meios Informáticos no Ensino: Racionalização, Valorização, Atualização), que de 1985 a 1994 tentou promover o equipamento informático das escolas; a formação de professores e de formadores de professores; o desenvolvimento de software educativo; e a investigação no âmbito das TIC. Outros projetos se seguiram, mas é com o Plano Tecnológico da Educação (PTE) (2007) que a modernização das escolas ocorre, promovendo a integração e utilização generalizada das Tecnologias de Informação e Comunicação nos processos de ensino e de aprendizagem, e na gestão escolar (Pereira & Pereira, 2011; Plano Tecnológico, 2005).

O recurso à tecnologia no processo de ensino e aprendizagem é recomendado pelos Princípios e Normas para a Matemática Escolar, desde os anos 80, e ao longo destes anos os programas curriculares da disciplina de Matemática têm vindo a valorizar cada vez mais a sua utilização na sala de aula, nomeadamente nas situações em que os cálculos e procedimentos não constituem o objeto prioritário de aprendizagem, permitindo assim que o aluno centre a sua atenção nas estratégias de resolução e interpretação de resultados. De facto, a Matemática sempre teve uma relação especial com as tecnologias, procurando sempre outros meios que facilitassem o cálculo. Desde a utilização do ábaco ou dos quipus dos Incas, à revolução introduzida pelo aparecimento das tábuas de logaritmos, seguida das réguas de cálculo e finalmente as calculadoras (NCTM, 2008; Ponte et al., 2007, 2009; Rocha, 2002; Silva, 1993; Teixeira et al., 1997).

A calculadora gráfica é um recurso tecnológico obrigatório no ensino secundário desde 1997, cuja utilização deverá contemplar não apenas a sua vertente de instrumento de cálculo, mas também, um meio promotor do espírito de pesquiza, quando conciliada com atividades de investigação, exploração e de resolução de problemas, envolvendo assim o aluno na construção do seu conhecimento matemático. No estudo das Funções, esta ferramenta revela-se um instrumento didático com bastante potencial. Enquanto que antes o gráfico de uma função era o culminar do conhecimento de uma dada função, adquirido pelo seu estudo analítico exaustivo em que se o aluno cometesse um erro, toda a representação estaria comprometida, agora é muitas vezes o ponto de partida, fornecendo ao aluno uma visão global do comportamento da função em estudo. Estes pequenos computadores capazes de traçar uma grande variedade de gráficos simultaneamente e num pequeno espaço de tempo, permitem ao aluno visualizar, por exemplo, o efeito da alteração de um parâmetro na expressão algébrica de funções da mesma classe, ou o comportamento gráfico de funções de classes diferentes. Estas observações permitem por sua vez, que os alunos façam correspondências entre as representações gráficas e algébricas de um modo mais imediato, o que contribuí para uma melhor compreensão do conceito de função (Gomes, 2005; Teixeira et al., 1997; Viseu, Lima, & Fernandes, 2013).

Num estudo realizado com a calculadora gráfica TI – 82, Alexander (1994) verificou que as respostas dos alunos ao uso da calculadora gráfica na sala de aula foram bastante positivas. O autor acredita que a visualização imediata do comportamento das funções em análise, e da relação entre gráficos e respetivas expressões algébricas, beneficiou a compreensão do conceito de função. Além disso, esta ferramenta de visualização transformou a sala de aula num ambiente mais atrativo e interativo, onde os alunos foram capazes de descobrir conceitos básicos, regras e padrões sozinhos, bem como, modelar gráficos de funções a situações reais. Também Ramos e Raposo (2008), pelos resultados obtidos nos seus estudos com uma turma de 9.º ano e outra de 10.º ano, afirmam que a calculadora gráfica foi fundamental para o estudo das relações entre as diferentes representações, nomeadamente a representação algébrica e gráfica. Rosa (2013), no seu trabalho com três alunos do 10.º ano e a utilização da calculadora TI-Nspire no estudo das Funções, verificou que com a ajuda desta ferramenta, os alunos fizeram uma boa articulação entre as representações algébrica e gráfica, o que por sua vez os capacitou para uma melhoria na compreensão das funções e para uma aprendizagem mais efetiva.

O computador é um recurso tecnológico que tem progressivamente sido utilizado como auxiliar educativo, para além do apelo visual, oferece a interatividade e a comunicação como meios para que os alunos construam o seu próprio conhecimento. Estudos revelam que os computadores motivam os alunos para a aprendizagem e reduzem a ansiedade do medo em errar, fazendo experiências e colocando dúvidas online. Na Matemática, o ambiente gráfico proporcionado pelo computador, permite aos alunos simular, testar e experimentar novas situações, conduzindo posteriormente à discussão, interpretação, e reflexão sobre os resultados, e consequentemente à realização de conjeturas. Um destes ambientes gráficos, é o GeoGebra, um software de geometria dinâmica que reúne as ferramentas tradicionais da geometria com as mais avançadas da álgebra e do cálculo. No GeoGebra pode-se fazer construções utilizando pontos, vetores segmentos, retas, secções cônicas, bem como gráficos de funções. Tem especial interesse a sua utilização na sala de aula aquando do estudo das funções, uma vez que este software apresenta simultaneamente a representação gráfica e algébrica, o que permite aos alunos visualizarem graficamente os efeitos da variação da expressão algébrica (Jukes & Dosaj, 2006; Machado, Almeida, & Silva, 2008; Machado et al., 2007; Ponte, J., 1995).

Num estudo realizado por Machado, Almeida e Silva (2007) para aferir a capacidade gráfica e de simulação dos computadores na aprendizagem do conceito de função, verificou-se que os alunos através da visualização conseguiram adquirir conceitos que de outra forma implicavam a realização de procedimentos algébricos morosos e rotineiros. Estes autores referem que os alunos desenvolveram um raciocínio visual que lhes permitiu fazer conjeturas e construção de conhecimentos, bem como desenvolver a compreensão da correspondência entre a escrita algébrica e a correspondente representação gráfica. Também para Gagatsis, Elia e Mousoulidis (2006), a utilização de softwares de geometria dinâmica no estudo das funções ajudam a promover o sucesso na superação do "fenómeno da compartimentalização" já mencionado.

O quadro interativo (QI) é um recurso tecnológico que passou a fazer parte das escolas com o PTE. Esta ferramenta é descrita por Fitas e Costa (2008) como um dispositivo de apresentação onde as imagens de um computador são projetadas através de um projetor multimédia, podendo ser manipuladas através de uma caneta. Estes autores afirmam ainda que estudos realizados nos Estados Unidos, Reino Unido, Austrália e França, onde este recurso é utilizado no ensino à vários anos, mostram que a utilização dos QI na sala de aula promoveram a visualização espacial, aumentaram a motivação e o interesse dos alunos, estimulando a sua participação. Além disso, a introdução dos QI na sala de aula implicou uma alteração nas metodologias de ensino, o que por sua vez contribuiu para a melhoria dos resultados dos alunos. Para as aulas de Matemática, o QI apresenta uma "galeria" onde estão disponíveis jogos didáticos, máquinas de calcular, instrumentos de desenho e medição, figuras geométricas, símbolos, entre outros. Este recurso constitui um meio fácil e eficaz para manipular determinado software matemático, permitindo em tempo real que os alunos visualizem e acompanhem as explicações, raciocínios e demonstrações do professor, que podem ser gravados e posteriormente enviados para os alunos. Este recurso contribui assim, para uma maior interação aluno/aluno e aluno/professor (Fitas & Costa, 2008; Viseu et al., 2013).

Ponte (1990), refere que o conceito de função evoluiu e desenvolveu-se devido à convergência de dois fatores fundamentais: i) Uma base matemática adequada; ii) Uma forte motivação externa. Obviamente que os alunos não possuem nem a mesma base matemática que os matemáticos citados no enquadramento teórico, nem a mesma motivação, mas parece ser incontestável que as novas tecnologias tornam o ambiente de sala de aula mais atrativo e apelativo, proporcionando aos alunos um papel mais ativo no seu processo de ensino e aprendizagem, promovendo a discussão, reflexão e interação entre os mesmos. No caso particular do estudo das Funções, as novas tecnologias são fundamentais, pois permitem trabalhar de forma eficiente com múltiplas representações, o que por sua vez possibilita a visualização de correspondências entre diferentes representações, e consequentemente, fomenta a realização de conexões entre as diversas representações consideradas. Segundo diversos autores (Andrade & Saraiva, 2012; Barreto, 2008; Bolota, 2011; Domingos, 1994; Friedlander & Tabach, 2001; Lima & Pontes, 2006; Nogueira, 2010; Oliveira, 1997; Pais & Saraiva, 2011; Ponte, 1992, 1990; Ramos & Raposo, 2008; Rosa, 2013; M. J. Saraiva et al., 2010; Silva & Andrade, 2010; Zachariades et al., 2001), estas potencialidades são fundamentais no desenvolvimento da capacidade de distinguir a mesma função em diferentes representações, e na criação de imagens mentais que permitem a utilização das caraterísticas da função a novas situações. Contribuindo assim, para uma melhor compreensão do conceito de função.

3. Enquadramento contextual

Este capítulo está dividido em dois subcapítulos: Contexto de intervenção; e Plano de intervenção. Na primeira parte apresenta-se a caraterização do contexto de intervenção, nomeadamente a escola e a turma onde se desenvolveu a intervenção deste estudo. Na segunda parte, apresenta-se as metodologias de ensino e aprendizagem utilizadas nesta intervenção, bem como as estratégias de investigação e avaliação da ação.

3.1 Contexto de intervenção

3.1.1 Caraterização da escola

O estudo apresentado foi implementado numa escola, sede do Agrupamento de Escolas do Vale de S. Torcato (AEVST), caracterizada como sendo Território Educativo de Intervenção Prioritária (TEIP) e situada na Vila de São Torcato, concelho de Guimarães. Deste agrupamento de escolas fazem parte a Escola Básica dos 2.º e 3.º ciclos de S. Torcato, e as Escolas do 1.º ciclo e Jardins de Infância: EB 1/JI de Bela Vista; EB 1/JI de Chã de Bouça; Centro Escolar JI/EB1 de S. Torcato; EB 1/JI de Pulo; EB 1/JI de Vinha. Os alunos da Escola Básica dos 2.º e 3.º ciclos de S. Torcato são provenientes das freguesias de São Torcato, Aldão, Rendufe, Gonça, Atães, Gominhães, Garfe e Selho São Lourenço, freguesias estas que são de tipologia rural ou rural com alguma industrialização, e em que o seu índice de envelhecimento situa-se entre os 58% e os 107,8% (CMGuimarães, 2011).

A população ativa desta zona pedagógica apresenta um grau de instrução reduzido, dedicando-se essencialmente aos setores secundário (indústria dos têxteis, vestuário, calçado, cutelarias e construção civil), e terciário (serviços), tendo o setor primário, tradicionalmente característico desta zona, diminuído consideravelmente o seu peso enquanto setor de atividade. Estas características socioeconómicas e culturais dos agregados familiares, refletem-se em reduzidas espectativas para com os filhos, em que a escolaridade obrigatória é muitas vezes considerada uma retardação para que estes possam começar a contribuir para o rendimento familiar. Consequentemente, estes valores, influenciam fortemente a motivação e o rendimento escolar dos seus educandos (AEVST, 2015a).

Atualmente, o agrupamento possuí 86 professores, 37 assistentes operacionais, 7 assistentes técnicos e 6 técnicos especializados, dos quais se destacam uma Psicóloga que dinamiza os Serviços de Psicologia e Orientação Profissional, e que trabalha em conjunto com uma Técnica Superior de Serviço Social e com quatro Professores do Ensino Especial.

Neste ano letivo estão inscritos 933 alunos no agrupamento, sendo 484 na escola básica divididos pelo 2.º ciclo, 3.º ciclo e cursos vocacionais. Cerca de 5% dos alunos estão referenciados com Necessidades Educativas Especiais (NEE), e 2% estão abrangidos pelo Projeto PERA (Programa Escolar de Reforço Alimentar) que concilia a educação alimentar com a necessidade de suprir carências alimentares detetadas em alunos que frequentam as escolas públicas. Na escola sede há um total de 23 turmas, 8 de 2.º ciclo, 12 de 3.º ciclo e 3 de cursos vocacionais. Segundo as informações fornecidas pela Técnica Superior de Serviço Social do agrupamento, atualmente existem 122 alunos que são acompanhados pelo Gabinete de Apoio a Alunos e à Família (GAAF). Este serviço procura mobilizar todos os agentes educativos (professores, famílias, alunos, técnicos, representantes das instituições locais e outros), para o processo educativo dos alunos que acompanha, de modo a contribuir para a melhoria das condições psicossociais que afetam o sucesso escolar.

Este ano letivo, a escola tem em curso 10 projetos de enriquecimento curricular, nomeadamente, Parlamento dos Jovens; Promoção de Experiências Positivas em Crianças e Jovens; Eco Escolas; Adota um Rio; Unidos pelo Jardim da Escola; Brigadas do Ambiente; Mascote Ecolino; Eco Parlamento; Orçamento Participativo Escolas; e Festa do Ambiente. Grande parte destes projetos estão incluídos no Programa PEGADAS da Câmara Municipal de Guimarães.

Segundo o Plano Plurianual de Melhoria (AEVST, 2015a) os resultados escolares menos positivos característicos deste território educativo estão essencialmente relacionados com:

> as reduzidas competências nas diferentes literacias, nomeadamente, as profundas dificuldades ao nível da expressão oral e escrita; pobreza vocabular e utilização quase exclusiva da função instrumental da linguagem; as dificuldades na aquisição de capacidades e conhecimentos nas disciplinas de Português e Matemática; extremas dificuldades no raciocínio lógico/abstrato, compreensão de enunciados, resolução de problemas e comunicação matemática; agravamento das dificuldades que se verificam na transição de ciclos, em especial do 2.º para o 3.º ciclo; pouco acompanhamento e envolvimento das famílias no processo escolar dos alunos, embora se verifique uma ligeira evolução positiva; e interesses divergentes dos escolares, revelado por um número considerável de alunos. (AEVST, 2015a, p. 15)

De forma a colmatar estas dificuldades, o agrupamento concebeu um conjunto de ações: Observatório da qualidade do sucesso; S. Torcato vale +; Equipas de ano; Assessoria pedagógica 1.º ciclo; Assessoria pedagógica 2.º e 3.º ciclo Matemática; Assessoria pedagógica 2.º e 3.º ciclo Português; Laboratório de Matemática; Oficina de escrita; Projeto V.A.L.E. (Ver-Agir-Ler-Experimentar); Um dia com...; Aprender a aprender; Orientar para optar; Diversificar para aprender; GT+ em S. Torcato no quadro de mérito escolar; De mãos dadas; Museu de Vale em S. Torcato.

Quanto às “Assessorias de Matemática”, todas as turmas de 8.º e 9.º anos foram contempladas com quarenta e cinco minutos com a presença de uma professora assessora na sala de aula, enquanto que no 7.º ano apenas uma turma usufrui desta modalidade. Estas aulas foram direcionadas para a resolução de exercícios, de modo a potenciar a presença da outra docente da disciplina na sala de aula, e consequentemente possibilitar a prestação de um apoio mais individualizado aos alunos.

Relativamente ao “Laboratório de Matemática”, no início deste ano letivo, foram atribuídos sete tempos de quarenta e cinco minutos para a sua dinamização. Contudo, em virtude das indicações constantes nos Planos de Turma do ano letivo anterior, para a frequência de aulas de apoio à disciplina de Matemática por parte de determinados alunos, e a ausência de tempos nos horários dos docentes do grupo disciplinar para a prestação destas aulas, o grupo disciplinar de Matemática ponderou a situação e decidiu efetuar uma recondução de quatro destes sete tempos de quarenta e cinco minutos, para a lecionação de aulas de apoio de Matemática, e dois tempos para o reforço ao número de aulas com assessoria nas turmas com resultados de sucesso inferiores à media de ciclo. As atividades desenvolvidas no “Laboratório de Matemática” têm como principais objetivos desmistificar a conotação negativa que os alunos têm em relação à disciplina de Matemática; desenvolver nos alunos o gosto pela disciplina de Matemática; promover atividades que tornem a Matemática mais atrativa e recreativa; desenvolver, nos alunos, uma melhor compreensão do papel da Matemática no mundo real, estabelecendo um paralelo entre a Matemática e o real através da realização de experiências e com a ajuda de problemas do dia-a-dia; contribuir para aprendizagens relacionadas com as novas tecnologias, através da utilização de software; exercitar e desenvolver as capacidades de raciocínio, de resolução de problemas e pensamento crítico; desenvolver hábitos de trabalho e persistência; despertar o espírito crítico e competitivo dos alunos através dos jogos; e promover o sucesso escolar na disciplina (AEVST, 2015b).

Para além das “Assessorias” e do “Laboratório de Matemática”, como atividades de enriquecimento curricular a escola básica dispõe ainda das modalidades: Sala de Estudo e Clubes. Existem 8 clubes em execução, nomeadamente, “Clube de Inglês”; “Clube do Património”; “Clube de Francês; “Clube do Teatro e Poesia”; “Clube das Artes”; “Clube da Solidariedade”; “Radio Escola”. É ainda de referir o projeto V.A.L.E. que promove a realização de atividades de ensino experimental ou de metodologias ativas a desenvolver ao longo do ano, em todos os ciclos de ensino e em todas as disciplinas (AEVST, 2015a).

Nesta escola, sempre que possível, é garantida a continuidade pedagógica do 5.º ao 6.º ano e do 7.º ao 9.º ano. São realizadas reuniões periódicas de articulação entre os docentes do 4.º ano das escolas que fazem parte do Agrupamento e os docentes de Matemática do 2.º ciclo, e entre estes e os docentes de Matemática do 3.º ciclo. Nestas reuniões são abordadas as principais dificuldades sentidas pelos alunos nos diferentes conteúdos, fazendo-se reajustes às planificações de acordo com as dificuldades referidas.

Quanto às instalações, o estado de conservação do edifício é deficitário, contudo a escola está equipada com uma rede Wi-Fi de acesso à internet, 6 salas com quadro interativo, 2 salas de computadores, e todas as salas possuem um computador e um projetor multimédia.

3.1.2 Caraterização da Turma

A presente intervenção pedagógica foi realizada numa turma de 9.º ano constituída por alunos que pretendiam ingressar num curso vocacional de equivalência ao 9.º ano de escolaridade. Contudo, a abertura do referido curso não foi concretizada devido ao número insuficiente de alunos propostos, pelo que, tendo em consideração as dificuldades e perfil destes alunos face ao estudo e à escola, foi formada uma turma com 13 alunos (A_1, ..., A_{13}) composta por cinco raparigas e oito rapazes, com idades compreendidas entre os 13 e os 17 anos. Apenas dois destes alunos não possuem retenções no seu percurso escolar, sendo que oito destes alunos estão a frequentar o 9.º ano pela segunda vez, no entanto, abordarão pela primeira vez um programa curricular com a implementação das Metas Curriculares homologadas em agosto de 2012. A esta turma não se aplica, assim, a caraterística de continuidade pedagógica, apesar de alguns destes já terem sido meus alunos no ano transato.

Através da caracterização da turma elaborada pelo diretor de turma, pode constatar-se que sete alunos referem a Matemática como uma das disciplinas em que possuem mais dificuldades. Quanto às espectativas, os alunos pretendem apenas concluir o 12.º ano e alcançar profissões que variam entre mecânico, pasteleiro, futebolista, eletricista e auxiliar educativo. É ainda de referir que três alunos da turma são acompanhados pelo GAAF.

No início da implementação deste projeto, foi realizado um questionário (Anexo I) aos alunos de modo a averiguar o seu grau de conhecimento sobre diferentes recursos tecnológicos. Deste inquérito apurou-se que todos os alunos reconhecem o computador, o Tablet, a internet, o quadro interativo e o smartphone, como recursos tecnológicos. A calculadora gráfica é conhecida por cerca de 77% dos alunos, os sensores de movimento são conhecidos por cerca de 62%, enquanto que apenas 38% dos alunos afirmam conhecer softwares educativos.

Relativamente aos recursos tecnológicos que os alunos possuem em casa, 100% dos alunos possuí computador e acesso à internet. A maioria possuí também smartphone e Tablet (85% e 76%, respetivamente), enquanto que apenas dois alunos (15%) afirmam ter calculadora gráfica e softwares educativos em casa. O computador e o acesso à internet são referidos por todos os alunos como recursos tecnológicos com que já trabalharam na escola. Uma grande parte dos inquiridos mencionam também o quadro interativo e o projetor multimédia (69% e 54%, respetivamente), enquanto que apenas 38% referem a calculadora gráfica, os sensores de movimento, o retroprojetor e o smartphone. Quanto aos softwares educativos, apenas 23% dos alunos os citam como um dos recursos tecnológicos com que já trabalharam na escola.

Como recursos tecnológicos utilizados nas aulas de Matemática, tal como consta na Tabela 1, a maioria dos alunos referiu o quadro interativo e o computador, enquanto que apenas 8% mencionam o retroprojetor. Alguns dos alunos desta turma fizeram parte das turmas de 9.º ano que me foram atribuídas no ano letivo anterior, nomeadamente seis alunos. No ano transato, estes alunos trabalharam com as calculadoras gráficas e sensores de movimento nas aulas de matemática, aquando da abordagem ao capítulo das Funções, o que pode justificar os resultados obtidos nesta questão e referidos na Tabela 1.

Tabela 1 - Distribuição das respostas relativa aos recursos tecnológicos já trabalhados na aula de Matemática

Computador	**Calculadora Gráfica**	**Softwares educativos**	**Sensores de movimento**	**Quadro interativo**	**Retroprojetor**	**Projetor Multimédia**	**Internet**
62%	**38%**	**15%**	**31%**	**85%**	**8%**	**54%**	**38%**

No que diz respeito ao uso de softwares educativos, todos os alunos conhecem e já trabalharam na escola com o Word e PowerPoint. A Folha de Cálculo é identificada por 62% dos alunos, mas apenas 23% afirmam terem trabalhado com este recurso na escola, nomeadamente na aula de Matemática. O GeoGebra é reconhecido por 15% dos alunos, os quais já trabalharam com este recurso na aula de Matemática. A Escola Virtual é identificada por 85% dos alunos, sendo que apenas 46% afirmam ter utilizado este recurso na escola e 38% usaram na aula de Matemática.

No questionário aplicado, foi pedido aos alunos que classificassem de 1 a 4 (1 = Nenhum e 4 = Muito) o seu grau de conhecimento como utilizadores de diferentes recursos tecnológicos e softwares educativos. Os resultados obtidos estão representados na Figura 1 e 2.

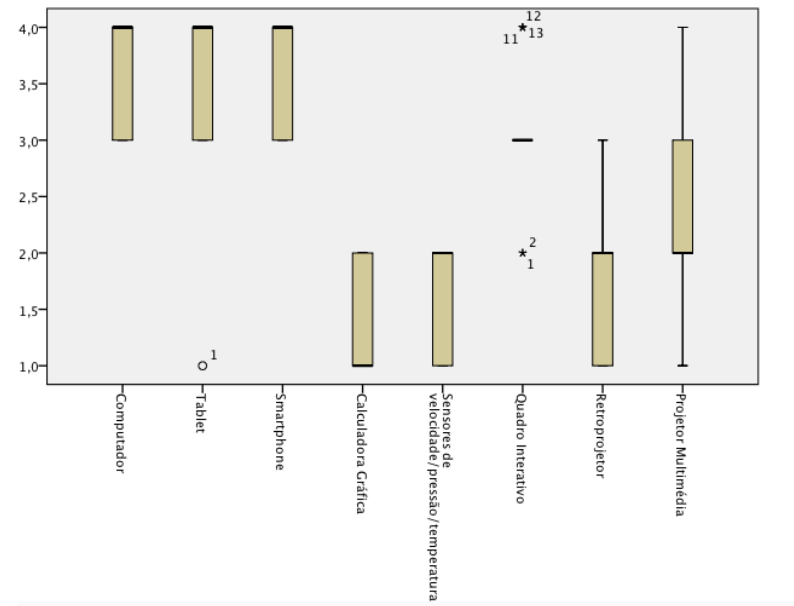


Figura 1 - Distribuição da classificação do grau de conhecimento dos recursos tecnológicos

Pela análise do gráfico apresentado na Figura 1, podemos verificar que de um modo geral os alunos afirmam conhecer melhor o computador, o Tablet e o smartphone, do que as calculadoras gráficas e os sensores de velocidade/pressão/temperatura. O conhecimento que possuem dos quadros interativos é, na maioria dos alunos, semelhante, enquanto que relativamente ao retroprojetor e projetor multimédia, o grau de conhecimento que os alunos asseguram ter, é mais disperso.

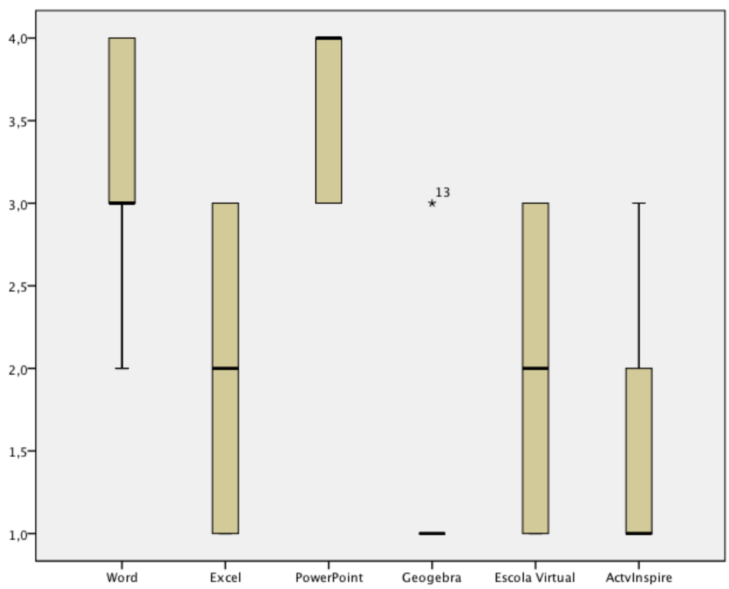


Figura 2 - Distribuição da classificação do grau de conhecimento dos softwares educativos

Observando os dados do gráfico da Figura 2, podemos afirmar que o Word e o PowerPoint, apontados como sendo os softwares que os alunos trabalham mais, são também aqueles que os alunos afirmam ter maior grau de conhecimento. Enquanto que o GeoGebra, com exceção de um aluno, destaca-se como o software que os alunos menos conhecem, da lista de softwares fornecida. A distribuição do grau de conhecimento dos alunos relativamente aos softwares Escola Virtual e Excel, é simétrica e varia entre o grau 1 e 3. Apesar do grau de conhecimento dos alunos relativamente ao ActivInspire também variar entre 1 e 3, há uma maior percentagem de alunos que dizem não possuir conhecimento deste software.

Nos resultados da turma obtidos na ficha de avaliação diagnóstica realizada no início do ano letivo, verificou-se uma classificação média de 28,7%. Nesta ficha de diagnóstico, o exercício relativo às funções não foi realizado de forma satisfatória por nenhum dos alunos. Por este motivo, no início da implementação deste projeto, foi realizado uma nova ficha de diagnóstico (Anexo II) aos alunos, abordando apenas os conteúdos relativos ao capítulo das Funções do 7.º e 8.º anos de escolaridade, segundo as Metas homologadas a 3 de agosto de 2012. De acordo com os resultados obtidos no gráfico da Figura 3, saber o conceito de função; identificar o domínio e contradomínio pela análise de uma função representada por uma tabela ou gráfico; determinar objetos ou imagens quando a função é dada por uma expressão algébrica; identificar pares ordenados como pertencentes ao gráfico de uma função; reconhecer funções afim, linear e constantes pela sua representação gráfica e expressão algébrica; reconhecer e relacionar o declive de uma reta com o sentido da inclinação da mesma; reconhecer que as retas não verticais são os gráficos das funções afim e, dada uma reta de equação $y = ax + b$, onde a designa o "declive" da reta e b a "ordenada na origem", são competências que os alunos não demonstram ter adquirido. Estas competências fazem parte dos programas curriculares do 7.º e 8.º ano de escolaridade, segundo as Metas Curriculares homologadas a 3 de agosto de 2012, e revelam-se essenciais para a compreensão dos conteúdos constante no domínio das Funções do Programa de 9.º ano.

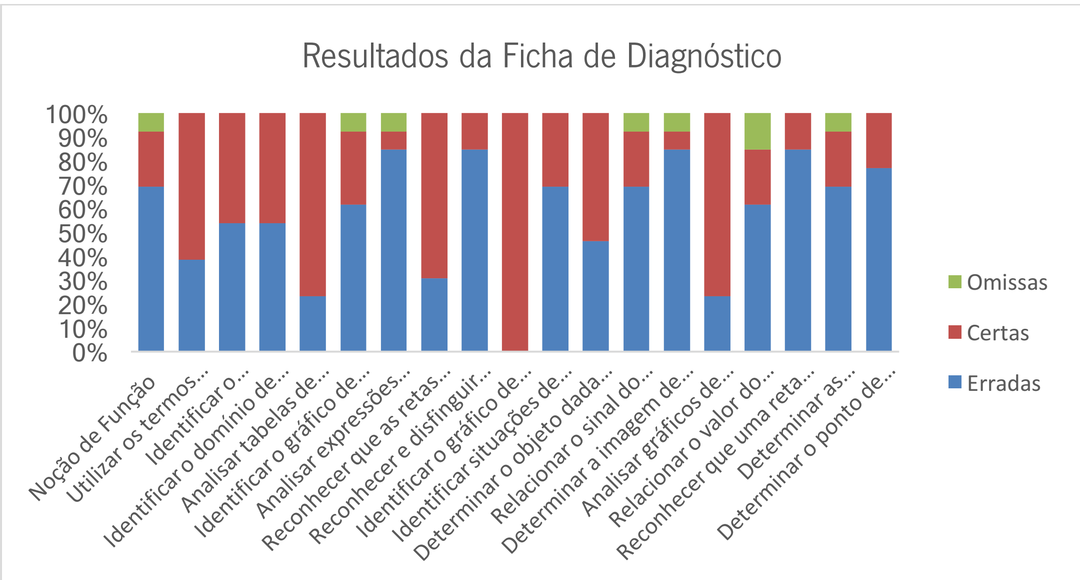


Figura 3 - Resultados da ficha de avaliação diagnóstica realizada no início da intervenção

3.2 Plano geral de intervenção

3.2.1 Metodologias de ensino aprendizagem

As metodologias de ensino e aprendizagem utilizadas durante a intervenção pedagógica foram pensadas de modo a serem concretizadas na sala de aula, a valorizarem o trabalho dos alunos, e a utilizarem as novas tecnologias, sempre que possível.

Tarefas

Nesta intervenção, foram propostas aos alunos cinco tarefas de natureza investigativa. Diversos autores (Fiorentini, Fernandes, & Cristovão, 2005; Magalhães & Martinho, 2014; Meneghetti & Redling, 2012) defendem que a utilização de tarefas investigativas nas aulas de matemática proporcionam a realização de um ensino significativo da matemática, uma vez que promovem a participação ativa dos alunos na construção do conhecimento e a autoaprendizagem de cada um.

A exploração das tarefas de investigação propostas nesta intervenção, foi orientada de modo a que os alunos se questionassem e testassem as suas conjeturas, construindo assim, o seu próprio conhecimento, o que vai de encontro ao defendido pelos Princípios e Normas para a Matemática Escolar: "Num ensino efetivo, são utilizadas tarefas matemáticas significativas para introduzir conceitos matemáticos e para envolver e desafiar intelectualmente os alunos" (NCTM, 2008, p. 19). Estas tarefas foram realizadas a pares ou em grupos de três e quatro elementos, com recurso ao computador e ao software dinâmico GeoGebra, à calculadora gráfica TI-84 Plus e ao sensor de movimento CBR.

A tarefa investigativa número 1 (Anexo III) envolve a utilização do computador e do software de geometria dinâmica, GeoGebra, para o estudo das caraterísticas da família das funções afim do tipo $f(x) = ax + b$. A tarefa investigativa número 2 (Anexo IV) consiste num guião exploratório de uma experiência realizada de modo a introduzir o estudo e aplicabilidade da função de proporcionalidade inversa. Adaptada de Advanced Algebra Trough Data Exploration (Murdock, Kamischke, & Kamischke, 1998), envolve a utilização da calculadora gráfica para a sua concretização. A tarefa investigativa número 3 (Anexo V), recorre à utilização do computador aliado ao software GeoGebra para o estudo das caraterísticas gráficas de uma função de proporcionalidade inversa, enquanto que a tarefa investigativa número 4 (Anexo VI) utiliza os mesmos recursos para o estudo das caraterísticas da família das funções quadráticas do tipo $f(x) = ax^2, com\ x \neq 0$. De referir que as tarefas que recorrerem ao computador e ao software GeoGebra, foram construídas de raiz, de acordo com os objetivos delineados, assim como os respetivos ficheiros digitais para exploração. A tarefa investigativa número 5 (Anexo VII) foi adaptada das atividades propostas pela Texas Instruments (Flynn, 2006) e requer a utilização da calculadora gráfica e do sensor de movimento CBR, para a sua execução, uma vez que envolve a modelação de uma situação em contexto real. Uma descrição mais pormenorizada de cada uma destas tarefas encontra-se no terceiro capítulo, nomeadamente na seção relativa à descrição e análise das tarefas implementadas.

Para as tarefas investigativas números 1, 2 e 3, foram aplicadas como tarefas de consolidação dos conhecimentos adquiridos, fichas de trabalho (Anexo VIII, IX), também estas realizada a pares ou em grupos de três e quatro elementos. Uma vez que o objetivo da tarefa investigativa número 2 foi o da introdução de conceitos relativos à função de proporcionalidade inversa, optou-se por primeiro resolver exercícios do manual no quadro com a colaboração dos alunos, de forma a sistematizarem e exemplificarem os conhecimentos adquiridos. Só após a implementação da tarefa investigativa número 3 é que se aplicou uma ficha de trabalho como consolidação das tarefas números 2 e 3. À semelhança da tarefa investigativa número 2, a tarefa investigativa número 4 perseguiu-se da realização de exercícios do manual como tarefa de aplicação/consolidação dos conhecimentos adquiridos, uma vez que o objetivo desta tarefa foi o da introdução de conceitos relativos à função quadrática. Posteriormente realizou-se uma questão de aula apenas para aferir o grau de consolidação destes conhecimentos. A tarefa investigativa número 5 não foi acompanhada da aplicação de tarefa de consolidação uma vez que esta foi implementada com o objetivo de exemplificar a aplicação dos conteúdos abordados em contextos reais.

Durante a resolução das tarefas, o professor adotou um papel meramente consultivo, intervindo apenas para o esclarecimento de dúvidas ou para desbloquear situações que impediam os alunos de prosseguir na realização da atividade proposta.

A resolução destas tarefas proporcionou aos alunos a discussão das observações em pequenos grupos, bem como a reflexão sobre os resultados obtidos e desenvolver a comunicação matemática oral e escrita. Contribuindo assim para que "o trabalho do aluno seja o de pensar, investigar, experimentar e não somente o de ouvir e copiar" (Teixeira et al., 1997, p. 8), envolvendo-os na construção ativa do conhecimento matemático e de forma mais autónoma.

Trabalho de pares/grupo

O trabalho de pares "é um modo de organização particularmente adequado na resolução de pequenas tarefas permitindo que os alunos troquem impressões entre si, esclareçam dúvidas e partilhem informações" (Ponte et al., 2007, p. 10). "Para que os alunos desenvolvam o poder de argumentação, a capacidade de comunicação e o espírito de colaboração é fundamental que tenham oportunidade de trabalhar muitas vezes em grupo" (Teixeira et al., 1997, p. 122).

Num estudo sobre uma intervenção de ensino de Combinatória, realizado por Guzmán, Correia e Fernandes (2009), analisou-se a perceção dos alunos relativamente ao seu trabalho em grupo. Os resultados desta análise mostram que é unânime o reconhecimento da importância desta metodologia na aprendizagem dos inquiridos, os quais salientaram a importância desta metodologia na fomentação e criação de ideias diferentes, na promoção de uma maior participação na resolução das tarefas propostas, e no auxílio para a superação das dificuldades sentidas. Um outro estudo de Magalhães e Martinho (2014) sobre o desenvolvimento da argumentação matemática no estudo das funções racionais, utilizando o trabalho de grupo em tarefas investigativas, revelou que os alunos "ouvindo e confrontando os argumentos uns dos outros, permitiu que construíssem o seu próprio conhecimento de forma interessante e entusiasmante, chegando em conjunto a argumentos válidos e mesmo a provas matemática" (Magalhães & Martinho, 2014, p. 127). Também o trabalho de Torres, Coutinho e Fernandes (2008) sobre a aplicação e modelação matemática com recurso à calculadora gráfica e sensores, refere que o facto dos alunos terem trabalhado em grupo, levou a que todos os seus elementos se envolvessem na concretização das tarefas propostas.

Nesta intervenção pedagógica, todas as tarefas foram realizadas a pares ou em grupos de três, quatro elementos. Na elaboração dos grupos de trabalho, teve-se a preocupação de formar grupos homogéneos entre si e heterogéneos dentro de cada um, na medida do possível e tendo em consideração as caraterísticas da turma. Para as tarefas investigativas realizadas com recurso ao computador (tarefas números 1, 3 e 4), deu-se prioridade à formação de grupos de dois elementos, enquanto que para a realização das tarefas que envolveram a modelação de situações em contexto real, deu-se prioridade à formação de grupos de três elementos, de modo a facilitar a logística relativa à distribuição de tarefas. Assim, agruparam-se os treze alunos em seis grupos, de acordo com a Tabela 2, ou em quatro grupos, de acordo com a Tabela 3.

Tabela 2 – Constituição dos grupos de trabalho para a realização das tarefas 1, 3 e 4

Grupo	**G_1**	**G_2**	**G_3**	**G_4**	**G_5**	**G_6**
Elementos do grupo	A_1 A_8	A_2 A_3 A_{11}	A_4 A_5	A_6 A_{10}	A_7 A_{13}	A_9 A_{12}

Tabela 3 – Constituição dos grupos de trabalho para a realização da tarefa 2 e 5

Grupo	**G_1**	**G_2**	**G_3**	**G_4**
Elementos do grupo	A_1 A_2 A_3 A_{11}	A_4 A_5 A_{10}	A_7 A_8 A_{13}	A_6 A_9 A_{12}

Discussão no grupo-turma

Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2008) defendem que o diálogo na sala de aula e as interações na turma, poderão promover o reconhecimento de conexões entre ideias e o desenvolvimento do raciocínio matemático: "ouvir as explicações de outros permite que os alunos desenvolvam a sua própria compreensão matemática" (NCTM, 2008, p. 66).

Num estudo de Branco (2013) para compreender como é que alunos de uma turma de 10.º ano de escolaridade, trabalhando em pequenos grupos, realizam atividades com tarefas de exploração e investigação, concluiu-se que a discussão em grande grupo teve um papel fulcral para a concretização da prova de conjeturas. Os alunos dos diferentes grupos partilharam ideias, debateram resultados e assim validaram conjeturas que envolviam "raciocínios mais complexos" (Branco, 2013, p. 126). Também Rosas (2013), no seu estudo com alunos do 10.º ano, percebeu que através das interações aluno/aluno e aluno/professor, os alunos têm mais facilidade de construir o seu pensamento.

Assim, a discussão no grupo-turma proporciona momento de partilha de ideias e consequentemente a sistematização e institucionalização de conhecimentos. Para que o aluno explique o seu raciocínio e as suas descobertas, é necessário que ele reflita sobre o que acabou de explorar e estruture o seu pensamento, de modo a que a sua comunicação seja clara e convincente (Matos & Serrazina, 1996; NCTM, 2008; Ponte et al., 2007).

Consciente de que "A comunicação é uma parte essencial da matemática e da educação matemática" (NCTM, 2008, p. 66), uma vez que a "reflexão e a comunicação são processos intimamente ligados na aprendizagem matemática" (NCTM, 2008, p. 67), nesta intervenção, a discussão dos resultados obtidos pelos alunos nas tarefas investigativas, fichas de trabalho e exercícios do manual realizou-se sempre, quer na mesma aula, quer na aula seguinte, prosseguida pela sistematização e registo das conclusões.

Tecnologia

As novas tecnologias - computadores, calculadoras gráficas e os sensores CBR, em particular – constituem ferramentas essenciais para o ensino e a aprendizagem da matemática no sentido em que proporcionam aos alunos “imagens visuais de ideias matemáticas, facilitam a organização e a análise de dados e realizam cálculos de forma eficaz e exata” (NCTM, 2008, p. 26). No caso particular do estudo das Funções, estas tecnologias permitem aos alunos a exploração de uma maior diversidade de exemplos ou formas de representação, e mais rapidamente do que seria manualmente, o que contribui para a formulação e exploração de conjeturas e consequente estabelecimento de conexões. Por outro lado, ao permitir a exploração de mais e variados exemplos num curto intervalo de tempo, e ao executar procedimentos de cálculo rotineiros de forma rápida e precisa, as TIC libertam os alunos para a tomada de decisões, a reflexão e estruturação do raciocínio, e a resolução de problemas. Deste modo, as tecnologias são potenciais como metodologias educativas pois além de atrativas para o aluno, proporcionam-lhe um papel mais ativo na construção do seu conhecimento (NCTM, 2008).

A utilização de um viewscreen ligado a uma calculadora gráfica, permite que os alunos acompanhem a explicação do professor. Enquanto que a utilização de sensores de movimento como o CBR, permitem a recolha em sala de aula e em tempo real, de dados relativos a distâncias, velocidade e aceleração de um corpo em movimento. Estas tecnologias possibilitam um maior envolvimento dos alunos, bem como lhes proporciona experiencias que lhes permitam verificar a aplicabilidade da matemática na modelação e previsão de fenómenos naturais. A este respeito o Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2008) refere que “o currículo deverá proporcionar experiências que permitam que os alunos compreendam que a matemática possui utilizações poderosas na modelação e na previsão de fenómenos naturais” (NCTM, 2008, p. 16).

Diversos estudos (Alexander, 1994; Andrade & Saraiva, 2012; Cruz, Carvalho, & Almeida, 2006; Domingos, 1994; Fertuzinhos, 2014; Gomes, 2005; Gonçalves, Fernandes, & Correia, 2013; Jukes & Dosaj, 2006; Machado et al., 2008, 2007; Nogueira, 2010; Pais & Saraiva, 2011; Ramos & Raposo, 2008; Torres et al., 2008) mostram que o uso de tecnologia na sala de aula é essencial no ensino e aprendizagem da matemática, uma vez que promovem, facilitam e melhoram a autonomia, bem como a motivação e a aprendizagem dos alunos.

Como já foi mencionado, as tarefas investigativas implementadas nesta intervenção foram exploradas com recurso às tecnologias, nomeadamente ao computador, usando o ambiente gráfico do GeoGebra, à calculadora gráfica TI-84 Plus, ao viewscreen, e ao sensor de movimento CBR. O trabalho com o computador foi realizado a pares ou grupo de três, “um computador por grupo é a forma mais eficaz, pois permite a interação entre os seus membros” (Gonçalves et al., 2013, p. 14), de acordo com a Tabela 2, enquanto que o trabalho com a calculadora gráfica e os sensores foi realizado em grupos de três e quatro elementos, de acordo com a Tabela 3 e pela razão já referida. Os ficheiros a explorar no GeoGebra foram construídos de raiz, de acordo com os objetivos delineados nas respetivas tarefas investigativas, e foram previamente gravados num dos computadores dos alunos e posteriormente partilhado com os restantes computadores da sala de aula.

3.2.2 Estratégias de intervenção e avaliação da ação pedagógica

Como estratégias de intervenção e avaliação, recorreu-se, como instrumentos de coleta de informação, às tarefas investigativas e tarefas de consolidação realizadas pelos alunos durante a intervenção, às questões de aula e à ficha de avaliação escrita realizada no final da intervenção, bem como às anotações das observações combinadas com as transcrições das gravações, e a um questionário realizado no final da intervenção.

Tarefas realizadas pelos alunos durante a intervenção

Durante a intervenção foram propostas aos alunos, organizados em pequenos grupos, cinco tarefas de caráter investigativo. Estas tarefas foram exploradas com recurso às TIC, de modo a que os alunos formulassem conjeturas, testassem essas conjeturas e desenvolvessem a construção dos conceitos e conhecimentos abordados em cada tarefa. No final de cada uma destas tarefa foi recolhida uma cópia da respetiva resolução por grupo de trabalho, seguindo-se a discussão no grupo-turma dos resultados obtidos, sistematização e registo das conclusões. Após este momento, procedeu-se à realização de tarefas de consolidação, nomeadamente através de fichas de trabalho e exercícios do manual adotado, que foram corrigidas no quadro pelos alunos, após a recolha de uma cópia da resolução da ficha de trabalho por cada grupo, para posterior análise. As resoluções dos exercícios do manual registados no caderno dos alunos não foram recolhidas, uma vez que foram realizados aquando da sistematização dos conteúdos abordados e/ou antecederam a resolução de uma questão de aula.

Das cinco tarefas investigativas implementadas, neste trabalho, apenas se faz a análise das produções dos alunos de quatro destas tarefas, dada a extensão final do documento. A escolha pela omissão dos resultados da tarefa investigativa número 4, deveu-se ao facto de ser uma tarefa similar às tarefas investigativas números 1 e 3, em que é utilizado o computador e o software GeoGebra, mas agora aplicado ao estudo das caraterísticas da família das funções quadráticas do tipo $f(x) = ax^2, com\ a \neq 0$. Durante as resoluções das tarefas, foi pedido aos alunos para que nunca apagassem aquilo que faziam, riscando apenas levemente o que tinham errado.

Questões de aula e ficha de avaliação escrita

> É através da avaliação que o professor recolhe informação que lhe permite apreciar o progresso dos alunos na disciplina e, em particular, diagnosticar problemas e insuficiências na sua aprendizagem e no seu trabalho, verificando assim a necessidade (ou não) de alterar a sua planificação e ação didática. (Ponte et al., 2007, p. 11)

Com o intuito de verificar o desempenho dos alunos e de obter informações que permitam ao professor realizar reajustes na planificação, e aos alunos, realizar reajustes no modo como realizam o seu estudo, ao longo desta intervenção foram realizadas duas questões de aula. A primeira questão de aula (Anexo X) foi aplicada após a realização da Ficha de trabalho 2, com o objetivo de avaliar os conceitos abordados nas tarefas investigativas 1, 2 e 3. A segunda questão de aula (Anexo XI) foi ministrada após a resolução de exercícios do manual para a consolidação dos conceitos abordados na tarefa investigativa 4. A correção destas questões de aula foi realizada na aula antes da realização da ficha de avaliação escrita final, constituindo assim mais um momento de aprendizagem para os alunos.

Como já foi mencionado, por uma questão de extensão deste documento, a análise dos resultados da tarefa investigativa número 4 foram omitidos deste trabalho, pelo que a avaliação da apreensão dos conhecimentos abordados nesta tarefa, também o foram. Assim, neste trabalho, apenas é apresentada a análise das respostas dos alunos à primeira questão de aula.

No final da intervenção foi realizada uma ficha de avaliação escrita (Anexo XII). Uma vez que a intervenção se iniciou no mês de novembro, e nessa data, já tinha sido lecionado o capítulo relativo às inequações e valores aproximados de números reais, a ficha de avaliação escrita final abordou também estes conteúdos. Antes de serem corrigidas, tanto as resoluções das questões de aula, como as da ficha de avaliação escrita de cada aluno, foram fotocopiadas para posterior análise.

Questionário

Antes da realização desta intervenção foi realizado um questionário (Anexo I) para aferir o grau de conhecimento e de contacto que os alunos têm com diferentes tecnologias, nomeadamente softwares e hardwares relevantes para o estudo em causa. Os dados resultantes da análise deste questionário constam no subcapítulo relativo à descrição do contexto de intervenção, designadamente na seção da caraterização da turma.

No final da intervenção foi aplicado um novo questionário (Anexo XIII) aos alunos, para aferir a perceção destes relativamente às estratégias de ensino e aprendizagem utilizada. Dada a extensão do atual programa curricular do 9.º ano de escolaridade, este novo questionário foi proposto aos alunos na aula relativa à autoavaliação do primeiro período, ou seja, na última aula do mês de dezembro.

Observação

Durante esta intervenção todas as aulas, com exceção da aula relativa à ficha de avaliação escrita final, foram gravadas. Para tal, foi entregue um pedido de autorização para a gravação das aulas ao diretor da escola (Anexo XIV) e a todos os encarregados dos alunos (Anexo XV), que foi concedido por todos.

No decorrer da aplicação das tarefas, a docente foi passando pelos grupos de trabalho, fazendo registo das observações pertinentes para o estudo em causa. A combinação destas anotações com a transcrição das gravações torna possível um relato mais preciso do que é relevante para o estudo em causa.

4. Intervenção de conhecimentos

Este capítulo encontra-se estruturado em três secções: Intervenção pedagógica; Avaliação da intervenção; e Perceção dos alunos relativamente às estratégias de ensino e aprendizagem utilizadas.

4.1 A intervenção pedagógica

Nesta secção apresenta-se a planificação da intervenção pedagógica, bem como a descrição e análise das tarefas utilizadas na intervenção.

4.1.1 Planificação da intervenção pedagógica

A intervenção pedagógica iniciou-se em novembro e decorreu aquando da lecionação do capítulo das Funções do 9.° ano de escolaridade, estendendo-se durante doze aulas. A organização e estruturação da intervenção pedagógica segundo as aulas, tópicos abordados, tarefas implementadas, e correspondentes objetivos das aulas, encontram-se esquematizados na Tabela 3.

Tabela 3 – Síntese da intervenção pedagógica

Aula	Subtópico	Objetivo da aula
1 (45')	Funções linear, constante e afim (revisões): Tarefa 1.	Analisar o efeito da variação dos valores dos parâmetros nos gráficos das famílias das funções linear, constante e afim.
2 (90')	Correção da Tarefa 1. Declive de uma reta (revisões). Ficha de trabalho 1.	Determinar o declive de uma reta, imagem geométrica de uma função linear, constante ou afim; Averiguar o grau de apreensão e de compreensão dos conteúdos abordados na Tarefa 1.
3 (90')	Grandezas inversamente proporcionais. Função de proporcionalidade inversa: Tarefa 2. Correção da Tarefa 2 e registo de conclusões.	Reconhecer grandezas inversamente proporcionais; Concluir que é constante o produto de duas grandezas inversamente proporcionais; Reconhecer que uma função de proporcionalidade inversa é dada pela expressão da forma $f(x) = \frac{a}{x}$, onde a é a constante de proporcionalidade inversa, $x > 0 \; e \; a \neq 0$; Observar que o gráfico de uma função de proporcionalidade inversa é uma curva designada por "ramo de hipérbole".
4 (45')	Resolução de exercícios do manual.	Aplicar e consolidar os conhecimentos adquiridos.

Aula	Subtópico	Objetivo da aula
5 (90')	Gráficos de funções de proporcionalidade inversa: Tarefa 3. Ficha de trabalho 2	Reconhecer que o produto das coordenadas de qualquer ponto do gráfico de uma função de proporcionalidade inversa é constante, e corresponde à constante de proporcionalidade a, dada por $f(x) = \frac{a}{x}$ com $x > 0 \; e \; a \neq 0$; Averiguar o grau de apreensão e de compreensão dos conteúdos abordados nas Tarefas 2 e 3.
6 (90')	Questão de aula; Função quadrática do tipo $y = ax^2, com \; a \neq 0$: Tarefa 4	Averiguar o grau de apreensão e de compreensão dos conteúdos abordados nas Tarefas 1, 2 e 3; Analisar o efeito da variação do valor do parâmetro a nos gráficos das famílias das funções quadráticas do tipo $f(x) = ax^2, com \; a \neq 0$.
7 (45')	Correção da Tarefa 4 e registo de conclusões. Resolução de exercícios do manual.	Analisar o efeito da variação do valor do parâmetro a nos gráficos das famílias das funções quadráticas do tipo $f(x) = ax^2, com \; a \neq 0$; Aplicar e consolidar os conhecimentos adquiridos;
8 (90')	Resolução de exercícios do manual. Questão de aula.	Consolidar os conhecimentos adquiridos; Averiguar o grau de apreensão e de compreensão dos conteúdos abordados na Tarefa 4.
9 (90')	Modelação de gráficos em contextos reais: Tarefa 5.	Reconhecer a aplicação da matemática a situações da vida real; Aplicar os conceitos adquiridos sobre funções lineares, constantes, afins, de proporcionalidade inversa e quadrática do tipo $y = ax^2, com \; a \neq 0$.
10 (45')	Entrega e correção das Questões de aula.	Consolidar os conhecimentos adquiridos.
11 (90')	Resolução de exercícios de revisão e preparação para a ficha de avaliação.	Consolidar os conhecimentos adquiridos.
12 (90')	Ficha de avaliação escrita.	Averiguar o grau de apreensão e de compreensão dos conteúdos lecionados.

4.1.2 Descrição e análise das tarefas implementadas

Como já mencionado e justificado, das cinco tarefas investigativas implementadas, neste trabalho escrito apenas nos debruçamos sobre a análise de quatro destas tarefas, nomeadamente as tarefas investigativas números 1, 2, 3 e 5. Para cada uma destas tarefas, será apresentada a respetiva descrição e objetivos da sua implementação, seguida da análise das produções dos alunos combinada com as anotações das aulas e transcrição das gravações, realizadas durante a concretização das tarefas e a discussão dos resultados obtidos em cada tarefa. De seguida apresenta-se as dificuldades sentidas pelos alunos durante a realização de cada tarefa, e por fim a descrição e objetivos da tarefa de consolidação, bem como a confrontação entre os dados obtidos nos dois tipos de tarefas.

Tarefa 1: Explorar com o GeoGebra (Função Linear, Constante e Afim)

Da análise dos resultados da ficha de avaliação diagnóstica realizada no início desta intervenção, verificou-se que: reconhecer funções afim, linear e constante pela sua representação gráfica e expressão algébrica; reconhecer e relacionar o declive de uma reta com o sentido da inclinação da mesma; reconhecer que as retas não verticais são os gráficos das funções afim e, dada uma reta de equação $y = ax + b$, designar a por "declive" da reta e b por "ordenada na origem", são competências que os alunos não demonstraram ter adquirido. Apesar destes conceitos não fazerem parte do atual programa de 9.° ano de escolaridade, são essenciais para a compreensão dos conteúdos constantes no domínio das Funções deste programa, surgindo assim, a necessidade de elaboração da primeira tarefa, a qual foi planificada para uma aula de 45 minutos, para que, rapidamente, os alunos relembrassem os conceitos em causa.

A primeira tarefa investigativa (Tarefa 1) dividida em três partes e cada uma delas em três questões, foi realizada em grupo de acordo com a distribuição da Tabela 2, e com recurso ao computador e ao software GeoGebra. Esta tarefa consiste num guia de exploração de gráficos previamente construídos, envolvendo a variação de parâmetros e efeitos produzidos nos gráficos e expressões algébricas das funções: 1) Linear; 2) Constante; 3) Afim. Na primeira parte da Tarefa 1 – Função Linear $f(x) = ax$ – pretendia-se que os alunos investigassem como é que varia o gráfico da função f dado por $f(x) = ax + b$, em que $b = 0 \ e \ a \ \in IR$, atribuindo diferentes valores a a de forma a visualizarem a sua influência no comportamento do gráfico da função do tipo $f(x) = ax,$ nomeadamente para valores positivos e negativos de a, bem como para o aumento ou diminuição do valor absoluto de a. Na segunda parte – Função Constante $f(x) = b$ – pretendia-se que os alunos investigassem como é que varia o gráfico da função f dado por $f(x) = ax + b$, em que $a = 0 \ e \ b \in IR$, atribuindo diferentes valores a b de forma a visualizar o efeito produzido no comportamento do gráfico da função do tipo $f(x) = b,$ nomeadamente para valores positivos e negativos de b, e relacionando as coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função com o eixo das ordenadas, com cada valor de b atribuído. Na terceira e última parte – Função Afim $f(x) = ax + b$ – pretendia-se que os alunos investigassem como é que varia o gráfico da função f dado por

$f(x) = ax + b$, em que $a, b \in IR$, atribuindo diferentes valores a a e b de forma a visualizar o efeito produzido no comportamento do gráfico da função do tipo $f(x) = ax + b$, e relacionando as coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função com o eixo das ordenadas, com cada valor de b atribuído, de modo a interpretar geometricamente o valor de b.

Após a distribuição da tarefa pelos alunos e respetiva leitura, os alunos mantiveram-se passivos denotando alguma desorientação sobre como proceder para efetuarem a exploração da tarefa em causa. Surgiu assim, a necessidade de projetar e explicar o que se pretendia, através da alteração dos parâmetros a e b resultante da mobilização da "bolinha" com o cursor do rato, conforme indicações constantes na tarefa investigativa.

Com a exploração da primeira parte da tarefa, dividida em três questões, todos os grupos concluíram que independentemente do valor do parâmetro a, o gráfico de uma função do tipo $f(x) = ax$ é uma reta que passa sempre na origem do referencial (Figura 4).

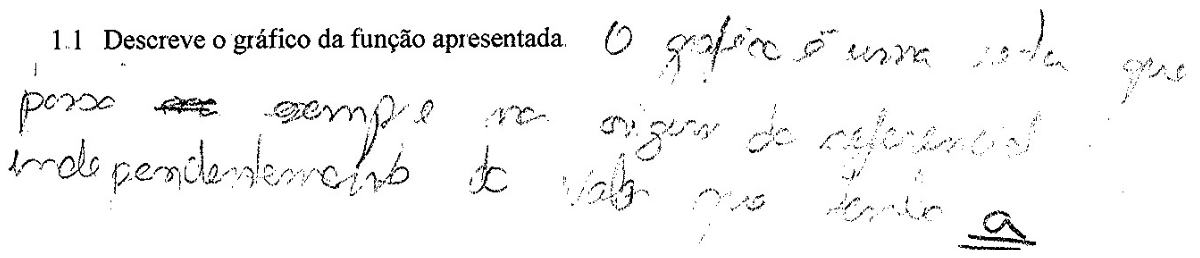

1.1 Descreve o gráfico da função apresentada. O gráfico é uma reta que passa sempre na origem do referencial independentemente do valor que tenha a

Figura 4 - Resolução da questão 1.1 da Tarefa 1, pelo grupo G6

Na segunda questão da primeira parte, era pedido aos alunos que atribuíssem diferentes valores ao parâmetro a e que registassem alguns desses exemplos, bem como as respetivas expressões algébricas e alterações verificadas nos respetivos gráficos. Verificou-se que quatro dos seis grupos fizeram o registo de exemplos de valores positivos e negativos de a, sendo que apenas um destes grupos regista o exemplo de $a = 0$, apesar da sua interpretação geométrica ser pouco clara (Figura 5). Este grupo regista "referencial" querendo referir-se à reta, e no caso de $f(x) = 0$, regista "passa na origem", mas não faz referência ao facto da reta coincidir com o eixo das abcissas. Outras incorreções relacionadas com a terminologia são observadas, por exemplo, o grupo G_2, escreve "passa no referencial", querendo dizer "passa na origem do referencial" (Figura 6).

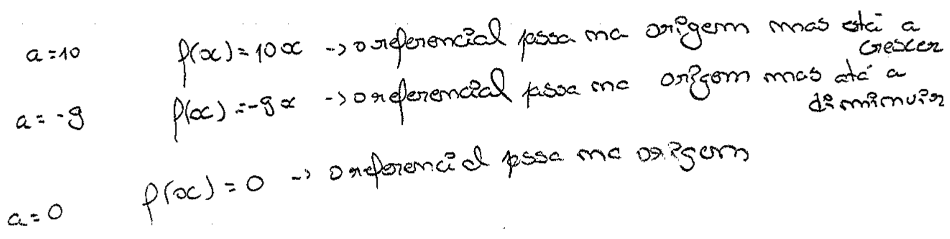

a=10 f(x)=10x -> o referencial passa na origem mas até a crescer
a=-8 f(x)=-8x -> o referencial passa na origem mas até a diminuir
a=0 f(x)=0 -> o referencial passa na origem

Figura 5 - Resolução da questão 1.2 da Tarefa 1, pelo grupo G4

Para $f(x) = 10x$, a reta é crescente e passa no referencial

Para $f(x) = -5x$, a reta ficou decrescente e continua a passar no referencial.

Para $f(x) = 2x$, a reta fica crescente, e passa no referencial

Figura 6 - Resolução da questão 1.2 da Tarefa 1, pelo grupo G2

No que diz respeito à relação entre o valor atribuído ao parâmetro a e respetiva expressão algébrica da função, todos os grupos denotam ter conseguido estabelecer esta relação. Quanto à relação entre o valor do parâmetro a/expressão algébrica da função, e o respetivo gráfico da função, cinco dos seis grupos fizeram referência à inclinação ou declive da reta, revelando que perceberam que alterações no valor do parâmetro a produz transformações no declive da reta (Figura 6 e Figura 7).

$a=3$
$f(x) = 3x$
a reta continua a passar na origem do referencial. Aumenta o declive

$a = 1$
$f(x) = 1x$
a reta continua a passar na origem do referencial. O declive diminui

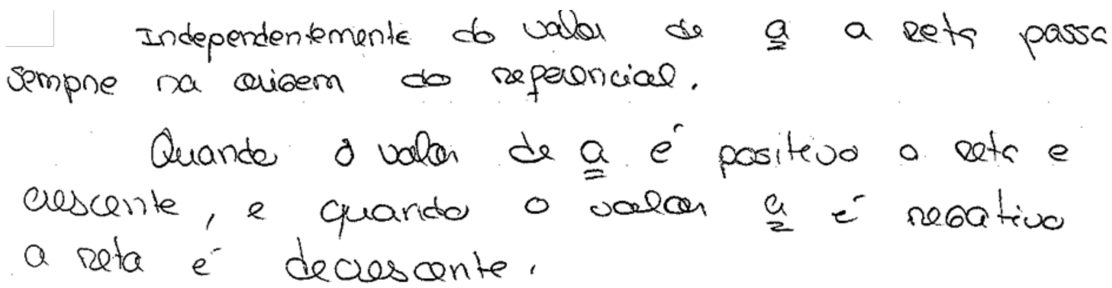
Figura 7 - Resolução da questão 1.2 da Tarefa 1, pelo grupo G1

Assim, quando se pede aos alunos que descrevam o que acontece ao gráfico da função $f(x) = ax$ para valores positivos e negativos de a e pela alteração do valor absoluto de a, todos os grupos demonstraram ter percebido que essas alterações se traduzem no declive da "reta que passa sempre na origem do referencial", contudo nenhum grupo conseguiu apresentar uma conclusão completa do que era pretendido (Figura 8 e Figura 9).

Quanto mais positivo o (a) for, mais aproximado do eixo das ordenadas (y) está.

Quanto mais negativo o (a) for, mais afastado do eixo das abssicas (x) está.

Figura 8 - Resolução da questão 1.3 da Tarefa 1, pelo grupo G2



Independentemente do valor de a a reta passa sempre na origem do referencial.

Quando o valor de a é positivo a reta e crescente, e quando o valor a é negativo a reta é decrescente.

Figura 9 - Resolução da questão 1.3 da Tarefa 1, pelo grupo G5

Apesar do seu registo estar incompleto, na aula, o grupo G_5 parecia ter alcançado por completo o objetivo desta parte da tarefa:

P: À medida que mudou o valor de a o que foi que aconteceu?

A_7: A reta passa sempre na origem do referencial.

P: Para valores de a positivos, o que é que acontece a essa reta?

A_7 e A_{13}: A reta cresce.

P: Para valores negativos de a?

A_7 e A_{13}: Decresceu.

P: À medida que aumentou o valor de a, o que é que está a acontece à reta?

A_{13}: Está mais próxima do eixo – disse, apontando para o eixo das ordenadas.

P: Escreva isso.

Também o grupo G_1 apresentou um registo incorreto da conclusão pretendida (Figura 10), apesar de na aula ter respondido corretamente às questões colocadas pela professora:

P: Vamos ver –– exemplificando no ficheiro do GeoGebra –– para valores de a negativos, o que está a acontecer à reta?

A_1: Está a descer.

P: A decrescer. E valores positivos?

A_8: Cresce.

P: Vamos agora aumentar o valor de a?

A_1 :A inclinação aumenta.

P: Se diminuísse ao valor de a?

A_1: A inclinação diminuía.

P: Pronto registe isso. Mas repare fizemos para valores positivos de a. Se fossem negativos podíamos fazer a mesma conclusão?

A_1: Sim.

P: Experimentem primeiro e depois registem as conclusões.

Quando o valor de a é positivo o declive aumenta,
quando o valor de a é negativo o declive diminui.

Figura 10 - Resolução da questão 1.3 da Tarefa 1, pelo grupo G1

Na exploração da segunda parte da tarefa, relativa à função constante do tipo $f(x) = b$, todos os grupos concluíram que o gráfico é uma reta horizontal. A questão 2, desta segunda parte, pede o registo de exemplos concretos para o parâmetro b e consequentes alterações verificadas nas respetivas expressões algébricas e gráficos das funções. Da análise das produções dos alunos, constata-se que todos os grupos fizeram uma correta correspondência entre o valor atribuído a b, a expressão algébrica da função e as alterações no respetivo gráfico da função, bem como o registo correto das coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função com o eixo das ordenadas. De referir que o grupo G_1, à semelhança da primeira parte, continuou a registar exemplos apenas para valores positivos de b (Figura 11), além disso, não faz a distinção entre ordenada na origem e coordenadas do ponto com ordenada na origem. Apenas dois grupos registaram o exemplo de $b = 0$ (Figura 12 e Figura 13).

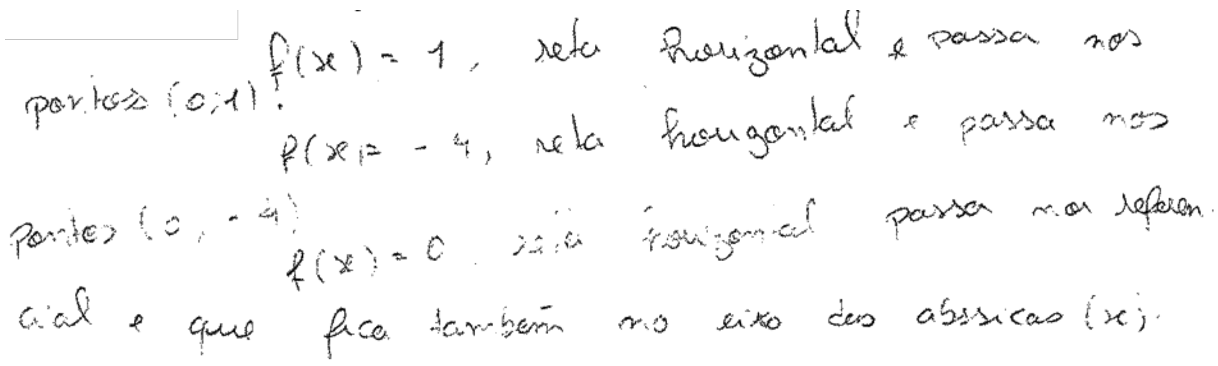
$b = 3$
$f(x) = 3$
Não passa na origem
do referencial a
reta subiu e a ordenada
da origem é (0, 3)

$b = 1$
$f(x) = 1$
Não passa na origem
do referencial, a
reta desceu e a ordenada
na origem é (0, 1)

Figura 11 - Resolução da questão 2.2 da Tarefa 1, pelo grupo G1

f(x) = 4, em que o ponto é (0,4)
f(x) = -2, em que o ponto é (0,-2)
f(x) = 0, em que o ponto é (0,0)
Seja qual for o valor de y o x será sempre
0 em que a reta vai ser sempre horizontal.

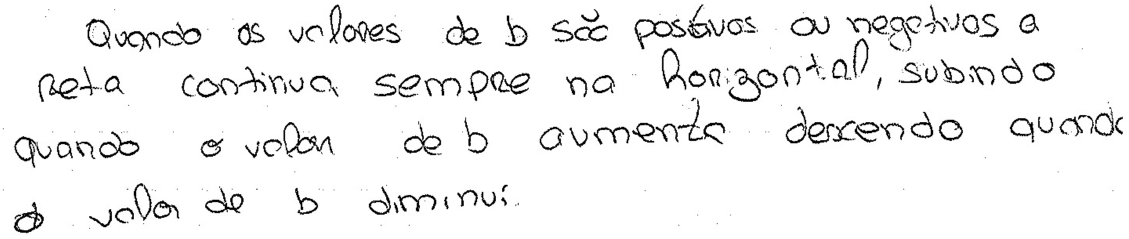
Figura 12 - Resolução da questão 2.2 da Tarefa 1, pelo grupo G5



f(x) = 1, reta horizontal e passa nos pontos (0;1).
f(x) = - 4, reta horizontal e passa nos pontos (0, - 4).
f(x) = 0 reta horizontal passa na referencial e que fica também no eixo das abssicas (x).

Figura 13 - Resolução da questão 2.2 da Tarefa 1, pelo grupo G2

Apesar do grupo G_2 exemplificar e registar o caso em que $b = 0$, na conclusão final, este grupo referiu incorretamente que "a reta nunca passa na origem do referencial". A mesma afirmação é assinalada pelos grupos G_3 e G_4. De um modo geral, os restantes grupos concluíram que o gráfico de uma função do tipo $f(x) = b$ é uma reta horizontal que depende do valor de b apesar de não especificarem o caso em que $b = 0$ (Figura 14).



Quando os valores de b são positivos ou negativos a reta continua sempre na horizontal, subindo quando o valor de b aumenta descendo quando o valor de b diminui.

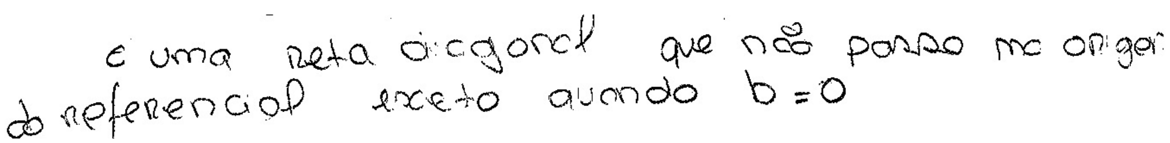
Figura 14 - Resolução da questão 2.3 da Tarefa 1, pelo grupo G1

A terceira parte da tarefa diz respeito à função afim, do tipo $f(x) = ax + b$. Na primeira questão desta parte é pedido aos alunos que mantenham o valor $a = 1$ e atribuam diferentes valores ao parâmetro b, de forma a estudar o gráfico da função $f(x) = x + b$. O grupo G_4 não respondeu a esta questão por escrito, apesar de na aula o ter feito oralmente:

P: Como é a reta? É horizontal? Passa sempre na origem do referencial?

A_{10}: Não, é obliqua.

Os restantes grupos concluíram que o gráfico é uma reta oblíqua, mas só os grupos G_1 e G_5 referiram o facto desta reta poder passar na origem do referencial (Figura 15 e Figura 16).



é uma reta diagonal que não passa na origem do referencial exceto quando b = 0

Figura 15 - Resolução da questão 3.1 da Tarefa 1, pelo e grupo G1

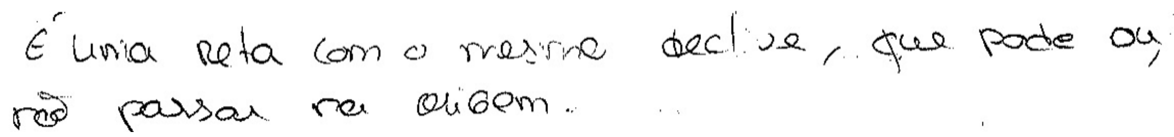

É uma reta com o mesmo declive, que pode ou não passar na origem.

Figura 16 - Resolução da questão 3.1 da Tarefa 1, pelo grupo G5

A questão dois pede para atribuir e registar diferentes valores ao parâmetro b, bem como as diferentes expressões algébricas, as alterações observadas nos gráficos das respetivas funções, o valor da ordenada na origem para cada caso e as coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função com o eixo das ordenadas. Da análise dos trabalhos dos alunos verificou-se que, com exceção do grupo G_1 que não atribuiu valores concretos a b (Figura 17), os restantes grupos apresentaram uma descrição do gráfico da função em conformidade com a respetiva expressão algébrica. Contudo, nenhum grupo fez o registo do valor da ordenada na origem, nem o registo correto das coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função com o eixo das ordenadas, apesar de o terem feito na segunda parte da tarefa e na discussão dos resultados, realizada na aula seguinte.

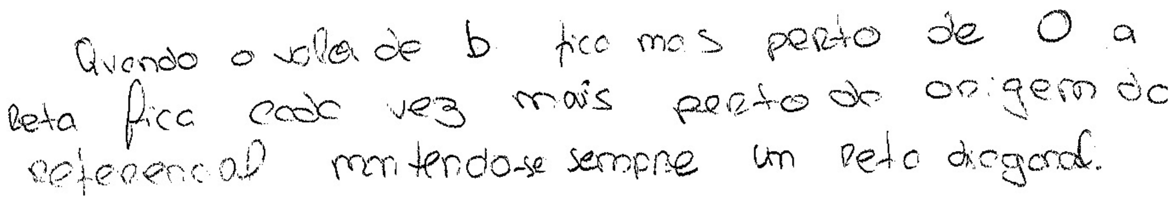
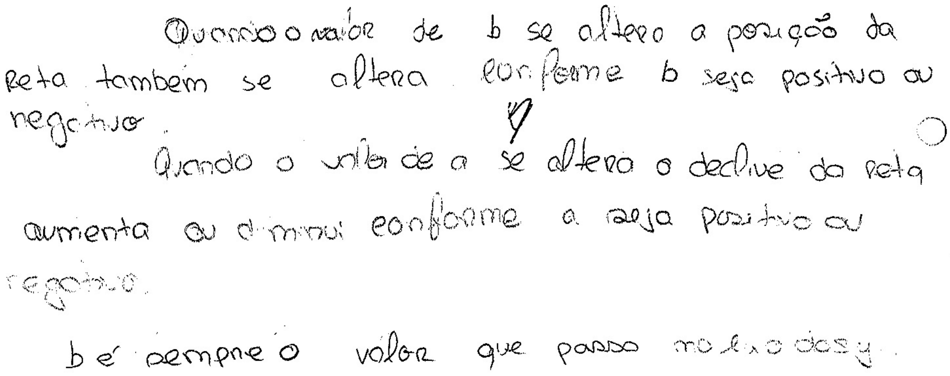

Quando o valor de b fica mais perto de 0 a reta fica cada vez mais perto da origem do referencial mantendo-se sempre uma reta diagonal.

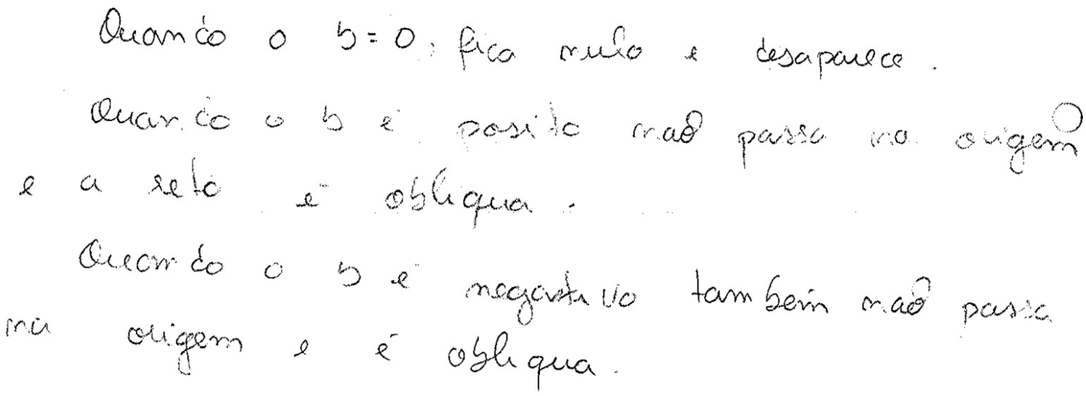
Figura 17 - Resolução da questão 3.2 da Tarefa 1, pelo grupo G1

Na questão três desta parte da tarefa, os alunos deveriam escrever numa pequena conclusão, quais as alterações observadas no gráfico da função do tipo $f(x) = ax + b$, para diferentes valores de a e de b, bem como interpretar geometricamente o valor b. A análise dos resultados mostra que três dos grupos (G_1, G_3 e G_5), denotam ter percebido os efeitos produzidos no gráfico da função do tipo $f(x) = ax + b$ pela alteração dos parâmetros a e b, bem como a correta interpretação geométrica de b, apesar dos registos escritos revelarem algumas dificuldades em objetivar as observações realizadas (Figura 18). Dois dos grupos (G_4 e G_6), não responderam a esta questão, talvez por falta de tempo, uma vez que foram bastante participativos aquando da discussão dos resultados. O grupo G_2, referiu-se apenas ao efeito produzido no gráfico pela alteração do parâmetro b (Figura 19), talvez por falta de tempo ou por não terem percebido corretamente o enunciado.



Quando o valor de b se altera a posição da reta também se altera conforme b seja positivo ou negativo.
Quando o valor de a se altera o declive da reta aumenta ou diminui conforme a seja positivo ou negativo.
b é sempre o valor que passa no eixo dos y.

Figura 18 - Resolução da questão 3.3 da Tarefa 1, pelo grupo G1



Quando o b=0, fica nulo e desaparece.
Quando o b é positivo não passa na origem e a reta é obliqua.
Quando o b é negativo também não passa na origem e é obliqua.

Figura 19 - Resolução da questão 3.3 da Tarefa 1, pelo grupo G2

Dificuldades sentidas pelos alunos durante a Tarefa 1

Após a distribuição da tarefa, verificou-se que os alunos demoraram algum tempo a ambientar-se ao computador/software GeoGebra e a perceberem as finalidades da tarefa. Alguns alunos começaram a mexer no ficheiro da tarefa no GeoGebra, sem lerem o enunciado. Outros, mesmo depois de lerem o enunciado, não perceberam as finalidades da tarefa. Confirmou-se assim, que os alunos não tinham experiência em trabalhar com este tipo de tarefas, sendo necessário a intervenção da professora para explicar o objetivo e procedimentos a seguir na exploração da tarefa. Além disso, inicialmente houve uma requisição constante da professora pelos alunos, para confirmarem o que tinham de registar. Esta necessidade foi diminuindo ao longo da exploração da tarefa:

A_3: Professora pode chegar aqui? O que é para dizer na 1.1?

(1.1 Descreve o gráfico da função apresentada)

P: Como é o gráfico?

A_3: É uma reta que passa na origem do referencial.

P: Escreva isso.

Confirmou-se também, relativamente aos dados obtidos pela implementação do questionário inicial, de que os alunos desconheciam o software GeoGebra. Logo no início da implementação da tarefa, alguns alunos alteraram a escala do referencial e deixaram de visualizar o gráfico da função:

A_{10}: Professora pode chegar aqui? O gráfico desapareceu.

P: O que é que você fez?

A_{10}: Eu queria puxar para baixo e desapareceu.

O aluno queria reposicionar o referencial no monitor, e instintivamente move o scroll do rato no sentido descendente, o que provocou a alteração do zoom de visualização. Para fazer este reposicionamento o aluno deveria clicar para selecionar o que pretendia mover, e depois arrastar. Esta indicação aparece explicitada na barra de ferramentas do ficheiro da tarefa a ser trabalhada (Figura 20), mas a falta de experiência em trabalhar com este tipo de software inabilitou o aluno para a procura da informação pretendida.

Figura 20 - Cabeçalho do GeoGebra relativo ao ficheiro da Tarefa 1.

De um modo geral, os alunos apresentaram bastantes dificuldades em verbalizar e a concretizar por escrito as observações que fazem, sendo necessário constantes intervenções da professora, que através de sucessivas questões, tentou que estes organizassem as ideias e verbalizassem o que observavam:

P: Para $a = 10$, como ficou a expressão algébrica da função? $f(x)$ igual a ...?

A_{10}: $10x$

P: Como ficou o gráfico ?

A_{10}: Positivo.

P: Positivo? O que é que quer dizer com "positivo"?

A_{10}: Passa na origem do referencial e ... (pausa)

P: O que é que está a acontecer à reta?

A_{10}: Está a crescer.

Apesar de chegarem a esta conclusão, o grupo deste aluno (G_4), à semelhança de outros grupos e de outras situações (já relatada situação com os grupos G_1 e G_5 relativamente à questão 1.3 – Figura

10), não fizeram o registo escrito de conclusões que na aula evidenciaram ter compreendido, ou quando o fazem é de forma incompleta e/ou pouco clara.

Verifica-se também algumas incorreções relacionadas com a terminologia. Como já foi referido, o grupo G_2 registou várias vezes "referencial", querendo referir-se à origem do referencial (Figura 6 e Figura 13), apesar de na aula um aluno, A_3, deste grupo o ter referido corretamente. O grupo G_1 usou a designação "diagonal" para descrever a reta oblíqua (Figura 15 e Figura 17). Na aula um aluno deste grupo, A_1, usou o termo "descer" para se referir a "decrescer", e o grupo G_4 usou o termo "positivo" para referenciar que a reta é crescente. Nos registos escritos, este grupo, usou "reta aumenta" quando é a inclinação da reta que aumenta (Figura 21) e o termo "diminuir" em vez de decrescer.

Quanda aumentamos o "a" a reta aumenta
Quando diminuimos a reta aproxima-se do x.

Figura 21 - Resolução da questão 1.3 da Tarefa 1, pelo grupo G4

Como já foi mencionado, cada uma das três partes da tarefa termina com uma questão relativa às conclusões obtidas na exploração da referida parte. A esta questão antecede uma questão em que os alunos têm de fazer o registo de valores concretos para os parâmetros a ou b, bem como as alterações verificadas no gráfico de cada função para os respetivos valores. Da análise dos trabalhos dos alunos, verifica-se que para o registo das conclusões, os alunos nem sempre têm em atenção os exemplos dados. Por exemplo, na primeira parte da tarefa, o grupo G_2, apesar de ter relacionado corretamente os valores atribuídos ao parâmetro a com a monotonia do gráfico da função (Figura 6), na conclusão não fez qualquer referência a este facto (Figura 8). Na segunda parte da tarefa, o grupo G_2 atribuiu o valor de zero ao parâmetro b e concluiu corretamente que a reta é horizontal e coincide com o eixo das abcissas (Figura 13), contudo, na conclusão este grupo registou explicitamente que a "reta nunca passa na origem do referencial". Denotando-se assim um desfasamento entre os exemplos dados e as conclusões registadas, o que pode ser justificado pela falta de atenção dos alunos na elaboração da tarefa ou por uma "compartimentalização" efetuada pelos alunos na realização da tarefa, não relacionando as diferentes questões, em virtude da falta de prática em trabalhar com este tipo de tarefas.

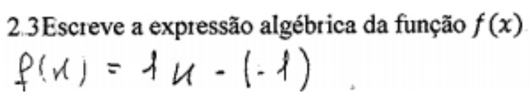
Esta tarefa foi programada para uma aula de 45 minutos, uma vez que se pretendia relembrar conceitos abordados nos anos letivos anteriores e que não fazem parte do atual programa do 9.º ano de escolaridade. Contudo, verificou-se que os alunos precisariam de mais tempo para a realização da mesma tarefa, tendo dois grupos não realizado a conclusão da terceira parte. Esta necessidade de tempo extra pode ter surgido pelo facto de os alunos terem demorado algum tempo a ambientar-se aos recursos tecnológicos e às finalidades da tarefa investigativa, em virtude da falta de experiência com este tipo de tarefas. De facto, verificou-se que o tempo despendido pelos alunos em cada parte da tarefa foi diminuindo ao longo da realização da mesma, apesar da terceira parte da tarefa requerer a concretização de mais exemplos. O que revela que, à medida que os alunos se foram familiarizando com a tarefa, foram ficando mais autónomos e ativos na exploração da mesma.

Confrontação com os dados obtidos na tarefa de consolidação.

A tarefa de consolidação dos resultados obtidos na tarefa investigativa n.° 1 (Tarefa 1), consiste numa ficha de trabalho (Ficha de trabalho 1) com cinco questões baseadas em questões já apresentadas aos alunos, aquando da aplicação da ficha de diagnóstico implementada no início desta intervenção. Esta ficha de trabalho foi realizada em grupo, mantendo-se a constituição usada para a resolução da Tarefa 1. A alínea 2.1 e o exercício 4. dizem respeito à determinação do declive de uma reta não vertical, pelas coordenadas dos seus pontos, conteúdo relembrado pela professora após a discussão e registo das conclusões obtidas pela exploração da Tarefa 1, pelo que não serão aqui analisados.

No primeiro exercício, os alunos deveriam reconhecer que numa função do tipo $f(x) = ax + b$, o declive da reta é dado pelo parâmetro a. Na ficha de diagnóstico, cerca de 69% dos alunos responderam corretamente a esta questão, agora 100% dos grupos identificaram corretamente o valor do declive, o que está em conformidade com o facto de na Tarefa 1 todos os grupos terem associado o parâmetro a, às alterações observadas no declive da reta, gráfico da função em estudo.

O segundo exercício pede aos alunos que identifiquem a ordenada na origem por observação do gráfico da função f, e que escrevam a expressão algébrica desta função. Apesar de na Tarefa 1, a maioria dos grupos não terem feito o registo do valor da ordenada na origem para os diferentes exemplos experimentados, verificou-se agora um registo correto em 100% dos grupos. Na questão da ficha de diagnóstico relativa a esta competência, apenas cerca de 15% dos alunos responderam corretamente. Nas resoluções deste exercício, verifica-se ainda, a correta escrita da respetiva expressão algébrica em 67% dos grupos. Os dois grupos que falharam evidenciaram identificar corretamente os parâmetros a e b, mas assumem que a função é do tipo $f(x) = ax - b$ (Figura 22).

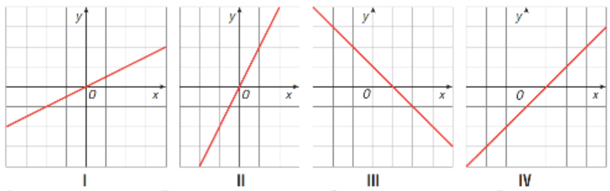

2.3 Escreve a expressão algébrica da função $f(x)$

$f(x) = 1x - (-1)$

Figura 22 - Resolução da questão 2.3 da Ficha de trabalho 1, pelo grupo G5

O exercício número três, envolve a identificação de funções lineares, constantes e afim, competência que na ficha de diagnóstico realizada no início da intervenção, foi evidenciada por apenas cerca de 15% dos alunos. Na resolução deste exercício, 100% dos grupos responderam corretamente.

O quinto e último exercício desta ficha de trabalho, envolve a associação de diferentes representações gráficas de funções, à respetiva expressão algébrica, com a respetiva justificação (Figura 23). Na ficha de diagnóstico aplicada, este exercício pedia apenas para fazer a referida associação sem justificar, tendo-se obtido um sucesso de cerca de 23%. Depois da aplicação da Tarefa 1 e da discussão dos resultados obtidos, 100% dos grupos fez a correta associação. Quanto à justificação desta associação, apenas um grupo, G_6, optou por recorrer à determinação do declive (Figura 24). Os restantes grupos justificaram através de comparações entre a monotonia da função e o sinal do parâmetro a, e entre o valor absoluto deste parâmetro e a inclinação da reta apresentada (Figura 25 e Figura 26).


5. Associa cada uma das seguintes representações gráficas de funções afim à expressão algébrica que a representa:

A.	B.	C.	D.
I: $y = 2x$	I: $y = 0{,}5x$	I: $y = 0{,}5x$	I: $y = 0{,}5x$
II: $y = 0{,}5x$	II: $y = 2x$	II: $y = 2x$	II: $y = 2x$
III: $y = -x + 1$	III: $y = x - 1$	III: $y = x - 1$	III: $y = -x + 1$
IV: $y = x - 1$	IV: $y = -x + 1$	IV: $y = -x + 1$	IV: $y = x - 1$

Explica como chegaste à tua opção:

Figura 23 - Enunciado da questão 5. da Ficha de trabalho 1.

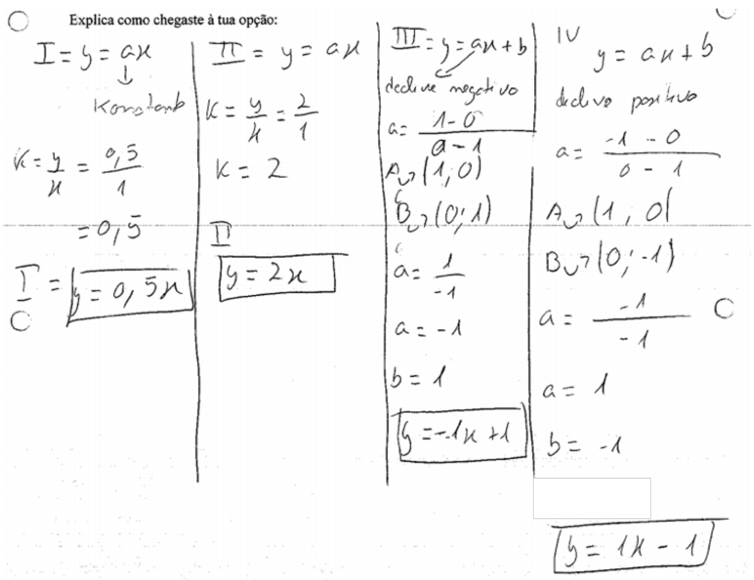


Figura 24 - Resolução de questão 5 da Ficha de trabalho 1, pelo grupo G6

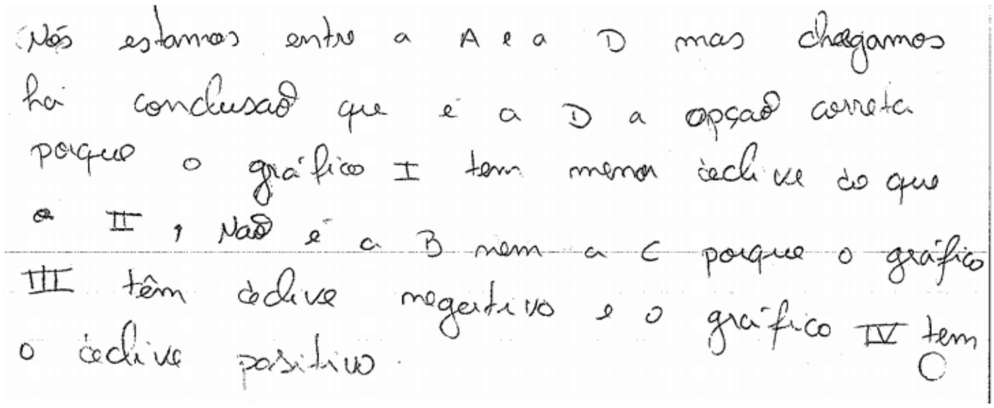
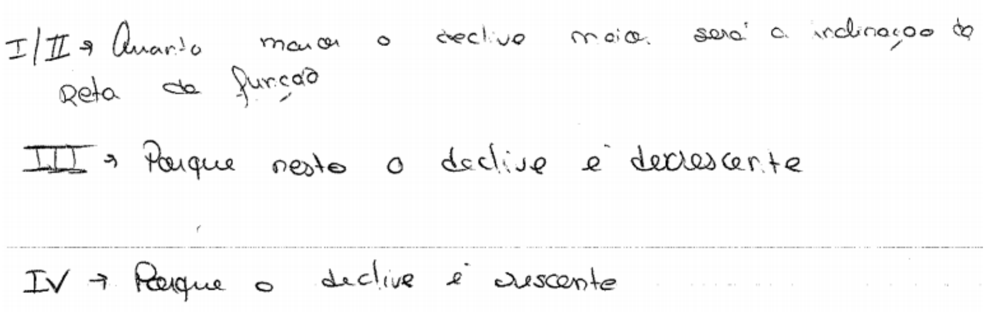

Nós estamos entre a A e a D mas chegamos há conclusaõ que é a D a opçaõ correta porque o gráfico I tem menor declive do que o II, Naõ é a B nem a C porque o gráfico III têm declive negativo e o gráfico IV tem o declive positivo.

Figura 25 - Resolução da questão 5. da Ficha de trabalho 1, pelo grupo G2


I/II → Quanto maior o declive maior será a inclinação da Reta da função

III → Porque neste o declive é decrescente

IV → Porque o declive é crescente

Figura 26 - Resolução de questão 5. da Ficha de trabalho 1, pelo grupo G5

A resolução desta ficha de trabalho foi realizada pelos alunos de forma bastante autónoma, requisitando a professora apenas para confirmar raciocínios ou caminhos a seguir.

Tarefa 2: A resistência do esparguete

A segunda tarefa investigativa (Tarefa 2) foi implementada com o objetivo de introduzir os conceitos relativos ao estudo de funções de proporcionalidade inversa, nomeadamente: reconhecer a existência de grandezas inversamente proporcionais; reconhecer que dadas duas grandezas inversamente proporcionais é constante o produto das duas grandezas, designado por constante de proporcionalidade inversa; distinguir a variável independente da variável dependente; reconhecer que o comportamento da variável dependente varia em função do comportamento da variável independente; reconhecer que a função que associa a variável dependente y à variável independente x é dada por $y = f(x) = \frac{a}{x}$, e concluir que a é a constante de proporcionalidade inversa; saber que o gráfico de uma função de proporcionalidade inversa é uma curva designada por "ramo da hipérbole" (Bivar et al., 2012).

Dividida em três partes, esta tarefa foi aplicada numa aula de 90 minutos, seguida da discussão, em grupo-turma dos resultados obtidos e registo de conclusões. Com recurso ao retroprojetor e ao viewscreen ligado a uma calculadora TI – 83 Plus Silver Edition, foi realizada em grupos de três ou quatro elementos, conforme a distribuição organizada na Tabela 3. Para a sua concretização foi necessário algum material, nomeadamente: fio de pesca; moedas de 2,5 escudos como pesos; paus de esparguete; sacos de tule para colocar dentro os pesos; fita cola; régua; e calculadoras gráficas.

A tarefa consiste num guia de exploração de uma experiência, com recurso à calculadora gráfica TI-84 Plus. Essa experiência, por sua vez, consiste em colocar um pau de esparguete numa mesa, perpendicular ao bordo, com uma parte fora da mesa (Figura 27). De seguida, prender um saco de tule com o fio de pesca de forma a suspendê-lo no pau de esparguete, e medir o comprimento do esparguete que ficou para fora do bordo da mesa. No saco de tule é colocado, contando um a um, os pesos até o esparguete partir, registando-se o comprimento em centímetros do esparguete (designado por e) e o número de pesos necessário para ele partir (designado por p).

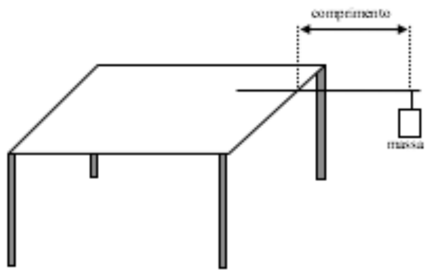


Figura 27 - Ilustração da experiência da Tarefa 2

Na primeira parte da tarefa, os alunos deveriam repetir a experiencia descrita, de modo a que o comprimento e do esparguete fora da mesa tomasse cinco valores diferentes, de acordo com as informações da tabela fornecida (Figura 28), e completar a referida tabela com os dados obtidos.

comprimento e do esparguete fora da mesa (cm)	20	15	10	5	3
número de pesos p necessários para partir					
$e \times p$					
Coordenadas dos pontos (e, p)					

Figura 28 - Tabela da primeira parte da Tarefa 2.

A segunda parte desta tarefa é constituída por quatro questões. As duas primeiras são relativas às variáveis em estudo, e a terceira pede para que os alunos representem os dados obtidos num sistema de eixos cartesiano e verifiquem se a situação traduz uma função. Por último, a quarta questão é um guia de procedimentos a seguir na calculadora gráfica, de modo a obterem o gráfico construído na questão anterior.

O objetivo da terceira parte da Tarefa 2 é o de encontrar uma função que descreva a situação obtida por cada grupo de trabalho. Para isso, os alunos deveriam seguir um guia de procedimentos a executar na calculadora gráfica, seguida do registo da expressão algébrica verificada no ecrã e respetivo gráfico, finalizando com uma breve conclusão onde deveriam registar o que de mais significativo puderam retirar da execução desta tarefa, nomeadamente quanto ao comportamento das variáveis em estudo, tipo de proporcionalidade, equação que traduz esse tipo de proporcionalidade, e representação gráfica.

A aula teve início com a distribuição de duas calculadoras gráficas TI-84 Plus Silver Edition por cada grupo de trabalho, seguida da projeção e explicação das principais funções da mesma calculadora gráfica (Figura 29). Após a distribuição da tarefa pelos alunos, a professora procedeu à sua leitura, explicando quais os materiais a utilizar e os procedimentos a seguir para executarem a experiência, simulando com os alunos, a experiência para $e = 20\ cm$. Para este primeiro registo, a docente levou o material previamente preparado, nomeadamente o saco de tule preso com o fio de pesca ao pau de esparguete.

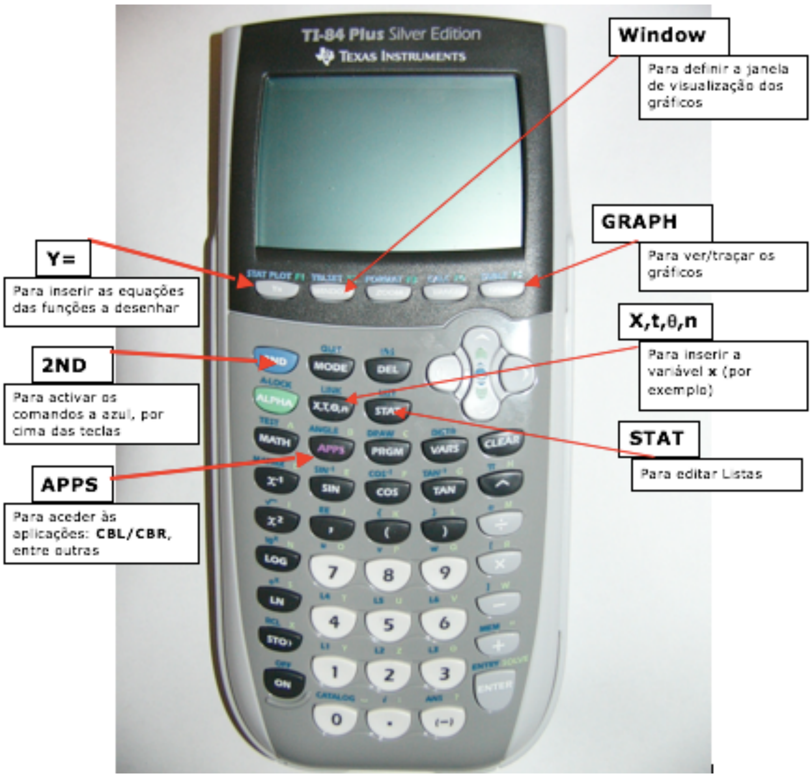


Figura 29 - Ilustração das principais funções da calculadora gráfica TI - 84 projetadas

Na primeira parte da tarefa, fase da experiência, os alunos foram bastante autónomos. Enquanto que um aluno segurava o esparguete com o comprimento pretendido fora da mesa, outro colocava as moedas/pesos no saco de tule, e o terceiro elemento do grupo foi registando na tabela os resultados obtidos. Este modo de trabalhar foi adotado por três dos quatro grupos, uma vez que a ausência de dois alunos, A_{11} e A_{12}, implicou que o grupo G_4 ficasse com apenas dois alunos, os quais optaram por registar os dados no final de cada "pesagem". Relativamente aos dados obtidos durante esta fase, verifica-se que os resultados alcançados por três dos grupos, G_1, G_3 e G_4, são sensivelmente semelhantes (Figura 30), enquanto que os obtidos pelo grupo, G_2, são mais disparos (Figura 31).

comprimento ***e*** do esparguete fora da mesa (cm)	20	15	10	5	3
número de pesos ***p*** necessários para partir	3	4	5	12	19
e* × *p	60	60	50	60	57
Coordenadas dos pontos **(*e*, *p*)**	(20,3)	(15,4)	(10,5)	(5,12)	(3,19)

Figura 30 - Resultados obtidos na experiência da Tarefa 2, pelo grupo G3

comprimento ***e*** do esparguete fora da mesa (cm)	20	15	10	5	3
número de pesos ***p*** necessários para partir	3	2	4	7	10
e* × *p	60	30	40	35	30
Coordenadas dos pontos **(*e*, *p*)**	(20; 3)	(15; 2)	(10; 4)	(5; 7)	(3; 10)

Figura 31 - Resultados obtidos na experiência da Tarefa 2, pelo grupo G2

Nas questões da segunda parte da tarefa, todos os grupos concluíram corretamente que à medida que o comprimento do esparguete fora da mesa diminuiu, o número de pesos necessários para o partir aumentou. Também todos os grupos identificaram corretamente qual a variável independente e qual a variável dependente, apesar de apenas um grupo, G_1, apresentar uma justificação (Figura 32).

2.1 O que acontece ao número de pesos necessário para partir o esparguete, à medida que o comprimento do esparguete fora da mesa diminui? Á medida que o tamanho do esparguete diminuí o número de pesos aumenta.

2.2 Identifica, justificando, a variável dependente e a variável independente.
O comprimento do esparguete é a variável independente e o número de pesos é a variável dependente pois depende do comprimento do esparguete.

Figura 32 - Resolução de 2.1 e 2.2 da Tarefa 2, pelo grupo G1

Do mesmo modo, todos os grupos representaram corretamente os pontos obtidos na tabela, no sistema de eixos cartesianos, registando corretamente os valores da variável independente no eixo das abcissas e os valores da variável dependente no eixo das ordenadas. Contudo, apenas um grupo, G_4, respondeu à questão colocada, justificando corretamente (Figura 33).

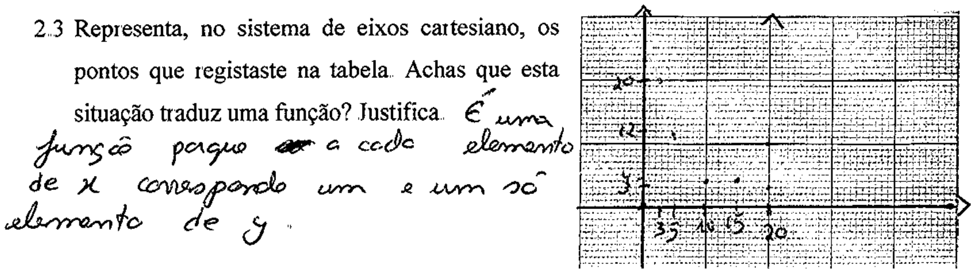


Figura 33 - Resolução de 2.3 da Tarefa 2, pelo grupo G4.

Relativamente à questão 2.4, com exceção dos grupos G_2 e G_1, os restantes grupos seguiram de forma autónoma e com sucesso os procedimentos listados nesta questão, para obter, na calculadora gráfica, a representação pedida na questão 2.3. O grupo G_1 requisitou a intervenção da professora apenas para confirmar o que estavam a fazer e para redefinir a janela de visualização, uma vez que não estavam a observar todos os pontos introduzidos nas listas. Por outro lado, o grupo G_2 manifestou dificuldades em seguir o guião apresentado. Contudo, quando a professora tentou acompanhar os alunos na exploração deste guia, percebeu que os alunos não leram integralmente os procedimentos a seguir. Os alunos deste grupo apenas seguiram as imagens display da calculadora, apresentadas no guia de procedimentos, sem lerem as orientações com os comandos a utilizar para passarem de uma imagem display para outra.

Quanto ao guia de procedimentos a seguir na terceira e última parte desta tarefa, com exceção do grupo G_2 que continuou a evidenciar a não leitura das orientações apresentadas, os restantes grupos executaram estes procedimentos de forma autónoma, chegando rapidamente aos resultados pedidos (Figura 34). Contudo, limitaram-se a reproduzir o que a máquina de calcular lhes apresentou, não respondendo à questão: "O que verificas?".

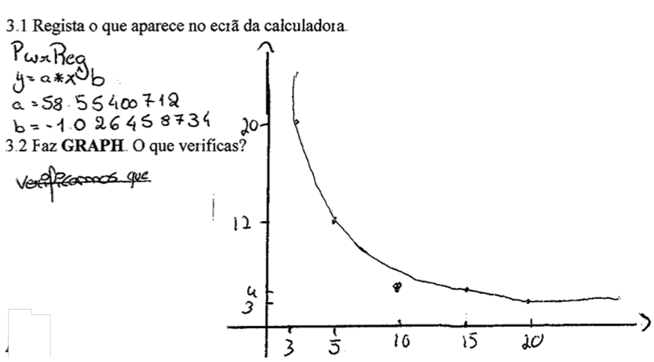


Figura 34 - Resolução de 3.1 e 3.2 da Tarefa 2, pelo grupo G4.

Na conclusão pedida, todos os grupos registaram corretamente o que acontece ao comportamento das variáveis em estudo, mas só dois grupos, G_1 e G_3, se referiram à "constante" ou ao produto das duas variáveis (Figura 35 e Figura 36). Todos os grupos registaram que o gráfico apresentado não é uma reta, sendo que o grupo G_1 referiu que "Não é uma reta que não passa na origem do referencial..." como se quisesse justificar que não se trata de uma função de proporcionalidade direta, apesar de não o fazer explicitamente (Figura 36). Apenas um grupo, G_2, registou que a proporcionalidade não é direta, enquanto que os grupos G_3 e G_4 registaram que a proporcionalidade é inversa (Figura 35). Também um aluno, A_3, do grupo G_1 chamou a professora apenas para lhe perguntar se a curva obtida se chamava hipérbole ou parábola. De referir que cada grupo de trabalho tem na sua constituição pelo menos um elemento que está a repetir o 9.º ano de escolaridade, o que pode justificar este tipo de "antecipação" de conceitos apesar da professora não os ter formalizado antes da realização da tarefa em questão. Durante a discussão dos resultados obtidos, realizada em grupo-turma, no final da tarefa, todos os alunos concordaram que o tipo de proporcionalidade apresentada não poderia ser direta, dado o comportamento das variáveis envolvidas.

Quanto à equação que traduz o tipo de proporcionalidade apresentada, todos os grupos, com exceção do grupo G_4, concluíram que era do tipo $y = ax^b$, apesar de não fazerem qualquer tipo de referência ao facto do parâmetro b ser negativo, nem relacionarem o parâmetro a encontrado com o produto das variáveis obtido na tabela inicial da experiência. Durante a discussão, a docente leu em alta voz os resultados obtidos por cada grupo, para que os alunos verificassem que todos tinham obtido um valor negativo para o parâmetro b, e quando questionou os alunos sobre o que fazer para transformar um expoente negativo em positivo, nenhum aluno respondeu, admitindo depois que não se lembravam. O grupo G_4 não apresentou qualquer tipo de expressão para a função apresentada, talvez porque este grupo, tendo só dois elementos, demorou mais tempo que os restantes grupos a executarem a tarefa, e por isso entregou o trabalho efetuado sem este registo.

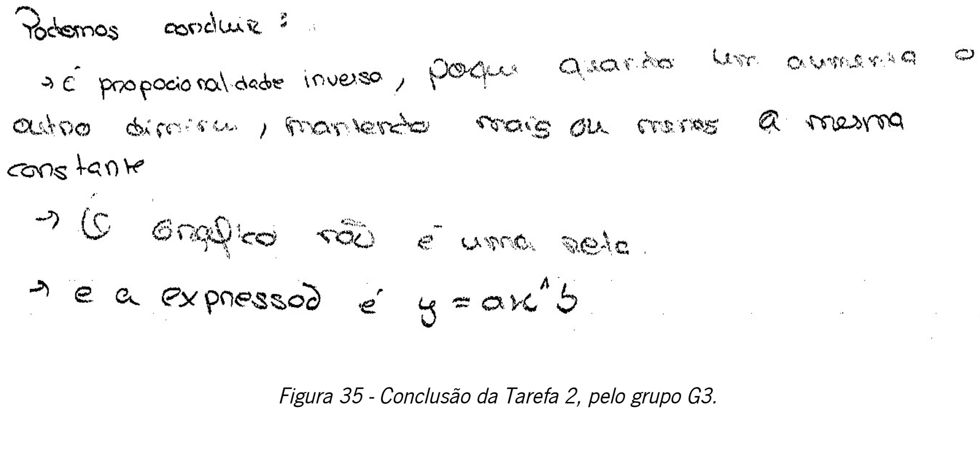
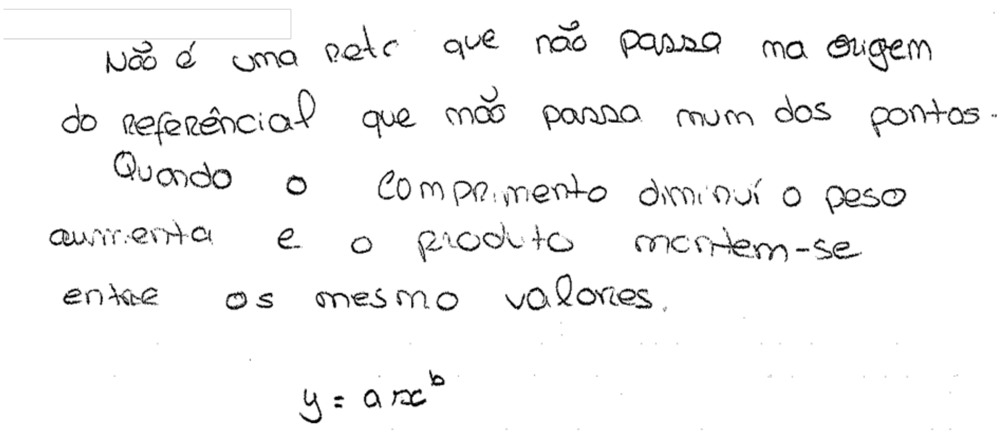

Podemos concluir:
→ é proporcionalidade inversa, porque quando um aumenta o outro diminui, mantendo mais ou menos a mesma constante
→ O gráfico não é uma reta.
→ e a expressão é y = ax^b

Figura 35 - Conclusão da Tarefa 2, pelo grupo G3.


Não é uma reta que não passa na origem
do referêncial que não passa num dos pontos.
Quando o comprimento diminuí o peso
aumenta e o produto mantem-se
entre os mesmo valores.

$y = ax^b$

Figura 36 - Conclusão da Tarefa 2, pelo grupo G1.

Dificuldades sentidas pelos alunos durante a Tarefa 2

Uma das dificuldades manifestada pelos alunos, está relacionada com a fragilidade do material utilizado para a concretização da experiência. Os alunos perceberam de imediato quais os procedimentos a executar para a realização da experiência em causa, mas o manuseamento do material implicou algumas interrupções. Por exemplo, no grupo G_3, o esparguete partiu antes de começarem a experiência, enquanto que no grupo G_4, o fio de pesca que sustentava o saco de tule descolou-se do esparguete.

Na realização desta tarefa, apesar de se verificar alguma evolução, os alunos continuaram a revelar falta de prática no trabalho com tarefas de natureza investigativa, por exemplo, após a resolução das questões 2.1 e 2.2 da segunda parte da tarefa, o grupo G_2 ficou parado à espera de indicações da professora para prosseguirem:

A_5: Stora ainda não é para fazer a parte de trás, pois não?

P: Pode, pode! É para fazer tudo.

Ou então chamam a professora apenas para validarem as respostas:

A_1: Está bem assim, Stora?

P: Sim, pode continuar.

Também o facto de a maioria dos grupos não terem respondido às questões associadas às representações gráficas pedidas, nomeadamente às questões 2.3 e 3.2 da tarefa, pode revelar falta de prática no trabalho com este tipo de tarefas. Após realizarem a representação gráfica, os alunos podem ter assumido que a questão estava respondida, o que revela que os alunos não leram integralmente a questão. A mesma situação foi verificada com o grupo G_2 que, como já mencionado, tentou executar na calculadora gráfica os procedimentos constantes nas imagens display da calculadora, sem lerem as orientações explicitas no texto escrito.

Outra dificuldade evidenciada com o manuseamento da calculadora gráfica foi na definição da janela de visualização das coordenadas dos pontos introduzidos nas listas pelo grupo G_1. De facto, os procedimentos constantes na tarefa não preveem esta situação, pelo que foi necessário a intervenção da docente para redefinir a janela de visualização, no grupo em questão.

Na questão 3.1, relativa à obtenção da expressão algébrica para a função que modela a situação obtida em cada grupo, a maioria dos grupos teve dificuldades em identificar as operações matemática apresentadas. Por exemplo, a maioria dos grupos não sabia que o símbolo " $*$ " representava uma multiplicação ou que o símbolo " $\wedge$ " representava uma potência (Figura 37). Como já foi mencionado, nesta questão, os grupos limitam-se a transcrever para a folha de registos o que observaram no ecrã da calculadora, não denotando ter percebido que nas calculadoras gráficas um número decimal entre -1 e 1, o algarismo zero da casa das unidades não é apresentado explicitamente (Figura 37 e Figura 38). Da análise das gravações verifica-se que pelo menos o grupo G_1 refletiu sobre esta situação apesar de no registo escrito ter omitido o algarismo zero (Figura 37):

A_1: Ó?! $b = -.85$?

A_2: Põe o que aparece aí!

A_3: É um número decimal.

A_1: Só que em vez de ser um ponto é uma vírgula.

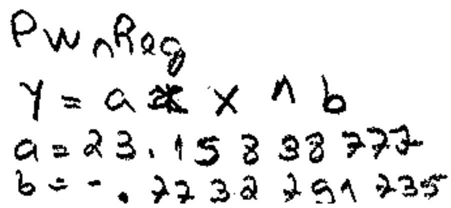


Figura 37 - Resolução de 3.1 da Tarefa 2, pelo grupo G2.

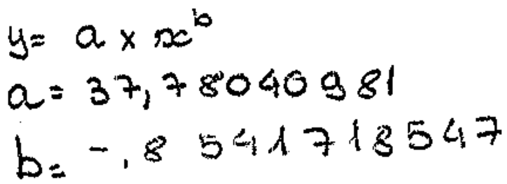


Figura 38 - Resolução de 3.1 da Tarefa 2, pelo grupo G1.

Verifica-se também, dificuldades na escolha da escala a utilizar para a representação dos pontos da tabela num sistema de eixos, a construir sobre o papel milimétrico fornecido. A maioria dos grupos questionou a professora, sobre qual a escala a utilizar. Uma aluna, A_5, do grupo G_2 revelou dificuldades na identificação da escala no papel milimétrico.

P: Pode fazer de 1 em 1. Qual é o eixo dos xx?

A_5: Este (apontando corretamente).

P: O comprimento e do esparguete fica no eixo dos?

A_5: Dos xx.

P: O seu primeiro ponto tem de coordenadas $(20; 3)$.Então onde fica o 20?

(Neste momento, a aluna regista 20 no papel milimétrico onde deveria ser 10 de acordo com a escala referida anteriormente).

A_{10}: Fizeste no dez. É de 1 em 1.

Tal como observado na realização da Tarefa 1, os alunos manifestaram bastantes dificuldades a nível da interpretação de enunciados escritos e da comunicação matemática. Todos os grupos requisitaram a intervenção da professora na questão relativa à conclusão da tarefa para confirmarem ou questionarem o que tinham de registar. A docente limitou-se a reduzir o enunciado escrito a sucessivas questões orais:

P: Na conclusão tem que focar estes pontos: tipo de proporcionalidade, será direta?

A_7: Não

P: Comportamento das variáveis, quando uma das variáveis aumentou o que aconteceu à outra?

A_{13}: Diminuiu.

P: Representação gráfica, como é o gráfico obtido? Registem o que concluíram

Confrontação com os dados obtidos na tarefa de consolidação.

Como já foi mencionado, o objetivo da aplicação da Tarefa 2 foi o da introdução de conceitos relativos à função de proporcionalidade inversa, pelo que se optou por resolver exercícios do manual no quadro com a colaboração dos alunos, de forma a aplicarem os conhecimentos adquiridos. Após a aplicação da tarefa investigativa número 3 (Tarefa 3), que complementa a Tarefa 2, aplicou-se uma ficha de trabalho (Ficha de trabalho 2), cuja análise dos resultados se apresenta após a análise da Tarefa 3.

Assim, na aula seguinte à da aplicação da Tarefa 2, foram resolvidos cinco exercícios do manual adotado, para aplicação/consolidação dos conceitos introduzidos pela referida tarefa. O primeiro exercício proposto, consistiu no completamento de tabelas que traduzem relações de proporcionalidade inversa (Figura 39). A tabela A foi completada pela professora, que aproveitou para rever os conceitos introduzidos na aula anterior, aquando da sistematização das conclusões obtidas pela resolução da Tarefa 2. As tabelas B e C foram preenchidas com a colaboração dos alunos, que apesar de determinarem corretamente a constante de proporcionalidade inversa, manifestaram dificuldades em completarem as referidas tabelas, denotando não terem percebido o significado desta constante de proporcionalidade. No início do completamento da tabela B, um dos alunos, A_{10}, tentou completar a tabela utilizando a regra de três simples:

2. Completar

Considera as tabelas incompletas seguintes que definem relações de proporcionalidade inversa.

Tabela *A*

x	$\frac{1}{2}$	3	
y	2		0,5

Tabela *B*

x		$3\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{4}$
y	2	$1\frac{1}{2}$	

Tabela *C*

x			$2\frac{1}{4}$	1,5
y	2	$\frac{5}{2}$		$1\frac{1}{3}$

2.1. Copia para o teu caderno cada uma das tabelas e completa-as.

2.2. Para cada tabela indica a constante de proporcionalidade inversa.

Figura 39 - Exercício do manual adotado, pág. 56 parte 1.

P: Qual é a constante?

A_{10}: $3\frac{1}{3}$...

P: Ou seja $\frac{10}{3}$

A_{10}: Vezes $1\frac{1}{2}$

P: Ou seja $\frac{10}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{30}{6}$. E quanto é $\frac{30}{6}$?

A_{10}: 5

P: Então a nossa constante é 5. Agora como é que determino o valor de y para $x = 2$?

A_{10}: Regra de três simples.

P: Não, não se trata de proporcionalidade direta. É inversa, e na inversa como é que se obtém a constante?

A_{10}: Produto.

P: Produto das variáveis, então qual é o valor de y que multiplicado por x, que é 2, dá 5 ?

A_{10}: $\frac{5}{2}$.

O segundo exercício proposto (Figura 40) era para os alunos analisarem se poderiam estabelecer algum tipo de proporcionalidade em cada uma das situações apresentadas e em caso afirmativo, que tipo de proporcionalidade existiria. Da resolução deste exercício verificou-se que de um modo geral os alunos não tiveram dúvidas em identificar o tipo de proporcionalidade presente pela análise do comportamento das variáveis:

3. Para discussão

Diz, justificando, se existe proporcionalidade e de que tipo entre:

3.1. o perímetro de um quadrado e o comprimento do lado;

3.2. o caudal de uma torneira e o tempo que leva a encher um depósito;

3.3. a velocidade média de um automóvel e o tempo que leva a fazer um dado percurso;

3.4. o espaço percorrido por um automóvel e a velocidade média a que viaja num dado período de tempo;

3.5. o perímetro e o raio de um círculo;

3.6. o número de camisas e o tempo que levam a secar.

Figura 40 - Exercício do manual adotado, pág.57 da parte 1.

P: Se eu aumentar ao lado de um quadrado, o que é que acontece ao perímetro deste quadrado?

A_1: Aumenta.

P: Então que tipo de proporcionalidade há aqui?

A_{13}: Direta.

...

P: Se eu aumentar à quantidade de água que saí da torneira, por minuto...

A_9: O tempo diminuí.

P Que tipo de proporcionalidade seria aqui?

A_9: Inversa.

Os exercícios que se seguiram traduzem-se em problemas de situações em contexto real envolvendo relações de proporcionalidade inversa (Figura 41). Na resolução destes exercícios verificou-se uma participação mais ativa dos alunos, que responderam às questões de uma forma mais imediata:

4. As galinhas da quinta

A Patrícia tem 60 galinhas e milho para as alimentar durante 20 dias.

Admite que cada galinha come a mesma quantidade de milho por dia.

4.1. Se a Patrícia vender metade das galinhas, para quantos dias terá milho para as restantes?

4.2. Se a Patrícia vender 10 galinhas, para quantos dias terá milho para as restantes?

4.3. Se a Patrícia comprar 15 galinhas, para quantos dias terá milho?

Figura 41 - Exercício do manual adotado, pág. 57 da parte 1.

P: Se a Patrícia vender metade das galinhas, para quantos dias terá milho para as restantes?

A_9: Dobra os dias. Proporcionalidade inversa.

...

P: Se a Patrícia vender 10 galinhas, com quantas fica?

A_8: 50 galinhas.

P: Para quantos dias tem milho?

(ninguém responde)

P: Já vimos que se trata de uma situação de proporcionalidade inversa. Qual é a constante?

A_1: $60 \times 20 = 1200$.

P: Muito bem. Agora tem 50 galinhas, qual...

A_9: $\frac{1200}{50}$ que dá 24 (responde, não deixando a professora terminar a questão).

...

P: Agora vai comprar 15 galinhas...

A_5: Vai diminuir o número de dias que o milho dura (responde, não deixando a professora terminar a questão).

P: Quantos dias dura?

A_5:$y \times 75$

P: Tem que dar quanto?

A_9: 1200.

P: 1200 porque é a constante. Então o valor de y é?

A_5:$\frac{1200}{75}$

A_9: Que é 16.

No evoluir da aula, ao longo da resolução dos exercícios propostos, os alunos foram resolvendo os exercícios de forma mais autónoma, respondendo de forma mais imediata e fluida, sem necessidade das constantes questões orientadoras colocadas pela professora no início da atividade.

Tarefa 3: Explorar com o GeoGebra (Função de proporcionalidade inversa).

A tarefa investigativa número 3 (Tarefa 3), foi implementada como complemento à Tarefa 2 e com o objetivo de interpretar geometricamente o significado da constante de proporcionalidade inversa. Executada em grupo, de acordo com a distribuição da Tabela 2, e recorrendo ao computador e ao software GeoGebra, os alunos deveriam movimentar, com o cursor, um ponto ao longo do gráfico da função apresentada, de modo a determinar o produto das suas coordenadas em pelo menos três posições distintas e assim, concluir qual a expressão algébrica da função apresentada. À semelhança da Tarefa 1, o ficheiro sobre o qual os alunos deveriam trabalhar foi previamente gravado num dos computadores dos alunos e partilhado com os restantes computadores. Aplicada numa aula de 90 minutos, a resolução desta tarefa seguiu-se da discussão dos resultados no grupo-turma, e da realização de uma ficha de trabalho como tarefa de consolidação, mantendo-se a constituição dos grupos anteriores.

Da análise das produções dos alunos verificou-se que com exceção de um grupo, G_4, os restantes grupos concluíram que o produto das coordenadas exemplificadas é 2. O grupo G_4 não concluiu o esperado, talvez por erro na verificação da ordenada do ponto de abcissa 1,69 (Figura 42). De um modo geral os alunos selecionaram diferentes valores para as coordenadas do ponto em estudo, não se limitando aos valores inteiros, tendo o grupo G_5 atribuído valores negativos às coordenadas experimentadas (Figura 43). Uma vez que as coordenadas apresentadas no ficheiro do GeoGebra aparecem arredondadas a duas casas decimais, o produto das coordenadas nem sempre deu exatamente 2 (Figura 43). A este respeito, um aluno do grupo G_6 questionou a professora:

A_9: O produto não está a dar constante.

P: Quanto é que lhe deu?

A_9: Olhe (mostrando a tabela).

P: Deveria dar 2, é isso?

A_9: É aproximadamente 2.

P: O que é que está a acontecer?

A_9: Está a arredondar.

P: Provavelmente o computador está a arredondar as coordenadas dos pontos apresentados. Pode referir isso nas conclusões.

Abcissa(x)	**Ordenada(y)**	**Produto das coordenadas($x \times y$)**
2	1	1×2 = 2
1,68	0,5	1,68×0,5 = 0,845
0,5	4,06	0,5×4,06 = 2,03

Figura 42 - Preenchimento da tabela da Tarefa 3, pelo grupo G4

Abcissa(x)	Ordenada(y)	Produto das coordenadas($x \times y$)
1,43	1,39	1,43 x 1,39 ≅ 1,99 ≃ 2
-1,97	-1,01	-1,97 x -1,01 ≅ 1,99 ≃ 2
0,24	8,25	0,24 x 8,25 ≅ 1,98 ≃ 2

Figura 43 - Preenchimento da tabela da Tarefa 3, pelo grupo G5

Relativamente à expressão algébrica pedida, com exceção do grupo G_4 que, como referido não apresenta qualquer conclusão, e do grupo G_5 que apesar de concluir corretamente que o produto das duas coordenadas é constante e é 2, apresenta uma expressão algébrica incorreta (Figura 44), todos os outros grupos apresentaram a expressão algébrica correta (Figura 45).

O que observas? Qual a expressão algébrica da função representada?

- Todas as coordenadas dão aproximadamente 2.
- $K = x \times y$

$K = \frac{2}{y}$

Figura 44 - Observações registadas pelo grupo G5 relativamente à Tarefa 3

O que observas? Qual a expressão algébrica da função representada?

O Produto das abcissas e das ordenadas é sempre o mesmo 2. A função é $f(x) = \frac{2}{x}$

Figura 45 - Observações registadas pelo grupo G2 relativamente à Tarefa 3

No final da discussão dos resultados obtidos, em grupo-turma, a professora colocou uma nova questão: "Qual é a área do retângulo apresentado?" (Figura 46)

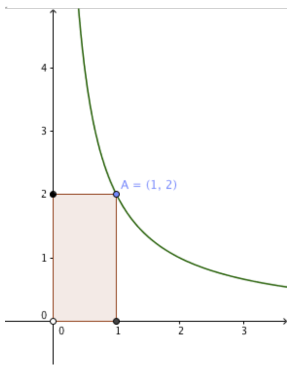


Figura 46 - Imagem 1 apresentada aos alunos na discussão dos resultados obtidos na Tarefa 3.

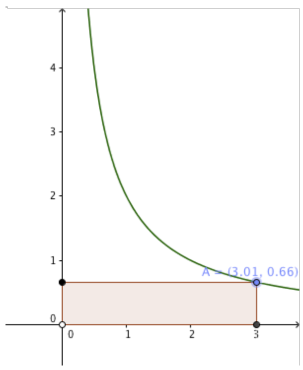


Figura 47 - Imagem 2 apresentada aos alunos na discussão dos resultados obtidos na Tarefa 3.

A_9: Temos que fazer comprimento vezes largura.

P: Mas eu já sei que a altura é?

Vários alunos: 1

P: Não, 2.

Vários alunos: Sim, é 2.

P: Como $2 \times 1 = 2$, então a área deste retângulo é 2.

A_9: É a constante.

P: Muito bem, então e se quisesse agora saber a área deste retângulo (Arrastando o ponto de modo a gerar a Figura 47).

A_3: É dois também (responde, não deixando a professora terminar a questão).

Dificuldades sentidas pelos alunos durante a Tarefa 3

Do contacto com as TIC, nomeadamente o computador e o software GeoGebra, a única dificuldade verificada foi a alteração do zoom de visualização, através do scroll do rato. Dificuldade esta que já tinha sido apurada na realização da Tarefa 1. Contudo, enquanto que na primeira tarefa o aluno chamou a professora para reconfigurar a janela de visualização, agora os alunos resolveram o problema sozinhos, sem necessitar do auxílio da professora.

À semelhança das incorreções relacionadas com a terminologia, verificadas nas resoluções da Tarefa 1, o grupo G_5 regista "todas as coordenadas dão aproximadamente 2" (Figura 44), querendo referir-se ao produto das coordenadas, o que pode ser fruto das dificuldades de verbalização já constatadas aquando da análise das produções da Tarefa 1.

Sendo similar à Tarefa 1, esta tarefa não necessitou de leitura nem de orientações adicionais para além das constantes na tarefa distribuída, denotando-se assim uma evolução na familiarização dos alunos com este tipo de tarefas. Seguindo a lógica da Tarefa 1, que apresentava a expressão algébrica da função em estudo de acordo com as alterações produzidas nos parâmetros a e ou b, quando, na resolução da Tarefa 3, lhes é pedido a expressão algébrica da função em estudo, os alunos questionam-se:

A_9: Aqui não diz qual é a expressão.

P: Você sabe qual é a expressão algébrica desta função. O gráfico é uma?

A_9: Hipérbole.

P: Hipérbole, que é o gráfico de uma função de proporcionalidade?

A_9: Inversa.

P: E como é que é a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa?

A_9: $y = \frac{k}{x}$.

P: E como determina k?

A_9: É o produto das duas.

P: E quanto é que lhe deu esse produto?

A_9: 2

Uma outra dificuldade verificada, é na identificação do valor da abcissa e da ordenada. Praticamente todos os grupos chamaram a professora para confirmar que o primeiro valor apresentado na coordenada é o valor da abcissa x, e o segundo o da ordenada y, apesar do enunciado da tabela parecer bastante explícito (Figura 42). Além disso, na exploração dos exemplos apresentados no final da discussão dos resultados, de um modo geral, os alunos voltam a fazer uma identificação errada das coordenadas do ponto em estudo.

Confrontação com os dados obtidos na tarefa de consolidação.

Após a discussão dos resultados obtidos na Tarefa 3, foi aplicada uma tarefa de consolidação (Ficha de trabalho 2) com os conceitos abordados na Tarefa 2 e na Tarefa 3. Esta ficha, constituída por 4 questões adaptadas de exames nacionais, foi realizada mantendo-se os grupos de trabalho da Tarefa 3.

A questão número um está dividida em duas subquestões, em que a primeira envolve o completamento de uma tabela que traduz a relação de proporcionalidade inversa entre duas variáveis, e a segunda envolve a identificação do gráfico que representa a relação representada na tabela anterior, nomeadamente, a relação entre o caudal, em metros cúbicos por hora, da torneira que enche um tanque e o tempo, em horas, que é necessário para encher esse tanque. Da análise das produções escritas dos alunos verifica-se que todos os grupos fizeram o correto completamento da tabela, começando por determinar a constante de proporcionalidade como o produto das variáveis envolvidas, seguindo-se a escrita e resolução de uma equação com base na definição da constante de proporcionalidade inversa (Figura 48). Um dos grupos, G_3, apesar de apresentar corretamente os procedimentos de resolução referidos, na resposta diz que o valor encontrado se refere ao tempo e não ao caudal, como seria esperado, o que pode ter sido por falta de atenção, uma vez que no início da resolução este grupo faz a correta identificação da variável dependente e da variável independente (Figura 49).

$k = 12 \times 5 = 60$

$a \times 8 = 60$ (=)

(=) $a = \frac{60}{8} = 7,5$ caudal em m^3 por hora

Figura 48 - Resolução do exercício 1.1 da Ficha de trabalho 2, pelo grupo G1

P.I $\boxed{K = x \times y}$ $= 5 \times 12 = 60$

$x \times 8 = 60$ (=) $\Leftrightarrow x = \frac{60}{8} = 7,5$

R: Vai demorar 7h e meia a encher.

Figura 49 - Resolução do exercício 1.1 da Ficha de trabalho 2, pelo grupo G3

Relativamente à questão 1.2, todos os grupos fizeram a correta identificação do gráfico, apresentando na justificação a referência ao tipo de gráfico esperado, hipérbole, e à constante de proporcionalidade (Figura 50).

Justifica a tua opção.

É a opção A, porque o produto é sempre 60. Não pode ser a B e C, porque trata-se de uma proporcionalide inversa e tem de ser representad por uma hipérbole, e nos gráficos estão representadas retas (função afim). Também não é a D porque a sua constante é 90 e a do problema é 60, logo é o gráfico A

Figura 50 - Resolução do exercício 1.2 da Ficha de trabalho 2, pelo grupo G2

A segunda questão da Ficha de trabalho 2 envolve a determinação da expressão algébrica da função dada a sua representação geométrica. Com a exceção do grupo G_6, que apresentou apenas o cálculo relativo à determinação da constante de proporcionalidade inversa, todos os outros complementaram este cálculo com a apresentação da correta expressão algébrica da função representada (Figura 51). Na resolução desta questão, o grupo G_1 chamou a professora para confirmar a resposta dada:

A_1: É assim? (Apresentando a expressão $y = \frac{k}{x}$).

P: E qual é o valor de k?

A_1: É 12.

P: Tem que substituir o valor de k, certo?!

Este grupo começou por apresentar a expressão geral de uma função de proporcionalidade inversa, sem concretizar o valor da constante para a situação dada. Para estes alunos, aquela resposta era suficiente, apesar de saberem qual o valor da constante na referida situação.

$$x \times y = 12 \times 1$$
$$x \times y = (-12) \times (-1) = 12$$
$$f(x) = \frac{12}{x}$$

Figura 51 - Resolução da questão 2 da Ficha de trabalho 2, pelo grupo G4

Na questão 3 é pedido aos alunos que determinem a ordenada de um ponto de um gráfico de uma função de proporcionalidade inversa, sabendo que esse ponto tem abcissa 2 e dadas as coordenadas de um outro ponto deste gráfico. Todos os grupos respondem corretamente e utilizam o mesmo processo que o utilizado no exercício 1.1 para o completamento da tabela, sendo que alguns grupos construíram uma tabela com os dados constantes no enunciado da questão (Figura 52).

3. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função de proporcionalidade inversa.

O ponto de coordenadas (8, 4) pertence ao gráfico da função.
Determina a ordenada do ponto do gráfico que tem abcissa 2.
Mostra como chegaste à resposta.

$K = 8 \times 4 = 32$

x	8	2
y	4	?

$2 \times y = 32 \Leftrightarrow y = \frac{32}{2}$
$\Leftrightarrow y = 16$

Figura 52 - Resolução de questão 3 da Ficha de trabalho 2, pelo grupo G2

No decorrer da realização desta questão, verificou-se uma das dificuldades já diagnosticada aquando da realização da Tarefa 3, nomeadamente na identificação das coordenadas:

A_9: Stora, a ordenada é o y?!

(noutra situação)

A_{13}: A ordenada é o x. Não, é o y.

A quarta e última questão está dividida em duas subquestões. Na primeira subquestão é pedido a área de um retângulo com três dos seus vértices nos eixos coordenados e o outro vértice é um ponto do gráfico de uma função de proporcionalidade inversa, da qual se conhece a expressão algébrica (Figura 53). A esta subquestão, todos os grupos responderam corretamente, denotando terem realizado a articulação entre a expressão algébrica e o gráfico da mesma função, assim como terem percebido o significado geométrico da constante de proporcionalidade inversa.

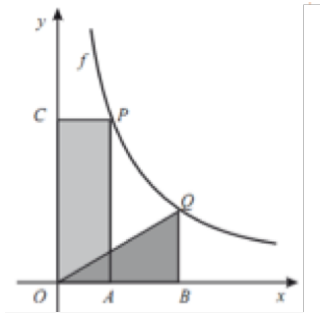


Figura 53 - Gráfico da questão 4 da Ficha de trabalho 2

Na segunda subquestão é pedido o perímetro de um triângulo, dadas as coordenadas de dois dos seus vértices e sabendo que o outro vértice é um ponto do gráfico de uma função de proporcionalidade inversa, da qual se conhece a expressão algébrica (Figura 53). Todos os grupos começam por determinar a ordenada do ponto Q pertencente ao gráfico da função de proporcionalidade inversa de expressão $f(x) = \frac{10}{x}$. Sendo que três dos grupos determinaram esta ordenada através da resolução de uma equação com base na definição da constante de proporcionalidade inversa (Figura 54), enquanto que os outros três grupos determinaram a ordenada pretendida, pela aplicação da expressão algébrica na determinação da imagem de 4 (Figura 55). Para a realização desta subquestão, todos os grupos precisaram de algumas orientações:

P: Consegue descobrir o comprimento de $[QB]$?

A_3: Teorema de Pitágoras.

P: Isso será depois para descobrir a hipotenusa, porque para já só tem um cateto, $\overline{OB} = 4$.

A_2: Temos que fazer isto (apontando para a resolução da questão 3).

P: Muito bem, qual é o número que vezes 4 dá a constante? E depois de ficar a saber os catetos, como determina a hipotenusa?

A_3: Teorema de Pitágoras.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$
$$h^2 = 4^2 + 2,5^2$$
$$h^2 = 16 + 6,25$$
$$h^2 = 22,25$$
$$h = \pm\sqrt{22,25}$$

$$4y = 10$$
$$y = \frac{10}{4} = 2,5$$
$$P_\Delta = 4 + 2,5 + 4,72$$
$$P_\Delta = 11,2$$
$$h \simeq 4,72$$

Figura 54 - Resolução de 4.2 da Ficha de trabalho 2, pelo grupo G2

$$y = \frac{10}{4} = 2,5$$
$$P_\Delta = 4 + 2,5 + 4,7 = 11,2$$

$$x^2 = c_1^2 + c_2^2$$
$$x^2 = 4^2 + 2,5^2$$
$$x^2 = 16 + 6,25$$
$$x^2 = 22,25$$
$$x = \sqrt{22,25}$$
$$x \simeq 4,7$$

Figura 55 - Resolução de 4.2 da Ficha de trabalho 2, pelo grupo G4

Tarefa 5: Atividade "Ver no escuro."

A última tarefa investigativa (Tarefa 5) foi implementada numa aula de 90 minutos, no seguimento da visualização do episódio "Guns and Roses", da série televisiva Numb3rs, proposta aos alunos uma semana antes da sua aplicação. Contudo, apenas um aluno realizou esse visionamento, pelo que antes da concretização da tarefa, a docente projetou as partes do episódio relevantes para a contextualização da mesma tarefa, nomeadamente, a parte inicial do episódio, em que a situação a resolver é apresentada (assassinato/suicídio); a parte em que um professor de Matemática, consultor da polícia, explica como é possível recriar uma "impressão acústica", tendo o som do disparo da arma sido gravado; e a parte em que recriam essa "impressão acústica" e concluem a falta de um objeto significativamente grande na sala do crime, o que contribuiu para a resolução da situação apresentada.

O objetivo desta tarefa é o de modelar gráficos em contextos reais, através da utilização do sensor de movimento CBR, da Texas Instruments, e da calculadora gráfica TI-84, utilizando o mesmo princípio base utilizado no filme para a recriação de uma "impressão acústica."

Realizada em grupo, de acordo com a distribuição da Tabela 3, a Tarefa 5 divide-se em duas partes. Na primeira parte, "Introdução", faz-se uma contextualização do episódio e a apresentação do material a utilizar. A segunda parte, "Atividades", subdivide-se em duas. A primeira atividade consiste num guia de procedimentos a explorar com a calculadora gráfica TI-84 e com o sensor de movimento CBR, de modo a "imitar" um dado gráfico (Figura 56), seguindo-se duas questões relativas a esta modelação/gráfico. A segunda atividade compreende duas questões relativas a um novo gráfico (Figura 57), uma para descrever o trajeto de uma pessoa (com um sensor de movimento) relativamente a uma parede de modo a produzir o referido gráfico, e outra para apresentar a expressão algébrica que representa cada um dos segmentos identificados no gráfico. Uma vez que só foi possível a utilização de dois sensores de movimento CBR, dois grupos (G_1 e G_3) iniciaram a tarefa pela atividade 1 enquanto que os outros dois (G_2 e G_4) começaram pela atividade 2.

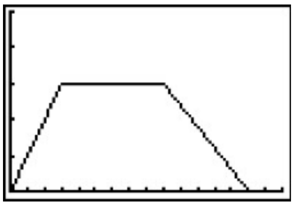


Figura 56 - Gráfico da atividade 1 da Tarefa 5

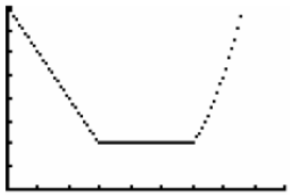


Figura 57 - Gráfico da atividade 2 da Tarefa 5

A "Introdução" foi lida pela docente ao grupo-turma, de forma a apresentar os materiais a utilizar, nomeadamente, o sensor de movimento CBR e a aplicação CBL/CBR da calculadora gráfica, com recurso ao viewscreen. Seguiu-se a análise, ainda em grupo-turma, do gráfico apresentado na atividade 1 (Figura 56), durante a qual os alunos rapidamente identificaram a "presença" da função linear, constante e afim, em diferentes intervalos de tempo. A docente aproveitou para apresentar as zonas da sala, antecipadamente criadas para a execução desta modelação, nas quais o chão estava marcado com um metro, dois metros e três metros a partir da parede. Enquanto que um aluno realizava o trajeto pretendido com o sensor, outro segurava a calculadora gráfica e um terceiro elemento cronometrava. A cada grupo foi dada a possibilidade de repetir a experiência três vezes, de modo a conseguirem ambientar-se com os materiais a utilizar. Entre cada experiência, a docente analisou com cada grupo os resultados obtidos, conjeturando em conjunto quais os procedimentos a tomar para conseguir uma melhor "imitação" do gráfico dado. Os resultados obtidos pelos diferentes grupos constam na Tabela 4. Não foi possível obter o primeiro resultado do grupo G_2, uma vez que este grupo sendo o último a realizar a parte da atividade relativa à modelação com o sensor, não esperou que a docente visualizasse e registasse o gráfico obtido, passando para a segunda experimentação.

Tabela 4 - Resultados obtidos pelos diferentes grupos na "imitação" do gráfico da atividade 1 da tarefa 5.

Sequência dos resultados obtidos pelo grupo G_1

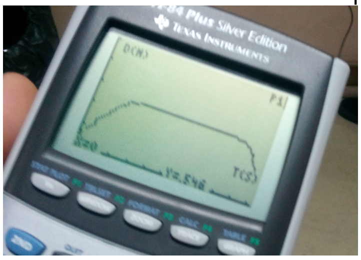


Figura 58 - Primeiro resultado

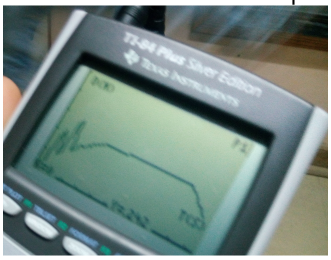


Figura 59 - Segundo resultado

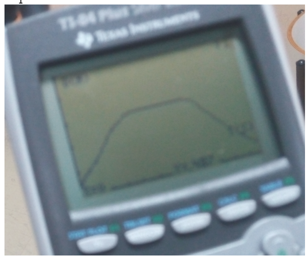


Figura 60 - Terceiro resultado

Sequência dos resultados obtidos pelo grupo G_2

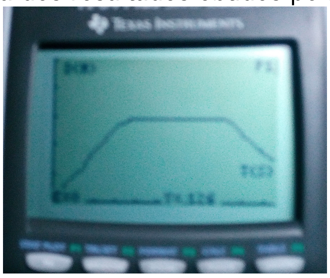


Figura 61 - Segundo resultado

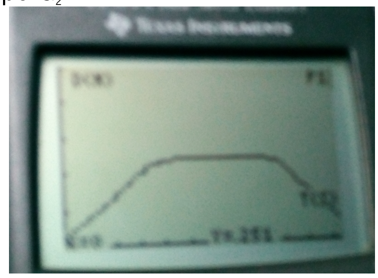


Figura 62 - Terceiro resultado

Sequência dos resultados obtidos pelo grupo G_3

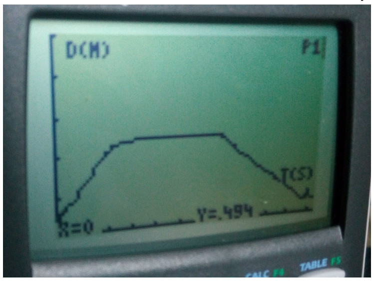


Figura 63 - Primeiro resultado

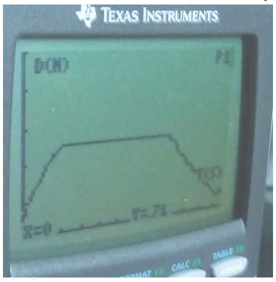


Figura 64 - Segundo resultado

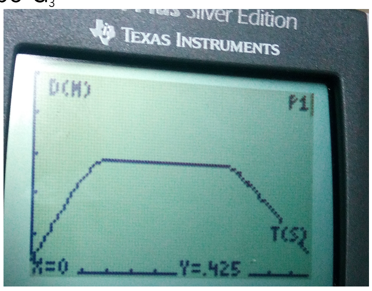


Figura 65 - Terceiro resultado

Sequência dos resultados obtidos pelo grupo G_4

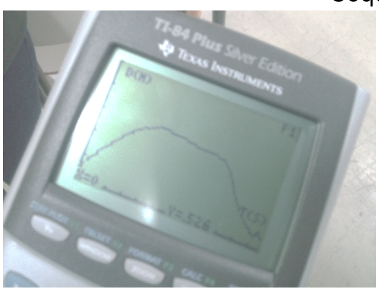


Figura 66 - Primeiro resultado

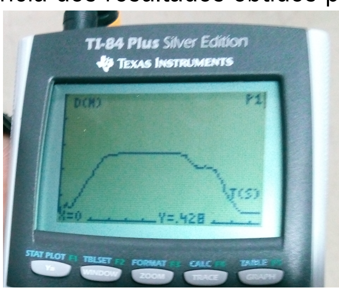


Figura 67 - Segundo Resultado

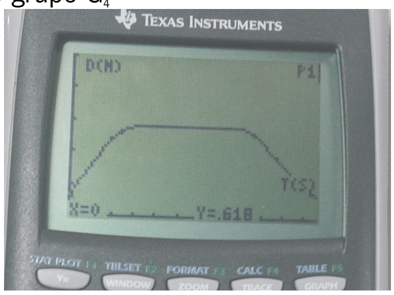


Figura 68 - Terceiro resultado

A primeira questão da atividade 1 pede aos alunos para registarem o que observaram: se conseguiram "imitar" o gráfico; o que fizeram para obter o segmento de reta horizontal; o que acontece ao declive quando se movimentam para a frente e para trás, em relação à parede; e o que acontece ao declive quando se movimentam mais depressa. Da análise dos resultados escritos dos diferentes grupos, verifica-se que todos os grupos afirmam que conseguiram "imitar" o gráfico, e que para obter o segmento horizontal estiveram parados. Efetivamente, aquando da análise inicial em grupo-turma, do gráfico dado (Figura 56), o aluno A_9 fez a observação oral que, para obter o segmento horizontal, teria de "estar parado". Três dos quatro grupos referiram que, quando se deslocam mais rapidamente o declive aumenta ou "a reta fica mais inclinada" (Figura 69), enquanto que o outro grupo, G_4, não respondendo diretamente à questão, referiu que voltam à posição inicial "um pouco mais devagar" (Figura 70). Apenas um dos grupos, G_3, faz referência ao que acontece ao declive quando se afastam ou se aproximam da parede (Figura 71).

Observamos que inicialmente estavamos
encostados à parede e quando nos afastamos 3m em 3s vimos que
gráfico era uma função afim linear, de seguida ficamos parados nos 3m
durante 6s e o gráfico era uma Reta constante, depois de esses 6s voltamos
parede em 5s. Sim conseguimos imitar o gráfico, ficamos parados. Quando deslo-
camos mais Rapidamente a Reta fica mais inclinada.

Figura 69 - Resolução da questão 1.1 da Tarefa 5, pelo grupo G2

Sim conseguimos imitar e observamos que até aos 3 segundos temos de
andar até aos 3 metros, ficamos parados até aos 8 segundos e
voltamos andar um pouco mais devagar até aos 0 metros e 14 segundos.

Figura 70 - Resolução da questão 1.1 da Tarefa 5, pelo grupo G4

Sim conseguimos imitar o gráfico, observamos que ao
andar para trás, ou seja afastarmo-nos da parede e, o declive é crescente e dos 3 aos 9
ficamos parados (constante) ao fim dos 9 segundos
o gráfico era decrescente, porque voltamos para a
parede. Quando se desloca mais rápido para a parede,
o declive é mais inclinado.

Figura 71 - Resolução da questão 1.1 da Tarefa 5, pelo grupo G3

Relativamente à segunda questão da atividade 1, todos os grupos determinaram corretamente a expressão algébrica que representa cada segmento de reta do gráfico dado. Contudo, um dos grupos, G_2, apesar de determinar corretamente, não regista a expressão algébrica da função afim do último "troço" do gráfico (Figura 72).

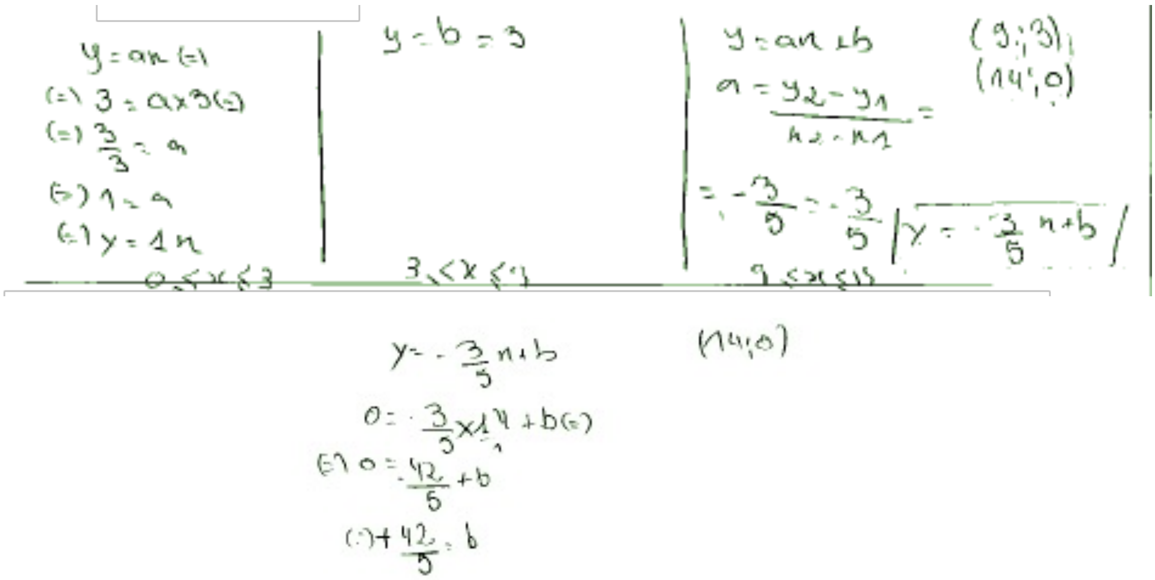


Figura 72 - Resolução de questão 1.2 da Tarefa 5, pelo grupo G2.

Ainda nesta questão, na aula o aluno A_9, chamou a professora para confirmar a sua resposta, na qual assumiu que a ordenada na origem da função afim correspondente ao último "ramo" do gráfico, era 3:

P : Se eu prolongar esta reta ela vai intersetar o eixo dos yy em 3?

A_9: Não.

P: Então o que é que tem de fazer?

A_9: Tirar um ponto.

P : Substituir o x e o y e resolver em ordem a ?

A_9: b.

Aquando da discussão dos resultados, a docente propôs aos alunos a representação gráfica da expressão algébrica obtida na questão 1.2. Para isso projetou as orientações no Quadro Interativo (Figura 73) para que os alunos as seguissem com a calculadora gráfica TI-84, enquanto que a docente os acompanhou com recurso ao viewscreen. Deste modo os alunos puderam verificar as diferenças entre o gráfico resultante da experiência e o obtido através da expressão algébrica (Figura 74 e Figura 75).

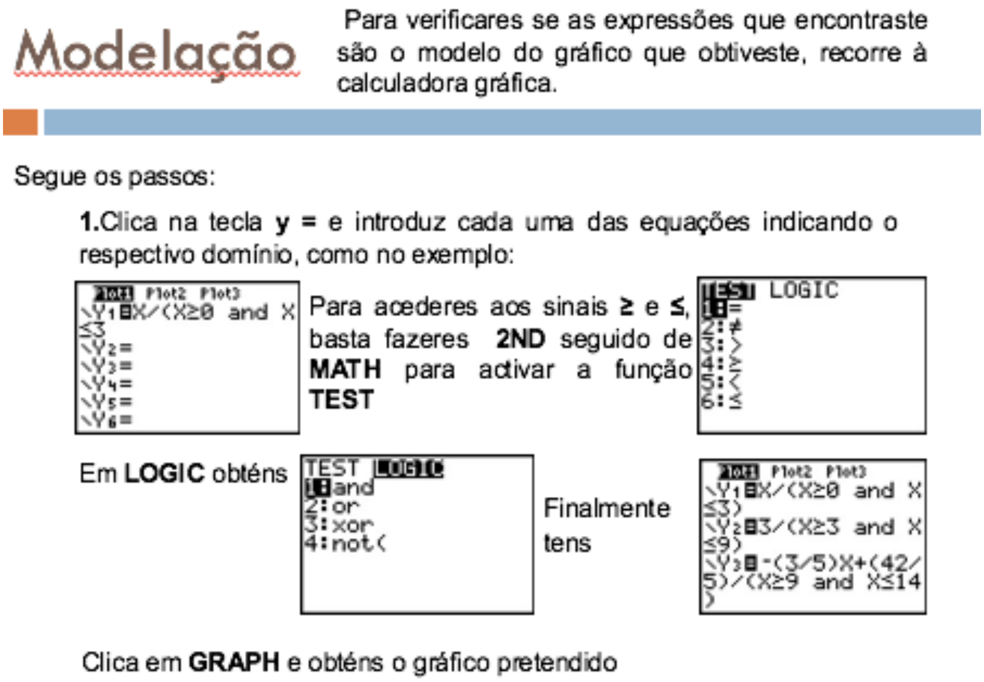


Figura 73 - Projeção das orientações para a modelação do gráfico da atividade 1 da Tarefa 5.

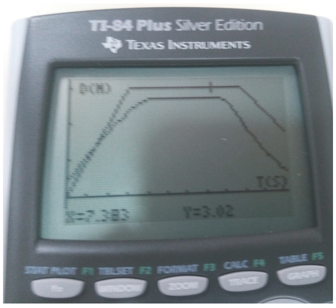


Figura 74 - Modelação do gráfico da atividade 1, obtida pelo grupo G3

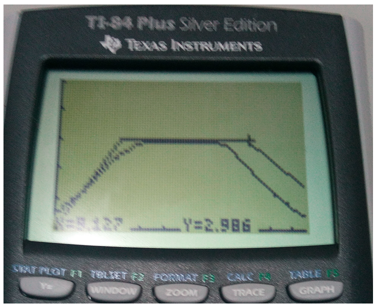


Figura 75 - Modelação do gráfico da atividade 1, obtida pelo grupo G1

Na primeira questão da atividade 2, os alunos deveriam descrever o movimento de uma pessoa com um sensor, relativamente a uma parede, de modo a reproduzir um dado gráfico (Figura 57). Todos os grupos fizeram a correta identificação dos eixos coordenados e da respetiva escala. Três dos quatro grupos referiram que a pessoa começa o percurso a 4 metros da parede, enquanto que o grupo G_3, registou que a pessoa começa o trajeto a 3 metros da parede. Todos os grupos referiram que a pessoa parou a 1 metro da parede, onde esteve parado durante 3 segundos, voltando a andar para trás até aos 4 metros da parede. No entanto, não se regista consenso quanto ao tempo despendido no regresso à posição inicial (Tabela 5).

Tabela 5 - Referência dos diferentes grupos quanto ao tempo despendido no regresso à posição inicial, na questão 2.1 da Tarefa 5

Grupos	**1 segundo**	**< 2 segundos**	**3 segundos**	**sem referência**
G_1			X	
G_2				X
G_3	X			
G_4		X		

Apenas os grupos G_2, G_3 e G_4, fizeram referência ao facto da pessoa ter demorado 3 segundos no trajeto de 3 metros no sentido da parede (Figura 76).

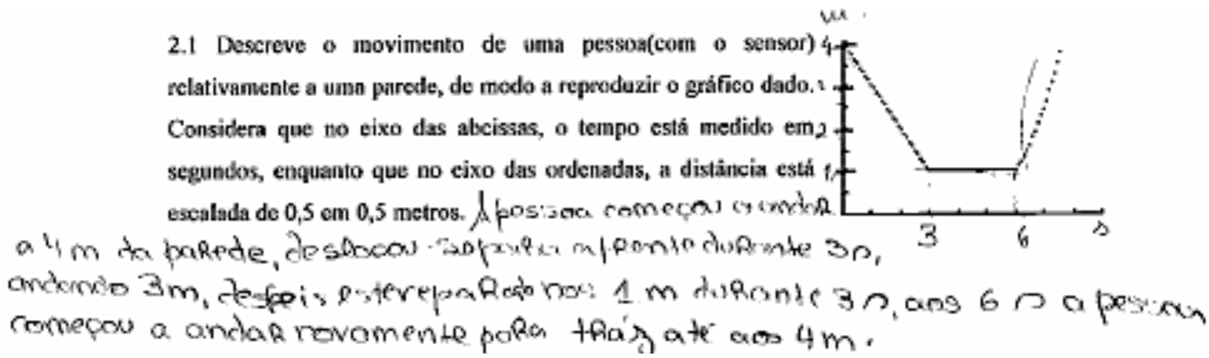

2.1 Descreve o movimento de uma pessoa(com o sensor) relativamente a uma parede, de modo a reproduzir o gráfico dado. Considera que no eixo das abcissas, o tempo está medido em segundos, enquanto que no eixo das ordenadas, a distância está escalada de 0,5 em 0,5 metros. A pessoa começou a andar a 4 m da parede, deslocou-se [illegible] a frente durante 3s, andando 3m, depois esteve parada nos 1 m durante 3s, aos 6 s a pessoa começou a andar novamente para trás até aos 4 m.

Figura 76 - Resolução de questão 2.1 da Tarefa 5, pelo grupo G2

Na segunda questão da atividade 2, relativamente ao segmento de reta correspondente aos primeiros três segundos representado no gráfico dado, todos os grupos, determinaram corretamente a expressão algébrica da função afim. O grupo G_3, não fez qualquer referência aos intervalos de tempo a que a cada expressão algébrica se refere, e foi o único a fazer a determinação da ordenada na origem por processos algébricos em detrimento da observação direta do gráfico em questão (Figura 77).

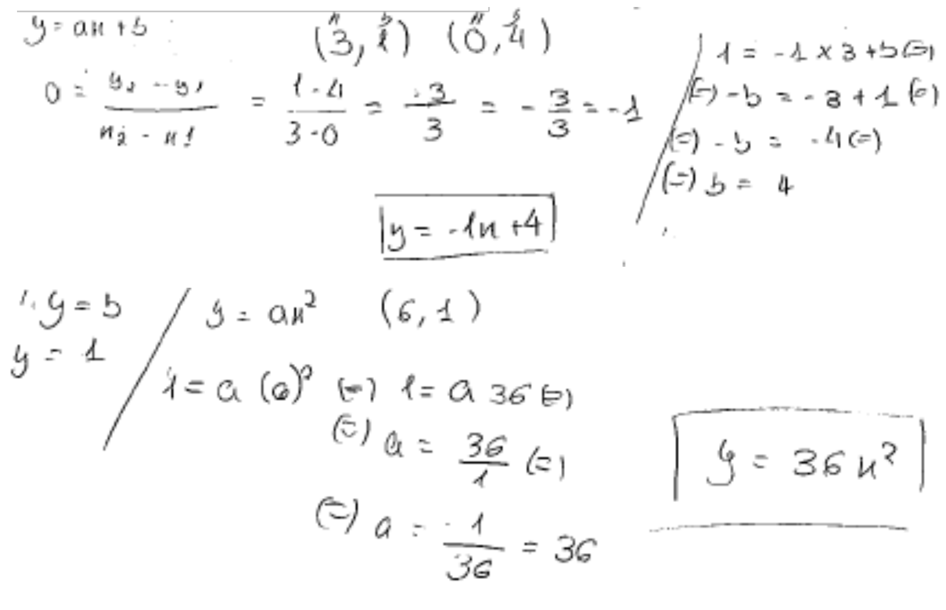


Figura 77 - Resolução de questão 2.2 da Tarefa 5, pelo grupo G3

Todos os grupos determinaram de forma correta a expressão da função constante correspondente ao segundo “ramo” do gráfico, e identificaram o terceiro “troço” do gráfico como uma parábola, aplicando a expressão da função quadrática do tipo $y = ax^2$ (Figura 77).

Dificuldades sentidas pelos alunos durante a Tarefa 5

Relativamente ao trabalho com a calculadora gráfica e o sensor de movimento, de um modo geral, os alunos não revelaram dificuldades em seguir os procedimentos constantes na Tarefa 5. Contudo, para a concretização da “imitação” do gráfico dado, era necessária uma sincronização perfeita entre os elementos do grupo, o que foi difícil. Como já foi mencionado, entre cada experiência a docente analisou com cada grupo o gráfico obtido, de modo a que na experiência seguinte conseguissem “acertar” esta sincronização.

P: Alguns casos a reta não passava na origem, porquê?

A_1: Não saíram no tempo certo.

Aquando da discussão dos dados obtidos na Tarefa 5, quando a docente propôs os procedimentos para a representação gráfica da expressão algébrica determinada na questão 1.2 (Figura 73), apenas o grupo G_3 obteve de imediato o gráfico pretendido (Figura 74). Os outros grupos obtiveram “ERR: SYNTAX “, mas quando a docente foi verificar o erro cometido constatou que os alunos utilizaram o sinal de subtração em vez do sinal $(-)$ para a representação de um número negativo.

Ao fim de cinco tarefas desta natureza, os alunos continuaram a requisitar, mas agora com menos frequência, a professora para a confirmação da resposta a dar a determinada questão. Numa destas requisições, a docente constatou que os alunos continuavam a revelar dificuldades na determinação das coordenadas, apesar de nos registos escritos isso não se ter verificado. Outra dificuldade recorrente é na interpretação dos enunciados, que a professora reduz a uma série de pequenas questões:

A_9: O que é para fazer na 2.1?

P: É para descrever o trajeto de uma pessoa. Anda para trás ou para a frente?

A_9: Para a parede.

P: Quantos metros?

A_9: 3.

P: Em quantos segundo?

A_9: 3.

P: Diga isso.

Verifica-se ainda dificuldades na leitura do gráfico, nomeadamente no último "ramo", uma vez que não houve consenso entre os grupos em determinar o tempo gasto no regresso à posição inicial (Tabela 5), possivelmente porque este "ramo" não termina num ponto de coordenadas "bem definidas". Talvez se deva à mesma razão, o facto dos diferentes grupos terem modelado este "ramo" através de uma parábola do tipo $f(x) = ax^2$ e não por uma reta, como era esperado. Outra justificação para tal ocorrência, pode ter sido o facto de os últimos conteúdos lecionados e a tarefa investigativa anterior (Tarefa 4), incidir sobre a função quadrática do tipo $f(x) = ax^2$, com $a \neq 0$, e os alunos terem achado a necessidade de a aplicarem. Pela análise do gráfico apresentado (Figura 57), verifica-se que o último "ramo", efetivamente não é retilíneo, mas após a realização da primeira atividade da Tarefa 5, a docente esperava que os alunos atribuíssem esta pequena "curvatura" a imperfeições no movimento do qual resultou o gráfico em questão.

4.2 Avaliação da Intervenção

Nesta secção apresenta-se a análise das questões de aula aplicadas, bem como da ficha de avaliação escrita. Como já mencionado, apesar de durante esta intervenção se ter implementado duas questões de aula, apenas os resultados de uma será alvo de análise neste trabalho, uma vez que a segunda questão de aula aplicada, contemplou apenas os conteúdos relativos à família das funções quadráticas do tipo $f(x) = ax^2, com\ a \neq 0$, abordados com a realização da Tarefa 4, cujas análises dos resultados foram omitidas deste trabalho, em virtude da extensão do mesmo.

4.2.1 Descrição e análise das questões de aula implementadas.

Para a questão de aula número um, será apresentada a respetiva discrição, objetivos da sua aplicação e análise das produções dos alunos.

Questão de aula 1

A primeira questão de aula, com duas versões, foi aplicada após a Ficha de trabalho 2, com o objetivo de avaliar o grau de apreensão e de compreensão dos conteúdos abordados nas tarefas investigativas 1, 2 e 3. É constituída por quatro exercícios, três das quais relativas à função de

"Proporcionalidade Inversa", enquanto que a última envolve conteúdos relativos à "Função Linear e Afim", revistos através da aplicação da Tarefa 1.

No primeiro exercício é pedido a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa, dado o seu gráfico. Da análise dos resultados escritos verifica-se que, apenas cerca de 45% respondem de forma correta e completa. A tabela 6 sintetiza as respostas/resoluções dadas pelos alunos.

Tabela 6 - Síntese das respostas apresentadas pelos alunos no exercício 1 da Questão de aula 1

Tipo de resposta dada pelos alunos	Número de alunos[1]
Determina corretamente a constante de proporcionalidade inversa e apresenta uma expressão algébrica correta para a função representada.	5
Determina corretamente a constante de proporcionalidade inversa, mas não apresenta uma expressão algébrica correta para a função representada.	2
Reconhece que uma função de proporcionalidade inversa é dada pela expressão do tipo $y = \frac{a}{x}$, em que a constante de proporcionalidade inversa é a mas não completa o exercício ou fá-lo de forma incorreta.	4

[1] Dois alunos faltaram no dia de aplicação desta questão de aula.

O aluno A_6, apresenta a correta substituição do valor da constante de proporcionalidade inversa, mas não apresenta a correta expressão algébrica da função representada (Figura 78). O que este aluno faz é primeiramente determinar a constante de proporcionalidade inversa dada por $k = a = 4$, e depois divide este valor por x, obtendo assim uma expressão incorreta.

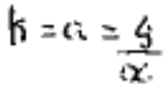


Figura 78 - Resolução do exercício 1 da Questão de aula 1, pelo aluno A6

Dos quatro alunos que reconhecem que a função apresentada é de proporcionalidade inversa, dada pela expressão do tipo $y = \frac{a}{x}$, mas que não completam o exercício ou fazem-no de forma incorreta, um dos alunos, A_5, reconhece que a constante de proporcionalidade inversa é dada pelo produto das variáveis envolvidas, mas não faz a sua determinação (Figura 79). Outro destes alunos, A_4, substituí incorretamente o valor da constante de proporcionalidade inversa, sem apresentar os cálculos da sua determinação (Figura 80).

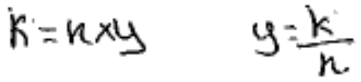


Figura 79 - Resolução do exercício 1 da Questão de aula 1, pelo aluno A5

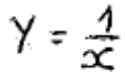


Figura 80 - Resolução do exercício 1 da Questão de aula 1, pelo aluno A4

O segundo exercício envolve o preenchimento de uma tabela, sabendo que as variáveis envolvidas são inversamente proporcionais (Figura 81 e Figura 82). Apenas cerca de 55% dos alunos responderam de forma correta e completa. A análise do tipo de resposta/resolução apresentadas pelos alunos encontram-se sintetizadas na tabela 7.

As variáveis x e y são inversamente proporcionais.

x	5	r	25
y	10	12,5	t

Determina r e t.

Figura 81 - Tabela do exercício 2 da versão 1 da Questão de aula 1.

As variáveis x e y são inversamente proporcionais.

x	4	r	20
y	10	12,5	t

Determina r e t.

Figura 82 - Tabela do exercício 2 da versão 2 da Questão de aula 1.

Tabela 7 - Síntese das respostas apresentadas pelos alunos no exercício 2 da Questão de aula 1

Tipo de resposta dada pelos alunos	Número de alunos[1]
Determina corretamente a constante de proporcionalidade inversa, o valor de r e de t.	6
Determina corretamente a constante de proporcionalidade inversa, e apenas o valor de r.	2
Determina corretamente a constante de proporcionalidade inversa, mas determina de forma incorreta o valor de r e de t.	1
Determina a constante, considerando as variáveis diretamente proporcionais e determina incorretamente o valor de r e de t.	2
[1] Dois alunos faltaram no dia de aplicação desta Questão de aula.	

O aluno A_{13}, apesar de determinar corretamente a constante de proporcionalidade inversa, determina de forma incorreta o valor de r e de t (Figura 83). Na determinação do valor de r, apesar de registar que $y = \frac{k}{x}$, onde k é a constante de proporcionalidade inversa, quando faz a substituição do valor de y, apresenta uma expressão incorreta. Na determinação do valor de t, começa por equacionar corretamente uma equação, mas troca o princípio da multiplicação pelo princípio da adição na resolução da mesma.

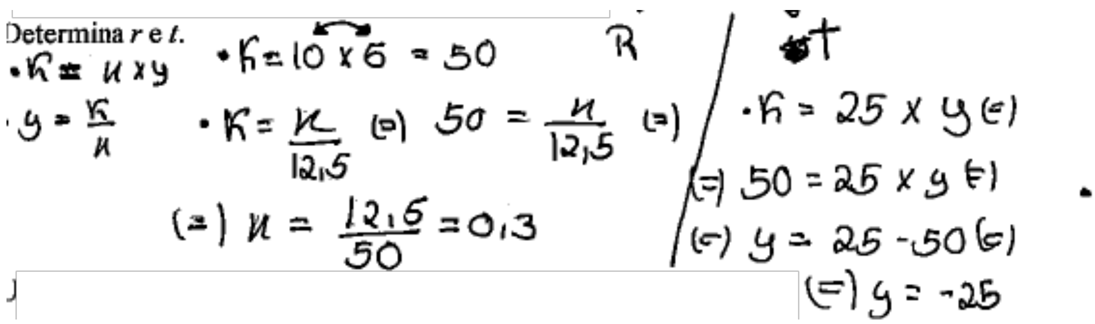


Figura 83 - Resolução de exercício 2 da Questão de aula 1, pelo aluno A13

Os alunos A_7 e A_8 fazem a determinação da constante de proporcionalidade considerando as variáveis x e y diretamente proporcionais. Na determinação do valor de r, o aluno A_7 considera que $y = \frac{k}{x}$, onde k é a constante de proporcionalidade inversa, mas comete um erro da resolução da equação formulada (Figura 84). Na determinação do valor de t, o mesmo aluno substitui de forma incorreta a expressão apresentada. Por outro lado, o aluno A_8 determina o valor de r e de t como o produto da constante pelo valor da variável envolvida, ou seja, considera erradamente que $x = ky$ e que $y = kx$ (Figura 85), o que neste último caso estaria correto se as variáveis fossem diretamente proporcionais.

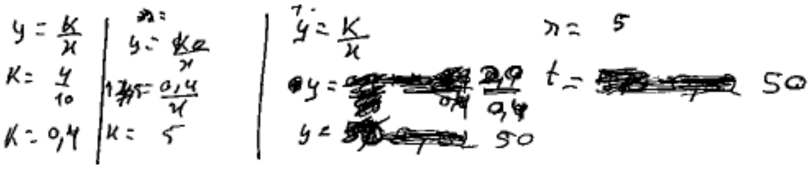


Figura 84 - resolução de exercício 2 da Questão de aula 1, pelo aluno A7

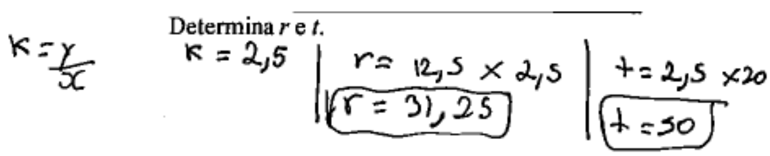


Figura 85 - Resolução de exercício 2 da Questão de aula 1, pelo aluno A8

Na terceira questão, é apresentado aos alunos um problema em contexto real, envolvendo o conceito de função de proporcionalidade inversa (Figura 86 e Figura 87). A análise das respostas dos alunos encontra-se sintetizadas na tabela 8.

Um veterinário tem 10 gatos e ração para os alimentar durante seis meses (considera que cada mês tem 30 dias). Acolheu mais dois gatos abandonados.
Admitindo que cada gato come a mesma quantidade de ração por dia, para quantos dias terá ração para todos os gatos?

Figura 86 - Enunciado do exercício 3 da versão 1 da Questão de aula

O Sr. Joaquim tem 120 vacas e ração para as alimentar durante 30 dias.
Admite que cada vaca come a mesma quantidade de ração por dia.
Se o Sr. Joaquim tivesse 90 vacas, para quantos, dias daria a ração?

Figura 87 - Enunciado do exercício 3 da versão 2 da Questão de aula

Tabela 8 - Síntese das respostas apresentadas pelos alunos no exercício 3 da Questão de aula 1

Tipo de resposta dada pelos alunos	Número de alunos[1]
Reconhece que as variáveis envolvidas são inversamente proporcionais; determina corretamente a constante de proporcionalidade inversa e responde de forma correta e completa ao problema.	5
Reconhece que as variáveis envolvidas são inversamente proporcionais; determina corretamente a constante de proporcionalidade inversa, mas não responde de forma correta ou completa ao problema.	1
Reconhece que as variáveis envolvidas são inversamente proporcionais, mas determina incorretamente a constante de proporcionalidade inversa.	3
Resolve o exercício considerando que as variáveis envolvidas são diretamente proporcionais.	2

[1] Dois alunos faltaram no dia de aplicação desta Questão de aula.

No tipo de erros cometidos, verifica-se que um aluno, A_5, comete um erro na leitura do valor apresentado pela calculadora (Figura 88). Algumas calculadoras científicas utilizam a vírgula como separador da casa dos milhares, em vez do ponto como convencionado em Portugal e outros países, o que induziu o aluno em erro.

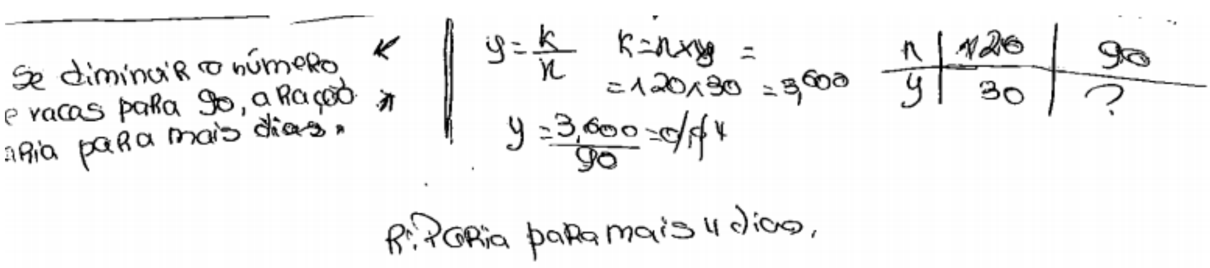


Figura 88 - Resolução do exercício 3 da versão 2 da Questão de aula 1, pelo aluno A5

Na determinação da constante de proporcionalidade inversa, um dos erros cometidos foi por exemplo o do aluno A_{10} que não considerou o facto da ração durar 6 meses (Figura 89).

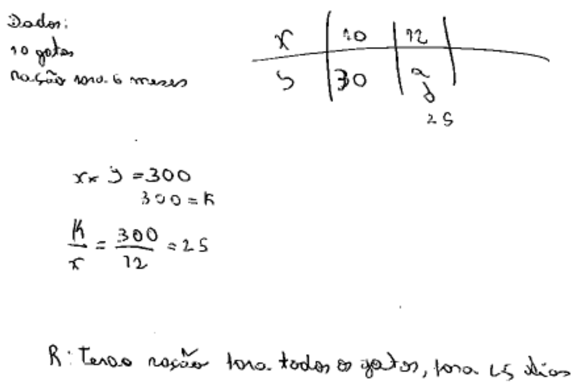


Figura 89 - Resolução de exercício 3 da Questão de aula 1, pelo aluno A10

Por outro lado, o aluno A_2 reconhece que as variáveis são inversamente proporcionais, mas assume que a constante de proporcionalidade inversa é o número de dias de um mês (30), e apesar de equacionar corretamente o problema, de acordo com o valor da constante assumida, determina incorretamente o valor da incógnita (Figura 90).

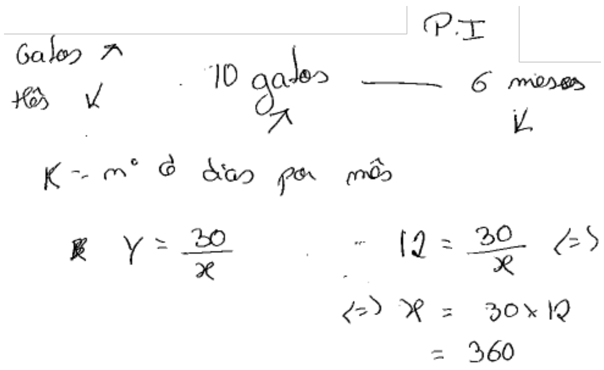


Figura 90 - Resolução do exercício 3 da Questão de aula 1, pelo aluno A2

Também o aluno A_7 reconhece que as variáveis são inversamente proporcionais, mas determina a constante de proporcionalidade considerando as variáveis diretamente proporcionais (Figura 91), voltando a considerar as variáveis inversamente proporcionais para equacionar o problema e cometendo o mesmo erro de A_2 na determinação do valor da incógnita.

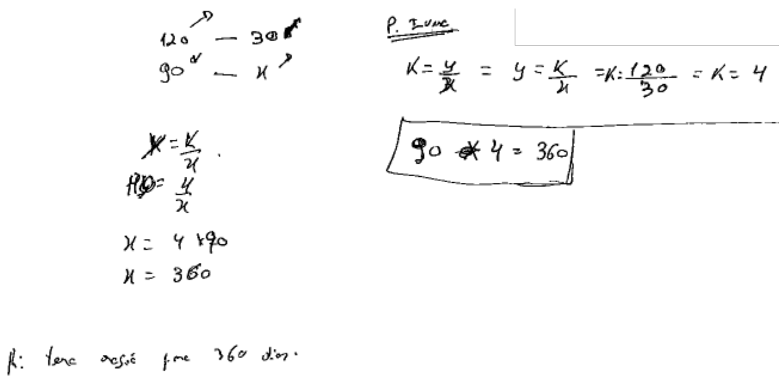


Figura 91 - Resolução do exercício 3 da Questão de aula 1, pelo aluno A7

Os alunos A_8 e A_{13} resolvem o exercício considerando as variáveis diretamente proporcionais. Enquanto que A_{13} utiliza a regra de três simples (Figura 92), o aluno A_8 determina a constante como a razão entre a variável dependente e a variável independente, e aplica a expressão da correspondente função linear para a determinação da incógnita pedida (Figura 93).

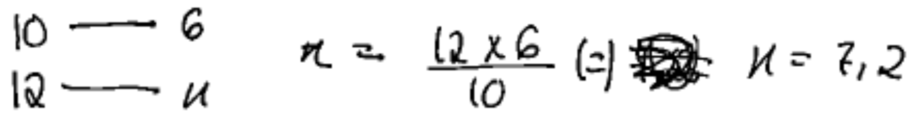


Figura 92 - Resolução do exercício 3 da Questão de aula 1, pelo aluno A13

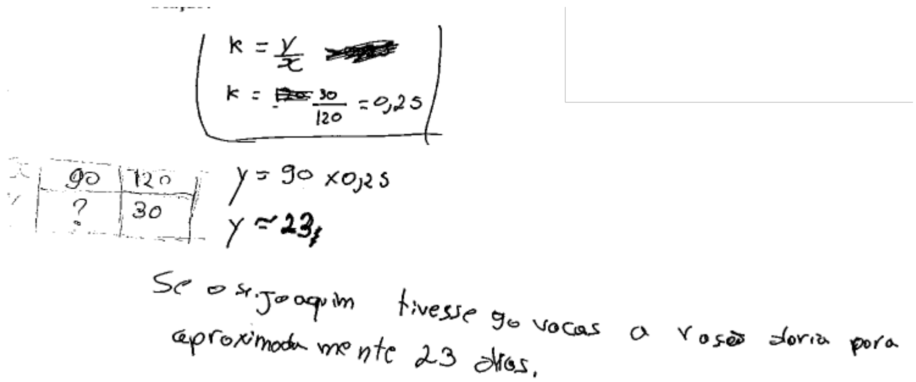
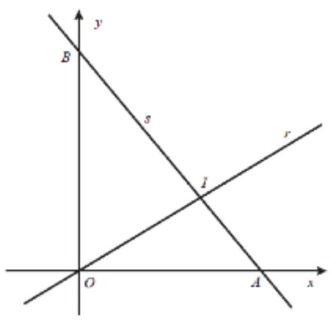


Figura 93 - Resolução do exercício 3 da Questão de aula 1, pelo aluno A8

O quarto e último exercício desta questão de aula, como já mencionado, envolve os conceitos relativos às funções Linear e Afim, abordados no 7.º e 8.º anos de escolaridade, mas revistos com a aplicação da Tarefa 1 e respetiva tarefa de consolidação, Ficha de trabalho 1. Adaptado de um exercício apresentado aos alunos aquando da aplicação da ficha de avaliação diagnóstica implementada no início da intervenção, este exercício foi comum às duas versões da questão de aula e divide-se em três alíneas (Figura 94).

4. Na figura estão representadas, num referencial cartesiano, as retas r e s.
Sabe-se que:

- A reta *s* é definida por $y = -1{,}2x + 4{,}5$;
- O ponto ***A*** é o ponto de interseção da reta *s* com o eixo das abcissas;
- O ponto ***B*** é o ponto de interseção da reta *s* com o eixo das ordenadas;
- O ponto ***I*** é o ponto de interseção das retas *r* e *s*, e tem de coordenadas **(2,5; 1,5)**



4.1 Qual é a ordenada do ponto *B*?

4.2 Qual é a medida do comprimento do segmento de reta [*OA*]?

4.3 Determine a expressão algébrica da função cuja imagem geométrica é a reta *r*.

Figura 94 - Enunciado do exercício 4 da Questão de aula

A primeira alínea pede a ordenada do ponto B, o ponto de interseção do eixo das ordenadas com a reta s, cuja expressão algébrica é fornecida no enunciado. Enquanto que, na ficha de diagnóstico implementada, esta alínea era de escolha múltipla, nesta questão de aula foi apresentada aos alunos na forma de resposta aberta. A análise dos resultados obtidos nesta primeira alínea consta na tabela 9.

Tabela 9 - Síntese da análise da alínea 4.1 da Questão de aula 1

Resposta	Número de alunos	
	Ficha diagnóstica	Questão de aula 1 (1)
Responde corretamente: 4,5.	2	3
Responde incorretamente.	11	1
Não responde.	0	3
Outra resposta.	Não se aplica	4

(1) Dois alunos faltaram no dia de aplicação da Questão de aula 1

O aluno que responde incorretamente, evidência saber que a abcissa do ponto B é zero, pois substituí o valor de x por zero, mas em vez de o fazer na reta de equação $y = -1{,}2x + 4{,}5$, à qual o ponto pertence, substituí na equação da reta r, depois de fazer a sua determinação (Figura95).

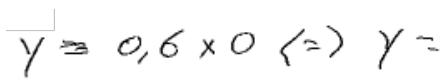


Figura 95 - Resolução da alínea 4.1 da Questão de aula 1, pelo aluno A2

Em "Outra resposta", foram contabilizados 3 alunos que em vez de apresentarem a ordenada do ponto B, apresentaram as coordenadas do ponto B. De referir que apesar de ter dado esta resposta, o aluno A_9 mostrou evidência de saber qual a ordenada do ponto B (Figura 96). Foi também contabilizada nesta categoria a resposta do aluno A_{13}, que apresenta apenas como resposta as coordenadas $(0, b)$, não fazendo a substituição do valor de b.

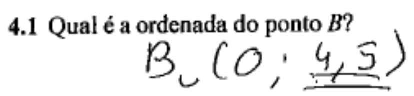


Figura 96 - Resposta à alínea 4.1 da Questão de aula 1, pelo aluno A9.

Na segunda alínea do exercício 4, é pedido o comprimento do semento de reta $[OA]$, em que O é a origem do referencial e A é o ponto de interseção do eixo das abcissas com a reta s, cuja expressão algébrica é fornecida no enunciado. Também esta alínea foi apresentada na ficha de diagnóstico como escolha múltipla, e na questão de aula como resposta aberta. Da análise da tabela

10, pode-se verificar que a maioria dos alunos não respondeu a esta questão. Dos que respondem, um apresenta o comprimento de $[OB]$ em vez de $[OA]$, e o outro apresenta o comprimento de $[OI]$ (Figura 97).

Tabela 10 - Síntese da análise da alínea 4.2 da Questão de aula 1

Resposta	Número de alunos	
	Ficha diagnóstica(1)	Questão de aula 1(2)
(1)Responde corretamente: 3,75.	3	-
(2)Determina corretamente o comprimento pedido.	-	0
Responde incorretamente.	9	2
Não responde.	1	9

(2) Dois alunos faltaram no dia de aplicação da Questão de aula 1.

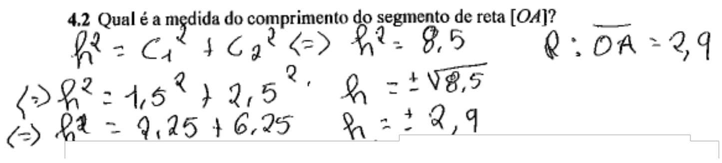


Figura 97 - Resolução da alínea 4.2 da Questão de aula 1, pelo aluno A2

A terceira alínea deste exercício não consta na ficha diagnóstica, e requer a determinação da expressão algébrica da função representada pela reta r. A análise das respostas obtidas consta na tabela 11. Aqui, o aluno A_4 determina corretamente o declive da reta r e apresenta uma expressão que relaciona as duas variáveis, mas não a apresenta em ordem a y (Figura 98). O erro cometido pelo aluno A_3, na determinação do declive da reta r consiste na leitura das coordenadas do ponto I da reta, uma vez que o aluno substituí o valor de y pelo valor da abcissa do ponto e o valor de x pelo valor da ordenada (Figura 99).

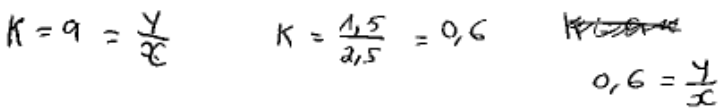


Figura 98 - Resolução da alínea 4.3 da Questão de aula 1, pelo aluno A4

Tabela 11 - Síntese das respostas apresentadas pelos alunos na alínea 4.3 da Questão de aula 1

Tipo de resposta dada pelos alunos	Número de alunos [1]
Reconhece que se trata de uma função Linear do tipo $y = ax$, em que a é o declive da reta dado por $a = \frac{y}{x}$; determina corretamente o valor desta constante e apresenta a correta expressão algébrica.	3
Reconhece que se trata de uma função Linear do tipo $y = ax$, em que a é o declive da reta dado por $a = \frac{y}{x}$; determina corretamente o valor desta constante, mas não apresenta a expressão algébrica pedida.	1
Reconhece que se trata de uma função Linear do tipo $y = ax$, em que a é o declive da reta dado por $a = \frac{y}{x}$; determina incorretamente o valor desta constante apresenta a expressão algébrica de acordo com o valor da constante determinado.	1
Reconhece que se trata de uma função Linear do tipo $y = ax$, mas não faz a determinação, nem a substituição de a.	2
Indica incorretamente a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa como expressão algébrica da reta r.	1
Não responde.	3
[1] Dois alunos faltaram no dia de aplicação desta Questão de aula.	

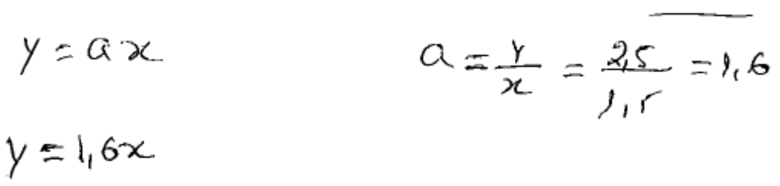


Figura 99 - Resolução da alínea 4.3 da Questão de aula 1, pelo aluno A3

4.2.2 Descrição e análise da ficha de avaliação escrita implementada.

Segue-se a descrição e análise dos resultados dos alunos na ficha de avaliação escrita implementada no final desta intervenção. Como já mencionado, a ficha de avaliação escrita foi aplicada no final da intervenção, abordando não só os conteúdos relativos ao capítulo das Funções, mas também o capítulo relativo às Inequações e valores aproximados de números reais, lecionado anteriormente.

Ficha de Avaliação Escrita

À semelhança da Prova Final de Matemática do 9.° ano de escolaridade, esta ficha divide-se em duas partes. A primeira parte permite o uso da calculadora gráfica e engloba cinco questões, três das quais se referem ao capítulo das Funções. A segunda parte, não permite a utilização da calculadora e é composta por sete questões, três das quais envolvem Funções.

O primeiro exercício da primeira parte da ficha de avaliação que envolve Funções, é a questão três, questão da Prova Final de Matemática de 2015, 2ª. Fase, e semelhante à questão 3. da Ficha de trabalho 2 aplicada. Neste exercício é pedido aos alunos que determinem a ordenada de um ponto de um gráfico de uma função de proporcionalidade inversa, sabendo que esse ponto tem de abcissa 3,2 e dadas as coordenadas de um outro ponto desse gráfico. A análise das respostas dadas pelos alunos encontra-se na tabela 12.

Tabela 12 - Síntese das respostas apresentadas pelos alunos na questão 3. da Ficha de avaliação escrita

Tipo de resposta dada pelos alunos	Número de alunos
Reconhece que a função f é do tipo $y = \frac{a}{x}$, determina corretamente a constante de proporcionalidade inversa a, e determina corretamente o valor da ordenada do ponto, pedido.	7
Reconhece apenas que a função é do tipo $y = \frac{a}{x}$, em que a é a constante de proporcionalidade inversa.	1
Apresenta uma resolução incorreta.	3
Não responde.	2

O aluno A_{13} apesar de não responder à questão, para além de reconhecer que a função é do tipo $y = \frac{a}{x}$, determina corretamente o valor da constante de proporcionalidade inversa, contudo risca esta última parte (Figura 100).

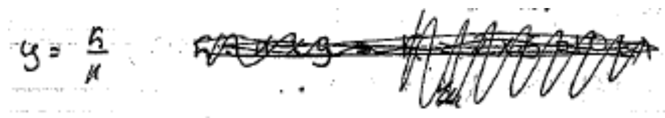


Figura 100 - Resolução de questão 3. da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A13

Dos erros cometidos, destaca-se o apresentado pelo aluno A_3, que resolveu o exercício considerando a função apresentada como uma função de proporcionalidade direta, apesar do enunciado identificar explicitamente a função apresentada (Figura 101). Também o aluno A_{10} considerou que a função apresenta é do tipo $y = ax$, determinando o valor de a que ele assume como sendo o valor da ordenada pedida (Figura 102). Por outro lado, o aluno A_7 resolveu este exercício considerando a função quadrática e na substituição do valor da abcissa na expressão algébrica da função, não faz o quadrado desta (Figura 103).

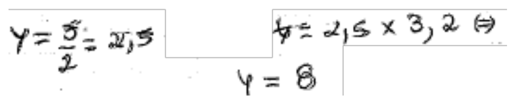


Figura 101 - Resolução de questão 3. da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A3

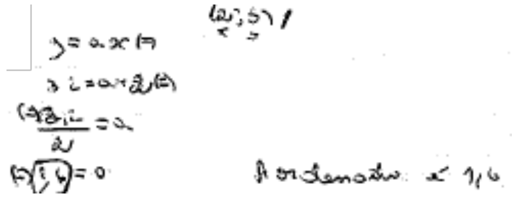


Figura 102 - Resolução da questão 3. da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A10

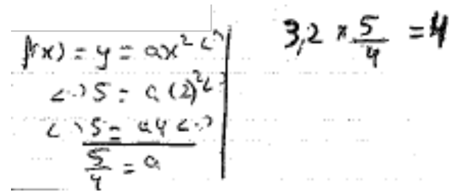


Figura 103 - Resolução da questão 3. da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A7

A quarta questão da primeira parte da ficha de avaliação compreende uma tabela que relaciona o número de fatias (n) em que um bolo de aniversário se divide e a massa (p), em quilogramas, de cada uma das fatias do bolo. Adaptado de um exercício do Teste Intermédio de 2010, esta questão divide-se em três alíneas. A primeira destas alíneas identifica que as variáveis são inversamente proporcionais e questiona o significado da constante desta proporcionalidade no contexto do problema. Da análise das respostas apresentadas pelos alunos (Tabela 13), verifica-se que apenas dois alunos registam que a constante se refere ao peso total do bolo. O aluno A_{10} apesar de não referir explicitamente que a constante é o peso do bolo, refere que é o peso do número de fatias (Figura 104).

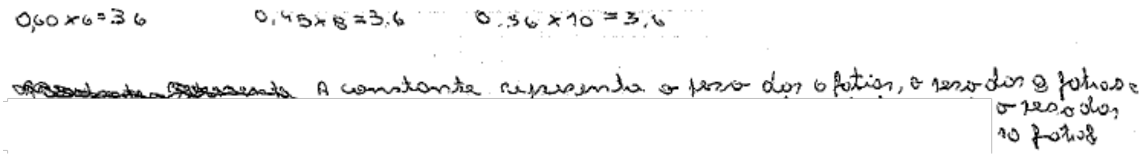


Figura 104 - Resolução de questão 4.1. da Parte I da Ficha de avaliação escrita pelo aluno A10

Tabela 13 - Síntese das respostas apresentadas pelos alunos na alínea 4.1. da Ficha de avaliação escrita

Tipo de resposta dada pelos alunos	Número de alunos
Responde corretamente.	2
Apresenta outra resposta.	10
Não responde.	1

Três dos alunos da turma, como resposta a esta questão, apresentam a determinação da constante de proporcionalidade, sendo que dois destes alunos apresentam ainda a expressão algébrica que relaciona as variáveis envolvidas (Figura 105). Outros dois alunos referem apenas a relação entre as variáveis envolvidas (Figura 106). Os alunos A_5 e A_6 registam que a "constante é o número e fatias", enquanto que o aluno A_{13} apresenta uma resposta que fará mais sentido se em vez de "perdido" fosse "pedido" (Figura 107).

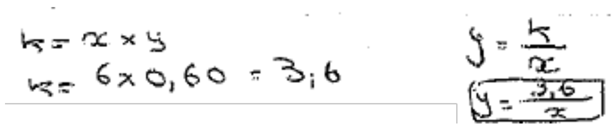


Figura 105 - Resolução de questão 4.1. da Parte I da Ficha de avaliação escrita pelo aluno A1

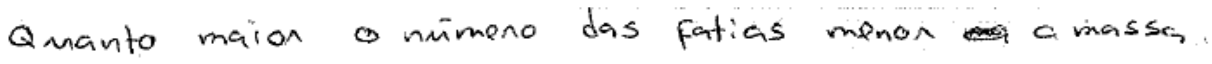


Figura 106 - Resolução de questão 4.1. da Parte I da Ficha de avaliação escrita pelo aluno A4

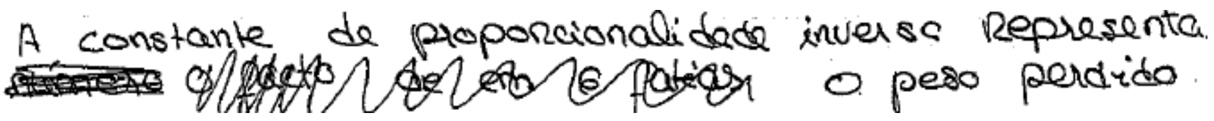


Figura 107 - Resolução de questão 4.1. da Parte I da Ficha de avaliação escrita pelo aluno A13

A segunda alínea da quarta questão, pergunta qual o peso de cada fatia, se o bolo fosse cortado em doze fatias. Cerca de 85% dos alunos responderam corretamente a esta alínea (Tabela 14).

Tabela 14 - Síntese das respostas apresentadas pelos alunos na alínea 4.2. da Ficha de avaliação escrita

Tipo de resposta dada pelos alunos	Número de alunos
Responde corretamente.	11
Apresenta outra resposta.	1
Não responde.	1

Dos alunos que respondem corretamente, dez apresentam o mesmo tipo de resolução (Figura 108). Começam por determinar a constante de proporcionalidade inversa, apresentam a expressão algébrica que relaciona as duas variáveis e substituem a variável independente por doze. Por outro lado, o aluno A_{11}, evidência ter raciocinado que se doze é o dobro de seis fatias, sendo as variáveis inversamente proporcionais, o peso de cada uma das doze será metade do peso de cada uma das seis (Figura 109). Apenas um aluno, A_{12}, resolveu o exercício utilizando a regra de três simples (Figura 110).

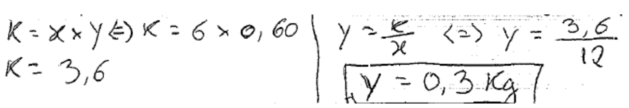


Figura 108 - Resolução de questão 4.2. da Parte I da Ficha de avaliação escrita pelo aluno A2

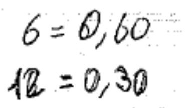


Figura 109 - Resolução de questão 4.2 da Parte I da Ficha de avaliação escrita pelo aluno A11

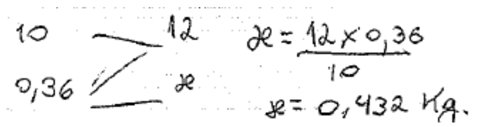


Figura 110 - Resolução de questão 4.2. da Parte I da Ficha de avaliação escrita pelo aluno A12

A terceira e última alínea da questão quatro é uma questão de escolha múltipla para selecionar a expressão que traduz a relação entre as variáveis envolvidas. Apenas cerca de 54% dos alunos selecionou a resposta correta (Tabela 15).

Tabela 15 - Síntese das respostas apresentadas pelos alunos na alínea 4.3. da Ficha de avaliação escrita

Tipo de resposta dada pelos alunos	Número de alunos
Responde corretamente.	7
Apresenta outra resposta.	6
Não responde.	0

Quatro dos alunos que na alínea 4.2. responderam corretamente, utilizando a correta expressão que relaciona as variáveis envolvidas no contexto da situação, selecionaram a opção A $(y = n\times 3{,}6)$, enquanto que o aluno que resolveu utilizando a regra de três simples, A_{11}, e o aluno A_{10}, que resolveu corretamente utilizando a relação de proporcionalidade inversa entre as variáveis, selecionaram a opção C $\left(y = \frac{n}{3{,}6}\right)$.

Na questão cinco desta ficha de avaliação, são apresentadas aos alunos quatro representações gráficas de parte de funções correspondentes a cada um dos tipos de funções abordadas durante o capítulo Funções (Figura 111). Divide-se em três alíneas, na primeira das quais é solicitado aos alunos a expressão algébrica de cada uma das funções representadas.

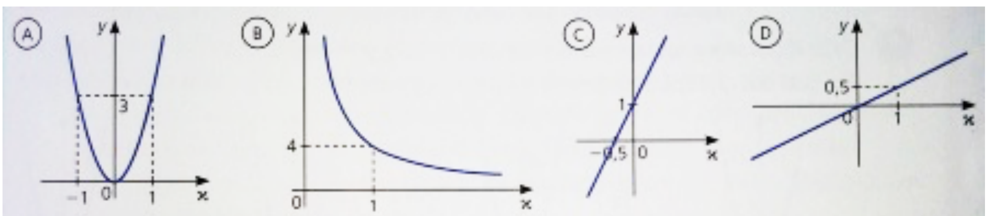


Figura 111 - Ilustração do enunciado da questão 5 da Parte I da Ficha de avaliação escrita

Da análise dos resultados dos alunos (Tabela 16), verifica-se que cerca de 62% determinam corretamente a expressão algébrica da função representada nos referenciais de A e de B, enquanto que apenas cerca de 15% determinam corretamente a expressão algébrica da função representada no referencial de C e 54%, a expressão algébrica da função representada no referencial de D.

Tabela 16 - Síntese das respostas apresentadas pelos alunos na alínea 5.1. da Parte I da Ficha de avaliação escrita

Tipo de resposta dada pelos alunos na determinação da expressão algébrica da função representada em cada uma das situações	Número de alunos			
	A	**B**	**C**	**D**
Responde corretamente.	8	8	2	7
Comete erros na determinação da expressão algébrica pedida.	2	0	4	1
Identifica apenas o tipo de expressão algébrica.	1	2	2	2
Apresenta outra resposta.	1	2	4	2
Não responde.	1	1	1	1

O tipo de erros cometido na determinação da expressão algébrica de cada função representada está sintetizado na tabela 17.

Tabela 17 - Síntese dos erros cometidos pelos alunos na alínea 4.3. da Parte I da Ficha de avaliação escrita

Tipo de erro cometido pelos alunos	Número de alunos
Na determinação do declive da reta.	5
Na substituição e/ou determinação das coordenadas dos pontos envolvidos.	4
Na resolução de uma equação	1

Quatro dos alunos apresentaram dificuldades na determinação do declive da reta da função afim representada em C. Um destes alunos, A_2, substituí o valor de a incorretamente por $0{,}5$, sem apresentar o cálculo que o levou a este resultado (Figura 112). O aluno A_3, comete um erro da determinação das coordenadas do ponto de interseção da reta com o eixo das abcissas, e apesar de chegar a uma divisão impossível o aluno ignorou esta situação (Figura 113). O aluno A_4 para além de determinar incorretamente as coordenadas dos pontos de interseção da reta com os eixos coordenados, faz a determinação do declive da reta considerando que esta passa na origem do referencial (Figura 114), e apesar de obter um valor negativo para o declive de uma reta crescente, o aluno não revê a sua resolução. Por outro lado, o aluno A_9 determina corretamente as coordenadas dos pontos de interseção da reta com os eixos coordenados, mas troca a ordem na substituição destas coordenadas na fórmula para a determinação do referido declive (Figura 115), obtendo também um valor negativo para o declive de uma reta crescente. É de notar que todos estes alunos substituíram corretamente o valor da ordenada na origem na respetiva expressão algébrica.

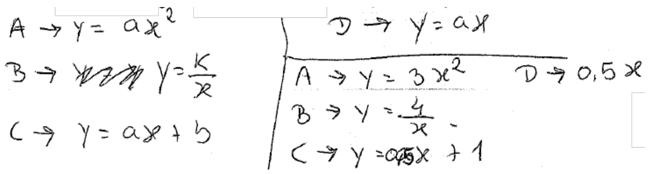


Figura 112 - Resolução da questão 5.1 da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A2

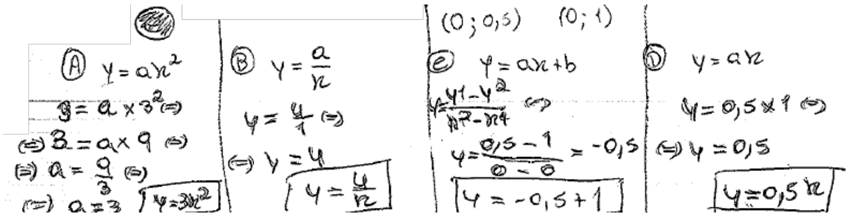


Figura 113 - Resolução da questão 5.1 da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A3

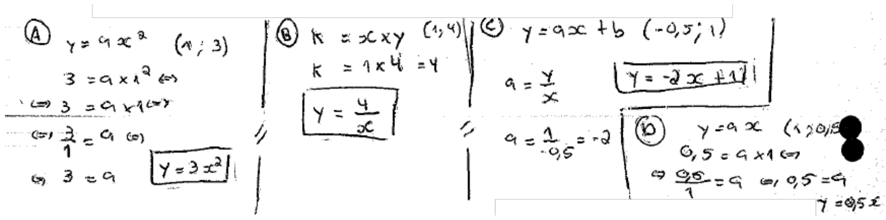


Figura 114 - Resolução da questão 5.1 da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A4

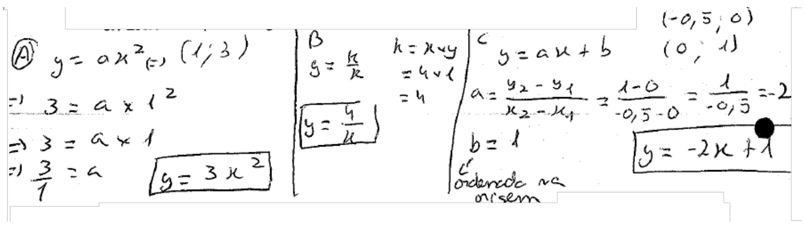


Figura 115 - Resolução da questão 5.1 da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A9

O aluno A_{13} também apresentou dificuldades na determinação do declive, mas da reta da função linear representada em D (Figura 116). O aluno troca a ordem das coordenadas na determinação do referido declive, não havendo evidências se determinou as coordenadas do ponto envolvido corretamente ou se só fez a troca na substituição na fórmula para a determinação do declive. Também o aluno A_6, apesar de determinar corretamente as coordenadas de um dos pontos da parábola representada em A, troca a ordem ao substituir na respetiva expressão algébrica (Figura 117).

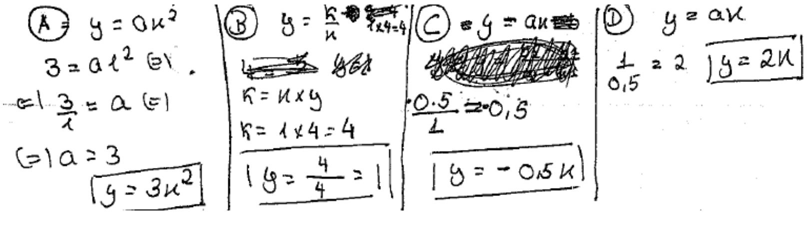


Figura 116 - Resolução da questão 5.1 da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A13

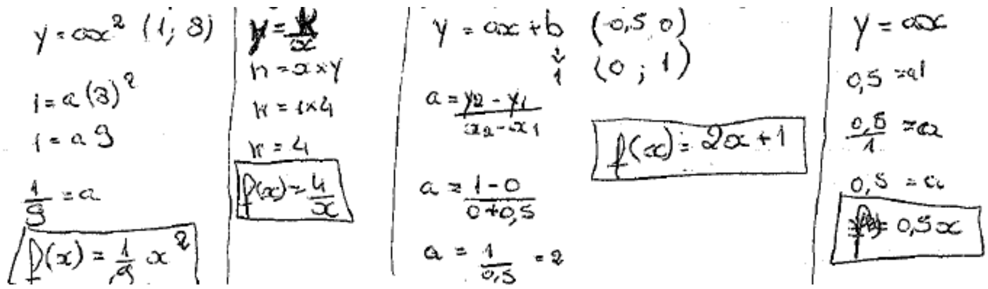


Figura 117 - Resolução da questão 5.1 da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A6

Outro erro verificado foi o do aluno A_8 na determinação da expressão algébrica da função quadrática representada em A (Figura 118). Este aluno substituí corretamente o valor das coordenadas de um dos pontos da parábola na respetiva expressão algébrica, mas comete um erro na resolução da equação, nomeadamente no princípio da multiplicação.

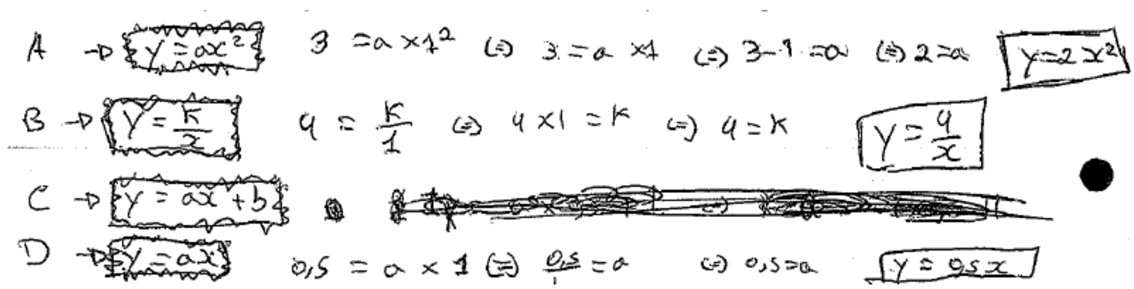


Figura 118 - Resolução da questão 5.1 da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A8

Alguns alunos identificam apenas o tipo de expressão algébrica da função representada, sem fazer a concretização dos parâmetros envolvidos. Nesta situação destacam-se as respostas dos alunos A_5 e A_{11}, apesar das incorreções verificadas na resposta deste último (Figura 119 e Figura 120).

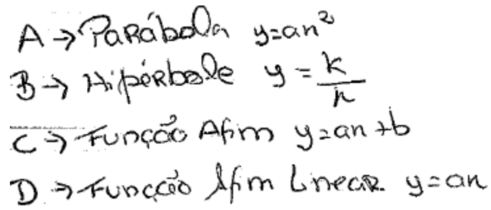


Figura 119 - Resolução da questão 5.1 da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A5

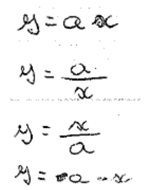


Figura 120 - Resolução da questão 5.1 da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A11

É ainda de referir o "erro" do aluno A_{10}, que troca a expressão da função afim pela da função linear (Figura 121). Além disso, este aluno determina incorretamente as coordenadas dos pontos envolvidos.

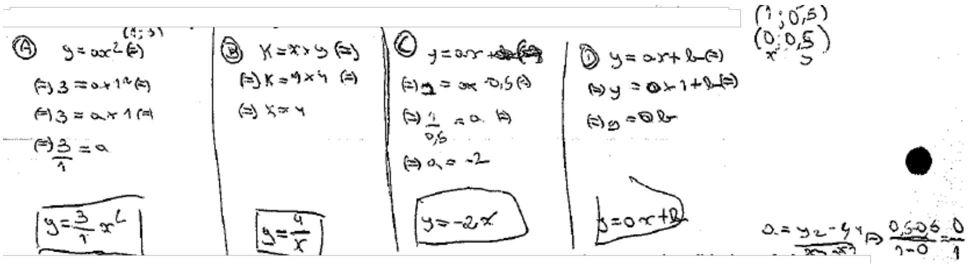


Figura 121 - Resolução da questão 5.1 da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A10

Na segunda alínea da quinta questão, é pedido aos alunos que indiquem e justifiquem quais dos gráficos representam relações de proporcionalidade, identificando o tipo de proporcionalidade e a respetiva constante. Nenhum aluno responde de forma completa e correta a esta alínea. Os alunos A_2 e A_3 apesar de identificarem e justificarem corretamente as relações de proporcionalidade envolvidas, não referem o valor das respetivas constantes de proporcionalidade (Figura 122 e Figura 123). A Justificação apresentada por cada um destes alunos é diferente. Enquanto que um se refere ao tipo de gráfico, o outro justifica com a relação entre as variáveis envolvidas.

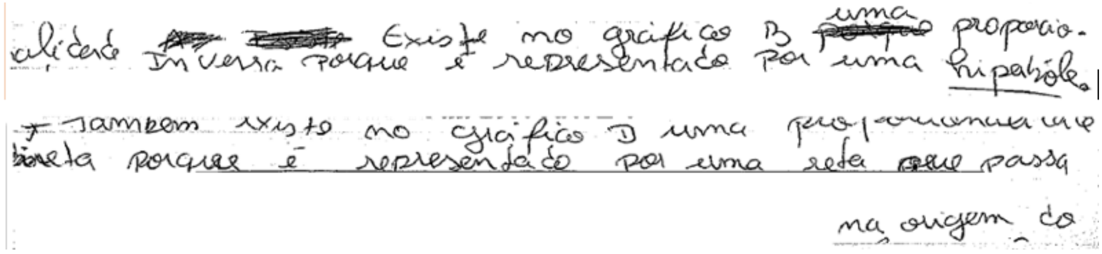


Figura 122 - Resolução da questão 5.2. da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A2

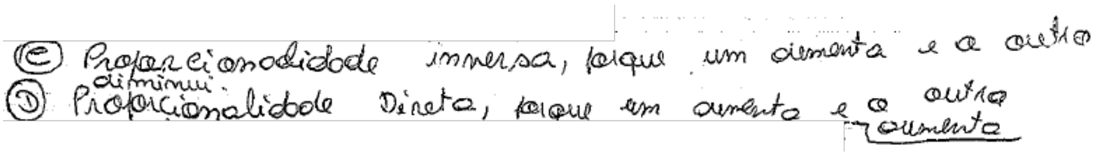


Figura 123 - Resolução da questão 5.2. da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A3

Dois outros alunos, A_5 e A_6 identificam apenas o gráfico B como representativa de uma situação de proporcionalidade inversa, além disso, o aluno A_5 não justifica a sua resposta. De notar, que este aluno na alínea anterior apresentou a expressão algébrica para a função do gráfico B, sem substituir o valor da constante, mas nesta alínea apresenta esse valor.

O aluno A_9, apesar de identificar corretamente as relações de proporcionalidade envolvidas, bem como as respetivas constantes de proporcionalidade, como justificação apresenta o respetivo tipo de expressão algébrica (Figura 124).

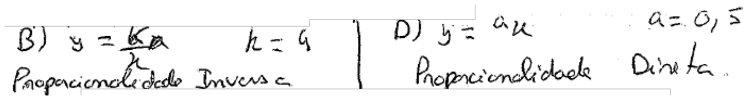


Figura 124 - Resolução da questão 5.2. da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A9

Quatro alunos para além de identificarem corretamente o gráfico B como representativo de uma relação de proporcionalidade inversa e o gráfico D como representativo de uma relação de proporcionalidade direta, identificam ainda o gráfico de A e/ou C como representativos de relações de proporcionalidade inversa. Como justificação um destes alunos, A_4, associou a proporcionalidade inversa ao facto de serem "curvas" e a proporcionalidade direta ao facto de serem "retas" (Figura 125), enquanto que o aluno A_{10} justificou com a relação entre as variáveis envolvidas apesar de em C, tal não se verificar (Figura 126).

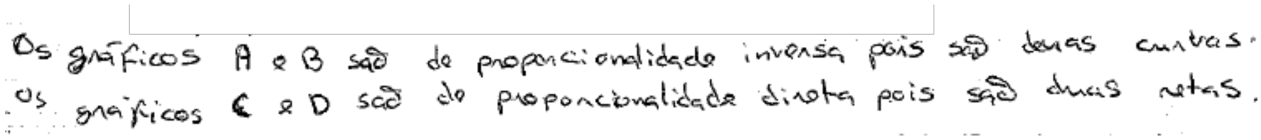

Os gráficos A e B são de proporcionalidade inversa pois são duas curvas.
Os gráficos C e D são de proporcionalidade direta pois são duas retas.

Figura 125 - Resolução da questão 5.2. da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A4

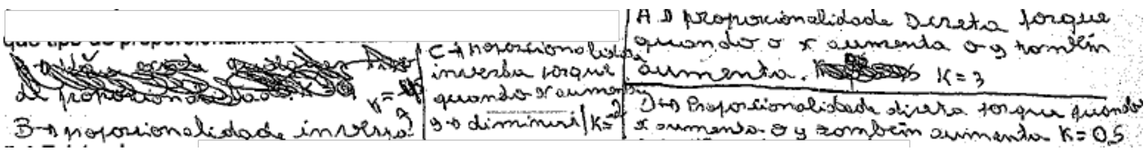

B → proporcionalidade inversa
C → proporcionalidade inversa porque quando x aumenta o y diminui | K=?
A → proporcionalidade Direta porque quando o x aumenta o y também aumenta. K=3
D → Proporcionalidade direta porque quando x aumenta o y também aumenta K=0,5

Figura 126 - Resolução da questão 5.2. da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A10

A última alínea da questão cinco questiona a existência de uma função quadrática. Da análise dos resultados verifica-se que cerca de 85% dos alunos identificam corretamente o gráfico A como o gráfico de uma função quadrática. Destes onze alunos, seis alunos apresentam uma justificação semelhante, focando o facto de ser uma parábola (Figura 127 e Figura 128). Dois outros alunos, A_1 e A_7 chamam "hipérbole" em vez de "parábola" (Figura 129). Por outro lado, os alunos A_4 e A_{10}, justificam com base na simetria da parábola em relação ao eixo das ordenadas (Figura 130 e Figura 131).

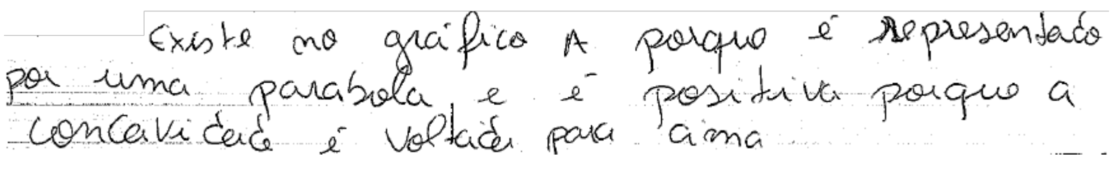

Existe no gráfico A porque é representado por uma parabola e é positiva porque a concavidade é voltada para cima

Figura 127 - Resolução da questão 5.3. da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A2

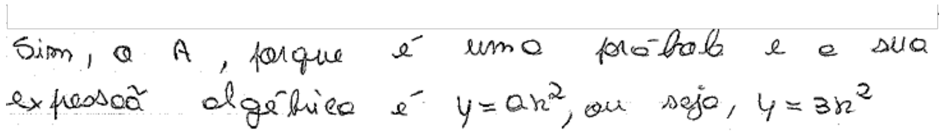

Sim, o A, porque é uma parábola e a sua expressão algébrica é $y=ax^2$, ou seja, $y=3x^2$

Figura 128 - Resolução da questão 5.3. da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A3

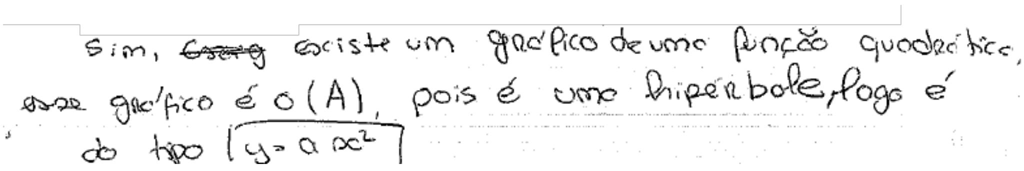


Figura 129 - Resolução da questão 5.3. da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A1

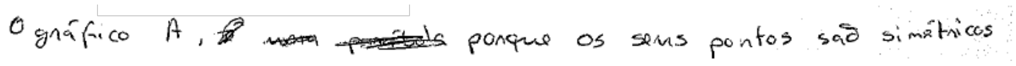


Figura 130 - Resolução da questão 5.3. da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A4

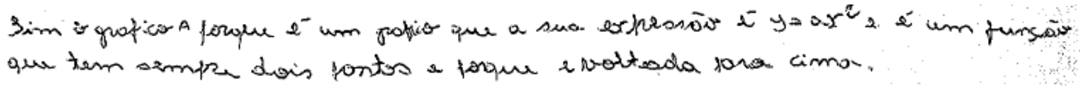
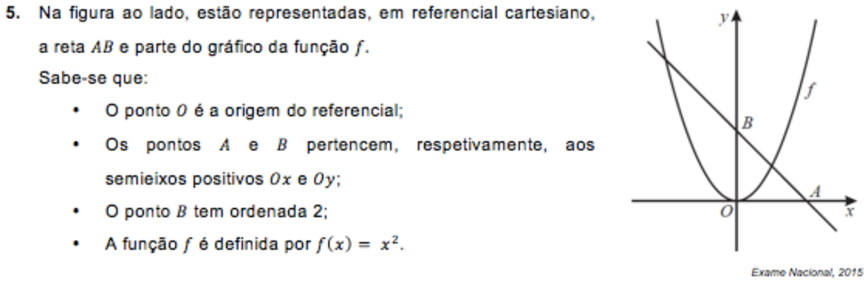


Figura 131 - Resolução da questão 5.3. da Parte I da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A10

Na segunda parte da ficha de avaliação, o primeiro exercício relativo ao tema das Funções e o exercício cinco. Dividido em duas alíneas, este exercício é adaptado da Prova Final de Matemática de 2015, 2.ª Fase (Figura 132).



5. Na figura ao lado, estão representadas, em referencial cartesiano, a reta AB e parte do gráfico da função f.
Sabe-se que:

- O ponto O é a origem do referencial;
- Os pontos A e B pertencem, respetivamente, aos semieixos positivos Ox e Oy;
- O ponto B tem ordenada 2;
- A função f é definida por $f(x) = x^2$.

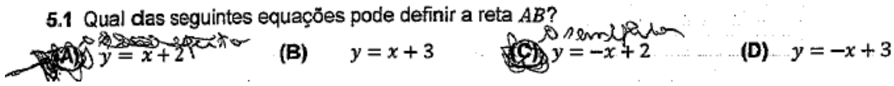
Figura 132 - Enunciado da questão 5. da Parte II da Ficha de avaliação escrita

Na primeira alínea é solicitado aos alunos que selecionem a opção com a correta equação da reta representada no referencial, e que justifiquem essa opção. Da análise dos resultados dos alunos (Tabela 18), verifica-se que cerca de 54% selecionaram corretamente a opção C.

Tabela 18 - Síntese das respostas apresentadas pelos alunos na alínea 5.1. da Parte II da Ficha de avaliação escrita

Tipo de resposta dada pelos alunos	Número de alunos
Seleciona corretamente a opção C	7
Seleciona incorretamente a opção A	5
Seleciona incorretamente a opção B	1
Seleciona incorretamente a opção D	0

De referir que há evidências de o aluno A_{10} teve dúvidas entre a opção A e C, acabando por registar a opção A (Figura 133).

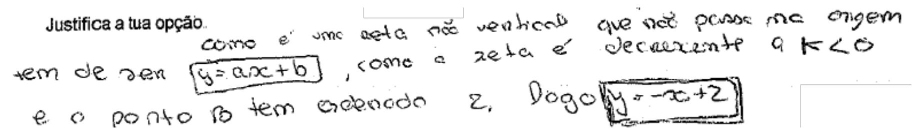


5.1 Qual das seguintes equações pode definir a reta AB?

(A) $y = x + 2$ (B) $y = x + 3$ (C) $y = -x + 2$ (D) $y = -x + 3$

Figura 133 - Resolução da questão 5.1. da Parte II da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A10

Quanto ao tipo de justificação apresentada, destaca-se a do aluno A_1, porque está bastante clara e completa (Figura 134). As restantes justificações estão sintetizadas na tabela 19.



Justifica a tua opção.

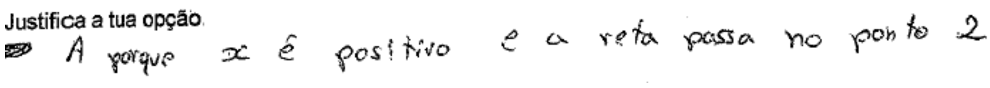
como é uma reta não vertical que não passa na origem tem de ser $\boxed{y=ax+b}$, como a reta é decrescente a $k<0$ e o ponto B tem ordenada 2, logo $\boxed{y=-x+2}$

Figura 134 - Justificação da questão 5.1. da Parte II da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A1

Tabela 19 - Síntese das justificações apresentadas pelos alunos na alínea 5.1. da Parte II da Ficha de avaliação escrita

Justificação apresentada	Número de alunos
Refere o facto de uma reta não vertical ser do tipo $y = ax + b$.	3
Refere que o valor de b é o valor da ordenada na origem, ou seja 2.	8
Associa o sinal de a ao sentido da inclinação da reta.	8
Outra resposta	3
Não apresenta justificação	1

Apesar de oito alunos associarem o sinal do parâmetro a de $y = ax + b$ ao sentido da inclinação da reta, apenas seis o fazem corretamente. Além disso continua a verificar-se incorreções nas terminologias utilizadas. Por exemplo o aluno A_8 referiu-se a "x", quando deveria ser "coeficiente de x".(Figura 135).



Justifica a tua opção.

A porque x é positivo e a reta passa no ponto 2

Figura 135 - Justificação da questão 5.1. da Parte II da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A8

Destaca-se ainda dois alunos, um que selecionou a opção A, A_5, e outro que selecionou a opção C, A_6, que na justificação se referem à função f representada no mesmo referencial (Figura 136 e Figura 137), denotando falta de leitura do enunciado.

Justifica a tua opção.

B função f é uma parábola, logo é do tipo $y=ax^2$

Figura 136 - Justificação da questão 5.1. da Parte II da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A5

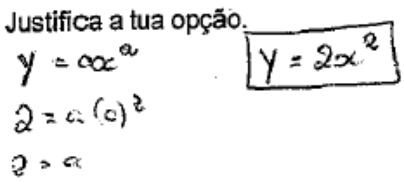


Figura 137 - Justificação da questão 5.1. da Parte II da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A6

A segunda alínea deste exercício requer a determinação da expressão $f(\sqrt{3}) + g(2)$, em que g é a função cujo gráfico é simétrico ao gráfico da função f. Apenas um aluno denota ter identificado a imagem geométrica da função g, apesar de na resolução algébrica não ter tido em consideração que o sinal do coeficiente de x^2 deveria ser negativo (Figura 138). Os restantes alunos ou não responderam, ou limitaram-se a determinar $f(\sqrt{3})$.

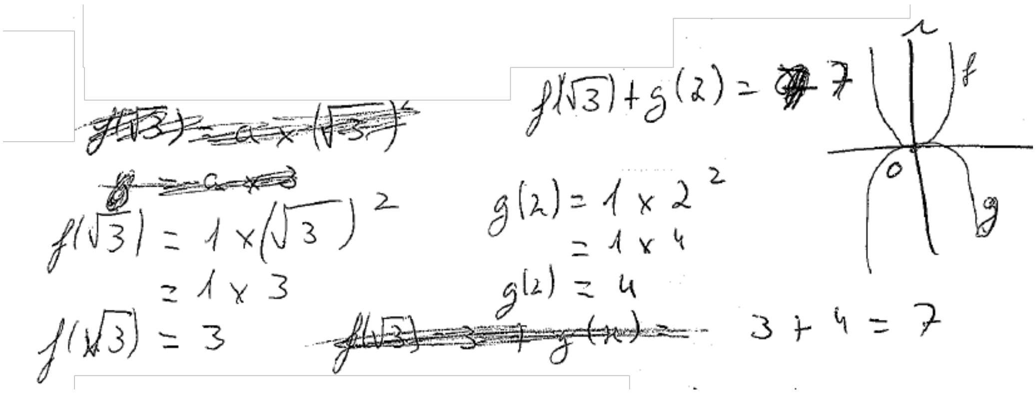
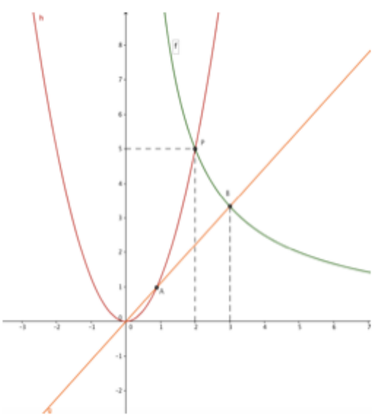


Figura 138 - Resolução da questão 5.2. da Parte II da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A9

O exercício seis da segunda parte da ficha de avaliação envolve a representação gráfica de parte de uma função quadrática, de uma função de proporcionalidade inversa, e de uma função linear (Figura 139). A primeira alínea requer a determinação da expressão algébrica da função f representada graficamente por uma hipérbole. A análise das respostas dos alunos apresenta-se sintetizada na tabela 20.



6. No referencial da figura ao lado, está representado o gráfico da função f, g e h.

Sabe-se que:

- h é uma função do tipo $h(x) = ax^2$;
- f é uma função de proporcionalidade inversa;
- g é uma função linear;
- o ponto P é o ponto de coordenadas (2; 5);
- os pontos O e A são os pontos de interseção dos gráficos das funções g e h
- o ponto B tem de abcissa 3 e é o ponto de intersecção dos gráficos das funções f e g.

Figura 139 - Enunciado da questão 6. da Parte II da Ficha de avaliação escrita

Tabela 20 - Síntese das respostas apresentadas pelos alunos na alínea 6.1. da Parte II da Ficha de avaliação escrita

Tipo de resposta dada pelos alunos	Número de alunos
Determina corretamente a constante de proporcionalidade inversa e apresenta uma expressão algébrica correta para a função representada.	6
Determina corretamente a constante de proporcionalidade inversa, mas não apresenta uma expressão algébrica correta para a função apresentada.	1
Reconhece que uma função de proporcionalidade inversa é dada pela expressão do tipo $y = \frac{a}{x}$, em que a constante de proporcionalidade inversa é a mas não completa o exercício ou fá-lo de forma incorreta.	3
Outra resposta.	2
Não responde.	1

Os três alunos que reconhecem que uma função de proporcionalidade inversa é dada pela expressão do tipo $y = \frac{a}{x}$, em que a constante de proporcionalidade inversa é a mas não completam o exercício ou fazem-no de forma incorreta, determinam a constante considerando que se trata de uma função de proporcionalidade direta (Figura 140). O aluno A_7 resolve a questão considerando a função linear (Figura 141).

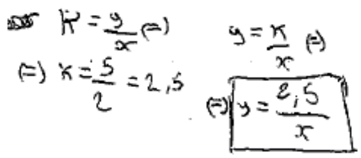


Figura 140 - Resolução da questão 5.1. da Parte II da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A10.

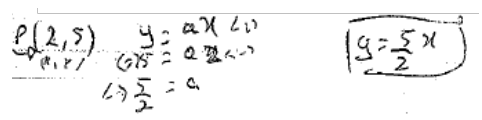


Figura 141 - Resolução da questão 5.1. da Parte II da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A7.

Na segunda alínea da questão seis, solicita-se a determinação das coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função linear g e o gráfico da função de proporcionalidade inversa f. Uma vez que é fornecida a abcissa deste ponto, os alunos precisavam apenas de utilizar a expressão algébrica da função f, determinada em 6.1. De acordo com a análise das respostas dos alunos (Tabela 21), verifica-se que apenas cerca de 31% respondem de forma correta e completa. Das respostas incorretas, destaca-se a do aluno A_1, que iniciou uma resolução possível, começando por substituir o valor de x na expressão obtida em 6.1. pelo valor da abcissa fornecido. Contudo este aluno manifesta dificuldades na resolução da equação resultante desta substituição (Figura 142) o que o levou a um resultado incorreto. Por outro lado, o aluno A_9, determina a expressão algébrica da função quadrática h e substituí nesta expressão o valor de x pelo valor conhecido da abcissa (Figura 143), determinando assim as coordenadas de um ponto da parábola representativa da função h e não as coordenadas do ponto B.

Tabela 21 - Síntese das respostas apresentadas pelos alunos na alínea 6.1. da Parte II da Ficha de avaliação escrita

Tipo de resposta dada pelos alunos	Número de alunos
Determina corretamente as coordenadas do ponto B	5
Outra resposta	4
Não responde	4

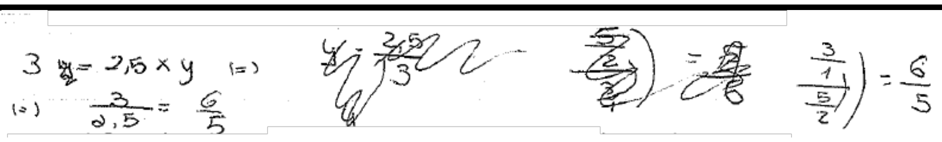


Figura 142 - Resolução da questão 6.1. da Parte II da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A1

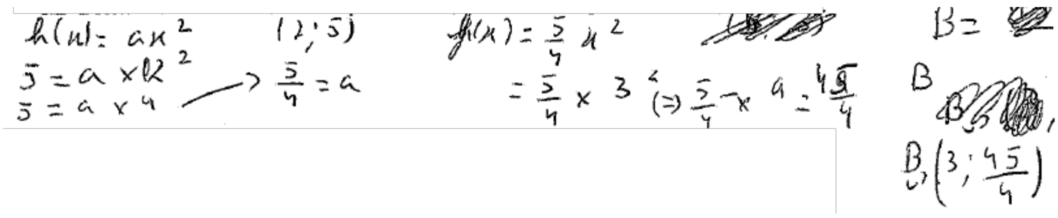


Figura 143 - Resolução da questão 6.2. da Parte II da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A9

É ainda de referir o aluno A_3, que apesar de não responder a esta alínea, regista incorretamente o valor da abcissa no lugar da ordenada, nas coordenadas do ponto (Figura 144).

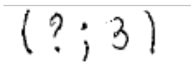


Figura 144 - Registo na questão 6.2. da Parte II da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A3

A terceira alínea da questão seis pede a determinação da expressão algébrica da função linear g. Para isso os alunos precisavam de utilizar as coordenadas do ponto B determinado em 6.2, pelo que alguns alunos não tendo resolvido a alínea 6.2, não resolveram o 6.3 (Tabela 22). Verifica-se, no entanto, a exceção do aluno A_3 que, substituí o valor de a na expressão $y = ax$ por 1 (Figura 145). Tal como o aluno A_3, o aluno A_{10} substituí a por um valor, mas sem apresentar os cálculos da sua determinação (Figura 146). Por outro lado, o aluno A_4 comete um erro na determinação do parâmetro a em $y = ax$, nomeadamente na divisão de um número fracionário por um número inteiro (Figura 147).

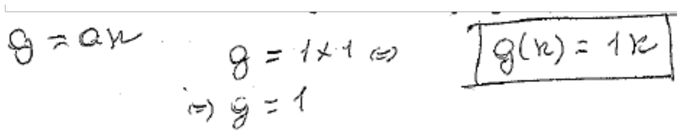


Figura 145 - Resolução da questão 6.3. da Parte II da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A3

Tabela 22 - Síntese das respostas apresentadas pelos alunos na alínea 6.3. da Parte II da Ficha de avaliação escrita

Tipo de resposta dada pelos alunos	Número de alunos
Determina corretamente a expressão algébrica da função g, de acordo com as coordenadas do ponto determinado em 6.2.	4
Reconhece que uma função linear é dada pela expressão do tipo $y = ax$, em que o declive da reta é dado por a mas não completa o exercício ou fá-lo de forma incorreta.	4
Outra resposta	1
Não responde	4

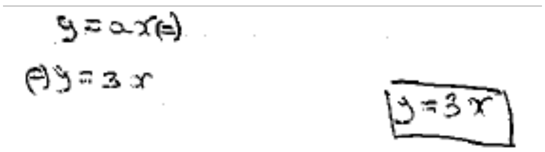


Figura 146 - Resolução da questão 6.3. da Parte II da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A10

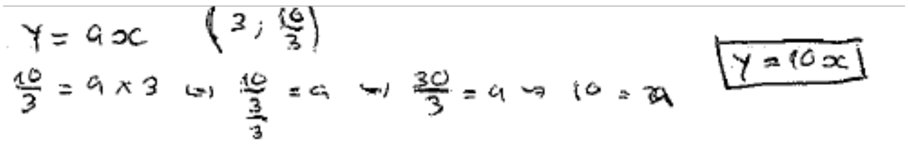


Figura 147 - Resolução da questão 6.3. da Parte II da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A4

A quarta alínea do exercício seis requisita a determinação da expressão algébrica da função quadrática h. Da análise das respostas dos alunos verifica-se que apenas cerca de 46% dos alunos respondem de forma correta e completa a esta alínea (Tabela 23). O aluno A_1 determina o valor de a considerando que se trata de uma função linear (Figura 148), enquanto que a aluna A_{13} determina o valor de a, considerando que se trata de uma função de proporcionalidade inversa (Figura 149). Por outro lado, o aluno A_3, apesar de utilizar um processo adequado para determinar o valor de a, utiliza um ponto incorreto (Figura 150 e Figura 151).

Tabela 23 - Síntese das respostas apresentadas pelos alunos na alínea 6.4. da Parte II da Ficha de avaliação escrita

Tipo de resposta dada pelos alunos	Número de alunos
Determina corretamente o valor de a em $y = ax^2$ e apresenta uma expressão algébrica correta para a função representada.	6
Comete erros na determinação do valor a em $y = ax^2$.	3
Outra resposta	1
Não responde	3

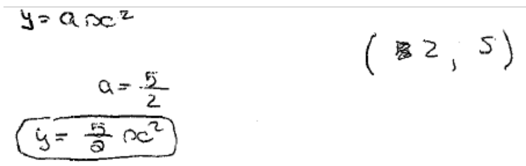


Figura 148 - Resolução da questão 6.4. da Parte II da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A1

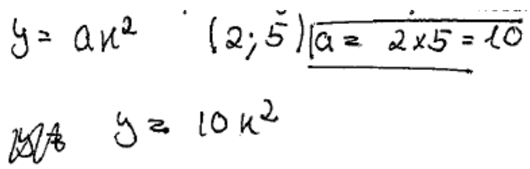


Figura 149 - Resolução da questão 6.4. da Parte II da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A13

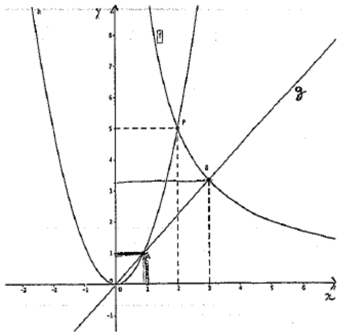


Figura 150 - Referencial da questão 6. da Parte II da Ficha de avaliação escrita do aluno A3

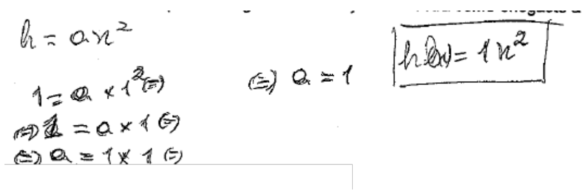


Figura 151 - Resolução da questão 6.4. da Parte II da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A4

A última alínea do exercício seis pede a determinação das coordenadas do ponto A, ponto de interseção do gráfico da função quadrática h com o gráfico da função linear g. Para isso, os alunos precisavam das respetivas expressões algébricas, obtidas nas alíneas anteriores. Talvez por este motivo, o aluno A_2 limitou-se a escrever a equação $g(x) = h(x)$, uma vez que não resolveu as alíneas anteriores (Tabela 24). Os alunos A_6 e A_8 cometem erros na resolução da equação de segundo grau estabelecida, um na lei do anulamento de um produto (Figura 152) e outro na factorização do polinómio. Além disso o aluno A_8 escreve incorretamente as coordenadas do ponto pedido (Figura 153).

Tabela 24 - Síntese das respostas apresentadas pelos alunos na alínea 6.4. da Parte II da Ficha de avaliação escrita

Tipo de resposta dada pelos alunos	Número de alunos
Resolve corretamente a equação $g(x) = h(x)$, de acordo com as expressões algébricas obtidas em 6.3 e 6.4.	2
Comete erros na resolução da equação $g(x) = h(x)$.	3
Apresenta a equação $g(x) = h(x)$, mas não a resolve.	1
Outra resposta.	6
Não responde.	2

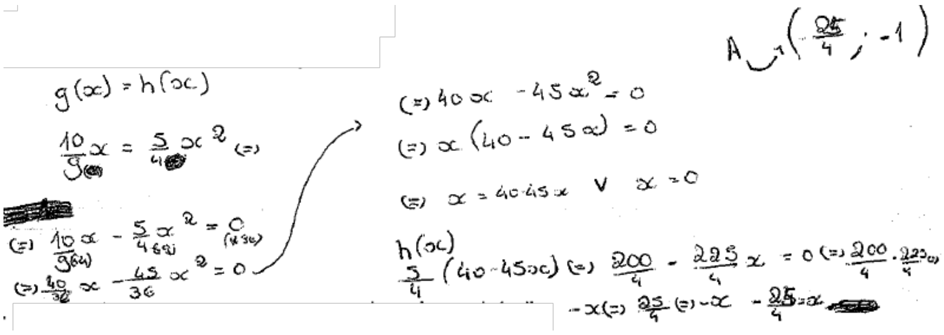


Figura 152 - Resolução da questão 6.5. da Parte II da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A6

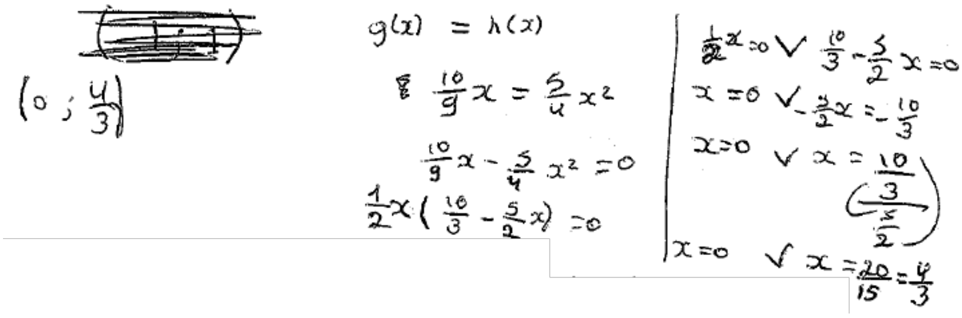


Figura 153 - Resolução da questão 6.5. da Parte II da Ficha de avaliação escrita, pelo aluno A8

Três alunos tentaram obter as coordenadas do ponto A, pela leitura do gráfico, e limitaram-se a registar na folha do teste as coordenadas $(1,1)$.

O exercício sete, e último da ficha de avaliação, envolve a interpretação de gráficos em contextos reais. Com este exercício pretendia-se que os alunos selecionassem o gráfico que melhor modelasse o movimento de um cão em torno de um banco de jardim, de acordo com a descrição do enunciado (Figura 154). Nenhum aluno selecionou a opção correta (Tabela 25). A maioria dos alunos escolheu uma opção que respeita duas das três indicações do enunciado: "O cão afastou-se rapidamente do banco" e "Depois aproximou-se vagarosamente deste", uma vez que o declive dos segmentos de reta do quarto gráfico está em concordância com estas condições. Contudo, estes alunos não conseguiram visualizar, ou não compreenderam que o cão ao descrever um arco de circunferência com a corda esticada (que desliza ao longo do banco), a distância ao banco seria constante.

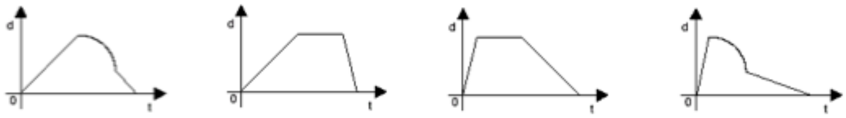


Figura 154 - Gráficos da questão 7. da Parte II da Ficha de avaliação escrita

Tabela 25 - Síntese das respostas apresentadas pelos alunos na questão 7. da Parte II da Ficha de avaliação escrita

Resposta dada pelos alunos	Número de alunos
Primeiro gráfico	2
Segundo gráfico	1
Terceiro gráfico	0
Quarto gráfico	10

4.3 Perceção dos alunos relativamente às estratégias de ensino e aprendizagem utilizadas

Nesta secção apresenta-se a análise das respostas dos alunos a um questionário implementado no final da intervenção, nomeadamente na última aula do primeiro período. Dividido em duas partes: Parte A e Parte B, este questionário foi aplicado com o objetivo de conhecer a perceção dos alunos relativamente às estratégias de ensino e aprendizagem utilizadas.

A Parte A subdivide-se em cinco questões, cada uma das quais relativa a uma das cinco tarefas investigativas implementadas e compreendendo quatro alíneas. A Parte B compreende quatro questões relativas à intervenção em geral.

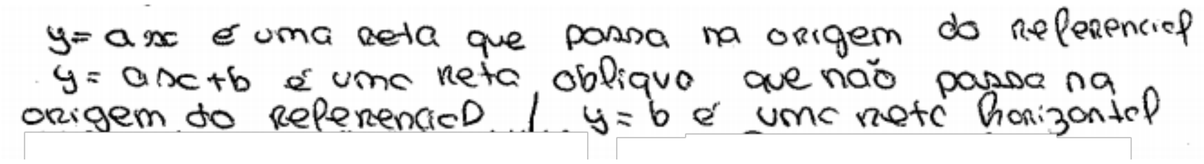
Uma vez que neste trabalho não constam os resultados relativos à Tarefa 4 implementada, não serão incluídos na análise deste inquérito as respostas relativas a esta Tarefa 4.

4.3.1 Perceção dos alunos relativamente às tarefas investigativas aplicadas

Da análise das respostas dos alunos, verifica-se que, das cinco tarefas implementadas, cerca de 92% referem a Tarefa 5 como sendo a preferida. A maioria destes alunos justifica esta opção pela relação que esta tarefa permite fazer entre a aplicabilidade da Matemática e a resolução de problemas em contextos reais: "pois aprendemos como a matemática pode ajudar em muitos casos." (A_1); "nunca tinha visto um episódio de uma série policial em que é resolvida pela Matemática." (A_{12}). Outros alunos justificam a eleição desta tarefa, pelos recursos utilizados: "porque usamos o sensor e a calculadora gráfica." (A_{11}). O aluno A_2, para além da Tarefa 5, elegeu também a Tarefa 2, justificando com o facto de "foi mais ativa e assim dá mais incentivo para aprender.".

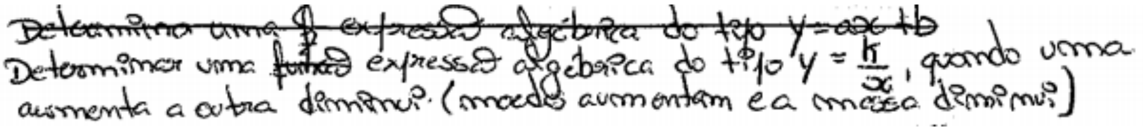
De um modo geral, os alunos são unânimes em considerar que a aplicação destas tarefas, os ajudaram na compreensão dos conteúdos matemáticos em curso: "achei mais fácil de perceber a matéria com coisas práticas." (A_7); "achei mais fácil de aprender" (A_{10}); "pois através disso podemos estudar para a ficha de avaliação e dá resultado." (A_8); "porque é uma maneira mais fácil e divertida de aprender." (A_{12}).

Com exceção de dois alunos, A_{11} e A_{12}, que durante a intervenção faltaram a algumas aulas, todos os outros registaram terem conseguido obter conclusões nas atividades pelas tarefas investigativas implementadas. Por exemplo, relativamente à Tarefa 1: Função Linear, Constante e Afim – exploração com o GeoGebra, a maioria dos alunos regista corretamente a relação entre a expressão algébrica e a respetiva imagem geométrica (Figura 155). Quanto à Tarefa 2: Resistência do esparguete, a maioria dos alunos registou a relação entre as grandezas envolvidas: "Quanto menor for o comprimento do esparguete, mais forte ele se torna." (A_5). seis alunos apresentaram ainda a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa (Figura 156).



y= ax é uma reta que passa na origem do referencial
y = ax+b é uma reta obliquo que não passa na
origem do referencial / y = b é uma reta horizontal

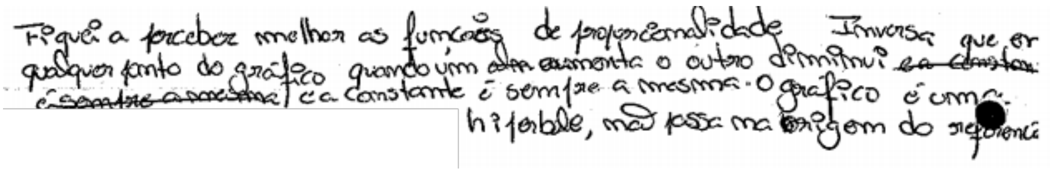
Figura 155 - Resposta do aluno A1 à alínea 1.3. do Questionário final



~~Determina uma f expressão algébrica do tipo y=ax+b~~
Determinar uma ~~função~~ expressão algébrica do tipo $y = \frac{k}{x}$, quando uma
aumenta a outra diminui (moedas aumentam e a massa diminui)

Figura 156 - Resposta do aluno A6 à alínea 2.3. do Questionário final

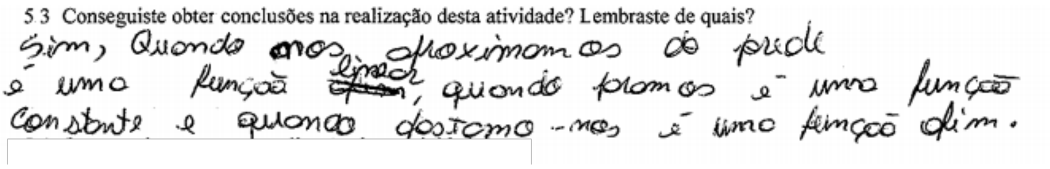
Em relação à Tarefa 3: Função de Proporcionalidade Inversa – Exploração com o GeoGebra, a maioria dos alunos registou "Quando o x aumenta o y diminui e o produto dos 2 é sempre igual." (A_4), outros identificam ainda, a curva da função de proporcionalidade inversa como sendo uma hipérbole (Figura 157).



Fiquei a perceber melhor as funções de proporcionalidade Inversa que em
qualquer ponto do gráfico quando um ~~dos~~ aumenta o outro diminui ~~e a constante~~
~~é sempre a mesma~~ e a constante é sempre a mesma. O gráfico é uma
hiperbole, não passa na origem do referencial

Figura 157 - Resposta do aluno A6 á alínea 3.3. do Questionário final

Quanto às conclusões relativas à realização da Tarefa 5, as respostas dos alunos são mais dispersas. Uns referem-se ao filme visualizado, por exemplo: "que podemos tentar repetir o que aconteceu." (A_8); "Que até para resolver casos policiais foi preciso fazer cálculos (utilizar a matemática)." (A_9). Outros referem-se à parte da atividade realizada com o sensor e a calculadora gráfica. Neste caso, alguns alunos fazem referência à relação entre o declive das retas obtidas e a velocidade de deslocação do "sensor", por exemplo: "Quanto mais rápido andamos o declive era maior, quando parávamos era constante." (A_5). Outros fazem referência à relação entre o sentido das retas obtidas, e o movimento de deslocação do "sensor", por exemplo: "quanto mais uma pessoa se aproxima da parede mais o gráfico fica próximo do eixo dos xx e quanto mais se afasta mais longe fica do eixo dos xx." (A_7). Há ainda quem relacione este movimento com o tipo de função que modela cada troço do gráfico obtido (Figura 158).


5.3 Conseguiste obter conclusões na realização desta atividade? Lembraste de quais?

Sim, quando nos aproximamos da parede é uma função ~~afim~~ linear, quando paramos é uma função constante e quando afastamo-nos é uma função afim.

Figura 158 - Resposta do aluno A3 à alínea 5.3. do Questionário final

4.3.2 Perceção dos alunos relativamente aos recursos tecnológicos utilizados

Relativamente aos recursos tecnológicos utilizados, para cada uma das tarefas implementadas (T1, T2, T3 e T5) foi pedido aos alunos que descrevessem as dificuldades sentidas no seu manuseamento. Os resultados da análise destas respostas encontram-se sintetizadas na tabela 26. Como já referido, os alunos A_{11} e A_{12} faltaram no dia da implementação da Tarefa 2, pelo que não responderam às questões relativas a esta tarefa.

Tabela 26 - Síntese das respostas apresentadas pelos alunos nas alíneas 1.2.; 2.2.; 3.2.; 4.2.; 5.2. do questionário implementado

Tipo de dificuldade sentida	Número de alunos			
	T1	**T2**	**T3**	**T5**
Nenhuma.	5	3	11	4
Na utilização do GeoGebra.	7	4[1]	1	NA
Na utilização da calculadora gráfica.	NA	0	NA	4
Na utilização do sensor de movimento.	NA	NA	NA	1
Outro.	0	4	0	4
Não responde.	1	0	1	0

Nota: NA – Não se aplica este recurso à respetiva tarefa;

[1] Verifica-se 4 respostas, apesar deste recurso não se aplicar a esta tarefa.

Pela análise dos dados constante na tabela 26, verifica-se que as dificuldades iniciais sentidas na utilização do software GeoGebra vão diminuindo à medida que os alunos se vão familiarizando com este recurso. Na Tarefa 2: Resistência do esparguete, não foi utilizado o GeoGebra, no entanto quatro alunos identificam este software como o recurso em que sentiram dificuldades. Apesar da calculadora gráfica ter sido utilizada nas Tarefa 2 e 5, apenas cerca de 31% referiu ter sentido dificuldades na utilização deste recurso aquando da realização da Tarefa 5. No parâmetro "Outros" foram contabilizadas as respostas não relacionadas com os recursos tecnológicos. Por exemplo, na Tarefa 2, quatro alunos referem que as dificuldades sentidas se remetem às relativas com o manuseamento do esparguete, enquanto que na Tarefa 5, alguns alunos registaram que possuíram dificuldades na compreensão do filme: "Perceber algumas coisas do filme." (A_5).

Para cada tarefa aplicada, foi perguntado aos alunos o que mais gostou. A maioria das respostas referem-se aos recursos tecnológicos utilizados (Tabela 27), tendo os alunos referido mais do que uma razão.

Tabela 27 - Síntese das respostas apresentadas pelos alunos nas alíneas 1.4.; 2.4.; 3.4.; 4.4.; 5.4. do Questionário implementado

O que mais gostou	Número de alunos			
	T1	**T2**	**T3**	**T5**
Trabalhar nos computadores.	8	4[1]	3	NA
Trabalhar com o GeoGebra.	4	NA	6	NA
Trabalhar com a calculadora gráfica.	NA	2	NA	4
Trabalhar com o sensor de movimento.	NA	NA	NA	6
Trabalhar a pares/grupo.	2	1	6	1
Visualizar o filme.	NA	NA	NA	4
Trabalhar com o material manipulativo.	NA	4	NA	NA
Outro.	1	0	1	0

Nota: NA – Não se aplica este recurso à respetiva tarefa;

[1] Verifica-se 4 respostas, apesar deste recurso não se aplicar a esta tarefa.

Pela análise dos dados da tabela 27 verifica-se que, para a Tarefa 1, apesar de cerca de 62% registar que gostou de trabalhar no computador, não explicitam que gostam de trabalhar com o GeoGebra, talvez pelas dificuldades sentidas e referenciadas na tabela 26. Aqui destaca-se a resposta do aluno A_9: "De ver o declive da reta quando nós aumentamos ou diminuímos o valor de x.". À medida que os alunos se vão ambientando com este software, vai também aumentando o gosto pela sua utilização, como se verifica pelas respostas dadas na Tarefa 3.

Tal como já referido, quatro alunos não fizeram a correta identificação dos recursos utilizados na Tarefa 2, pelo que identificam "trabalhar com o computador" como o que mais gostaram na realização desta tarefa. Ainda nesta tarefa, os alunos identificaram o trabalho com o esparguete ou "colocar as moedas no saquinho", como o que mais gostaram na realização da mesma.

Trabalhar com o sensor de movimento ou "Criar os gráficos com o sensor de movimento." (A_7), foi referenciado pela maioria dos alunos relativamente ao que mais gostou na realização da Tarefa 5.

Em "Outros" foram contabilizadas respostas como por exemplo: "O facto de ser uma aula diferente.", ou como registou o aluno A_{11} relativamente à Tarefa 5: "Andar pela sala.".

O questionário aplicado incluí uma questão relativa à projeção de vídeos e aulas interativas da Escola Virtual. Relativamente a este recurso, os alunos classificam-no como "útil", e "atrativo". O aluno A_6 acrescentou: "são uma forma de cativar os alunos para a disciplina, e de ficar a perceber melhor a matéria.". Todos os alunos gostaram da sua utilização na sala de aula, mas cinco alunos, cerca de 38%, afirmaram precisar da explicação da professora após a visualização destes vídeos ou aulas interativas.

A última questão do questionário implementado é relativa à aplicação das novas tecnologias nas aulas de Matemática. Todos os alunos manifestaram-se favoravelmente em relação a esta aplicação. Cerca de 54% dos inquiridos consideram que a aplicação das novas tecnologias nas aulas de Matemática "ajudam muito na compreensão da matéria". Outros, 15%, consideram que a aplicação das novas tecnologias nas aulas de Matemática torna as aulas "muito mais interessantes", o que é "bastante motivante". O aluno A_8 refere ainda que "aprendemos a utilizar coisas para o próximo ano escolar, como por exemplo a calculadora gráfica".

5. Conclusão, limitações e propostas de trabalhos futuros

Neste capítulo, dividido em dois subcapítulos, apresentam-se as conclusões deste estudo organizadas de acordo com as questões de investigação, base deste trabalho. Segue-se uma referenciação às limitações deste estudo e são apresentadas algumas recomendações para estudos futuros.

5.1 Conclusões

Neste subcapítulo apresentam-se as conclusões emanadas desta intervenção, de acordo com as questões de investigação estabelecidas, e confrontadas com os resultados obtidos nos estudos investigativos referidos no enquadramento teórico. Não serão aqui abordados os resultados relativos à tarefa investigativa número quatro (Tarefa 4), uma vez que a sua análise não consta deste trabalho escrito.

5.1.1 Como é que os alunos reagem ao uso das TIC na sala de aula?

Nesta intervenção verificou-se que, de um modo geral, todos os alunos reagiram com entusiasmo à ideia de trabalharem na sala de aula com recurso às novas tecnologias. Da análise das respostas ao inquérito implementado no final deste estudo, todos os alunos expressaram opiniões favoráveis em relação à aplicação das novas tecnologias na aula de matemática. Segundo estes alunos, a utilização de recursos tecnológicos ajudou a "perceber melhor a matéria" e tornarem as aulas "mais interessantes" e "atrativas", o que concorda com as conclusões obtidas em diversos estudos (Alexander, 1994; Andrade & Saraiva, 2012; Cruz et al., 2006; Domingos, 1994; Fertuzinhos, 2014; Gomes, 2005; Gonçalves et al., 2013; Jukes & Dosaj, 2006; Machado et al., 2008, 2007; Nogueira, 2010; Pais & Saraiva, 2011; Ramos & Raposo, 2008; Torres et al., 2008).

Aquando da implementação da Tarefa 1, os alunos manifestaram alguma desorientação sobre o modo como deveriam realizar a exploração da referida tarefa, utilizando o software GeoGebra. De facto, da análise dos resultados obtidos pela implementação do inquérito inicial, verifica-se que apenas 15% dos alunos sinalizaram este software como sendo conhecido. Assim, de forma a orientar os alunos para a exploração da tarefa apresentada, foi necessário projetar o gráfico dinâmico que os alunos deveriam explorar, e explicitar como o deveriam fazer, de acordo com as indicações constantes no guião da tarefa em questão. Neste momento da intervenção, houve a perceção clara de que, tal como defendem Jukes e Dosaj (2006), estes "nativos digitais" preferem os gráficos ao texto, uma vez que vários alunos começaram a fazer alterações ao gráfico do ficheiro do GeoGebra, sem perceber qual a finalidade pretendida. Este comportamento de "mexer sem ler" foi também evidenciado durante a realização da Tarefa 2, a qual utiliza a calculadora gráfica TI-84 Plus como recurso para a sua exploração. Aqui, alguns alunos tentaram obter, na calculadora gráfica, as imagens do display da calculadora visualizadas no guião, sem lerem as orientações escritas para a sua obtenção.

Voltando às dificuldades observadas no trabalho com o software GeoGebra, aquando da realização da Tarefa 1, verifica-se que, inconscientemente, vários alunos alteraram a escala do referencial cartesiano, e consequentemente deixaram de visualizar o gráfico apresentado. De forma a reposicionarem a visualização do referencial cartesiano no monitor do computador, à semelhança do Word, do Excel e outros programas, os alunos moveram o scroll do rato, em vez de utilizarem a informação explicitada na barra de ferramentas do programa. No GeoGebra, o movimento do scroll do rato produz uma alteração no zoom de visualização. Esta conduta dos alunos, vem confirmar a falta de prática em trabalhar com este tipo de software. No entanto, estas dificuldades em se ambientarem com o GeoGebra, vão diminuindo ao longo da realização da mesma tarefa, pois os alunos vão adotando uma postura mais ativa e autónoma, diminuindo o número de requisições de apoio da professora, e diminuindo o tempo na execução das diferentes indicações constantes em cada questão da tarefa. Aquando da realização da Tarefa 3, que também utiliza o GeoGebra como recurso de exploração, verifica-se uma diminuição significativa destas dificuldades, denotando-se uma familiarização dos alunos com este ambiente de geometria dinâmica. Da análise das respostas ao inquérito implementado no final da intervenção (Tabela 26), cerca de 54% dos alunos admitem terem sentido dificuldades na utilização do GeoGebra, aquando da realização da Tarefa 1. No entanto, para a concretização da Tarefa 3, apenas 8% referenciam esta dificuldade. Esta diminuição nas dificuldades de manuseamento dos recursos tecnológicos à medida que os alunos se vão familiarizando com os mesmos, está de acordo com as conclusões do estudo de Gonçalves, Fernandes e Correia (2013), que defendem que as dificuldades do manuseamento do computador e a distração resultante da sua utilização, tendem a diminuir ou mesmo desaparecer, à medida que a "tecnologia se torna uma rotina da sala de aula" (Gonçalves et al., 2013, p. 14).

Pela analise das respostas dos alunos ao inquérito implementado no final da intervenção, constantes na tabela 27, podemos verificar que 62% dos alunos identificaram o computador como o recurso que mais gostaram de trabalhar na Tarefa 1, enquanto que 31% especificaram que foi o trabalho com o GeoGebra, denotando-se também aqui uma evolução, pois 46% identificam o GeoGebra como o recurso que mais gostaram de trabalhar na concretização da Tarefa 3. Podendo-se assim inferir que, à medida que os alunos se vão familiarizando com os diferentes recursos tecnológicos, diminui as dificuldades no seu manuseamento e aumenta o grau de motivação dos alunos.

A Tarefa 2 consistiu num guia de exploração de uma experiência realizada com o objetivo de relacionar o comprimento do esparguete com o número de pesos necessários para o partir. Esta tarefa utiliza a calculadora gráfica TI-84 Plus como recurso de exploração, e como já foi mencionado, com exceção de um grupo de alunos, G_2, que tentou “mexer sem ler”, todos os outros, executaram os procedimentos do guião de forma rápida e autónoma. Como mostram os dados relativos à análise do inquérito inicial, 38% dos alunos já tinham trabalhado com a calculadora gráfica e na constituição dos grupos de trabalho houve a preocupação de colocar pelos menos um destes alunos em cada grupo. Aquando da distribuição das calculadoras pelos grupos de trabalho, verificou-se que os alunos ficaram bastante entusiasmados com a ideia de irem trabalhar com este recurso, e realizaram comentários do tipo: “Estas têm jogos, não têm?!”, “Professora, como é que se vai para os jogos?”, realçando a ideia de que os alunos relacionam as tecnologias essencialmente com o seu lado lúdico.

Apesar de na análise dos resultados ao inquérito final (Tabela 26), os alunos não terem identificado qualquer dificuldade no trabalho com a calculadora gráfica aquando da realização da Tarefa 2, na aula foram verificadas algumas, nomeadamente, na redefinição da janela de visualização. Um dos grupos, G_1, não conseguia visualizar todos os pontos listados, pelo que foi necessário a ajuda da docente para redefinir a janela de visualização. Os procedimentos para a execução desta redefinição não constam do guião, constituindo por isso uma lacuna do guião de exploração.

Outra dificuldade observada no trabalho com a calculadora gráfica foi o facto dos alunos limitarem-se a copiar e a aceitar as informações fornecidas pela calculadora gráfica, sem refletirem sobre os resultados obtidos e o que eles significam no contexto em questão. Na penúltima questão da Tarefa 2, apesar de terem chegado aos resultados pretendidos, os alunos não os analisaram: não perceberam, nem questionaram a professora relativamente ao significado dos símbolos “∧” e “∗” apresentados pela calculadora, apesar de nas calculadoras científicas utilizadas no Ensino Básico, os alunos terem obrigatoriamente de utilizar o símbolo “∧” para representava uma potência com expoente diferente de dois ou três; e não relacionaram o valor obtido para o parâmetro a com o produto das variáveis obtido na tabela inicial da tarefa. Além disso, os alunos transcreveram para o papel o valor do parâmetro b como sendo, por exemplo, $b = -.7732 \ldots$ (Figura 37 e Figura 38), em vez de $b = -0{,}7732 \ldots$ Da análise das gravações audiovisuais, verifica-se que pelo menos um grupo, G_1, refletiu e conjeturou sobre o facto de na calculadora gráfica, a apresentação no ecrã de um número decimal entre -1 e 1, omitir o algarismo zero da casa das unidades. Este tipo de conduta dos alunos em copiar e aceitar as informações que aparecem no ecrã da calculadora sem qualquer espírito crítico, foi também presenciado aquando da resolução da Questão de aula 1, pelo aluno A_5, cuja calculadora científica utiliza a vírgula em vez do ponto, como separador da casa dos milhares. Para a determinação da constante de proporcionalidade inversa, este aluno utilizou a calculadora científica para fazer o produto de 120 por 30 (Figura 88), obtendo na calculadora o número $3{,}600$, que ele assumiu como sendo o número decimal $3{,}6$ em vez de 3600. Apesar da calculadora científica acompanhar estes alunos ao longo de todo o Ensino Básico, e de estes estarem informados acerca desta particularidade de algumas calculadoras, este tipo de erro continua a verificar-se muitas vezes na sala de aula. Os alunos aceitam os valores fornecidos pela calculadora sem refletirem sobre a ordem de grandeza deles.

Este tipo de manuseamento da calculadora pelos alunos vai ao encontro das observações de Rosa (2013) e de Rocha (2002), que nos seus estudos identificam, por vezes, uma utilização desnecessária deste recurso pelos alunos, e de Gomes (2005), que defende a importância dos alunos conhecerem e entenderem que as máquinas têm limitações. Ainda a este prepósito, Rocha (2002) refere a necessidade de uma articulação entre o conhecimento matemático e o espírito crítico como "forma de detetar as informações enganadoras transmitidas pela máquina" (Rocha, 2002, p. 21). De facto, na resolução da Tarefa 2, os alunos não fizeram referência ao facto do parâmetro b ser negativo, incluindo o único grupo, G_1, que percebeu que o símbolo "Λ" indicava que se tratava de uma potência de expoente b. Na discussão oral em grupo-turma dos resultados obtidos na realização desta tarefa, a docente questionou os discentes sobre o "significado" do facto do expoente da potência representado pelo parâmetro b ser negativo, mas nenhum respondeu, admitindo depois que não se lembravam do procedimento a realizar para passar de um expoente negativo para positivo. Por outro lado, aquando da realização da Tarefa 3 com recurso ao GeoGebra, o grupo G_6 percebeu que os resultados obtidos com aquele software não eram exatamente os esperados e facilmente percebeu as limitações deste recurso que naquele caso em particular, estava a arredondar as coordenadas dos pontos selecionados pelo que o seu produto não era sempre constante, como esperavam ser. Este episódio vem realçar a importância do conhecimento matemático prévio para fomentar o espírito crítico na análise das informações fornecidas pelas diferentes tecnologias: "a introdução da calculadora gráfica só por si não irá conduzir a uma melhoria significativa na aprendizagem..." (Teixeira et al., 1997, p. 8), e "A calculadora por si só não desenvolve aprendizagem, mas sim a forma como é utilizada" (Rosa, 2013, p. 62).

Nesta intervenção, a calculadora gráfica volta a ser utilizada aquando da realização da Tarefa 5, mas agora em conjunto com o sensor de movimento CBR, de modo a modelarem gráficos em contextos reais. Da análise das respostas ao inquérito inicial, verifica-se que à semelhança da calculadora gráfica, 38% dos alunos mencionaram já terem trabalhado com os sensores de movimento na escola. Por este motivo, para a realização desta tarefa manteve-se a constituição dos grupos de trabalho da Tarefa 2, de modo a salvaguardar o facto de pelo menos um aluno por grupo já ter trabalhado em anos transatos com os recursos tecnológicos a utilizar.

Analisando os resultados ao inquérito final implementado (Tabela 27) verifica-se que, da Tarefa 2 para a Tarefa 5, o número de alunos que identificaram a calculadora gráfica como o recurso que mais gostaram, aumentou para o dobro, o que reforça a ideia de que a familiarização dos alunos com os recursos tecnológicos aumenta a confiança na sua utilização e consequentemente o grau de motivação e empenho dos alunos nas atividades propostas. No entanto, da análise dos resultados do mesmo inquérito (Tabela 26), verifica-se que o número de registos de dificuldades sentidas na utilização da calculadora gráfica também aumentou da Tarefa 2 para a Tarefa 5, apesar de, durante a realização desta tarefa os alunos não terem revelado qualquer dificuldade em seguir os procedimentos constantes no guião de exploração. A única dificuldade observada foi aquando da proposta aos alunos para a representação gráfica da expressão algébrica obtida na questão 1.2 (Figura 73). Aqui o erro obtido: "ERR: SYNTAX", deveu-se ao facto de os alunos terem utilizado o sinal de subtração em vez do sinal $(-)$ para a representação de um número negativo. Neste caso, o obstáculo advém de uma "incorreta introdução da informação na calculadora", como referenciado por Rocha (2002, p. 7).

Já foi mencionado que, para a concretização da "imitação" do gráfico, proposta na Tarefa 5, era necessária uma perfeita sincronização entre o elemento que segura a calculadora e faz ENTER, o elemento que segura o sensor e executa o movimento físico pela sala de aula, e o elemento que faz a cronometragem do movimento e dá as indicações ao elemento em movimento. Esta sincronização foi difícil de realizar, no entanto apenas um aluno (cerca de 8%) referiu ter sentido dificuldades no manuseamento do sensor de movimento (Tabela 26). Por outro lado, 46% destacaram este recurso como sendo o que mais gostaram de trabalhar na realização desta tarefa: "foi engraçado trabalhar com o sensor de movimento" (A_8). Também no estudo de Torres, Coutinho e Fernandes (2008, p. 28) reportam que "Foi fácil aos alunos trabalharem com a calculadora gráfica e com os sensores e o uso destas tecnologia agradou-lhes".

Os constantes avanços tecnológicos têm vindo a proporcionar um crescente acesso a diferentes recursos tecnológicos, quer pela família, quer pelas escolas. No entanto, e apesar de nos últimos anos, o potencial das TIC no processo ensino e aprendizagem, ter vindo a ser corroborado por várias investigações (Andrade & Saraiva, 2012; Cruz et al., 2006; Gonçalves et al., 2013; Jukes & Dosaj, 2006; Machado et al., 2008, 2007; NCTM, 2008; Nogueira, 2010; Pais & Saraiva, 2011; Ponte, J., 1995; Ramos & Raposo, 2008; Rocha, 2002; Torres et al., 2008), pela análise dos resultados deste estudo, podemos provavelmente inferir que a utilização que os alunos dão aos computadores e outros recursos tecnológicos é essencialmente de caráter lúdico, ou seja, mais pela sua dimensão de "entretenimento e sociabilidade", do que pela sua dimensão de "aprendizagem", como distingue Pereira e Silva (2009), pelo que, a ideia da sua utilização na sala de aula é encarada pelos alunos com bastante entusiasmo. Contudo, uma vez implementados na sala de aula como ferramentas ao serviço do ensino aprendizagem, a primeira reação destes "nativos digitais", habituados a conviver diariamente com tecnologias, é a de "desorientação" e "passividade". Mas à medida que se vão familiarizando com estes recursos, as dificuldades no seu manuseamento vão diminuindo, e os alunos vão adotando uma postura mais confiante e ativa na concretização das tarefas propostas. À semelhança do observado por Fertuzinhos (2014), Pais e Saraiva (2011), Nogueira (2010), e Torres, Coutinho e Fernandes (2008), o uso das tecnologias tornou as aulas mais interativas, o que os alunos classificaram de "bastante motivante", pois "dá mais incentivo para aprender".

Com recurso às tecnologias, nomeadamente a calculadora gráfica e o sensor de movimento, foi possível modelar situações em contexto real. Efetivamente, as Tarefas 2 e 5 foram as eleitas pelos alunos como sendo as que mais gostaram, talvez porque estas mostram a aplicabilidade da matemática em contextos reais, o que está de acordo com os Princípios e Normas para a Matemática Escolar: "Para os alunos, a oportunidade de experimentar a matemática num contexto é importante" (NCTM, 2008, p. 73). Além disso, como já mencionado, para a execução das experiências propostas nestas tarefas, cada elemento dos grupos de trabalho teve que assumir uma função e uma responsabilidade para a execução de cada experiência, o que fez com que cada elemento do grupo "se esforçasse mais do que o habitual, ajudando na compreensão e no cumprimento das tarefas", como verificado por Torres, Coutinho e Fernandes (2008, p. 28).

5.1.2 Até que ponto a utilização das TIC promove nos alunos uma evolução na perceção das diferentes representações de uma função e consequentemente, a compreensão do conceito de função?

De acordo com os estudos referidos no enquadramento teórico deste trabalho (Barreto, 2008; Bolota, 2011; Gagatsis et al., 2006; Lima & Pontes, 2006; Zachariades et al., 2001), as dificuldades dos alunos na compreensão do conceito de função centram-se em torno do modo como identificam, interpretam e relacionam as suas diferentes representações. Como vimos, o uso das novas tecnologias na sala de aula, como ferramentas promotoras de múltiplas representações de forma simultânea, é referenciado por diversos estudos (Andrade & Saraiva, 2012; Barreto, 2008; Bolota, 2011; Domingos, 1994; Friedlander & Tabach, 2001; Lima & Pontes, 2006; Oliveira, 1997; Pais & Saraiva, 2011; Ponte, 1992, 1990; Ramos & Raposo, 2008; M. J. Saraiva et al., 2010; L. M. Silva & Andrade, 2010; Zachariades et al., 2001) como forma de colmatar estas dificuldades e potenciar a compreensão do conceito de função de forma mais efetiva e significativa. Seguindo estas orientações, a presente intervenção apoia-se na implementação, em sala de aula, de cinco tarefas investigativas cuja exploração utiliza o computador e o software de geometria dinâmica GeoGebra (Tarefas 1, 3 e 4), a calculadora gráfica TI-84 Plus (Tarefas 2 e 5) e o sensor de movimento CBR (Tarefa 5).

Com recurso ao GeoGebra, a Tarefa 1- Explorar com o GeoGebra (Função linear, constante e afim), proporcionou aos alunos a visualização dos efeitos da alteração dos parâmetros a e/ou b, nos gráficos das funções afim de expressão algébrica $f(x) = ax + b$. Da análise dos trabalhos escritos dos alunos nesta tarefa, verifica-se que grande parte dos alunos denotaram ter percebido os efeitos produzidos no gráfico da função do tipo $f(x) = ax + b$, pela alteração dos parâmetros a e/ou b, bem como a correta interpretação geométrica de b. As mesmas conclusões obtêm-se da análise das produções escritas dos alunos relativamente à Ficha de Trabalho 1, onde todos os alunos identificaram corretamente o valor do declive como sendo dado pelo parâmetro a na expressão algébrica do tipo $f(x) = ax + b$, e fizeram a correta associação entre a representação gráfica e a representação algébrica, de diferentes funções afim (linear, constante e afim), sendo que a maioria fez esta associação através da combinação das comparações entre o tipo de reta e o tipo de expressão algébrica, entre a monotonia da função e o sinal do parâmetro a, e entre o valor absoluto deste parâmetro e a inclinação da reta (Figura 25 e 26). Também na Ficha de avaliação escrita (Tabela 19), a maioria dos alunos realizou a correta associação entre a representação gráfica e a representação algébrica apresentada, seguindo este raciocínio de comparação. No entanto, vários estudos (Bolota, 2011; Loureiro, 2013; Nogueira, 2010) sugerem que os alunos manifestam mais dificuldades na passagem da representação gráfica para a representação algébrica, pelo que esta correta "movimentação" entre a representação gráfica e a representação algébrica, através da análise comparativa entre comportamento do gráfico da função e valores dos parâmetros a e b da expressão $f(x) = ax + b$, poderá ter sido potenciada pela utilização do GeoGebra, o qual permitiu aos alunos a visualização dos efeitos produzidos pela alteração destes parâmetros nos gráficos das respetivas funções. Podemos assim, concordar com Pais e Saraiva (2011), que a respeito do uso de um software promotor de múltiplas representações de uma função, referiram que "a representação algébrica ganhou assim, com a compreensão da representação gráfica e os símbolos algébricos foram apreendidos com significado" (Pais & Saraiva, 2011, p. 52).

A Tarefa 2- A resistência do esparguete, contemplou a realização de uma experiência, e a utilização da calculadora gráfica, tendo sido implementada com o objetivo de introduzir os conceitos relativos à função de proporcionalidade inversa e aplicação das funções como modelo de situações em contexto real. Da análise dos resultados dos alunos a esta tarefa, verifica-se que estes identificaram corretamente a variável dependente e a variável independente, bem como a relação entre o comportamento destas variáveis, e consequentemente o tipo de proporcionalidade envolvida. Os mesmos resultados foram verificados aquando da análise das gravações relativas à resolução, pelos alunos, dos exercícios do manual, e das produções escritas na Questão de aula 1 (Tabela 8). Estes resultados contradizem Pelicano (2014), que no seu estudo de Funções com alunos do 7.º ano, afirma que os maiores problemas manifestados pelos alunos são na identificação das variáveis dependente e independente. Também Loureiro (2013) no seu estudo sobre a representação gráfica de funções linear e afim com alunos do 8.º ano, observa a mesma dificuldade nos alunos. Assim, poderemos depreender que, nesta intervenção, esta capacidade de distinguir os dois tipos de variáveis, parece ter sido potenciada pelo o trabalho de experimentação realizado pelos alunos para a concretização da Tarefa 2.

Ainda na realização desta tarefa, verifica-se que todos os alunos registaram corretamente a variável dependente no eixo das ordenadas e a variável independente no eixo das abcissas, tal como verificado em alguns alunos do estudo de Pelicano (2014). Observando-se assim, uma correta passagem da representação tabular para a representação gráfica. No entanto, alguns alunos manifestaram dificuldades na escolha da escala adequada para representar os pontos da tabela no papel milimétrico. Esta dificuldade na escolha da escala foi também verificada nos trabalhos de Domingos (1994), Loureiro (2013), e Pelicano (2014), resultando em gráficos com pouco rigor. Nesta intervenção, os alunos que manifestaram esta dificuldade valorizaram a utilização da calculadora gráfica, por construir o gráfico de uma forma mais rápida e clara: "é melhor assim, faz logo" (A_5).

A Tarefa 3 – Explorar com o GeoGebra (Função de proporcionalidade inversa), recorreu à utilização do GeoGebra para complementar a Tarefa 2 e promover a interpretação geométrica da constante de proporcionalidade inversa. Nesta atividade, os alunos trabalharam com a representação gráfica, tabular e algébrica de uma função de proporcionalidade inversa, e a maioria dos alunos fez a correta articulação entre estas diferentes representações. Também da análise das produções escritas da Ficha de trabalho 2, verifica-se que os alunos fazem a correta passagem da representação tabular para a representação gráfica, e da representação gráfica para a representação algébrica. Idêntica conclusão obtém-se da análise dos resultados da Questão de aula 1 e Ficha de avaliação escrita, em que a maioria dos alunos fez a correta articulação entre a representação gráfica e algébrica e a representação tabular e algébrica (Tabela 6, Tabela 7, Tabela 12, Tabela 15, e Tabela 20). No entanto, e à semelhança do estudo de Pelicano (2014), nesta intervenção, tanto na Ficha de Trabalho 2, como na Questão de aula 1, alguns alunos (A_2, A_3, A_5, A_{10} e A_{11}) recorreram à representação tabular como passo intermédio da passagem representação gráfica e verbal para a representação algébrica, nomeadamente na resolução de problemas (Figura 52, Figura 88, e Figura 89). É ainda de referir que na realização da Tarefa 2, Ficha de trabalho 2 e Ficha de avaliação escrita (Tabela 17), verificou-se que alguns alunos manifestaram dificuldades na identificação das coordenadas, mais concretamente, em distinguir que a abcissa é lida no eixo das abcissas – eixo dos xx, e que a ordenada é lida no eixo das ordenadas – eixo dos yy. A mesma dificuldade foi observada por Loureiro (2013) no seu estudo com representações gráficas de funções afim. Da resolução da Ficha de trabalho 2 percebeu-se, também, que de um modo geral os alunos compreenderam o significado geométrico da constante de proporcionalidade inversa, proposto na Tarefa 3 com recurso ao GeoGebra.

Na Tarefa 5 – Atividade "Ver no escuro", os alunos tiveram a oportunidade de modelar uma situação em contexto real, com recurso à calculadora gráfica e ao sensor de movimento. Também aqui, os alunos relacionaram corretamente a representação gráfica apresentada com o respetivo tipo de expressão algébrica, e à semelhança do observado nos resultados da Tarefa 1, Questão de aula 1 e Ficha de avaliação escrita, os alunos privilegiaram a identificação da ordenada na origem por observação direta, em vez da sua determinação por processos algébricos. Ao contrário do estudo de Loureiro (2013), em que os alunos "recorrem à expressão analítica como ferramenta imprescindível, mesmo nos casos em que dispõe da representação gráfica" (Loureiro, 2013, p. 124), nesta intervenção, os alunos valorizaram as informações fornecidas pela representação gráfica, sendo que as dificuldades surgiram quando os alunos foram obrigados a utilizar a representação algébrica ou os procedimentos algébricos para a resolução de problemas. Esta caraterística cada vez mais comum aos "nativos digitais", que preferem os gráficos aos procedimentos algébricos morosos e/ou rotineiros, concorda com o defendido por Machado, Almeida e Silva (2008, 2007).

Como já mencionado, a maioria dos alunos identificou corretamente o tipo de função apresentada pela sua representação gráfica e associou ao respetivo tipo de expressão algébrica

$\left(f(x) = ax, \text{ou } f(x) = b, \text{ou } f(x) = ax + b, \text{ou } f(x) = \frac{a}{x}\right)$, no entanto, quando tiveram de determinar por processos algébricos o valor dos parâmetros envolvidos a e/ou b, diversos erros são cometidos (Tabela 17). De facto, tanto na Questão de Aula 1 (Tabela 6), como na Ficha de avaliação escrita (Tabela 16), alguns alunos identificaram corretamente o tipo de expressão algébrica da função representada, sem determinarem o valor dos parâmetros envolvidos, o que também foi observado no estudo de Pelicano (2014). Uma outra situação notada na presente intervenção, foi o facto de, na Ficha de avaliação escrita, dois alunos (A_4 e A_9) terem determinado incorretamente o declive da reta (por erros na determinação das coordenadas dos pontos pertencentes a esta reta), representação gráfica de uma função afim, e consequentemente obtiveram um valor negativo para o declive de uma reta crescente, contudo, estes alunos não refizeram os seus cálculos. Esta falta de cruzamento de informações entre a representação gráfica e a representação algébrica poderá denotar o "fenómeno da compartimentalização" referido por Gagatsis, Elia e Mousoulides (2006).

Assim, com os resultados desta intervenção, podemos aferir que de um modo geral os alunos desta turma progrediram no modo como articularam as representações verbal, tabular, gráfica e algébrica, e consequentemente identificaram uma função independentemente do seu tipo de representação. O trabalho com as TIC proporcionou a visualização simultânea de múltiplas representações, o que permitiu aos alunos observar relações e fazer conexões entre as diferentes representações, e consequentemente uma aprendizagem mais significativa e efetiva, como já referenciado por vários autores (Andrade & Saraiva, 2012; Barreto, 2008; Bolota, 2011; Domingos, 1994; Friedlander & Tabach, 2001; Lima & Pontes, 2006; Ponte, 1992, 1990; Ramos & Raposo, 2008; M. J. Saraiva et al., 2010; L. M. Silva & Andrade, 2010; Zachariades et al., 2001). A utilização das TIC proporcionou ainda a experimentação e a modelação de contextos reais na sala de aula, o que para além de atrativo para os alunos, conferiu-lhes um papel mais ativo na construção da sua aprendizagem, permitindo-lhes tornar as suas ideias em "ideias testáveis", como refere Domingos (1994, p. 42). Também o trabalho em grupo e as discussões em grupo-turma revelaram-se fundamentais no sentido em que proporcionaram aos alunos a formulação de conjeturas, a discussão de resultados, e a comunicação matemática, o que concorda com o defendido por Meneghetti e Redling (2012), e Rosa (2013). De facto, verificou-se que estes alunos manifestam muitas dificuldades quer a nível da comunicação escrita, quer a nível da comunicação verbal. Muitas vezes os alunos chegam às conclusões pretendidas, mas não as conseguem verbalizar, sendo necessário o professor fazer uma sequência de pequenas questões para que os alunos articulem essas "pequenas" aprendizagem para "um bem maior". À semelhança do estudo de Loureiro (2013), ao longo de toda esta intervenção foram detetadas dificuldades na terminologia e abuso de linguagem, pelo que a comunicação quer verbal, quer escrita é fundamental para a sua correção.

Tarefas investigativas com recurso às TIC e que permitam a experimentação e modelação em sala de aula, aliadas ao trabalho de grupo e à discussão em grupo-turma, parecem proporcionar um ambiente favorável à aprendizagem desta nova geração de "nativos digitais", onde o professor deverá adotar o papel de orientador destas atividades e discussões, com pequenas e sucessivas questões, culminando na sistematização das aprendizagens pretendidas. Efetivamente, apesar das dificuldades iniciais sentidas aquando da utilização das tecnologias ao serviço do processo ensino e aprendizagem, estes "nativos digitais" facilmente se familiarizam com estes ambientes tecnológicos, que por sua vez promovem a compreensão de conceitos matemáticos, uma vez que lhes dão sentido e promovem a sua valorização.

5.2 Limitações e propostas de trabalhos futuros

O tempo disponível para a realização de tarefas investigativas que contemplem a experimentação e a modelação em contexto de sala de aula com recurso às novas tecnologias, é o "vilão de todo o professor", como referem Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005, p. 20). De facto, os atuais Programas e Metas Curriculares para o Ensino Básico (Bivar et al., 2012), não deixam "espaço" para a revisão de conceitos fundamentais e necessários para o estudo das funções, como requerido nesta intervenção, pelos resultados dos alunos na ficha de avaliação diagnóstica realizada, nem para a implementação na sala de aula de atividades de caráter investigativo, exploratório ou de modelação de contextos reais, com recurso às TIC. Por outro lado, a implementação deste tipo de atividades na sala de aula, fomenta a criação de um ambiente com mais ruído e movimento: "Andar pela sala" (A_{11}). Estas limitações podem explicar o porquê de se continuar a verificar uma utilização redutora deste tipo de atividades com recurso às tecnologias, na sala de aula, questionado por Torres, Coutinho e Fernandes (2008).

A falta de prática dos alunos em trabalhar com as tecnologias envolvidas nesta intervenção, nomeadamente o software GeoGebra e a calculadora gráfica, também requereu algum tempo de adaptação, mas tal como observado por Gonçalves, Fernandes e Correia (2013), à medida que os alunos se foram familiarizando com estas tecnologias, as dificuldades e distrações decorrentes do seu manuseamento foram diminuindo ao longo desta intervenção. Também a falta de prática com as tarefas de caráter investigativo e experimental, aliadas às dificuldades de interpretação dos enunciados escritos, cada vez mais caraterísticas destes "nativos digitais", implicou inicialmente algum "tempo de paragem" dos alunos, em que estes se sentiram desorientados, tendo necessidade de constantes intervenções da docente que simplesmente lhes lia o enunciado apresentado ou realizava uma sequência de pequenas questões de modo a orientar os alunos para o trabalho pretendido. Também o facto de os alunos não lerem integralmente as questões e orientações constantes nas tarefas, implicou respostas escritas incompletas, apesar de na discussão grupo-turma, estes alunos terem evidenciado possuir esses conhecimentos. À semelhança dos estudos de Meneghetti e Redling (2012), Branco (2013) e de Magalhães e Martinho (2014), ao longo desta intervenção, os alunos foram ambientando-se com este tipo de tarefas, tornando-se mais ativos e autónomos na sua realização.

Outra das limitações deparada foi o facto de os alunos terem realizado as tarefas e fichas de trabalho a lápis, o que impossibilitou uma cópia mais nítida das transcrições dos alunos para o corpo deste trabalho. Também o facto de existirem apenas dois sensores de movimento disponíveis, para a realização da Tarefa 5, implicou a divisão dos grupos de trabalho por diferentes momentos da atividade e consequentemente não foi possível obter o primeiro gráfico obtido pela modelação do grupo G_2.

As gravações vídeo, em articulação com as notas do professor, revelaram-se fundamentais para complementar as informações obtidas pela análise das produções escritas dos alunos. No entanto, basta um aluno falar mais baixo ou estar mais distanciado da câmara, para que essa informação seja perdida. Exemplo disso, é o facto de só haver evidências que o grupo G_1 refletiu sobre os resultados da calculadora gráfica, aquando da resolução do exercício 3.1 da Tarefa 2, pela análise das gravações e uma vez que este grupo estava próximo da câmara de filmar. Deste modo, não se consegue aferir se também os outros grupos refletiram sobre esta situações ou se houve outras situações de reflexão.

Em virtude da "falta de tempo" já mencionada, optou-se por implementar o inquérito final no final do primeiro período, aquando da aula de autoavaliação. No entanto, os alunos acharam que já se tinha passado algum tempo desde a implementação desta intervenção, pelo que alguns fizeram alguma confusão entre as tarefas desenvolvidas. Em alternativa, este inquérito poderia ter ser dividido, e executado no final de cada tarefa investigativa.

O facto dos alunos da turma se enquadrarem num perfil de alunos que revelam bastantes dificuldades à disciplina de Matemática, manifestam pouco empenho, trabalho e estudo, bem como interesses divergentes dos escolares, constituiu uma dificuldade, mas também um desafio, que parece ter sido superado, como evidenciam os resultados obtidos. Contudo, o ideal seria fazer um estudo idêntico com uma turma de controle, nomeadamente uma turma com caraterísticas semelhantes e mesmo número de alunos.

Segundo os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2008, p. 39), “os alunos necessitam de aprender a interpretar as representações tecnológicas e a usar a tecnologia, de forma eficaz e criteriosa”, assim, outro estudo possível, seria averiguar até que ponto os alunos compreendem e são críticos relativamente aos limites das tecnologias. Ao longo desta intervenção observaram-se situações em que os alunos se limitaram a copiar o que lhes é fornecido pelas tecnologias, sem cruzarem esta informação com conhecimentos prévios. O que poderá resultar da falta de prática em trabalhar com estes recursos tecnológicos e consequente falta de compreensão das suas limitações, ou poderá ser uma “compartimentalização” “enraizada” nos alunos, que persistem em não relacionar os diferentes conhecimentos ou resultados adquiridos. Exemplo disso constatou-se aquando da resolução da Tarefa 1, em que os alunos apesar de, nas diferentes alíneas responderem corretamente e utilizarem diferentes exemplos, nas conclusões finais contradisseram os exemplos dados anteriormente, ou simplesmente não os tiveram em conta. Independentemente do que está na origem deste comportamento, seria importante perceber qual a melhor forma de o colmatar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AEVST. (2015a). *Plano Plurianual de Melhoria 2014-2017. Agrupamento de Escolas do Vale de S. Torcato*. Guimarães.

AEVST. (2015b). *Relatório do Laboratório de Matemática*. Guimarães.

Alexander, M. (1994). Graphing calculators and visualization in the college algebra classroom. In B. K. W. Przemyslaw Bogacki, Franklin Demana, Earl D. Fife, Greg Foley, Joanne Foster, Gail Goodell, John Harvey, Larry Husch, Lewis Lum, Corinna Mansfield, Linda Taylor (Ed.), *Electronic Proceedings of the Seventh Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*. Orlando, Florida: ICTCM.

Andrade, J. M., & Saraiva, M. J. (2012). Múltiplas representações: Um contributo para a aprendizagem do conceito de função. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *15*(2), 1–16.

Barreto, M. M. (2008). Tendências atuais sobre o ensino de funções no Ensino Médio. In *Matemática e Educação Sexual: Modelagem do fenómeno de absorção/eliminação de anticoncepcionais orais diários.* Porto Alegre.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. (2012). *Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Blanton, M., & Kaput, J. J. (2011). Functional Thinking as a route into algebra in the elementary grades. *ZDM - International Reviews on Mathematical Education*, *37*(1), 34–42. http://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Bolota, M. L. R. A. de A. S. (2011). *As representações na resolução de problemas de proporcionalidade inversa*. (Tese de Mestrado).Lisboa: Universidade de Lisboa.

Boyer, C. B. (1968). *A History of Mathematics* (Wiley Inte). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Branco, M. G. P. (2013). As dificuldades dos alunos quando trabalham com tarefas de exploração e investigação. *Quadrante*, *22*(1), 107–131.

Burton, D. M. (2010). *The History of Mathematics: An Introduction*. New York: McGrawHill.

Caraça, B. de J. (1984). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora.

Chazan, D., & Yerushalmy, M. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: Research on algebra learning and directions of curricular change. In K. J., S. D., & M. G. (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 123–135). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

CMGuimarães. (2011). Dados demográficos do Município de Guimarães. Retrieved December 1, 2015, from http://www.cm-guimaraes.pt/pages/1058

Cruz, I. L. M. da, Carvalho, A. A. A., & Almeida, M. C. (2006). A WebQuest "Lugares Geométricos" na aula de Matemática: Um estudo de caso no 8.º ano. In *Actas do Encontro sobre WebQuest.* (pp. 26–38). Braga: CIEd.

Domingos, A. M. D. (1994). *A Aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações*. (Tese de Mestrado).Lisboa: Universidade Nova de Lisboa.

Fertuzinhos, M. L. (2014). *As tarefas de natureza investigativa na aprendizagem de conteúdos do tema Funções do 10.º ano*. (Tese de Mestrado).Braga.

Fiorentini, D., Fernandes, F. L. P., & Cristovão, E. M. (2005). Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações no desenvolvimento do pensamento algébrico. In *Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática* (pp. 1–22). Lisboa: APM.

Fitas, E. S., & Costa, C. (2008). Quadros Interactivos: Relato de investigações realizadas no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática. In A. P. Canavarro, D. Moreira, & I. M. R. (org) (Eds.), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 330–343). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Flynn, P. (2006). NUMB3RS Activity: Seeing in the Dark Episode: "Guns and Roses". Retrieved August 24, 2011, from education.ti.com/go/NUMB3RS

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In *The roles of representation in school Mathematics* (pp. 173–185). Reston,Virginia: National Council of the Teachers os Mathematics.

Gagatsis, A., Elia, I., & Mousoulidis, N. (2006). Are register of representations and problem solving processes on functions compartmentalized in students' thinking? *Relime*, (Número Especial), 197–224.

Gomes, P. C. da C. (2005). *Funções e calculadoras gráficas: Análise de algumas inferências erróneas*. (Tese de Mestrado).Braga.

Gonçalves, C., Fernandes, J. A., & Correia, P. F. (2013). Aprendizagem de Estatística com tecnologias no 7.º ano de escolaridade. In J. A. Fernandes, F. Viseu, M. H. Martinho, & P. F. (Orgs) Correira (Eds.), *Atas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 163–175). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Guzman, R. R., Correia, P. F., & Fernandes, J. A. (2009). Percepciones de los estudiantes de una clase de bachillerato sobre una intervención de enseñanza en Combinatoria. In Pablo Mária Guzmán (Ed.), *Arte, Humanidades y Educación: Aportaciones a sus ámbitos científicos* (pp. 323–347). Granada: Editorial Atrio.

Jukes, I., & Dosaj, A. (2006). Understanding digital children (DKs): Teaching & Learning in the New Digital Landscape. In *The Singapore MOE Mass Lecture*. Singapore: The InfoSavy Group.

Lima, L., & Pontes, M. G. de O. (2006). *As dificuldades apresentadas por alunos do 2.º ano do ensino médio em relação ao conceito matemático de função*. Ceará: UECE.

Loureiro, N. M. da S. (2013). *A representação gráfica das funções linear e afim: Um estudo com alunos do 8.º ano*. (Tese de Mestrado).Lisboa. http://doi.org/06-09-2014

Machado, J., Almeida, L., & Silva, B. (2008). Apresentação gráfica do conceito de Função e sua implicação nas atitudes e na aprendizagem dos alunos. *Revista de Psicologia, Educação E Cultura*, *12*(2), 267–282.

Machado, J., Silva, B., & Almeida, L. (2007). Ensino - Aprendizagem com recurso à tecnologia informática: Mudanças observadas nos alunos. In A. Barca, M. Peralbo, & A. Porto (Eds.), *Livro de Actas do Congresso Internacional Galego-Português da Psicopedagoxía* (pp. 594–601). Corunha: Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía e Educación.

Magalhães, G., & Martinho, M. H. (2014). O desenvolvimento da argumentação matemática no estudo das funções racionais. *Quadrante*, *23*(1), 99–132.

Matos, J. M., & Serrazina, M. de L. (1996). *Didática da matemática*. Lisboa: Uviversidade Aberta.

Meneghetti, R. C. G., & Redling, J. P. (2012). Tarefas alternativas para o ensino e a aprendizagem de Funções: Análise de uma intervenção no Ensino Médio. *Bolema, Rio Claro (SP)*, *26*(42A), 193–229.

Murdock, J., Kamischke, E., & Kamischke, E. (1998). *Advanced algebra through data exploration*. New: Key Curriculum Press.

NCTM. (2008). *National Council of Teachers of Mathematics.* (Edição Por). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Nogueira, D. (2010). *Desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 10.º ano no tema Funções através da resolução de problemas com recurso às TIC*. (Tese de Mestrado).Braga.

Oliveira, N. (1997). *Conceito de Função: Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem*. (Tese de Mestrado).São Paulo: PUC - SP.

Pais, S. M., & Saraiva, M. J. (2011). O significado das representações da função afim para alunos do 8.º ano de escolaridade. *Quadrante*, *20*(2), 17–55.

Pelicano, A. A. (2014). *O estudo das funções no 7.º ano: Conceito e representações*. (Tese de Mestrado).Lisboa: Universidade de Lisboa.

Pereira, M., & Silva, B. D. (2009). A relação digital dos jovens com as TIC e o factor divisão digital na aprendizagem. In *Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia* (pp. 5408–5431). Braga: Universidade do Minho.

Pereira, S., & Pereira, L. (2011). Políticas tecnológicas educativas em Portugal: Do projecto Minerva à iniciativa e-Escolinha. In *Congresso Nacional "Literacia, Media e Cidadania"* (pp. 157–168). Braga, Universidade do Minho: Centro de Estudos de Comunicação e Sociedade.

Plano Tecnológico. (2005). *Plano tecnológico: Uma estratégia de crescimento com base no Conhecimento, Tecnologia e Inovação.* Lisboa.

Ponte, J., P. (1995). Novas tecnologias na aula de matemática. *Educação E Matemática*, *2*(34), 2–7.

Ponte, J. P. (1992). The History of the Concept of Function and Some Educational Implications. *The Mathematics Educator*, *3*(2), 3–8.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Brenda, A., Guimarães, F., Guimarães, H., & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ponte, J. P. da. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Educação E Matemática*, (15), 3–9.

Ponte, J. P. da. (2014). Ensino da Matemática na Sociedade de Informação. *Educação E Matemática*, *45*(1), 1–5.

Ramos, C., & Raposo, L. (2008). A calculadora gráfica e as representações matemáticas: Uma experiência. In A. . Canavarro & M. I. Rocha (Eds.), *Tecnologias na Educação Matemática* (SPIEM, pp. 187–200). Vieira de Leiria: SPIEM.

Ricoy, M. C., & Couto, M. J. V. S. (2012). Os recursos educativos e a utilização das TIC no Ensino Secundário na Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, *25*(2), 241–262.

Rocha, H. (2002). A utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica nas aulas de Matemática. *Quadrante*, *11*(2), 3–27.

Rosa, V. P. (2013). A Utilização da Calculadora Gráfica no Estudo de Funções do 10.º ano. (Tese de Mestrado).Lisboa.

Saraiva, J. M., & Teixeira, A. M. (2009). Secondary school Students' understanding of function via exploratory and investigative tasks. *Quaderni Di Ricerca in Didatica*, *4*(19), 74–83.

Saraiva, M. J., Teixeira, A. M., & Andrade, J. M. (2010). *Estudo das funções no programa de Matemática A com problemas e tarefas de exploração*. Lisboa: APM.

Silva, J. C. (1993). Calculadoras Gráficas: Mais um elo na cadeia da evolução da tecnologia educativa. *TIMAT*, *1*(1), 1–2.

Silva, L. M., & Andrade, S. (2010). Ideias e compreensões essenciais ao ensino-aprendizagem de Funções e a resolução de problemas, 1–12.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Funções: 10.º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação.

Torres, T., Coutinho, C., & Fernandes, J. (2008). Aplicações e Modelação Matemática com recurso à calculadora gráfica e sensores. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educção Matemática*, (15), 9–31.

Viseu, F., Lima, A., & Fernandes, J. (2013). Um estudo comparativo sobre o uso das TIC na aprendizagem de Matemática do ensino secundário/médio em Portugal e no Brasil. *Educação Matemática Pesquisa*, *15*(2), 293–316.

Zachariades, T., Chistou, C., & Papageorgiou, E. (2001). The difficulties and reasoning of undergraduate Mathematics students in the identification of functions. In *10th ICME Conference*. Creta, Grécia: Universidade de Atenas.

ANEXO I – QUESTIONÁRIO INICIAL

QUESTIONÁRIO INICIAL

Lê com atenção as questões que se seguem e assinala com (X) a tua resposta. Podes assinalar mais do que uma opção.

1. Quais dos seguintes recursos tecnológicos conheces?

☐ Computador ☐ Quadro Interativo
☐ Tablet ☐ Retroprojetor
☐ Calculadora Gráfica ☐ Projetor Multimédia
☐ Softwares educativos ☐ Internet
☐ Sensores de movimento ☐ Smartphone
☐ Outro(s). Qual(ais) ______________________________

2. Quais dos seguintes recursos tecnológicos tens em casa?

☐ Computador ☐ Quadro Interativo
☐ Tablet ☐ Retroprojetor
☐ Calculadora Gráfica ☐ Projetor Multimédia
☐ Softwares educativos ☐ Internet
☐ Sensores de movimento ☐ Smartphone
☐ Outro(s). Qual(ais) ______________________________

3. Com quais dos seguintes recursos tecnológicos já trabalhaste na escola?

☐ Computador ☐ Quadro Interativo
☐ Tablet ☐ Retroprojetor
☐ Calculadora Gráfica ☐ Projetor Multimédia
☐ Softwares educativos ☐ Internet
☐ Sensores de movimento ☐ Smartphone
☐ Outro(s). Qual(ais) ______________________________

4. Com quais dos seguintes recursos tecnológicos já trabalhaste na aula de Matemática?

☐ Computador ☐ Quadro Interativo
☐ Tablet ☐ Retroprojetor
☐ Calculadora Gráfica ☐ Projetor Multimédia
☐ Softwares educativos ☐ Internet
☐ Sensores de movimento ☐ Smartphone
☐ Outro(s). Qual(ais) ______________________________

5. Quais dos seguintes softwares conheces?

- ☐ Word
- ☐ Folha de Cálculo (por exemplo: Excel)
- ☐ PowerPoint
- ☐ Outro(s). Qual(ais) ____________________
- ☐ GeoGebra
- ☐ Escola virtual
- ☐ ActivInspire

6. Com quais dos seguintes softwares já trabalhaste na escola?

- ☐ Word
- ☐ Folha de Cálculo (por exemplo: Excel)
- ☐ PowerPoint
- ☐ Outro(s). Qual(ais) ____________________
- ☐ GeoGebra
- ☐ Escola virtual
- ☐ ActivInspire

7. Com quais dos seguintes softwares já trabalhaste na aula de matemática?

- ☐ Word
- ☐ Folha de Cálculo (por exemplo: Excel)
- ☐ PowerPoint
- ☐ Outro(s). Qual(ais) ____________________
- ☐ GeoGebra
- ☐ Escola virtual
- ☐ ActivInspire

8. Classifica, numa escala entre **NENHUM** e **MUITO**, colocando um (**X**) num dos **quatro quadrados**, de modo a refletir o teu grau de conhecimento como utilizador dos seguintes recursos:

Recurso tecnológico	**Escala**					
Computador	Nenhum					Muito
Tablet	Nenhum					Muito
Smartphone	Nenhum					Muito
Calculadora Gráfica	Nenhum					Muito
Sensores de velocidade/pressão/temperatura	Nenhum					Muito
Quadro Interativo	Nenhum					Muito
Retroprojetor	Nenhum					Muito
Projetor Multimédia	Nenhum					Muito

9. Classifica, numa escala entre **NENHUM** e **MUITO**, colocando um (**X**) num dos **quatro quadrados**, de modo a refletir o teu grau de conhecimento como utilizador dos seguintes softwares:

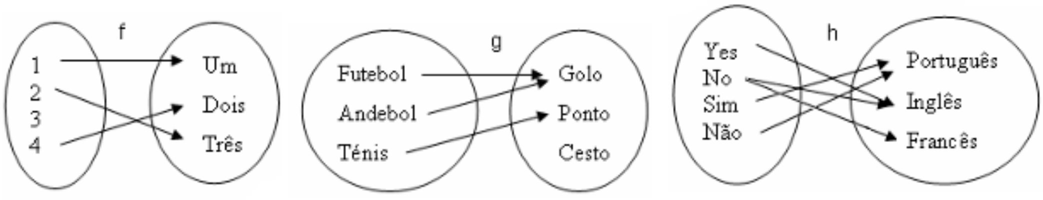
Recurso tecnológico	**Escala**					
Word	Nenhum					Muito
Excel	Nenhum					Muito
PowerPoint	Nenhum					Muito
GeoGebra	Nenhum					Muito
Escola Virtual	Nenhum					Muito
ActivInspire	Nenhum					Muito

O questionário chegou ao fim, obrigada pela atua colaboração

ANEXO II – FICHA DE AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Ficha de Avaliação Diagnóstica – Funções

1. Das correspondências que se seguem, indica as que representam funções:



A. f e g **B.** g e h **C.** apenas g **D.** apenas h

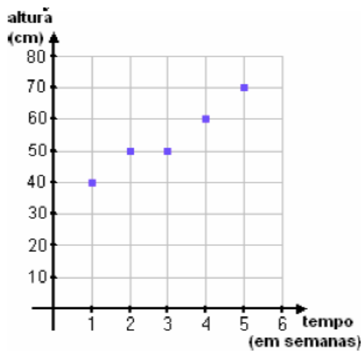
2. As palavras que completam corretamente a seguinte frase são, respetivamente:

"**Aos valores da variável independente chamam-se ______________________ e aos valores da variável dependente chamam-se ______________________.**"

A. objetos/imagens	**B.** imagens/objetos
C. variável dependente/imagens	**D.** objetos/variável independente

3. Seja $\boldsymbol{f}$ a função que representa a altura de um girassol medida em diferentes semanas.

Indica qual é o contradomínio da função $\boldsymbol{f}$



A. $D'_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

B. $D'_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

C. $D'_f = \{40, 50, 60, 70\}$

D. $D'_f = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}$

4. A seguinte tabela representa a função $\boldsymbol{f}$

x	-1	0	2	4
y	-4	0	8	16

O domínio da função $\boldsymbol{f}$ **é:**

A. $D_f = \{-4, 0, 8, 16\}$ **B.** $D_f = \{-1, 0, 2, 4\}$

C. $D_f = \{-4, 0, 2, 4\}$ **D.** $D'_f = \{-4, -1, 0, 2, 4, 8, 16\}$

5. O computador da Adriana avariou. Ao preço base de 30 euros acresce 8 euros por cada hora de trabalho. A tabela seguinte traduz o custo da reparação em função do número de horas de trabalho despendido.

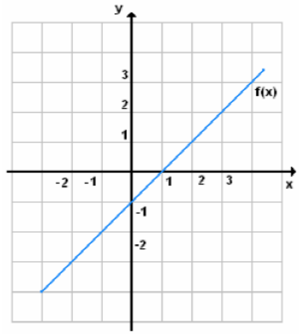
Número Horas	Custo da Reparação (€
1	38
2	46
3	54
...	...
x	$8x + 30$

Se a reparação do computador demorar 6 horas, qual é o preço que a Adriana tem que pagar?

A. 48 euros **B.** 70 euros **C.** 78 euros **D.** 180 euros

6. Considera o seguinte referencial.

Qual é a abscissa com ordenada -2?



A. -2 **B.** -1 **C.** 0 **D.** 1

7. A seguinte equação relaciona os graus Celsius (C) com os graus Fahrenheit (F): $F = \frac{9}{5}C + 32$

Na Covilhã registou-se uma temperatura de 68°F.

Determina a temperatura correspondente em graus Celsius.

A. 154°C **B.** 35°C **C.** 25°C **D.** 20°C

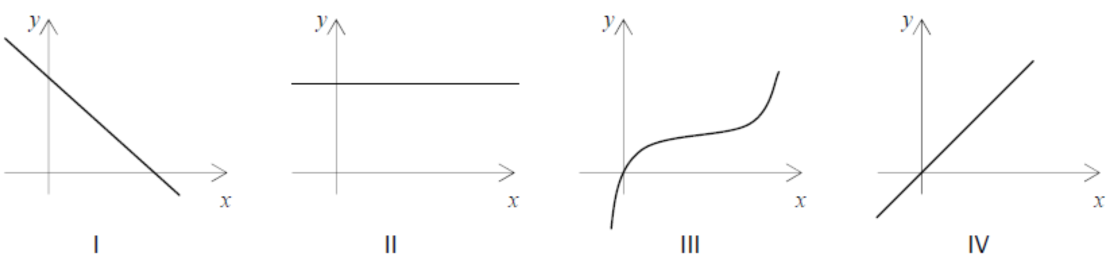
8. Considera a seguinte função:

$$f(x) = -2x + 1$$

A função $\boldsymbol{f}$ tem declive:

A. -2 **B.** 1 **C.** 2 **D.** $-\frac{1}{2}$

9. Observa os gráficos abaixo:



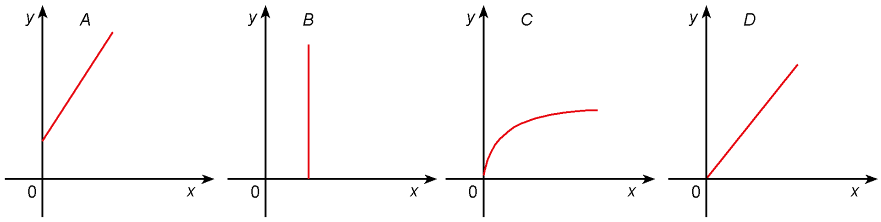
A. I, II e IV são funções lineares

B. I e IV são funções lineares

C. I, II e IV são funções afim

D. Nenhuma das funções é constante

10. Qual dos gráficos traduz uma situação de proporcionalidade direta entre as grandezas?



11. Das seguintes tabelas, averigua quais as que correspondem a situações de proporcionalidade direta e indica a constante:

A.

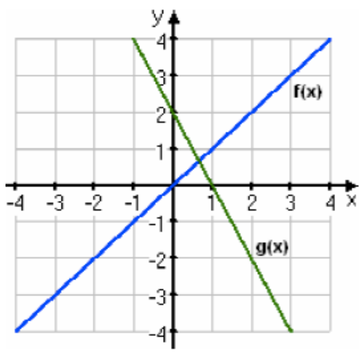
A	1	2	3	4
B	3	6	9	12

B.

C	1	2	3	4
D	5	8	13	20

12. Seja $f(x) = 2x + 3$. Se $f(x) = 11$, então o valor de $\boldsymbol{x}$ é igual a:

A. 19 **B.** 5 **C.** 25 **D.** 4



13. Considera as representações das funções f e g.

As funções f e g têm, respetivamente, os declives:

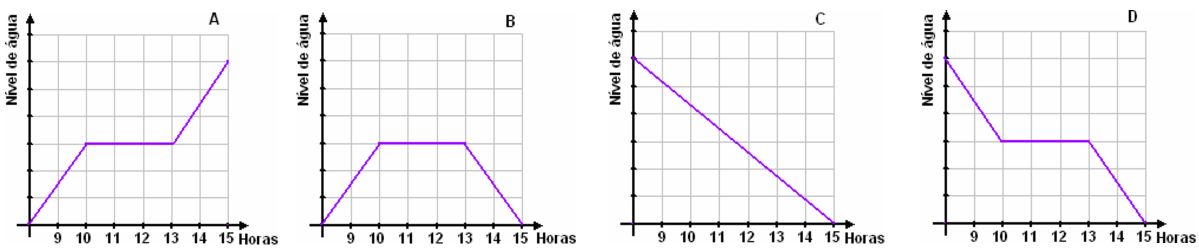
A. $1\ e -2$ **B.** $-1\ e\ 2$

C. $ambas -1$ **D.** $ambas\ 1$

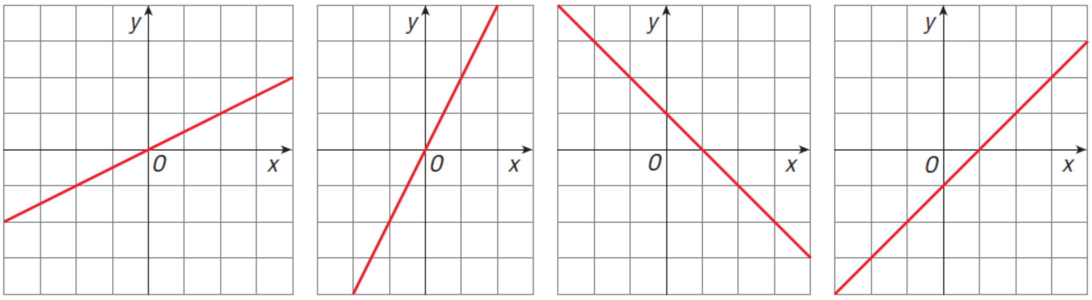
14. A imagem de 3 pela função f dada por $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ é:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** 1 **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{5}{2}$

15. *Um agricultor estava a esvaziar um dos tanques da sua propriedade. Às 10 horas o tubo entupiu e o nível de água no tanque permaneceu inalterado durante 3 horas. Ao fim desse tempo, o agricultor conseguiu desentupir o tubo e esvaziar o resto do tanque."* Qual dos seguintes gráficos traduz a situação descrita?



16. Associa cada uma das seguintes representações gráficas de funções afim à expressão algébrica que a representa:



I | II | III | IV

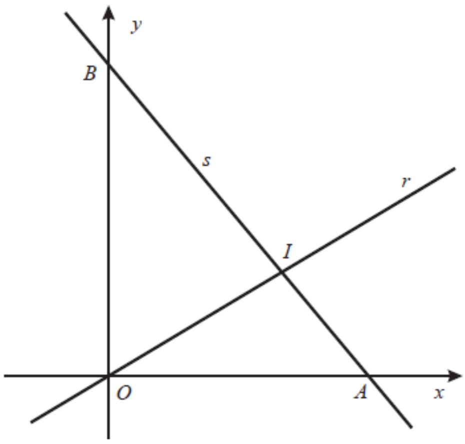
A.
I: $y = 2x$
II: $y = 0{,}5x$
III: $y = -x + 1$
IV: $y = x - 1$

B.
I: $y = 0{,}5x$
II: $y = 2x$
III: $y = x - 1$
IV: $y = -x + 1$

C.
I: $y = 0{,}5x$
II: $y = 2x$
III: $y = x - 1$
IV: $y = -x + 1$

D.
I: $y = 0{,}5x$
II: $y = 2x$
III: $y = -x + 1$
IV: $y = x - 1$

17. Na figura estão representadas, num referencial cartesiano, as retas r e s.



Sabe-se que:

- A reta *r* é definida por $y = 0{,}6x$;
- A reta *s* é definida por $y = -1{,}2x + 4{,}5$;
- O ponto *A* é o ponto de interseção da reta *s* com o eixo das abcissas;
- O ponto *B* é o ponto de interseção da reta *s* com o eixo das ordenadas;
- O ponto *I* é o ponto de interseção das retas *r* e *s*.

17.1 Qual é a ordenada do ponto *B*?

A. 3,75 **B.** 4,5 **C.** 2,5 **D.** 5,7

17.2 Qual é a medida do comprimento do segmento de reta [*OA*]?

A. 3,75 **B.** 4,5 **C.** 2,5 **D.** 5,7

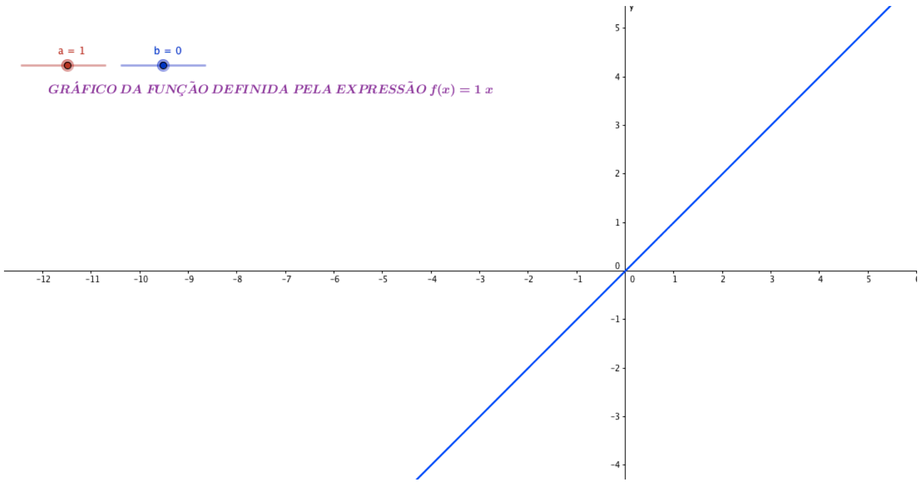
17.3 Determine as coordenadas do ponto *I*.

A. (1,5 ; 4,5) **B.** (4,5 ; 2,5) **C.** (2,5 ; 1,5) **D.** (5,7; 4,5)

ANEXO III – TAREFA 1

Tarefa 1 – Explorar com o GeoGebra

1. Função Linear $f(x) = ax$



Como podes observar, está representada a função linear $f(x) = ax$, em que $\boldsymbol{a}$ é um número real que pode ser alterado por ti, basta que para isso arrastes "a bolinha" com o cursor de $\boldsymbol{a}$ para a direita ou para a esquerda.

Nota: Mantém o valor de $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$.

1.1 Descreve o gráfico da função apresentada.

1.2 Com o cursor, atribuí diferentes valores ao parâmetro $\boldsymbol{a}$. Observa as alterações nos gráficos da função e regista as diferentes expressões algébricas obtidas, de acordo com os valores de $\boldsymbol{a}$ que escolheste.

1.3 Numa pequena conclusão, descreve o que acontece ao gráfico da função $f(x) = ax$ para valores positivos de $\boldsymbol{a}$, e para valores negativos de $\boldsymbol{a}$. Qual o efeito do aumento ou diminuição de $|a|$, no gráfico da função $f(x) = ax$?

2. Função Constante $f(x) = b$

Mantém, agora, o valor de $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$. Vamos começar por fazer o estudo do gráfico da função constante $f(x) = b$, em que $\boldsymbol{b}$ é um número real que pode ser alterado por ti, basta que para isso arrastes a "bolinha" com o cursor de $\boldsymbol{b}$ para a direita ou para a esquerda.

Nota: Mantém o valor de $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.

2.1 Descreve o gráfico desta função.

2.2 Com o cursor, atribuí diferentes valores a $\boldsymbol{b}$. Observa as alterações nos gráficos da função e regista as diferentes expressões algébricas obtidas, de acordo com os valores de $\boldsymbol{b}$ que escolheste, bem como, o valor da ordenada na origem (ou seja, qual o valor de y quando $x = 0$*)*, e as coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função com o eixo das ordenadas, para cada caso.

2.3 Numa pequena conclusão, descreve o que acontece ao gráfico da função $f(x) = b$ para valores positivos e negativos de $\boldsymbol{b}$.

3. Função Afim $f(x) = ax + b$

3.1 Mantém, agora, o valor de $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}.$ Vamos começar por fazer o estudo do gráfico da função afim $f(x) = 1x + b$, em que $\boldsymbol{b}$ é um número real que pode ser alterado por ti, basta que para isso arrastes "a bolinha" com o cursor de $\boldsymbol{b}$ para a direita ou para a esquerda.

Nota: Mantém o valor de $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$.

3.1.1 Descreve o gráfico desta função.

3.1.2 Com o cursor, atribuí diferentes valores a $\boldsymbol{b}$. Observa as alterações nos gráficos da função e regista as diferentes expressões algébricas obtidas, de acordo com os valores de $\boldsymbol{b}$ que escolheste. Para cada caso, indica o valor da ordenada na origem, ou seja, qual o valor de y quando $x = 0$, bem como as coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função com o eixo das ordenadas.

3.2 Altera, agora, o valor de $\boldsymbol{a}$ para valores positivos e negativos e repete os passos de **3.1.2** .

Regista as tuas conclusões, abordando os seguintes pontos:

- O que acontece ao gráfico da função $f(x) = ax + b$, para valores positivos e negativos de $\boldsymbol{b}$.

- O que acontece ao gráfico da função $f(x) = ax + b$, para valores positivos e negativos de $\boldsymbol{a}$.

- Interpreta geometricamente o valor de $\boldsymbol{b}$.

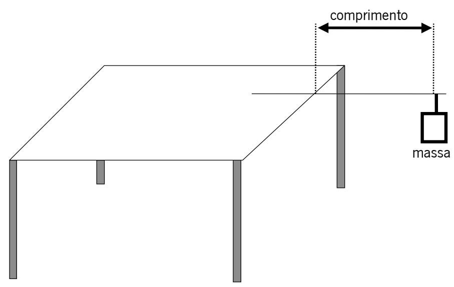
Bom Trabalho!

ANEXO IV – TAREFA 2

Tarefa 2 – A resistência do esparguete

Material

- fio de pesca
- pequenos pesos todos iguais (moedas)
- paus de esparguete
- um saco leve para colocar dentro os pesos.



Experiência

Coloca um pau de esparguete numa mesa, perpendicular ao bordo, com uma parte fora da mesa, tal como está na figura.

Prende o saco com o fio de pesca de forma a poderes suspendê-la do pau de esparguete (cola com fita-cola para o fio não deslizar do esparguete).

Mede o comprimento do esparguete que ficou para fora do bordo da mesa.

Coloca no saco (e conta) os pesos, um a um, até o esparguete partir.

Regista o comprimento do esparguete e o número de pesos necessários para ele partir.

Repete a experiência várias vezes alterando o comprimento do esparguete.

1. Regista, os dados recolhidos, numa tabela:

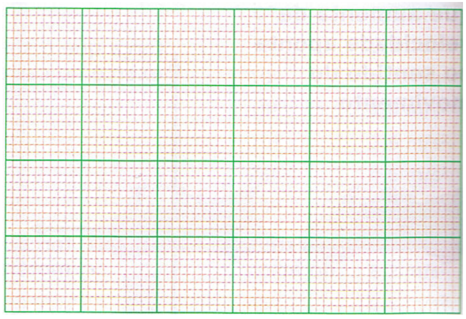
comprimento $\boldsymbol{e}$ do esparguete fora da mesa (cm)	20	15	10	5	3
número de pesos $\boldsymbol{p}$ necessários para partir					
$\boldsymbol{e \times p}$					
Coordenadas dos pontos $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{p})$					

2.**Questões**

2.1 O que acontece ao número de pesos necessário para partir o esparguete, à medida que o comprimento do esparguete fora da mesa diminui?

2.2 Identifica, justificando, a variável dependente e a variável independente.

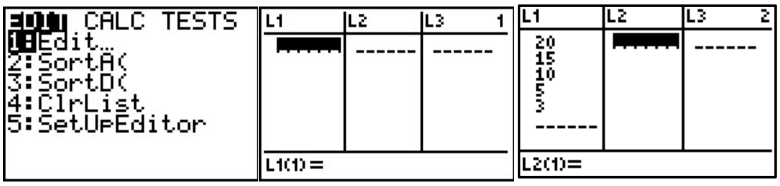
2.3 Representa, no sistema de eixos cartesiano, os pontos que registaste na tabela. Achas que esta situação traduz uma função? Justifica.



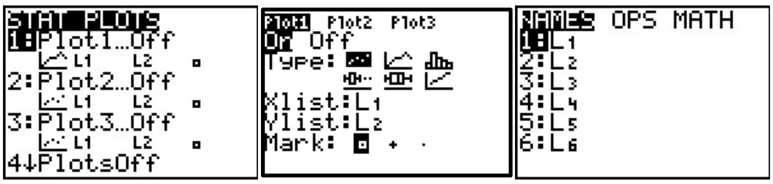
2.4 Pretende-se que façam a mesma representação na calculadora gráfica. Para isso, devem colocar os dados da tabela em listas da calculadora.

Procedimentos:

- Clica na tecla **STAT** e seleciona a opção **1: Edit...**;

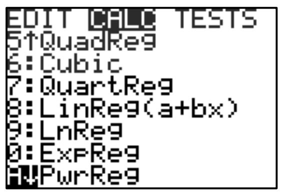


- Insere os valores nas respetivas listas;
- Clica nas teclas **2ND, Y=** para ativar a opção **STAT PLOT;**
- Entra em **Plot1** e faz **ENTER** com o cursor sobre **ON**. Da mesma forma seleciona o tipo de gráfico. Para selecionar a lista que fica no eixo dos xx e a lista que fica no eixo dos yy, basta fazer **2ND**, **STAT** e escolher a opção correta.



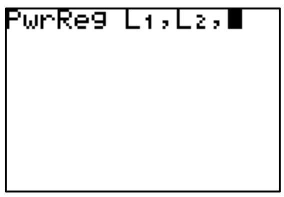
- Seguidamente clica em **GRAPH**, para obteres o gráfico.

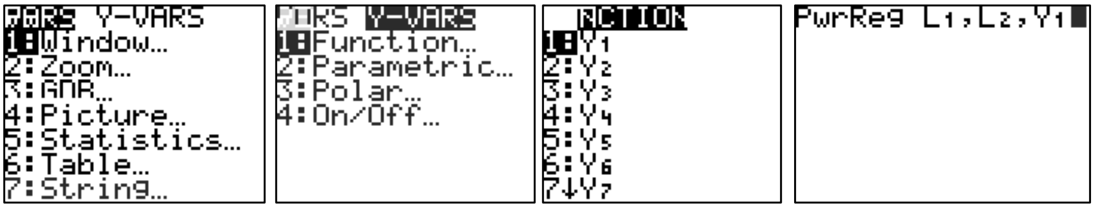
3. Encontra uma função que descreva esta situação.



Para isso vamos utilizar uma das funções de regressão da calculadora:

- Clica na tecla **STAT** e seleciona a opção **2: Calc**;
- Seleciona a opção **PwrReg** e faz **ENTER**;
- Clica nas teclas **2ND** e **1** (para fazer **L1**), depois na tecla , e novamente **2ND** e **2** (para fazer **L2**), seguido da tecla , ;
- Clica, agora na tecla **VARS**, e seleciona a opção **Y-VARS** seguida de **FUNCTION**, onde escolhes a variável **Y1**;





- Faz **ENTER**.

3.1 Regista o que aparece no ecrã da calculadora.

3.2 Faz **GRAPH**. O que verificas?

CONCLUSÃO:

Conjuntamente com os teus colegas de grupo, registem nos vossos cadernos o que podem retirar de mais significativo desta tarefa, como por exemplo quanto ao **tipo de proporcionalidade**, à **equação que traduz este tipo de proporcionalidade**, à sua **representação gráfica** e ao que acontece ao **comportamento das variáveis**.

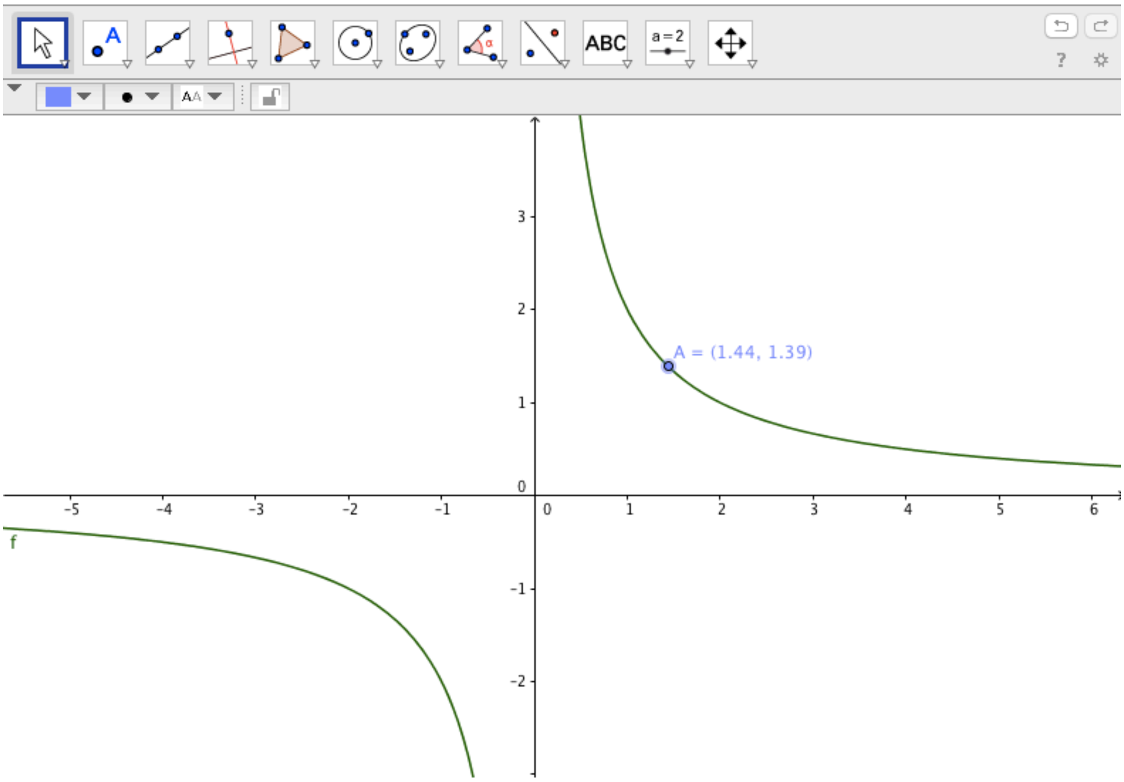
adaptado de "*Advanced Algebra Trough Data Exploration*"

Bom Trabalho!

ANEXO V – TAREFA 3

Tarefa 3 – Explorar com o GeoGebra

1. Função de Proporcionalidade Inversa $f(x) = \frac{a}{x}$



Com o cursor, movimenta o ponto A ao longo do gráfico da função e determina o produto das suas coordenadas em 3 posições distintas.

Abcissa(x)	**Ordenada**(y)	**Produto das coordenadas**$(x \times y)$

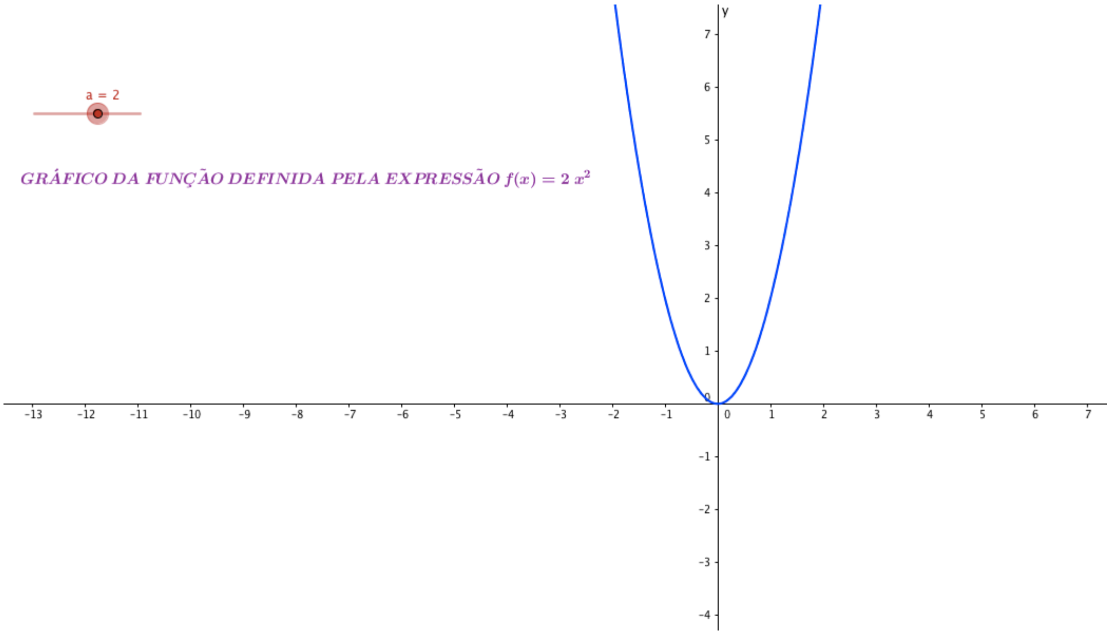
O que observas? Qual a expressão algébrica da função representada?

Bom Trabalho!

ANEXO VI – TAREFA 4

Tarefa 4 – Explorar com o GeoGebra

1. Função Quadrática do tipo $f(x) = ax^2$



Como podes observar, está representada uma **Parábola,** que é a imagem geométrica de uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2$ (com $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$), em que $\boldsymbol{a}$ é um número real que pode ser alterado por ti, basta que para isso arrastes a "bolinha" com o cursor de $\boldsymbol{a}$ para a direita ou para a esquerda.

1.1 O que acontece ao gráfico quando $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$? E à expressão algébrica? O que podes concluir?

1.2 Com o cursor, atribuí diferentes valores a $\boldsymbol{a}$, regista esses valores e regista:

- Como fica a expressão algébrica desta função para os diferentes valores de $\boldsymbol{a}$ que escolheste?
- Qual as coordenadas do vértice da Parábola, para os diferentes valores de $\boldsymbol{a}$ que escolheste?

1.3 Numa pequena conclusão, descreve o que acontece ao gráfico da função $f(x) = ax^2$ para valores positivos e negativos de $\boldsymbol{a}$. Qual o efeito do aumento ou diminuição de $|\boldsymbol{a}|$, no gráfico da função $f(x) = ax^2$?

Bom Trabalho!

ANEXO VII – TAREFA 5

Tarefa 5 – Atividade "Ver no escuro"

Numb3rs – episódio: "Guns and Roses"

Introdução:

Uma Agente do AFT aparentemente cometeu suicídio em casa, tendo o som do tiro sido gravado por vários recursos, o que criou uma "impressão acústica" do quarto e do seu interior. Charlie recria esta impressão acústica, e do mesmo modo que os morcegos "veem" usando uma espécie de sonar (eco), ele consegue determinar que falta alguma coisa grande no quarto.

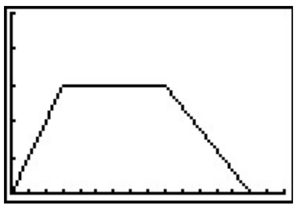
Tal como os morcegos, os submarinos, navios de pesca e militares usam a tecnologia sonar, que basicamente permite medir o tempo necessário para uma onda de som ser enviada a um objeto e ser refletida.

Nesta atividade, vamos utilizar um sensor de movimento, CBR, da Texas Instruments. Estes sensores de movimento funcionam como os sonares, pois enviam ultrassons (sons não detetáveis pelo ouvido humano por terem frequências demasiado altas) e deteta o tempo de ida e volta dos ultrassons a obstáculos.

O programa introduzido na máquina de calcular ou no computador determina a distância ao detetor do objeto cujo estudo do movimento queremos efetuar. Para tal, tem em conta a velocidade de propagação do som e constrói uma tabela com as sucessivas posições do objeto para diversos instantes consecutivos.

Atividades:

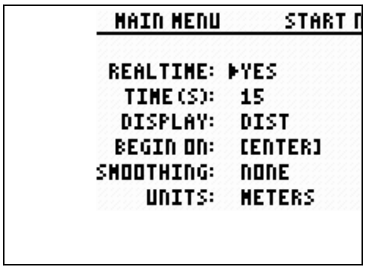
1. Utilizando o sensor de movimento, vamos tentar "imitar" o gráfico seguinte.

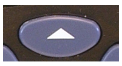


Para o caso, consideremos que no eixo das abcissas o tempo está em segundos, e no eixo das ordenadas, a distância está escalada de 1 em 1 metro. Depois de analisares o gráfico, deves seguir os passos:

- Coloca-te com o CBR junto à parede. Um dos colegas cronometra o percurso, enquanto que outro opera com a calculadora;
- Pressiona a tecla **APPS** e escolhe a opção **CBL/CBR**. Clica numa tecla qualquer. De seguida, escolhe a opção **RANGER** e clica na tecla **ENTER**.

• No **MAIN MENU** escolhe a opção **1: Setup/Sample** para verificares as seguintes indicações:



• Com a tecla  coloca o cursor em **START NOW** e faz **ENTER**;

• Quando pressionares **ENTER** ouvirás os "cliques" do CBR. Significa que estás a começar a recolher os dados do teu movimento em relação ao sensor. Desloca-te de modo a "imitares" o gráfico.

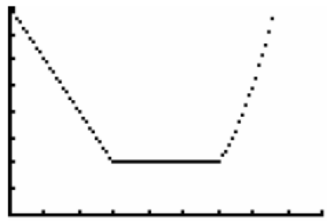
• Caso seja necessário efetuar outra recolha de dados clica em **ENTER** e terás disponível o **PLOT MENU.** A opção **3: REPEAT SAMPLE** permite repetir a experiência.

Questões:

1.1 O que observaste? Conseguiste "imitar" o gráfico dado? O que fizeste para obter um segmento horizontal? O que acontece ao declive quando te deslocas mais rapidamente para a frente e para trás em relação à parede?

1.2 O gráfico que obtiveste é constituído por três segmentos de reta e cada um deles num dado intervalo de tempo. Escreve uma expressão algébrica que representa cada um desses segmentos de reta.

2. Considera o gráfico ao lado.



2.1Descreve o movimento de uma pessoa (com o sensor) relativamente a uma parede, de modo a reproduzir o gráfico dado. Considera que no eixo das abcissas, o tempo está medido em segundos, enquanto que no eixo das ordenadas, a distância está escalada de 0,5 em 0,5 metros.

2.2Escreve uma expressão algébrica que representa cada um desses segmentos do gráfico.

adaptado de education.ti.com/go/NUMB3RS, Patrick Flynn, Turner High School, Kansas.

Bom Trabalho!

ANEXO VIII – FICHA DE TRABALHO 1

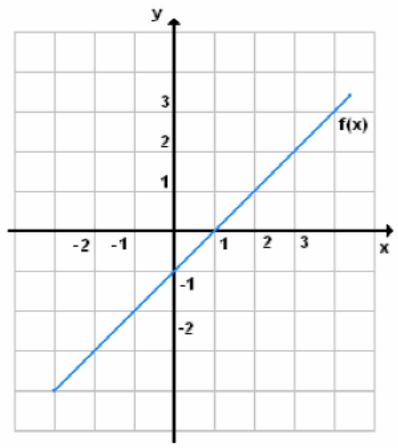
Ficha de Trabalho 1

1. Considera a seguinte função: $f(x) = -2x + 1$

A função $\boldsymbol{f}$ tem declive:

A. -2 **B.** 1 **C.** 2 **D.** $-\frac{1}{2}$

2. Considera o gráfico da função representada no referencial.

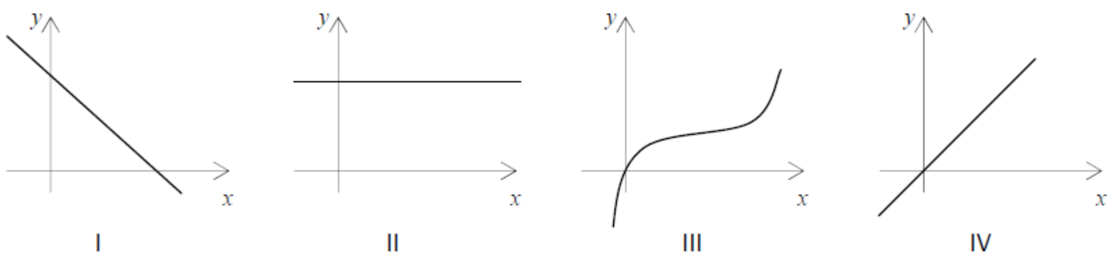


2.1 Determina o declive da reta representada.

2.2 Qual a ordenada na origem?

2.3 Escreve a expressão algébrica da função $f(x)$.

3. Observa os gráficos abaixo:



A. I, II e IV são funções lineares

B. I e IV são funções lineares

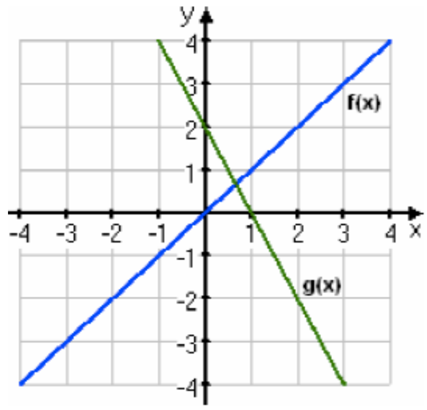
C. I, II e IV são funções afim

D. Nenhuma das funções é constante

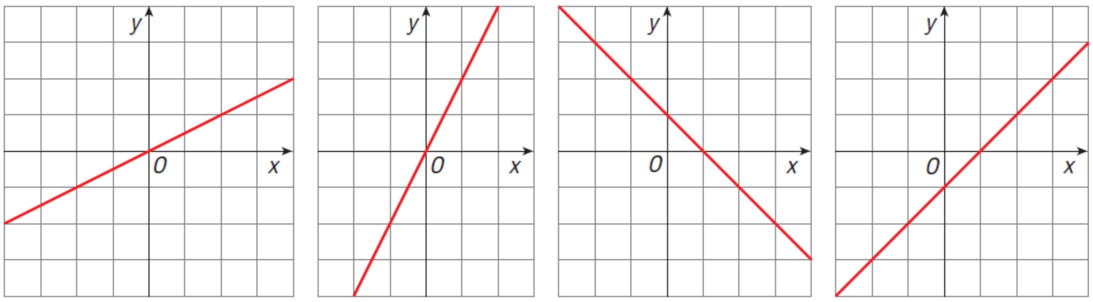
4. Considera as representações das funções f e g.

4.1Determina a expressão algébrica de $f(x)$

4.2Determina a expressão algébrica de $g(x)$



5. Associa cada uma das seguintes representações gráficas de funções afim à expressão algébrica que a representa:



A.	**B.**	**C.**	**D.**
I: $y = 2x$	**I:** $y = 0{,}5x$	**I:** $y = 0{,}5x$	**I:** $y = 0{,}5x$
II: $y = 0{,}5x$	**II:** $y = 2x$	**II:** $y = 2x$	**II:** $y = 2x$
III: $y = -x + 1$	**III:** $y = x - 1$	**III:** $y = x - 1$	**III:** $y = -x + 1$
IV: $y = x - 1$	**IV:** $y = -x + 1$	**IV:** $y = -x + 1$	**IV:** $y = x - 1$

Explica como chegaste à tua opção:

Bom Trabalho!

ANEXO IX – FICHA DE TRABALHO 2

Ficha de Trabalho 2

1. O tempo, em horas, que demora a encher um tanque, é inversamente proporcional ao número de m^3 de água que uma torneira debita por hora (caudal da torneira).

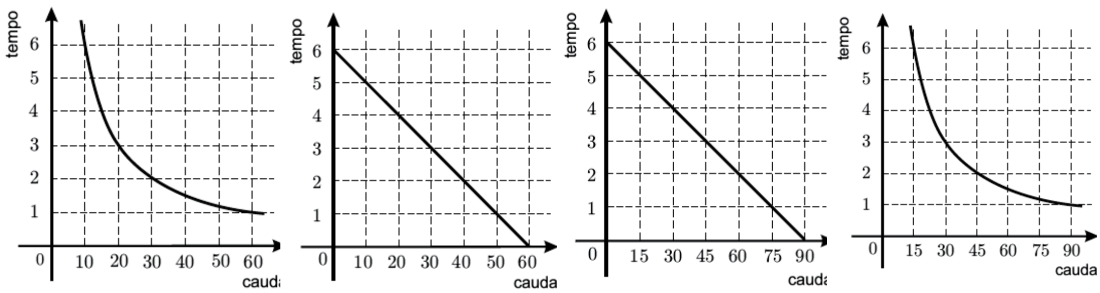
A tabela seguinte relaciona o caudal da torneira com o tempo necessário para encher o tanque.

Caudal em m^3 por hora	5	a
Tempo em horas	12	8

1.1 Determina *a*.

1.2 Qual dos gráficos seguintes pode representar a relação entre o caudal, em m^3 por hora, da torneira que enche o tanque e o tempo, em horas, que é necessário para encher o tanque?

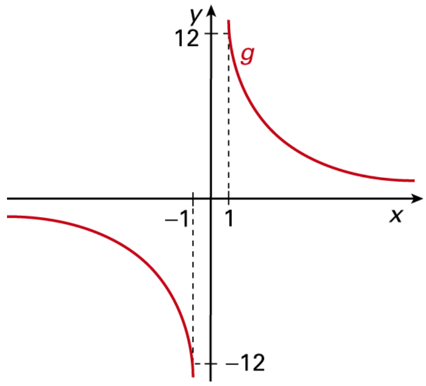
(A) **(B)** **(C)** **(D)**



Justifica a tua opção.

2. No referencial está representada uma função de proporcionalidade inversa.

Qual é a expressão algébrica que define esta função?

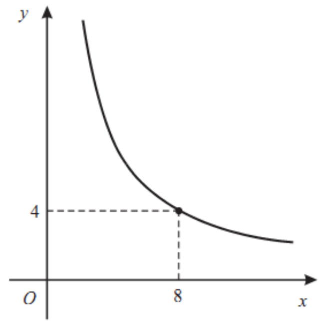


3. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função de proporcionalidade inversa.

O ponto de coordenadas (8, 4) pertence ao gráfico da função.

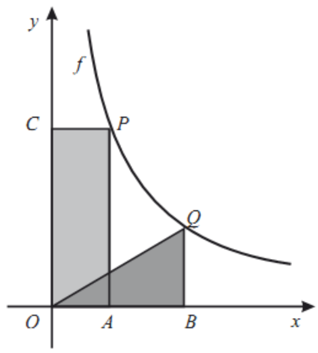
Determina a ordenada do ponto do gráfico que tem abcissa 2.

Mostra como chegaste à resposta.



4. No referencial cartesiano da figura está representada parte do gráfico da função f definida por

$y = \frac{10}{x} \quad (x > 0)$.



Sabe-se:

- Os pontos P e Q pertencem ao gráfico da função f.
- Os pontos A e B pertencem ao eixo das abcissas.
- O ponto C pertence ao eixo das ordenadas.
- As abcissas dos pontos A e P são iguais.
- As abcissas dos pontos B e Q são iguais.

a) Qual a área do retângulo [OAPC]?

(A) 5 **(B)** 10 **(C)** 15 **(D)** 20

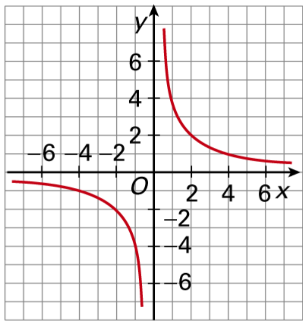
b) Admite que $\overline{OB} = 4$. Determina o perímetro do triângulo [OBQ]. Apresenta o resultado arredondado às décimas. (Nota: Nos cálculos intermédios, conserva no mínimo duas casas decimais).

Bom Trabalho!

ANEXO X – QUESTÃO DE AULA 1

Questão aula 1 – Funções (V1)

1. No referencial está representada uma função de proporcionalidade inversa.
Qual é a expressão algébrica que define esta função?



2. As variáveis *x* e *y* são inversamente proporcionais.

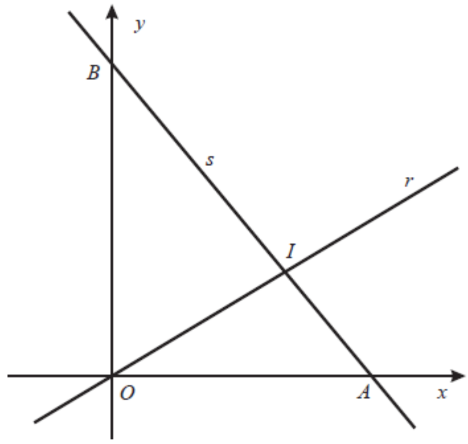
x	5	*r*	25
y	10	12,5	*t*

Determina *r* e *t*.

3. Um veterinário tem 10 gatos e ração para os alimentar durante seis meses (considera que cada mês tem 30 dias). Acolheu mais dois gatos abandonados.

Admitindo que cada gato come a mesma quantidade de ração por dia, para quantos dias terá ração para todos os gatos?

4. Na figura estão representadas, num referencial cartesiano, as retas r e s.
Sabe-se que:



- A reta *s* é definida por $y = -1{,}2x + 4{,}5$;
- O ponto ***A*** é o ponto de interseção da reta *s* com o eixo das abcissas;
- O ponto ***B*** é o ponto de interseção da reta *s* com o eixo das ordenadas;
- O ponto ***I*** é o ponto de interseção das retas *r* e *s*, e tem de coordenadas $(2{,}5;\, 1{,}5)$

4.1 Qual é a ordenada do ponto *B*?

4.2 Qual é a medida do comprimento do segmento de reta [*OA*]?

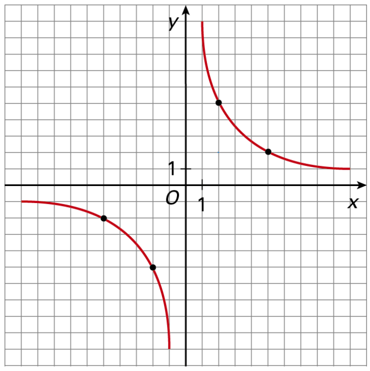
4.3 Determine a expressão algébrica da função cuja imagem geométrica é a reta *r*.

Bom trabalho!

Questão aula 1 – Funções (V2)

1. No referencial está representada uma função de proporcionalidade inversa.

Qual é a expressão algébrica que define esta função?



2. As variáveis x e y são inversamente proporcionais.

x	4	r	20
y	10	12,5	t

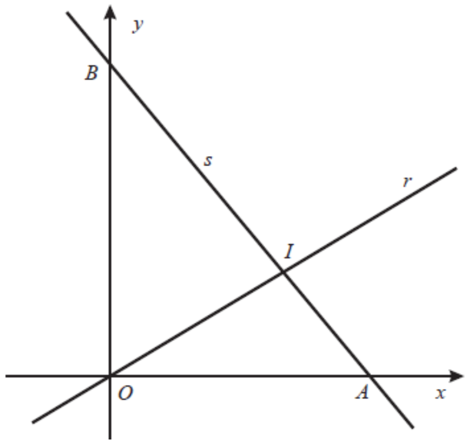
Determina r e t.

3. O Sr. Joaquim tem 120 vacas e ração para as alimentar durante 30 dias.

Admite que cada vaca come a mesma quantidade de ração por dia.

Se o Sr. Joaquim tivesse 90 vacas, para quantos, dias daria a ração?

4. Na figura estão representadas, num referencial cartesiano, as retas r e s.
Sabe-se que:



- A reta *s* é definida por $y = -1{,}2x + 4{,}5$;
- O ponto ***A*** é o ponto de interseção da reta *s* com o eixo das abcissas;
- O ponto ***B*** é o ponto de interseção da reta *s* com o eixo das ordenadas;
- O ponto ***I*** é o ponto de interseção das retas *r* e *s*, e tem de coordenadas $(2{,}5;\,1{,}5)$

4.1 Qual é a ordenada do ponto *B*?

4.2 Qual é a medida do comprimento do segmento de reta [*OA*]?

4.3 Determine a expressão algébrica da função cuja imagem geométrica é a reta *r*.

Bom Trabalho!

ANEXO XI – QUESTÃO DE AULA 2

Questão aula 2 – Funções

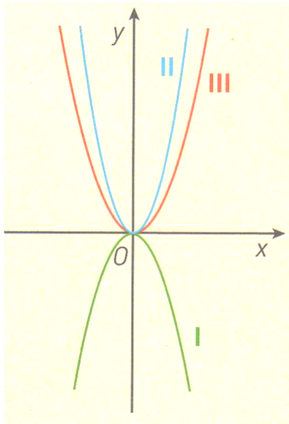
1. No referencial estão representadas as funções f, g, h.
Sabe-se que:

$$f(x) = 4x^2$$

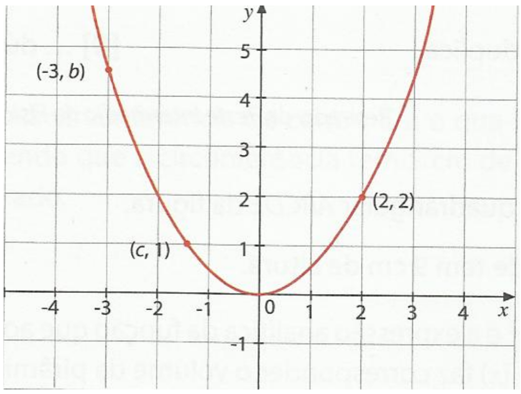
$$g(x) = 2x^2$$

$$h(x) = -2x^2$$

Associa a cada função o respetivo gráfico e justifica a tua opção.



2. Na figura pode observar-se a representação gráfica de uma função f do tipo $y = ax^2$.



2.1 Escreve a sua expressão algébrica.

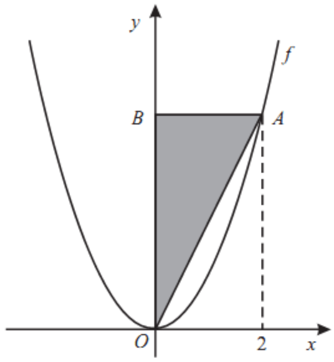
2.2 Determina os valores de b e de c. Explica o teu raciocínio, apresentando todos os cálculos que efetuares.

2.3 Justifica se o ponto $A(-2,2)$ também pertence ao gráfico da função f.

2.4 Quantas soluções tem a equação $f(x) = 4$? Justifica.

3. Na figura estão representados, num referencial cartesiano, parte do gráfico de uma função quadrática f e o triângulo [OAB].

Sabe-se que:



- O ponto O é a origem do referencial.
- O ponto A pertence ao gráfico da função f e tem abcissa igual a 2.
- O ponto B pertence ao eixo das ordenadas.
- O triângulo [OAB] é retângulo em B.
- A função f é definida por $f(x) = ax^2$, sendo a um número positivo.

Admite que a área do triângulo [OAB] é igual a 32. Determina o valor de a.

Bom Trabalho!

ANEXO XII – FICHA DE AVALIAÇÃO ESCRITA

Avaliação Escrita Individual

O teste divide-se em duas partes (Parte 1 e Parte 2), sendo o uso de calculadora permitido apenas numa delas (Parte 1). A Parte 1 termina com a expressão FIM DA PARTE 1 e o teste termina com a palavra FIM.

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Sempre que precisares de alterar ou de anular uma resposta, risca, de forma clara, o que pretendes que fique sem efeito.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresenta apenas uma resposta. Se apresentares mais do que uma resposta a um mesmo item, só a primeira será classificada.

As cotações dos itens de cada uma das partes do teste encontram-se no final da respetiva parte.

Parte 1 - Nesta parte é permitido o uso de calculadora

1. O Sr. Jorge é talhante.

Certo dia, retirou uma peça de carne de vitela do frigorifico e colocou-a em cima do balcão. Admite que esta peça de carne tinha x kg, sendo:

$$\mathbf{7,1 < x < 7,4}$$

Durante a manhã o Sr. Jorge vendeu **4,8** kg de carne desta peça. Qual dos seguintes valores pode ser o peso, em kg, da carne desta peça que não foi vendida?

(A) 2,65 **(B)** 2,3 **(C)** 2,35 **(D)** 2,6

2. Considera o conjunto $A = \left\{\sqrt{5}, \sqrt{6{,}25}, \pi, \sqrt[3]{125}\right\}$.

Qual dos conjuntos seguintes é igual ao conjunto $A \cap \mathbb{Q}$?

($\mathbb{Q}$ designa o conjunto dos números racionais)

(A) $\{\sqrt{5}, \pi\}$ **(B)** $\left\{\sqrt{6{,}25}, \pi\right\}$ **(C)** $\{\sqrt{5}, \sqrt[3]{125}\}$ **(D)** $\left\{\sqrt{6{,}25}, \sqrt[3]{125}\right\}$.

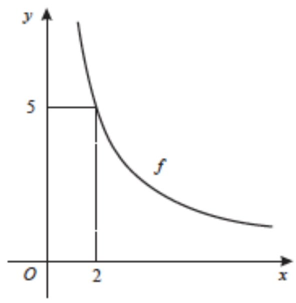
Exame Nacional, 2015

3. Seja $\boldsymbol{f}$ uma função de proporcionalidade inversa.

O ponto de coordenadas $(2; 5)$ pertence ao gráfico da função.

Determina a ordenada do ponto do gráfico que tem abcissa 3,2.

Apresenta o resultado na forma de dízima e mostra como chegaste à tua resposta.



Exame Nacional, 2015

4. A tabela seguinte mostra a relação entre o número de fatias (n) em que o bolo de aniversário do Jorge pode ser dividido e a massa (p), em quilogramas, de cada uma das fatias do bolo.

Número de fatias (n)	**6**	**8**	**10**
Massa das fatias (p) em Kg	**0,60**	**0,45**	**0,36**

4.1 O que representa a constante de proporcionalidade inversa no contexto do problema?

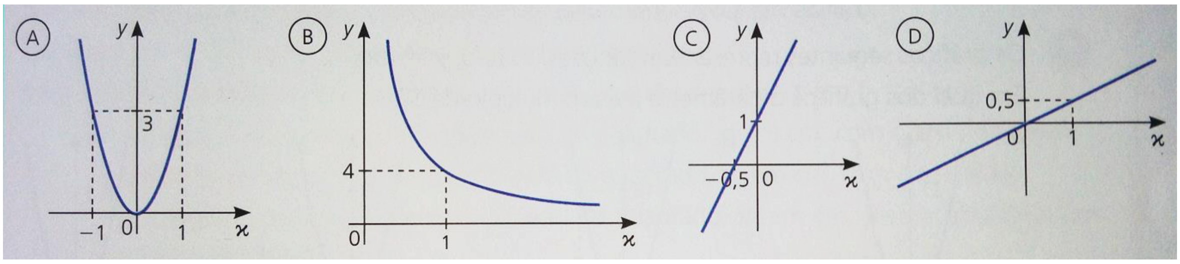
4.2 Qual o peso de cada fatia, se cortarmos o bolo em 12 fatias? Mostra como chegaste à resposta.

4.3 Qual das expressões seguintes pode traduzir a relação entre o número de fatias (**n**) e a respetiva massa (*p*)?

(A) $p = n \times 3{,}6$ **(B)** $p = n + 3{,}6$ **(C)** $p = \frac{n}{3{,}6}$ **(D)** $p = \frac{3{,}6}{n}$

Teste intermédio, 2010

5. Observa cada um dos gráficos que se seguem:



5.1 Escreve a expressão algébrica das funções representadas por cada um dos gráficos.

5.2 Indica, justificando, quais dos gráficos representam relações de proporcionalidade, referindo de que tipo de proporcionalidade se trata e a respetiva constante.

5.4 Existe algum gráfico que represente uma função quadrática? Justifica a tua resposta.

FIM DA PARTE 1

Cotações

1	2	3	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	5.3	Subtotal (cad 1)
2	2	5	4	3	2	16	6	3	43 pontos

Parte 2

Nesta parte, não é permitido o uso de calculadora

1. Completa adequadamente as seguintes afirmações:

1.1 Se $x > 3$, então $x + 4 >$ ______________.

1.2 Se $x < 100$, então $\frac{x}{2} <$ ______________.

1.3 Se $1 < x < 3$, então _________ $< x + 4 <$ ___________.

1.4 Se $a \geq 1$, então $-a$ _____ -1.

1.5 Se $3 < 5$ e $8 < 14$, então $3 + 8$ ____$5 + 14$.

2. Utiliza a tabela de quadrados perfeitos seguinte para determinar um valor aproximado de $\sqrt{8}$ às décimas, por excesso.

x	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x^2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841	900

3. Considera a inequação $-3x \geq 6$.
Qual é o conjunto solução desta inequação?

(A) $]-\infty; -2]$ **(B)** $]-\infty; 2]$ **(C)** $[-2; +\infty[$ **(D)** $[2; +\infty[$

Exame Nacional, 2015

4. Resolve a inequação seguinte.

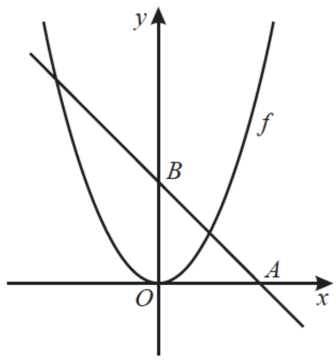
$$1 - (3x - 2) < 4 + x$$

Apresenta o conjunto solução na forma de intervalo de números reais.
Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Exame Nacional, 2015

5. Na figura ao lado, estão representadas, em referencial cartesiano, a reta AB e parte do gráfico da função f.
Sabe-se que:

- O ponto O é a origem do referencial;
- Os pontos A e B pertencem, respetivamente, aos semieixos positivos Ox e Oy;
- O ponto B tem ordenada 2;
- A função f é definida por $f(x) = x^2$.



Exame Nacional, 2015

5.1 Qual das seguintes equações pode definir a reta AB?

(A) $y = x + 2$ **(B)** $y = x + 3$ **(C)** $y = -x + 2$ **(D)** $y = -x + 3$

Justifica a tua opção.

5.2 Seja g a função cujo gráfico é simétrico do gráfico da função f relativamente ao eixo Ox.

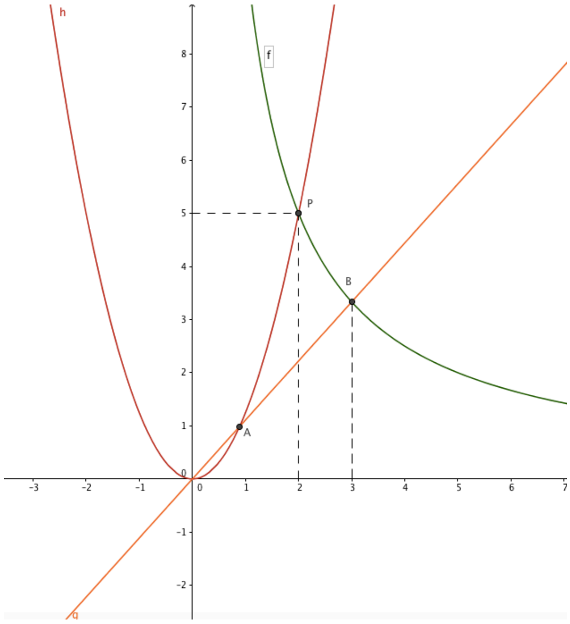
Calcula o número designado por $f(\sqrt{3}) + g(2)$. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

6. No referencial da figura ao lado, está representado o gráfico da função f, g e h.

Sabe-se que:

- h é uma função do tipo $h(x) = ax^2$;
- f é uma função de proporcionalidade inversa;
- g é uma função linear;
- o ponto P é o ponto de coordenadas (2; 5);
- os pontos O e A são os pontos de interseção dos gráficos das funções g e h

o ponto B tem de abcissa 3 e é o ponto de intersecção dos gráficos das funções f e g



6.1 Determina a expressão algébrica da função f. Mostra como chegaste à tua resposta.

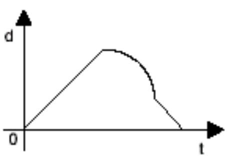
6.2 Determina as coordenadas do ponto B. Explica como chegaste à tua resposta.

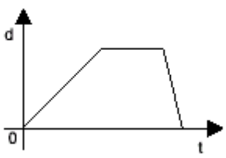
6.3 Determina a expressão algébrica da função g. Mostra como chegaste à tua resposta.

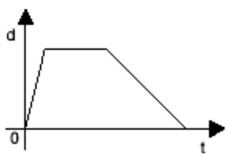
6.4 Determina a expressão algébrica da função h. Mostra como chegaste à tua resposta.

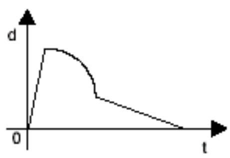
6.5 Determina as coordenadas do ponto A.

7. O Pedro prendeu o cão a uma das pernas de um banco do jardim.
O cão afastou-se rapidamente do banco até a corda ficar esticada. A seguir, sempre com a corda esticada, descreveu um arco de circunferência em torno da perna do banco. Depois aproximou-se vagarosamente deste.
Qual dos seguintes gráficos pode representar a distância do cão à perna do banco do jardim durante o seu passeio?

☐ 

☐ 

☐ 

☐ 

FIM!

Cotações

1	2	3	4	5.1	5.2	5.1	5.2	5.3	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	7	Subtotal (cad 2)
3	5	2	7	6	6	16	6	3	3	3	4	4	9	5	57 pontos

ANEXO XIII – QUESTIONÁRIO FINAL

QUESTIONÁRIO FINAL

Durante o estudo do Capítulo das Funções tiveste oportunidade de realizar algumas tarefas de investigação utilizando diferentes recursos tecnológicos na sala de aula.

PARTE A

Com este questionário pretende-se obter a tua opinião relativamente a cada uma destas tarefas.

1. **Tarefa 1**: Função Linear, Constante e Afim – Exploração com o GeoGebra.

   1.1 Quais os recursos utilizados na realização desta tarefa?

☐ Computador	☐ GeoGebra	☐ Retroprojetor
☐ Calculadora Gráfica	☐ Sensores de movimento	☐ Quadro Interativo
☐ Internet	☐ Projetor Multimédia	☐ ScreenView
☐ Softwares educativos	☐ Escola virtual	☐ ActivInspire

   1.2 Quais as dificuldades que sentiste na utilização desses recursos?

   1.3 Conseguiste obter conclusões na realização desta atividade? Lembraste de quais?

   1.4 O que mais gostaste na realização desta atividade?

2. **Tarefa 2**: Resistência do esparguete

   2.1 Quais os recursos utilizados na realização desta tarefa?

☐ Computador	☐ GeoGebra	☐ Retroprojetor
☐ Calculadora Gráfica	☐ Sensores de movimento	☐ Quadro Interativo
☐ Internet	☐ Projetor Multimédia	☐ ScreenView
☐ Softwares educativos	☐ Escola virtual	☐ ActivInspire

2.2 Quais as dificuldades que sentiste na utilização desses recursos?

2.3 Conseguiste obter conclusões na realização desta atividade? Lembraste de quais?

2.4 O que mais gostaste na realização desta atividade?

3. Tarefa 3: Função de Proporcionalidade Inversa – Exploração com o GeoGebra.

3.1 Quais os recursos utilizados na realização desta tarefa?

☐ Computador	☐ GeoGebra	☐ Retroprojetor
☐ Calculadora Gráfica	☐ Sensores de movimento	☐ Quadro Interativo
☐ Internet	☐ Projetor Multimédia	☐ ScreenView
☐ Softwares educativos	☐ Escola virtual	☐ ActivInspire

3.2 Quais as dificuldades que sentiste na utilização desses recursos?

3.3 Conseguiste obter conclusões na realização desta atividade? Lembraste de quais?

3.4 O que mais gostaste na realização desta atividade?

4. Tarefa 4: Função Quadrática do tipo $y = ax^2$ – Exploração com o GeoGebra.

4.1 Quais os recursos utilizados na realização desta tarefa?

☐ Computador	☐ GeoGebra	☐ Retroprojetor
☐ Calculadora Gráfica	☐ Sensores de movimento	☐ Quadro Interativo
☐ Internet	☐ Projetor Multimédia	☐ ScreenView
☐ Softwares educativos	☐ Escola virtual	☐ ActivInspire

4.2 Quais as dificuldades que sentiste na utilização desses recursos?

4.3 Conseguiste obter conclusões na realização desta atividade? Lembraste quais?

4.4 O que mais gostaste na realização desta atividade?

5. Tarefa 5 : Ver no escuro – Numb3rs – episódio: "Guns and Roses"

5.1 Quais os recursos utilizados na realização desta tarefa?

☐ Computador	☐ GeoGebra	☐ Retroprojetor
☐ Calculadora Gráfica	☐ Sensores de movimento	☐ Quadro Interativo
☐ Internet	☐ Projetor Multimédia	☐ ScreenView
☐ Softwares educativos	☐ Escola virtual	☐ ActivInspire

5.2 Quais as dificuldades que sentiste na utilização desses recursos?

5.3 Conseguiste obter conclusões na realização desta atividade? Lembraste de quais?

5.4 O que mais gostaste na realização desta atividade?

PARTE B

6. Das cinco tarefas realizadas, qual a que mais gostaste? Justifica a tua opção.

7. A aplicação destas tarefas ajudou-te na compreensão dos conteúdos Matemáticos em curso? Justifica a tua opinião.

8. Para além das tarefas mencionadas, na sala de aula foram projetados vídeos e aulas interativas da Escola Virtual.

8.1 O que pensas destes recursos?

8.2 Gostas da sua utilização na sala de aula?

8.3 Compreendes bem os conteúdos apresentados nos vídeos ou necessitas da explicação da professora?

9. De um modo geral, o que achas da aplicação das novas tecnologias nas aulas de Matemática?

O questionário chegou ao fim, obrigada pela tua colaboração!

ANEXO XIV – PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO AO DIRETOR DA ESCOLA

Exmo. Senhor Diretor

Do Agrupamento de

Escolas do Vale de S. Torcato

Eu, Maria do Rosário da Silva Freitas, professora de Matemática na escola, e aluna do Mestrado em Ensino de Matemática no 3ºCiclo do Ensino Básico e no Secundário, da Universidade do Minho, para a implementação do projeto de intervenção pedagógica no âmbito do Relatório de Atividade Profissional, necessito de proceder à recolha de dados que, em parte consiste em gravações audiovisuais de algumas aulas do 9º ano, da turma E. Para tal, venho solicitar a autorização de V. Exª para gravar em vídeo e áudio essas aulas. Pela minha parte, comprometo-me a usar os dados para fins académicos e a garantir o anonimato da identidade dos alunos.

Caso V. Exª autorize a gravação das aulas, comprometo-me ainda a solicitar aos encarregados de educação a devida autorização para a recolha de registos audiovisuais durante a intervenção de ensino, assumindo igualmente o compromisso em garantir o anonimato da identidade dos alunos.

Certa da melhor atenção que o pedido merecerá da parte de V. Exª, subscrevo com os melhores cumprimentos.

Guimarães, 19 de outubro de 2015

A professora

____

(Maria do Rosário da Silva Freitas)

Autorização

____ de _________________________de 2015

O Diretor

ANEXO XV – PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO AOS ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO

Exmo. (a) Senhor (a)

Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a)

____

n.º _______ da Turma E do 9º ano.

Eu, Maria do Rosário da Silva Freitas, professora de Matemática na escola, e aluna do Mestrado em Ensino de Matemática no 3ºCiclo do Ensino Básico e no Secundário, da Universidade do Minho, para a implementação do projeto de intervenção pedagógica no âmbito do Relatório de Atividade Profissional, necessito de proceder à recolha de dados que, em parte consiste em gravações audiovisuais de algumas aulas do 9º ano, da turma E. Para tal, e uma vez obtida autorização do Diretor da escola, venho solicitar a autorização de V. Exª para gravar em vídeo e áudio essas aulas. Pela minha parte, comprometo-me a usar os dados para fins académicos e a garantir o anonimato da identidade dos alunos.

Certa da melhor atenção que o pedido merecerá da parte de V. Exª, subscrevo com os melhores cumprimentos.

Agrupamento de Escolas do Vale de S. Torcato, 19 de outubro de 2015

A professora

____

(Maria do Rosário da Silva Freitas)

Autorização

____ de ________________________de 2015

Assinatura do(a) Encarregado(a) de Educação

____