UMinho|2015 Sara Cristina Magalhães Gomes Ribeiro Estudo sobre a Área no 4.º e no 5.º anos de escolaridade: a utilização de materiais manipuláveis e níveis de desempenho na estruturação de arranjos retangulares

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Sara Cristina Magalhães Gomes Ribeiro

Estudo sobre a Área no 4.º e no 5.º anos de escolaridade: a utilização de materiais manipuláveis e níveis de desempenho na estruturação de arranjos retangulares

outubro de 2015

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Sara Cristina Magalhães Gomes Ribeiro

Estudo sobre a Área no 4.º e no 5.º anos de escolaridade: a utilização de materiais manipuláveis e níveis de desempenho na estruturação de arranjos retangulares

Relatório de Estágio.
Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclo de Ensino Básico

Trabalho efetuado sob a orientação do
Doutor Pedro Palhares

outubro de 2015

DECLARAÇÃO

Nome: Sara Cristina Magalhães Gomes Ribeiro

Endereço eletrónico: sarcristina@homail.com

Contacto telefónico: 918278419

Número do Cartão de Cidadão: 14184767

Título do Relatório de Estágio: Estudo sobre a Área no 4.º e no 5.º anos de escolaridade: a utilização de materiais manipuláveis e níveis de desempenho na estruturação de arranjos retangulares

Orientador: Doutor Pedro Palhares

Ano de conclusão: 2015

Designação do Mestrado: Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico

Universidade do Minho, ______ /______ /______

Assinatura: ____

AGRADECIMENTOS

Remeto, inicialmente, uma palavra de reconhecimento para o Agrupamento de Escolas de Braga que, cordialmente, possibilitou o desenvolvimento da prática de ensino supervisionada em duas das escolas que contempla. Endereço, também, uma consideração às professoras cooperantes, Albertina Dias e Cristina Cibrão, que se dispuseram a acompanhar e a colaborar neste processo de iniciação à prática profissional, juntamente com os alunos da turma do 4.º ano de escolaridade e da turma do 5.º ano de escolaridade, que participaram diretamente neste estudo.

Dirijo, evidentemente, um agradecimento particular ao professor orientador, Doutor Pedro Palhares, pelo conhecimento vasto que possui e com o qual engrandece, ou melhor, sabe engrandecer todos aqueles que o rodeiam. Competência, na definição mais clara que conheço.

Finalmente, num apreço mais próximo e ausente de formalidades, dirijo-me àqueles que me acompanharam, de perto, ao longo deste percurso e que tão bem me souberam suportar. Não a todos os que, num tom de pura cordialidade, me elogiam pelo eventual sucesso concretizado ou pelo dever talvez cumprido com distinção. Não. Somente aos poucos que admiram, paulatinamente, o caminho que desenho, que saboreiam de perto a dedicação que emprego e o tempo que concedo, e que, por isso mesmo, me aplaudem, de pé, como toda a genuinidade que o orgulho verdadeiro despoleta. Aos meus pais, fonte perene de suporte, por todo o esforço que mobilizaram para a concretização deste Projeto, pelas adversidades que, incansavelmente, me ajudaram a pacificar, pela compreensão de toda a ausência e absorção que este trabalho trouxe, e pelo incentivo que, como ninguém, sabem delegar. Aos meus irmãos, pela forma como, em jeito verdadeiramente diferenciado, sempre me souberam completar, pelo apoio e vigor tão certos que cada um deles conseguiu ser em cada compasso deste percurso, e à Filipa e à Catarina pela palavra de alento que sempre trouxeram para junto de mim. À Diana, pela partilha estreita deste percurso longo, pela presença firme e contínua que demonstrou, e pela autenticidade dos laços que, desta forma, (re)construímos. E, por último, à Filipa, pela forma persistente como dissipou, a cada dia, a distância que, desde há um ano, nos diverge, pela essencialidade que constitui na minha vida e que, a cada dia, me traz à vida, e por ser o porto de abrigo em que me deito, para a eternidade.

Estudo sobre a Área no 4.º e no 5.º anos de escolaridade: a utilização de materiais manipuláveis e níveis de desempenho na estruturação de arranjos retangulares

Sara Cristina Magalhães Gomes Ribeiro

Relatório de Estágio

Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico

Universidade do Minho - 2015

RESUMO

O presente Relatório teve na sua base a conceção, o desenvolvimento, e a avaliação de um Projeto de Intervenção Pedagógica, transversal às duas turmas - 4.º ano de escolaridade e 5.º ano de escolaridade -, de ciclos de ensino distintos - 1.º Ciclo do Ensino Básico e 2.º Ciclo do Ensino Básico -, em que decorreu a prática de ensino supervisionada. O Projeto, cujo tema é a área, por um lado, pretendia compreender como é que a utilização de materiais manipuláveis poderia contribuir para a compreensão, pelos alunos, de tópicos relacionados com a área, e, por outro lado, objetivava caracterizar o desempenho dos alunos na estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões, entendida como essencial no desenvolvimento da noção de área (Battista, Clements, Arnoff, Battista & Borrow, 1998). Neste sentido, procurou-se responder às seguintes questões de investigação: a) Em que medida é que a utilização do material manipulável bissemis auxilia a compreensão, pelos alunos, do conceito de equivalência de figuras e do processo de medição direta da área, e a distinção entre os conceitos de área e de perímetro?; b) Em que medida é que a utilização de materiais manipuláveis mecânicos concebidos para o efeito auxilia a compreensão, pelos alunos, das fórmulas para a área do paralelogramo e do triângulo?; e c) Como é que se caracteriza o desempenho dos alunos em problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões?

De um modo geral, concluiu-se que os materiais manipuláveis utilizados no Projeto, designadamente os bissemis e os materiais mecânicos, não sendo, obviamente, fins em si mesmos, se constituíram instrumentos didáticos potenciais no auxílio da compreensão dos tópicos relacionados com a área pretendidos, promovendo experiências de aprendizagem criativas e frutuosas. A par disto, verificou-se que o desempenho dos alunos na estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões se pautou pela variabilidade, ainda que, tendencialmente, os alunos da turma do nível de escolaridade superior tivessem exibido níveis de sofisticação mais elevados nesta atividade.

Study about Area in the 4th and 5th grades: manipulative materials and performance levels in structuring rectangular arrays

Sara Cristina Magalhães Gomes Ribeiro

Practicum Report

Master in Teaching in the 1st and 2nd Cycle of Basic Education

Minho University - 2015

ABSTRACT

The present Report was based on the design, development, and evaluation of an Educational Intervention Project, transverse to two groups - 4th grade and 5th grade -, of different levels of education - 1st Cycle of Basic Education and 2nd Cycle of Basic Education -, under which the supervised teaching practice occurred. The Project, whose subject is the area, aimed to understand how the use of manipulative materials contributes to the students' understanding of topics related to area. Moreover it aimed to characterize students' performance in structuring two dimensions rectangular arrays of squares, seen as essential for the development of the notion of area (Battista, Clements, Arnoff, Battista & Borrow, 1998). In this sense, we tried to answer the following research questions: a) To what extent the use of manipulative materials bissemis assists students to understand the concept of equivalence of figures and direct measurement of area, as well the distinction between the concepts of area and perimeter?; b) To what extent the use of mechanical manipulative materials crafted for that purpose assists students to understand the formulas for the area of the parallelogram and triangle ?; and, c) How students' performance in structuring of two dimensions rectangular arrays of squares is characterized?

In general, it was concluded that manipulative materials used in the Project, specifically the bissemis and the mechanical materials, obviously not means by themselves, constituted potential teaching tools to assist students' understanding of topics related to area, promoting creative and fruitful learning experiences. Further, it was found that students' performance in structuring of two dimensions rectangular arrays of squares was marked by variability. Nevertheless, students in the higher grade group exhibited higher levels of sophistication in this activity.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

ÍNDICE DE QUADROS

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

Neste capítulo concretiza-se a apresentação, naturalmente introdutória, do Relatório de Estágio. Este Relatório foi desenvolvido no âmbito da Unidade Curricular *Prática de Ensino Supervisionada*, anual, contemplada no 2.º ano do Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico, da Universidade do Minho. A Unidade Curricular supramencionada envolveu, como elementos nucleares, e que estão na base da elaboração deste Relatório, a conceção, o desenvolvimento, e a avaliação de um Projeto de Intervenção Pedagógica, transversal às duas turmas - 4.º ano de escolaridade e 5.º ano de escolaridade -, de ciclos de ensino distintos - 1.º Ciclo do Ensino Básico e 2.º Ciclo do Ensino Básico -, em que decorreu a prática de ensino supervisionada.

Na primeira secção deste capítulo, *Relevância do tema do Projeto de Intervenção Pedagógica,* efetua-se a problematização da relevância do tema do Projeto, a área. Na segunda secção, *Objetivos e Questões de Investigação do Projeto de Intervenção Pedagógica*, enunciam-se os objetivos e as questões de investigação que norteiam o Projeto. Finalmente, na terceira secção, *Estrutura do Relatório de Estágio,* explicita-se a estrutura organizativa deste Relatório.

1.1. Relevância do tema do Projeto de Intervenção Pedagógica

De acordo com os documentos curriculares nacionais de referência para a disciplina de Matemática no Ensino Básico, designadamente o Programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013) e as Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2012), a abordagem do conteúdo área, integrada no domínio Geometria e Medida, é realizada ao longo dos diferentes anos de escolaridade do Ensino Básico. De facto, o estudo deste conteúdo não se circunscreve a nenhum ano de escolaridade, nem mesmo a nenhum ciclo de ensino, pelo que o tópico em questão vai sendo, progressivamente, retomado e (re)construído.

Com efeito, no 1.º Ciclo do Ensino Básico, conforme o disposto no Programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013), a abordagem do conteúdo área abrange: no 1.º ano de escolaridade, "Figuras equidecomponíveis e figuras equivalentes." (p. 7); no 2.º ano de escolaridade, "Medidas de área em unidades não convencionais." (p. 9); no 3.º ano de escolaridade, "Medições de áreas em unidades quadradas; Fórmula para a área do retângulo de lados de medida inteira." (p. 11); no 4.º ano de escolaridade, "Unidades de área do sistema métrico; Medições de áreas em unidades do sistema métrico; conversões; Unidades de medida agrárias; conversões; Determinação, numa dada unidade do sistema métrico, de áreas de retângulos com lados de medidas exprimíveis em números inteiros, numa subunidade." (p. 13). No 2.º Ciclo do Ensino Básico, e novamente conforme o disposto no Programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013), a abordagem do conteúdo área abrange: no 5.º ano de escolaridade, "Área de retângulos de lados de medida racional; Fórmulas para a área de paralelogramos e triângulos;" (p. 16); e, no 6.º ano de escolaridade, "Fórmula para o perímetro do círculo; aproximação por perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos; Fórmula para a área de polígonos regulares; Fórmula para a área do círculo; aproximação por áreas de polígonos regulares inscritos;" (p. 17).

Tendo em consideração a informação apresentada anteriormente, entende-se que, para o Projeto de Intervenção Pedagógica a conceber, desenvolver, e avaliar, de uma forma transversal à turma do 4.º ano de escolaridade e à turma do 5.º ano de escolaridade, nas quais decorreu a prática de ensino supervisionada, o tema área se constitui relevante, em primeira instância, por constituir um conteúdo programático comum aos dois anos escolaridade, de ciclos de ensino distintos - 1.º Ciclo do Ensino Básico e 2.º Ciclo do Ensino Básico. Para além disto, a partir do 3.º ano de escolaridade, é explicitamente proposta, no Programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013), uma formalização do conteúdo área, após uma exploração de caráter mais intuitivo, neste, e nos anos de escolaridade precedentes. Deste modo, a opção pelo tema área para o Projeto adquire, uma vez mais, relevância, pela necessidade expressa de se assegurar, no 4.º e no 5.º anos de escolaridade, uma compreensão conceptual consolidada em relação à área, subjacente à formalização prevista, nestes, e nos anos de escolaridade subsequentes.

A par dos fatores considerados, a relevância do tema do Projeto assenta numa plena adaptação do mesmo face às planificações anuais da turma do 4.º ano de escolaridade, bem como do 5.º ano de escolaridade. Esta articulação implicou a consideração destas orientações em ambos os contextos educativos, tendente à consecução de um Projeto articulado e adequado aos contextos da prática.

Finalmente, a relevância do tema do Projeto consubstancia-se nas dificuldades evidenciadas pelos alunos portugueses do 1.º e do 2.º Ciclos do Ensino Básico na resolução das perguntas referentes ao conteúdo área, em Provas Nacionais. A afirmação anterior sustenta-se na análise dos Relatórios Nacionais relativos ao desempenho dos alunos nas Provas de Aferição de Matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico - 4.º ano de escolaridade (GAVE, 2008a, 2009a, 2010a, 2011a, 2012a), nas Provas de Aferição de Matemática do 2.º Ciclo do Ensino Básico - 6.º ano de escolaridade (GAVE, 2008b, 2009b, 2010b, 2011b) e no Testes Intermédios de Matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico -

2.º ano de escolaridade (GAVE, 2011c, 2012b; IAVE, 2013). De salientar que cada uma das provas nacionais anteriormente enumeradas contempla, pelo menos, um item relativo ao conteúdo área. Com base nos resultados dos alunos nestes itens, os Relatórios Nacionais supracitados destacam a necessidade de: conceder, aos alunos, mais oportunidades para realizarem tarefas envolvendo os conceitos de área (GAVE, 2008b, 2009a, 2009b, 2010a, 2011b) e para analisarem e discutirem a plausibilidade das soluções obtidas nos respetivos contextos (GAVE, 2008b, 2009b, 2011b); promover o desenvolvimento de um conhecimento com compreensão do conteúdo área, e não focalizado na memorização de fórmulas sem significado para os alunos (GAVE, 2009a, 2010a, 2011b, 2011c, 2012a, 2012b; IAVE, 2013); e explorar as unidades de medida de área no contexto da realização de tarefas nas quais os alunos tenham que determinar medidas de área (GAVE, 2010a, 2011b).

Em síntese, a relevância do tema do Projeto assenta na continuidade do tema; na importância particular que reveste a exploração do conteúdo área em ambos os anos de escolaridade considerados; na sua adaptação relativamente às planificações anuais das turmas; e nas dificuldades dos alunos portugueses na resolução das perguntas referentes ao conteúdo área, em Provas Nacionais.

1.2. Objetivos e Questões de Investigação do Projeto de Intervenção Pedagógica

O Projeto de Intervenção Pedagógica, por um lado, pretendia compreender como é que a utilização de materiais manipuláveis poderia contribuir para a compreensão, pelos alunos, de tópicos relacionados com a área, e, por outro lado, objetivava caracterizar o desempenho dos alunos na estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões, entendida como essencial no desenvolvimento da noção de área (Battista *et al.*, 1998). Neste sentido, procurar-se-á responder às seguintes questões de investigação:

a) Em que medida é que a utilização do material manipulável bissemis auxilia a compreensão, pelos alunos, do conceito de equivalência de figuras e do processo de medição direta da área, e a distinção entre os conceitos de área e de perímetro?

b) Em que medida é que a utilização de materiais manipuláveis mecânicos concebidos para o efeito auxilia a compreensão, pelos alunos, das fórmulas para a área do paralelogramo e do triângulo?

c) Como é que se caracteriza o desempenho dos alunos em problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões?

1.3. Estrutura do Relatório de Estágio

O presente Relatório de Estágio, sob o ponto de vista da estrutura organizativa, encontra-se dividido em cinco capítulos essenciais.

O primeiro capítulo, *Introdução*, corresponde ao capítulo em exposição.

No segundo capítulo, *Enquadramento Teórico,* procura-se organizar um *corpus* teórico adequado às questões de investigação que norteiam o Projeto de Intervenção Pedagógica.

Na primeira secção deste capítulo, *Medida,* começa-se pela realização de uma abordagem algo genérica relativamente a este domínio da Matemática, na qual se incorporam, essencialmente, considerações sobre a ação de medir propriamente dita, caminha-se para a apresentação de dois sistemas desenhados para a aprendizagem progressiva da Medida pelos alunos, e finaliza-se com a explanação de algumas causas que podem fundamentar as dificuldades reveladas pelos alunos neste domínio. Na segunda secção, *Área*, exploram-se algumas ideias basilares inerentes à construção plena do conceito de área pelos alunos, particularmente a compreensão do atributo área, a conservação da área, as unidades de medida de área, e os procedimentos numéricos e fórmulas para a área, e, em paralelo, procuram-se elencar alguns erros e dificuldades frequentes dos alunos nestes tópicos. Na terceira secção, *Materiais Manipuláveis,* começa-se pela consideração da importância que adquirem os materiais manipuláveis quando enquadrados no âmbito do *Currículo em Espiral*, da autoria de Bruner, progride-se para o confronto das posições de diversos autores no que concerne à utilização de materiais manipuláveis no ensino-aprendizagem da Matemática, e conclui-se com uma breve referência à natureza das tarefas matemáticas que mais se adequa à construção matemática com materiais manipuláveis. Finalmente, na quarta secção, *Estruturação de Arranjos Retangulares*, apresenta-se um conjunto de trabalhos de investigação expressamente orientados para o estudo da estruturação de arranjos retangulares pelos alunos.

No terceiro capítulo, *Metodologia,* apresenta-se a metodologia adotada no desenvolvimento do Projeto de Intervenção Pedagógica, característica da sua dimensão investigativa.

Na primeira secção deste capítulo, *Opções Metodológicas,* enunciam-se os objetivos e as questões de investigação que norteiam o Projeto e expõe-se a natureza da investigação. Na segunda secção, *Participantes,* caracteriza-se a turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico e a turma do 2.º Ciclo do Ensino Básico, nas quais decorreu a prática de ensino supervisionada. Na terceira secção, *Fases do Projeto de Intervenção Pedagógica*, referem-se as diferentes fases de desenvolvimento do Projeto, particularizando-se a descrição de algumas destas fases. Na quarta secção, *Recolha de dados,* descrevem-se os instrumentos de recolha de dados aplicados. Finalmente, na quinta secção, *Análise de dados,* mencionam-se os procedimentos de análise de dados utilizados no sentido de responder às questões de investigação.

No quarto capítulo, *Análise e Discussão de Dados,* apresenta-se a análise e discussão de dados, à luz das questões de investigação que norteiam o Projeto de Intervenção Pedagógica e do enquadramento teórico que o sustenta.

Na primeira secção deste capítulo, *Desenvolvimento e Avaliação da Intervenção Pedagógica no 1.º Ciclo do Ensino Básico*, realiza-se uma análise detalhada e reflexiva da intervenção pedagógica desenvolvida na turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Na segunda secção, *Desenvolvimento e Avaliação da Intervenção Pedagógica no 2.º Ciclo do Ensino Básico*, reitera-se o procedimento anteriormente referido na turma do 2.º Ciclo do Ensino Básico. Finalmente, na terceira secção, *Estudo do desempenho dos alunos do 1.º e do 2.º Ciclos do Ensino Básico nos problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões*, efetua-se a análise e a caracterização do desempenho dos alunos das turmas do 1.º e do 2.º Ciclos do Ensino Básico em problemas envolvendo a estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões.

No quinto capítulo, *Conclusão*, apresentam-se as principais conclusões que emergiram do Projeto de Intervenção Pedagógica, tendo por referência os objetivos do Projeto e, mais explicitamente, as questões de investigação que nortearam o Projeto. Em articulação, assinalam-se algumas limitações inerentes ao Projeto, importantes na perspetivação das conclusões, propõem-se recomendações de cariz didático e, também, para futuras investigações, e tecem-se comentários reflexivos relativamente ao valor do Projeto no que concerne ao desenvolvimento profissional.

Finalmente, nas *Referências Bibliográficas*, lista-se o referencial teórico consultado e referido ao longo do Relatório e, nos *Anexos*, incluem-se elementos de consulta e de apoio que, embora não se constituindo indispensáveis à compreensão do conteúdo do Relatório, complementam a sua leitura.

CAPÍTULO II - ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo procura-se organizar um *corpus* teórico adequado às questões de investigação que norteiam o Projeto de Intervenção Pedagógica.

Na primeira secção deste capítulo, *Medida,* começa-se pela realização de uma abordagem algo genérica relativamente a este domínio da Matemática, na qual se incorporam, essencialmente, considerações sobre a ação de medir propriamente dita, caminha-se para a apresentação de dois sistemas desenhados para a aprendizagem progressiva da Medida pelos alunos, e finaliza-se com a explanação de algumas causas que podem fundamentar as dificuldades reveladas pelos alunos neste domínio. Na segunda secção, *Área*, exploram-se algumas ideias basilares inerentes à construção plena do conceito de área pelos alunos, particularmente a compreensão do atributo área, a conservação da área, as unidades de medida de área, e os procedimentos numéricos e fórmulas para a área, e, em paralelo, procuram-se elencar alguns erros e dificuldades frequentes dos alunos nestes tópicos. Na terceira secção, *Materiais Manipuláveis,* começa-se pela consideração da importância que adquirem os materiais manipuláveis quando enquadrados no âmbito do *Currículo em Espiral*, da autoria de Bruner, progride-se para o confronto das posições de diversos autores no que concerne à utilização de materiais manipuláveis no ensino-aprendizagem da Matemática, e conclui-se com uma breve referência à natureza das tarefas matemáticas que mais se adequa à construção matemática com materiais manipuláveis. Finalmente, na quarta secção, *Estruturação de Arranjos Retangulares*, apresenta-se um conjunto de trabalhos de investigação expressamente orientados para o estudo da estruturação de arranjos retangulares pelos alunos.

2.1. Medida

A Medida constitui um domínio da Matemática que apresenta uma grande aplicação e utilidade na vida quotidiana (Caraça, 1978; NCTM, 1991; Wilson & Rowland, 1993; Kordaki & Potari, 1998; Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Ponte & Serrazina, 2000; Clements & Stephan, 2004; Ralha & Gomes, 2004; Battista, 2007; Ferreira & Sousa, 2007; NCTM, 2007; Carvalho & Vieira, 2008; Cavanagh, 2008; Aires & Campos, 2011) e que realça as conexões existentes no interior da própria Matemática (Caraça, 1978; Liedtke, 1990; NCTM, 1991; Wilson & Rowland, 1993; Kordaki & Potari, 1998; Abrantes *et al.*, 1999; Clements & Stephan, 2004; Ralha & Gomes, 2004; Battista, 2007;

NCTM, 2007; Cavanagh, 2008) e entre esta e outras áreas do conhecimento (NCTM, 1991; Abrantes *et al.*, 1999; Battista, 2007; NCTM, 2007).

Segundo Wilson e Rowland (1993), muita da investigação relacionada com a aprendizagem da Medida é baseada no trabalho pioneiro de Piaget e dos seus colaboradores.

Piaget, Inhelder e Szeminska (1960) distinguiram três níveis de construção do espaço euclidiano. O primeiro nível é representado pelas operações qualitativas envolvidas em vários tipos de conservação, a maioria dos quais são elaborados no decurso do subestádio IIIA[1] (dos sete aos nove anos), particularmente a conservação da distância e do comprimento, a conservação da área e do volume interior, a conservação de congruências no processo de comparações transitivas, etc. O segundo nível pode designar-se por concretização das operações métricas simples, e ocorre no subestádio IIIB (dos nove aos onze anos), com a medição de comprimentos em uma, duas e três dimensões, a construção dos sistemas de coordenadas métricos, e o início da medição de ângulos e de áreas. O nível final é alcançado no estádio IV (a partir dos onze anos), correspondente às operações formais, onde se encontra a multiplicação matemática a começar a ser utilizada para coordenar os resultados da multiplicação lógica e das medições simples e, a par disto, é concretizada a conservação do volume.

De acordo com Piaget *et al.* (1960), medir é retirar, de um todo, um elemento, considerado como unidade, e transpor esta unidade para o restante todo: medir é, portanto, uma síntese da subdivisão e da mudança de posição. Embora sob este ponto de vista, este processo pareça claro e óbvio, ele é, efetivamente, mais complexo. A ideia da mudança de posição é duplamente difícil para as crianças mais novas. Em primeiro lugar, o conceito de medição implica a representação de mudanças de posição e a habilidade para reconstruir uma sequência de ações, as quais surgem mais tarde do que a capacidade para a efetuar corretamente. Em segundo lugar, ser capaz de imaginar movimentos não é suficiente; é necessário ligá-los a pontos de referência. De facto, a representação de qualquer sequência de movimentos tem implícito algum sistema de referência. Uma compreensão da medição exige que vários pontos de referência estejam ligados num todo sistemático, o que implica eixos coordenados. Ora, isto é especialmente verdade em medições numa área ou num espaço, onde é necessária a consideração de duas ou mais medidas simultaneamente, e em medições de ângulos.

Para Liedtke (1990), a Medida inclui uma variedade de ideias básicas, que já são óbvias para os adultos, mas que precisam de ser intencionalmente desenvolvidas e ensinadas às crianças. Elas

[1] Piaget propôs uma teoria de desenvolvimento cognitivo na qual definiu quatro estádios (I - Estádio sensório-motor; II - Estádio pré-operatório; III - Estádio das operações concretas; IV - Estádio das operações formais) (Sprinthall & Sprinthal, 1993). Os estádios apresentados neste segmento de texto correspondem aos estádios então mencionados, compreendendo, em alguns casos, subestádios.

encontram e aplicam estas ideias básicas de uma forma informal e intuitiva, com as generalizações ou as verbalizações a ocorrerem somente em níveis mais tardios. Na visão do investigador, as ideias básicas com importância para o comprimento podem ser generalizadas para outros tópicos de Medida. Estas ideias são: um número é atribuído por contagem para descrever o comprimento de um segmento (em vez de se contar repetidamente, desenvolvem-se e leem-se escalas ou instrumentos calibrados que permitem efetuar essa contagem); a um segmento ou a um objeto linear pode ser atribuído o comprimento um (isto torna possível o desenho de um instrumento de medida para o comprimento); a aditividade permite que o comprimento seja tratado como um número (desta forma, podem-se adicionar segmentos tal como se adicionam números); a repetição, ou seja, a aplicação repetida de uma unidade de medida, permite utilizar uma reta numérica ou uma régua para encontrar a distância entre dois pontos num segmento; a transitividade possibilita comparar segmentos. Como reporta o autor em referência, a investigação mostra que estas ideias não são compreendidas pelas crianças mais novas. Elas precisam de começar por utilizar unidades não convencionais para desenvolverem noções intuitivas, incluindo a ideia básica de unidade de medida. Liedtke (1990) menciona, ainda, que Hiebert entende que, independentemente do desempenho das crianças em tarefas de conservação e transitividade, muitos alunos do 1.º ano de escolaridade encontram-se preparados para aprenderem diversos conceitos de Medida. Já Wilson e Osborne, também nas palavras de Liedtke (1990), sugerem que os professores oiçam e observem os alunos enquanto trabalham em tarefas de medição para, dessa forma, ajustarem a suas expectativas, estratégias pedagógicas e procedimentos de avaliação, já que a maior parte da investigação acerca de como as crianças medem e raciocinam em relação à Medida não especifica como é que o professor pode planear a instrução neste domínio, focando-se mais naquilo que as crianças não podem fazer e não podem compreender.

Wilson e Rowland (1993) simplificam a enunciação das ações subjacentes à medição, não afastando, contudo, a complexidade inerente às demais. Veja-se:

> *Despite the complexity of measurement concepts, the basic idea of measure is beautiful in its simplicity. A continuous property such as area, length, or density must be subdivided into discrete parts so they can be counted. First you choose a unit. Second, you repeat the unit covering the object. This process of iterating the unit divides the object into equal subdivisions with perhaps a fraction of a unit left over. Finally, the units are counted to produce a measure of the object.* (p. 176)

Portanto, como nos diz Caraça (1978), no problema da Medida, existem três fases e três aspetos distintos, designadamente: a escolha da unidade, a comparação com a unidade, e a expressão do resultado dessa comparação por um número. Sob o ponto de vista da interdependência dos aspetos enunciados, esclarece o autor, o primeiro e o terceiro aspetos do problema estão intimamente relacionados e cada um deles condiciona o outro. “A escolha da unidade faz-se sempre em obediência a considerações de *carácter prático*, de *comodidade*, de *economia*.” (p. 30). Por exemplo, seria tão incómodo considerar como unidade para o comprimento de tecidos a légua, como para distâncias geográficas o milímetro, declara Caraça (1978). Ora, a exigência da *comodidade* opera-se tendo em vista que o resultado da medição “não dê números maus de enunciar e dos quais se não faça, portanto, uma ideia clara.” (p. 31). Neste sentido, o autor formula, e assume como válidas, duas reflexões importantes no âmbito da medição: “Em princípio, a unidade pode escolher-se como se quiser, mas, na prática, o número que há de vir a obter-se como resultado da medição condiciona a escolha da unidade.” (p. 31) e “Uma mesma grandeza tem, portanto, tantas *medidas* quantas as *unidades* com que a medição se faça.” (p. 31).

Ralha e Gomes (2004) salvaguardam, todavia, que existe uma medição efetiva, não só quando se comparam diretamente duas grandezas da mesma natureza, como também quando esta comparação é realizada indiretamente. A respeito desta matéria, Carvalho e Vieira (2008) destacam que, nas práticas do dia a dia, a contagem de unidades de medida (subjacente à comparação direta de duas grandezas) acaba por ser pouco utilizada, porque, em algumas situações, os instrumentos de medida efetuam essa contagem, e, em outras circunstâncias, os resultados são obtidos por cálculo, como é o caso da medição de áreas e de volumes. Ora, tal como esclarecem os autores em alusão, os factos anteriormente explanados não significam, no entanto, que seja impossível medir diretamente estas grandezas.

Neste contínuo de considerações, Battista (2007) cogita que a compreensão da Medida ao nível escolar inclui a integração de conhecimentos de natureza conceptual e procedimental. Ainda assim, o NCTM (2007) adverte para o facto de que, independentemente do nível de ensino, os alunos deverão possuir uma multiplicidade de experiências informais na compreensão dos atributos, antes de utilizarem instrumentos para os medirem ou de recorrerem a fórmulas para os calcularem.

Wilson e Rowland (1993) escreveram: *“Students need to construct measurement concepts for themselves. Being actively involved in measuring helps students to construct ideas”* (p. 175). Nesta linha de pensamento, *“Learning to measure is not something that can be done through listening or paper and pencil activities.”* (pp. 184-185). Ora, as autoras propõem um modelo para a aprendizagem da Medida, que inclui cinco passos sequenciais, a saber: identificar a propriedade a ser medida; fazer comparações; estabelecer uma unidade e um procedimento apropriados para medir; utilizar unidades de medida convencionais; e, por fim, criar fórmulas para ajudarem na contagem de unidades. De notar que, do segundo passo para o quarto passo, as capacidades de estimação devem ser desenvolvidas paralelamente. Os alunos devem seguir os cinco passos suprarreferidos para a aprendizagem do comprimento, da área, do volume, ou de qualquer outro atributo mensurável. Nos primeiros níveis de ensino, o enfoque deve recair sobre os dois primeiros passos, sendo que, nos restantes, é necessário rever e proceder em função do nível dos alunos.

Van de Walle (1998) sugere, também, uma sequência para a aprendizagem da Medida. Com efeito, o autor declara que, para o ensino-aprendizagem de cada atributo mensurável, pode-se identificar um conjunto de três tipos de atividades a efetivar, cada um dos quais remete para um certo conhecimento a desenvolver. Em primeiro lugar, fazer comparações, as quais têm como propósito a compreensão do atributo a ser medido. De facto, *"When students compare objects on the basis of some measurable attribute, that attribute becomes the focus of the activity."* (p. 312). Os alunos devem começar por realizar comparações diretas e só depois devem concretizar comparações indiretas. Em segundo lugar, utilizar modelos concretos de unidades de medida, os quais têm como finalidade a compreensão de como o preenchimento, a cobertura, a correspondência, ou então, a comparação de um atributo com as unidades de medida produz aquilo que se designa por medição. Os alunos devem começar por utilizar unidades não convencionais e só depois devem usar os sistemas de medição convencionais. Em terceiro lugar, construir e utilizar instrumentos de medida, e usá-los conjuntamente com modelos concretos de unidades de medida, com o objetivo de promover a compreensão do modo como, comparativamente, cada um deles funciona. Na verdade, *"It is essential that the measurement with actual unit models be compared with the measurement using an instrument. Without this comparison, students may not understand that these two methods are really two means to the same end."* (p. 313). Os alunos devem começar por construir instrumentos de medida e só depois devem manipular instrumentos de medida convencionais. O autor em questão manifesta, ainda, uma atenção particular relativamente à estimação, considerando que quase todas as atividades supracitadas devem incluir esta componente.

A investigação acerca do conhecimento das crianças sobre a Medida revela que muitas das dificuldades dos alunos podem ser atribuídas a um ou mais problemas dos que aqui se apresentam: falta de compreensão sobre as propriedades a serem medidas; perceções e representações pouco desenvolvidas; falta de compreensão sobre a conservação e a transitividade; falta de compreensão acerca das unidades de medida; e excessiva ênfase nas pistas numéricas (Wilson & Rowland, 1993).

Battista (2007) alega que fortemente implicados nos baixos desempenhos dos alunos em Medida encontram-se os resultados de investigações que mostram que, em muitos deles - talvez a maioria -, subsiste uma rutura entre o raciocínio espacial e o raciocínio numérico baseado na medição (Barrett; Battista; Clements). Isto é, *"many students do not properly maintain the connection between numerical measurements and the process of unit-measure iteration."* (Battista, 2007, p. 892). De acordo com o investigador anteriormente citado, devido à introdução prematura de procedimentos numéricos no ensino-aprendizagem da Medida geométrica, os alunos têm poucas oportunidades para refletirem sobre a adequação dos procedimentos numéricos que aplicam. Têm, também, oportunidades insuficientes para desenvolverem capacidades de estruturação espacial de arranjos de unidades de medida. Em suma, a investigação indica que o raciocínio geométrico de muitos alunos é superficial, trocando uma compreensão plena por procedimentos numéricos insuficientemente compreendidos.

Acima de tudo, urge tomar consciência, com fundamento nas palavras de Battista (2007), de que, embora as dificuldades dos alunos em Medida sejam alarmantes, porque a Medida é essencial para a maioria das aplicações da Geometria no mundo real, estas dificuldades representam, apenas, *"the tip of a huge learning-difficulty iceberg"* (p. 902). Na verdade, em virtude da infiltração da Medida nos contextos geométricos e gráficos, compreensões insuficientes no domínio da Medida devem ser a maior causa dos problemas de aprendizagem de múltiplos conceitos matemáticos mais avançados.

2.2. Área

No entendimento de Battista (2007), uma compreensão genuína da medição da área implica compreender diferentes aspetos, a saber: o que é o atributo área e como é que este se comporta (isto é, conservá-lo quando ele é movido e decomposto/recomposto); como é que a área é medida através da repetição de unidades de área; como é que os procedimentos numéricos podem ser utilizados para determinar a área para conjuntos de formas geométricas específicas; e como é que esses procedimentos numéricos são representados com palavras e algebricamente.

No que refere à compreensão do próprio atributo área, Wilson e Rowland (1993), fazendo uma resenha de investigação vária, explanam que, na comparação da área de retângulos, alunos com cinco e seis anos tenderam a focalizar-se no comprimento unidimensional dos retângulos, em vez de no espaço bidimensional que se encontrava no interior dos mesmos. Assim, por exemplo, os alunos eram capazes de inferir que um retângulo tinha maior área do que outro se fosse mais comprido do que este último, o que pode não ser verdade. Neste caso, os alunos parecem, efetivamente, ter falta de compreensão da propriedade a ser medida, a área. Alguns alunos, para efetuarem a comparação da área de dois retângulos, compararam a soma do comprimento e da largura dos retângulos, e outros alunos compararam o comprimento da diagonal dos retângulos. Ora, as estratégias anteriores, ainda que não funcionem em todos os casos, são úteis para muitos casos comuns. Neste sentido, as estratégias limitadas dos alunos podem ser o resultado de um conjunto restrito de retângulos com os quais eles têm oportunidade de contactar. Posto isto, torna-se prudente os professores variarem os exemplos de retângulos e de outros polígonos que apresentam aos alunos. Por fim, distinguir entre área e perímetro continua a ser difícil para os alunos. Neste âmbito, alunos do 3.º ano de escolaridade evidenciaram pouca capacidade ou conhecimento acerca da área e do perímetro. Ora, esta falta de compreensão continua, alegadamente, a causar problemas nos níveis de ensino superiores. Desta forma, os fracos desempenhos dos alunos nos anos de escolaridade mais elevados sugerem a necessidade de estabelecer uma base conceptual nos anos de escolaridade elementares. É preciso focar nas propriedades de área e de perímetro, nas unidades apropriadas, e nas estratégias de contagem. As fórmulas devem advir do desenvolvimento conceptual e não devem ser enfatizadas até ao 4.º ano de escolaridade. Tishin (1979) averiguou que os alunos experimentaram, significativamente, maiores dificuldades no cálculo da área de retângulos quando as figuras geométricas foram apresentadas em desenho do que quando foram fornecidas diretamente as medidas das figuras. Tal como menciona o investigador, *"in the first case the pupils approach the solution more creatively, and in the second case more mechanically, lacking a sufficient number of exercises."* (p. 47). O mesmo autor verificou que determinados alunos, em vez calcularem a área de retângulos, calcularam o perímetro destes. A confusão entre os conceitos de área e de perímetro corresponde, também, a uma das três ideias erróneas dos alunos acerca da área de retângulos, triângulos, e paralelogramos, assinaladas nos resultados do estudo de Cavanagh (2008). Conforme Battista (2007), muitos estudos têm indicado que os alunos apresentam muitas dificuldades em relacionar e em separar os conceitos de comprimento, área, e volume.

No que concerne à conservação da área, Clements e Stephan (2004) asseveram que esta constitui uma ideia basilar e que é, fortemente, negligenciada ao nível da instrução.

Piaget *et al.* (1960) estudaram a conservação da área. Para o efeito, utilizaram duas cartolinas verdes exatamente iguais, que apresentaram aos entrevistados como representando dois campos de pastagem. A partir destas, os investigadores desenvolveram um conjunto de ações, que a seguir se apresentam sumariadas: colocaram duas vacas de madeira ao lado de cada uma das cartolinas, informando que cada uma delas tinha aquele espaço verde para pastar; questionaram se alguma das vacas teria mais espaço verde para pastar; trouxeram dois homens de madeira, que representavam dois agricultores, e colocaram-nos, também, ao lado de cada uma das cartolinas; informaram que um dos agricultores decidiu construir uma casa no seu campo e colocaram, então, uma casa de madeira na respetiva cartolina; questionaram se alguma das vacas teria mais espaço verde para pastar; informaram que o outro agricultor decidiu, também, construir uma casa no seu campo, que era exatamente igual à anterior, e colocaram, então, uma casa de madeira na respetiva cartolina, num local correspondente ao da casa já colocada na outra cartolina; questionaram se alguma das vacas teria mais espaço verde para pastar; a partir daqui, foram acrescentando, progressivamente, mais casas iguais em cada uma das cartolinas, colocando-as todas juntas numa cartolina e dispersando-as na outra cartolina; questionaram, gradualmente, se alguma das vacas teria mais espaço verde para pastar. Os investigadores encontraram quatro níveis. No nível I (até aos quatro anos e meio), não é possível interessar as crianças e, portanto, prosseguir a entrevista. No nível IIA (até aos cinco anos e meio ou seis anos), as crianças mostram-se claramente interessadas, mas recusam-se a admitir, logo desde o primeiro par de casas colocado, que as áreas remanescentes eram iguais. No nível IIB (até aos sete anos ou sete anos e meio), há um conjunto completo de respostas intermédias: até um número intermédio de casas colocadas, as crianças admitem que as áreas remanescentes são iguais; a partir desse número, as configurações percetuais são também diferentes. No nível IIIA (desde os sete anos aos sete anos e meio), as crianças reconhecem que as áreas remanescentes são sempre iguais.

Numa outra investigação, que surge como um complemento à anteriormente apresentada, Piaget *et al.* (1960) utilizaram duas técnicas complementares. No primeiro método, os investigadores apresentaram uma área composta por várias secções separadas e modificaram a organização destas partes constituintes; por fim, questionaram se o todo permaneceria constante. No segundo método, os investigadores apresentaram dois retângulos, reconhecidos como congruentes; cortaram uma parte de um dos retângulos e moveram-na para outra parte da figura; cortaram o outro retângulo a meio segundo uma das diagonais e juntaram as duas partes de modo a formarem um triângulo; finalmente, questionaram se as duas figuras seriam do mesmo tamanho. Os investigadores encontraram fortes correspondências com os quatro níveis dissecados precedentemente, porém, verificaram que, no nível IIIA, a conservação da área está limitada à área incluída num dado perímetro, pelo que não se estende à área exterior (complementar), e concluíram que, só no nível IIIB (desde os nove anos aos onze anos), a conservação da área é generalizada para cobrir áreas complementares.

Kathleen Hart desenvolveu, em 1984, algumas experiências de Medida com crianças entre os 12 e os 15 anos. Os resultados que obteve foram consistentes com os de Piaget para a maioria dos seus alunos, uma vez que 72% deles conservaram tanto o comprimento como a área. Todavia, 70%

dos alunos que não conservaram o comprimento conseguiram conservar a área e 70% dos alunos que não conseguiram conservar a área, conseguiram conservar o comprimento. A investigadora verificou, ainda, que 29% dos alunos que conseguiam conservar o volume, não conseguiam conservar o comprimento e a largura (Wilson & Rowland, 1993).

No que respeita às unidades de medida, Wilson e Rowland (1993) notam, num sentido lato, que os alunos, para compreenderem o papel das unidades de medida, têm que perceber qual é o atributo que está a ser medido. Com efeito, se eles estão a medir a área, necessitam de uma unidade de medida bidimensional, como um quadrado, um triângulo ou um paralelogramo, para preencherem a superfície. Quer dizer, a unidade de medida deve escolher-se "de entre um atributo da mesma espécie daquele que pretendemos medir" (Ralha & Gomes, 2004, p. 380). Segundo o NCTM (2007), "Compreender que são necessárias unidades distintas para medir atributos mensuráveis (grandezas) diferentes é, por vezes, difícil para os alunos mais novos. Aprender a selecionar a unidade apropriada constitui o cerne da compreensão da medição." (p. 49). Focalizando-se nas unidades de medida de área, Owens e Outhred (2006) declaram: *"The move from one-dimensional units involves additional complexity, so not surprisingly, research indicates that students have poor understanding of units of area and their spatial characteristics."* (p. 101). A este respeito, Tishin (1979) assinalou erros na forma de expressão de áreas por alunos, que utilizaram unidades de medida lineares para expressarem a área de um retângulo. De acordo com o investigador, *"The pupils still did not differentiate between linear and square measures. It was all the same to them in whatever measures one expressed the area of a rectangle, as long as the calculations were correct."* (pp. 36-37). Com efeito, os alunos continuavam, no dizer do autor, a não compreender a essência da medição de áreas. O mesmo autor notou a ocorrência dos mesmos erros na expressão da área de quadrados. No estudo de Kordaki e Potari (1998), algumas crianças, nas suas tentativas para apresentarem respostas numéricas para as dimensões das áreas que tinham pensado, utilizaram unidades de comprimento convencionais. Mais particularmente, elas, para descreverem áreas, pareceram aplicar unidades lineares no sentido de medirem, apenas, uma dimensão de um retângulo. No ponto de vista das investigadoras, *"This approach is probably influenced by the fact that areas at school are usually rectangles whose area measurement is defined by the multiplication of their dimensions."* (p. 309). A propósito do assunto em discussão, Dean (2014) construiu um problema[2], que, na sua essência, pretendia a determinação do número de cartões, do mesmo tamanho do que um molde de cartão dado, que é possível fazer a partir

[2] Para uma compreensão mais fundamentada, leia-se o *"Problem scenario: Pretend you are a student in Ms. Smart's class and are making save-the-date cards from poster board to send home to parents for family math night. The cards must be the size of the notecard you are given. Your job is to determine how many cards can be made from a sheet of poster board."* (Dean, 2014, p. 408).

de uma cartolina. Conforme a autora, em virtude do facto de os alunos estarem a cobrir a área de uma cartolina com uma área (o molde de cartão), eles, em vez de utilizarem medidas lineares, eram impelidos a pensarem sobre as unidades envolvidas na área. Ora, este pensamento poderia, no entendimento da mesma, ser apoiado por meio da colocação de questões acerca da orientação do molde de cartão, e, essencialmente, por meio de uma questão-desafio, curiosa, em que os alunos deveriam refletir sobre o facto de a unidade de medida ser o "cartão" e não o "cartão^2". Wilson e Rowland (1993) notam que, a par das considerações já apresentadas, os alunos devem perceber de que forma é que a unidade de medida selecionada influencia o número de unidades. Suportando-se em Carpenter, Hiebert, e Hart, as autoras em questão evidenciam que compreender a relação inversa entre o tamanho da unidade e o número de unidades necessário é difícil para os alunos. Em acordo, Aires e Campos (2011) realçam que compreender a "proporcionalidade inversa existente entre unidade de medida e valor da grandeza" (p. 62) constitui uma dificuldade acrescida para os alunos.

No que apela aos procedimentos numéricos e fórmulas, e uma vez já densamente clarificada a ideia de que devem suceder-se a um conhecimento conceptual sólido dos alunos relativamente ao atributo em questão, urge destacar que "as fórmulas e os procedimentos para determinar medidas devem surgir da exploração de situações concretas." (Abrantes *et al.*, 1999, p. 77). Para o NCTM (1991), "Através das suas explorações, os alunos devem desenvolver procedimentos multiplicativos e fórmulas para determinação de medidas. O currículo deve incidir no desenvolvimento da compreensão, e não na memorização rotineira de fórmulas." (pp. 138-139). A estas considerações, o NCTM (2007) acresce: "Mesmo aquelas fórmulas, cuja justificação rigorosa, para os alunos (...), se revela difícil (...), devem ser abordadas de modo que os alunos possam desenvolver um sentido intuitivo da sua plausibilidade." (p. 286). Em relação a esta matéria, Battista (2007) escreve que muitos alunos que são capazes de aplicar corretamente a fórmula para a área do retângulo na resolução de problemas convencionais não são capazes, por um lado, de compreender por que é que as fórmulas funcionam e, por outro lado, de aplicá-las apropriadamente em problemas não convencionais. O autor esclarece:

> *In general, students working on these types of nonstandard measurement problems must perform two critical processes: (a) they must construct a proper spatial structuring of the situation; (b) they must coordinate their spatial structuring with an appropriate numerical scheme. Too often, students skip the first process and proceed directly to the second. Also, even when students recognize that they must perform the first process they often have difficulty doing so.* (p. 892)

Tishin (1979) verificou que alguns alunos, na determinação da área de um retângulo, mediram somente um dos seus lados, considerando-o como um quadrado e aplicando, consequentemente, a fórmula para a área desta última figura. Nos resultados do estudo de Cavanagh (2008), uma das três ideias erróneas dos alunos, visível no cálculo da área de triângulos retângulos, mas, especialmente, de paralelogramos, é assim apresentada: *"the students' tendency to refer to the slant height of a shape when the perpendicular height should be properly used to calculate its area."* (p. 56). Segundo o autor, os alunos simplesmente não reconheceram a necessidade de garantirem que a altura perpendicular, em particular do paralelogramo, fosse empregue, e o facto de somente uma minoria de alunos ter conseguido, subsequentemente, explicar como é que a área desta figura era precisamente a mesma do que a área do retângulo constituiu mais uma evidência desta ideia incorreta manifestada pelos alunos.

Perante a enunciação deste conjunto vasto de ideias em torno da área, fica visível, acima de tudo, *"the complexity of the concept of area and its measurement."* (Kordaki & Potari, 1998, p. 314).

2.3. Materiais Manipuláveis

De acordo com Godino, Alfonso, Rodríguez, Romero e Vázquez (1991), as características evolutivas do funcionamento cognitivo, a ideia de que a aprendizagem corresponde a um processo gradual de reorganização e readaptação da informação para formas progressivamente mais complexas, entrelaçada com a necessidade de preparar cognitivamente a aprendizagem, enformam o âmago do *Currículo em Espiral,* cuja génesis remete para Bruner.

Bruner (2011) conjeturou o *Currículo em Espiral* baseando-se na premissa de que "qualquer disciplina poderá ser eficazmente ensinada numa qualquer forma intelectualmente honesta a crianças de qualquer estádio de desenvolvimento." (p. 53). Segundo o autor, a investigação no âmbito do desenvolvimento intelectual das crianças revela que, em cada estádio de desenvolvimento, elas possuem um modo característico de observar o mundo e de o apreender. Neste sentido, o autor entende que "A tarefa de ensinar uma disciplina a um aluno de determinada idade consiste em representar a estrutura dessa disciplina nos termos em que a criança vê as coisas." (p. 53). Com efeito, *"en el Currículum en Espiral, la tarea del profesor es trasladar las ideas al lenguaje que es compatible con las capacidades y nivel de razonamiento infantil."* (Godino *et al.*, 1991, p. 89).

Segundo Bruner (1988), podem distinguir-se três métodos de representação[3], a designar: *motora* - *"enactiva"* (p. 47) -, *icónica e simbólica.* Para o autor, estes métodos de representação desenvolvem-se na mesma ordem em que foram enunciados e cada um depende daquele que o antecede. A

[3] Bruner (1988) concebe a representação como o produto final de um sistema de codificação e processamento das experiências do meio. Segundo o autor, *"Este problema no debe interpretarse inadecuadamente como una simple cuestión de memoria. No olvidemos que lo esencial de la memoria no es el almacenamiento de la experiencia pasada, sino la recuperación de lo que sea relevante en una forma utilizable. Esto depende del modo en que haya sido codificada y procesada dicha experiencia para que resulte efectivamente relevante y utilizable cuando se necesite en el presente.*" (p. 47).

representação motora corresponde ao modo de representar acontecimentos passados através de respostas motoras apropriadas (Bruner, 1988). Este método de representação é necessário às crianças que compreendem melhor as coisas em termos de ações, pelo que é importante que as mensagens do professor entrem, de algum modo, em contacto com os seus músculos (Sprinthall & Sprinthal, 1993). A *representação icónica* codifica eventos através da organização seletiva de perceções e imagens, e através das estruturas espaciais, temporais e qualitativas do campo percetivo e das suas imagens processadas (Bruner, 1988). Neste sentido, este método de representação *"takes us a step away from the concrete and physical to the realm of mental imagery."* (Resnick & Ford, 1981, p. 112). Finalmente, a *representação simbólica* pauta-se pela utilização de um sistema simbólico, que representa objetos e acontecimentos por meio de características formais, entre as quais o distanciamento e a arbitrariedade (Bruner, 1988). De facto, tal como esclarecem Resnick e Ford (1981), os símbolos são palavras ou marcas que representam alguma coisa, mas que não têm semelhanças com esta última, isto é, são completamente abstratos, correspondendo a convenções inventadas pelas pessoas e cujo significado é aceite por elas. Este método de representação é, claramente, permitido pelo aparecimento e utilização da linguagem (Resnick & Ford, 1981; Bruner, 1988; Sprinthall & Sprinthal, 1993).

Com um sentido de transferibilidade do trabalho desenvolvimental de Bruner para o processo de ensino-aprendizagem na sala de aula, Resnick e Ford (1981) declaram: *"For instruction, then, the key seemed to be to present concepts in ways that would respond directly to the hypothesized modes of representation."* (p. 113). A propósito, Bruner (2011) argumenta que "Para o ensino de conceitos básicos, é muito importante que a criança seja ajudada a passar progressivamente do pensamento concreto para outro mais conceptualmente adequado." (p. 57). Ora, tendo presente que "Nos primeiros níveis de aprendizagem, (...) o concreto refere-se de um modo geral ao que é manipulável." (Palhares & Gomes, 2006, p. 11), então, o uso de materiais manipuláveis adquire, nos respetivos anos de escolaridade, importância, "como meio facilitador de uma aprendizagem significativa de diversos conceitos e relações matemáticas." (Oliveira, 2008, p. 25). No fulcro desta consideração reside, claramente, a ideia de Bruner (2011) de que "é inútil tentar apresentar explicações formais baseadas numa lógica distante do modo de pensar da criança e cujas implicações ela não alcança." (p. 57).

No que concerne aos materiais manipuláveis utilizados na sala de aula de Matemática, Szendrei (1996) distingue os *materiais comuns,* que correspondem a ferramentas e artefactos vulgarmente utilizados na vida fora da escola, e os *materiais educativos,* que compreendem materiais artificiais expressamente concebidos para propósitos educativos.

De acordo com Szendrei (1996), as filosofias educativas diferem umas das outras relativamente à sua posição, favorável ou desfavorável, face ao uso de materiais manipuláveis na sala de aula de Matemática. Com efeito, existem, por um lado, sistemas nos quais a Matemática é considerada uma disciplina que apenas necessita de quadro e giz, papel e lápis, régua, compasso, mesa, e talvez calculadora, como materiais. Em outros sistemas, são consideradas importantes, na primeira infância, algumas coisas coloridas para manipular, contudo, em idades mais tardias (a partir dos 10 anos), entende-se que tudo pode ser discutido na ausência da utilização de *materiais comuns* ou de *materiais educativos*. Por outro lado, muitos educadores e professores acreditam que a utilização de materiais manipuláveis na aprendizagem e construção da Matemática continua a ser uma questão essencial, independentemente da idade do aluno. Na perspetiva da autora, existem alguns medos comuns relativamente ao uso de *materiais comuns*, e especialmente de *materiais educativos* na sala de aula, designadamente: *"how teachers can learn the proper use of the materials; whether the learning time invested is ever regained; whether any transfer effect exists and the knowledge gained through the use of the materials will be effective in real life situations"* (pp. 423-424).

Becker e Selter (1996) referem que, nas últimas décadas, a investigação em Matemática tem demonstrado duas propriedades antagónicas do material didático, em que se incluem, por exemplo, os materiais manipuláveis. Por um lado, os autores, baseando-se na posição de Lorenz, declaram que o material didático pode auxiliar a aprendizagem dos alunos, no sentido em que as representações externas de conceitos e de operações matemáticas permitidas pelo material ajudam os alunos a desenvolverem as suas representações internas. Embora fazendo referência, também, a vários professores e pedagogos que compreenderam o potencial da utilização de material didático no processo de ensino-aprendizagem (Comenius; Pestalozzi; Froebel), os autores acabam por referir que as suas sugestões práticas parecem muito próximas do empiricismo: *"Teaching aids serve as a means by which knowledge is transmitted from the outside world into the pupil's mind."* (p. 519). Por outro lado, os autores, suportando-se em algumas interpretações do trabalho de Piaget feitas por Schmidt e Weiser, afirmam que o material didático pode impedir a aprendizagem, uma vez que tais instrumentos não falam por si próprios; em particular, os significados pretendidos têm que ser construídos pelos alunos. Desta forma, afirmam Becker e Selter (1996), o material didático pode representar uma fonte de dificuldade para a aprendizagem dos alunos, no sentido em que as suas construções podem não estar próximas daquelas que são previstas pelos professores. É nesta ordem de ideias que os autores comentam: *"It sometimes seems necessary that the mathematics to be learned must be understood as a prerequisite to understand the teaching aids and the way they are to be used."* (p. 519).

Para Campbell e Carey (1992), enquanto alguns investigadores (Cobb; Wood; Yackel; Nicholls; Wheatley; Trigatti; Perlwitz; Fennema; Carpenter; Peterson) usam os materiais manipuláveis, fazendo-o tendo em consideração a adequação do material ao desenvolvimento do pensamento das crianças e o potencial do material para auxiliar a comunicação do seu significado, em congruência com Fischbein, outros investigadores (Kamii; Joseph) opõem-se à sua utilização, suportando-se na ideia de que as crianças não abstraem os conceitos das referências concretas, nem incorporam os conceitos a partir do ambiente externo, físico. Na visão de Campbell e Carey (1992), se os materiais manipuláveis são utilizados no decurso do ensino-aprendizagem, há um cuidado a ter acerca do que os alunos estão, na realidade, a apreender dos mesmos. A este respeito, as investigadoras convocam Ross, que sugere que as concretizações, corporizadas nos materiais, apresentam as suas limitações, e que estes últimos podem ser manipulados, com sucesso, mas sem significado. Ou seja, as crianças podem apreender as regras e os procedimentos associados a um dado material sem estabelecerem a ligação entre esse material e o conceito que o mesmo corporiza. Deste modo, a menos que as crianças comuniquem o seu pensamento, não se torna claro aquilo que elas compreenderam sobre uma qualquer questão envolvendo um material ou que conceito matemático é que elas construíram a partir do mesmo.

Em conformidade com Resnick e Ford (1981), tal como demonstraram as experiências de Piaget, as crianças são capazes de pensar operacionalmente somente em relação a materiais e a situações presentes. Elas necessitam de respostas do ambiente físico na forma de representações concretas dos conceitos. Contudo, o sistema educativo depende, muitas vezes, quase exclusivamente da verbalização de ideias, tanto no que concerne ao ensino-aprendizagem, como à avaliação. Segundo Piaget, a verbalização não garante compreensão, nem a compreensão depende da verbalização. Sendo este o caso, a instrução num modo puramente verbal estará compelida ao fracasso, particularmente quando novos conceitos, que implicam a reorganização das estruturas de pensamento, são ensinados.

Whitin e Whitin (2014), em decurso de uma experiência pedagógica na qual emparelharam representações numéricas e geométricas, materializadas na utilização de quadrados sucessivamente maiores, para a exploração de padrões e de relações envolvendo área, perímetro e números pares e ímpares, concluíram, por um lado, que as representações matemáticas oferecem uma *"key avenue"* (p. 218) para a compreensão de conceitos e relações matemáticas e, por outro lado, que as crianças comunicam, por escrito, mais facilmente as suas descobertas quando têm referências concretas. Neste sentido, uma forma de representação (concreta) suporta o desenvolvimento de outra (escrita).

O fundamento da abordagem de Dienes relativamente à instrução matemática corresponde à utilização de materiais concretos e jogos, de acordo com sequências de aprendizagem cuidadosamente estruturadas (Resnick & Ford, 1981). Dienes (1977a) argumenta que a compreensão matemática universal é tangível e que o meio de alcançá-la é uma vasta quantidade de material didático, não para servir como auxílio em demonstrações feitas pelo professor, mas como instrumento de investigação e descoberta a proporcionar aos próprios alunos. Esta consideração implica, segundo o autor, uma modalidade de ensino-aprendizagem em que "A actividade investigadora das crianças, isoladas ou integradas em pequenos grupos, prevalece" (Dienes, 1977a, p. 9). Conforme Dienes (1977b), "os conceitos não se ensinam - tudo o que se pode fazer é criar, apresentar as situações e as ocorrências que ajudarão as crianças a formá-los." (p. 1). De facto, tal como elucidam Resnick e Ford (1981), para Dienes, as crianças são, por natureza, essencialmente construtivistas e não analíticas, ou seja, constroem uma imagem da realidade a partir de experiências que têm com os objetos do mundo, num processo que depende de uma exploração ativa por parte das mesmas; no entanto, uma vez que as relações matemáticas não são óbvias no ambiente em que as crianças vivem no dia a dia, Dienes propôs a construção de materiais que corporizassem essas relações, de forma a transferi-las para a esfera da experiência concreta. Com efeito, o autor valoriza a utilização de *materiais educativos.*

Em contraste, um exemplo de uma posição radical contra os *materiais educativos* é dirigida por Paolo Boero, que elenca um conjunto de argumentos interessantes para sustentar a sua opinião, a saber: os conceitos que são desenvolvidos pela utilização de *materiais comuns* permitem, tanto uma ressonância positiva com a experiência fora da escola, como uma transferência imediata para a utilização da Matemática em situações da vida real; os *materiais comuns* foram selecionados através da evolução cultural da humanidade, combinando a construção histórica dos conceitos e dos procedimentos matemáticos, e, como tal, os professores podem explorar estes materiais enquanto mediadores eficientes entre os constrangimentos derivados da realidade e os processos mentais relativos à Matemática; o tempo necessário para ensinar os alunos a usar apropriadamente os *materiais educativos* é desperdiçado, ao passo que, com os *materiais comuns,* é necessário muito menos tempo, devido à ressonância positiva com a experiência fora da escola (e, em todo o caso, os alunos devem aprender a usá-los); e, por fim, os professores podem usar incorretamente os *materiais educativos*, não havendo possibilidade de correções por parte dos alunos ou dos pais, enquanto que, tanto os professores como os pais são peritos naturais no uso de *materiais comuns* (Szendrei, 1996).

Como escreve Serrazina (1990), diferentes teorias psicopedagógicas asseguram que as crianças necessitam de modelos concretos para compreenderem os conceitos matemáticos. Também variadas investigações têm constatado que os alunos que utilizam materiais manipuláveis na construção de conceitos obtêm melhores resultados do que aqueles que não o fizeram, uma vez que os alunos são indivíduos ativos, que constroem, modificam e integram ideias ao interagirem com o mundo físico. Na ótica da autora, "A aprendizagem baseia-se na experiência e a construção de conceitos matemáticos é um processo longo que requer envolvimento activo do aluno e que vai progredindo do concreto para o abstracto." (p. 1). Contudo, a autora esclarece que a utilização de muitos materiais, por si só, não garante uma aprendizagem significativa. Deste modo, qualquer material deve ser aplicado cuidadosamente, sendo o papel do professor de crucial importância neste processo: cabe-lhe decidir *como*, *quando* e *porquê* determinado material deve ser utilizado. Ora, mais importante do que os materiais que o aluno está a explorar, é a experiência que o mesmo concretiza. Quando se propugna a ideia de que a Matemática se aprende fazendo, o que está em causa não é somente a atividade física, mas, principalmente, a atividade mental que reflete a atividade matemática.

Conforme Hartshorn e Boren (1990), a investigação sugere que o uso de materiais manipuláveis é particularmente útil para auxiliar os alunos a moverem-se do nível concreto para o nível abstrato. Contudo, os professores devem escolher, cuidadosamente, as tarefas e os materiais que suportam a introdução de símbolos abstratos. Nesta continuidade de pensamento, os autores declaram:

> *Experiential education is based on the idea that active involvement enhances students' learning. Applying this idea to mathematics is difficult, in part, because mathematics is so "abstract". One practical route for bringing experience to bear on students' mathematical understanding, however, is the use of manipulatives.* (p. 2)

Numa perspetiva congruente, Ponte e Serrazina (2000) declaram que os conceitos e as relações matemáticas são, efetivamente, entes abstratos. Todavia, estes podem encontrar representações em variados tipos de suportes físicos. Assim, "Convenientemente orientada, a manipulação de material pelos alunos pode facilitar a construção de certos conceitos. Pode também servir para representar conceitos que eles já conhecem por outras experiências e actividades, permitindo assim a sua melhor estruturação." (p. 116). Neste sentido, os autores realçam que o trabalho dos alunos com materiais manipuláveis é essencial em todos os domínios da Matemática, uma vez assegurado que estes materiais são, de facto, utilizados pelos alunos e que estes últimos compreendem, realmente, a tarefa para a qual é suposto utilizarem o material. De facto, "É tão ineficaz ser o professor a usar o material, com o aluno a ver, como ter o aluno a mexer no material sem saber o que está a fazer." (p. 116). Nesta ordem de ideias, afirmam Abrantes *et al.* (1999), "O recurso aos materiais manipuláveis (...) é imprescindível como ponto de partida ou suporte de muitas tarefas escolares. Mas trata-se de um meio e não de um fim; o essencial está na natureza da actividade intelectual dos alunos." (p. 25).

De acordo com o NCTM (2014), um Programa de Matemática excelente integra a utilização de instrumentos matemáticos, como são, por exemplo, os materiais manipuláveis: *"Students at all grade levels can benefit from the use of physical and virtual manipulative materials to provide visual models of a range of mathematical ideas."* (p. 82). No entanto, o valor destes materiais manipuláveis, aplicados na sala de aula, depende do facto de os alunos se conseguirem apropriar destes materiais de uma forma que promova o raciocínio matemático, o estabelecimento de significado e a comunicação. A questão fulcral é, pois, saber se os alunos na sala de aula estão envolvidos numa aprendizagem ativa:

> *We need to take action to create classrooms and learning environments where students are actively engaged with worthwhile tasks that promote mathematical understanding, problem solving, and reasoning. These students are working collaboratively as well as independently, using a range of concrete (...) resources. They are interacting with one another and with their teacher, and they are focused on making sense of mathematics, comparing varied approaches to solving problems, and defending, confirming, verifying, or rejecting possible solutions*. (NCTM, 2014, p. 109)

As considerações supracitadas remetem para uma das duas estratégias básicas de ensino da Matemática definidas por Ponte (2005), em particular o "ensino-aprendizagem exploratório" (p. 12). Segundo o autor, a principal característica desta estratégia de ensino é que o professor não procura explicar tudo, deixando uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos concretizarem. A realização de tarefas abertas, de caráter exploratório e investigativo, constitui um elemento distintivo desta estratégia. Importância análoga assumem os momentos de discussão e reflexão em plenário, que, tendo subjacente o trabalho desenvolvido ativamente pelos alunos, se constituem momentos de excelência para a elaboração teórica.

Em conclusão, é indubitável a existência de opiniões antagónicas, favoráveis ou desfavoráveis, relativamente à utilização de materiais manipuláveis no ensino-aprendizagem da Matemática. Não obstante, privilegiar-se-á, no desenvolvimento da Intervenção Pedagógica, a exploração de materiais manipuláveis, em particular de *materiais educativos*. Aparte as posições supramencionadas, surge como evidente a ideia de que os materiais, circunscritos a si mesmos, não garantem aprendizagem. Efetivamente, eles requerem uma intenção matemática clara, subjacente ao seu uso, intencionalmente prevista pelo professor e enquadrada em tarefas de aprendizagem de cariz essencialmente exploratório e investigativo, capazes de chamar os alunos a um forte envolvimento físico e intelectual. Veja-se que, tal como declara Szendrei (1996), na história da Educação Matemática, professores e educadores consideraram diversos *materiais educativos* como *"miracle drugs."* (p. 431). Ora, esses materiais foram sendo anunciados como uma solução para todas as dificuldades da Educação Matemática e, em consequência, a utilização dos mesmos foi estendida para situações em que não eram aplicáveis. Em certos casos, os professores tentaram simplificar o uso dos materiais. Quando o sucesso esperado não se concretizou, os professores e os educadores, que esperavam resolver o problema de como usar os materiais, começaram a reivindicar que eles não eram úteis. Esta reação teve como resultado, em alguns casos, a eliminação de alguns materiais da Educação.

2.4. Estruturação de Arranjos Retangulares

Outhred e Mitchelmore (1992) investigaram as dificuldades dos alunos na concretização da transição entre a representação concreta e a representação pictórica da área para arranjos retangulares. Neste sentido, os investigadores realizaram entrevistas individuais a alunos do 1.º ano de escolaridade ao 5.º ano de escolaridade, consubstanciadas num conjunto de tarefas que envolviam a contagem, o desenho, e a medição em arranjos retangulares.

Os investigadores em referência verificaram que, na enumeração dos quadrados manipuláveis presentes num arranjo retangular, 50% dos alunos contou os quadrados um por um; 38% dos alunos contou os quadrados em grupos de linhas ou de colunas, por repetição de adições; e apenas 12% dos alunos calculou o número de quadrados através da multiplicação. Ora, apesar de nenhum dos alunos ter demonstrado dificuldades no preenchimento do arranjo retangular com os quadrados manipuláveis e, posteriormente, na contagem destes quadrados, 30% dos alunos não foi capaz de desenhar corretamente o arranjo que tinha construído, e que inclusive permanecia visível à sua frente, desenhando-o com um número maior de quadrados. Este facto provou, em concordância com os investigadores, a existência de uma discrepância clara no desempenho dos alunos aquando da representação pictórica do arranjo.

A propósito, no desenho dos arranjos retangulares de quadrados pelos alunos, Outhred e Mitchelmore (1992) identificaram dois aspetos críticos, designadamente: a perceção da existência de um número de linhas ou de colunas equivalentes; e a utilização de segmentos de reta paralelos às linhas e às colunas que permitia desenhar o arranjo eficazmente. Ora, ao correlacionarem este desempenho dos alunos com as estratégias utilizadas pelos mesmos na enumeração dos arranjos, os investigadores constataram que, na generalidade, a menos que os alunos fossem capazes de estruturar, no seu desenho, os arranjos em linhas e em colunas, não conseguiam determinar o número de quadrados que preenchia os arranjos através da contagem em grupos de linhas ou de colunas, por repetição de adições, e muito menos através da multiplicação.

Outhred e Mitchelmore (1992) concluíram que os alunos não interpretam intuitivamente a estrutura de um arranjo retangular de quadrados em duas dimensões em termos de linhas e de colunas, e que esse facto pode obstaculizar a sua aprendizagem acerca da área utilizando diagramas. Desse modo, enfatizam a importância do desenvolvimento de tarefas que envolvam a contagem, o desenho, e a medição em arranjos retangulares de quadrados, no sentido de os alunos apreenderem uma propriedade essencial dos arranjos retangulares - os elementos serem colineares em duas direções -, e compreenderem a relação desta propriedade com a medição da área, que, por sua vez, se constitui um pré-requisito basilar para a introdução da fórmula para a área do retângulo.

Battista, Clements, Arnoff, Battista e Borrow (1998) procuraram ampliar a sua análise acerca da estruturação espacial[4], examinando, com detalhe, a estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões pelos alunos, que entendem como essencial para o desenvolvimento da noção de área e, para além disso, reconhecem como intimamente relacionada com a multiplicação, porque estes arranjos são o modelo principal de aplicação do pensamento multiplicativo. A este propósito, Clements e Stephan (2004) argumentam que os alunos precisam de estruturar arranjos para compreenderem verdadeiramente a natureza bidimensional inerente à área. Em conformidade, Wickstrom (2014) explana que, tal como é detalhado no documento do CCSSM *(Common Core State Standards for Mathematics)*, para construir conceções acerca da área, os alunos devem experienciar a divisão de um retângulo em linhas e colunas compostas por unidades quadradas do mesmo tamanho e, em decurso, a contagem de quadrados para determinarem o resultado total.

Battista *et al.* (1998) realizaram entrevistas individuais a alunos do 2.º ano de escolaridade, que tiveram subjacente um conjunto de problemas de estruturação de arranjos retangulares, nos quais os alunos deviam, sequencialmente, fazer uma previsão acerca de quantos quadrados seriam necessários para preencher completamente um retângulo; desenhar, no retângulo, onde pensavam que os quadrados estavam localizados e, depois, realizar, novamente, uma previsão acerca de quantos quadrados seriam necessários para preencher completamente o retângulo; e, por fim, preencher o retângulo com quadrados manipuláveis e determinar o número de quadrados necessário para o preencher.

A partir da análise das entrevistas, Battista *et al.* (1998) sistematizaram e descreveram cinco níveis de sofisticação dos alunos na estruturação de arranjos retangulares em duas dimensões. No nível 1, *Ausência completa da estruturação do arranjo em linhas e colunas*, os alunos não utilizam uma

[4] Battista *et al.* (1998) definem a estruturação espacial como um processo mental de construção de uma organização ou forma para um objeto ou conjunto de objetos, que determina a sua natureza ou configuração através da identificação das suas componentes espaciais, da combinação destas componentes em unidades compósitas e do estabelecimento de relações entre as componentes e as unidades compósitas.

linha ou uma coluna de quadrados como unidade compósita. No nível 2, *Estruturação parcial do arranjo em linhas e colunas*, os alunos fazem algum uso de uma linha ou de uma coluna de quadrados como unidade compósita, no entanto, não utilizam esta unidade compósita para cobrirem todo o retângulo. No nível 3A, *Estruturação do arranjo como um conjunto de linhas e colunas*, os alunos conceptualizam o retângulo como sendo totalmente coberto por linhas ou colunas de quadrados como unidades compósitas, mas não coordenam estas unidades compósitas com a dimensão ortogonal. No nível 3B, *Estruturação visual do arranjo em linhas e colunas,* os alunos repetem uma linha de quadrados como unidade compósita, distribuindo-a pelos elementos da coluna, sendo que, quando os quadrados estão desenhados no arranjo, eles utilizam-nos para guiarem a repetição; por sua vez, quando o material percetual está ausente, eles determinam as repetições estimando visualmente como é que as linhas cabem no retângulo. E, finalmente, no nível 3C, *Estruturação do arranjo em linhas por colunas: processo de repetição interiorizado,* os alunos repetem uma linha ou uma coluna de quadrados, utilizando o número de quadrados presente, respetivamente, numa coluna ou numa linha ortogonal para determinarem as repetições, sendo que o material percetual original, por exemplo os quadrados desenhados no arranjo, não é usado durante a repetição.

Os investigadores em questão esclarecem que o nível de sofisticação exibido por um aluno num determinado problema não deve ser interpretado como o nível de sofisticação do próprio aluno em algum género de esquema de desenvolvimento geral. Em vez disso, os níveis de sofisticação descrevem o desempenho dos alunos nos problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões. Para além disso, dado que um aluno pode apresentar níveis de sofisticação ligeiramente diferentes em problemas distintos, devem ser aplicados vários problemas, para se obter uma perceção acerca do nível corrente de desempenho do aluno nos problemas.

Battista *et al.* (1998) concluíram que a estrutura em linhas por colunas de um arranjo retangular de quadrados em duas dimensões não é inerente ao próprio arranjo, nem é automaticamente apreendida pelos alunos, mas deve, em concordância com uma perspetiva construtivista da operação mental que lhe está subjacente, ser construída por cada aluno. Consequentemente, os investigadores, no final, questionam, sob a forma de uma interpelação retórica, a possibilidade de os alunos, incapazes de visualizarem a estruturação dos arranjos retangulares em termos de linhas e de colunas, compreenderem o sentido do uso da multiplicação para a enumeração dos quadrados que preenchem estes arranjos e, mais ainda, da utilização da fórmula para calcular a área dos mesmos.

Outhred e Mitchelmore (2000) declaram que a origem da fórmula para a área do retângulo, baseada na experiência e na observação, corresponde à ação de cobrir um retângulo com unidades quadradas. Mas, tal como advertem os investigadores, esta ação é unidimensional e sugere um processo aditivo, ao passo que a fórmula é bidimensional e multiplicativa, pelo que é fundamental que os alunos passem de uma abordagem intuitiva, que enfatiza o preenchimento de uma superfície, para uma abordagem mais formal, que se baseia na relação da área com as medidas lineares da figura, embora esta transição não seja fácil de concretizar.

Os investigadores assinalam que têm sido sugeridas, frequentemente, tarefas que envolvem a cobertura de figuras retangulares com materiais concretos, todavia, Outhred e Mitchelmore (2000) apresentam duas razões que, no seu entendimento, e tendo como referência diversas investigações em que se apoiam, firmam a ineficácia destas atividades. Por um lado, *"concrete materials may conceal the very relations they are intended to illustrate. (...) the array structure is inherent in the materials and does not need to be apprehended by the learner"* (p. 146). Por outro lado, *"children may not relate the concrete materials to the mathematical concepts they are supposed to represent."* (p. 146).

Tendo em consideração as observações descritas, os investigadores supracitados estudaram a compreensão dos alunos acerca do preenchimento de arranjos retangulares, a partir dos desenhos destes arranjos realizados pelos mesmos, tendo subjacente a conceção de que os desenhos dos alunos deviam ser percecionados como um reflexo, ou pelo menos, como sendo regulados pelas suas imagens mentais acerca da estrutura do arranjo. Os investigadores entrevistaram, individualmente, alunos do 1.º ano de escolaridade ao 4.º ano de escolaridade, mediante a realização de tarefas que envolviam a contagem, o desenho, e a medição em arranjos retangulares, antes de estes terem sido sujeitos a qualquer processo de ensino-aprendizagem da fórmula da área do retângulo.

Por meio da análise das entrevistas, Outhred e Mitchelmore (2000) elencaram cinco níveis de desenvolvimento dos alunos no preenchimento de arranjos retangulares. No nível 0, *Preenchimento incompleto,* as unidades desenhadas pelos alunos não cobrem completamente os retângulos sem lacunas ou sobreposições. No nível 1, *Preenchimento primitivo,* as unidades desenhadas pelos alunos cobrem completamente os retângulos sem sobreposições, mas a sua organização é assistemática - as unidades variam consideravelmente em tamanho e em forma. No nível 2, *Preenchimento do arranjo, construído a partir da unidade,* as unidades desenhadas pelos alunos mostram uma estruturação correta do arranjo, com igual número de unidades nas linhas e nas colunas, porém o tamanho das unidades é determinado visualmente pelos alunos a partir da unidade dada, e não considerando as dimensões do retângulo. No nível 3, *Preenchimento do arranjo, construído a partir da medição,* as dimensões do retângulo são utilizadas pelos alunos para repetirem linhas - uma dimensão é utilizada para encontrarem o número de unidades numa linha e a outra dimensão é usada para determinarem o número de linhas. E, por fim, no nível 4, *Arranjo implícito: solução construída a partir do cálculo,* os alunos não precisam de desenhar as unidades - o número de unidades nas linhas e nas colunas é usado para calcularem o número total de quadrados, frequentemente através da multiplicação, mas, ocasionalmente, também por repetição de adições.

Os investigadores em questão clarificam que os cinco níveis apresentados compõem, de facto, uma sequência de natureza desenvolvimental, no sentido em que cada nível é mais sofisticado que o nível precedente. No entanto, tal como esclarecem, não querem com isto afirmar que os alunos progridem necessariamente por aqueles níveis, um de cada vez.

Outhred e Mitchelmore (2000) concluíram que, previamente aos alunos poderem aprender significativamente a fórmula para a área do retângulo, devem: compreender a estruturação espacial de um arranjo retangular, a qual, ao contrário do que suspeitam ser a perceção de muitos professores, não é evidente para os alunos; desenvolver uma compreensão profunda da medição linear; e interligar a medição da área às medidas lineares e aos conceitos multiplicativos.

Mais recentemente, Battista (2003, 2004) elaborou um modelo integrado e abrangente para a área e para o volume, associando os modelos independentes que já tinha desenvolvido previamente para cada um destes dois atributos, alguns dos quais em colaboração com outros investigadores, como exemplifica o estudo sobre a área de Battista *et al.* (1998) anteriormente apresentado.

Tendo presente que, para medir a área e o volume nos sistemas de medição padronizados, é necessário determinar o número de quadrados ou de cubos que se encontra na região a ser medida (Battista, 2003), então, uma ideia considerada nuclear no desenvolvimento de competências de medição da área e do volume nestes sistemas de medição é compreender como estruturar e enumerar significativamente arranjos de quadrados e de cubos em duas dimensões e em três dimensões, respetivamente (Battista, 2003, 2004, 2007).

Para a concretização desta ação mental, o investigador entende que são necessários cinco processos cognitivos básicos, a saber: *a abstração*, que permite isolar, mentalmente, itens; a *formação e utilização de modelos mentais*, os quais consistem em conjuntos integrados de abstrações, que são ativados para visualizar, compreender e raciocinar sobre situações com as quais se lida em ação ou em pensamento; a *estruturação espacial*, que consiste em abstrair a composição e a forma de um objeto, por meio da identificação, inter-relação e organização das suas componentes; a *localização de unidades*, que, no caso particular da estruturação e enumeração de arranjos de quadrados e de cubos, permite localizar os quadrados ou os cubos através da coordenação das suas localizações ao longo das dimensões que enquadram o arranjo; e a *organização em unidades compósitas*, que, no caso em questão, permite combinar as unidades básicas do arranjo (quadrados ou cubos) em unidades compósitas mais complexas (linhas e colunas ou camadas), que podem ser repetidas para formar todo o arranjo (Battista, 2003, 2004, 2007)[5].

Os processos anteriormente explicitados foram utilizados pelo investigador referenciado como suporte para caracterizar sete níveis de sofisticação dos alunos na estruturação e enumeração de arranjos de quadrados e de cubos em duas dimensões e em três dimensões, respetivamente. No nível 1, *Ausência de processos de localização de unidades e de organização em unidades compósitas,* os alunos não organizam as unidades em unidades compósitas e, uma vez que não coordenam apropriadamente a informação espacial, os seus modelos mentais de arranjos são insuficientes para que possam localizar todas as unidades no arranjo. No nível 2, *Início da utilização dos processos de localização de unidades e de organização em unidades compósitas,* os alunos começam a estruturar o arranjo em termos de unidades compósitas e, para além disto, o desenvolvimento emergente do processo de localização de unidades nos alunos gera modelos mentais suficientes para que possam reconhecer unidades compósitas equivalentes. No nível 3, *Processo de localização de unidades suficientemente coordenado para reconhecer e eliminar os erros de contagem dupla,* o processo de localização de unidades coordena visões unidimensionais num modelo mental que é suficiente para que os alunos possam reconhecer a mesma unidade a partir de diferentes perspetivas, o que lhes permite eliminar os erros de contagem dupla. No nível 4, *Utilização de unidades compósitas máximas para estruturar o arranjo, mas coordenação insuficiente para a repetição,* os alunos estruturam o arranjo em termos de unidades compósitas máximas (linhas e colunas para a área e camadas para o volume), contudo, devido à sua coordenação insuficiente, os alunos não conseguem localizar essas unidades compósitas com precisão, e, em consequência, incorrem em erros na repetição das mesmas. No nível 5, *Uso do processo de localização de unidades suficiente para localizar corretamente todas as unidades, mas não para as unidades compósitas máximas usadas,* o processo de localização de unidades é suficiente para criar um modelo mental que permite aos alunos localizarem corretamente todos os quadrados ou cubos no arranjo, contudo, embora os alunos acertem, por vezes, nas respostas, eles perdem, frequentemente, o lugar das unidades compósitas na contagem, cometendo erros na enumeração das mesmas, porque organizam o arranjo em unidades compósitas de uma forma ineficiente e inconsistente e, além disso, as estratégias de estruturação e de enumeração não são generalizáveis e revelam-se inadequadas para arranjos grandes. No nível 6, *Desenvolvimento e coordenação completos dos processos de localização de unidades e de organização em unidades*

[5] Battista (2003) somente refere somente quatro dos processos cognitivos básicos apontados, não incluindo o primeiro, a abstração.

compósitas, os modelos mentais dos alunos incorporam a estruturação linha por coluna (para a área) ou por camadas (para o volume) e, dessa forma, os alunos podem refletir com precisão sobre o arranjo e enumerá-lo mesmo perante a ausência do material percetual. No nível 7, *Procedimentos numéricos inter-relacionados com o processo de estruturação espacial: generalização,* os esquemas de estruturação e de enumeração do arranjo de quadrados ou de cubos dos alunos atingem um nível de abstração no qual estes podem ser analisados e refletidos, possibilitando, assim, aos alunos compreenderem explicitamente a inter-relação que existe entre uma certa estratégia de enumeração e a estrutura espacial em que se baseia (Battista, 2003, 2004, 2007)[6].

Em virtude do facto de os níveis previamente descritos constituírem compilações de observações empíricas do pensamento de muitos alunos, bem como da noção de que a estrutura de aprendizagem e o processamento mental destes alunos podem ser diferentes, Battista (2004) ressalva que um certo aluno pode não percorrer todos os níveis, isto é, pode avançar determinados níveis ou passar tão rapidamente pelos mesmos que esta sua passagem torna-se impercetível. Apesar de tal variabilidade, é indubitável que os níveis de sofisticação referenciados permitem conhecer os grandes planos cognitivos que os alunos atingem ao movimentarem-se de um raciocínio informal, normalmente detido pelos mesmos, e anterior ao processo de ensino-aprendizagem desses tópicos, para a construção formal dos conceitos matemáticos em questão, derivada do processo instrucional (Battista, 2004).

Subjacente à observação anteriormente explanada pelo autor, está a conclusão transversal aos diferentes estudos que aqui foram apresentados de que a estrutura de um arranjo não é inerente ao mesmo, mas deve ser construída por cada aluno. Neste sentido, e prolongando esta linha de pensamento, Battista (2004) salienta que a localização da posição de cada um dos alunos na trajetória cognitiva de aprendizagem pré-definida para os tópicos matemáticos referenciados (área e volume), ao permitir conhecer quais são os processos cognitivos e as conceptualizações que os alunos devem adquirir para progredirem, proporciona um conhecimento fundamental para os professores guiarem, com sucesso, a construção destes conceitos pelos alunos.

Em término, face do espectro de trabalhos de investigação apresentado ao longo da presente secção, marcados pela convergência e complementaridade, optar-se-á, no decurso do Projeto de Intervenção Pedagógica, pela utilização do modelo de Battista *et al.* (1998).

[6] Battista (2003) refere somente seis níveis de sofisticação dos alunos na estruturação e enumeração de arranjos de quadrados e de cubos em duas dimensões e em três dimensões, respetivamente, não incluindo o nível 7, *Procedimentos numéricos inter-relacionados com o processo de estruturação espacial: generalização.*

CAPÍTULO III - METODOLOGIA

Neste capítulo apresenta-se a metodologia adotada no desenvolvimento do Projeto de Intervenção Pedagógica, característica da sua dimensão investigativa.

Na primeira secção deste capítulo, *Opções Metodológicas,* enunciam-se os objetivos e as questões de investigação que norteiam o Projeto e expõe-se a natureza da investigação. Na segunda secção, *Participantes,* caracteriza-se a turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico e a turma do 2.º Ciclo do Ensino Básico, nas quais decorreu a prática de ensino supervisionada. Na terceira secção, *Fases do Projeto de Intervenção Pedagógica*, referem-se as diferentes fases de desenvolvimento do Projeto, particularizando-se a descrição de algumas destas fases. Na quarta secção, *Recolha de dados,* descrevem-se os instrumentos de recolha de dados aplicados. Finalmente, na quinta secção, *Análise de dados,* mencionam-se os procedimentos de análise de dados utilizados no sentido de responder às questões de investigação.

3.1. Opções Metodológicas

O Projeto de Intervenção Pedagógica, por um lado, pretendia compreender como é que a utilização de materiais manipuláveis poderia contribuir para a compreensão, pelos alunos, de tópicos relacionados com a área, e, por outro lado, objetivava caracterizar o desempenho dos alunos na estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões, entendida como essencial no desenvolvimento da noção de área (Battista *et al.*, 1998). Neste sentido, procurar-se-á responder às seguintes questões de investigação:

a) Em que medida é que a utilização do material manipulável bissemis auxilia a compreensão, pelos alunos, do conceito de equivalência de figuras e do processo de medição direta da área, e a distinção entre os conceitos de área e de perímetro?

b) Em que medida é que a utilização de materiais manipuláveis mecânicos concebidos para o efeito auxilia a compreensão, pelos alunos, das fórmulas para a área do paralelogramo e do triângulo?

c) Como é que se caracteriza o desempenho dos alunos em problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões?

Atendendo às questões de investigação e aos próprios objetivos do Projeto, a metodologia utilizada é de natureza qualitativa interpretativa, enquadrando-se num *design* de investigação específico, que são os estudos de caso, mais particularmente os estudos de caso múltiplos.

Conforme Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa apresenta cinco características essenciais, designadamente: a fonte direta dos dados é o ambiente natural, sendo o investigador o instrumento principal de recolha destes dados; os dados recolhidos são, essencialmente, descritivos, sendo que o investigador procura analisá-los em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto possível, a forma em que estes foram registados ou transcritos; o investigador focaliza-se mais no processo do que simplesmente nos resultados; os dados são analisados indutivamente, pelo que o investigador não norteia o seu trabalho no sentido de confirmar/infirmar hipóteses previamente elaboradas, mas antes com o intuito de construir abstrações à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando; e o investigador interessa-se por tentar compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências, estabelecendo um conjunto de estratégias e procedimentos que lhe permite apreender as diferentes perspectivas pessoais adequadamente.

A propósito da última característica referenciada, convoca-se Erickson (1986), que utiliza a expressão "investigação interpretativa" para designar a família de abordagens que partilham o interesse central no "significado humano na vida social", ou seja, no significado atribuído pelos atores às ações nas quais se envolvem, e na sua consequente clarificação e exposição por intermédio do investigador. Na mesma linha de pensamento, Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (2005) declaram que "a investigação qualitativa interpretativa tem como objetivo a compreensão do significado ou da interpretação dada pelos próprios sujeitos inquiridos, com frequência implicitamente, aos acontecimentos que lhes dizem respeito e aos «comportamentos» que manifestam (que são definidos em termos de «acções»)." (p. 175).

Ponte (2006) entende que "a grande complexidade das situações educativas e o facto delas serem vividas por actores humanos com uma grande variedade de intenções e significados" (p. 15) torna a abordagem interpretativa propícia neste terreno, em detrimento da abordagem tradicional positivista, que aspira à formulação de enunciados sob a forma de leis gerais ou generalizações, eventualmente verificáveis. Com efeito, o autor realça a pertinência de serem realizadas investigações com objetivos que não sejam encontrar, num ápice, soluções para todos os problemas educativos, nem formular e comprovar leis gerais que descrevam o funcionamento dos fenómenos, mas que sejam acrescentar, gradualmente, novos elementos particulares, que enriqueçam o conhecimento coletivo acerca desses problemas e fenómenos.

Ora, os estudos de caso caracterizam-se, na sua essência, pelo facto de o seu objeto de estudo ser uma entidade bem definida, o caso (Bogdan & Biklen, 1994; Yin, 1994; Merriam, 1998; Stake, 1998; Lessard-Hébert *et al.*, 2005; Ponte, 2006; Coutinho, 2013), estudada no seio do seu contexto real de ocorrência (Yin, 1994).

Neste sentido, em investigação qualitativa interpretativa, os estudos de caso constituem um *design* de investigação adequado quando se pretende uma compreensão profunda de uma dada situação e dos significados para os atores que nela estão envolvidos, pelo que o interesse incide no processo, mais do que nos resultados, no contexto, mais do que numa variável específica, e, na descoberta, mais do que na confirmação (Merriam, 1998). Daqui ressaltam algumas das principais características dos estudos de caso, apontadas por vários autores, que ilustram devidamente as razões que sustentam a opção por este *design* de investigação no Projeto.

Os estudos de caso são uma investigação de natureza "empírica" (Yin, 1994; Ponte, 2006), de cariz particularístico (Merriam, 1998; Stake, 1998; Ponte, 2006), porque focalizam-se, de uma forma deliberada, numa "situação específica que se supõe ser única e especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse." (Ponte, 2006, p. 2). Não são, portanto, de cariz "experimental" (Ponte, 2006), uma vez que "o investigador não pretende alterar a situação, mas compreendê-la tal como ela é." (p. 8). Para o efeito, o investigador baseia-se em fontes múltiplas de evidência, a fim de os dados convergirem através de uma estratégia de triangulação, e permitirem, assim, corroborar o mesmo fenómeno (Yin, 1994).

Têm um forte cunho "descritivo" (Merriam, 1998; Ponte, 2006), pelo que o seu produto final é uma *"rich thick description of the phenomenon under study."* (Merriam, 1998, p. 29), ou seja, uma descrição "factual, literal, sistemática e, tanto quanto possível, completa do seu objeto de estudo" (Ponte, 2006, p. 7). No entanto, tal como ressalva Ponte (2006), os estudos de caso não têm que ser meramente descritivos, até porque, quando isso acontece, o seu valor reduz-se. O autor sublinha que, na verdade, este *design* de investigação "pode ter um profundo alcance analítico, interrogando a situação, confrontando-a com outras situações já conhecidas e com as teorias existentes. Pode assim ajudar a gerar novas teorias e novas questões para futura investigação." (Ponte, 2006, p. 8). Para Merriam (1998), os estudos de caso são "heurísticos", no sentido em que conduzem à compreensão, pelo investigador, e mais tarde pelo leitor, do fenómeno em estudo, podendo, desse modo, contribuir, ou para a descoberta de um novo significado por eles, ampliando a sua experiência, ou para a confirmação de algo que eles já conhecem.

Finalmente, os estudos de caso não permitem a generalização de resultados, constituindo esta, na perspetiva de Yin (1994) e de Ponte (2006), uma das principais críticas apresentadas a este *design* de investigação. "Referindo-se a um único caso, nada nos dizem sobre as suas semelhanças e diferenças com outros casos existentes, nem sobre a frequência de tal ou tal característica." (Ponte, 2006, p. 15). Contudo, tal como sublinha o mesmo autor, esse não é o objetivo deste tipo de investigação, pelo que a crítica apresentada erra, assim, o alvo. Yin (1994) responde à mesma crítica argumentado que os estudos de caso não permitem a realização de inferências acerca de uma população (ou universo) a partir dos dados empíricos recolhidos de uma amostra - *"statistical generalization"* (p. 30) -, mas possibilitam a construção de generalizações para a teoria - *"analytic generalization"* (p. 31) -, no sentido em que, partindo previamente de uma teoria já existente, geram a possibilidade de comparação dos seus resultados empíricos com esta última e, consequentemente, ajudam a expandir ou a confirmar ou a infirmar a mesma.

A par da sistematização anteriormente redigida acerca de algumas das principais características dos estudos de caso, interessa, pelo relevo que também assumem para enquadrar a investigação do Projeto, abordar as categorizações que certos autores estabeleceram para este *design* de investigação, especificamente aquelas que erigiram em função do número de casos em estudo. A este propósito, Bogdan e Biklen (1994) distinguem os estudos de caso únicos e os estudos de caso múltiplos, que se diferenciam, segundo os autores, pelo número de casos em estudo, respetivamente singular e plural. De acordo com os mesmos, "Quando os investigadores estudam dois ou mais assuntos, ambientes, ou bases de dados, realizam estudos de caso múltiplos." (p. 97), os quais podem assumir "uma grande variedade de formas." (p. 97); de outro modo, ao circunscreverem-se a apenas um, concretizam um estudo de caso único. Também Yin (1994) caracteriza, de uma forma semelhante à apresentada, os estudos de caso em função do número de casos: *"A primary distinction in designing case studies is between single- and multiple-case designs."* (p. 38).

Em súmula, o que foi referido nesta secção configura o horizonte das opções metodológicas assumidas no Projeto relativamente à natureza e ao *design* de investigação.

3.2. Participantes

A prática de ensino supervisionada teve lugar em dois contextos educativos distintos, designadamente numa escola do 1.º Ciclo do Ensino Básico e numa escola do 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico, que integram o mesmo Agrupamento, situado na zona urbana da cidade de Braga.

3.2.1. Participantes do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Na escola do 1.º Ciclo do Ensino Básico, a prática de ensino supervisionada decorreu numa turma do 4.º ano de escolaridade. Esta era constituída por vinte e três alunos, doze do género masculino e onze do género feminino. As idades dos alunos estavam compreendidas entre os nove e os onze anos. Não existia nenhum aluno com retenções. Também não havia nenhum aluno identificado com Necessidades Educativas Especiais (NEE). Relativamente ao desempenho dos alunos em Matemática, consideraram-se as classificações que os mesmos obtiveram na respetiva disciplina no 1.º Período do ano letivo vigente (quadro 1).

Ano da turma	Classificação obtida na disciplina de Matemática	Número de alunos
4.º ano de escolaridade	1	0
	2	2
	3	12
	4	7
	5	2

Quadro 1 - Classificações dos alunos do 4.º ano de escolaridade na disciplina de Matemática no 1.º Período.

Tal como mostra o quadro 1, a grande maioria dos alunos da turma (dezanove alunos) situava-se entre o nível 3 e o nível 4. Existiam, ainda, dois alunos classificados com nível 2 e o mesmo número de alunos com nível 5. Na sala de aula, os alunos identificados com nível 5 lideravam as situações de aprendizagem individuais e plenárias - modalidades de trabalho mais frequentes -, exprimindo, constantemente, as suas sugestões e dominando, dessa forma, os contributos para o trabalho coletivo.

A fim de diagnosticar os conhecimentos matemáticos dos alunos acerca do conteúdo específico área, realizou-se um levantamento das suas conceções prévias. Neste sentido, introduziu-se o texto literário *How big is a foot?,* de Rolf Myller[7], que foi projetado na sala de aula. Os alunos realizaram a leitura do texto em voz alta, que foi intercalada com a colocação de questões orais. De um modo geral, todos os alunos conseguiram compreender, no contexto da história, "como é que a questão da relatividade da medição pode criar problemas numa situação mundana (no caso concreto, problemas graves na vida do aprendiz!)" (Santos, 2013, p. 37).

[7] Utilizou-se o texto traduzido e ilustrado em Santos, C. P. (2013). O conceito de Unidade na Educação Pré-Escolar. *Jornal das Primeiras Matemáticas,* (1), 34-52. Consultado em janeiro 1, 2015, em http://jpm.ludus-opuscula.org/PDF_Files/Santos_Medida_34_52(1_2013).pdf. Segundo Van de Walle (1998), embora este seja um *"concept book"* (p. 339) para a medida, ou seja, um livro que é propositadamente desenhado para ajudar os alunos a explorarem aspetos relevantes da medida, a história é muito atrativa para os alunos mais novos. O rei mede a sua rainha (coroa incluída) utilizando o seu pé e ordena a construção de uma cama que tem seis pés de comprimento e três pés de largura. O aprendiz do carpinteiro-chefe, que é muito pequeno, constrói a cama de acordo com o tamanho do seu pé. Os problemas emergentes conduzem à necessidade de unidades de medida convencionais.

Posteriormente, distribuiu-se aos alunos a ficha de trabalho "A área da cama da Rainha" (anexo A). Nesta, os alunos deviam completar, individualmente, três vinhetas de uma banda desenhada relacionada com a obra explorada, para, de uma forma contextualizada, exporem as suas ideias acerca do que é a área; de como calcular a área de um retângulo; e do cálculo da área de um retângulo com lados de medida inteira.

A análise das respostas dos alunos acerca do que é a área permitiu constatar a existência de conceções diferenciadas dos alunos acerca deste atributo. Estas confluíram na ideia de que a área é: «o espaço» que se encontra «dentro»/«no interior» de algo ou que é «ocupado por» algo; «o interior» de algo; «a medida» daquilo que se encontra dentro de uma figura plana; e o produto do «comprimento» e da «largura». Nesta última, torna-se nítida a associação do conceito de área a uma operação numérica (Pires, 1995). Importa salientar que algumas das conceções de área dissecadas anteriormente são convergentes com o estudo de Pires (1995), no qual "A área foi associada ao produto de lados, a espaço ou superfície, ao interior, à medida e ao comprimento." (p. 140).

A análise das respostas dos alunos acerca de como calcular a área de um retângulo e do cálculo da área de um retângulo com lados de medida inteira possibilitou assinalar duas dificuldades evidenciadas pelos alunos em ambas, a saber: a confusão entre os conceitos de área e de perímetro e a aplicação, num retângulo, da fórmula para a área do quadrado, que demonstra uma utilização memorizada e sem critério de plausibilidade desta fórmula, e, portanto, ausente de compreensão.

Em suma, do diagnóstico das conceções prévias dos alunos do 4.º ano de escolaridade acerca da área, destaca-se, pela frequência evidente, a confusão entre os conceitos de área e de perímetro como um eixo a ter em consideração na intervenção pedagógica na turma, que se pretende relevante e adequada aos contextos da prática.

3.2.2. Participantes do 2.º Ciclo do Ensino Básico

Na escola do 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico, a prática de ensino supervisionada decorreu numa turma do 5.º ano de escolaridade. Esta era constituída por vinte e três alunos, quinze do género masculino e oito do género feminino. As idades dos alunos estavam compreendidas entre os dez e os doze anos. Existia um aluno repetente. Também havia um aluno identificado com Necessidades Educativas Especiais (NEE), nomeadamente dislexia. Com efeito, este último necessitava de adaptações curriculares na sala de aula, designadamente o acompanhamento na leitura. Relativamente ao desempenho dos alunos em Matemática, consideraram-se as classificações que os mesmos obtiveram na respetiva disciplina no 2.º Período do ano letivo vigente (quadro 2).

Ano da turma	Classificação obtida na disciplina de Matemática	Número de alunos
5.º ano de escolaridade	1	0
	2	4
	3	9
	4	5
	5	5

Quadro 2 - Classificações dos alunos do 5.º ano de escolaridade na disciplina de Matemática no 2.º Período.

Tal como mostra o quadro 2, a turma caracterizava-se pela heterogeneidade, contemplando quatro alunos com nível 2, nove alunos com nível 3, cinco alunos com nível 4, e cinco alunos com nível 5. No ambiente de sala de aula, esta heterogeneidade ganhava bastante expressão, porque os alunos identificados com nível 2 evidenciavam claras dificuldades em acompanhar o ritmo de trabalho dos restantes. Ora, dado que a organização do espaço educativo da sala de aula correspondia a uma disposição dos alunos em pequenos grupos, os alunos referenciados eram, normalmente, fixados num mesmo grupo, situado junto da mesa da professora, de forma a permitir-lhe um apoio mais ativo e persistente junto destes alunos.

A fim de diagnosticar os conhecimentos matemáticos dos alunos acerca do conteúdo específico área, realizou-se, à semelhança do 1.º Ciclo, um levantamento das suas conceções prévias. Neste sentido, distribuiu-se aos alunos a ficha de trabalho "A área da sala de aula" (anexo B). Nesta, os alunos deviam indicar e explicar se a área de uma sala de aula quando medido o comprimento e a largura da mesma com o molde do pé de um aluno seria maior ou menor do que quando medido o comprimento e a largura com o molde do pé da professora.

As respostas dos alunos ao problema permitiram verificar que a maioria dos alunos da turma, designadamente dezoito alunos, respondeu corretamente, compreendendo a "proporcionalidade inversa existente entre unidade de medida e valor da grandeza" (Aires & Campos, 2011, p. 62). Em contraste, cinco alunos apresentaram resoluções inconsistentes com este raciocínio, corroborando, desta forma, as dificuldades que, segundo as autoras, este conhecimento oferece aos alunos.

Em suma, do diagnóstico das conceções prévias dos alunos do 5.º ano de escolaridade acerca da área, é importante realçar os conhecimentos corretos evidenciados pela generalidade dos alunos relativamente a esta grandeza.

3.3. Fases do Projeto de Intervenção Pedagógica

O Projeto de Intervenção Pedagógica, paulatinamente desenvolvido entre outubro de 2014 e outubro de 2015, contemplou um conjunto sequencial de fases, que estão sintetizadas no quadro 3.

	2014			**2015**									
Atividades a desenvolver	outubro	novembro	dezembro	janeiro	fevereiro	março	abril	maio	junho	julho	agosto	setembro	outubro
Revisão da literatura.	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Observação e problematização do contexto educativo do 1.º Ciclo do Ensino Básico.	x	x	x										
Desenho do Projeto de Intervenção Pedagógica.		x	x										
Planificação da intervenção pedagógica a desenvolver no 1.º Ciclo do Ensino Básico.			x										
Intervenção pedagógica no 1.º Ciclo do Ensino Básico.				x	x								
Aplicação dos problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões no 1.º Ciclo do Ensino Básico.				x	x								
Análise dos dados recolhidos no 1.º Ciclo do Ensino Básico.				x	x	x							
Observação e problematização do contexto educativo do 2.º Ciclo do Ensino Básico.						x							
Planificação da intervenção pedagógica a desenvolver no 2.º Ciclo do Ensino Básico.						x	x						
Intervenção pedagógica no 2.º Ciclo do Ensino Básico.							x						
Aplicação dos problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões no 2.º Ciclo do Ensino Básico.							x	x					
Análise dos dados recolhidos no 2.º Ciclo do Ensino Básico.							x	x	x				
Produção do Relatório de Estágio.										x	x	x	x

Quadro 3 - Fases do Projeto de Intervenção Pedagógica.

Entre as fases anteriormente apresentadas, algumas merecem ser alvo de particular ampliação, tendo em vista uma melhor e completa perceção do trabalho desenvolvido no âmbito da *Intervenção Pedagógica no 1.º Ciclo do Ensino Básico*, da *Intervenção Pedagógica no 2.º Ciclo do Ensino Básico*, e da *Aplicação dos problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões no 1.º e no 2.º Ciclos do Ensino Básico.*

3.3.1. Intervenção Pedagógica no 1.º Ciclo do Ensino Básico

A intervenção pedagógica desenvolvida no 1.º Ciclo do Ensino Básico, na turma do 4.º ano de escolaridade, contemplou sete intervenções, sendo que a primeira compreendeu o levantamento das conceções prévias dos alunos, já apresentado. As três intervenções seguintes consideraram o desenvolvimento do conceito de equivalência de figuras e do processo de medição direta da área e a distinção entre os conceitos de área e de perímetro. Por fim, as três últimas intervenções marcaram a exploração dos conteúdos previstos na abordagem do tópico área no 4.º ano de escolaridade, segundo o Programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013) e as Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2012).

Desenvolver-se-ão, somente, as três intervenções que se basearam na utilização dos bissemis, pela importância que assumem no âmbito da problemática a investigar no Projeto.

Estas intervenções assentaram numa estratégia de "ensino-aprendizagem exploratório" (Ponte, 2005, p. 12). Neste sentido, as intervenções não foram iniciadas pela exposição de conteúdos; ao invés, deu-se ênfase a um conjunto de tarefas de exploração que foram propostas aos alunos, convidando-os a um forte envolvimento e que, por sua vez, serviram de base aos momentos finais de discussão e reflexão, em que os alunos relataram as suas conjeturas e conclusões, apresentaram as suas justificações e questionaram-se mutuamente, e que foram aproveitados para a elaboração teórica (Ponte, 2005). Assim, as três intervenções basearam-se na exploração de fichas de trabalho, contendo tarefas de cariz essencialmente exploratório, sendo finalizadas, ou intercaladas, no caso de fichas de trabalho divididas em partes, com a realização de momentos de discussão/reflexão em plenário.

A *Primeira Intervenção*, realizada em 20 de janeiro de 2015, tinha como objetivo a comparação da área de figuras diferentes, tendente à compreensão do conceito de equivalência de figuras. Para o efeito, propôs-se a exploração da ficha de trabalho 1 - "Comparação da área de figuras diferentes", dividida em duas partes. A parte I (anexo C) era composta por três tarefas matemáticas: na primeira, os alunos deviam descobrir as diferentes figuras que é possível construir justapondo os lados de igual comprimento de dois triângulos retângulos congruentes cujo cateto maior é o dobro do cateto menor que lhes foram distribuídos, ou seja, deviam construir os bissemis; na segunda, os alunos deviam desenhar as figuras construídas em papel ponteado e identificá-las; e, na terceira, os alunos deviam comparar a área das figuras construídas para descobrirem se existia alguma figura com maior área do que as outras. A parte II (anexo D) era composta por uma única tarefa: nesta, os alunos deviam construir uma figura, justapondo os lados de igual comprimento de um número de bissemis à sua escolha. A seguir, deviam colá-la numa folha, contorná-la, e atribuir-lhe um título. Por fim, deviam registar, na ficha, o número de bissemis utilizados.

Nesta intervenção, privilegiou-se o trabalho em pequeno grupo, pela importância das interações que se desenvolvem entre os alunos no processo exploratório. Na composição dos seis grupos, valorizou-se o equilíbrio intergrupos, pois, tratando-se de um material desconhecido pelos alunos, era importante equilibrar as explorações realizadas em cada um dos grupos, onde os alunos mais competentes deviam auxiliar os alunos com maiores dificuldades, permitindo um contacto proficiente da turma com o material. Com efeito, não foram construídas tarefas suplementares.

A *Segunda Intervenção*, realizada em 22 de janeiro de 2015, tinha como objetivo a medição direta da área de figuras utilizando unidades não convencionais, tendente à compreensão da repetição de unidades de medida inerente ao processo de medição direta da área. Para tal, propôs-se a exploração da ficha de trabalho 2 - "Medição da área de figuras utilizando unidades não convencionais" (anexo E). Esta era composta por sete tarefas matemáticas: nas seis primeiras, os alunos deviam preencher três puzzles com os modelos concretos indicados (triângulos retângulos congruentes cujo cateto maior é o dobro do cateto menor, bissemis, quadrados equivalentes aos triângulos) e determinar a sua área, fixada uma destas unidades de medida; e, na sétima, os alunos deviam transcrever para uma tabela as áreas determinadas nas tarefas anteriores, no sentido de identificarem as regularidades existentes na área dos puzzles utilizando cada uma das unidades de medida e formularem conclusões.

Nesta intervenção, deu-se continuidade à modalidade de trabalho em pequeno grupo adotada na intervenção anterior. No entanto, na composição dos seis grupos, valorizou-se, desta vez, o equilíbrio intragrupos, baseado no desempenho dos alunos em Matemática, enquanto meio facilitador de uma adaptação aos diferentes ritmos de aprendizagem dos alunos da turma. Como tal, construiu-se uma extensão da tarefa 7, suplementar. Nesta, os alunos deviam explorar novos puzzles, sucessivamente mais complexos, e completar a tabela presente na tarefa 7, testando a validade das suas conclusões.

A *Terceira intervenção*, realizada em 28 de janeiro de 2015, tinha como objetivo a distinção entre os conceitos de área e de perímetro. Para isso, propôs-se a exploração da ficha de trabalho 3 -

"Área e Perímetro" (anexo F). Esta era composta por quatro tarefas matemáticas: na primeira, os alunos deviam investigar os diferentes comprimentos nos bissemis; na segunda, os alunos deviam pintar, com cores iguais, os lados dos bissemis com o mesmo comprimento, reproduzidos na ficha; na terceira, os alunos deviam investigar os bissemis isoperimétricos; e, na quarta[8], os alunos deviam comentar a existência de figuras com a mesma área e perímetros diferentes, a partir das opiniões de dois alunos relativamente aos bissemis, e apresentar um exemplo que fundamentasse a sua resposta.

Nesta intervenção, privilegiou-se o trabalho individual, para os alunos assumirem a sua própria independência na realização de tarefas que visavam dar resposta a uma das dificuldades que ressaltou no levantamento das suas conceções prévias: a confusão entre os conceitos de área e de perímetro. Assim, construiu-se uma tarefa 5 (anexo G), suplementar. Nesta, os alunos deviam desenhar, em papel quadriculado, figuras não geometricamente iguais a um dos bissemis, mas com igual perímetro.

3.3.2. Intervenção Pedagógica no 2.º Ciclo do Ensino Básico

A intervenção pedagógica desenvolvida no 2.º Ciclo do Ensino Básico, na turma do 5.º ano de escolaridade, contemplou cinco intervenções, sendo que a primeira compreendeu o levantamento das conceções prévias dos alunos, já apresentado. As intervenções seguintes marcaram a exploração dos conteúdos previstos na abordagem do tópico área no 5.º ano de escolaridade, segundo o Programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013) e as Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2012). Em particular, a segunda intervenção baseou-se na exploração e sistematização das fórmulas para a área do retângulo e do quadrado, através da resolução de problemas. As duas intervenções seguintes contemplaram o desenvolvimento das fórmulas para a área do triângulo e do paralelogramo, a partir da exploração de dois materiais mecânicos concebidos para o efeito. A última intervenção envolveu a resolução de problemas que integravam o cálculo da área de figuras planas.

Desenvolver-se-ão, apenas, as duas intervenções que se basearam na utilização dos materiais mecânicos, pela mesma razão que no 1.º Ciclo.

Estas intervenções seguiram as mesmas estratégias de ensino-aprendizagem que foram definidas na *Intervenção Pedagógica no 1.º Ciclo do Ensino Básico.*

A *Primeira Intervenção* tinha como objetivo a abordagem, com compreensão, da fórmula para a área do paralelogramo. Para tal, propôs-se a exploração da ficha de trabalho 1 - "Área de figuras planas: paralelogramos", dividida em duas partes. A parte I (anexo H) era composta por quatro tarefas

[8] Esta tarefa resulta da adaptação de uma questão integrada na Prova Final de Matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico de 2013 (1.ª Fase).

matemáticas: na primeira, os alunos deviam observar o paralelogramo presente no material mecânico que lhes foi distribuído; na segunda, os alunos deviam movimentar a tira do material mecânico e indicar a figura então obtida; na terceira, os alunos deviam formular conclusões relativamente à área das duas figuras anteriores; e, na quarta, os alunos deviam escrever a fórmula para a área do paralelogramo, a partir da exploração realizada. A parte II (anexo I) era composta por duas tarefas matemáticas: na primeira, os alunos deviam contornar, em papel quadriculado, quatro paralelogramos que lhes foram distribuídos e calcular a sua área; na segunda, os alunos deviam observar um paralelogramo desenhado entre duas retas paralelas e desenhar, entre estas duas retas, um paralelogramo com a mesma área que o anterior, mas não geometricamente igual a este.

Nesta intervenção, privilegiou-se o trabalho em pequeno grupo, mantendo a organização habitual dos alunos no espaço educativo da sala de aula, promotora de um ambiente de ensino-aprendizagem propício à comunicação e ao debate de ideias. Esta organização considerava cinco grupos equilibrados entre si e um grupo composto pelos alunos que evidenciavam claras dificuldades em acompanhar o ritmo de trabalho dos restantes, permitindo um apoio mais persistente e ativo com este último. Como trabalho suplementar, construiu-se uma diversidade maior de paralelogramos, para os alunos calcularem a respetiva área no âmbito da primeira tarefa contemplada na parte II da ficha de trabalho.

A *Segunda Intervenção* tinha como objetivo a abordagem, com compreensão, da fórmula para a área do triângulo. Para tal, propôs-se a exploração da ficha de trabalho 2 - "Área de figuras planas: triângulos", dividida em duas partes. A parte I (anexo J) era composta por quatro tarefas matemáticas: na primeira, os alunos deviam observar os dois triângulos sobrepostos que compunham o material mecânico que lhes foi distribuído; na segunda, os alunos deviam rodar um desses triângulos meia-volta em torno do ilhó, e indicar a figura então obtida; na terceira, os alunos deviam formular conclusões relativamente à área das duas figuras anteriores; e, na quarta, os alunos deviam escrever a fórmula para a área do triângulo, a partir da exploração realizada. A parte II (anexo K) era composta por duas tarefas matemáticas: na primeira, os alunos deviam contornar, em papel quadriculado, quatro triângulos que lhes foram distribuídos e calcular a sua área; na segunda, os alunos deviam observar dois triângulos desenhados entre duas retas paralelas e desenhar, entre estas duas retas, um triângulo com, simultaneamente, maior área do que um dos anteriores e menor área do que o outro.

Nesta intervenção, deu-se continuidade à modalidade de trabalho em pequeno grupo adotada na intervenção anterior, ainda que com algumas modificações na composição dos grupos. Nesta nova organização, igualmente habitual para os alunos na disciplina Ciências Naturais, os seis grupos da turma estavam, de uma maneira geral, equilibrados entre si, no sentido de favorecer o envolvimento e o progresso dos alunos com maiores dificuldades por meio da interação direta com os seus pares. Como trabalho suplementar, construiu-se uma diversidade maior de triângulos, para os alunos calcularem a respetiva área no âmbito da primeira tarefa contemplada na parte II da ficha de trabalho.

3.3.3. Aplicação dos problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões no 1.º e no 2.º Ciclos do Ensino Básico

A aplicação dos problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões realizada no 1.º e no 2.º Ciclos do Ensino Básico, na turma do 4.º e do 5.º anos de escolaridade, seguiu a mesma estrutura, tendo em vista a possibilidade de estabelecer comparações entre os desempenhos dos alunos dentro de cada um dos anos de escolaridade e entre os mesmos.

Os problemas aplicados fazem parte de um conjunto de problemas apresentados por Battista *et al.* (1998) e que estiveram na base da sua investigação. Na aplicação dos problemas, cada um dos alunos das turmas foi entrevistado individualmente em dois momentos distintos: num primeiro momento, em que foi aplicado um problema igual para todos os alunos (anexo L); e, num segundo momento, em que, consoante o desempenho revelado pelos alunos no problema anterior, foi aplicado um problema menos complexo do que este (anexo M) ou mais complexo (anexo N)[9].

Em todos os problemas aplicados, depois de se ter mostrado como um quadrado manipulável com um centímetro quadrado encaixava perfeitamente num dos quadrados desenhados no retângulo presente no problema, propôs-se aos alunos que: em primeiro lugar, fizessem uma previsão acerca de quantos quadrados com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo; em segundo lugar, desenhassem, no retângulo, onde pensavam que os quadrados estavam localizados, e, depois, realizassem, novamente, uma previsão acerca de quantos quadrados com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo; e, em terceiro lugar, preenchessem o retângulo com quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado e determinassem o número de quadrados necessário para o preencher (Battista *et al.*, 1998).

Os problemas foram aplicados no contexto da sala de aula de cada uma das turmas, numa mesa colocada em local mais restrito. Esta aplicação ocorreu durante o horário letivo dos alunos. Em particular, no 1.º Ciclo do Ensino Básico, ocorreu entre 28 de janeiro de 2015 e 5 de fevereiro de 2015, e, no 2.º Ciclo do Ensino Básico, ocorreu entre 30 de maio de 2015 e 10 de junho de 2015.

[9] Como será explicado na secção *3.4. Análise de dados,* o desempenho dos alunos nos problemas foi analisado à luz dos níveis de sofisticação dos alunos na estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões (nível 1; nível 2; nível 3A; nível 3B; nível 3C), descritos por Battista *et al.* (1998), sendo que somente foi aplicado um segundo problema menos complexo aos alunos que, no primeiro problema, exibiram o nível 1.

3.4. Recolha de dados

Os dados compreendem os "materiais em bruto que os investigadores recolhem do mundo que se encontram a estudar" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 149). Com efeito, no Projeto de Intervenção de Pedagógica, os dados, de natureza qualitativa, foram recolhidos a partir do ambiente natural dos contextos educativos do 1.º e do 2.º Ciclos do Ensino Básico.

Na *Intervenção Pedagógica no 1.º Ciclo do Ensino Básico* e na *Intervenção Pedagógica no 2.º Ciclo do Ensino Básico*, foi utilizado um conjunto igual de instrumentos no acesso aos dados, designadamente: a observação participante (registada em notas de campo e complementada pela fotografia e pela gravação áudio e vídeo) e a análise documental (fichas de trabalho). Na *Aplicação dos problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões no 1.º e no 2.º Ciclos do Ensino Básico*, os instrumentos de recolha de dados usados compreenderam a entrevista (registada em gravação áudio e vídeo) e a análise documental (problemas)[10].

A observação participante caracteriza-se pelo facto de o investigador assumir explicitamente o seu papel de estudioso junto da população observada, combinando-o com outros papéis sociais, que lhe permitem participar na vida desta população (Carmo & Ferreira, 1998). Temos, deste modo, o investigador "que é também ele membro de pleno direito do grupo que estuda" (Coutinho, 2013, p. 138). Isto significa que "o investigador *pode compreender* o mundo social *do interior*, pois partilha a condição humana dos indivíduos que observa. Ele é um actor social (...). Assim, a participação ou, seja, a interação observador-observado está ao serviço da observação;" (Lessard-Hébert *et al.*, 2005, p. 155). No Projeto, está naturalmente implícita, no decurso da intervenção pedagógica, a interação direta com os alunos no contexto educativo da sala de aula. Deste modo, a observação participante possibilitou, de uma forma flexível, recolher dados úteis, que foram registados, no final de cada uma das intervenções, sob a forma de notas de campo. Essas notas são, pois, "o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e reflectindo sobre os dados de um estudo qualitativo" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150). Neste sentido, a observação realizada classifica-se como não estruturada, em que o investigador utiliza simplesmente "uma folha de papel onde regista tudo o que observa; são as chamadas notas de campo extensivas, traduzidas em narrativas e registos detalhados" (Coutinho, 2013, p. 137). Adicionalmente, utilizou-se a fotografia e a gravação áudio e vídeo, que permitiram complementar, em larga medida, as informações então recolhidas.

---

[10] Todos os alunos da turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico e da turma do 2.º Ciclo do Ensino Básico foram autorizados, mediante pedido aos respetivos Encarregados de Educação, a participarem na investigação, de acordo com os métodos de recolha de dados fixados, uma vez garantido o seu anonimato.

A análise documental, "espécie de análise de conteúdo que incide sobre documentos relativos a um local ou a uma situação, corresponde, do ponto de vista técnico, a uma observação de artefactos escritos." (Lessard-Hébert *et al.*, 2005, p. 143). No Projeto, a análise documental desenvolvida focalizou-se, particularmente, nas fichas de trabalho exploradas pelos alunos em cada uma das intervenções pedagógicas e nos problemas que lhes foram aplicados, daí resultando dados importantes no domínio da comunicação escrita.

A entrevista, genericamente, "visa a obtenção de informação através de questões que são colocadas ao inquirido pelo investigador." (Coutinho, 2013, p. 141). Em investigação qualitativa, "é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos do mundo." (Bogdan & Biklen, 1994, p. 134). De acordo com Fontana e Frey (1994), as entrevistas têm uma grande variedade de formas e uma multiplicidade de usos. Entre várias classificações, distinguem as entrevistas estruturadas, semiestruturadas e não estruturadas. Em particular, as entrevistas estruturadas referem-se, segundo o autor, a uma situação na qual o entrevistador coloca ao entrevistado uma série de questões pré-estabelecidas, com um conjunto limitado de categorias de resposta. O entrevistador controla o ritmo da entrevista, tratando o conjunto de questões como se fosse um roteiro a ser seguido de uma forma padronizada e direta, do qual nunca se pode desviar. Com efeito, todos os participantes são sujeitos às mesmas questões, colocadas na mesma ordem ou sequência, por um entrevistador capaz de abordar cada entrevista de um modo semelhante (Fontana & Frey, 1994). No Projeto, as entrevistas realizadas aos alunos individualmente, no decurso da aplicação dos problemas, enquadram-se na descrição suprarreferida, podendo, desta forma, classificar-se como estruturadas. De facto, em todos os problemas aplicados, desenvolveu-se um mesmo percurso de entrevista, baseado em Battista *et al.* (1998), que se centrou num conjunto igual de questões, registado nos próprios problemas (anexos L, M, N). Nesta configuração de entrevista, fica-se, pois, com a certeza de se obterem dados comparáveis entre os alunos (Bogdan & Biklen, 1994), sendo este o objetivo que esteve na base da aplicação dos problemas no Projeto, tal como já referido na secção anterior. Para registar os dados provenientes das entrevistas, utilizou-se a gravação áudio e vídeo.

Por fim, é de realçar que os dados obtidos pelos diferentes métodos de recolha suprarreferidos foram utilizados, tanto na *Intervenção Pedagógica no 1.º Ciclo do Ensino Básico* e na *Intervenção Pedagógica no 2.º Ciclo do Ensino Básico*, como na *Aplicação dos problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões no 1.º e no 2.º Ciclos do Ensino Básico*, numa estratégia de triangulação para tratamento das interpretações/conclusões.

3.5. Análise de dados

A análise de dados compreende o processo de organização sistemática dos materiais recolhidos pelo investigador, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou (Bogdan & Biklen, 1994).

No Projeto de Intervenção Pedagógica, a análise de dados compreendeu, essencialmente, uma análise de conteúdo e foi realizada tendo em consideração as questões de investigação que o orientam.

Para o *Desenvolvimento e Avaliação da Intervenção Pedagógica no 1.º Ciclo do Ensino Básico* e para o *Desenvolvimento e Avaliação da Intervenção Pedagógica no 2.º Ciclo do Ensino Básico*, recuperaram-se as notas de campo recolhidas nas três intervenções desenvolvidas na turma do 4.º ano de escolaridade e nas duas intervenções desenvolvidas na turma do 5.º ano de escolaridade. Como complemento, transcreveram-se os dados provenientes da gravação áudio e vídeo das intervenções, anexando-se as resoluções das fichas de trabalho exploradas pelos alunos no decurso das mesmas. A compilação destes dados fundamentou, pois, a realização de uma análise descritiva e interpretativa de cada uma das intervenções isoladamente. De facto, percorrer os dados continuadamente permitiu definir aspetos de análise relevantes em cada intervenção, tendo em consideração, num sentido particular, os objetivos subjacentes a cada uma das tarefas propostas e, num sentido mais lato, a problemática do Projeto.

Para o *Estudo do desempenho dos alunos do 1.º e do 2.º Ciclos do Ensino Básico nos problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões*, usaram-se os mesmos procedimentos de análise para a turma do 4.º ano de escolaridade e para a turma do 5.º ano de escolaridade. Numa primeira fase, transcreveram-se os dados provenientes da gravação áudio e vídeo das entrevistas realizadas na aplicação do primeiro problema, complementando-se com os desenhos dos arranjos retangulares de quadrados realizados nos problemas. Depois, analisaram-se e categorizaram-se os dados à luz dos cinco níveis de sofisticação dos alunos na estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões, descritos por Battista *et al.* (1998). Numa segunda fase, transcreveram-se os dados provenientes da gravação áudio e vídeo das entrevistas realizadas na aplicação dos segundos problemas: um deles menos complexo do que o primeiro (anexo M) - aplicado somente aos alunos que, neste, exibiram o nível 1 - e o outro mais complexo do que o primeiro (anexo N) - aplicado aos alunos que, neste, exibiram um dos restantes níveis. Complementaram-se, também, estes dados com os desenhos dos arranjos retangulares de quadrados realizados nos problemas. Depois, analisaram-se e categorizaram-se os dados à luz dos níveis de sofisticação referenciados.

CAPÍTULO IV - ANÁLISE E DISCUSSÃO DE DADOS

Neste capítulo apresenta-se a análise e discussão de dados, à luz das questões de investigação que norteiam o Projeto de Intervenção Pedagógica e do enquadramento teórico que o sustenta.

Na primeira secção deste capítulo, *Desenvolvimento e Avaliação da Intervenção Pedagógica no 1.º Ciclo do Ensino Básico*, realiza-se uma análise detalhada e reflexiva da intervenção pedagógica desenvolvida na turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Na segunda secção, *Desenvolvimento e Avaliação da Intervenção Pedagógica no 2.º Ciclo do Ensino Básico*, reitera-se o procedimento anteriormente referido na turma do 2.º Ciclo do Ensino Básico. Finalmente, na terceira secção, *Estudo do desempenho dos alunos do 1.º e do 2.º Ciclos do Ensino Básico nos problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões*, efetua-se a análise e a caracterização do desempenho dos alunos das turmas do 1.º e do 2.º Ciclos do Ensino Básico em problemas envolvendo a estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões.

4.1. Desenvolvimento de Avaliação da Intervenção Pedagógica no 1.º Ciclo do Ensino Básico

4.1.1. Primeira Intervenção

A primeira intervenção, realizada em 20 de janeiro de 2015, tinha como objetivo a comparação da área de figuras diferentes, tendente à compreensão do conceito de equivalência de figuras. Esta teve como suporte a exploração de um material novo para os alunos, os bissemis. Não obstante a invulgaridade do nome do material, o autor, Gerdes (2008b), explica:

> Ao dissecar um dominó ao longo duma diagonal obtêm-se dois triângulos rectângulos, cujos catetos medem uma e duas unidades, respectivamente. Os triângulos assim obtidos constituem os elementos de base com os quais se pode construir figuras novas. Uma vez que esses triângulos são a metade dum dominó chamamo-los semidominós (*semi* = metade), ou simplesmente, semis. As figuras que se podem formar com dois semis chamaremos bissemis. (p. 9)

Em concordância com a definição supracitada, o autor descreve, posteriormente, como se podem construir os bissemis a partir dos semis. Esta explanação não se constitui, no entanto, pertinente, uma vez que os bissemis doravante construídos pelos alunos não respeitam a totalidade dos bissemis elencados pelo autor, considerando um critério de construção preciso, que será devidamente apresentado a seguir.

Distribuiu-se aos alunos a parte I da ficha de trabalho 1 - "Comparação da área de figuras diferentes" (anexo C) e o material - triângulos retângulos congruentes cujo cateto maior é o dobro do cateto menor, ou seja, semis (figura 1). Esta parte da ficha era composta por três tarefas matemáticas: na primeira, os alunos deviam descobrir as diferentes figuras que é possível construir justapondo os lados de igual comprimento de dois dos triângulos distribuídos; na segunda, os alunos deviam desenhar as figuras construídas em papel ponteado e identificá-las; e, na terceira, os alunos deviam comparar a área das figuras construídas para descobrirem se existia alguma figura com maior área do que as outras.

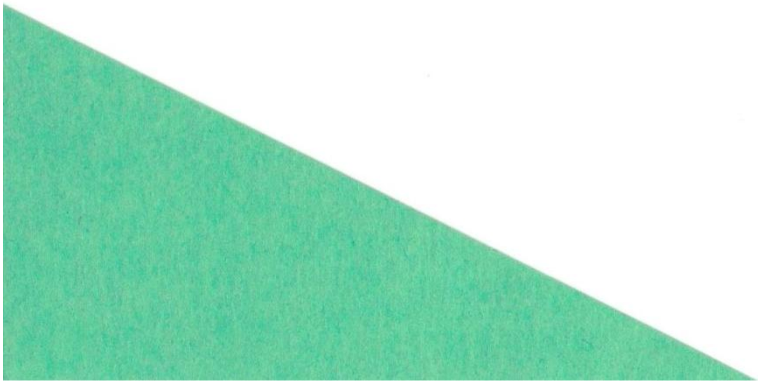


Figura 1 - Triângulo retângulo cujos catetos medem 5 cm e 10 cm.

Privilegiou-se o trabalho em pequeno grupo, pela importância das interações que se desenvolvem entre os alunos no processo exploratório. Na composição dos seis grupos, valorizou-se o equilíbrio intergrupos, pois, tratando-se de um material desconhecido pelos alunos, era importante equilibrar as explorações realizadas em cada um dos grupos, onde os alunos mais competentes deviam auxiliar os alunos com maiores dificuldades, permitindo um contacto proficiente da turma com o material.

Ainda numa fase inicial da exploração da tarefa 1, os grupos demonstraram dificuldades na interpretação da expressão «justapondo os lados de igual comprimento», o que obstaculizou a descoberta das figuras de acordo com o critério apresentado. Em decurso, promoveu-se uma discussão em plenário, destinada ao esclarecimento dos termos com os quais os alunos não se encontravam familiarizados. Tendo sido assegurada a compreensão dos alunos, os grupos prosseguiram a construção das figuras autonomamente.

No final, todos os grupos conseguiram construir as seis figuras possíveis (figura 2), realizando a tarefa 1 com sucesso. Estes grupos, quando questionados acerca da existência (ou não) de mais figuras para além daquelas, reconheceram que não, mesmo restando dois triângulos, distribuídos, propositadamente, a mais. Todavia, eles basearam as suas opiniões somente em tentativas, não conseguindo apresentar uma explicação lógica para justificar este facto.

Figura 2 - Figuras construídas na tarefa 1 da ficha de trabalho 1.

Na tarefa 2, os alunos, genericamente, demonstraram dificuldades, tanto no desenho das figuras construídas em papel ponteado, como na sua identificação.

No desenho das figuras, identificaram-se as seguintes fragilidades: o paralelogramo obtido pela justaposição do cateto maior dos triângulos e/ou o paralelogramo obtido pela justaposição do cateto menor dos triângulos não apresentar(em) dois pares de lados opostos paralelos (figura 3) - quatro alunos; o paralelogramo obtido pela justaposição do cateto menor dos triângulos apresentar os quatro lados congruentes, correspondendo a um losango (figura 4) - oito alunos; o triângulo obtido pela justaposição do cateto maior dos triângulos e/ou o triângulo obtido pela justaposição do cateto menor dos triângulos não ser(em) isósceles (figura 5) - seis alunos; e o papagaio obtido pela justaposição da hipotenusa dos triângulos não apresentar dois pares de lados consecutivos congruentes (figura 6) - oito alunos.

A par destas fragilidades, de natureza transversal à Geometria e à Medida, registou-se uma fragilidade específica da Medida: as figuras não conservarem os comprimentos dos lados que têm iguais entre si (figura 7). Esta última foi comum a todos os alunos.

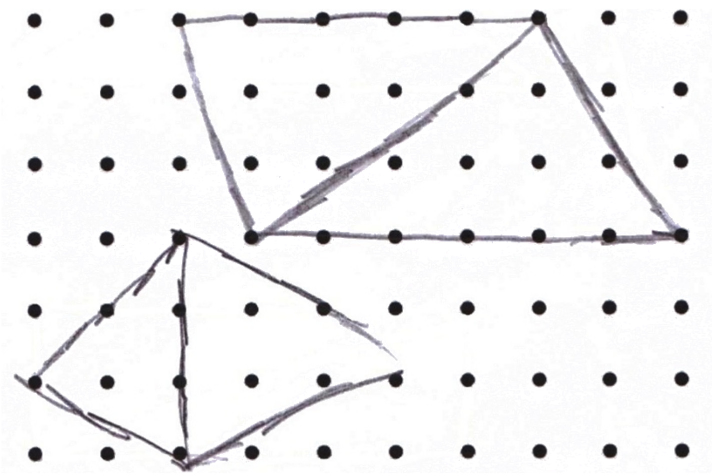


Figura 3 - Resolução de um aluno (DF) na tarefa 2 da ficha de trabalho 1.

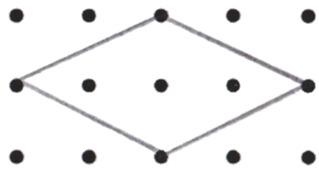


Figura 4 - Resolução de um aluno (EG) na tarefa 2 da ficha de trabalho 1.

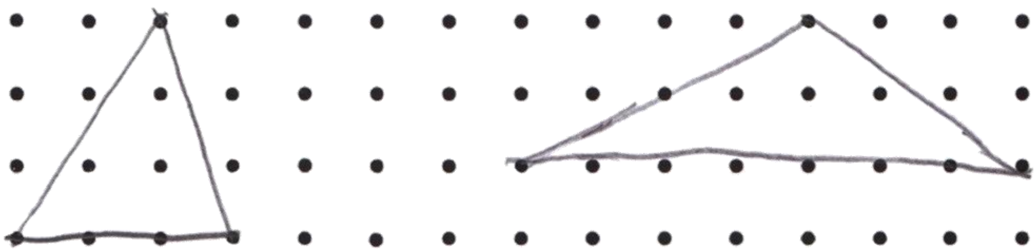


Figura 5 - Resolução de um aluno (BB) na tarefa 2 da ficha de trabalho 1.

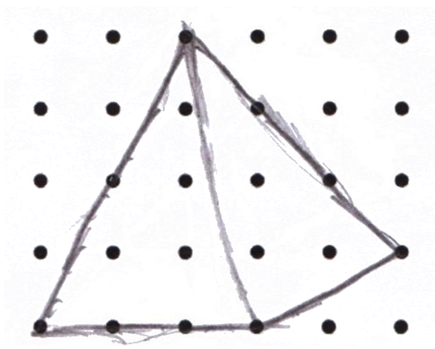


Figura 6 - Resolução de um aluno (IF) na tarefa 2 da ficha de trabalho 1.

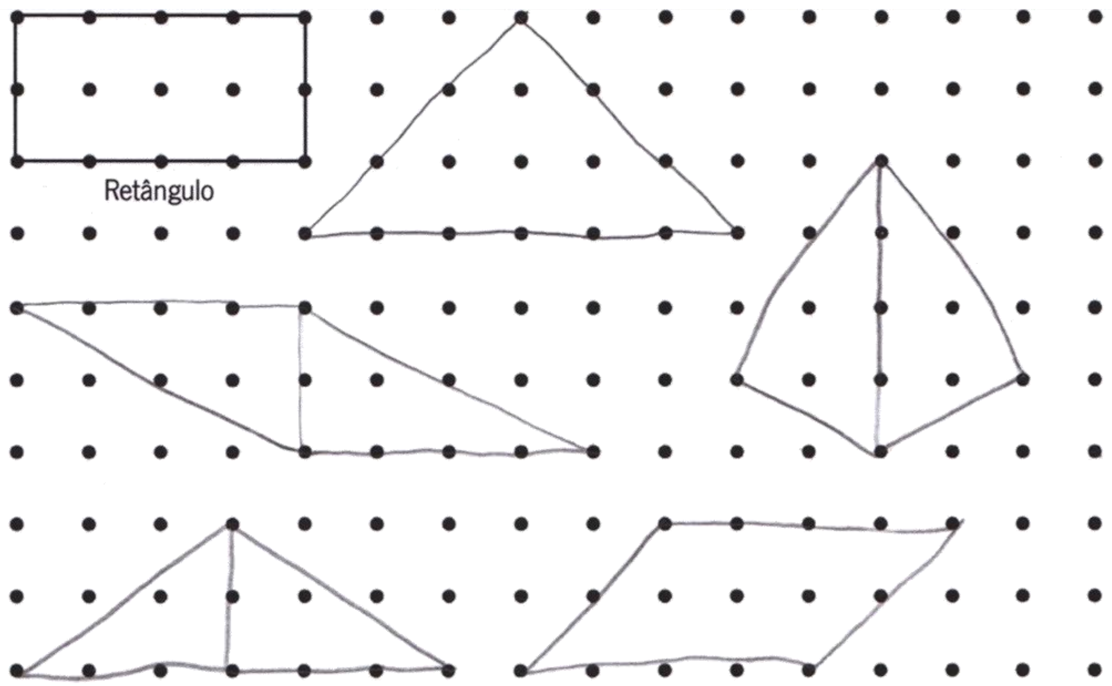


Figura 7 - Resolução de um aluno (CF) na tarefa 2 da ficha de trabalho 1.

Na identificação das figuras, a par da não identificação, deveras frequente, assinalaram-se os seguintes erros: identificar por «retângulo» o paralelogramo obtido pela justaposição do cateto maior dos triângulos - dois grupos; identificar por «pirâmide quadrangular» o papagaio obtido pela justaposição da hipotenusa dos triângulos - um grupo; e identificar por «triângulo» apenas o triângulo obtido pela justaposição do cateto maior dos triângulos, não reconhecendo o triângulo obtido pela justaposição do cateto menor dos triângulos - um grupo.

Tendo presente que, de acordo com o Programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013), os papagaios e os paralelogramos não são conceitos geométricos explorados no 1.° Ciclo do Ensino Básico, fica justificada a não identificação ou a incorreta identificação destas figuras. Deste facto, exceciona-se a identificação do paralelogramo por «pirâmide quadrangular», uma vez que este erro comporta dificuldades de natureza conceptual. Efetivamente, os alunos atribuíram propriedades tridimensionais a uma figura que, tal como verificaram na manipulação do material, é bidimensional. Por fim, o não reconhecimento de um dos dois triângulos parece sugerir que os alunos associam o conceito geométrico triângulo a representações específicas, o que limita a construção do conceito e, como tal, impede o reconhecimento do mesmo em toda e qualquer representação que possa assumir.

A tarefa 3 proporcionou aos alunos um nível de desafio que os envolveu em discussões contínuas e produtivas no interior dos grupos, tendentes à promoção da comunicação matemática no domínio oral. Na generalidade, não foi intuitivo para nenhum dos grupos que a área das figuras construídas permanecia inalterada, independentemente dos lados de igual comprimento dos triângulos que estavam justapostos. Com efeito, os grupos experimentaram dificuldades no reconhecimento da equivalência das figuras construídas, visíveis nas interações que se geraram entre os alunos (quadros 4, 5, 6 e 7). Ora, apesar da difícil gestão durante esta fase de atividade, procurou-se acompanhar o trabalho desenvolvido por cada um dos grupos e, dessa forma, intervir quando necessário, desafiando a reflexão e o raciocínio por parte dos alunos. Isto, tendo presente que, na aula de Matemática, o professor é o grande impulsionador da comunicação matemática, proporcionando momentos de discussão entre os distintos intervenientes (Sousa, Cebolo, Alves & Mamede, 2009).

CF: *Para um triângulo, como é que nós descobrimos a área?*
Investigadora: *Se calhar não é preciso calcular.*
CF: *Mas então como é que nós vamos fazer?*
Investigadora: *Têm que pensar noutra maneira.*
[tempo depois]
CF: *Nós já sabemos a resposta, só que não sabemos explicar.*
Investigadora: *Então, qual é a resposta?*
CF: *Nós achamos que sim por causa que alguns triângulos [refere-se aos triângulos utilizados para construir as figuras] são maiores do que os outros e outros são mais pequenos.*
Investigadora: *Então, separem-me os triângulos maiores dos mais pequenos.*
[ficam confusos a separar]
FV: *Não dá.*
CR: *É que se nós unirmos assim [coloca os triângulos todos uns em cima dos outros], reparamos que a área deles é igual. Mas só que quando fazemos as figuras, pensamos que não.*
CF: *Mas eu também ao mesmo tempo acho que são todas iguais por causa que em todas só usamos dois triângulos.*

Quadro 4 - Discussão realizada num grupo (CF, CR, FV, GP) na exploração da tarefa 3 da ficha de trabalho 1.

RM: *Eu estou a ver por aqui por estas [aponta para as figuras que desenhou na tarefa 2].*
Investigadora: *Não podes ver por essas, têm que usar as figuras construídas com o material.*
RM: *Mas assim como é que nós vamos fazer quadradinhos?*
Investigadora: *Que quadradinhos?*
RM: *Porque nós antes, para saber a área, tinha quadradinhos um triângulo e nós contávamos. E dizia assim, um quadradinho é um centímetro quadrado... [a investigadora interrompe a aluna].*
Investigadora: *E será que é preciso desenhar quadradinhos para ver se têm a mesma área?*
RM: *Como é que nós sabemos? É para fazer aproximadamente?*
IM: *Eu acho que têm todas o mesmo porque os triângulos são todos iguais.*
RM: *Acho que não. Os lados, alguns são mais pequenos do que outros e por isso as figuras ficam com menos área quando estão assim [refere-se às figuras em que os catetos menores não são justapostos]. Este lado aqui [aponta para um dos lados do triângulo formado pela justaposição dos catetos menores de dois triângulos] fica maior, fica com mais quadradinhos e mais centímetros quadrados.*

Quadro 5 - Discussão realizada num grupo (BS, EG, IM, RM) na exploração da tarefa 3 da ficha de trabalho 1.

MS: *Já construímos todas as figuras.* ***DS****: Acho que a que tem maior área é esta [aponta para o triângulo formado pela justaposição dos catetos menores de dois triângulos].* ***Investigadora:*** *Porquê?* ***DS:*** *Por causa que acho que essa é a maior figura de sempre, de todas.* ***Investigadora:*** *E agora se eu fizer assim [movimenta os triângulos, justapondo agora os catetos maiores dos dois triângulos], a área é a mesma da outra figura ou é diferente?* ***DS:*** *É diferente. Não, igual. [fica indeciso]. Ora põe outra vez.* ***MS:*** *Para mim é igual, porque se nós trocarmos este por este vai dar a mesma coisa. Mesmo que esteja diferente é a mesma coisa.*

Quadro 6 - Discussão realizada num grupo (DS, LM, MS) na exploração da tarefa 3 da ficha de trabalho 1.

DF: *Nós pusemos: Sim, porque todas as figuras que se faz utiliza-se dois triângulos pequenos [lê a resposta].* ***Investigadora:*** *E o que é que isso quer dizer? Explica-me lá.* ***DF:*** *Quer dizer que cada figura geométrica que nós construímos tem a mesma área.* ***Investigadora:*** *Porquê?* ***DA:*** *Porque são dois triângulos iguais.* ***Investigadora:*** *Então quer dizer que se eu encostasse estes dois triângulos e fizesse uma figura qualquer, ela ia ter sempre a mesma área?* ***DF:*** *Não, isso também não.* ***Investigadora:*** *Então encontra-me uma que não tenha.* ***IF:*** *Sim, é sim.*

Quadro 7 - Discussão realizada num grupo (DA, DF, IF) na exploração da tarefa 3 da ficha de trabalho 1.

De um modo geral, os grupos não conceberam, de imediato, que podiam comparar a área das figuras mobilizando um raciocínio baseado na decomposição das mesmas em dois triângulos congruentes - *"nonmeasurement reasoning[11]"* (Battista, 2007, p. 903). Assim, alguns grupos, embora recorrendo ao tipo de raciocínio referido anteriormente, basearam-se, inicialmente, na aparência das figuras, realizando descrições meramente visuais na comparação da área destas, alicerçadas em estratégias imprecisas. Outros grupos insistiram, primordialmente, na utilização de procedimentos numéricos e de fórmulas - *"measurement reasoning[12]"* (Battista, 2007, p. 903).

Neste âmbito, a manipulação do material concreto pelos alunos constituiu-se essencial, uma vez que os impeliu a refletirem acerca das suas ideias e pensamentos e a elaborarem novas estratégias de raciocínio. Com efeito, os alunos formularam novas conjeturas sobre a área das figuras, resultantes de inferências baseadas na comparação direta (sobreposição) dos dois triângulos congruentes em que estas se decompõem e tendentes à compreensão do conceito de equivalência de figuras.

[11] Neste tipo de raciocínio, os alunos não utilizam números, realizando inferências visuais (Battista, 2007).

[12] Este tipo de raciocínio envolve a repetição de unidades de medida, bem como os procedimentos numéricos (Battista, 2007).

Neste sentido, todos os grupos, na tarefa 3, conseguiram deduzir a equivalência das figuras construídas, justificando-a com base na equivalência dos dois triângulos em que estas se podem decompor (figuras 8, 9 e 10). De realçar que, na figura 10, o aluno, e por extensão o respetivo grupo, explica a equivalência dos triângulos subdividindo-os num suposto número igual de unidades de área. Insistem, portanto, numa justificação assente, essencialmente, num *"measurement reasoning"* (Battista, 2007, p. 903).

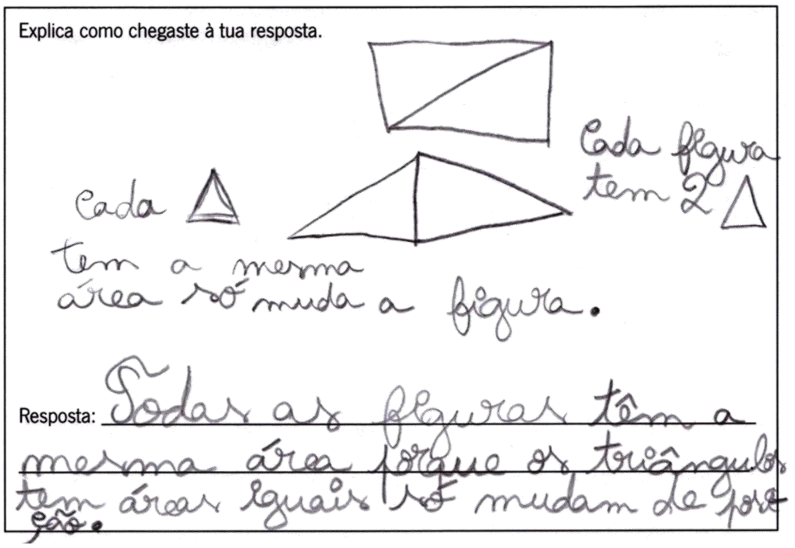


Figura 8 - Resolução de um aluno (RM) na tarefa 3 da ficha de trabalho 1.

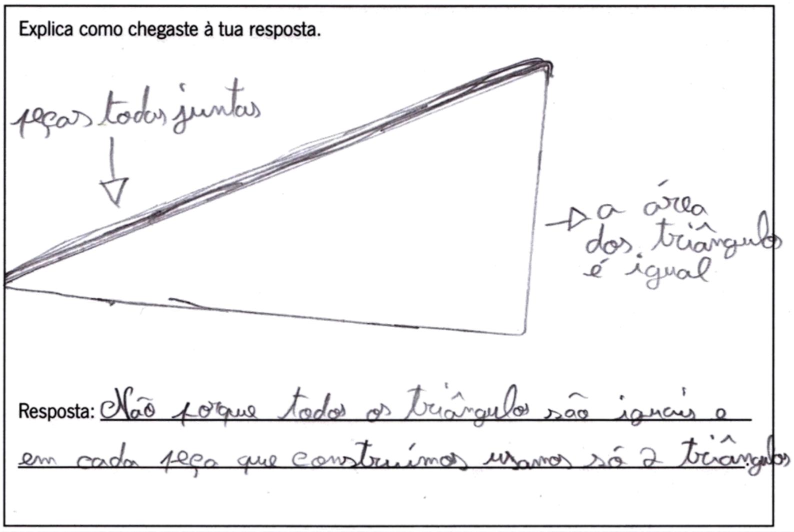


Figura 9 - Resolução de um aluno (CF) na tarefa 3 da ficha de trabalho 1.

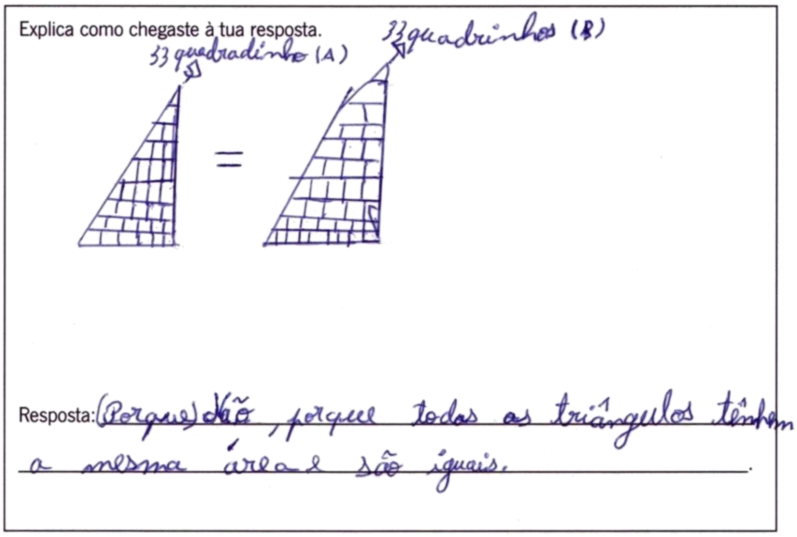


Figura 10 - Resolução de um aluno (RP) na tarefa 3 da ficha de trabalho 1.

Ainda que todos os grupos tenham respondido corretamente à tarefa 3, é de ressalvar que nem todos os alunos que os integravam tiveram uma compreensão igual acerca dos conteúdos explorados. De facto, no trabalho em pequeno grupo, "Muitas vezes, um ou dois alunos tomam a liderança e levam o grupo a centrar-se em certas ideias, facilitando, assim, o trabalho conjunto." (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003, p. 30). Ora, uma vez que foi privilegiado o equilíbrio intergrupos, os alunos com melhor desempenho a Matemática, distribuídos pelos diferentes grupos, assumiram o papel de líderes na atividade, cujo sucesso dependeu, sobretudo, da sua iniciativa.

No final, promoveu-se um momento de discussão/reflexão em plenário acerca da parte I da ficha de trabalho 1. Para isso, diferentes alunos desenharam, no quadro de giz, uma das seis figuras construídas com os dois triângulos, colando, junto ao seu desenho, a respetiva figura feita em cartolina. Neste momento, introduziu-se a designação das seis figuras - bissemis.

Depois, os grupos partilharam as conclusões relativamente à área dos bissemis. Aqui, os alunos limitaram-se à leitura das produções escritas na tarefa 3, revelando dificuldades em comunicar as suas estratégias de raciocínio. Embora diferentes, as resoluções apresentadas confluíram na ideia de que, sendo a área de cada um dos triângulos igual, qualquer bissemi, ao ser formado por dois destes triângulos, teria a mesma área. Parece agora claro que, devido à correção das respostas apresentadas, não foi concedido o tempo necessário para que os alunos pudessem detalhar os seus raciocínios matemáticos, bem como debater acerca das conjeturas e justificações partilhadas pelos outros grupos.

Em continuidade, questionaram-se os alunos acerca do nome atribuído às figuras que têm a mesma área, tal como os bissemis. Um aluno da turma respondeu prontamente: *"figuras equivalentes"* (CF). Os restantes alunos asseveraram, demonstrando reconhecer o conceito matemático.

Posteriormente, distribuiu-se aos alunos a parte II da ficha de trabalho 1 - "Comparação da área de figuras diferentes" (anexo D) e o material - bissemis. Nesta parte da ficha, os alunos deviam construir uma figura, justapondo os lados de igual comprimento de um número de bissemis à sua escolha. Depois, deviam colá-la numa folha, contorná-la e atribuir-lhe um título. E, no final, deviam registar, na ficha, o número de bissemis utilizados.

É de sublinhar um envolvimento espontâneo dos alunos na tarefa, os quais não demonstraram dúvidas na interpretação do que era pretendido. Após os alunos terem finalizado, recolheram-se as figuras construídas, que foram coladas no quadro de giz (figura 11).

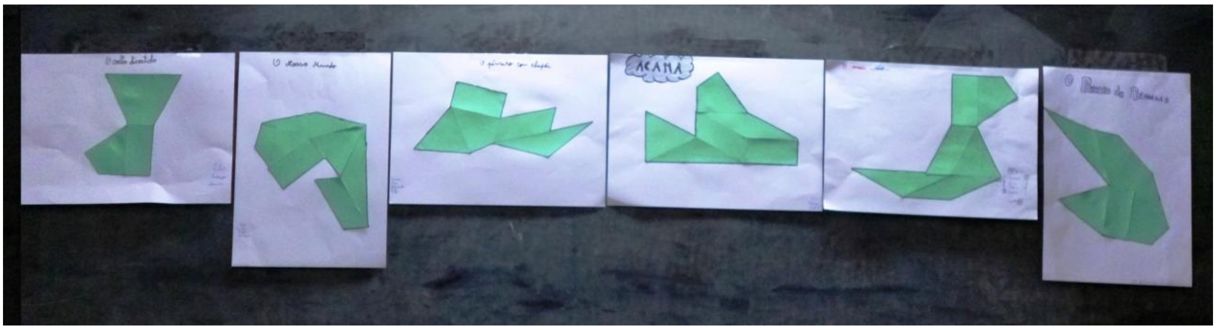


Figura 11 - Figuras construídas na tarefa 4 da ficha de trabalho 1.

Em decurso, promoveu-se um momento de discussão/reflexão em plenário acerca da área das figuras expostas, no qual os alunos, baseados na observação e desconhecendo o número de bissemis utilizado pelos restantes grupos, deviam identificar as que seriam equivalentes. Procurou-se fomentar uma atmosfera de respeito mútuo e confiança, no sentido de os alunos se sentirem confortáveis para argumentarem e discutirem as suas ideias e pensamentos com os pares (Martinho & Ponte, 2005).

De um modo geral, todos os alunos foram congruentes ao identificarem duas figuras com menor área do que as restantes: *"Eu acho que todas têm a mesma área a não ser a primeira e o pássaro com chapéu [refere-se à terceira]"* (CF). E, a par de alguns alunos que não conseguiram fundamentar as suas opiniões, os alunos da turma basearam-se no número de bissemis utilizado na construção das figuras para justificarem a equivalência de algumas destas figuras: *"Porque eu contei aquelas coisinhas [refere-se aos bissemis] e acho que ali tem quatro [refere-se à primeira] e ali contei cinco [refere-se à terceira]. As outras têm seis. São equivalentes."* (MP).

Registou-se, então, no quadro de giz, o número de bissemis que os alunos pensavam estar presente em cada figura. No final, cada um dos grupos revelou o número de bissemis que efetivamente utilizou, o qual foi confrontado com as previsões anteriores dos alunos, que se revelaram corretas.

Tendo por base o objetivo subjacente à primeira intervenção, é de realçar que as oportunidades de ensino-aprendizagem proporcionadas aos alunos para compararem a área de figuras diferentes se constituíram essenciais, no sentido em que permitiram focar a atenção dos mesmos na área. Conforme Van de Walle (1998), *"When students compare objects on the basis of some measurable attribute, that attribute becomes the focus of the activity."* (p. 312). Neste âmbito, os bissemis revelaram-se um material potencial, uma vez que possibilitaram, de uma forma criativa, concentrar a atenção dos alunos no atributo matemático mensurável área, que, por sua vez, se constituiu basilar para a compreensão e representação do conceito de equivalência de figuras.

4.1.2. Segunda Intervenção

A segunda intervenção, realizada em 22 de janeiro de 2015, tinha como objetivo a medição direta da área de figuras utilizando unidades não convencionais, tendente à compreensão da repetição de unidades de medida inerente ao processo de medição direta da área. Foi privilegiada a continuidade na utilização do material explorado na aula anterior, em particular os semis e os bissemis.

Distribuiu-se aos alunos a ficha de trabalho 2 - "Medição da área de figuras utilizando unidades não convencionais" (anexo E) e o material - triângulos retângulos congruentes cujo cateto maior é o dobro do cateto menor, bissemis, quadrados equivalentes aos triângulos, e puzzles construídos com um número variável de bissemis (Gerdes, 2008b). Esta ficha era composta por sete tarefas matemáticas: nas seis primeiras, os alunos deviam preencher três puzzles com os modelos concretos indicados (triângulos, bissemis, quadrados) e determinar a sua área, fixada uma destas unidades de medida; e, na sétima, os alunos deviam transcrever para uma tabela as áreas determinadas nas tarefas anteriores, no sentido de identificarem as regularidades existentes na área dos puzzles utilizando cada uma das unidades de medida e formularem conclusões. Construiu-se, ainda, uma extensão da tarefa 7, suplementar. Nesta, os alunos deviam explorar novos puzzles, sucessivamente mais complexos, e completar a tabela presente na tarefa 7, testando a validade das suas conclusões.

Deu-se continuidade à modalidade de trabalho em pequeno grupo adotada na intervenção anterior. No entanto, na composição dos seis grupos, valorizou-se, desta vez, o equilíbrio intragrupos, baseado no desempenho dos alunos em Matemática, enquanto meio facilitador de uma adaptação aos diferentes ritmos de aprendizagem dos alunos da turma.

Uma fragilidade demonstrada por quatro grupos foi o facto de não compreenderem como é que a contagem das unidades de área utilizadas para cobrir uma figura produz a medida de área da mesma. Efetivamente, na tarefa 1, depois de os grupos preencherem o puzzle 1 com os triângulos, comprovaram que eram necessários dez triângulos para o cobrir (figura 12). Contudo, só dois grupos associaram este valor à medida da área do puzzle (quadro 8), uma vez considerada esta unidade.

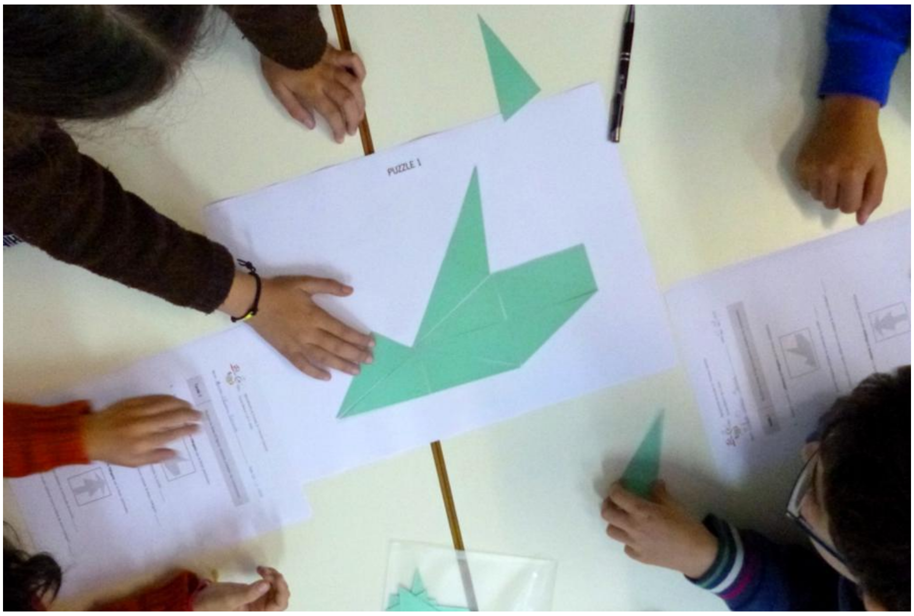


Figura 12 - Preenchimento do puzzle 1 com os triângulos na tarefa 1 da ficha de trabalho 2.

Investigadora: *Quantos triângulos é que usaram para construir este puzzle?*
Grupo: *Dez.*
Investigadora: *Agora, se o triângulo for a unidade de área, qual é a área deste puzzle?*
[ficam em silêncio]
Investigadora: *Então, se utilizaram dez triângulos para cobrir este puzzle, qual é a área dele, sabendo que cada triângulo vale uma unidade de área?*
DS: *É cem.*
Investigadora: *É cem porquê?*
DS: *Tinha de valer dez.*
FV: *Já sei. Vinte.*

Quadro 8 - Discussão realizada num grupo (BS, DS, FV) na exploração da tarefa 1 da ficha de trabalho 2.

De acordo com Battista (2007), *"many students do not properly maintain the connection between numerical measurements and the process of unit-measure iteration."* (p. 892). De facto, tal como evidencia o quadro 8, os alunos não associaram a área do puzzle 1 ao processo de repetição da unidade de área, designadamente o triângulo. Ora, a fragilidade demonstrada constitui a uma das duas razões que, no entendimento de Outhred e Mitchelmore (2000), firmam a ineficácia das atividades de preenchimento de figuras com materiais concretos, no caso particular para a compreensão da área, a saber: *"children may not relate the concrete materials to the mathematical concepts they are supposed to represent."* (p. 146).

Outra fragilidade observada, esta transversal à totalidade dos grupos, ocorreu ao nível das unidades de área utilizadas para expressar a área dos puzzles. De facto, os grupos, mesmo apreendendo que, para determinar a área do puzzle 1, tinham que contar as dez unidades de área (triângulos) utilizadas para o cobrir, expressaram a sua área sem qualquer unidade de área, ou com unidades de área do sistema métrico (quadro 9), ou até mesmo com unidades de comprimento do sistema métrico (quadro 10).

Investigadora: *Então, se o triângulo for a unidade de área, qual é a área deste puzzle?* ***CF:*** *[aponta para cada um dos triângulos utilizados, contando-os em silêncio] É dez.* ***Investigadora:*** *Dez quê?* ***CF:*** *Dez metros quadrados.* ***Investigadora:*** *Metros quadrados? Afinal o que estamos a considerar como unidade de área?* ***CF:*** *Dez triângulos.* ***RM:*** *A área é em centímetros quadrados!* ***Investigadora:*** *Mas também podemos utilizar outras unidades, não podemos?* ***CF:*** *Por exemplo, naquela coisa "De que tamanho é o pé do rei", naquilo da cama do aprendiz calculaste em pés. Então aqui é a mesma coisa, está a calcular em triângulos.*

Quadro 9 - Discussão realizada num grupo (CF, MS, RM, RP) na exploração da tarefa 1 da ficha de trabalho 2.

AM: *Qual é a área do puzzle, utilizando como unidade de área o triângulo? [lê a pergunta].* ***Investigadora:*** *Então se a unidade de área for um triângulo, se eu considerar esta [aponta para um dos triângulos] a unidade de área...* ***GP:*** *Isso vale um!* ***Investigadora:*** *E qual é a área deste puzzle?* ***GP:*** *É dez.* ***Investigadora:*** *Muito bem.* ***GP:*** *Mas temos que por dez centímetros?*

Quadro 10 - Discussão realizada num grupo (AM, DA, GP, MM) na exploração da tarefa 1 da ficha de trabalho 2.

Esta fragilidade sugere-se até paradoxal: se, por um lado, os alunos revelaram compreender que a medição direta da área "se traduz numa comparação imediata entre a unidade e a grandeza a medir" (Ferreira & Sousa, 2007, pp. 133-134), por outro lado, demonstraram não estar cientes da unidade de medida utilizada "para exaurir o atributo" (Ralha & Gomes, 2004, p. 378). E alguns revelaram mesmo não compreender que a unidade de medida deve escolher-se "de entre um atributo da mesma espécie daquele que pretendemos medir" (Ralha & Gomes, 2004, p. 380). Segundo o NCTM (2007), "Compreender que são necessárias unidades distintas para medir atributos mensuráveis (grandezas) diferentes é, por vezes, difícil para os alunos mais novos. Aprender a selecionar a unidade apropriada constitui o cerne da compreensão da medição." (p. 49).

As fragilidades anteriores, ainda que mais presentes e difíceis de ultrapassar em certos grupos, tornaram-se menos frequentes à medida que eles progrediram na resolução da ficha. Assim, todos os grupos revelaram maior autonomia e correção nas tarefas subsequentes, quer relativamente ao reconhecimento do número de unidades necessárias para cobrir os puzzles como o valor numérico da sua área, quer na indicação correta das unidades de medida consideradas.

A tarefa 6 constituiu-se, porém, mais exigente e desafiante para os alunos, uma vez que a unidade de área utilizada não permitia preencher o puzzle 3 (figura 13).

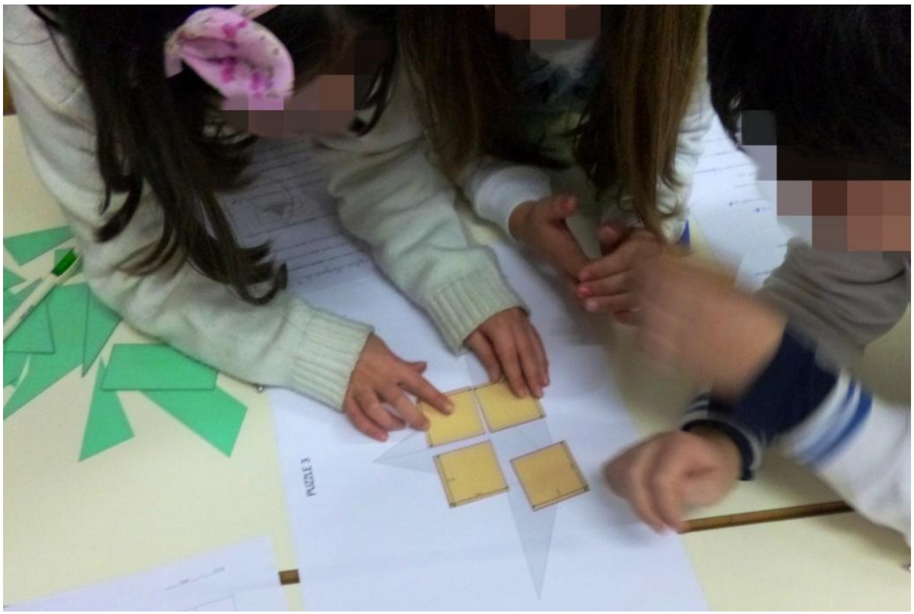


Figura 13 - Tentativa de preenchimento do puzzle 3 com os quadrados na tarefa 6 da ficha de trabalho 2.

Neste sentido, apenas metade dos grupos da turma conjeturou e comprovou que o quadrado utilizado como unidade tinha a mesma área que o triângulo, determinando a área do puzzle 3 corretamente. Dois destes grupos chegaram a esta conclusão quando preencheram o retângulo presente no puzzle 3 com dois quadrados e perceberam que, sendo o retângulo formado por dois triângulos congruentes, cada triângulo tinha que ter a mesma área que o quadrado. O outro grupo chegou a uma conclusão confluente quando sobrepôs o triângulo e o quadrado, verificando que a parte do quadrado que ficava "de fora" do triângulo correspondia à parte do triângulo que ficava "de fora" do quadrado. Portanto, a manipulação do material concreto constituiu-se basilar para o estabelecimento da relação de equivalência do quadrado do triângulo pelos grupos. Este facto corrobora a importância reconhecida à utilização de material manipulável "como meio facilitador de uma aprendizagem significativa de diversos conceitos e relações matemáticas." (Oliveira, 2008, p. 25).

Na tarefa 7, todos os grupos conseguiram perceber a regularidade existente na área dos três puzzles utilizando como unidade de área o triângulo e os bissemis. Porém, quanto à regularidade existente na área dos três puzzles utilizando como unidade de área, também, o quadrado, somente os três grupos que comprovaram que o quadrado e o triângulo eram equivalentes é que a apreenderam.

Com efeito, na tarefa 7.1, sabendo que a área do puzzle 1 era dez triângulos, todos os grupos foram capazes de inferir e justificar a área deste puzzle utilizando como unidade de área os bissemis (figura 14), mas apenas os três grupos referenciados anteriormente conseguiram, também, deduzir e fundamentar a sua área utilizando como unidade de área o quadrado (figuras 15 e 16).

Sim (porque) é 5 porque cada bissemi leva 2 triângulos.

Figura 14 - Resolução de um aluno (BS) na tarefa 7.1 da ficha de trabalho 2.

Na área do puzzle 1 são 5 bissemis porque em cada bissemi tem 2 triângulos e metade de 10 é 5, em quadrados são 10 porque um triângulo equival a um quadrado.

Figura 15 - Resolução de um aluno (MS) na tarefa 7.1 da ficha de trabalho 2.

São 5 bissemis porque é metade do número que ocupa o triângulo.
São 10 quadrados porque é o dobro do espaço do bissemis.

Figura 16 - Resolução de um aluno (DA) na tarefa 7.1 da ficha de trabalho 2.

Da mesma forma, na tarefa 7.2, sabendo que a área do puzzle 2 era oito triângulos ou quatro bissemis, apenas aqueles grupos conseguiram inferir e explicar a área deste puzzle utilizando como unidade de área o quadrado.

E, uma vez mais, na tarefa 7.3, somente aqueles grupos conseguiram formular conclusões generalizadas relativamente à área dos três puzzles, utilizando como unidades de área o triângulo, os bissemis e o quadrado (figura 17).

Posso concluir que a area dos puzles 1, 2 e 3 no bissemi é metade da area no triangulo e no quadrado

Figura 17 - Resolução de um aluno (DA) na tarefa 7.3 da ficha de trabalho 2.

Dois grupos terminaram a tarefa 7 antecipadamente, pelo que ainda exploraram a extensão construída para a tarefa 7.

No final, promoveu-se um momento de discussão/reflexão em plenário acerca da ficha de trabalho 2. Para isso, colaram-se os puzzles 1, 2 e 3 no quadro de giz. Depois, os grupos partilharam as respostas dadas nas tarefas 1 a 5, registando as áreas dos puzzles junto destes, considerando como unidades de área o triângulo e os bissemis. Tal como se previa, as respostas estavam corretas.

Uma vez que as tarefas subsequentes, que envolviam o quadrado como unidade de área, não foram acessíveis a todos os alunos, realizou-se, já nesta fase, uma sistematização relativa à medição direta da área de figuras, baseada no processo de repetição de unidades de medida.

Na discussão da tarefa 6, os grupos que a realizaram com sucesso partilharam com a turma o conhecimento produzido em colaboração. Nesta fase, estimulou-se a comunicação entre os alunos, incentivando-os a questionarem os seus pares acerca das ideias apresentadas, tendo em vista a compreensão das suas realizações. Todavia, este momento foi essencialmente dirigido pelos grupos que formularam inferências válidas, sendo que os restantes afirmaram somente concordarem.

Com o intuito de concretizar a relação de equivalência do quadrado e do triângulo, aplicou-se uma das ideias apresentadas. Com efeito, todos os grupos colocaram um triângulo em cima de um quadrado, marcaram a parte do quadrado que ficava "de fora" do triângulo e cortaram essa parte. No final, colocaram as duas partes em que foi cortado o quadrado por cima do triângulo e, dessa forma, verificaram que a parte do quadrado que cortaram correspondia à parte do triângulo que ficava "de fora" do quadrado. Foi interessante observar as reações de admiração dos alunos, mesmo daqueles que tinham resolvido corretamente a tarefa.

Uma vez discutidas as relações entre a área de cada uma das unidades de medida utilizadas - triângulo, bissemis e quadrado -, a discussão da tarefa 7 constituiu-se linear.

Tendo por base o objetivo subjacente à segunda intervenção, é de salientar que as experiências de ensino-aprendizagem pensadas para os alunos medirem diretamente a área de puzzles por meio da repetição de unidades de medida não convencionais constituíram-se essenciais para a compreensão do próprio processo de medição deste atributo, ausente de procedimentos numéricos rotineiros e de fórmulas, que, tal como confirma Battista (2007), tão prematuramente têm sido privilegiados na abordagem à Medida geométrica. A opção pela continuidade na utilização do material da intervenção anterior relevou-se, por um lado, estruturante para os alunos e, por outro lado, permitiu acentuar as potencialidades do mesmo para o prosseguimento da exploração do conteúdo área, em particular na concretização da medição direta deste atributo.

4.1.3. Terceira intervenção

A terceira intervenção, realizada em 28 de janeiro de 2015, tinha como objetivo a distinção entre os conceitos de área e de perímetro. Uma vez mais, foi privilegiada a continuidade na utilização do material das aulas precedentes, em particular os bissemis.

Distribuiu-se aos alunos a ficha de trabalho 3 - "Área e Perímetro" (anexo F) e o material - bissemis. Esta ficha era composta por quatro tarefas matemáticas: na primeira, os alunos deviam investigar os diferentes comprimentos nos bissemis; na segunda, os alunos deviam pintar, com cores iguais, os lados dos bissemis com o mesmo comprimento, reproduzidos na ficha; na terceira, os alunos deviam investigar os bissemis isoperimétricos; e, na quarta[13], os alunos deviam comentar a existência de figuras com a mesma área e perímetros diferentes, a partir das opiniões de dois alunos relativamente aos bissemis, e apresentar um exemplo que fundamentasse a sua resposta. Construiu--se, ainda, a tarefa 5 (anexo G), suplementar. Nesta, os alunos deviam desenhar, em papel quadriculado, figuras não geometricamente iguais a um dos bissemis, mas com igual perímetro.

Privilegiou-se o trabalho individual, para os alunos assumirem a sua própria independência na realização de tarefas que visavam dar resposta a uma das dificuldades que ressaltou no levantamento das suas conceções prévias: a confusão entre os conceitos de área e de perímetro.

Desde logo, diversos alunos demonstraram dificuldades na interpretação da tarefa 1, revelando não compreenderem o que era pretendido e mostrando não conseguirem identificar uma estratégia de resolução eficaz (mesmo com a sugestão dada na tarefa, que remetia para a possibilidade de utilização da régua). Perante as solicitações frequentes dos alunos, evitou-se a exteriorização de opiniões concretas, optando-se por uma atitude aberta e questionadora que os impeliu a refletirem e a (re)formularem as suas estratégias face aos conflitos que experimentaram. Tal como menciona o NCTM (1994), "Em última análise, os alunos devem assumir a responsabilidade pela sua própria aprendizagem. No entanto, o professor é responsável pela criação de um ambiente no qual os alunos são encorajados a aceitar essa responsabilidade." (p. 118). Em consequência, os alunos demoraram bastante tempo a desenvolverem a atividade estruturadamente e com compreensão.

Na tarefa 1, os alunos recorreram a uma de duas estratégias que se apresentam a seguir: seis alunos utilizaram a manipulação do material para justaporem os lados dos bissemis e determinarem aqueles que seriam congruentes (figuras 18 e 19); e dezassete alunos usaram a régua para medirem os lados dos bissemis e determinarem aqueles que teriam a mesma medida (figura 20). Os dados

[13] Esta tarefa resulta da adaptação de uma questão integrada na Prova Final de Matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico de 2013 (1.ª Fase).

anteriores deixam claro que a segunda estratégia foi substancialmente mais usada. Verificou-se, com isto, que os alunos, na comparação de comprimentos, privilegiaram a comparação indireta, assente na medição com régua, em detrimento da comparação direta, baseada na justaposição dos lados.

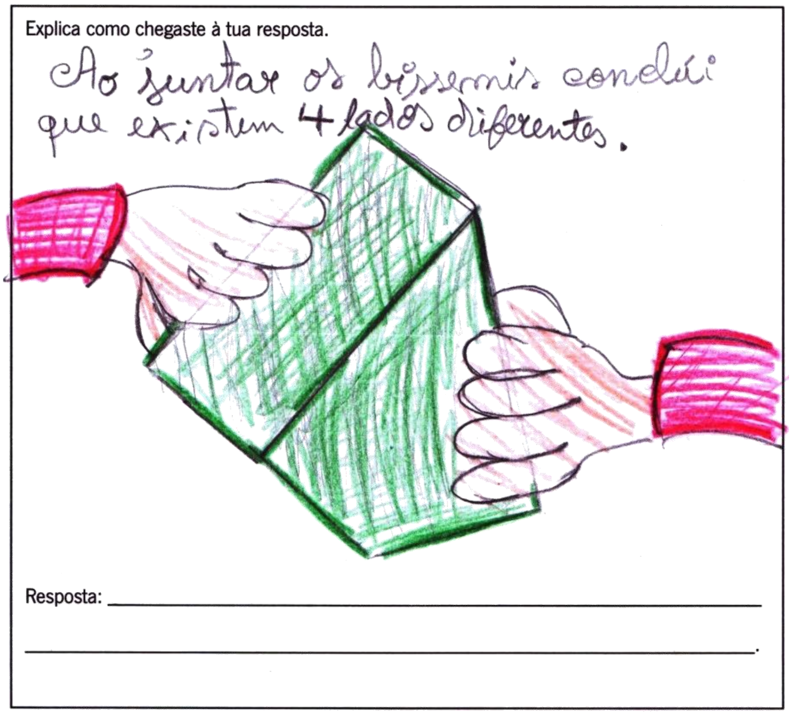


Figura 18 - Resolução de um aluno (AM) na tarefa 1 da ficha de trabalho 3.

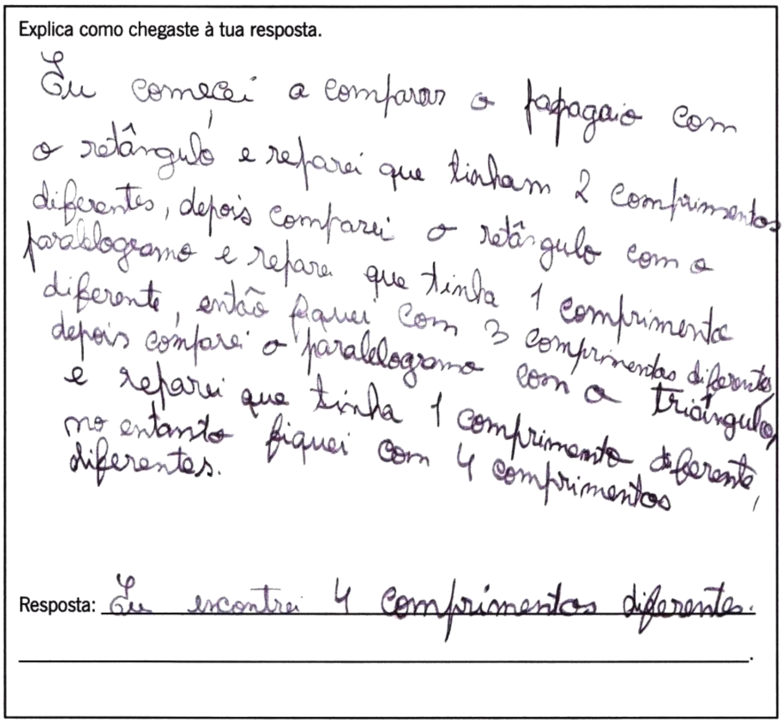


Figura 19 - Resolução de um aluno (IM) na tarefa 1 da ficha de trabalho 3.

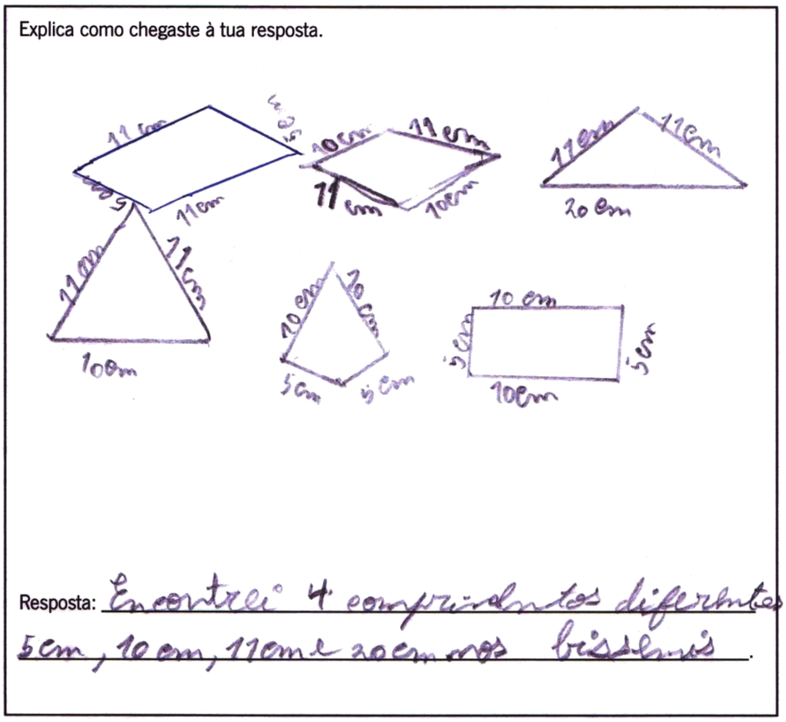


Figura 20 - Resolução de um aluno (RP) na tarefa 1 da ficha de trabalho 3.

Importa salientar que nenhum dos alunos da turma se fundamentou nas propriedades geométricas dos bissemis, particularmente a congruência de lados, para fazer deduções relativas aos diferentes comprimentos existentes nestas figuras. Mais do que isso, alguns alunos demonstraram, mesmo, não reconhecerem estas propriedades no decorrer da sua resolução. Expõem-se, a seguir, algumas dessas ocasiões.

Por exemplo, aquando da medição ou da comparação direta dos lados dos bissemis, certos alunos repetiram este procedimento para todos os lados destas figuras. Esta ação sugere, claramente, um raciocínio inconsistente com o reconhecimento de tais propriedades.

Outros exemplos são as fragilidades identificadas nas resoluções de determinados alunos, mais expressamente daqueles que recorreram à estratégia de medição, a saber: os lados de um dos pares de lados consecutivos congruentes do papagaio não apresentarem a mesma medida (figura 21) - um aluno; um dos pares de lados opostos paralelos do paralelogramo obtido pela justaposição dos catetos menores dos triângulos apresentar uma medida diferente de todos os outros comprimentos encontrados nos bissemis (figura 22) - um aluno; os quatro lados do paralelogramo obtido pela justaposição dos catetos menores dos triângulos apresentarem a mesma medida - dois alunos (figura 23); e o paralelogramo obtido pela justaposição dos catetos menores dos triângulos apresentar dois pares de lados consecutivos com a mesma medida (figura 24) - dois alunos.

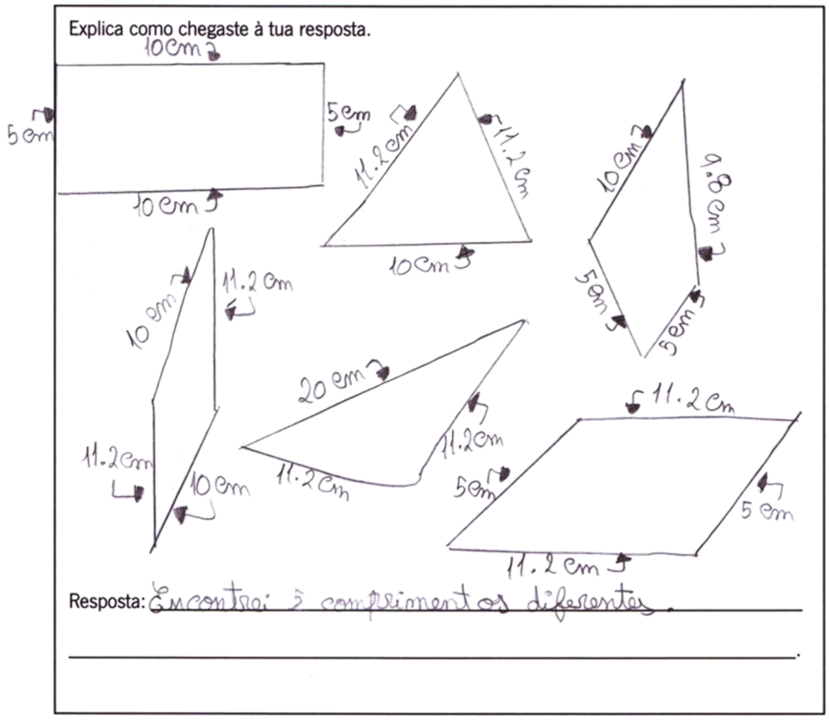


Figura 21 - Resolução de um aluno (BB) na tarefa 1 da ficha de trabalho 3.

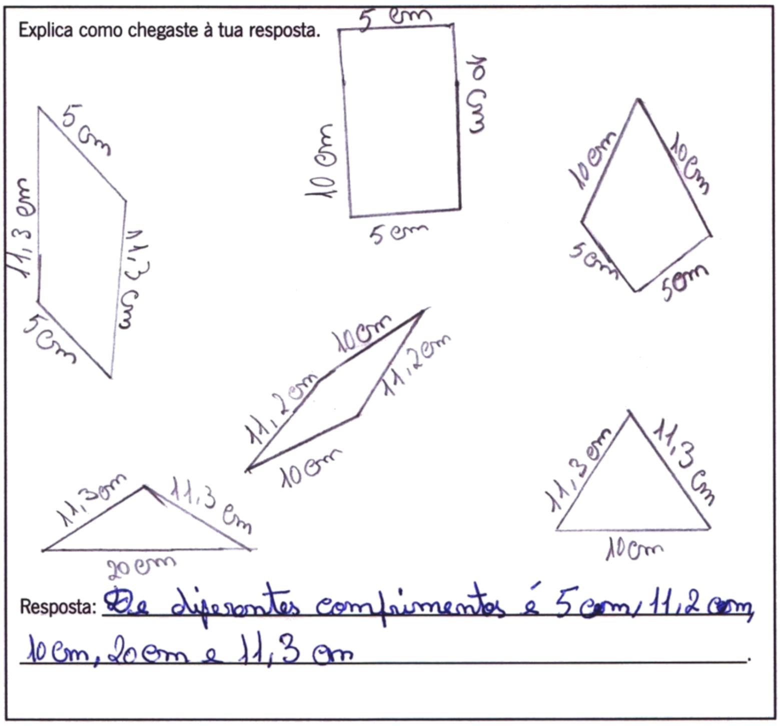


Figura 22 - Resolução de um aluno (BS) na tarefa 1 da ficha de trabalho 3.

As fragilidades ilustradas nas figuras 21 e 22 decorreram de erros na leitura da escala da régua pelos alunos, que não convocaram os conhecimentos acerca da congruência dos lados dos bissemis para repensarem os resultados, obtendo cinco comprimentos diferentes.

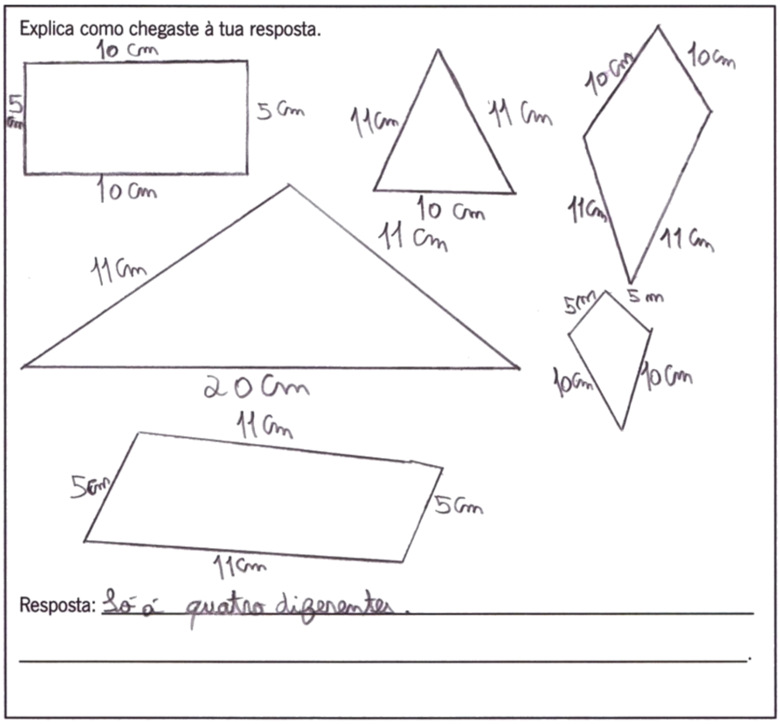


Figura 23 - Resolução de um aluno (LM) na tarefa 1 da ficha de trabalho 3.

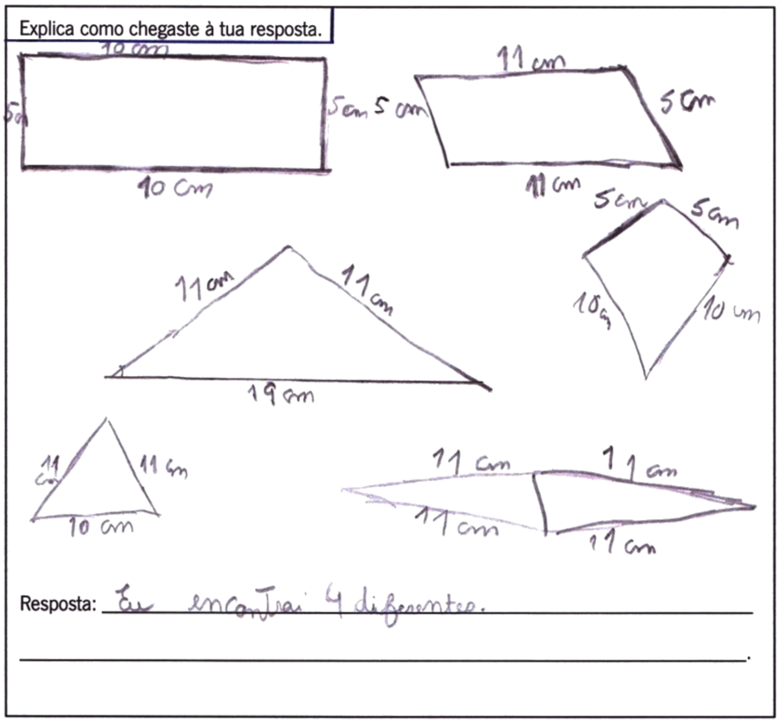


Figura 24 - Resolução de um aluno (EG) na tarefa 1 da ficha de trabalho 3.

As fragilidades ilustradas nas figuras 23 e 24 surgiram do reconhecimento erróneo dos lados congruentes dos bissemis pelos alunos, o que os levou a atribuírem medidas iguais a lados com comprimento diferente, sem concretizarem a medição.

Concluindo, na tarefa 1, a maioria dos alunos admitiu a existência de quatro comprimentos diferentes nos bissemis. Contudo, alguns alunos consideraram cinco comprimentos, em decurso das fragilidades supracitadas.

Durante o processo exploratório, todos os alunos, independentemente da estratégia de resolução que privilegiaram na tarefa 1, consideraram útil realizar, simultaneamente, a tarefa 2. Efetivamente, esta última permitiu-lhes registarem, gradualmente, as conclusões que foram construindo acerca dos diferentes comprimentos nos bissemis, o que facilitou a organização das suas ideias na tarefa 1. Assim, as suas respostas nestas tarefas foram convergentes, mesmo ao nível das fragilidades identificadas. Este facto permite concluir que a abordagem conjunta das tarefas teria sido mais estruturante para os alunos.

Na tarefa 3, todos os alunos privilegiaram a utilização da medição. Isto é, mesmo os alunos que anteriormente tinham investigado os diferentes comprimentos nos bissemis por comparação direta, optaram, agora, por medir os comprimentos dos seus lados a fim de determinarem os bissemis isoperimétricos. Este facto sugere que os alunos, perante a ausência de medidas para os lados dos bissemis, não conceberam a possibilidade de comparação dos perímetros dos mesmos, pelo que recorreram à medição.

Genericamente, todos os alunos identificaram "o perímetro de um polígono como a soma das medidas dos comprimentos dos lados, fixada uma unidade." (MEC, 2012, p. 13). Efetivamente, na tarefa 3, os alunos adicionaram as medidas dos lados de cada um dos bissemis para determinarem o seu perímetro, explicitando as somas - cinco alunos -, ou apresentando somente os resultados - dezoito alunos. De notar que eles não indicaram qualquer fórmula para o perímetro, embora esteja implícita a sua aplicação nos cálculos apresentados pelos mesmos.

Embora o procedimento utilizado na tarefa 3 tenha sido transversal à totalidade dos alunos, o mesmo não aconteceu com os resultados. Por um lado, estes foram determinados pelas discrepâncias na leitura da escala da régua, aquando da medição dos comprimentos. Por exemplo, verificou-se uma tendência geral para a leitura incorreta de uma das quatro medidas dos lados dos bissemis $\left(\sqrt{125}\ cm \approx 11{,}18\ cm\right)$, que foi apresentada como um número inteiro $(11\ cm)$, tal como é visível nas figuras 20, 23 e 24 anteriores. Alguns alunos revelaram maior rigor na leitura do instrumento, registando as medidas $11{,}2\ cm$ ou $11{,}3\ cm$, tal como é observável nas figuras 21 e 22 anteriores. Por outro lado, também as fragilidades anteriormente identificadas nas resoluções dos alunos na tarefa 1 concorreram para a disparidade dos resultados nesta tarefa, pois os alunos calcularam o perímetro dos bissemis com base nas medidas aí determinadas, muitas delas com incorreções.

Considerou-se que permeabilizar a passagem desta multiplicidade de resultados para a discussão/reflexão final encorajaria a comunicação e o debate de ideias, permitindo a construção de conclusões mais significativas. Consequentemente, não houve intervenção neste âmbito.

Na tarefa 4, dezassete alunos consideraram a existência de figuras com a mesma área e perímetros diferentes, reconhecendo validade à opinião do Afonso: «Os bissemis são figuras com a mesma área (figuras equivalentes) e que podem ter perímetros diferentes». Em contrapartida, seis alunos corroboraram a ideia da Matilde: «Acho que não! Não pode haver figuras com a mesma área e perímetros diferentes!».

Relativamente à apresentação de exemplos pelos alunos que concordaram com a opinião do Afonso, treze alunos apresentaram dois bissemis com perímetros diferentes (figura 25), apontando um exemplo concordante com a opinião que validam. Destes alunos, três fizeram, ainda, alusão à equivalência dos bissemis, traduzindo a área dos mesmos pela medida «dois triângulos» (figura 26). Um aluno seguiu uma linha de pensamento semelhante, apresentando três bissemis com perímetros diferentes, no entanto, decompô-los, não em dois triângulos, mas em cinco triângulos (figura 27), revelando confusão neste domínio. Dois alunos apresentaram dois bissemis com o mesmo perímetro (figura 28), fornecendo um exemplo contraditório à situação. Finalmente, um aluno, em vez de um exemplo, registou uma justificação verbal errónea (figura 29).

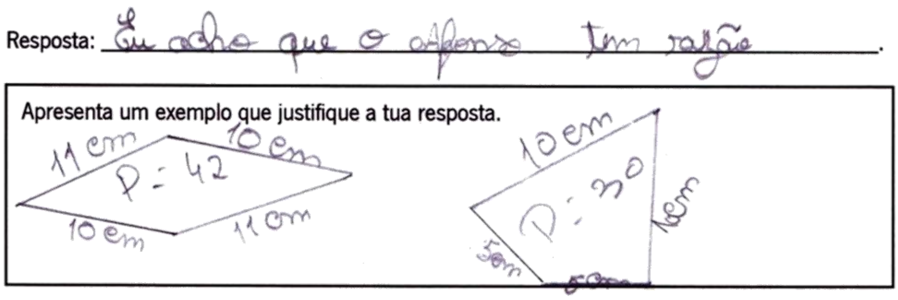


Figura 25 - Resolução de um aluno (IM) na tarefa 4 da ficha de trabalho 3.

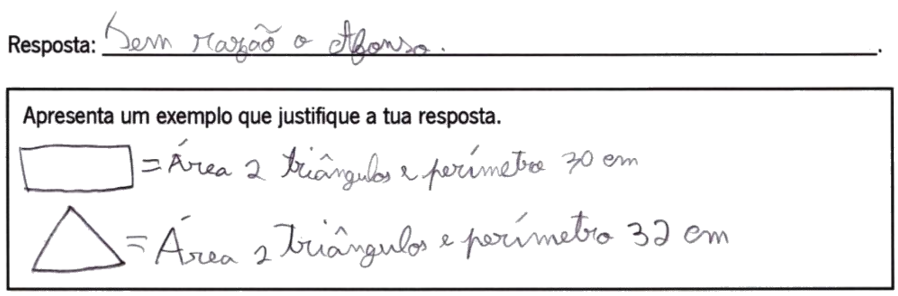


Figura 26 - Resolução de um aluno (CF) na tarefa 4 da ficha de trabalho 3.

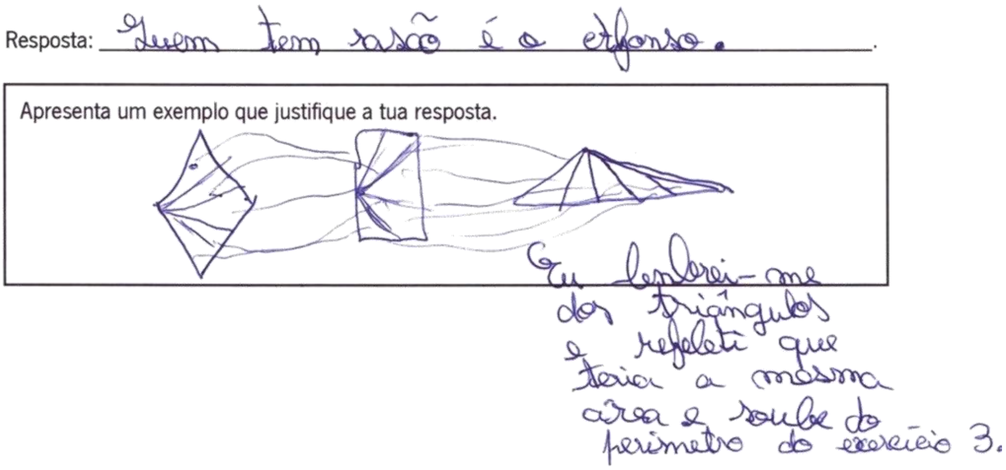


Figura 27 - Resolução de um aluno (MP) na tarefa 4 da ficha de trabalho 3.

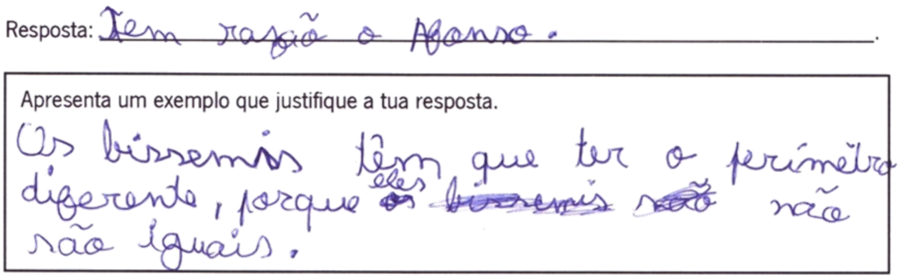


Figura 28 - Resolução de um aluno (DF) na tarefa 4 da ficha de trabalho 3.

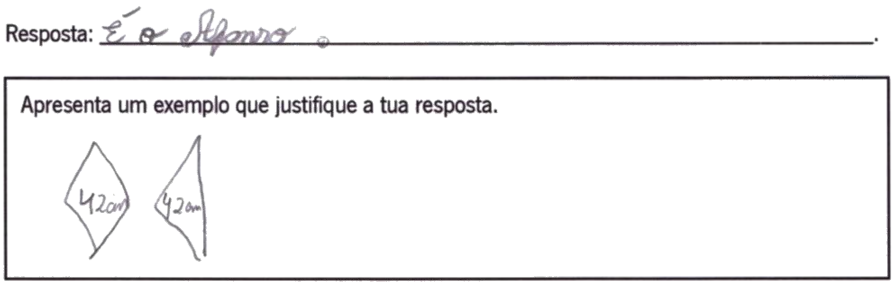


Figura 29 - Resolução de um aluno (AR) na tarefa 4 da ficha de trabalho 3.

No que concerne à apresentação de exemplos pelos alunos que concordaram com a opinião da Matilde, cinco alunos apresentaram dois bissemis com o mesmo perímetro (figura 30), sugerindo um exemplo concordante com a opinião que corroboram, mas não extensível à generalidade dos bissemis. A este respeito, Hirst (2004), reportando-se ao processo de prova matemática, declara: "não podemos provar resultados gerais através da simples verificação de alguns exemplos." (p. 130). Finalmente, um aluno não apresentou qualquer exemplo, expondo uma justificação verbal errónea (figura 31).

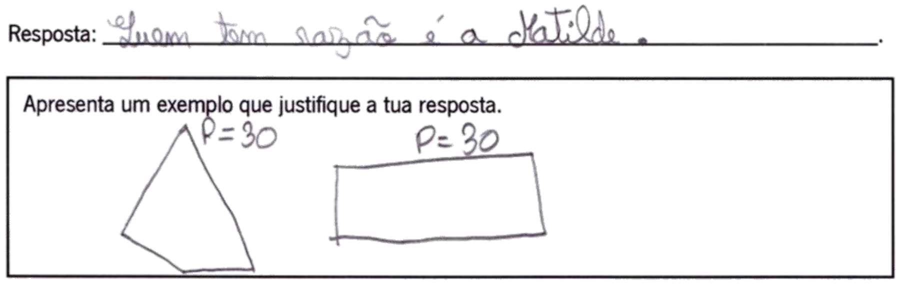


Figura 30 - Resolução de um aluno (BB) na tarefa 4 da ficha de trabalho 3.

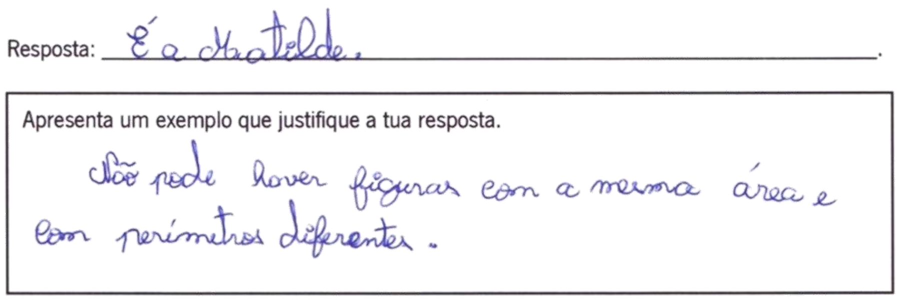


Figura 31 - Resolução de um aluno (JR) na tarefa 4 da ficha de trabalho 3.

Sintetizando, as respostas dos alunos na tarefa 3 sugerem que a maioria dos alunos da turma reconheceu que figuras com a mesma área, como são os bissemis, podem ter ou não o mesmo perímetro. Grande parte destes alunos mostrou-se, ainda, capaz de apresentar exemplos de bissemis concordantes com a premissa anterior. Contudo, assinalam-se, também, alguns alunos que, embora concordando com a opinião do Afonso, apresentaram exemplos ou justificações que contradiziam esta opinião. Portanto, permanecem dúvidas relativamente à sua compreensão. Por fim, uma minoria de alunos da turma explanou a ideia de impossibilidade de existirem figuras com a mesma área e perímetros diferentes. De facto, mesmo depois da exploração desenvolvida, estes mantiveram fixas as suas conceções, resistindo às evidências que os bissemis tão bem ilustram.

Ainda no tempo estipulado para a realização da ficha de trabalho 3, mais de metade dos alunos da turma - treze alunos - explorou, também, a tarefa 5. Em traços gerais, todos estes alunos conseguiram construir, pelo menos, uma figura não geometricamente igual a um dos bissemis à sua escolha mas com o mesmo perímetro. Destes, seis alunos, para além do bissemi escolhido, desenharam apenas o bissemi com o mesmo perímetro (figura 32). Três alunos alargaram o número de figuras com o mesmo perímetro, no entanto, cingiram-se às formas retangulares (figura 33). E, finalmente, quatro alunos apresentaram um conjunto mais variado de figuras com o mesmo perímetro, incluindo polígonos irregulares (figura 34).

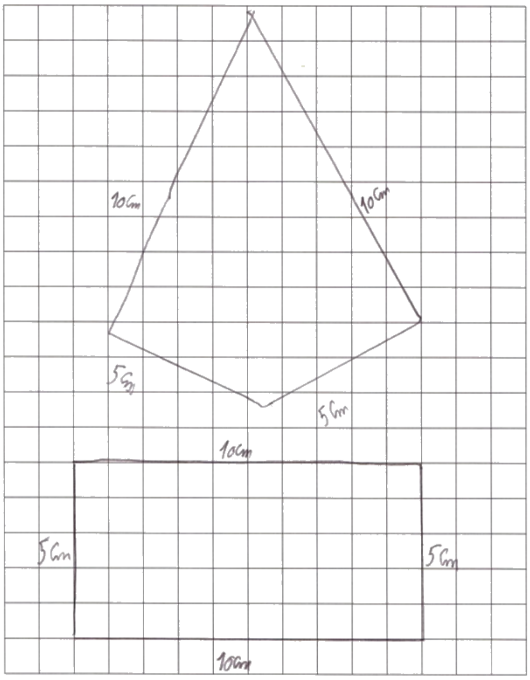


Figura 32 - Resolução de um aluno (DS) na tarefa 5 da ficha de trabalho 3.

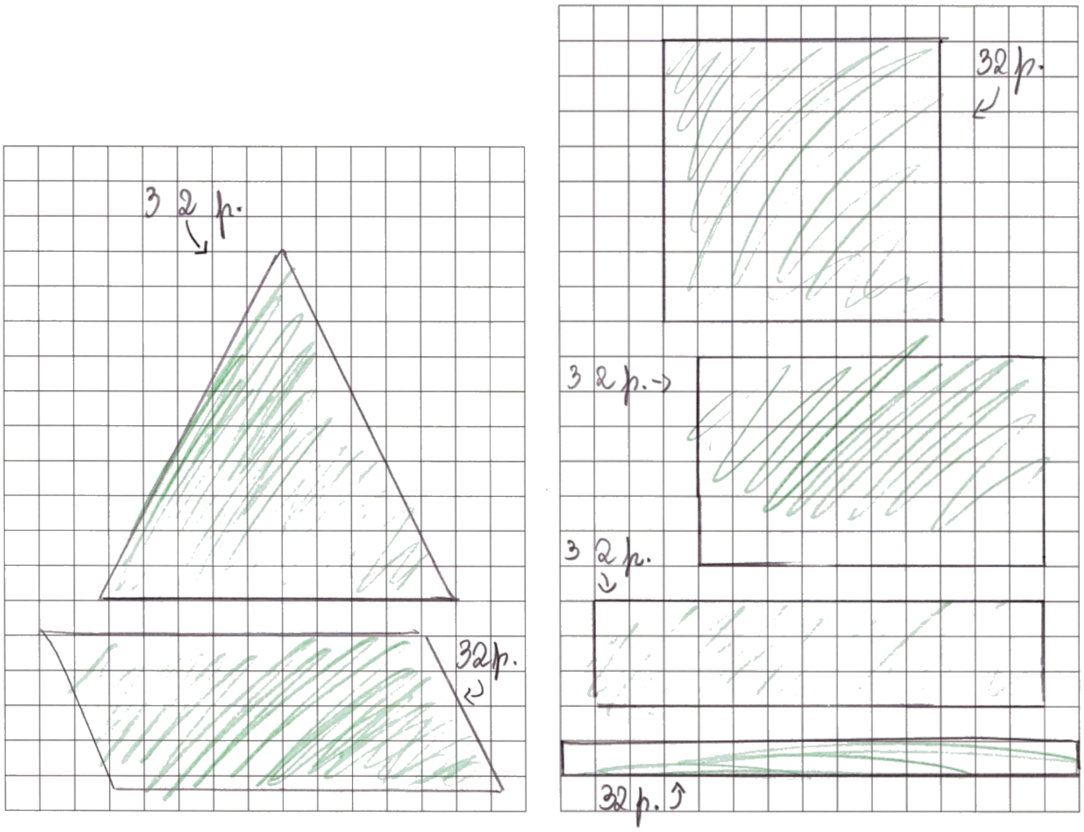


Figura 33 - Resolução de um aluno (AM) na tarefa 5 da ficha de trabalho 3.

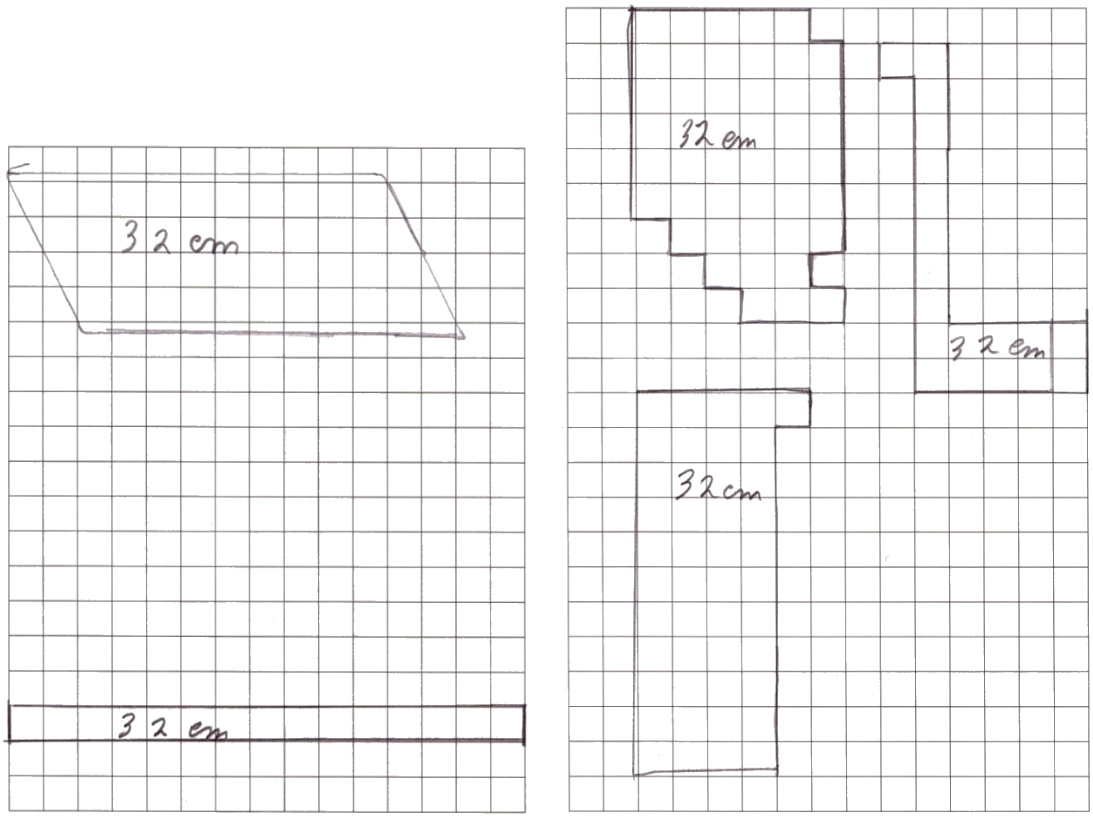


Figura 34 - Resolução de um aluno (RP) na tarefa 5 da ficha de trabalho 3.

No final, promoveu-se um momento de discussão/reflexão em plenário acerca da ficha. Tendo privilegiado o trabalho individual, a gestão deste momento constituiu-se mais exigente, uma vez que os alunos insistiram em partilhar o seu trabalho e, por vezes, revelaram menos interesse em escutar o dos seus pares.

Na tarefa 1, os alunos apresentaram uma das duas estratégias utilizadas, concluindo a existência de quatro ou cinco comprimentos diferentes. Enquanto suporte para a discussão da desigualdade anterior, colou-se no quadro de giz, os bissemis feitos em cartolina (subdivididos nos dois triângulos). A seguir, os alunos que privilegiaram a estratégia de medição partilharam as diferentes medidas dos lados dos bissemis, as quais foram registadas no quadro de giz. Desafiaram-se, então, os alunos da turma a compararem diretamente (com os seus bissemis) alguns dos lados considerados diferentes. Nesta altura, tornou-se evidente que determinados alunos questionaram a validade das suas ideias, assumindo algumas incorreções.

Em continuidade, focalizou-se a atenção dos alunos na decomposição, em dois triângulos, dos bissemis colados no quadro de giz. Com efeito, a maioria dos alunos notou a congruência de lados nos bissemis, o que permitiu corroborar e aprofundar as conclusões anteriores.

Foram, ainda, debatidas as diferentes medidas determinadas para os lados dos bissemis. Neste âmbito, tornou-se consensual a consideração de três medidas de valor inteiro $(5\ cm, 10\ cm, 20\ cm)$ e de uma medida de valor aproximado $(11{,}2\ cm)$.

Em virtude do aprofundamento e da abrangência subjacentes à discussão da tarefa 1, as restantes foram corrigidas com maior celeridade, não se identificando constrangimentos.

No final, realizou-se uma sistematização geral acerca de todo o trabalho desenvolvido com os bissemis, retomando, em interação com a turma, as atividades desenvolvidas pelos alunos ao longo das três aulas precedentes, bem como os principais conteúdos explorados.

Tendo por base o objetivo subjacente à terceira intervenção, é de acentuar que as atividades desenvolvidas individualmente pelos alunos, tendentes à distinção entre os conceitos de área e de perímetro, constituíram-se relevantes, uma vez que permitiram responder a um erro evidenciado por vários alunos aquando do levantamento das suas conceções prévias, e amplamente documentado pela literatura: a confusão entre estes dois conceitos. Neste contexto, os bissemis, pelas suas características - todos equivalentes e alguns com perímetro distinto -, constituíram-se um material fundamental para auxiliar as explorações dos alunos, possibilitando situações de aprendizagem ativa e com sucesso. Na verdade, o material permitiu, progressivamente, contornar as dificuldades experimentadas pelos alunos ao longo da aula, facilitando a compreensão dos conteúdos.

4.2. Desenvolvimento e Avaliação da Intervenção Pedagógica no 2.º Ciclo do Ensino Básico

4.2.1. Primeira Intervenção

A primeira intervenção, realizada em 22 de abril de 2015, tinha como objetivo a abordagem, com compreensão, da fórmula para a área do paralelogramo. Esta teve como suporte a exploração de um material mecânico, que foi (re)construído a partir de um mecanismo pré-estruturado. De acordo com os seus autores, Van der Meer e Gardner (1994),

> *We use formulae to find the area of shapes. For a rectangle it is area = length × width, with the answer expressed in square units. This knowledge helps us to calculate the area of other shapes. The mechanic shows either a parallelogram or a rectangle. Both have the same area. The triangle you cut out of the parallelogram is the same as the one you add to the rectangle. So the formula to the parallelogram is: area = base × height.* (p. 9)

Em concordância com os autores supracitados, o mecanismo referenciado possibilita a abordagem da fórmula para a área do paralelogramo, tendo subjacente a concretização de que se pode construir, a partir deste, um retângulo com a mesma área. Ora, este é o propósito que estará na base da construção, pelos alunos, da fórmula para a área do paralelogramo, devidamente apresentada na descrição seguinte.

Distribuiu-se aos alunos a parte I da ficha de trabalho 1 - "Área de figuras planas: paralelogramos" (anexo H) e o material mecânico tendente à investigação da fórmula para a área do paralelogramo[14] (figura 35). Esta parte da ficha era composta por quatro tarefas matemáticas: na primeira, os alunos deviam observar o paralelogramo presente no material mecânico que lhes foi distribuído; na segunda, os alunos deviam movimentar a tira do material mecânico e indicar a figura então obtida; na terceira, os alunos deviam formular conclusões relativamente à área das duas figuras anteriores; e, na quarta, os alunos deviam escrever a fórmula para a área do paralelogramo, a partir da exploração realizada.

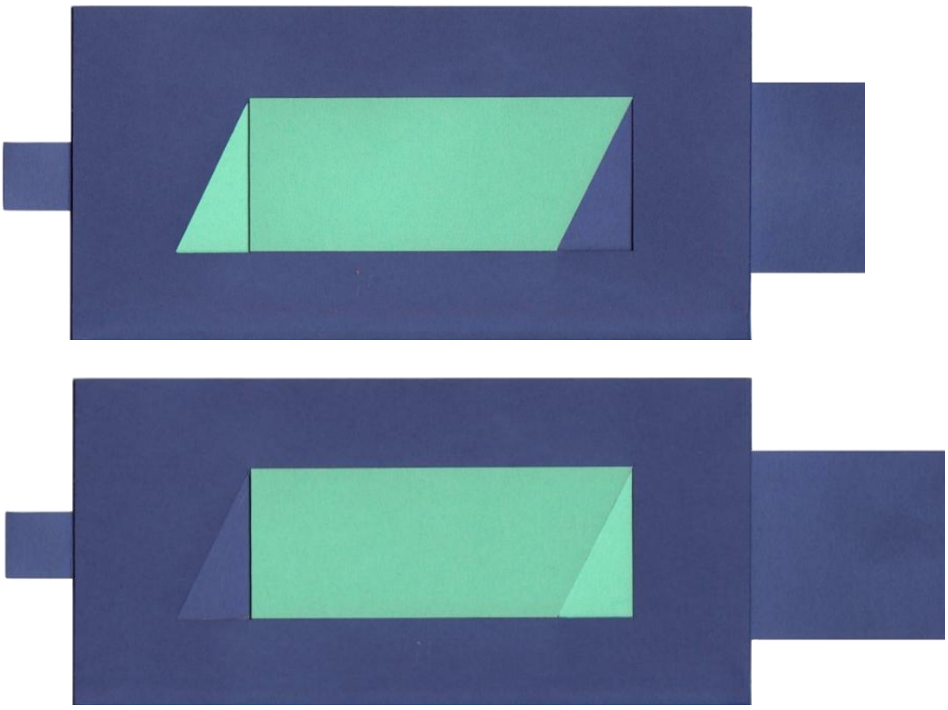


Figura 35 - Material mecânico (re)construído para a abordagem da fórmula para a área do paralelogramo.

Privilegiou-se o trabalho em pequeno grupo, mantendo a organização habitual dos alunos no espaço educativo da sala de aula, promotora de um ambiente de ensino-aprendizagem propício à

[14] Este material mecânico incorpora um paralelogramo com as mesmas dimensões que um dos bissemis construídos na primeira intervenção do 1.° Ciclo do Ensino Básico. Esta particularidade foi propositadamente pensada no sentido de conferir maior coerência e continuidade ao Projeto e aos próprios materiais didáticos utilizados.

comunicação e ao debate de ideias. Esta organização considerava cinco grupos equilibrados entre si e um grupo composto pelos alunos que evidenciavam claras dificuldades em acompanhar o ritmo de trabalho dos restantes, permitindo um apoio mais persistente e ativo neste último. A necessidade de um acompanhamento permanente na leitura da ficha de trabalho ao aluno identificado com NEE, designadamente dislexia, foi assegurada em articulação com o par de estágio.

Inicialmente, os alunos desenvolveram, espontaneamente, um primeiro contacto intuitivo com o material mecânico, observando-o e explorando-o livremente. Na tarefa 1, os grupos, tal como era proposto, focalizaram a sua atenção no paralelogramo presente no material, o qual conseguiram identificar com facilidade. Ora, apesar de aparentemente evidente, a identificação desta figura geométrica pelo grupo de alunos com maiores dificuldades não foi tão acessível. Efetivamente, eles demonstraram não conhecerem as propriedades geométricas dos paralelogramos, nem tampouco deterem uma representação visual destas figuras, que lhes facilitasse o reconhecimento do paralelogramo presente no material mecânico. Como tal, sugeriram possibilidades de figuras incorretas. Posto isto, decidiu-se usar antecipadamente os paralelogramos que iam ser utilizados somente na parte II da ficha de trabalho. Tendo por base a observação destes paralelogramos, os alunos identificaram algumas características comuns nos mesmos e, transferindo esse conhecimento para a tarefa, conseguiram percecionar o paralelogramo em questão.

Na tarefa 2, os grupos utilizaram, espontaneamente, o movimento permitido pelo material mecânico para transformarem o paralelogramo anterior num retângulo. A identificação desta última figura geométrica constituiu-se, desta vez, acessível para todos os grupos da turma.

Na tarefa 3, os grupos da turma, genericamente, determinaram, sem dificuldades, que a área do paralelogramo e do retângulo era igual e que, portanto, as figuras eram equivalentes. Ora, o movimento horizontal reversível do triângulo presente no material mecânico, que permitia visualizar, ora um paralelogramo, ora um retângulo (que é também um paralelogramo), constituiu um suporte essencial para a estruturação desta conclusão pelos alunos, tal como evidenciam as explicações apresentadas por eles na tarefa (figuras 36 e 37). De salientar que os alunos de um grupo mediram, com a régua, os lados do triângulo que surgia do lado esquerdo do material, compondo o paralelogramo, e os lados do triângulo que surgia do lado direito do material, formando o retângulo, e, com estas medidas, comprovaram a congruência dos três lados em ambos os triângulos, o que lhes permitiu, de uma forma conceptualmente correta (baseada no critérios de congruência de triângulos), concretizarem a ideia de que o triângulo que surgia do lado esquerdo era geometricamente igual ao triângulo que surgia do lado direito, tal como sugeria o movimento do triângulo permitido pelo material mecânico.

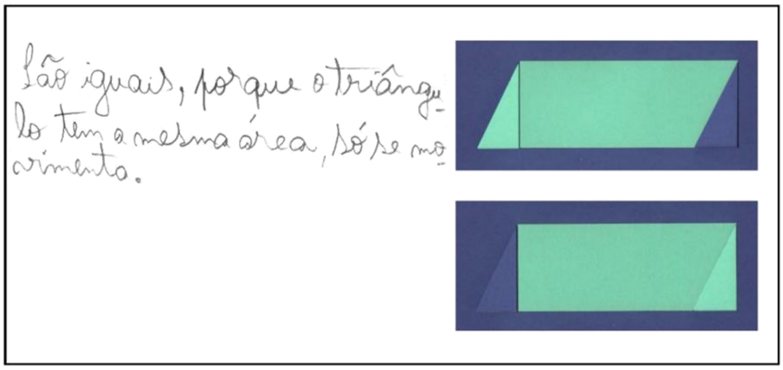


Figura 36 - Resolução de um aluno (JC) na tarefa 3 da ficha de trabalho 1.

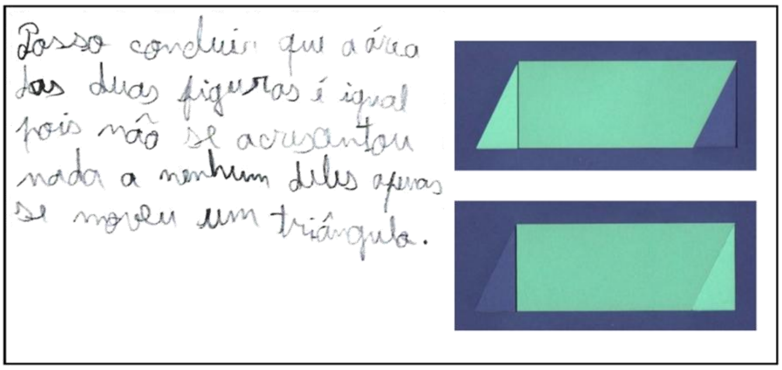


Figura 37 - Resolução de um aluno (GR) na tarefa 3 da ficha de trabalho 1.

A tarefa 3 exigiu uma atenção particular ao grupo dos alunos com dificuldades, para os quais o reconhecimento da equivalência do paralelogramo e do triângulo não foi tão imediato e acessível, tal como se pode reconhecer na interação que se procurou estimular junto dos mesmos (quadro 11).

MQ: *A área é diferente porque nesta parte tem um triângulo e aqui... [fica indeciso]. Não, não é isso. É igual, é igual!*
Investigadora: *Então, por que é que a área das figuras é igual?*
MQ: *Porque têm a mesma forma.*
LF: *Não. É diferente! Um é paralelogramo e o outro é retângulo.*
Investigadora: *E o que é que acontece quando movimento a tira do material mecânico e transformo o paralelogramo num retângulo?*
LF: *Este triângulo que está aqui passa para o outro lado.*
Investigadora: *E então, a área altera-se?*
RG: *Sim, altera.*
LF: *Não altera! Não altera!*
Investigadora: *Por que é que não se altera? Estás a mudar de opinião, explica-me então como estás a pensar agora.*
LF: *Porque só se está a mover o triângulo. Tiramos de um lado, mas depois adicionamos o mesmo valor do outro lado e dá sempre o mesmo.*

Quadro 11 - Discussão realizada num grupo (LF, MQ, RG) na exploração da tarefa 3 da ficha de trabalho 1.

Os alunos do grupo em questão foram capazes de, gradualmente, reformularem as suas ideias relativamente à área do paralelogramo e do retângulo, desenvolvendo, assim, uma conceção congruente com a equivalência destas figuras. Desta forma, na tarefa 3, os alunos da turma apropriaram-se de uma conceção correta relativamente à área das duas figuras, a qual se constitui basilar para a construção posterior da fórmula para a área do paralelogramo com base no material mecânico. Tal como se pretendia, a autonomização progressiva dos grupos com melhor desempenho possibilitou uma intervenção mais focalizada no grupo dos alunos com maiores dificuldades, que revelou, constantemente, uma profunda dependência de apoio para ultrapassar as dificuldades experimentadas e para evoluir positivamente na exploração das tarefas.

Na tarefa 4, a generalidade dos grupos conseguiu construir corretamente a fórmula para a área do paralelogramo. Para a construção desta fórmula, os alunos, suportados na possibilidade de transformação, através do material mecânico, do paralelogramo num retângulo com a mesma área, estabeleceram uma correspondência entre a base e a altura do paralelogramo - indicadas na figura presente na tarefa - e o comprimento e a largura do retângulo, respetivamente, tal como ilustra a interação gerada no interior de um dos grupos (quadro 12). Ora, de acordo com Cavanagh (2008), *"Noting that the original parallelogram and the newly formed rectangle share a common base and perpendicular height leads to the development of the parallelogram area formula."* (p. 57).

IA: *Professora, aqui é* a *e* b *[reporta-se às letras referentes, respetivamente, à altura e à base do paralelogramo indicadas na figura presente na tarefa 4] ou comprimento vezes largura?* ***PA:*** *Basicamente você aqui diz a resposta. Porque você aqui pôs o paralelogramo como se já fosse um retângulo. Então é só pôr* b *vezes* a *[reporta-se às letras já referenciadas].* ***Investigadora:*** *E por que é que o produto da base e da altura do paralelogramo permite calcular a sua área?* ***PA:*** *Porque o paralelogramo é igual a um retângulo deitado e a base é a mesma que o comprimento e a altura é a mesma que a largura.*

Quadro 12 - Discussão realizada num grupo (DA, IA, MG, PA) na exploração da tarefa 4 da ficha de trabalho 1.

Neste sentido, os alunos revelaram uma apropriação plena e significativa do sentido das tarefas desenvolvidas ao longo da parte I da ficha de trabalho. De facto, eles fundamentaram-se na exploração das tarefas realizadas até ao momento com base no material mecânico para construírem, corretamente, a fórmula para a área do paralelogramo. De notar, contudo, que os alunos, na ficha, não explicitaram os pensamentos e raciocínios em que se basearam para a construção da fórmula. Em contrapartida, a maioria dos grupos, a par de escrever a fórmula, calculou a área do paralelogramo presente no material (figura 38), utilizando a régua para medir a base e a altura do mesmo.

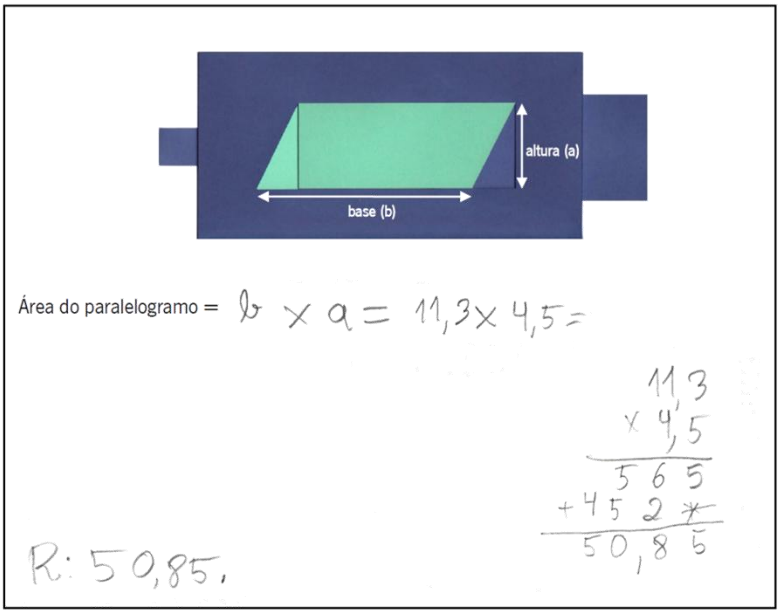


Figura 38 - Resolução de um aluno (JC) na tarefa 4 da ficha de trabalho 1.

Somente o grupo dos alunos com dificuldades é que não conseguiu construir devidamente a fórmula para a área do paralelogramo. No entanto, devido ao avanço visível dos restantes grupos da turma, considerou-se mais adequado avançar para um momento de discussão/reflexão em plenário acerca da parte I da ficha de trabalho 1, no decurso do qual seriam colmatadas as dúvidas individuais dos alunos do grupo em questão.

Deste modo, os alunos, inicialmente, partilharam e puseram em confronto as estratégias e justificações utilizadas para fundamentarem a equivalência do paralelogramo e do retângulo, relativas à tarefa 3. Embora distintas, as respostas apresentadas pelos alunos confluíram na ideia de que as duas figuras tinham a mesma área porque estas eram reconfiguradas a partir do movimento horizontal de um triângulo permitido pelo material mecânico, revelando-se corretas. Ora, esta é a principal ideia que subjaz à construção da fórmula para a área do paralelogramo através da exploração do material mecânico. Em articulação, na tarefa 4, os diferentes grupos apresentaram e explicaram a fórmula que construíram para a área do paralelogramo. Os raciocínios dos alunos focaram-se na correspondência do comprimento do retângulo à base do paralelogramo e da largura do retângulo à altura do paralelogramo, revelando-se corretos. Neste contexto, Cavanagh (2008) adverte: *"it is crucial that the distinction between slant height and perpendicular height is emphasized in such an activity."* (p. 57). A este propósito, e embora se tenha chamado a atenção dos alunos para a perpendicularidade da altura do paralelogramo em relação à base, teria sido mais profícuo ter-se explorado, mais explicitamente, o conceito da altura do paralelogramo relativamente a um lado do paralelogramo, então designado base.

Posteriormente, distribuiu-se aos alunos a parte II da ficha de trabalho 1 - "Área de figuras planas: paralelogramos" (anexo I)[15] e o material - paralelogramos. Esta parte da ficha era composta por duas tarefas matemáticas: na primeira, os alunos deviam contornar, em papel quadriculado, quatro paralelogramos que lhes foram distribuídos e calcular a sua área; na segunda, os alunos deviam observar um paralelogramo desenhado entre duas retas paralelas e desenhar, entre estas duas retas, um paralelogramo com a mesma área que o anterior, mas não geometricamente igual a este. Como trabalho suplementar, construiu-se uma diversidade maior de paralelogramos, para os alunos calcularem a respetiva área no âmbito da primeira tarefa contemplada nesta parte da ficha de trabalho.

Na tarefa 5, não foi introduzida qualquer observação relativamente à ordem de exploração dos quatro paralelogramos que foram distribuídos aos alunos, um dos quais correspondia a um retângulo. Com efeito, os alunos contornaram e calcularam a área de cada um dos paralelogramos seguindo uma sequência distinta, escolhida por eles.

No caso do retângulo, todos os alunos calcularam corretamente a sua área (figura 39), não mostrando fragilidades. De notar que nenhum dos alunos explicitou a fórmula para a área do retângulo (ou do paralelogramo) no decurso da sua resolução, embora esteja implícita, nesta, a sua aplicação. E nenhum aluno questionou a inclusão de um retângulo no conjunto dos paralelogramos distribuídos.

Figura 39 - Resolução de um aluno (AS) na tarefa 5 da ficha de trabalho 1.

No caso dos três paralelogramos restantes, os alunos confundiram, em pelo menos um destes, a altura do paralelogramo relativamente a um dado lado, designado base, com um dos dois lados consecutivos a esta base (figuras 40 e 41), calculando incorretamente a sua área. Esta fragilidade corresponde a uma das três ideias erróneas assinaladas nos resultados do estudo de Cavanagh (2008), designadamente: *"the students' tendency to refer to the slant height of a shape when the perpendicular height should be properly used to calculate its area."* (p. 56), a qual foi visível, segundo o

[15] Em decurso das comemorações da inauguração da "nova escola", então requalificada, a maioria dos alunos da turma, designadamente catorze alunos, ausentou-se na segunda parte da aula, pelo que somente nove alunos exploraram a parte II da ficha de trabalho 1 - "Área de figuras planas: paralelogramos" (anexo I). Destes nove alunos, não fazia parte nenhum dos alunos que integrava o grupo com dificuldades. Adotou-se, consequentemente, uma estratégia de interação adaptada à situação que caracterizou a segunda parte da aula, a qual correspondeu a um acompanhamento substancialmente mais próximo do trabalho desenvolvido pelos alunos, bem como a uma intervenção mais direta junto dos mesmos, em função das suas necessidades particulares.

autor, no cálculo da área de triângulos retângulos, mas, especialmente, de paralelogramos. De salientar que, uma vez mais, os alunos não explicitaram a fórmula para a área do paralelogramo no decurso da sua resolução.

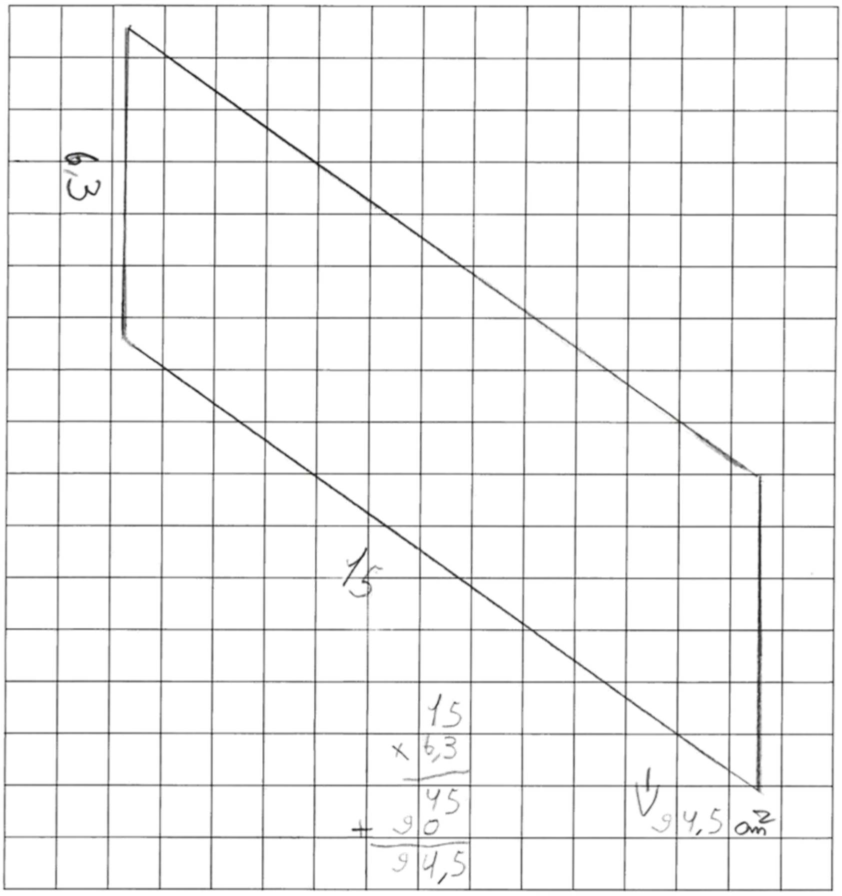


Figura 40 - Resolução de um aluno (RM) na tarefa 5 da ficha de trabalho 1.

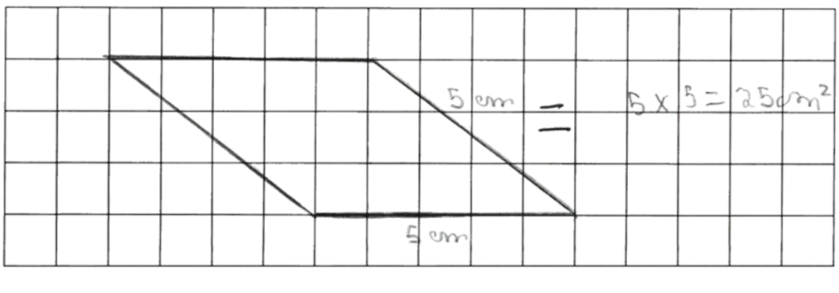


Figura 41 - Resolução de um aluno (AS) na tarefa 5 da ficha de trabalho 1.

Um breve apontamento para assinalar, ainda, que os alunos, por vezes, incorreram em erros ao expressarem a área do retângulo e dos paralelogramos sem qualquer unidade de área, ou com unidades de comprimento do sistema métrico.

Perante a ocorrência da única fragilidade identificada, a par dos erros na indicação das unidades de medida, foi possível intervir diretamente junto dos alunos, promovendo uma reflexão imediata sobre o trabalho desenvolvido. Esta interferência positiva no trabalho dos alunos contribuiu para que eles progredissem com maior correção e compreensão nas explorações dos restantes paralelogramos.

Na tarefa 6, os alunos revelaram dificuldades na compreensão do sentido da tarefa proposta. Em consequência, eles manifestaram, frequentemente, dúvidas no desenvolvimento da atividade, não conseguindo desenvolver uma estratégia de resolução eficaz. Este facto representou um desafio adicional à interação com os grupos, tendo em vista o seu progresso.

Inicialmente, um dos grupos construiu um paralelogramo com a mesma área do que aquele que está desenhado na ficha, medindo um lado deste e a respetiva altura, e desenhando um paralelogramo com uma medida de base e uma medida de altura diferentes, mas cujo produto fosse igual (figura 42).

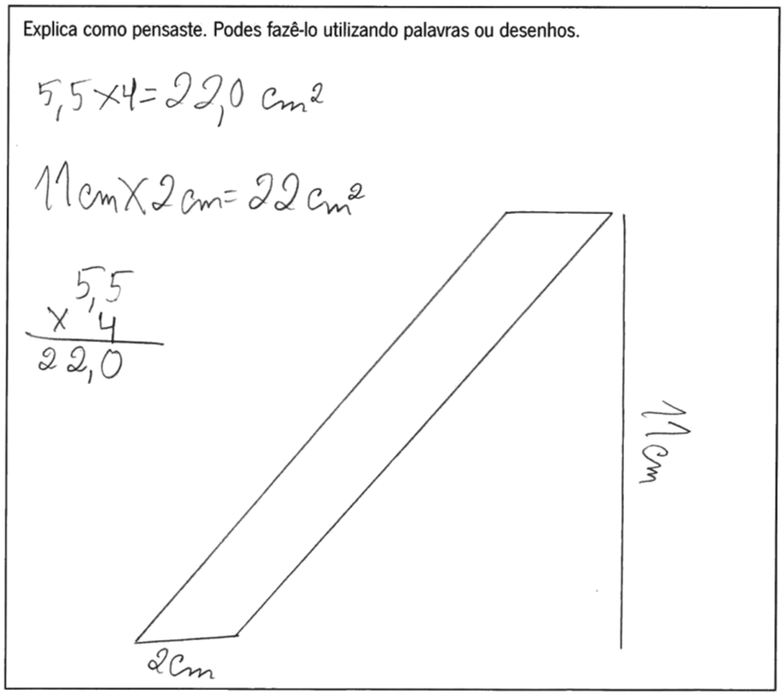


Figura 42 - Resolução de um aluno (JC) na tarefa 6 da ficha de trabalho 1.

Com efeito, os alunos deste grupo, embora demonstrando alguma compreensão da tarefa 6, no que refere à construção de um paralelogramo com a mesma área que aquele que está desenhado entre duas retas paralelas na ficha, não respeitaram a indicação de que o paralelogramo devia ser desenhado entre as mesmas retas.

Partindo do exemplo anterior, chamou-se a atenção de todos os alunos para esta particularidade importante, que alterava completamente o sentido da tarefa. Com efeito, os grupos progrediram na exploração da tarefa, agora de acordo com uma interpretação mais correta do enunciado da mesma. Assim, todos conceberam que, uma vez desenhado qualquer paralelogramo entre as duas retas paralelas, a medida da altura do paralelogramo relativamente a uma qualquer base contida numa destas retas seria sempre igual. Compreenderam, posteriormente, que, sendo a medida da altura do paralelogramo igual, então, para desenhar um paralelogramo com a mesma área que aquele que está desenhado na tarefa, a medida da base do paralelogramo devia, também, manter-se igual. Nesta fase, o grupo que desenvolveu o raciocínio ilustrado na figura 42 verificou, em pleno, a incorreção patente na sua resolução. Ainda assim, e embora todos os grupos tenham evidenciado uma clara progressão no entendimento da tarefa, assente em conhecimentos corretos relativamente à fórmula para a área do paralelogramo, nenhum dos grupos conseguiu, efetivamente, desenhar um paralelogramo que respeitasse as condições anteriores. Os grupos insistiram no desenho de paralelogramos geometricamente iguais ao que surge desenhado na ficha, aplicando, inconscientemente, diferentes isometrias, das quais resultaram, consecutivamente, figuras congruentes.

Perante este impasse, optou-se por antecipar o momento de discussão/reflexão em plenário acerca da parte II da ficha de trabalho 1. Abordou-se, somente, a inclusão de um retângulo no conjunto dos paralelogramos que foram distribuídos aos alunos, por este ser também um paralelogramo. Ora, ainda que os alunos demonstrassem conhecer as propriedades geométricas que caracterizam cada uma das figuras referenciadas, não foi simples o reconhecimento de que um retângulo é um paralelogramo. Este facto ilustra, no raciocínio geométrico dos alunos, uma "quebra (...) entre os aspectos conceptuais e figurativos das figuras geométricas" (Palhares *et al.*, 2009, p. 197). Efetivamente, como os alunos aprendem primeiro a identificar as figuras geométricas por nomes diferentes, torna-se extremamente complexo aceitarem, por exemplo, que um retângulo é um paralelogramo, mesmo que conheçam as respetivas definições (Palhares *et al.*, 2009).

No que concerne à tarefa 6, projetou-se, no quadro interativo da sala de aula, o paralelogramo desenhado entre as duas retas paralelas na ficha. Desenhou-se, neste quadro, um paralelogramo congruente com o anterior, sobrepondo-o. Desafiaram-se, então, os alunos a sugerirem alterações ao paralelogramo desenhado, de forma a este não ser congruente com o anterior. Um aluno sugeriu, a determinada altura, um paralelogramo, não só com as medidas dos lados diferentes (como vários alunos já tinham sugerido até ao momento), mas com as amplitudes dos ângulos internos também diferentes, desenhando-o posteriormente no quadro. No decurso do exemplo partilhado, a construção de paralelogramos com a mesma área que o paralelogramo desenhado na ficha, mas não geometricamente igual a este, tornou-se, então, inteligível.

Tendo por base o objetivo subjacente à primeira intervenção, é de destacar que o material concebido para a abordagem da fórmula para a área do paralelogramo se revelou um suporte proveitoso para a construção autónoma desta fórmula pelos alunos, favorecida pelo percurso exploratório desenhado especificamente para o material. De facto, as situações de ensino--aprendizagem proporcionadas, ao envolverem e desafiarem intelectualmente os alunos na construção da fórmula a partir da manipulação do material em questão, permitiram que eles desenvolvessem "um sentido intuitivo da sua plausibilidade" (NCTM, 2007, p. 286) e, dessa forma, concorreram para uma compreensão da mesma, transpondo a sua simples memorização ou aplicação mecanizada. Posteriormente, a manipulação desta fórmula em tarefas variadas permitiu aos alunos experimentarem dificuldades e confusões que favoreceram, também, a compreensão da mesma.

4.2.2. Segunda Intervenção

A segunda intervenção, realizada em 24 de abril de 2015, tinha como objetivo a abordagem, com compreensão, da fórmula para a área do triângulo. Esta teve como suporte a exploração de um material mecânico novo, que foi construído originalmente.

Com efeito, o material mecânico inventado possibilita a abordagem da fórmula para a área do triângulo tendo subjacente a concretização de que se pode construir, a partir do mesmo, um paralelogramo com o dobro da área do mesmo. Ora, este é o propósito que estará na base da construção, pelos alunos, da fórmula para a área do triângulo, devidamente apresentada na descrição seguinte.

Distribuiu-se aos alunos a parte I da ficha de trabalho 2 - "Área de figuras planas: triângulos" (anexo J) e o material mecânico tendente à investigação da fórmula para a área do triângulo[16] (figura 43). Esta parte da ficha era composta por quatro tarefas matemáticas: na primeira, os alunos deviam observar os dois triângulos sobrepostos que compunham o material mecânico que lhes foi distribuído; na segunda, os alunos deviam rodar um desses triângulos meia-volta em torno do ilhó, e indicar a figura então obtida; na terceira, os alunos deviam formular conclusões relativamente à área das duas figuras anteriores; e, na quarta, os alunos deviam escrever a fórmula para a área do triângulo, a partir da exploração realizada.

---

[16] Este material mecânico é composto por um paralelogramo com as mesmas dimensões do que o paralelogramo incorporado no material mecânico utilizado na intervenção anterior e, por sua vez, com as mesmas dimensões do que um dos bissemis construídos na primeira intervenção do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Esta particularidade foi, uma vez mais, intencionalmente considerada no sentido de assegurar uma maior estruturação às explorações dos alunos, bem como uma maior coerência e continuidade ao Projeto e aos próprios materiais didáticos utilizados.

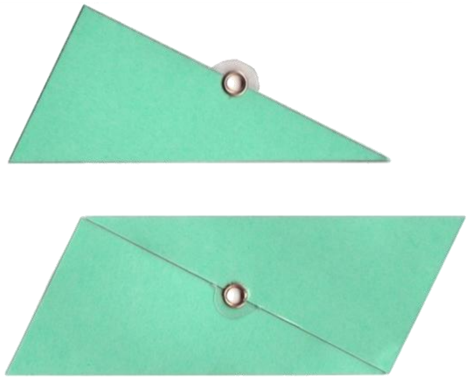


Figura 43 - Material mecânico construído para a abordagem da fórmula para a área do triângulo.

Deu-se continuidade à modalidade de trabalho em pequeno grupo adotada na intervenção anterior, ainda que com algumas modificações na composição dos grupos. Nesta nova organização, os seis grupos da turma estavam, de uma maneira geral, equilibrados entre si, no sentido de favorecer o envolvimento e o progresso dos alunos com maiores dificuldades por meio da interação direta com os seus pares. A necessidade de um acompanhamento permanente na leitura da ficha de trabalho ao aluno identificado com NEE, designadamente dislexia, foi assegurada, uma vez mais, em articulação com o par de estágio.

Inicialmente, os alunos desenvolveram, de uma forma espontânea, um primeiro contacto intuitivo com o material mecânico, observando-o e explorando-o livremente. Na tarefa 1, os grupos, tal como era sugerido, focalizaram a sua atenção nos dois triângulos sobrepostos que compunham o material, os quais conseguiram identificar com facilidade.

Na tarefa 2, os grupos utilizaram o movimento permitido pelo material mecânico para rodarem um dos triângulos meia-volta em torno do ilhó e, dessa forma, formarem um paralelogramo. Esta ação foi espontaneamente conseguida pela generalidade dos alunos. Com efeito, somente um aluno de um grupo demonstrou dificuldades em compreender a rotação de meia-volta indicada na tarefa, as quais foram prontamente ultrapassadas por meio de um apoio direto e individualizado prestado ao mesmo. Apesar disso, considera-se, agora, que, no contexto em questão, teria sido mais apropriada a opção de "remeter as dúvidas individuais para o debate no seio do grupo" (Ponte, Matos & Abrantes, 1998, p. 81), tirando, assim, partido da metodologia de trabalho privilegiada. No que concerne à identificação do paralelogramo obtido, esta constituiu-se acessível para todos os grupos da turma, que não demonstraram dificuldades no seu reconhecimento.

Na tarefa 3, todos os grupos da turma determinaram com correção que a área do paralelogramo era o dobro da área do triângulo (figuras 44 e 45). Ora, o movimento rotacional reversível de meia-volta de um dos triângulos sobrepostos no material mecânico, que permitia visualizar, ora um triângulo, ora um paralelogramo composto por dois triângulos iguais ao anterior, constituiu um suporte basilar para a estruturação desta conclusão por parte dos alunos.

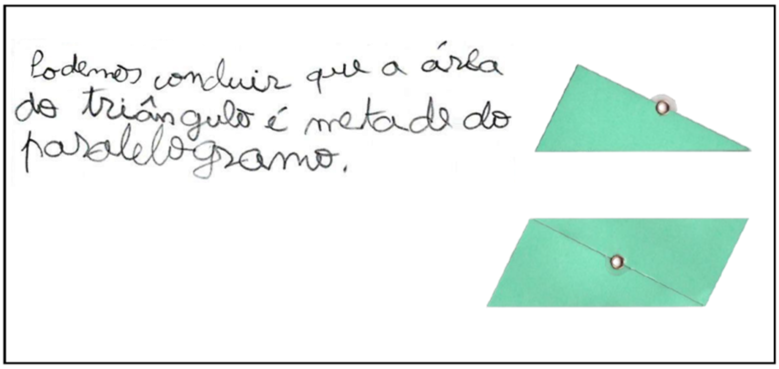


Figura 44 - Resolução de um aluno (SC) na tarefa 3 da ficha de trabalho 2.

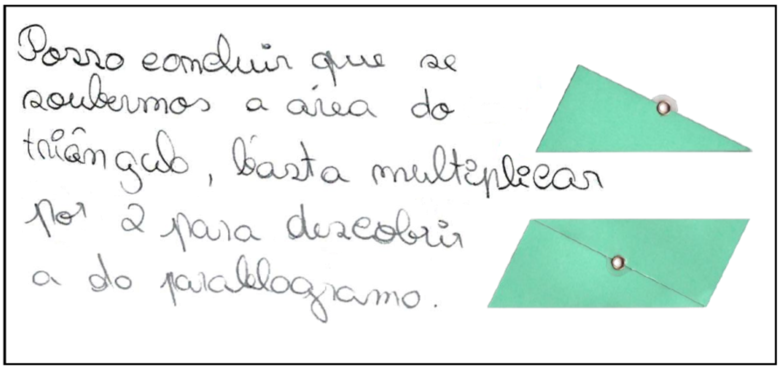


Figura 45 - Resolução de um aluno (MJ) na tarefa 3 da ficha de trabalho 2.

Na tarefa 4, em termos gerais, todos os grupos conseguiram construir corretamente a fórmula para a área do paralelogramo. Para a construção desta fórmula, os alunos, ao constatarem, a partir do material mecânico, que se podia "construir um paralelogramo decomponível em dois triângulos iguais ao triângulo dado, com a mesma base que este." (MEC, 2012, p. 34), recuperaram e escreveram, em primeiro lugar, a fórmula para a área do paralelogramo, abordada na intervenção anterior. Depois, determinaram, então, que a área do triângulo seria metade da área anteriormente definida (figuras 46 e 47), finalizando, com isto, a construção da fórmula. É importante assinalar que a recuperação da fórmula para a área do paralelogramo foi autonomamente conseguida por todos os grupos, ao passo que a determinação de que a área do triângulo correspondia, efetivamente, a metade da área do paralelogramo, implicou, em certos grupos, algum apoio e questionamento.

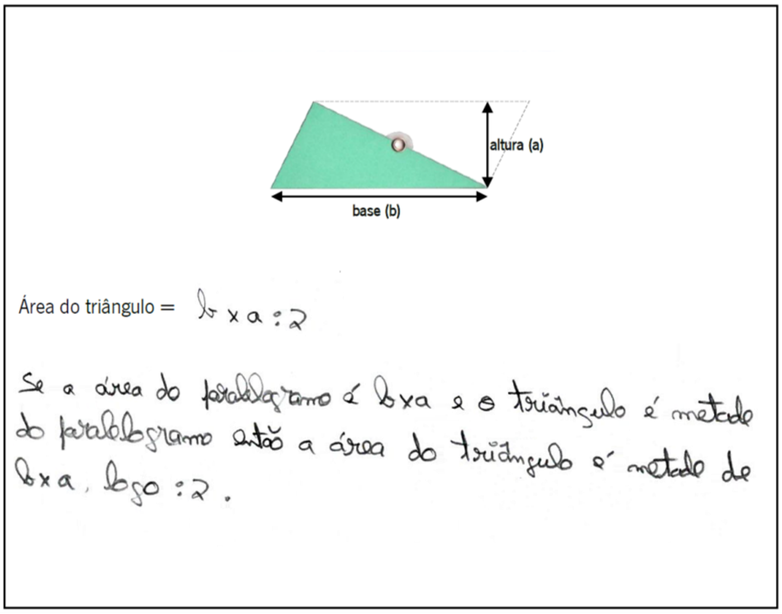


Figura 46 - Resolução de um aluno (PA) na tarefa 4 da ficha de trabalho 2.

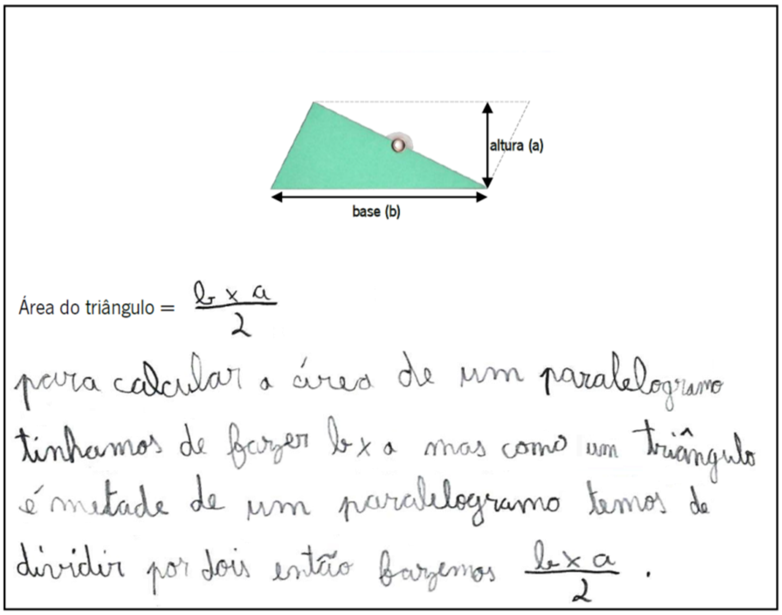


Figura 47 - Resolução de um aluno (AS) na tarefa 4 da ficha de trabalho 2.

Importa salientar que, tal como ilustram as figuras 46 e 47 anteriores, todos os grupos, na generalidade, tiveram a preocupação de explicitar, na ficha, os pensamentos e raciocínios em que se fundamentaram para a construção da fórmula para a área do paralelogramo, ao contrário do que aconteceu na intervenção anterior, na qual se limitaram a apresentar a fórmula construída. Neste sentido, os alunos demonstraram, pois, um maior cuidado na comunicação matemática das suas conclusões ao nível do registo escrito, apresentando, o mais fielmente possível, as suas ideias e justificações, que se revelaram corretas.

De um modo geral, os grupos apresentaram resultados uniformes nas tarefas desenvolvidas ao longo da parte I da ficha de trabalho, reveladores de uma apropriação plena do sentido das mesmas. A metodologia de trabalho adotada nesta intervenção favoreceu o envolvimento dos alunos com dificuldades, bem como a sua persistência na tentativa de acompanhar, com o apoio dos seus pares, o trabalho desenvolvido no respetivo grupo, ainda que esta não tenha sido suficiente para ultrapassar, em certos momentos, a relativa passividade dos mesmos no que concerne às contribuições dadas para o trabalho colaborativo.

No final, promoveu-se um momento de discussão/reflexão em plenário acerca da parte I da ficha de trabalho 2. Para isso, mostrou-se o material mecânico à turma, e, consensualmente, os alunos identificaram os dois triângulos sobrepostos que compunham o material mecânico e reconheceram a construção de um paralelogramo a partir destes dois triângulos, respeitante às tarefas 1 e 2. Na tarefa 3, os grupos partilharam as estratégias e justificações utilizadas para fundamentarem a conjetura de que a área do paralelogramo era o dobro da área do triângulo. As respostas apresentadas pelos alunos foram semelhantes, confluindo na ideia de que o paralelogramo, ao ser formado por dois triângulos evidentemente congruentes (porque estavam totalmente sobrepostos), tinha o dobro da área de cada um dos triângulos considerados. Ora, esta é a principal ideia que subjaz à construção da fórmula para a área do triângulo através da exploração do material mecânico. Articuladamente, na tarefa 4, os diferentes grupos apresentaram e explicaram a fórmula que construíram para a área do triângulo. Nesta tarefa, a escrita detalhada dos resultados pelos alunos na ficha permitiu-lhes, claramente, comunicarem com maior facilidade os seus raciocínios, que se pautaram, uma vez mais, pela semelhança e correção. Estes basearam-se na correspondência da área do triângulo a metade da área do paralelogramo, abordada na intervenção anterior. Neste contexto, Cavanagh (2008) alerta: *"In doing so, teachers will need to emphasize the importance of perpendicular height."* (p. 57).

Ora, em concordância com a implicação pedagógica anotada pelo autor supracitado, procurou-se explorar, com maior enfoque do que na intervenção precedente, o conceito da altura do triângulo relativamente a um lado do triângulo, então designado base. Neste sentido, sugeriu-se aos grupos que, a partir da observação de um dos triângulos sobrepostos no material mecânico, identificassem a(s) base(s) do triângulo. Como seria expectável, os alunos identificaram, unicamente, o lado do triângulo que estava identificado como base na figura presente na tarefa 4, reconhecendo, corretamente, a altura do triângulo relativamente a esta base, também assinalada na mesma tarefa. Foram, então, desafiados a explicarem as alturas correspondentes a cada um dos outros dois lados do triângulo, identificados, posteriormente, como bases. Esta sugestão, de certo modo provocativa, permitiu desafiar as conceções dos alunos, levando-os a refletirem sobre as mesmas e, dessa forma, a desenvolverem uma melhor compreensão acerca da identificação, num dado triângulo, da altura relativamente a um lado desse triângulo, então designado base.

Posteriormente, distribuiu-se aos alunos a parte II da ficha de trabalho 2 - "Área de figuras planas: triângulos" (anexo K) e o material - triângulos. Esta parte da ficha era composta por duas tarefas matemáticas: na primeira, os alunos deviam contornar, em papel quadriculado, quatro triângulos que lhes foram distribuídos e calcular a sua área; na segunda, os alunos deviam observar dois triângulos desenhados entre duas retas paralelas e desenhar, entre estas duas retas, um triângulo com, simultaneamente, maior área do que um dos anteriores e menor área do que o outro. Como trabalho suplementar, construiu-se uma diversidade maior de triângulos, para os alunos calcularem a respetiva área no âmbito da primeira tarefa contemplada nesta parte da ficha de trabalho.

Na tarefa 5, à semelhança da intervenção anterior, não foi introduzida qualquer observação relativamente à ordem de exploração dos quatro triângulos que foram distribuídos aos alunos. Como tal, os alunos contornaram e calcularam a área de cada um dos triângulos seguindo uma sequência distinta, escolhida por eles.

No cálculo da área dos triângulos, alguns alunos não dividiram o produto da base e da respetiva altura do triângulo por dois, calculando a área correspondente a um paralelogramo composto por dois triângulos geometricamente iguais ao anterior e com a mesma base que este (figura 48).

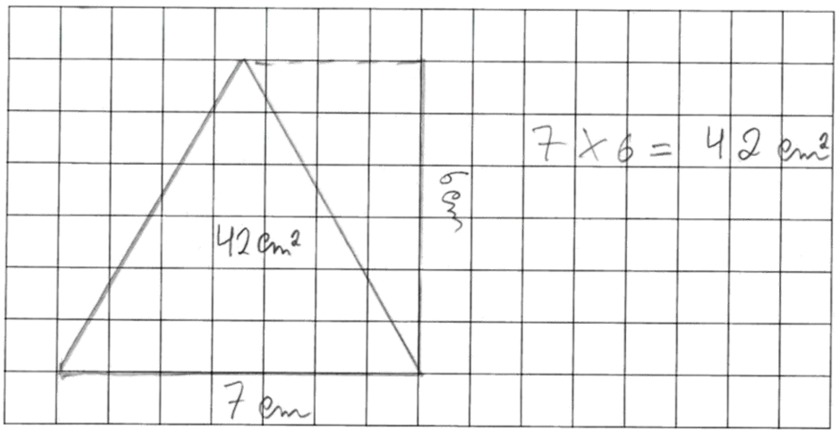


Figura 48 - Resolução de um aluno (JC) na tarefa 5 da ficha de trabalho 2.

Uma outra fragilidade demonstrada por alunos, esta bastante mais frequente do que a anterior, e análoga à única fragilidade evidenciada no cálculo da área de paralelogramos pelos alunos na intervenção precedente, diz respeito à confusão entre a altura do triângulo relativamente a um dado lado, designado base, e um dos outros dois lados do triângulo (figuras 49 e 50), resultando num cálculo incorreto da sua área[17].

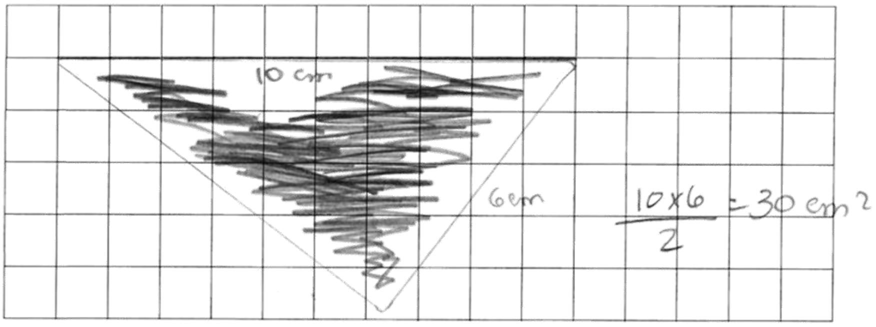


Figura 49 - Resolução de um aluno (MG) na tarefa 5 da ficha de trabalho 2.

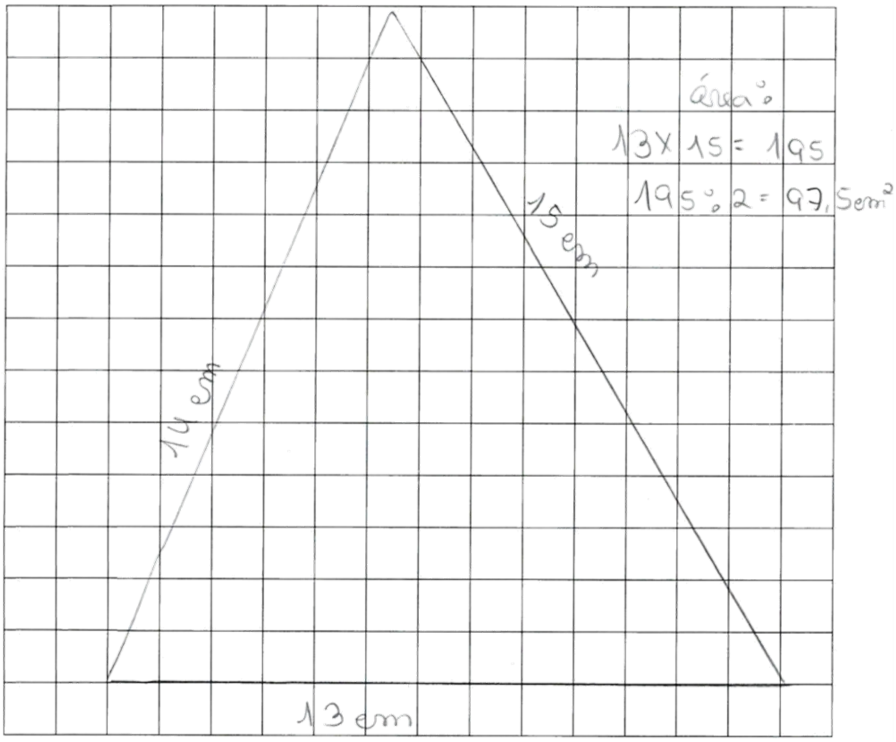


Figura 50 - Resolução de um aluno (MJ) na tarefa 5 da ficha de trabalho 2.

De notar que, ao contrário da intervenção anterior, alguns alunos explicitaram, no decurso da sua resolução, a fórmula para a área do triângulo, ainda que esta não seja visível em nenhuma das figuras apresentadas. Veja-se que a recuperação desta fórmula pelos alunos poderia ter permitido evitar a fragilidade patente na figura 48. Um breve apontamento para registar, também, que os alunos,

[17] Como já descrito na *Primeira Intervenção*, esta fragilidade corresponde a uma das três ideias erróneas assinaladas nos resultados do estudo de Cavanagh (2008), designadamente: *"the students' tendency to refer to the slant height of a shape when the perpendicular height should be properly used to calculate its area."* (p. 56), a qual foi visível, segundo o autor, no cálculo da área de triângulos retângulos, mas, especialmente, de paralelogramos.

por vezes, incorreram em erros ao expressarem a área dos triângulos sem qualquer unidade de área, ou com unidades de comprimento do sistema métrico, tal como se verificou na intervenção anterior.

Uma última fragilidade, esta revelada somente por um aluno, reporta-se à confusão entre a área dos triângulos e o perímetro dos mesmos (figura 51).

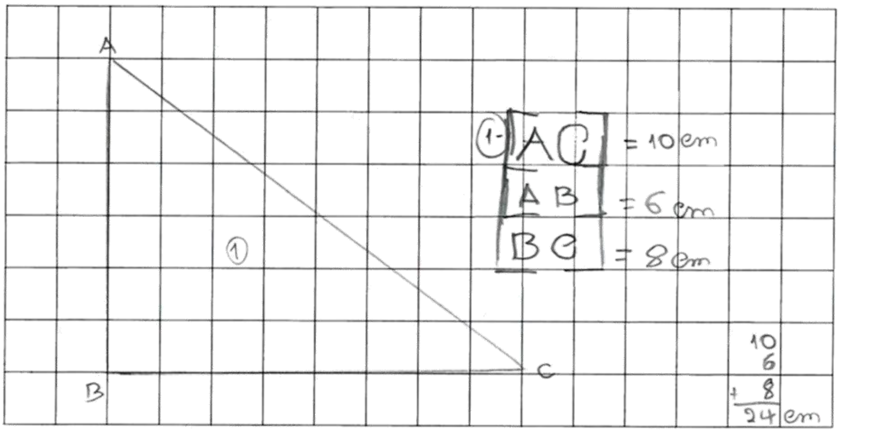


Figura 51 - Resolução de um aluno (MQ) na tarefa 5 da ficha de trabalho 2.

A par das três fragilidades anteriores, relacionadas com o próprio processo de cálculo da área dos triângulos, os grupos experimentaram dificuldades relacionadas com a diferença dos valores medidos por cada um dos alunos, individualmente, para a base e para a altura dos triângulos, e que resultaram em assimetrias visíveis nos resultados da área dos mesmos.

A tremenda dispersão de necessidades de apoio evidenciadas pelos alunos resultou numa complexificação da gestão da situação didática, que impediu o acompanhamento conveniente do trabalho desenvolvido nos grupos, de forma a colmatar as fragilidades supramencionadas e a garantir a compreensão dos alunos. Este facto leva, agora, a considerar que uma outra organização da tarefa teria sido mais conveniente. Em particular, se tivesse sido distribuído apenas um triângulo para os alunos calcularem a área e, depois, fosse promovido um momento de discussão/reflexão em plenário sobre o resultado, algumas das fragilidades seriam, desde logo, resolvidas e, eventualmente, a exploração dos restantes triângulos pelos alunos seria mais direcionada e correta.

Na tarefa 6, alguns alunos revelaram dificuldades na compreensão do sentido da tarefa proposta, em grande parte colmatadas pelas interações com os seus pares que estiveram presentes na segunda parte da intervenção anterior e, por isso, exploraram uma tarefa relativamente semelhante a esta, que os tornou matematicamente mais ágeis na exploração da mesma.

Apenas três grupos conseguiram resolver corretamente a tarefa. Dois destes grupos uniram três vértices pertencentes aos triângulos desenhados na ficha e desenharam um novo triângulo (figura 52), de acordo com as condições da tarefa. Para calcularem a área, eles mediram a base de cada um dos triângulos e assumiram, corretamente, que as alturas destes eram iguais. O outro grupo desenhou um triângulo isolado dos triângulos desenhados na ficha (figura 53) e que parece, aparentemente, respeitar as condições da tarefa, embora este grupo não comunique tão explicitamente os seus raciocínios.

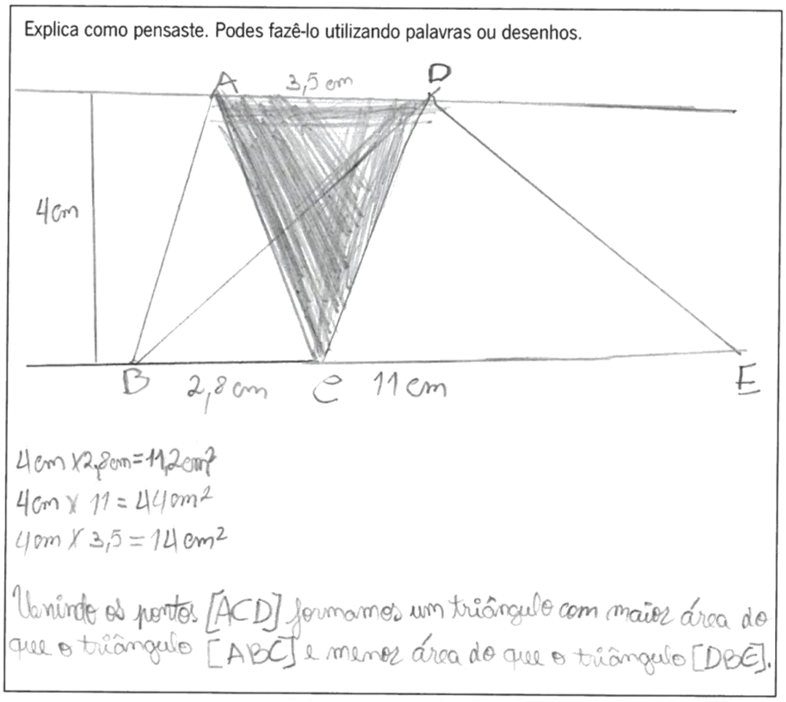


Figura 52 - Resolução de um aluno (CB) na tarefa 6 da ficha de trabalho 2.

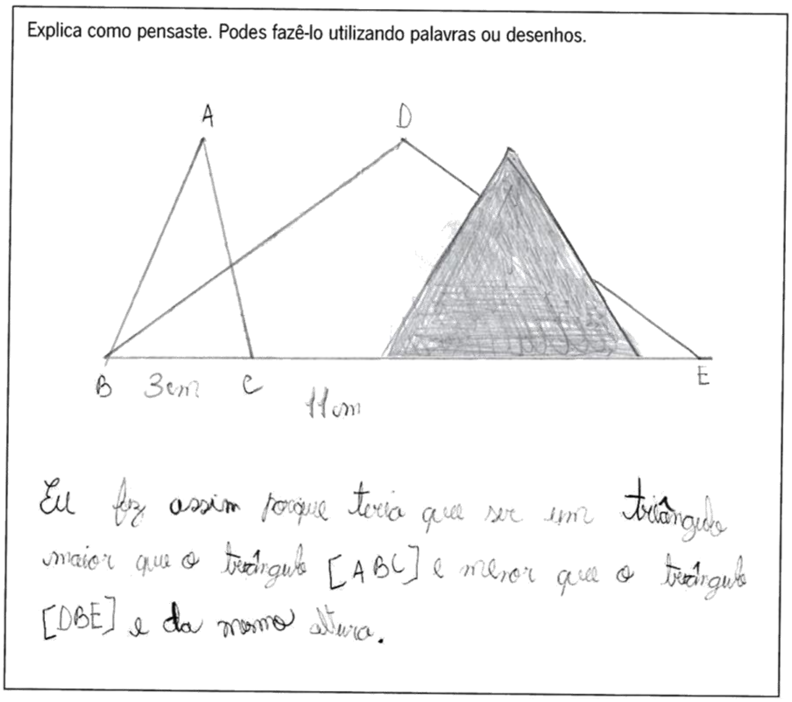


Figura 53 - Resolução de um aluno (CB) na tarefa 6 da ficha de trabalho 2.

Os restantes grupos não conseguiram desenvolver uma estratégia de resolução eficaz na tarefa 6 e, em virtude do conjunto complexo de fragilidades surgidas na exploração da tarefa anterior, que alongaram o tempo previsto para a mesma, não foi possível prestar o apoio necessário para assegurar uma aprendizagem significativa.

Promoveu-se, então, um momento de discussão/reflexão em plenário acerca da parte II da ficha de trabalho 2. Relativamente à tarefa 5, projetou-se, no quadro interativo da sala de aula, um dos triângulos explorados pelos alunos, apresentando-se o mesmo em três posições distintas, que facilitavam a visualização de cada um dos lados que poderiam ser considerados a base no cálculo da sua área, por se encontrarem assentes horizontalmente numa mesma linha (figura 54).

Figura 54 - Triângulo apresentado em três posições para a discussão/reflexão da tarefa 5 da ficha de trabalho 2.

A partir da observação do triângulo nas três posições, recuperou-se a fórmula para a área do triângulo e, articuladamente, identificou-se, em conjunto com os alunos, as alturas correspondentes a cada um dos lados do triângulo assentes horizontalmente na mesma linha, então considerados as bases deste triângulo. No decurso, alguns alunos partilharam, no quadro interativo, a área que calcularam para o triângulo, uma vez considerada uma das três bases possíveis.

O processo anterior, ainda que envolvendo unicamente a correção do cálculo da área de um dos quatro triângulos distribuídos aos alunos, permitiu ir ao encontro das três fragilidades demonstradas pelos grupos durante a exploração da respetiva tarefa, transversais a todos os triângulos. Concomitantemente, as próprias discrepâncias nos resultados da área do triângulo, quando corretamente calculada pelos alunos, constituíram um mote autêntico e significativo para que eles compreendessem que “as medidas do mundo real são valores aproximados devido, em parte, aos instrumentos de medida utilizados e, em parte, ao erro humano inerente à leitura das escalas desses instrumentos.” (NCTM, 2007, p. 200).

No que respeita à tarefa 6, projetou-se, no quadro interativo da sala de aula, os triângulos desenhados entre as duas retas paralelas na ficha. A partir da observação destes triângulos, os alunos reconheceram que a área dos mesmos era diferente. Depois, um aluno desenhou, em cada um dos triângulos projetado no quadro interativo, a altura relativamente ao lado que, em ambos, estava integrado numa das duas retas entre as quais estavam desenhados, o que facilitou o reconhecimento, pela turma, de que as alturas assinaladas nos triângulos eram iguais.

Uma vez sistematizadas duas ideias basilares para a realização da tarefa, um aluno partilhou, no quadro interativo, o triângulo que, corretamente, construiu para resolver a tarefa, comunicando à turma o seu raciocínio. Desafiaram-se, então, os alunos a analisarem e a reagirem ao raciocínio partilhado, tendo em consideração as ideias anteriormente sintetizadas em plenário. Durante este momento, os alunos embrenharam-se mais plenamente nos dados da tarefa, apropriando-se, com maior profundidade, do sentido da mesma, o que resultou na sua compreensão e resolução eficaz.

Tendo por base o objetivo subjacente à segunda intervenção, reitera-se que o material concebido para a abordagem da fórmula para a área do triângulo se revelou um suporte proveitoso para a construção autónoma desta fórmula pelos alunos, favorecida pelo percurso exploratório desenhado especificamente para o material. Uma vez mais, as situações de ensino-aprendizagem proporcionadas, ao envolverem e desafiarem intelectualmente os alunos na construção da fórmula a partir da manipulação do material em questão, permitiram que eles desenvolvessem "um sentido intuitivo da sua plausibilidade" (NCTM, 2007, p. 286) e, dessa forma, concorreram para uma compreensão da mesma, transpondo a sua simples memorização ou aplicação mecanizada. Posteriormente, a manipulação desta fórmula em tarefas variadas permitiu aos alunos experimentarem, desta vez, um espectro amplo de dificuldades e confusões que favoreceram, também, a compreensão da mesma.

4.3. Estudo do desempenho dos alunos do 1.º e do 2.º Ciclos do Ensino Básico nos problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões

A aplicação dos problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões realizada no 1.º e no 2.º Ciclos do Ensino Básico, nas turmas do 4.º e do 5.º anos de escolaridade, seguiu a mesma estrutura, tendo em vista a possibilidade de estabelecer comparações entre os desempenhos dos alunos dentro de cada um dos anos de escolaridade e entre os mesmos.

Os problemas aplicados fazem parte de um conjunto de problemas apresentados por Battista *et al.* (1998) e que estiveram na base da sua investigação. Na aplicação dos problemas, cada um dos alunos das turmas foi entrevistado individualmente em dois momentos distintos: num primeiro momento, em que foi aplicado um problema igual para todos os alunos (anexo L); e, num segundo momento, em que, consoante o desempenho revelado pelos alunos no problema anterior, foi aplicado um problema menos complexo do que este (anexo M) ou mais complexo (anexo N).

Em todos os problemas aplicados, depois de se ter mostrado como um quadrado manipulável com um centímetro quadrado encaixava perfeitamente num dos quadrados desenhados no retângulo presente no problema, propôs-se aos alunos que: em primeiro lugar, fizessem uma previsão acerca de quantos quadrados com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo; em segundo lugar, desenhassem, no retângulo, onde pensavam que os quadrados estavam localizados, e, depois, realizassem, novamente, uma previsão acerca de quantos quadrados com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo; e, em terceiro lugar, preenchessem o retângulo com quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado e determinassem o número de quadrados necessário para o preencher (Battista *et al.*, 1998).

O desempenho dos alunos nos problemas foi, então, analisado e categorizado à luz dos níveis de sofisticação dos alunos na estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões descritos por Battista *et al.* (1998) (quadro 13), tal como será apresentado a seguir.

Nível 1 - Ausência completa da estruturação do arranjo em linhas e colunas

Os alunos não utilizam uma linha ou uma coluna de quadrados como unidade compósita. Eles têm dificuldades em visualizarem a localização dos quadrados no arranjo retangular e em contarem os quadrados manipuláveis que utilizaram para cobrirem o interior do retângulo.

Nível 2 - Estruturação parcial do arranjo em linhas e colunas

Os alunos fazem algum uso de uma linha ou de uma coluna de quadrados como unidade compósita, no entanto, não utilizam esta unidade compósita para cobrirem todo o retângulo.

Nível 3A - Estruturação do arranjo como um conjunto de linhas e colunas

Os alunos conceptualizam o retângulo como sendo totalmente coberto por linhas ou colunas de quadrados como unidades compósitas, mas não coordenam estas unidades compósitas com a dimensão ortogonal.

Nível 3B - Estruturação visual do arranjo em linhas e colunas

Os alunos repetem uma linha de quadrados como unidade compósita, distribuindo-a pelos elementos da coluna. Quando os quadrados estão desenhados no arranjo, eles utilizam-nos para guiarem a repetição. Por sua vez, quando o material percetual está ausente, eles determinam as repetições estimando visualmente como é que as linhas cabem no retângulo.

Nível 3C - Estruturação do arranjo em linhas por colunas: processo de repetição interiorizado

Os alunos repetem uma linha ou uma coluna de quadrados, utilizando o número de quadrados presente, respetivamente, numa coluna ou numa linha ortogonal, para determinarem as repetições. O material percetual original, por exemplo os quadrados desenhados no arranjo, não é usado durante a repetição.

Quadro 13 - Níveis de sofisticação dos alunos na estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões, descritos por Battista *et al.* (1998).

Importa ressalvar, previamente, que o nível de sofisticação exibido por um aluno num determinado problema não deve ser interpretado como o nível de sofisticação do próprio aluno em algum género de esquema de desenvolvimento geral; em vez disso, os níveis de sofisticação descrevem o desempenho dos alunos nos problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões. Até porque, um aluno pode apresentar níveis de sofisticação ligeiramente diferentes em problemas distintos (Battista *et al.*, 1998).

A aplicação dos problemas no 1.º Ciclo do Ensino Básico, na turma do 4.º ano de escolaridade, ocorreu entre 28 de janeiro de 2015 e 5 de fevereiro de 2015.

Na aplicação do primeiro problema (anexo L), igual para os vinte e três alunos da turma, dezasseis alunos exibiram o nível 1; dois alunos exibiram o nível 3A; um aluno exibiu o nível 3B; e quatro alunos exibiram o nível 3C (gráfico 1).

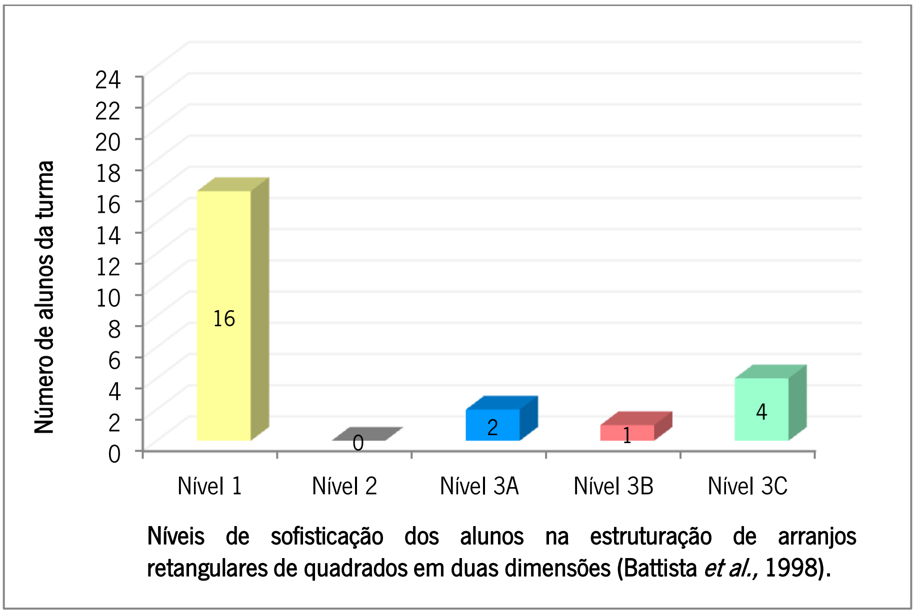


Gráfico 1 - Níveis de sofisticação exibidos pelos alunos do 4.º ano de escolaridade no primeiro problema.

Na aplicação do segundo problema menos complexo do que o primeiro (anexo M), aos dezasseis alunos que, neste, exibiram o nível 1, todos os alunos revelaram um desempenho idêntico ao que haviam demonstrado e, portanto, manifestaram, repetidamente, o nível 1 (gráfico 2). Deste modo, mesmo perante um problema menos complexo, no qual o arranjo retangular apresentava mais material percetual disponível, os alunos não evidenciaram modificações no seu desempenho.

Na aplicação do segundo problema mais complexo do que o primeiro (anexo N), aos sete alunos que, neste, exibiram qualquer nível à exceção do nível 1, um dos dois alunos que tinha exibido o nível 3A apresentou um desempenho semelhante, permanecendo no mesmo nível, ao passo que o outro aluno manifestou, curiosamente, o nível 1; e o aluno que tinha exibido o nível 3B, bem como os quatro alunos que tinham exibido o nível 3C mantiveram-se nos respetivos níveis, ostentando realizações semelhantes (gráfico 3). Neste sentido, face a um problema mais complexo, no qual o arranjo retangular expunha o material percetual ao longo de uma das suas diagonais, todos os alunos permaneceram sólidos nos níveis que tinham exibido anteriormente, à exceção de um aluno que registou um desempenho dois níveis abaixo do que aquele que havia mostrado no primeiro problema.

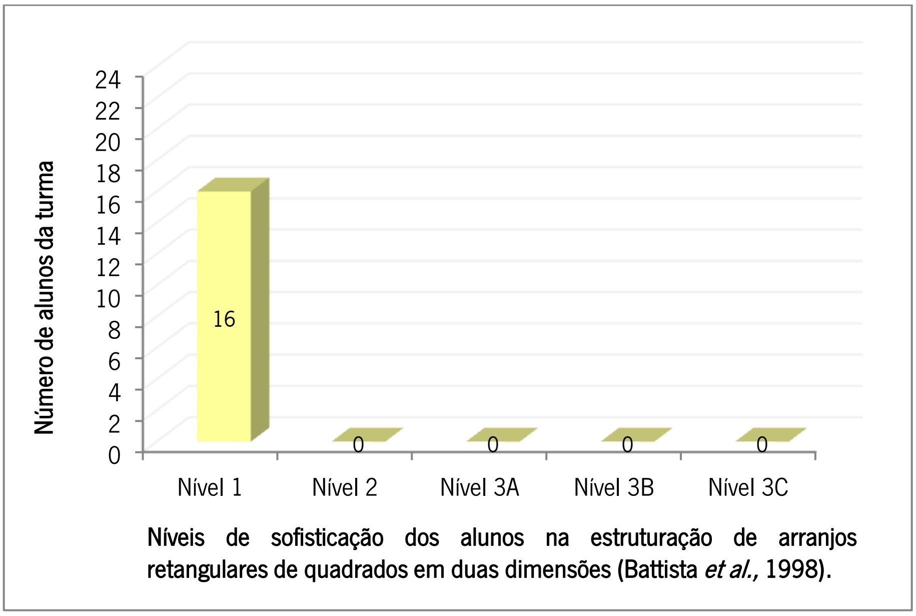


Gráfico 2 - Níveis de sofisticação exibidos pelos alunos do 4.º ano de escolaridade no segundo problema (menos complexo do que o primeiro).

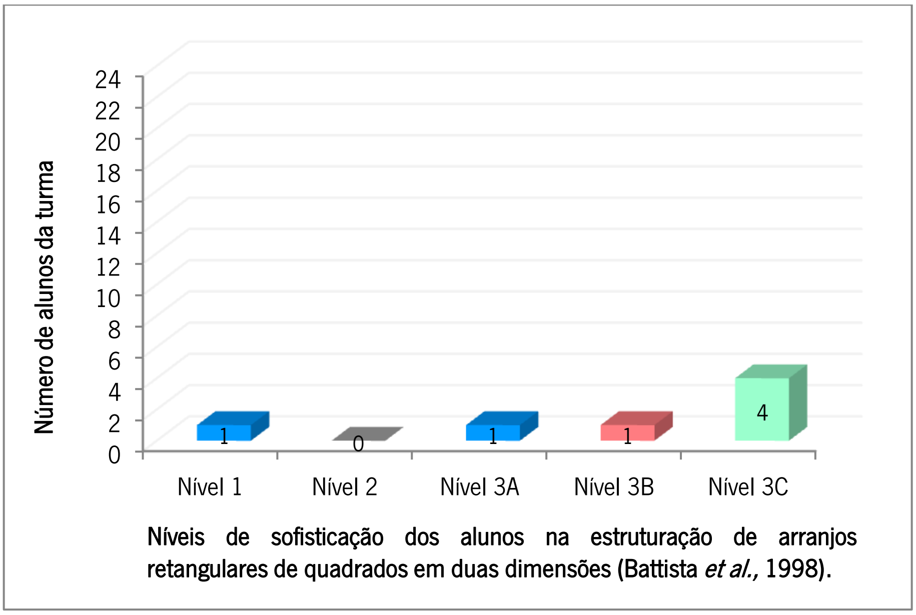


Gráfico 3 - Níveis de sofisticação exibidos pelos alunos do 4.º ano de escolaridade no segundo problema (mais complexo do que o primeiro).

Tendo por base a informação contida nos gráficos 1, 2 e 3, podem definir-se cinco tipos de desempenhos revelados pelos alunos da turma do 4.º ano de escolaridade nos dois problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões aplicados, designadamente: nível 1 - nível 1; nível 3A - nível 1; nível 3A - nível 3A; nível 3B - nível 3B; e nível 3C - nível 3C.

Apresentam-se, seguidamente, exemplos ilustrativos de cada um dos cinco tipos de desempenho suprarreferidos (quadro 14), de forma a permitir uma maior elucidação e compreensão acerca das realizações dos alunos e, até, dos próprios níveis de sofisticação em causa.

Exemplo 1 (nível 1 - nível 1)

1.º Problema

DA, um aluno do 4.º ano de escolaridade, para fazer uma previsão acerca de quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo do primeiro problema (anexo L), apontou e contou 35 quadrados (figura 55). Durante este processo, DA demonstrou muitas dificuldades em visualizar e contar os quadrados que não estavam total ou parcialmente desenhados no arranjo retangular. Em consequência, começou por enumerar quadrados que o material percetual fornecido ajudava a identificar. Depois, nas partes vazias do arranjo, tentou, nitidamente, adivinhar o número de quadrados aí presente, hesitando bastantes vezes. Em determinados momentos, DA recorreu aos seus dedos para medir, aproximadamente, o espaço ocupado por um quadrado, e procurou reproduzi-lo nas partes em falta do arranjo.

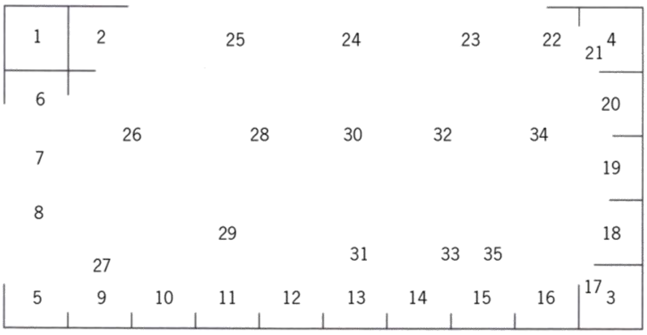


Figura 55 - Quadrados contados por um aluno (DA) no primeiro problema.

Posteriormente, DA desenhou, no retângulo, onde pensava que os quadrados estavam localizados (figura 56). Neste processo, DA desenhou cada um dos quadrados individualmente e, uma vez mais, começou pelos quadrados mais facilmente identificáveis no retângulo. Para tal, utilizou as marcas apresentadas no arranjo como guias e completou-as de modo a formar quadrados. Só depois desenhou os outros quadrados em falta, estimando visualmente a sua localização. Ora, independentemente de DA, por vezes, ter tentado, explicitamente, ligar o lado do quadrado que estava a desenhar aos lados dos quadrados anexos a este, por meio de interseções adequadas, não se mostrou preocupado quando estes segmentos não se conectaram corretamente. Deste modo, e embora o desenho de DA parecesse ter alguma organização, a sua estruturação foi, claramente, local e não global. Por fim, DA contou, um por um, os quadrados que tinha desenhado anteriormente, apresentando, neste decurso, uma nova previsão acerca de quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo, correspondente a 74 quadrados.

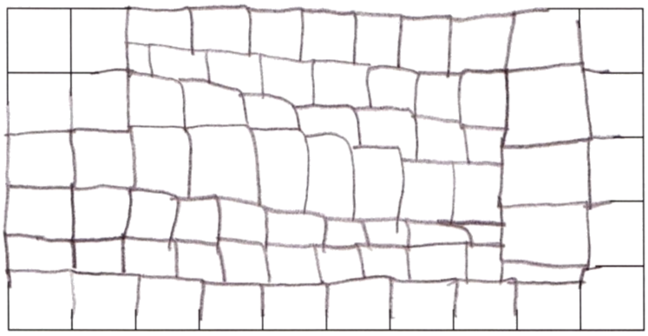


Figura 56 - Quadrados desenhados por um aluno (DA) no primeiro problema.

Finalmente, DA preencheu o retângulo com os quadrados manipuláveis e contou-os, um por um, em voz alta, determinando, corretamente, que seriam necessários 50 quadrados para o preencher completamente.

2.º Problema

DA, o mesmo aluno do 4.º ano de escolaridade, para prever quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo do segundo problema menos complexo do que o primeiro (anexo M), apontou e contou 65 quadrados (figura 57). À semelhança do que ocorreu no primeiro problema, DA demonstrou muitas dificuldades em visualizar e contar os quadrados que não estavam total ou parcialmente desenhados no arranjo retangular. Consequentemente, começou, uma vez mais, por enumerar quadrados que o material percetual fornecido ajudava a identificar, e, depois, nas partes vazias do arranjo, tentou, novamente, adivinhar o número de quadrados aí presente, hesitando bastantes vezes.

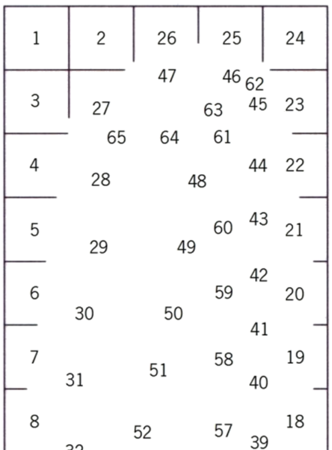


Figura 57 - Quadrados contados por um aluno (DA) no segundo problema (menos complexo do que o primeiro).

Posteriormente, DA desenhou, no retângulo, onde pensava que os quadrados estavam localizados (figura 58). Em conformidade com o que já tinha feito no primeiro problema, DA desenhou cada um dos quadrados individualmente e, uma vez mais, começou pelos quadrados mais facilmente identificáveis no retângulo. Para tal, utilizou as marcas apresentadas no arranjo como guias e completou-as de modo a formar os quadrados. Só depois desenhou os outros quadrados em falta, estimando visualmente a sua localização. As tentativas de ligar o lado do quadrado que estava a desenhar aos lados dos quadrados anexos a este, por meio de interseções adequadas, tornaram-se ainda mais explícitas. Mas continuava a haver uma falta de coordenação global na atividade de DA. De facto, apesar da sua aparente repetição de partes do arranjo, ele ignorou a inconsistência de dois quadrados ligados a um quadrado apresentada na porção inferior do seu desenho. Com efeito, e embora o arranjo retangular fornecesse mais material percetual do que o do primeiro problema, possibilitando a DA uma estruturação mais rigorosa do mesmo, a sua estruturação permaneceu, claramente, local e não global. Por fim, DA contou, um por um, os quadrados que tinha desenhado, apresentando uma nova previsão acerca de quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo, correspondente a 51 quadrados. De forma a manter, mais facilmente, o controlo da sua contagem, DA foi marcando, com o lápis, cada quadrado, à medida que progredia na contagem, eliminando, dessa forma, a possibilidade de contagem dupla e o esquecimento de quadrados.

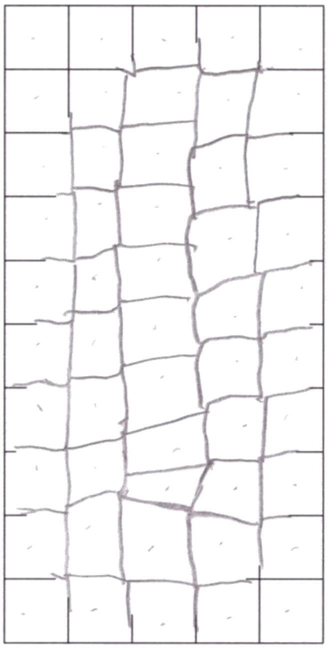


Figura 58 - Quadrados desenhados por um aluno (DA) no segundo problema (menos complexo do que o primeiro).

Finalmente, DA preencheu o retângulo com os quadrados manipuláveis e contou-os, um por um, em voz alta, determinando, corretamente, que seriam necessários 50 quadrados para o preencher completamente.

Exemplo 2 (nível 1 - nível 1)

1.º Problema

EG, um aluno do 4.º ano de escolaridade, perante o retângulo do primeiro problema (anexo L), fez uma previsão de 49 quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado necessários para o preencher completamente, não apontando para os quadrados que contou. Ora, quando se solicitou ao aluno que mostrasse os quadrados que tinha contado, EG apontou e contou, desta vez, 47 quadrados (figura 59), mostrando-se, nos instantes iniciais, confuso por ter excedido a sua previsão inicial, mas acabando por aceitar esta última previsão, sem considerar necessário voltar a repetir a contagem. Neste processo, EG, em primeiro lugar, apoiou-se nas pistas gráficas apresentadas na parte inferior do retângulo, correspondentes a uma linha de quadrados, para contar os quadrados presentes nesta linha. Depois, enumerou quadrados verticalmente, um por um. Ora, nas partes vazias do arranjo, foi notório que EG tentou adivinhar o número de quadrados aí presentes, apontando com o lápis, embora tivesse mantido um número razoavelmente constante. Com efeito, a enumeração dos quadrados por EG, embora imprecisa, não foi aleatória, denotando-se já alguma organização.

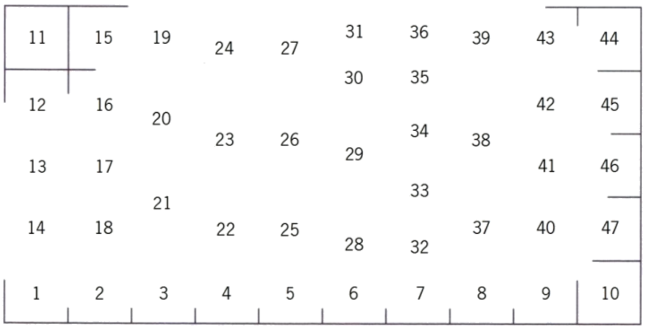


Figura 59 - Quadrados contados por um aluno (EG) no primeiro problema.

Posteriormente, EG desenhou, no retângulo, onde pensava que os quadrados estavam localizados (figura 60). Nesta fase, completou, primeiramente, os cinco quadrados presentes na coluna da direita do arranjo retangular e, depois, desenhou, com correção, cinco segmentos de reta horizontais e nove segmentos de reta verticais, que partiam do material percetual apresentado no arranjo retangular. Ora, embora a estruturação frágil de EG lhe tivesse causado dificuldades na visualização da localização dos quadrados na sua previsão original, o seu desenho sugere que foi capaz de utilizar as pistas gráficas para estruturar corretamente o arranjo. Observe-se que EG desenhou um conjunto de linhas e de colunas aproximadamente equivalentes. Por fim, EG contou, um por um, os quadrados que tinha desenhado, apresentando uma nova previsão acerca de quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo, correspondente a 50 quadrados.

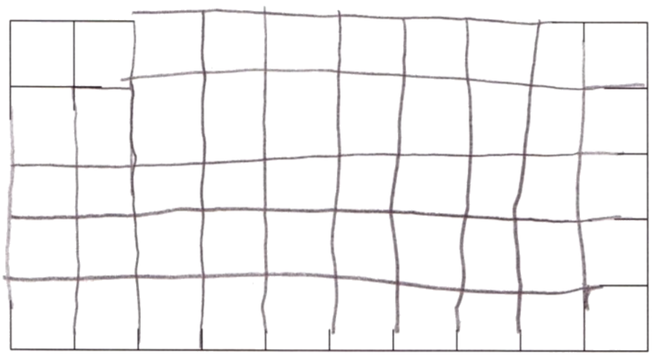


Figura 60 - Quadrados desenhados por um aluno (EG) no primeiro problema.

Finalmente, EG preencheu o retângulo com os quadrados manipuláveis, e contou-os, um por um, confirmando o número de quadrados que tinha, então, apontado anteriormente.

2.º Problema

EG, o mesmo aluno do 4.º ano de escolaridade, para prever quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo do segundo problema menos complexo do que o primeiro (anexo M), apontou e contou 49 quadrados (figura 61). À semelhança do que se verificou no primeiro problema, EG, primeiramente, apoiou-se nas pistas gráficas apresentadas, agora, no lado esquerdo do retângulo, correspondentes a uma coluna de quadrados, para contar os quadrados presentes nesta coluna. Depois, enumerou quadrados verticalmente, um por um. Ora, nas partes vazias do arranjo, foi visível, uma vez mais, que EG tentou adivinhar o número de quadrados aí presentes, embora tivesse mantido um número quase sempre constante. Com efeito, a enumeração dos quadrados por EG, embora imprecisa, não foi aleatória, denotando-se uma organização visivelmente mais sistemática neste arranjo retangular, que fornecia mais material percetual do que o do primeiro problema. No entanto, EG não conseguiu, ainda assim, conceptualizar e utilizar cada coluna de quadrados como unidade compósita.

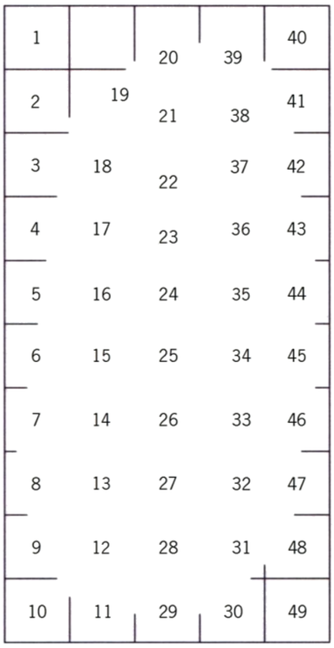


Figura 61 - Quadrados contados por um aluno (EG) no segundo problema (menos complexo do que o primeiro).

Posteriormente, EG desenhou, no retângulo, onde pensava que os quadrados estavam localizados (figura 62). Em concordância com o que já tinha feito no primeiro problema, EG, completou, em primeira instância, os dez quadrados presentes na coluna da esquerda do arranjo retangular e, depois, desenhou, com correção, três segmentos de reta verticais e nove segmentos de reta horizontais, que partiam do material percetual apresentado no arranjo retangular. Por fim, EG contou, um por um, os quadrados que tinha desenhado, apresentando uma nova previsão acerca de quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo, correspondente a 50 quadrados. Uma vez mais, embora a estruturação frágil de EG lhe tivesse causado dificuldades na visualização da localização dos quadrados na sua previsão original, o seu desenho sugere que foi capaz de utilizar as pistas gráficas para estruturar corretamente o arranjo. Observe-se que EG desenhou, também aqui, um conjunto de linhas e de colunas aproximadamente equivalentes. Por fim, EG contou, um por um, os quadrados que tinha desenhado, apresentando uma nova previsão acerca de quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo, correspondente a 50 quadrados.

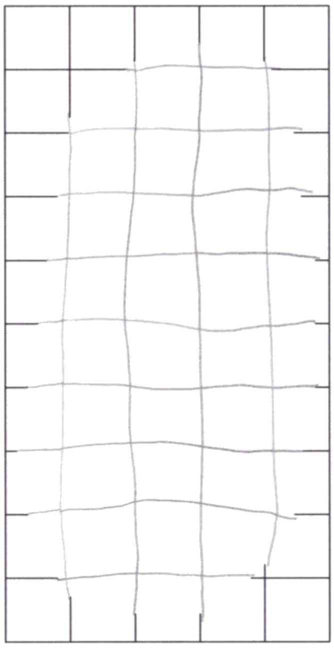


Figura 62 - Quadrados desenhados por um aluno (EG) no segundo problema (menos complexo do que o primeiro).

Finalmente, EG preencheu o retângulo com os quadrados manipuláveis, e contou-os, um por um, confirmando o número de quadrados que tinha, então, apontado anteriormente.

Exemplo 3 (nível 3A - nível 1)

1.º Problema

JR, um aluno do 4.º ano de escolaridade, no sentido de fazer uma previsão acerca de quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo do primeiro problema (anexo L), apontou e contou 60 quadrados (figura 63). Para esse efeito, JR começou por contar, um por um, os dez quadrados parcialmente construídos na linha inferior do arranjo retangular. Em seguida, tentou preencher todo o retângulo com linhas de dez quadrados, deslizando, em sentido ascendente, o seu dedo ao longo da margem esquerda do retângulo e contanto de dez em dez à medida que efetuava cada movimento. Neste sentido, JR mostrou-se, nitidamente, capaz de perceber que todo o retângulo era composto por linhas de dez quadrados, o que torna evidente que tratou a linha inferior como unidade compósita. Contudo, JR ignorou a dimensão da coluna do arranjo retangular apresentada à direita - que o material percetual fornecido tornava visível corresponder a cinco quadrados - para guiar a repetição da linha de dez quadrados que formou. Ao invés, JR repetiu cada unidade compósita de uma linha recorrendo aos seus dedos para, aproximadamente, determinar até onde é que esta se prolongava verticalmente. Ora, a concomitante precisão de JR na enumeração horizontal dos quadrados e a sua imprecisão na colocação vertical dos quadrados deixou claro, por um lado, que JR manteve, intencionalmente, a repetição de uma linha de dez quadrados como unidade compósita, mas tornou notório, por outro lado, que JR ignorou as pistas dadas pelo material percetual que indicavam a colocação do número de linhas. Ou seja, a estruturação que JR construiu para compor o arranjo retangular com linhas de dez quadrados não incluiu, portanto, distribuir esta unidade compósita pelos quadrados presentes numa coluna.

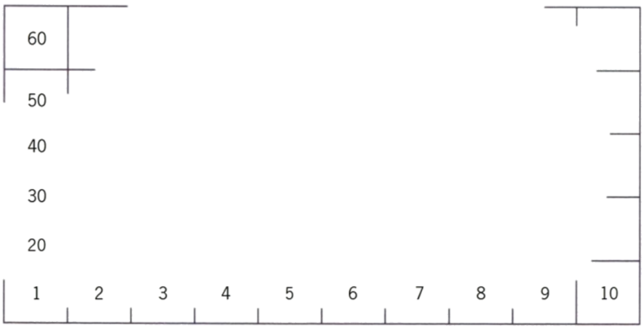


Figura 63 - Quadrados contados por um aluno (JR) no primeiro problema.

Posteriormente, JR desenhou, no retângulo, onde pensava que os quadrados estavam localizados (figura 64). Para isso, ligou, deliberadamente, os segmentos de marcas apresentados no arranjo retangular, traçando cinco segmentos de reta horizontais e dez segmentos de reta verticais. Por fim, JR contou, de dez em dez, os quadrados que tinha desenhado, apresentando uma nova previsão acerca de quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo, correspondente a 50 quadrados. Ora, a própria contagem constituiu mais uma evidência de que JR estava a estruturar o arranjo em unidades compósitas, designadamente linhas. Para além disso, através desta contagem, JR apercebeu-se, declaradamente, de que, na sua previsão inicial, tinha falhado a enumeração de uma linha de quadrados.

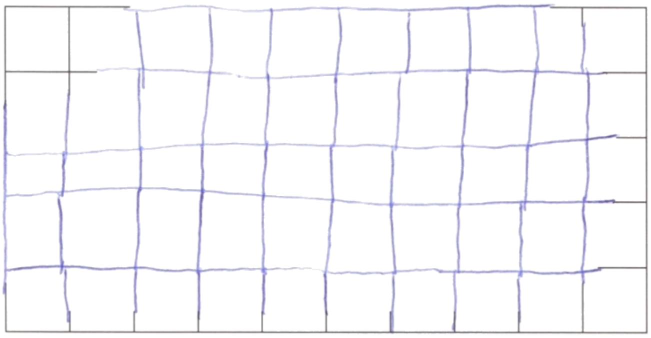


Figura 64 - Quadrados desenhados por um aluno (JR) no primeiro problema.

Finalmente, JR preencheu o retângulo com os quadrados manipuláveis, e contou-os, de dez em dez, confirmando o número de quadrados que tinha, então, apontado anteriormente.

2.º Problema

JR, o mesmo aluno do 4.º ano de escolaridade, para prever quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo do segundo problema mais complexo do que o primeiro (anexo N), apontou e contou 50 quadrados (figura 65). Em desconformidade com o que já tinha feito no primeiro problema, o aluno não conseguiu conceptualizar este arranjo retangular, que expunha o material percetual ao longo de uma das suas diagonais, como sendo totalmente coberto por linhas de quadrados, ou até mesmo por colunas de quadrados, como unidades compósitas. Com efeito, JR apontou e contou os 50 quadrados um por um, horizontalmente. Neste processo, evidenciou claras dificuldades em visualizar e contar os quadrados que não estavam desenhados no arranjo retangular. Consequentemente, recorreu aos seus dedos para determinar, aproximadamente, o espaço ocupado por um quadrado e procurou reproduzi-lo ao longo de todo o arranjo. Independentemente do facto de JR, por vezes, ter tentado, explicitamente, apoiar-se nas pistas gráficas apresentadas no retângulo para autorregular a sua contagem horizontal de quadrados, a sua estruturação foi, inequivocamente, local e não global.

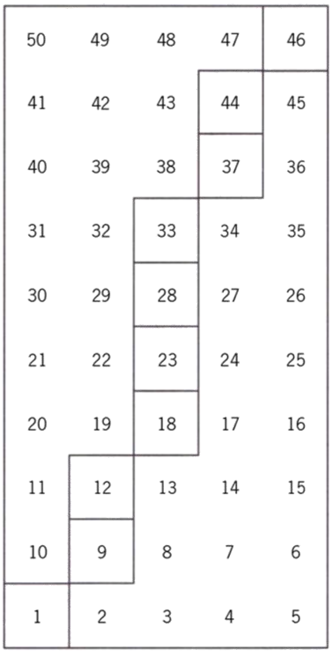


Figura 65 - Quadrados contados por um aluno (JR) no segundo problema (mais complexo do que o primeiro).

Posteriormente, JR desenhou, no retângulo, onde pensava que os quadrados estavam localizados (figura 66), exibindo um desempenho idêntico ao do primeiro problema e que, portanto, permitiu uma estruturação correta do arranjo. Todavia, JR, desta vez, contou, um por um, os quadrados que tinha desenhado, assinalando-os, inclusive, com o lápis à medida que progredia na contagem, o que confirmou uma estruturação local do arranjo.

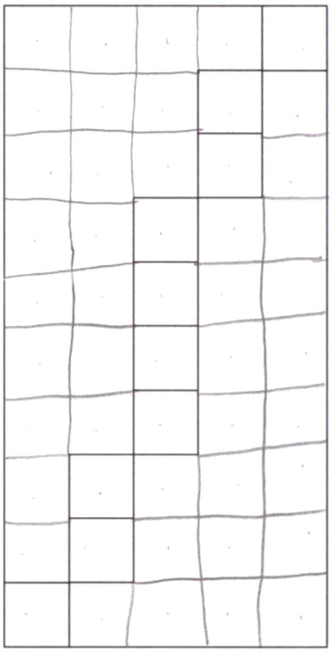


Figura 66 - Quadrados desenhados por um aluno (JR) no segundo problema (mais complexo do que o primeiro).

Finalmente, JR preencheu o retângulo com os quadrados manipuláveis, e contou-os, um por um, confirmando o número de quadrados que tinha, então, apontado anteriormente.

Exemplo 4 (nível 3A - nível 3A)

1.º Problema

IM, um aluno do 4.º ano de escolaridade, no sentido de fazer uma previsão acerca de quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo do primeiro problema (anexo L), apontou e contou 40 quadrados (figura 67). Para tal, IM começou por contar, um por um, os dez quadrados parcialmente construídos na linha inferior do arranjo retangular. Em seguida, tentou preencher todo o retângulo com linhas de dez quadrados, deslizando, em sentido ascendente, o seu dedo ao longo da margem esquerda do retângulo e contanto de dez em dez à medida que efetuava cada movimento. Neste sentido, IM mostrou-se capaz de perceber que todo o retângulo era composto por linhas de dez quadrados, o que sugere que tratou a linha inferior como unidade compósita. Contudo, IM ignorou a dimensão da coluna do arranjo retangular apresentada à direita - que o material percetual fornecido tornava visível corresponder a cinco quadrados - para guiar a repetição da linha de dez quadrados que formou. Com efeito, IM repetiu cada unidade compósita de uma linha estimando visualmente até onde é que esta se prolongava verticalmente. Ora, a concomitante precisão de IM na enumeração horizontal dos quadrados e a sua imprecisão na colocação vertical dos quadrados deixou claro que IM manteve, intencionalmente, a repetição de uma linha de dez quadrados como unidade compósita, mas tornou igualmente notório que IM ignorou as pistas dadas pelo material percetual que indicavam a colocação do número de linhas. Logo, a estruturação que IM construiu para compor o arranjo retangular com linhas de dez quadrados não incluiu, portanto, distribuir esta unidade compósita pelos quadrados presentes numa coluna.

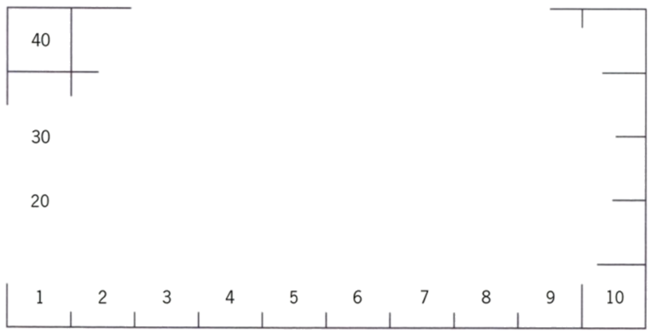


Figura 67 - Quadrados contados por um aluno (IM) no primeiro problema.

Posteriormente, IM desenhou, no retângulo, onde pensava que os quadrados estavam localizados. Para isso, ligou, deliberadamente, os segmentos de marcas apresentados no arranjo retangular, traçando cinco segmentos de reta horizontais e dez segmentos de reta verticais. Por fim, IM contou, de dez em dez, os quadrados que tinha desenhado, apresentando uma nova previsão acerca de quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo, correspondente a 50 quadrados. Ora, a própria contagem de IM constituiu mais uma evidência de que estava a estruturar o arranjo em unidades compósitas, designadamente linhas. Para além disso, através desta contagem, IM apercebeu-se, declaradamente, de que, na sua previsão inicial, tinha falhado a enumeração de uma linha de quadrados.

Finalmente, IM preencheu o retângulo com os quadrados manipuláveis, e contou-os, de dez em dez, confirmando o número de quadrados que tinha, então, apontado anteriormente.

2.º Problema

IM, o mesmo aluno do 4.º ano de escolaridade, para prever quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo do segundo problema mais complexo do que o primeiro (anexo N), apontou e contou 45 quadrados (figura 68). Neste processo, IM começou por determinar os quadrados presentes numa linha do arranjo retangular. Ora, dado que o arranjo expunha o material percetual ao longo de uma das suas diagonais, a determinação do número de quadrados presente numa linha constituiu-se inequivocamente mais exigente do que no primeiro problema. Com efeito, IM recorreu aos seus dedos para medir, aproximadamente, o espaço ocupado pelo quadrado totalmente desenhado no canto esquerdo da linha inferior do arranjo e, seguidamente, tentou reproduzi-lo ao longo de toda a linha considerada. Após ter apontado cinco quadrados nesta linha, IM procurou preencher todo o retângulo com linhas desta dimensão, deslizando, em sentido ascendente, o seu dedo ao longo da margem esquerda do retângulo e contanto de dez em dez à medida que efetuava cada movimento, à semelhança do que fez no primeiro problema. Neste sentido, IM mostrou-se, uma vez mais, capaz de perceber que todo o retângulo era composto por linhas de cinco quadrados, o que sugere que tratou a linha inferior como unidade compósita. Contudo, IM ignorou, novamente, as pistas percetuais que indicavam a dimensão de uma qualquer coluna do arranjo retangular para guiar a repetição da linha de cinco quadrados que construiu. Com efeito, IM repetiu cada unidade compósita de uma linha estimando visualmente até onde é que esta se prolongava verticalmente. Logo, a estruturação que IM construiu para compor o arranjo retangular com linhas de cinco quadrados não incluiu, uma vez mais, distribuir esta unidade compósita pelos quadrados presentes numa coluna.

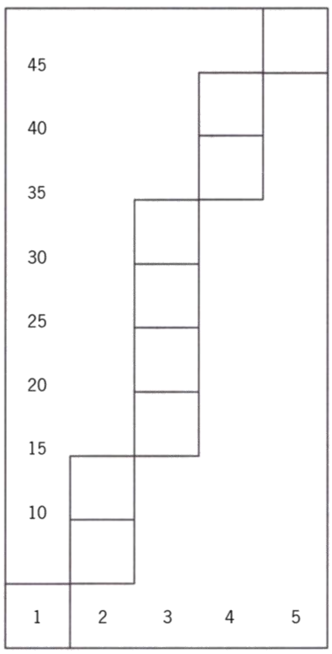


Figura 68 - Quadrados contados por um aluno (IM) no segundo problema (mais complexo do que o primeiro).

Posteriormente, IM desenhou, no retângulo, onde pensava que os quadrados estavam localizados, exibindo um desempenho idêntico ao do primeiro problema e que, portanto, permitiu uma estruturação correta do arranjo.

Por fim, IM contou, de cinco em cinco, os quadrados que tinha desenhado, apresentando uma nova previsão acerca de quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo, correspondente a 50 quadrados. Novamente, a própria contagem de IM constituiu mais uma evidência de que estava a estruturar o arranjo em unidades compósitas, designadamente linhas. Para além disso, através desta contagem, IM, à semelhança do que sucedeu no primeiro problema, apercebeu-se de que, na sua previsão inicial, tinha falhado a enumeração de uma linha de quadrados. Finalmente, IM preencheu o retângulo com os quadrados manipuláveis, e contou-os, de dez em dez, confirmando o número de quadrados que tinha, então, apontado anteriormente.

Exemplo 5 (nível 3B - nível 3B)

1.º Problema

MM, um aluno do 4.º ano de escolaridade, para prever quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo do primeiro problema (anexo L), apontou e contou 50 quadrados (figura 69). Para tal, contou, primeiramente, os dez quadrados parcialmente construídos na linha inferior do arranjo retangular e, no decurso, estruturou adequadamente o arranjo em linhas de dez quadrados, como unidade compósita. Ora, MM, de forma a implementar continuadamente a contagem de dez em dez, utilizou o dedo indicador de uma mão para assinalar cada um dos cinco quadrados da coluna da direita do arranjo retangular e, conforme apontava para um destes quadrados, deslizava o dedo indicador da outra mão até ao lado esquerdo do arranjo, materializando uma linha. Com efeito, MM foi capaz de guiar a sua repetição de linhas de dez quadrados no arranjo retangular tendo como referência os cinco quadrados parcialmente desenhados na coluna da direita do retângulo. Logo, o seu esquema de enumeração consistiu na repetição de linhas de dez quadrados, distribuindo-as pelos quadrados presentes numa coluna. Contudo, MM era incapaz de executar tal enumeração sem o material percetual suficiente no arranjo, do qual mostrou profunda dependência. Na verdade, MM parecia ter uma estruturação clara do arranjo como um conjunto de linhas, todavia, o reconhecimento de como as pistas percetuais fornecidas sobre o número de quadrados presente numa coluna podiam ser usadas para guiar a sua repetição de linhas foi ainda emergente.

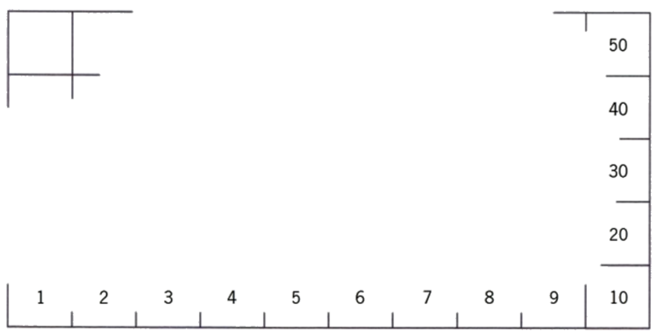


Figura 69 - Quadrados contados por um aluno (MM) no primeiro problema.

Posteriormente, MM desenhou, no retângulo, onde pensava que os quadrados estavam localizados. Para isso, ligou, deliberadamente, os segmentos de marcas apresentados no arranjo retangular, traçando cinco segmentos de reta horizontais e dez segmentos de reta verticais. Por fim, MM contou, de dez em dez, os quadrados que tinha desenhado, apresentando uma nova previsão acerca de quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo, correspondente a 50 quadrados, e igual à previsão inicial. Finalmente, MM preencheu o retângulo com os quadrados manipuláveis, e contou-os, de dez em dez, confirmando o número de quadrados que tinha, então, apontado anteriormente.

2.º Problema

MM, o mesmo aluno do 4.º ano de escolaridade, para prever quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo do segundo problema mais complexo do que o primeiro (anexo N), apontou e contou 50 quadrados (figura 70). Neste processo, MM começou por determinar os quadrados presentes numa linha do arranjo retangular. Ora, uma vez que o arranjo expunha o material percetual ao longo de uma das suas diagonais, a determinação do número de quadrados presente numa linha constituiu-se obviamente mais exigente do que no primeiro problema. Com efeito, MM contou, primeiramente, o quadrado totalmente desenhado no lado esquerdo da linha inferior do arranjo e, depois, colocou verticalmente um lápis em cima de cada uma das colunas de quadrados sugeridas pelo material percetual para determinar o número de quadrados existentes ao lado do quadrado que já tinha contado. Após ter apontado cinco quadrados nesta linha, MM estruturou adequadamente o arranjo em linhas de cinco quadrados, como unidade compósita. Ora, MM, de forma a implementar continuadamente a contagem de cinco em cinco, utilizou o procedimento anteriormente apresentado. Ou seja, colocou, agora horizontalmente, um lápis em cima dos quadrados apresentados em cada uma das linhas de quadrados sugeridas pelo material percetual, concretizando, de cada vez, uma linha. Uma vez mais, o seu esquema de enumeração consistiu na repetição de linhas de dez quadrados, distribuindo-as pelos quadrados presentes numa coluna. Contudo, MM era incapaz de executar tal enumeração sem o material percetual suficiente no arranjo, do qual mostrou, novamente, profunda dependência. Também neste problema, MM parecia ter uma estruturação clara do arranjo como um conjunto de linhas, todavia, o reconhecimento de como as pistas percetuais fornecidas sobre o número de quadrados presente numa coluna podiam ser usadas para guiar a sua repetição de linhas foi simplesmente emergente.

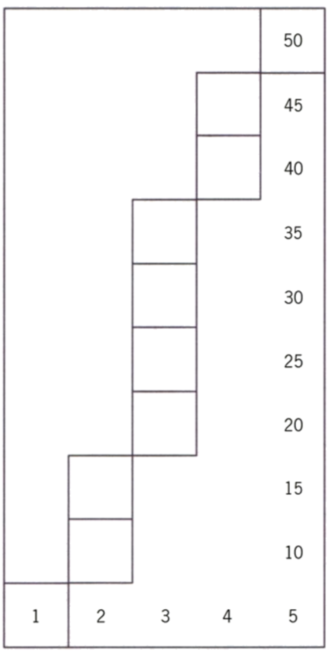


Figura 70 - Quadrados contados por um aluno (IM) no segundo problema (mais complexo do que o primeiro).

Posteriormente, MM desenhou, no retângulo, onde pensava que os quadrados estavam localizados, exibindo um desempenho idêntico ao do primeiro problema e que, portanto, permitiu uma estruturação correta do arranjo. Por fim, MM contou, de cinco em cinco, os quadrados que tinha desenhado, apresentando uma nova previsão acerca de quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo, correspondente a 50 quadrados.

Exemplo 6 (nível 3C - nível 3C)

1.º Problema

RP, um aluno do 4.º ano de escolaridade, para prever quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo do primeiro problema (anexo L), anunciou 50 quadrados. Para isso, RP observou o arranjo retangular e, contando em silêncio, mas apontando para o número de quadrados parcialmente desenhados em dois lados perpendiculares do arranjo retangular, designadamente no lado horizontal inferior e no lado vertical direito, apresentou prontamente a sua resposta. Ora, quando solicitado ao aluno que explicasse a previsão então realizada, RP afirmou tratar-se um retângulo de dez quadrados vezes cinco quadrados, declarando, inclusivamente, que o resultado equivalia à área do retângulo em questão. RP exprimiu, desta forma, um nível de sofisticação na estruturação do arranjo retangular bastante elevado. Efetivamente, RP compreendeu, desde logo, que podia compor o arranjo em linhas de dez quadrados, precisando unicamente de descobrir o número destas linhas, que rapidamente determinou ao contar o número de quadrados de uma coluna, que estavam parcialmente visíveis no arranjo. Assim, RP tinha abstraído, neste momento, uma estruturação do arranjo enquanto uma organização de cinco linhas de dez quadrados, mostrando ter interiorizado esta estrutura independentemente da sua representação. Ora, as atividades de desenho dos quadrados no retângulo e de preenchimento do mesmo com os quadrados manipuláveis constituíram-se lineares.

2.º Problema

RP, o mesmo aluno do 4.º ano de escolaridade, para prever quantos quadrados manipuláveis com um centímetro quadrado seriam necessários para preencher completamente o retângulo do segundo problema mais complexo do que o primeiro (anexo L), anunciou 50 quadrados. Para tal, RP apontou e contou, de um forma correta e sem qualquer hesitação, o número de colunas e, seguidamente, o número de linhas sugeridas pelo material percetual fornecido no arranjo retangular, e apresentou prontamente a sua resposta. Ora, quando solicitado ao aluno que explicasse a previsão então realizada, RP afirmou tratar-se de um retângulo de cinco quadrados vezes dez quadrados, declarando, inclusivamente, e à semelhança do que tinha realizado no primeiro problema, que o resultado equivalia à área do retângulo em questão. RP voltou a exprimir, desta forma, um nível de sofisticação na estruturação do arranjo bastante elevado, que incluiu a coordenação apropriada das unidades compósitas, designadamente as linhas e as colunas, com a dimensão ortogonal. Isto, mesmo perante um problema mais complexo, visto que o arranjo expunha o material percetual ao longo de uma das suas diagonais, tornando a determinação do número de linhas e de colunas mais exigente. Posteriormente, a atividade de desenho dos quadrados no retângulo, bem como o preenchimento do mesmo com os quadrados manipuláveis, constituiu-se, novamente, linear.

Quadro 14 - Exemplos ilustrativos dos tipos de desempenho revelados pelos alunos da turma do 4.º ano de escolaridade nos dois problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões.

Em súmula, na aplicação dos dois problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões no 1.º Ciclo do Ensino Básico, na turma do 4.º ano de escolaridade, constatou-se que a demarcada maioria dos alunos exibiu o nível 1, sendo que os restantes exibiram o nível 3A, ou o nível 3B, ou ainda o nível 3C. Por conseguinte, nenhum aluno exibiu, em qualquer um dos problemas aplicados, o nível 2. No que concerne à comparação do desempenho demonstrado pelos alunos no primeiro problema e no segundo problema, verificou-se que, à exceção de um aluno, que exibiu, respetivamente, o nível 3A e o nível 1, todos os alunos da turma ostentaram o mesmo nível em ambos.

A aplicação dos problemas no 2.º Ciclo do Ensino Básico, na turma do 5.º ano de escolaridade, ocorreu entre 30 de maio de 2015 e 10 de junho de 2015.

Na aplicação do primeiro problema (anexo L), igual para os vinte e três alunos da turma, quatro alunos exibiram o nível 1; o mesmo número de alunos exibiu o nível 3B; e quinze alunos exibiram o nível 3C (gráfico 4).

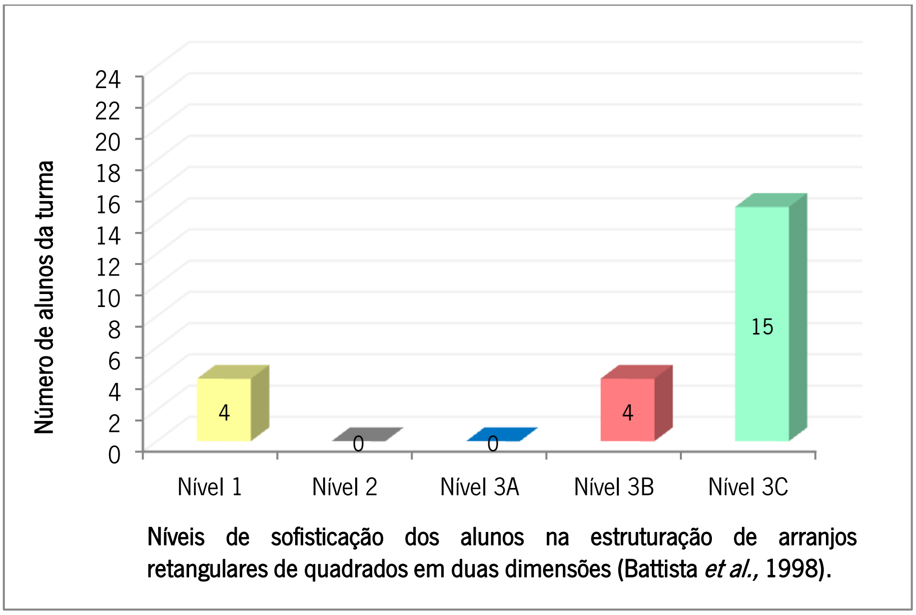


Gráfico 4 - Níveis de sofisticação exibidos pelos alunos do 5.º ano de escolaridade no primeiro problema.

Na aplicação do segundo problema menos complexo do que o primeiro (anexo M), aos quatro alunos que, neste, exibiram o nível 1, todos os alunos evidenciaram um desempenho análogo ao que tinham exposto, pelo que, exteriorizaram, novamente, o nível 1 (gráfico 5). Com efeito, e à semelhança do que se verificou na turma do 4.º ano de escolaridade, ainda que diante de um problema menos complexo, os alunos não expuseram alterações na expressão do seu desempenho.

Na aplicação do segundo problema mais complexo do que o primeiro (anexo N), aos dezanove alunos que, neste, exibiram qualquer nível à exceção do nível 1, o desempenho de todos os alunos foi congruente com os níveis que haviam exibido no primeiro problema (gráfico 6), contrariamente ao que ocorreu na turma do 4.º ano de escolaridade. Assim sendo, mesmo defronte de um problema mais complexo, os alunos mantiveram fixas as características do seu desempenho anterior.

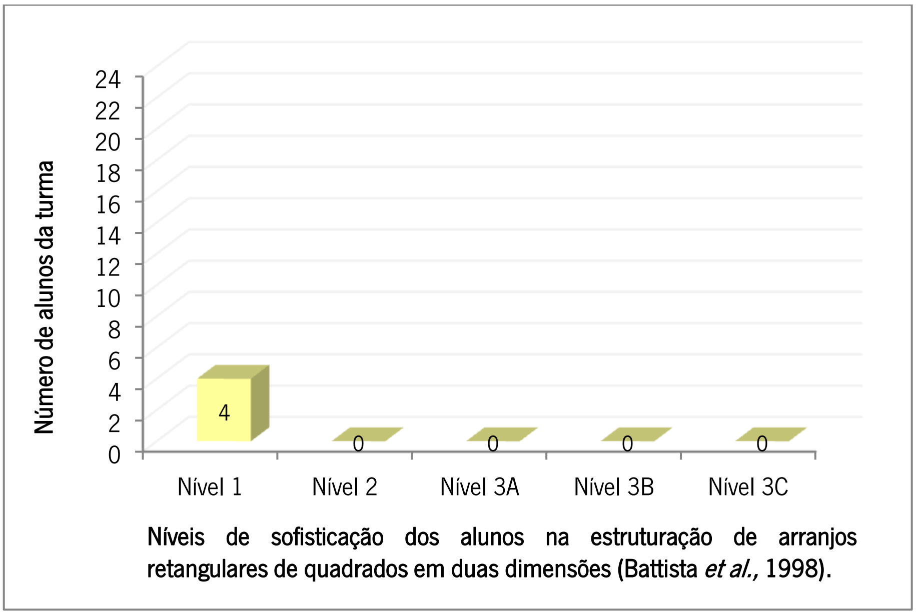


Gráfico 5 - Níveis de sofisticação exibidos pelos alunos do 5.º ano de escolaridade no segundo problema (menos complexo do que o primeiro).

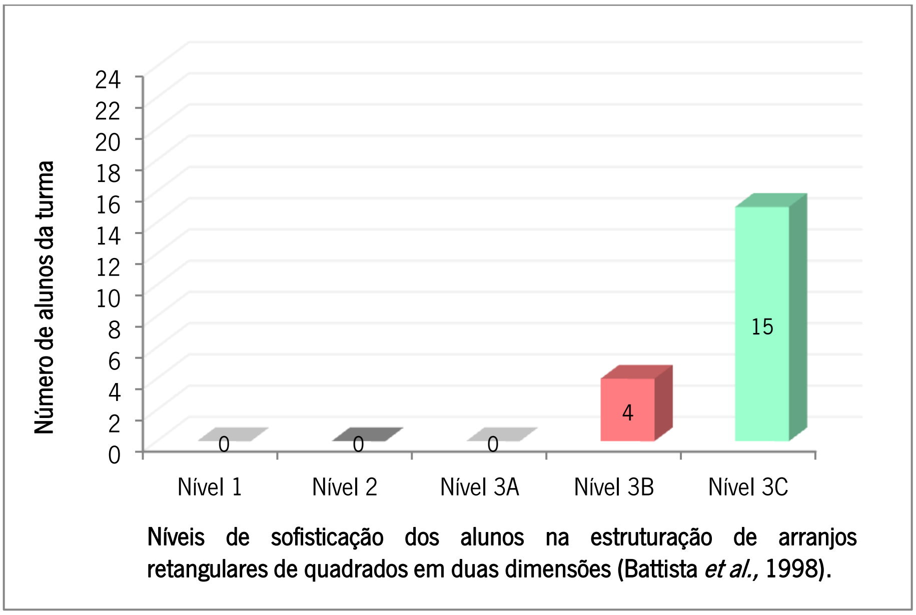


Gráfico 6 - Níveis de sofisticação exibidos pelos alunos do 5.º ano de escolaridade no segundo problema (mais complexo do que o primeiro).

Tendo por base a informação contida nos gráficos 4, 5 e 6, podem definir-se três tipos de desempenhos revelados pelos alunos da turma do 5.º ano de escolaridade nos dois problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões aplicados, designadamente: nível 1 - nível 1; nível 3B - nível 3B; e nível 3C - nível 3C.

Os três tipos de desempenho supramencionados são expressamente convergentes com três dos cinco tipos de desempenho revelados pelos alunos da turma do 4.º ano de escolaridade. Dessa forma, considera-se dispensável a explanação de exemplos ilustrativos destes tipos de desempenho, dada a sua profunda semelhança com os exemplos já apresentados anteriormente.

Em súmula, na aplicação dos dois problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões no 2.º Ciclo do Ensino Básico, na turma do 5.º ano de escolaridade, constatou-se que a demarcada maioria dos alunos exibiu o nível 3C, sendo que os restantes alunos exibiram, em número equilibrado, o nível 1 ou o nível 3B. Com efeito, nenhum aluno exibiu, em qualquer um dos problemas aplicados, o nível 2 ou o nível 3A. No que respeita à comparação do desempenho demonstrado pelos alunos no primeiro problema e no segundo problema, verificou-se que todos os alunos da turma patentearam o mesmo nível em ambos.

Finalmente, numa abordagem comparativa entre o desempenho revelado pelos alunos da turma do 4.º ano de escolaridade e da turma do 5.º ano de escolaridade na aplicação dos dois problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões, salienta-se, enquanto facto visivelmente contrastante, que, na primeira turma em referência, o nível exibido com maior frequência foi o nível 1, ao passo que, na segunda turma em menção, o nível exibido com maior frequência foi o nível 3C. Estes dois níveis adquiriram, de facto, uma verdadeira expressão nas respetivas turmas, pelo que os restantes tiveram, claramente, uma menor representação.

Um outro facto saliente, tanto na turma do 4.º ano de escolaridade, como na turma do 5.º ano de escolaridade, foi o de o nível 2 não ter sido exibido por nenhum aluno, mesmo no caso em que, do primeiro problema para o segundo problema, houve mudança de nível.

CAPÍTULO V - CONCLUSÃO

Neste capítulo, apresentam-se as principais conclusões que emergiram do Projeto de Intervenção Pedagógica, tendo por referência os objetivos do Projeto e, mais explicitamente, as questões de investigação que nortearam o Projeto. Em articulação, assinalam-se algumas limitações inerentes ao Projeto, importantes na perspetivação das conclusões, propõem-se recomendações de cariz didático e, também, para futuras investigações, e tecem-se comentários reflexivos relativamente ao valor do Projeto no que concerne ao desenvolvimento profissional.

O Projeto, por um lado, pretendia compreender como é que a utilização de materiais manipuláveis poderia contribuir para a compreensão, pelos alunos, de tópicos relacionados com a área, e, por outro lado, objetivava caracterizar o desempenho dos alunos na estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões, entendida como essencial no desenvolvimento da noção de área (Battista *et al.*, 1998). Neste sentido, procurou-se responder a três questões de investigação que, doravante, serão, declaradamente, tomadas como mote para o conjunto de ideias a desenvolver neste capítulo de pendor conclusivo.

Atente-se na primeira questão de investigação:

a) *Em que medida é que a utilização do material manipulável bissemis auxilia a compreensão, pelos alunos, do conceito de equivalência de figuras e do processo de medição direta da área, e a distinção entre os conceitos de área e de perímetro?*

Esta questão de investigação aludia à utilidade do material manipulável bissemis para auxiliar a compreensão, pelos alunos, do conceito de equivalência de figuras e do processo de medição direta da área, e a distinção entre os conceitos de área e de perímetro.

No que concerne à compreensão do conceito de equivalência de figuras, verificou-se que os bissemis, da autoria de Gerdes (2008b), ao serem formados por dois semis, ou seja, dois triângulos retângulos congruentes cujo cateto maior é o dobro do cateto menor, se revelaram um material por excelência para, no âmbito de tarefas de comparação da área dos bissemis, concentrar a atenção dos alunos no atributo matemático mensurável área, que, por sua vez, se constituiu basilar para a compreensão do conceito de equivalência de figuras. De facto, os bissemis, que foram construídos pelos próprios alunos através da justaposição dos lados de igual comprimento de dois triângulos retângulos congruentes cujo cateto maior é o dobro do cateto menor, revelaram-se um material com muito potencial para levar os alunos, no contexto das tarefas de comparação supracitadas, a elaborarem, gradualmente, estratégias de raciocínio baseadas na comparação direta (sobreposição) dos dois triângulos congruentes em que os mesmos se decompunham, ultrapassando, deste modo, raciocínios primordialmente baseados na aparência das figuras ou assentes na utilização de fórmulas e de procedimentos numéricos. Neste sentido, os alunos foram capazes de deduzir a equivalência dos bissemis, justificando-a com base na equivalência dos dois triângulos que compunham cada um dos mesmos, o que favoreceu a compreensão do conceito de equivalência de figuras pelos alunos, que foi introduzido posteriormente. Por fim, aquando da tarefa de identificação das figuras equivalentes entre aquelas que os alunos tinham construído, criativamente, em grupo, eles basearam-se no número de bissemis utilizado na construção das figuras para justificarem a equivalência de algumas destas figuras, o que reforçou, uma vez mais, a compreensão do conceito de equivalência de figuras.

No que refere à compreensão do processo de medição direta da área, constatou-se que a utilização dos bissemis em experiências de ensino-aprendizagem pensadas para os alunos medirem diretamente a área de puzzles, construídos com um número variável de bissemis (Gerdes, 2008b), por meio da repetição de unidades de medida não convencionais, entre as quais os bissemis, constituiu-se essencial para a compreensão do processo de medição deste atributo, ausente de procedimentos numéricos rotineiros e de fórmulas, que, tal como confirma Battista (2007), tão prematuramente têm sido privilegiados na abordagem à Medida geométrica. Ainda que, inicialmente, alguns grupos, por um lado, não tivessem conseguido compreender como é que a contagem das unidades de área utilizadas para cobrir os puzzles, entre as quais os bissemis, produzia a medida de área dos mesmos, e, todos os grupos, por outro lado, tivessem expressado a área dos puzzles sem qualquer unidade de área, ou com unidades de área do sistema métrico, ou até mesmo com unidades de comprimento do sistema métrico, a verdade é que estas fragilidades tornaram-se menos frequentes à medida que os alunos progrediram na exploração das tarefas, facto que, de certa maneira, reforça a ideia de uma compreensão crescente do processo de medição direta da área pelos alunos.

No que respeita à distinção entre os conceitos de área e de perímetro, os bissemis, pelas suas características intrínsecas - todos equivalentes e alguns com perímetro distinto -, assumiram-se um material poderoso para auxiliar as explorações dos alunos, possibilitando situações de aprendizagem ativa e com sucesso neste âmbito. Efetivamente, os bissemis permitiram, progressivamente, contornar as dificuldades experimentadas pelos alunos durante a exploração das tarefas, concorrendo, dessa forma, para a distinção entre os conceitos de área e de perímetro.

Considere-se, agora, a segunda questão de investigação:

b) *Em que medida é que a utilização de materiais manipuláveis mecânicos concebidos para o efeito auxilia a compreensão, pelos alunos, das fórmulas para a área do paralelogramo e do triângulo?*

Esta questão de investigação aludia à utilidade de materiais mecânicos concebidos para o efeito para auxiliar a compreensão, pelos alunos, das fórmulas para a área do paralelogramo e do triângulo.

No que toca à compreensão das fórmulas para a área do paralelogramo e do triângulo, que, devido à confluência dos resultados obtidos, serão comentadas em conjunto, apurou-se que o material concebido para a abordagem da fórmula para a área do paralelogramo, que foi (re)construído a partir de um mecanismo pré-estruturado da autoria de Van der Meer e Gardner (1994), bem como o material concebido para a abordagem da fórmula para a área do triângulo, que foi construído originalmente, se evidenciaram suportes proveitosos para a construção autónoma destas duas fórmulas pelos alunos, favorecida pelo percurso exploratório desenhado especificamente para cada um dos materiais. De facto, as situações de ensino-aprendizagem proporcionadas, ao envolverem e desafiarem intelectualmente os alunos na construção das fórmulas a partir da manipulação dos respetivos materiais, permitiram que eles desenvolvessem "um sentido intuitivo da sua plausibilidade" (NCTM, 2007, p. 286) e, dessa forma, concorreram para uma compreensão das mesmas, transpondo a sua simples memorização ou aplicação mecanizada. Apesar disso, este conhecimento, de cariz procedimental, não impediu que, posteriormente, os alunos, em atividades variadas que envolviam a manipulação destas fórmulas, evidenciassem fragilidades. No entanto, também estas últimas favoreceram uma compreensão mais completa das fórmulas para a área do paralelogramo e do triângulo, não ficando, assim, circunscritas à sua construção inicial.

Não obstante às conclusões explanadas anteriormente, as quais enfatizaram a utilidade dos materiais manipuláveis usados no Projeto para auxiliar a compreensão, pelos alunos, de tópicos relacionados com a área, importa ter em consideração algumas limitações inerentes ao Projeto, que são importantes na perspetivação das próprias conclusões. O espaço temporal em que decorreu a intervenção pedagógica, e, por extensão, a investigação, poderá ser considerado diminuto. Também a própria população em investigação poderá ser entendida como insuficiente, limitando-se aos alunos das turmas do 4.º ano de escolaridade e do 5.º ano de escolaridade em que decorreu a intervenção pedagógica, e que integraram o estudo de casos múltiplos concretizado no Projeto. Ademais, poderá ser concebida a ideia de que "as situações da prática profissional tendem a ser únicas e irrepetíveis."

(Ponte, 2002, p. 4). Finalmente, a utilização dos materiais manipuláveis pelos alunos no contexto da intervenção pedagógica desenvolvida não pode dissociar-se da estratégia de "ensino-aprendizagem exploratório" (Ponte, 2005, p. 12) que lhe esteve permanentemente subjacente, e que se acredita ter sido, também ela, determinante para os resultados obtidos.

Ponderadas as limitações anteriores, reforça-se, apesar disso, a ideia de que os materiais utilizados no Projeto, designadamente os bissemis e os dois materiais mecânicos, se constituíram instrumentos didáticos potenciais, que promoveram experiências de aprendizagem criativas e frutuosas. Posto isto, a recomendação de cariz didático que se perpetua é o aproveitamento destes materiais, potencialmente por professores do 1.º e do 2.º Ciclos do Ensino Básico, como auxílio à sua prática pedagógica na sala de aula, mas não como fins em si mesmos. Com efeito, propugna-se a difusão destes materiais pela mais-valia que poderão ser para a comunidade educativa, enquanto instrumentos de suporte salutares às aprendizagens dos alunos, tal como se verificou neste Projeto. Ora, as considerações anteriores refletem, em parte, a importância que guarnece a realização de investigação sobre a própria prática profissional, tal qual operado neste Projeto: "é uma actividade que pode despertar grande interesse nos respectivos actores e que é susceptível de proporcionar significativas implicações para a sua prática profissional." (Ponte, 2008, p. 160) e, acrescente-se, para a prática de todo o grupo profissional em que estes atores se inserem.

Para além do disposto acima, as implicações decorrentes da investigação sobre a própria prática podem abrir caminho a novas ideias que mereçam ser alvo de investigação. Ora, nesta linha de pensamento, e tendo por base o Projeto, acredita-se que seria relevante analisar a utilização dos mesmos materiais que foram usados no Projeto, com os mesmos fins didáticos, junto de outros públicos escolares, no sentido de serem identificadas novas vantagens e/ou inconvenientes do seu uso. Também seria curioso estudar outras potencialidades, em particular, dos bissemis na construção matemática dos alunos, ou, até mesmo, explorar as potencialidades de outros materiais didáticos da autoria de Paulus Gerdes igualmente direcionados para o público infanto-juvenil, como são os desenhos sona (Gerdes, 1997) e os bisos (Gerdes, 2008a). Crê-se, ainda, que seria importante a investigação de outros materiais mecânicos que suportassem uma abordagem concreta de outras fórmulas matemáticas, facilitadores de aprendizagens significativas e, portanto, mais duradouras.

Observe-se, finalmente, a terceira questão de investigação:

c) *Como é que se caracteriza o desempenho dos alunos em problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões?*

Esta questão de investigação aludia à caracterização do desempenho dos alunos em problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões, estabelecendo uma componente do Projeto expressamente investigativa.

Por meio da aplicação dos dois problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões na turma do 4.º ano de escolaridade e na turma do 5.º ano de escolaridade, posteriormente analisados à luz dos cinco níveis de sofisticação dos alunos na estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões, descritos por Battista *et al.* (1998), apurou-se que, na primeira turma referenciada, a demarcada maioria dos alunos exibiu o nível 1, sendo que os restantes exibiram o nível 3A, ou o nível 3B, ou ainda o nível 3C, e, na segunda turma referenciada, a demarcada maioria dos alunos exibiu o nível 3C, sendo que os restantes alunos exibiram, em número equilibrado, o nível 1 ou o nível 3B.

Tendo em consideração a informação disposta acima, por um lado, verificou-se que, na turma do 4.º ano de escolaridade, o nível exibido com maior frequência foi o nível 1, e, na turma do 5.º ano de escolaridade, o nível exibido com maior frequência foi o nível 3C. Portanto, na generalidade, os alunos de um nível de escolaridade superior exibiram níveis de sofisticação mais elevados. Mais particularmente, a maioria dos alunos do nível de escolaridade inferior e do nível de escolaridade imediatamente superior exibiu, respetivamente, o correspondente ao primeiro e ao último nível de sofisticação dos níveis descritos por Battista *et al.* (1998). Estes resultados sugerem, pois, que alunos de níveis de escolaridade superiores tendem a exibir níveis de sofisticação na estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões mais elevados. Ainda assim, o desfasamento encontrado nas duas turmas mostra-se abismal. Para esta ponderação, é importante convocar o facto de a turma do 5.º ano de escolaridade, à exceção de quatro alunos, ser composta por alunos com um desempenho em Matemática bastante considerável.

Por outro lado, verificou-se que, tanto na turma do 4.º ano de escolaridade, como na turma do 5.º ano de escolaridade, o nível 2 não foi exibido por nenhum aluno. Ora, ao abrigo deste facto, parece pertinente indagar até que ponto é que este nível corresponde, efetivamente, a um nível. Na verdade, em virtude da sua total inocorrência no decurso de todos os problemas de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões aplicados aos alunos, correspondentes integralmente a noventa e dois problemas (dois problemas aplicados a cada um dos vinte e três alunos de cada uma das duas turmas), restam dúvidas relativamente ao facto de as características que designam o nível 2 serem visíveis e frequentes o suficiente para, no seu conjunto, corporizarem um nível, parecendo, antes, correspondentes a um subnível que intermediaria os demais.

Finalmente, e reiterando as próprias conclusões de Battista *et al.* (1998), verificou-se que a estrutura em linhas por colunas de um arranjo retangular de quadrados em duas dimensões não é, efetivamente, inerente ao próprio arranjo, nem é automaticamente apreendida pelos alunos, devendo ser construída por cada aluno.

Uma vez mais, importa ressalvar que as conclusões suprarreferidas estão limitadas à população em investigação, correspondente aos alunos das turmas do 4.º ano de escolaridade e do 5.º ano de escolaridade em que decorreu a intervenção pedagógica, e que integraram o estudo de casos múltiplos concretizado no Projeto. Posto isto, considera-se que seria oportuno desenvolver uma investigação confluente com a que foi realizada, mas que compreendesse uma amostra maior de alunos, no sentido de poderem ser validados alguns resultados que aqui se apresentaram. No entanto, não se deve diminuir, por isso, o interesse que as conclusões assinaladas têm para o enriquecimento do conhecimento coletivo sobre a forma como os alunos estruturam arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões. Esta estruturação, não sendo intuitiva para os alunos, deve ser uma questão a considerar pelos professores, mais particularmente do 1.º e do 2.º Ciclos do Ensino Básico, na sua prática educativa relacionada com esta temática. Ora, esta é a recomendação de cariz didático que se pretende aclarar, no sentido em que, como reportam Outhred e Mitchelmore (2000), a perceção de muitos professores é a de que a estruturação de um arranjo retangular é evidente para os alunos.

Em suma, o presente Relatório de Estágio foi desenvolvido no âmbito da Unidade Curricular *Prática de Ensino Supervisionada*, que, na sua essência, visava o desenvolvimento de atividades de iniciação à prática profissional. Ora, no fulcro desta Unidade Curricular encontravam-se a conceção, o desenvolvimento, e a avaliação de um Projeto de Intervenção Pedagógica, que estiveram na base da elaboração deste Relatório. No culminar deste processo, pode percecionar-se, mais plenamente, o valor do Projeto no que concerne ao desenvolvimento profissional. Não se aspirando a uma explanação, potencialmente infindável, das aprendizagens profissionais que o processo formativo vivenciado possibilitou, quer-se, particularmente, relevar o cultivo de uma atitude reflexiva e crítica sobre a prática profissional, aliada ao interesse de alimentar a investigação de questões diretamente relacionadas com a própria prática, "cujos resultados e perspectivas possam ser re-investidos nessa prática e ajudar à sua transformação." (Ponte, 2008, p. 163). Na verdade, como nos diz Ponte (2002), o ensino é muito mais do que um atividade rotineira, em que se aplicam metodologias pré-determinadas; é, concomitantemente, uma atividade intelectual, política e de gestão de pessoas e recursos. Neste contexto, compreende-se a importância de a construção da identidade profissional decorrer no âmago de uma matriz interveniente, reflexiva, crítica, e de permanente investigação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* Lisboa: Ministério da Educação - Departamento da Educação Básica.

Aires, A. P., & Campos, H. (2011). Construção intuitiva do conceito de medida. In P. Palhares, A. Gomes, & E. Amaral (Coords.), *Complementos de Matemática para professores do Ensino Básico* (pp. 47-62). Lisboa: Lidel.

Battista, M. T. (2003). Understanding Students' Thinking about Area and Volume Measurement. In D. H. Clements (Ed.), *Learning and Teaching Measurement: 2003 yearbook* (pp. 122-142). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Battista, M. T. (2004). Applying Cognition-Based Assessment to Elementary School Students' Development of Understanding of Area and Volume Measurement. *Mathematical Thinking and Learning, 6* (2), 185-204.

Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. 2, pp. 843-908). Charlotte: Information Age Publishing.

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., & Borrow, C. V. A. (1998). Students' Spatial Structuring of 2D Arrays of Squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29* (5), 503-532. Consultado em dezembro 1, 2014, em http://static1.1.sqspcdn.com/static/f/765969/25066229/1403017605243/Students'+Spatial+Structuring+of+2D+Arrays+of+Squares+by+Doug+Clemens.pdf?token=7InHBdJuzx71u2VHHcBQSc0Hp6o%3D.

Becker, J., & Selter, C. (1996). Elementary School Practices. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (Parte 1, pp. 511-564). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Bruner, J. S. (1988). *Desarrollo cognitivo y educación.* Madrid: Ediciones Morata.

Bruner, J. S. (2011). *O Processo da Educação.* Lisboa: Edições 70.

Campbell, P. F., & Carey, D. A. (1992). New Directions for the Early Childhood Mathematics Curriculum. In C. Seefeldt (Ed.), *The Early Childhood Curriculum: a review of current research* (2nd ed., pp. 152-174). New York: Teachers College Press.

Caraça, B. J. (1978). *Conceitos Fundamentais da Matemática* (7a ed.). Lisboa.

Carmo, H., & Ferreira, M. M. (1998). *Metodologia da Investigação: guia para auto-aprendizagem.* Lisboa: Universidade Aberta.

Carvalho, P., & Vieira, L. (2008). Grandezas e Medida. In E. Mamede (Coord.), *Matemática: ao encontro das práticas - 1.º Ciclo* (pp. 177-195). Braga: Universidade do Minho - Instituto de Estudos da Criança.

Cavanagh, M. (2008). Area measurement in year 7. *Reflections, 33* (1), 55-58. Consultado em agosto 16, 2015, em http://www.curriculumsupport.education.nsw.gov.au/secondary/mathematics/assets/pdf/s4_teach_ideas/area/area_meas.pdf.

Clements, D. H., & Stephan, M. (2004). Measurement in Pre-k to Grade 2 Mathematics. In D. H. Clements, & J. Sarama (Eds.), *Engaging Young Children in Mathematics: standards for early childhood mathematics education* (pp. 299-317). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Coutinho, C. P. (2013). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: teoria e prática* (2a edição). Coimbra: Almedina.

Dean, C. (2014). Area beyond the formula. *Teaching children Mathematics, 20* (7), 408-411.

Dienes, Z. P. (1977a). *A Matemática Moderna no Ensino Primário* (4a ed.). Lisboa: Livros Horizonte.

Dienes, Z. P. (1977b). *Exploração do Espaço e Prática da Medição* (3a ed.). São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed., pp. 119-161). New York: Macmillan.

Ferreira, D., & Sousa, F. (2007). A Medida. In A. Gomes (Coord.), *MAT 1C: desafio à matemática* (pp. 133-142). Braga: Universidade do Minho - Instituto de Estudos da Criança.

Fontana, A., & Frey, J. (1994). Interviewing: the art of science. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 361-376). Thousand Oaks: Sage publications.

Gabinete de Avaliação Educacional [GAVE] (2008a). *Relatório sobre a Prova de Aferição de Matemática do 1.º Ciclo de 2008.* Consultado em dezembro 3, 2014, em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=24&fileName=RN_Mat4_2008.pdf.

Gabinete de Avaliação Educacional [GAVE] (2008b). *Relatório sobre a Prova de Aferição de Matemática do 2.º Ciclo de 2008.* Consultado em dezembro 3, 2014, em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=24&fileName=RN_Mat6_2008.pdf.

Gabinete de Avaliação Educacional [GAVE] (2009a). *Relatório sobre a Prova de Aferição de Matemática do 1.º Ciclo de 2009.* Consultado em dezembro 3, 2014, em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=24&fileName=RN_Mat4_2009.pdf.

Gabinete de Avaliação Educacional [GAVE] (2009b). *Relatório sobre a Prova de Aferição de Matemática do 2.º Ciclo de 2009.* Consultado em dezembro 3, 2014, em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=24&fileName=RN_Mat6_2009.pdf.

Gabinete de Avaliação Educacional [GAVE] (2010a). *Relatório sobre a Prova de Aferição de Matemática do 1.º Ciclo de 2010.* Consultado em dezembro 3, 2014, em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=24&fileName=RN_Mat4_2010.pdf.

Gabinete de Avaliação Educacional [GAVE] (2010b). *Relatório sobre a Prova de Aferição de Matemática do 2.º Ciclo de 2010.* Consultado em dezembro 3, 2014, em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=24&fileName=RN_Mat6_2010.pdf.

Gabinete de Avaliação Educacional [GAVE] (2011a). *Relatório sobre a Prova de Aferição de Matemática do 1.º Ciclo de 2011.* Consultado em dezembro 3, 2014, em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=24&fileName=RN_Mat4_2011.pdf.

Gabinete de Avaliação Educacional [GAVE] (2011b). *Relatório sobre a Prova de Aferição de Matemática do 2.º Ciclo de 2011.* Consultado em dezembro 3, 2014, em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=24&fileName=RN_Mat6_2011.pdf.

Gabinete de Avaliação Educacional [GAVE] (2011c). *Projeto Testes Intermédios: relatório 2011.* Consultado em dezembro 3, 2014, em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=24&fileName=Rel_Nac_ProjTI_2011.pdf.

Gabinete de Avaliação Educacional [GAVE] (2012a). *Relatório sobre a Prova de Aferição de Matemática do 1.º Ciclo de 2012.* Consultado em dezembro 3, 2014, em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=24&fileName=Rel_PA_Mat_2012.pdf.

Gabinete de Avaliação Educacional [GAVE] (2012b). *Projeto Testes Intermédios: relatório 2012.* Consultado em dezembro 3, 2014, em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=24&fileName=Relatorio_TI_2012.pdf.

Gerdes, P. (1997). *Desenhos da África.* São Paulo: Editora Scipione.

Gerdes, P. (2008a). *Jogo dos bisos: puzzles e divertimentos.* Maputo: Editora Girafa.

Gerdes, P. (2008b). *Jogo de bissemis: mais de cem puzzles.* Maputo: Editora Girafa.

Godino, J. D., Alfonso, B. G., Rodríguez, A. G., Romero, L. R., & Vázquez, M. S. (1991). *Área de Conocimiento: didáctica de la matemática.* Madrid: Editorial Sintesis.

Hartshorn, R., & Boren, S. (1990). *Experiential Learning of Mathematics: using manipulatives.* ERIC Digest. Consultado em setembro 18, 2015, em http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED321967.pdf.

Hirst, K. (2004). Conjuntos e Lógica. In P. Palhares (Coord.), *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico* (pp. 113-157). Lisboa: Lidel.

Instituto de Avaliação Educativa [IAVE] (2013). *Projeto Testes Intermédios - 1.º Ciclo do Ensino Básico: relatório 2013.* Consultado em dezembro 3, 2014, em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=24&fileName=Relatorio_TI_2_2013_LV.pdf.

Kordaki, M., & Potari, D. (1998). Children's Approaches to Area Measurement through Different Contexts. *Journal of Mathematical Behavior, 17* (3), 303-316.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (2005). *Investigação qualitativa: fundamentos e práticas* (2a ed.). Lisboa: Instituto Piaget.

Liedtke, W. (1990). Measurement. In J. N. Payne (Ed.), *Mathematics for the young child* (pp. 228-249). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Martinho, M. H., & Ponte, J. P. (2005). Comunicação na sala de aula de Matemática: práticas e reflexão de uma professora de Matemática. In J. Brocardo, F. Mendes, & A. M. Boavida (Eds.), *Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 273-293). Setúbal: APM. Consultado em julho 28, 2015, em https://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/9847/1/Martinho-Ponte_05%20SIEM_.pdf.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative Research and Case Study Applications in Education* (2nd ed.). San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Ministério da Educação e Ciência [MEC] (2012). *Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Ministério da Educação e Ciência [MEC] (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1994). *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (1a ed.). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2014). *Principles to Actions: ensuring mathematical success for all.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Oliveira, M. (2008). A Importância dos Materiais Manipuláveis. In E. Mamede (Coord.), *Matemática: ao encontro das práticas - 1.º Ciclo* (pp. 25-30). Braga: Universidade do Minho - Instituto de Estudos da Criança.

Outhred, L., & Mitchelmore, M. (1992). Representation of area: a pictorial perspective. In W. Geeslin, & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the sixteenth PME Conference* (Vol. 2, pp. 194-201). Durham: University of New Hampshire.

Outhred, L., & Mitchelmore, M. (2000). Young Children's Intuitive Understanding of Rectangular Area Measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31* (2), 144-167.

Owens, K., & Outhred, L. (2006). The complexity of learning Geometry and Measurement. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: past, present and future* (pp. 83-115). Rotterdam: Sense Publishers.

Palhares, P., & Gomes, A. (2006). A formação em Matemática para professores do 1.º Ciclo - em que bases nos podemos apoiar?. In P. Palhares, & A. Gomes (Coords.), *MAT 1C: desafios para um novo rumo* (pp. 9-17). Braga: Universidade do Minho - Instituto de Estudos da Criança.

Palhares, P., Gomes, A., Mamede, E., Vieira, L., Sousa, F., & Cadeia, C. (2009), Literacia matemática em Geometria: o caso da contagem de figuras. In F. Azevedo, & M. da G. Sardinha (Orgs.), *Modelos e Práticas em Literacia* (pp. 195-208). Lisboa: Lidel.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of Geometry.* New York: Basic Books.

Pires, M. (1995). *Os conceitos de perímetro e área em alunos do 6.º ano: concepções e processos de resolução de problemas.* Trabalho apresentado no âmbito da prestação de provas públicas para professor-adjunto previstas no Estatuto da Carreira Docente do Ensino Superior Politécnico. Bragança: Instituto Politécnico de Bragança - Escola Superior de Educação.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM. Consultado em outubro 10, 2015, em http://www.ipb.pt/~mjt/documdisciplinas/investigaranossa.pdf.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM. Consultado em dezembro 5, 2014, em http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3008/1/05-Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em Educação Matemática. *Bolema, 19* (25)*,* 105-132. Consultado em julho 27, 2015, em http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3007/1/06-Ponte(BOLEMA-Estudo%20de%20caso).pdf.

Ponte, J. P. (2008). Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. *PNA*, *2* (4), 153-180. Consultado em outubro 10, 2015, em http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Ponte2008PNA2(4)Investigar.pdf.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em Educação Matemática: implicações curriculares.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ralha, E., & Gomes, A. (2004). A Medida. In P. Palhares (Coord.), *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico* (pp. 375-405). Lisboa: Lidel.

Resnick, L. B., & Ford, W. W. (1981). *The psychology of Mathematics for Instruction.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Santos, C. P. (2013). O conceito de Unidade na Educação Pré-Escolar. *Jornal das Primeiras Matemáticas,* (1), 34-52. Consultado em fevereiro 16, 2015, em http://jpm.ludus-opuscula.org/PDF_Files/Santos_Medida_34_52(1_2013).pdf.

Serrazina, L. (1990). Os Materiais e o ensino da Matemática. *Educação e Matemática,* (13), 1. Consultado em setembro 18, 2015, em http://www.apm.pt/files/_EM13_pp01_4d6bd9e8e8334.pdf.

Sousa, F., Cebolo, V., Alves, B., & Mamede, E. (2009). Comunicação matemática: contributos do PFCM na reflexão das práticas de professores. In A. Gomes (Ed.), *Proceedings of the 3rd International Meeting on Elementary Mathematics Education* (pp. 329-342). Braga: AEME. Consultado em julho 28, 2015, em http://www.apm.pt/files/_CO_Sousa_Cebolo_Alves_Mamede_4a41313eee16e.pdf.

Sprinthall, N. A., & Sprinthall, R. C. (1993). *Psicologia Educacional: uma abordagem desenvolvimentista.* Lisboa: McGraw-Hill.

Stake, R. (1998). Case studies. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Strategies of qualitative Inquiry* (pp. 86-109). Thousand Oaks: Sage publications.

Szendrei, J. (1996). Concrete Materials in the Classroom. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (Parte 1, pp. 411-434). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tishin, P. G. (1979). Instructing Auxiliary School Pupils in Visual Geometry. In S. Clarkson (Ed.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics* (Vol. 10, pp. 1-124). Chicago: University of Chicago.

Van der Meer, R., & Gardner, B. (1994). *The maths pack is like no other book you have ever seen.* London: Jonathan Cape.

Van de Walle, J. (1998). *Elementary and Middle School Mathematics: teaching developmentally* (3rd ed.). New York: Longman.

Whitin, D. J., & Whitin, P. (2014). Building Squares and Discovering Patterns. *Teaching children Mathematics, 21* (4), 210-219.

Wickstrom, M. H. (2014). Piecing it Together. *Teaching children Mathematics, 21* (4), 220-227.

Wilson, P. S., & Rowland, R. E. (1993). *Teaching Measurement.* In R. J. Jensen (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: early childhood mathematics* (pp. 171-194). New York: Macmillan.

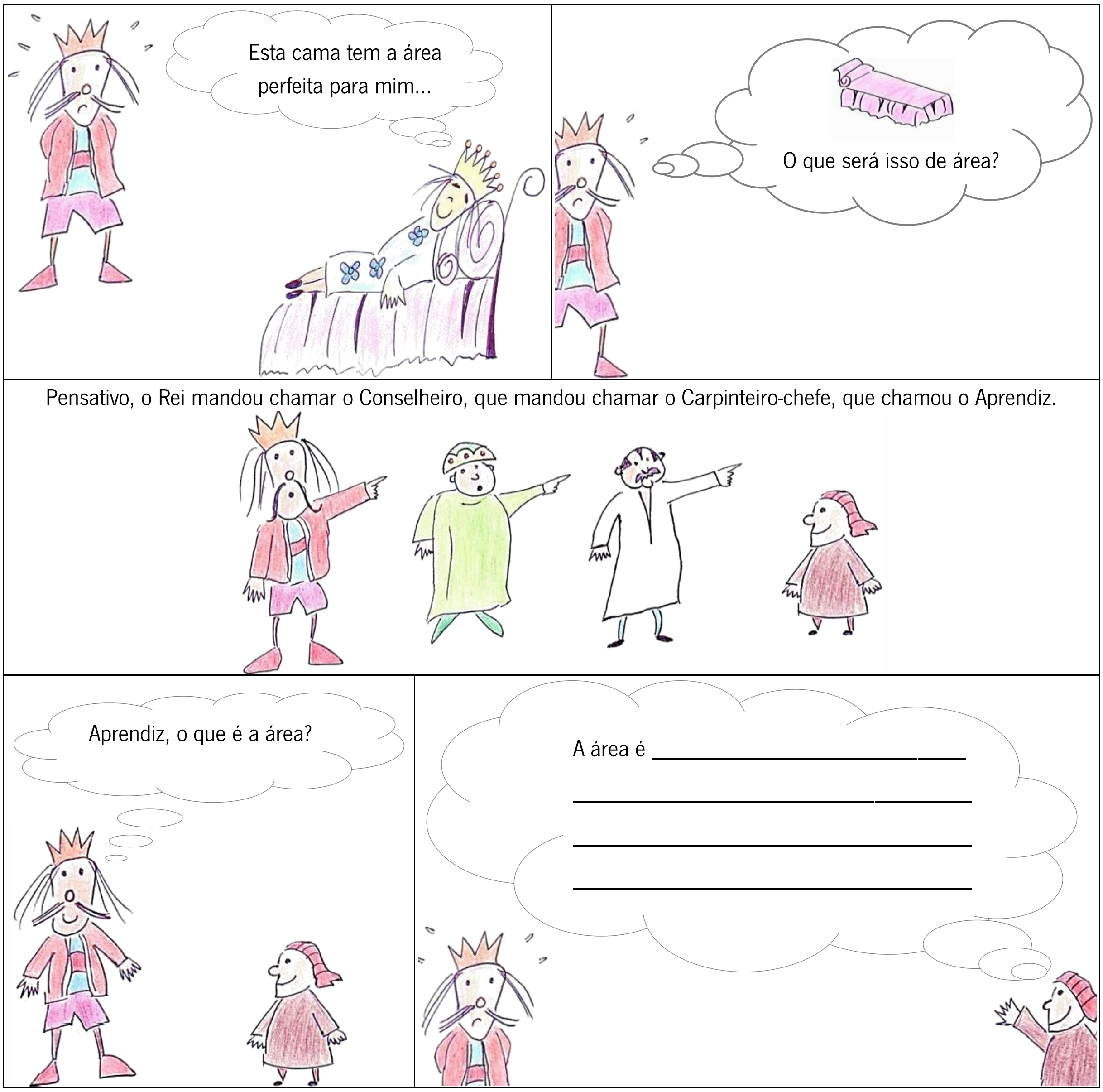
Yin, R. K. (1994). *Case study research: design and methods* (2nd ed.). Thousand Oaks: Sage publications.

ANEXOS

Anexo A – Ficha de trabalho “A área da cama da Rainha”

A área da cama da Rainha

Completa as vinhetas da banda desenha apresentada a seguir, preenchendo as legendas em falta e acrescentando balões, se considerares necessário.




Ah! Então isso é que é a área...
E como é que eu posso calcular a área da cama da Rainha?
Meu rei, para calcular a área da cama da Rainha, que tem a forma de um retângulo, é preciso ______________________________
____
____
____
Caro Aprendiz, tu és bom em explicações, mas agora quero ver-te a calcular a área da cama!
6 5 4 3 2 1
3 2 1
Área =
Agora já sei o que é a área e como se calcula a área de uma cama com aquela forma! E também já percebi porque é que a cama da Rainha tem a área perfeita para ela...
Acho que também quero uma cama com a área perfeita para mim!

Anexo B – Ficha de trabalho “A área da sala de aula”

A área da sala de aula

Os alunos de uma turma mediram o comprimento e a largura da sala de aula com um molde dos pés de um aluno (molde amarelo). Com estas medidas, calcularam a área da sala, que tem a forma de um retângulo. Depois, mediram novamente o comprimento e a largura da sala, mas agora com um molde dos pés da professora (molde branco) e, quando calcularam a área, obtiveram um resultado diferente! Achas que o resultado da **área foi maior ou menor?**

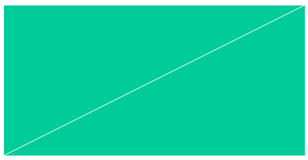
Explica como pensaste. Podes fazê-lo utilizando palavras ou desenhos.

Anexo C – Parte I da ficha de trabalho 1 - “Comparação da área de figuras diferentes”

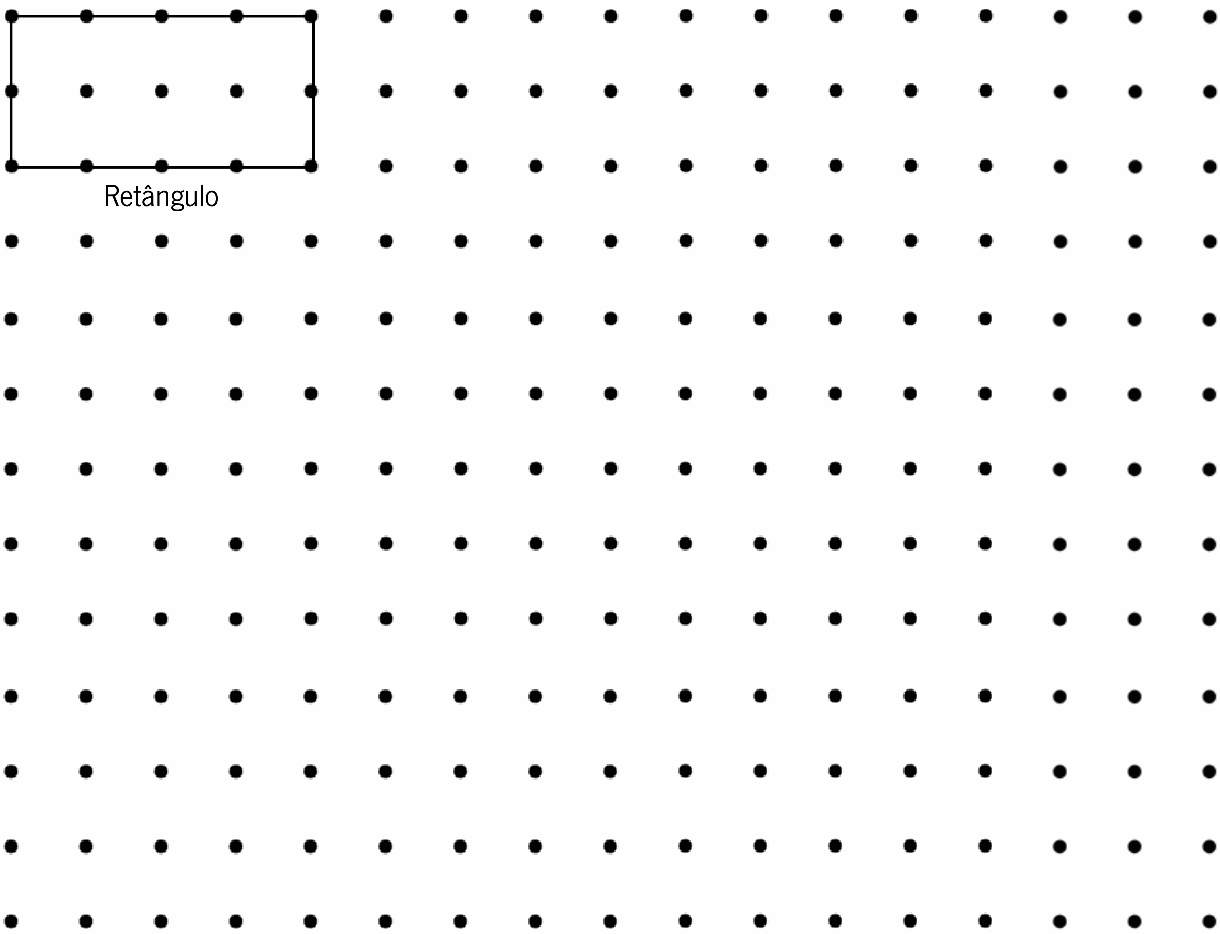
1	Comparação da área de figuras diferentes

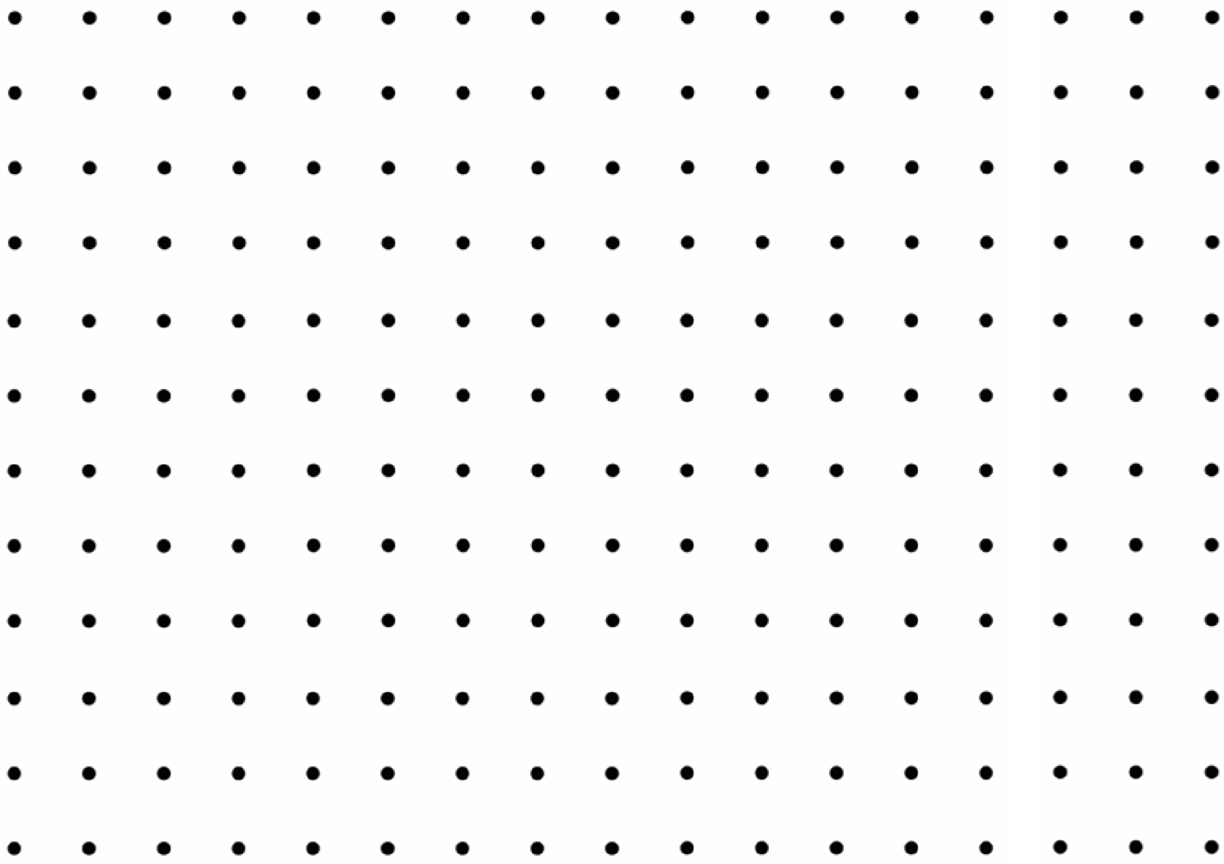
Parte I

1. Descobre as diferentes figuras que é possível construir, justapondo os lados de igual comprimento de dois dos triângulos dos que te foram distribuídos, como mostra o exemplo.



2. Desenha e identifica as figuras que construíste no papel ponteado, como no exemplo.





3. Investiga a área das figuras que construíste: existe alguma figura com maior área do que as outras?

Explica como chegaste à tua resposta.

Resposta: ____

____.

Anexo D – Parte II da ficha de trabalho 1 - “Comparação da área de figuras diferentes”

1	Comparação da área de figuras diferentes

Parte II

Como já sabes, as seis figuras que construíste anteriormente denominam-se bissemis.

4. Constrói uma figura, justapondo os lados de igual comprimento de um número de bissemis à tua escolha dos que te foram distribuídos. Depois, cola a figura que construíste na folha de papel branca, contorna-a e atribui-lhe um título. No final, regista o número de bissemis que utilizaste.

Número de bissemis utilizados na figura:

Anexo E – Ficha de trabalho 2 - “Medição da área de figuras utilizando unidades não convencionais”

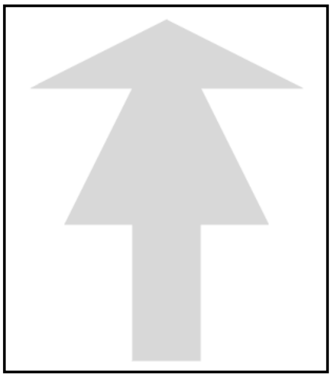
<u>2</u>	Medição da área de figuras utilizando unidades não convencionais

1. Preenche o puzzle 1, utilizando os <u>triângulos</u> que te foram distribuídos.

1.1. Quantos triângulos utilizaste para preencher o puzzle? ________________

1.2. Qual é a área do puzzle, utilizando como unidade de área o triângulo? ________________

2. Preenche o puzzle 2, utilizando os <u>triângulos</u> que te foram distribuídos.



2.1. Quantos triângulos utilizaste para preencher o puzzle? ________________

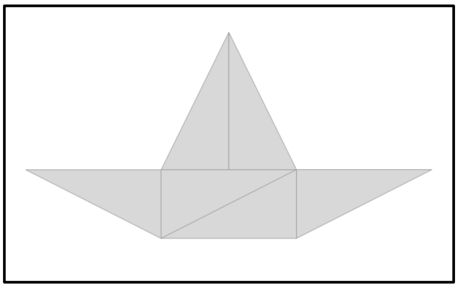
2.2. Qual é a área do puzzle, utilizando como unidade de área o triângulo? ________________

3. Agora, preenche o puzzle 2, utilizando os <u>bissemis</u> que te foram distribuídos.

3.1. Quantos bissemis utilizaste para preencher o puzzle? ________________

3.2. Qual é a área do puzzle, utilizando como unidade de área um bissemi? ________________

4. Preenche o puzzle 3, utilizando os <u>triângulos</u> que te foram distribuídos.



4.1. Quantos triângulos utilizaste para preencher o puzzle? ________________

4.2. Qual é a área do puzzle, utilizando como unidade de área o triângulo? ________________

5. Agora, preenche o puzzle 3, utilizando os <u>bissemis</u> que te foram distribuídos.

5.1. Quantos bissemis utilizaste para preencher o puzzle? ________________

5.2. Qual é a área do puzzle, utilizando como unidade de área um bissemi? ________________

6. E se agora tivesses que preencher o puzzle 3 utilizando os <u>quadrados</u> que te foram distribuídos?

6.1. Qual é a área do puzzle utilizando como unidade de área o quadrado? ________________

7. A partir da informação anterior, completa os espaços da tabela assinalados a cinzento.

		Área do puzzle 1	Área do puzzle 2	Área do puzzle 3			
Unidade de área	Triângulo						
	Bissemi						
	Quadrado						

7.1. Sem preencheres o puzzle 1, consegues descobrir a sua área utilizando como unidade de área o bissemi? E se a unidade de área for o quadrado? Explica como pensaste.

____.

7.2. Sem preencheres o puzzle 2, consegues descobrir a sua área utilizando como unidade de área o quadrado? Explica como pensaste.

____.

7.3. O que podes concluir acerca da área de cada um dos puzzles, utilizando cada uma das unidades de área (triângulo, bissemi e quadrado)?

____

____.

Anexo F – Ficha de trabalho 3 - "Área e Perímetro"

3	Área e Perímetro

1. Utilizando os bissemis que te foram distribuídos, investiga o comprimento dos seus lados: quantos comprimentos diferentes encontraste?

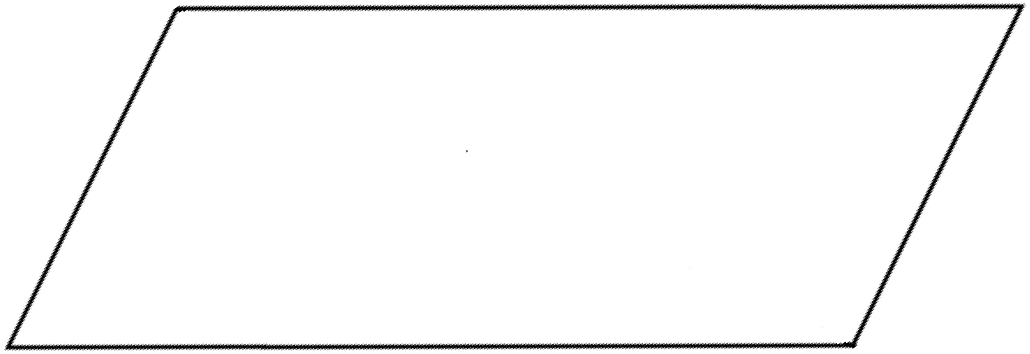
Podes utilizar a régua se achares necessário.

Explica como chegaste à tua resposta.

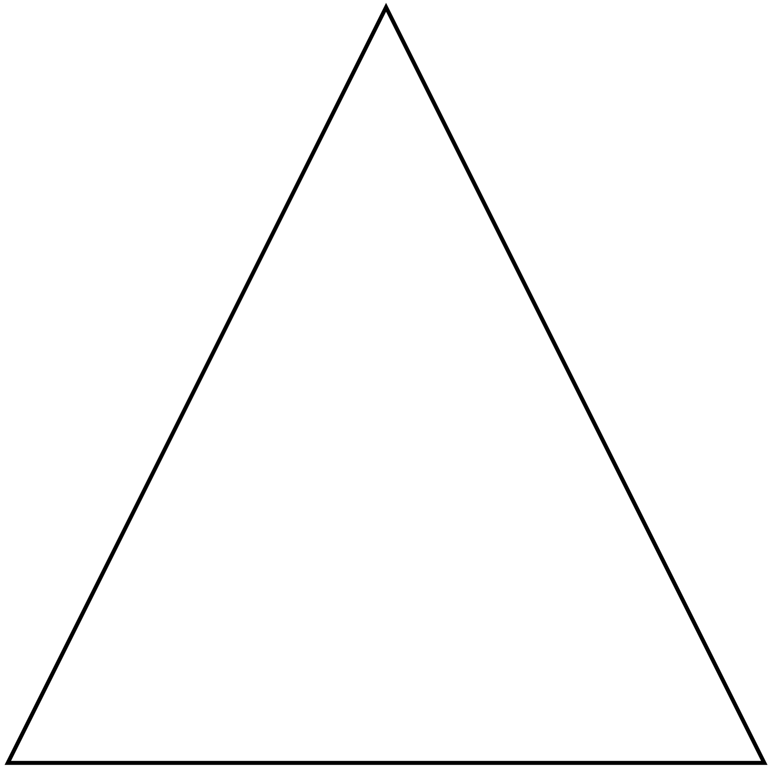
Resposta:____

____.

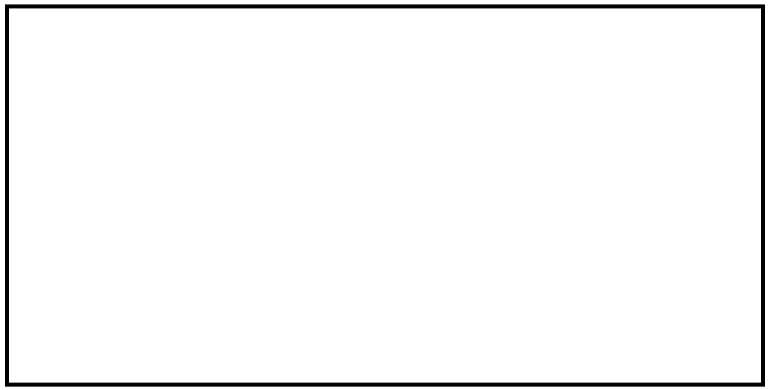
2. Pinta, com cores iguais, os lados com igual comprimento dos bissemis apresentados a seguir.



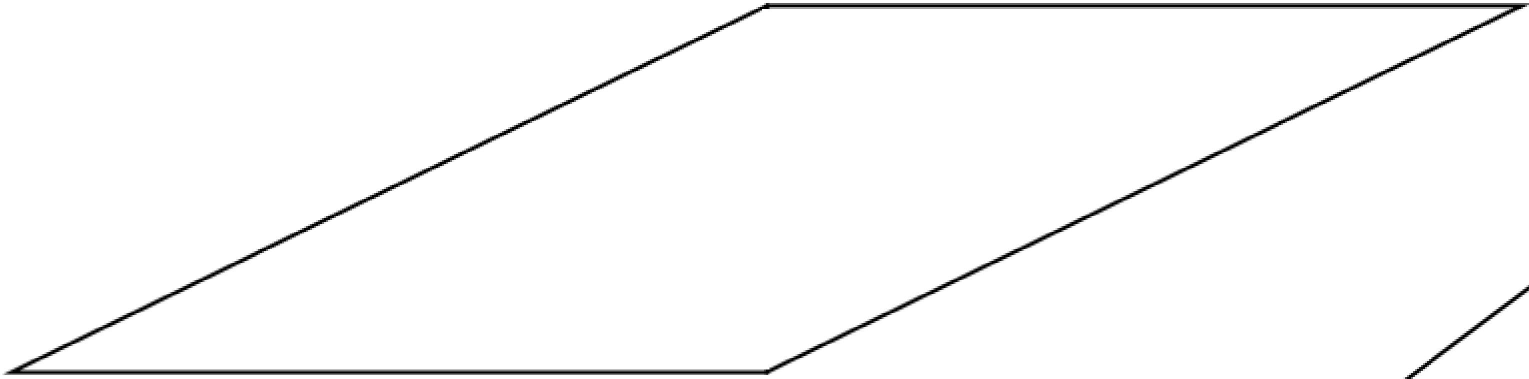
Paralelogramo



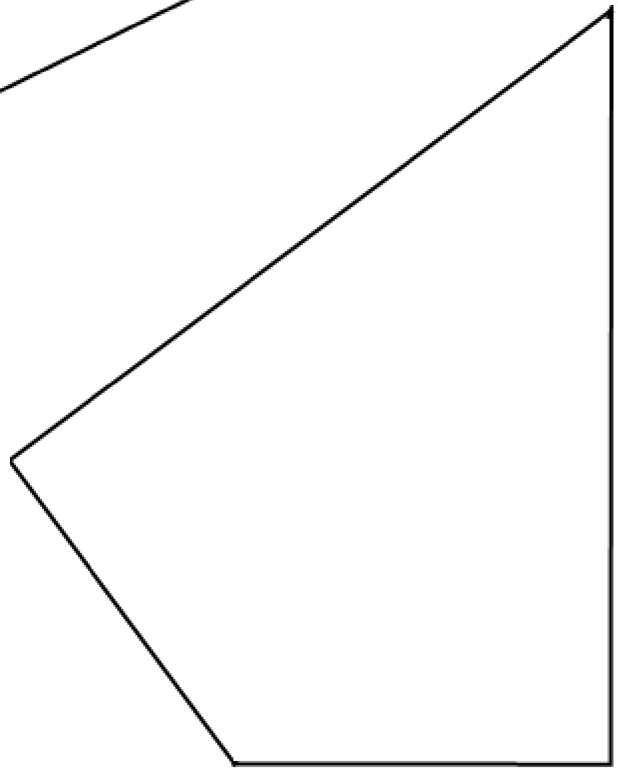
Triângulo



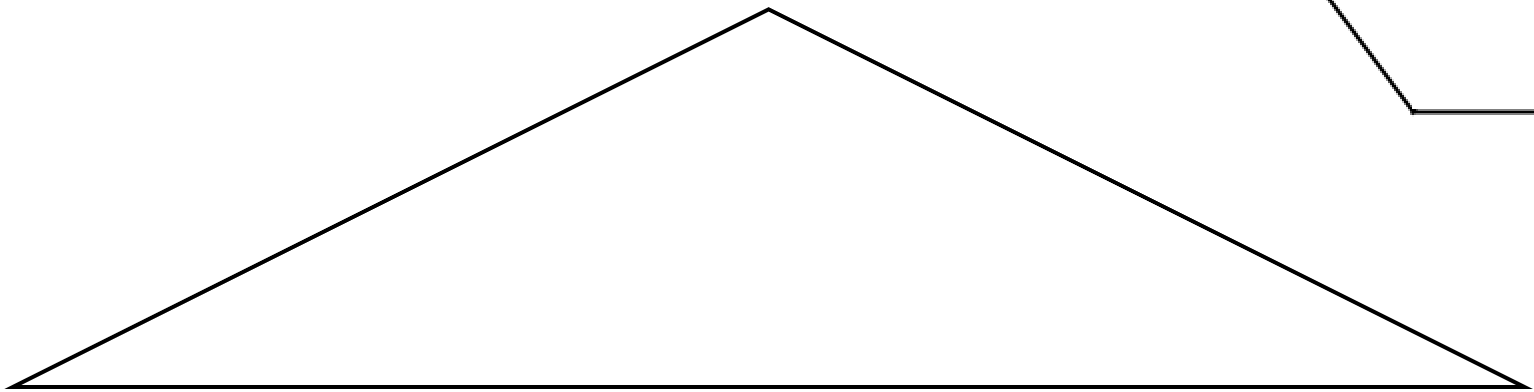
Retângulo



Paralelogramo



Papagaio

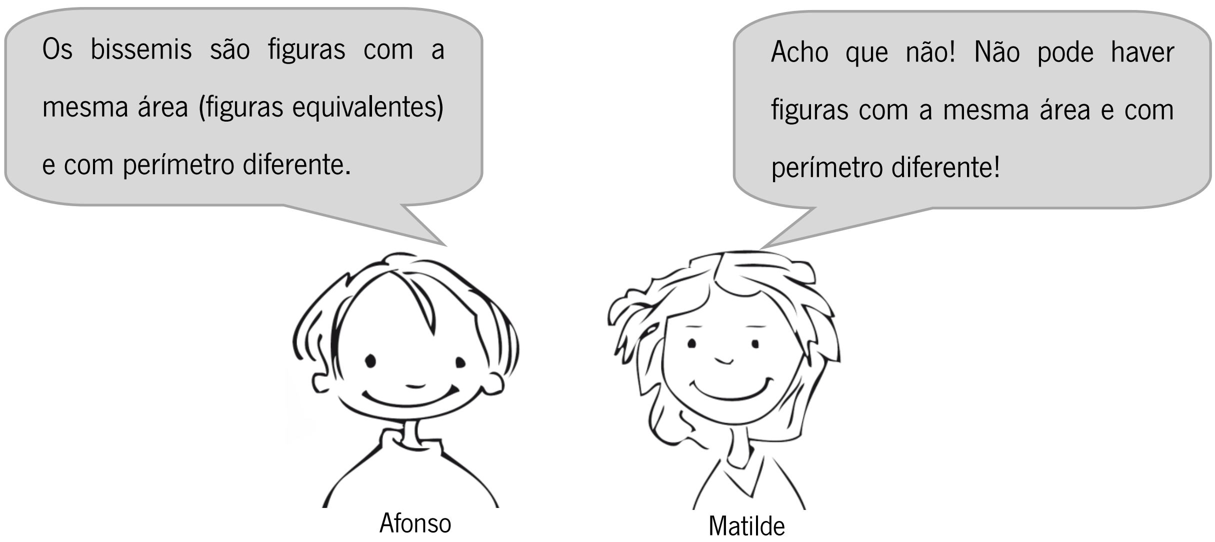


Triângulo

3. A partir da informação anterior, investiga o perímetro dos bissemis: quais possuem igual perímetro?

Explica como chegaste à tua resposta.
Resposta: ____ ____.

4. Lê o que dizem o Afonso e a Matilde depois de observarem os bissemis que construíram na aula de Matemática.



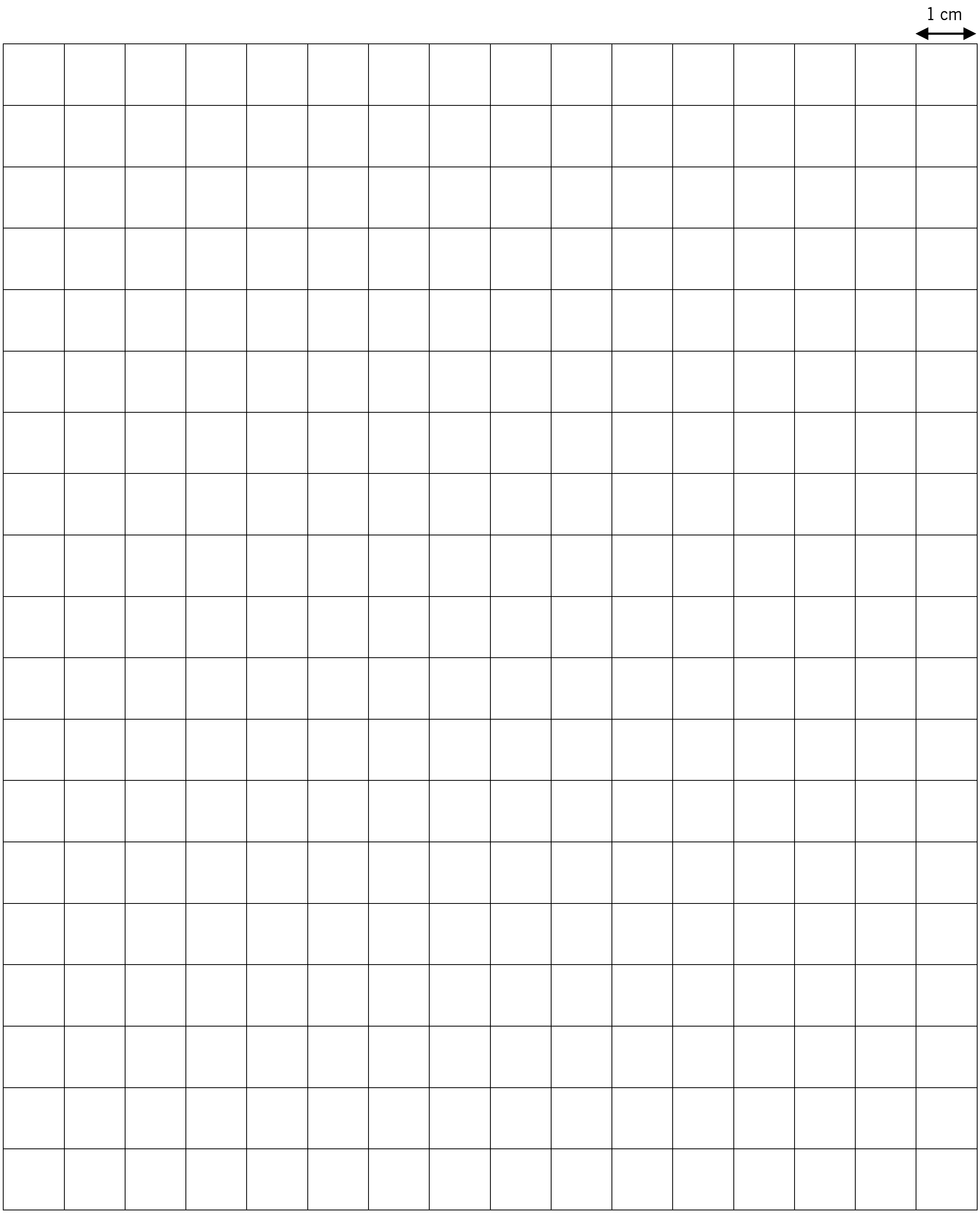
4.1. Qual deles tem razão?

Resposta: ____.

Apresenta um exemplo que justifique a tua resposta.

Anexo G – Tarefa suplementar da ficha de trabalho 3 - "Área e Perímetro"

5. Escolhe um dos bissemis que te foram distribuídos. Depois, desenha esse bissemi no quadriculado e indica o seu perímetro. A seguir, constrói no quadriculado outras figuras <u>não geometricamente iguais</u> a esse bissemi mas com o <u>mesmo perímetro</u>.

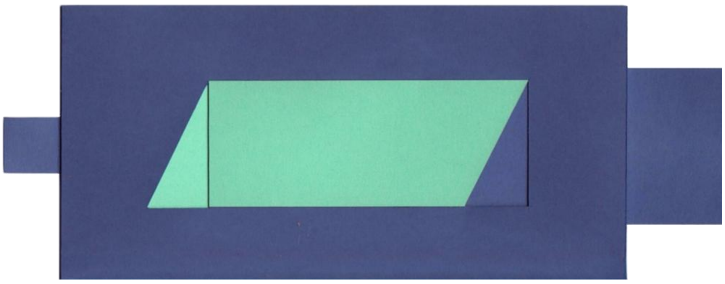


Anexo H – Parte I da ficha de trabalho 1 - "Área de figuras planas: paralelogramos"

<u>1</u>	Área de figuras planas: paralelogramos

Parte I

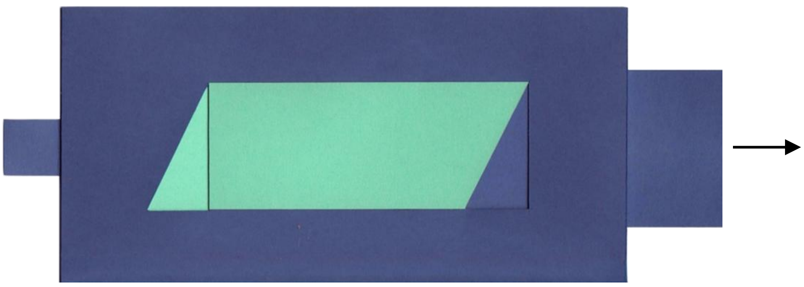
1. Observa o paralelogramo presente no material mecânico que te foi distribuído.

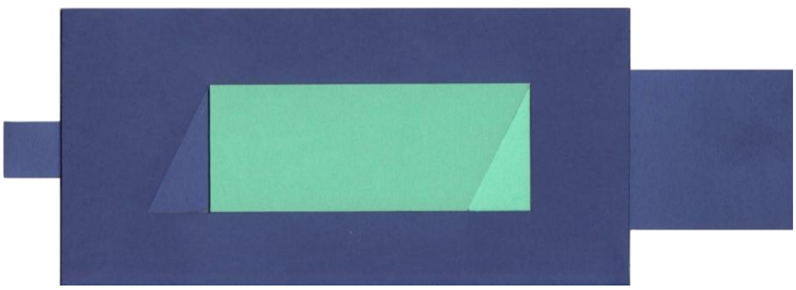


Paralelogramo

2. Movimenta a tira do material mecânico de acordo com a seta apresentada.

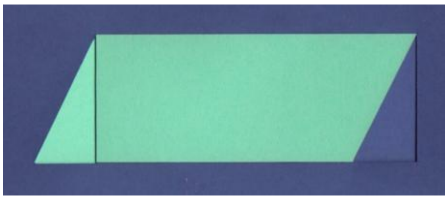
Escreve o nome da figura que obtiveste.

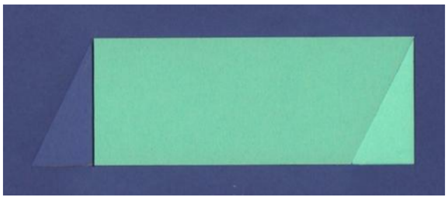




____

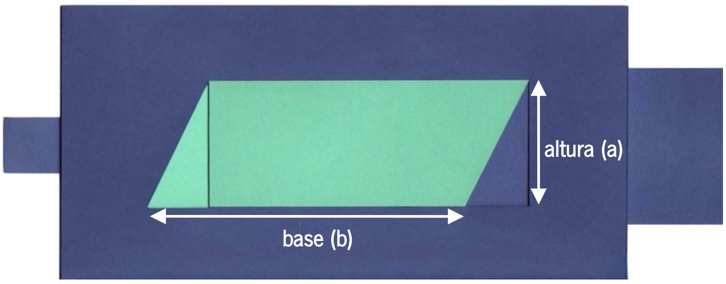
3. O que podes concluir acerca da área das duas figuras anteriores?





4. A partir da exploração anterior, escreve a fórmula para a área do paralelogramo.

Nota: Usa as letras indicadas na figura para a base e para a altura.



Área do paralelogramo =

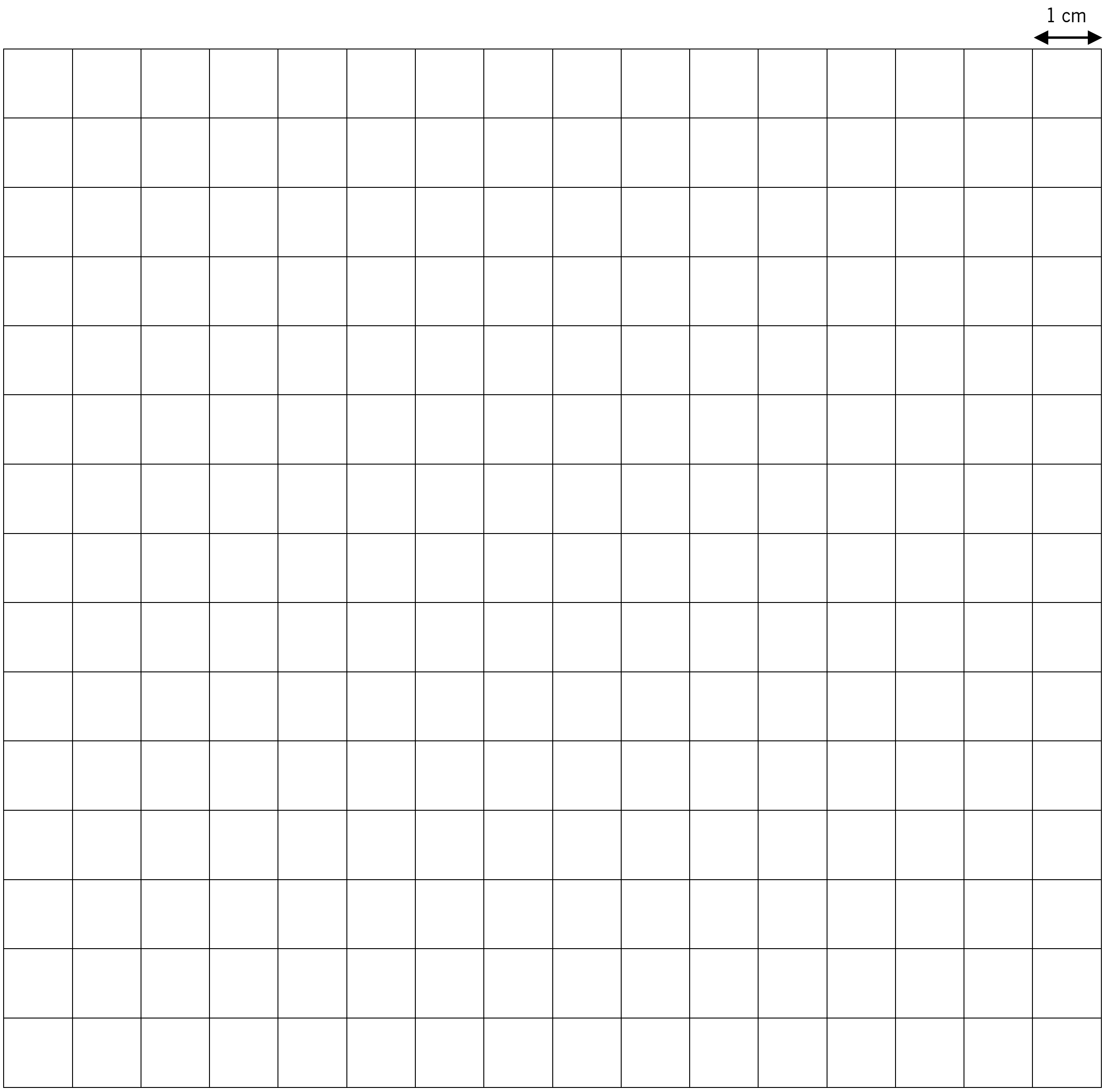
Anexo I – Parte II da ficha de trabalho 1 - “Área de figuras planas: paralelogramos”

<u>1</u>	Área de figuras planas: paralelogramos

Parte II

5. Contorna, no quadriculado, os paralelogramos que te foram distribuídos e <u>calcula a sua área</u>.

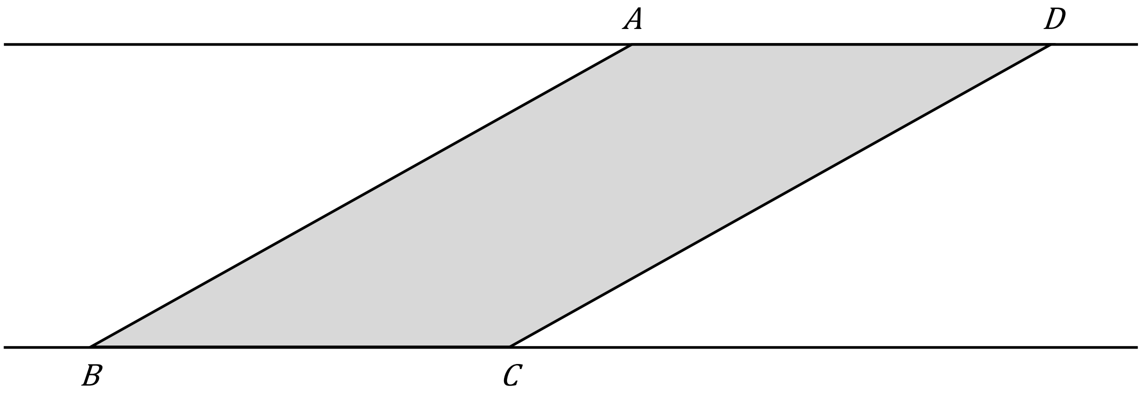
Podes utilizar a régua se achares necessário.



6. Observa o paralelogramo $[ABCD]$, desenhado entre as retas paralelas $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

Desenha, entre estas duas retas, um paralelogramo com a mesma área do que o paralelogramo $[ABCD]$, mas não geometricamente igual a este.

Nota: A tua figura pode sobrepor o paralelogramo $[ABCD]$.



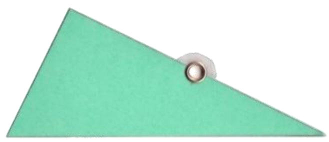
Explica como pensaste. Podes fazê-lo utilizando palavras ou desenhos.

Anexo J – Parte I da ficha de trabalho 2 - "Área de figuras planas: triângulos"

2	Área de figuras planas: triângulos

Parte I

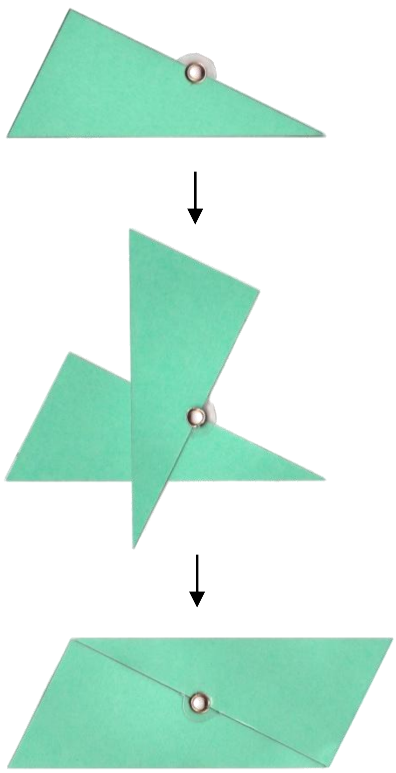
1. Observa os dois triângulos sobrepostos que compõem o material mecânico que te foi distribuído.



Triângulo

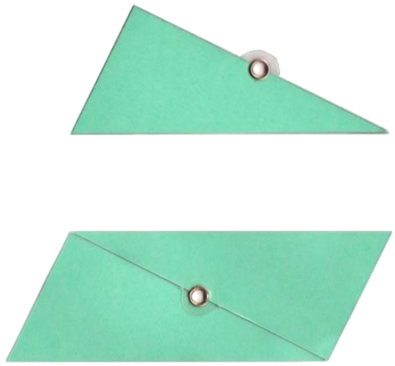
2. Roda um desses triângulos meia-volta em torno do ilhó, como mostra a sequência.

Escreve o nome da figura que obtiveste.



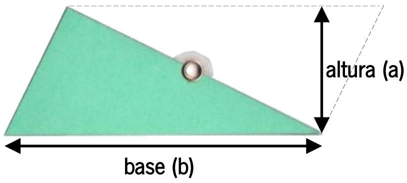
____

3. O que podes concluir acerca da área das duas figuras anteriores?



4. A partir da exploração anterior, escreve a fórmula para a área do triângulo.

Nota: Usa as letras indicadas na figura para a base e para a altura.



Área do triângulo =

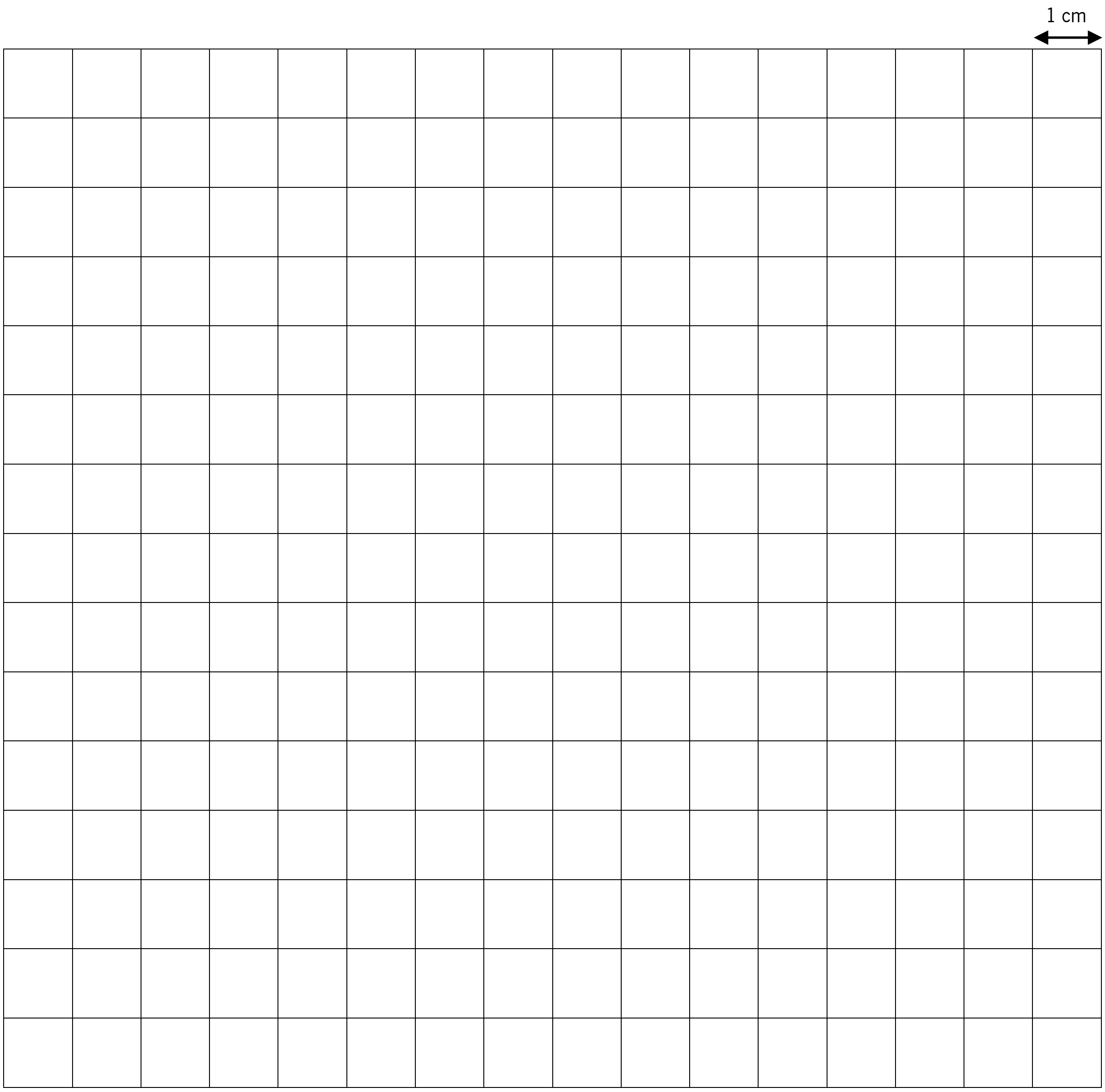
Anexo K – Parte II da ficha de trabalho 2 - "Área de figuras planas: triângulos"

2	Área de figuras planas: triângulos

Parte II

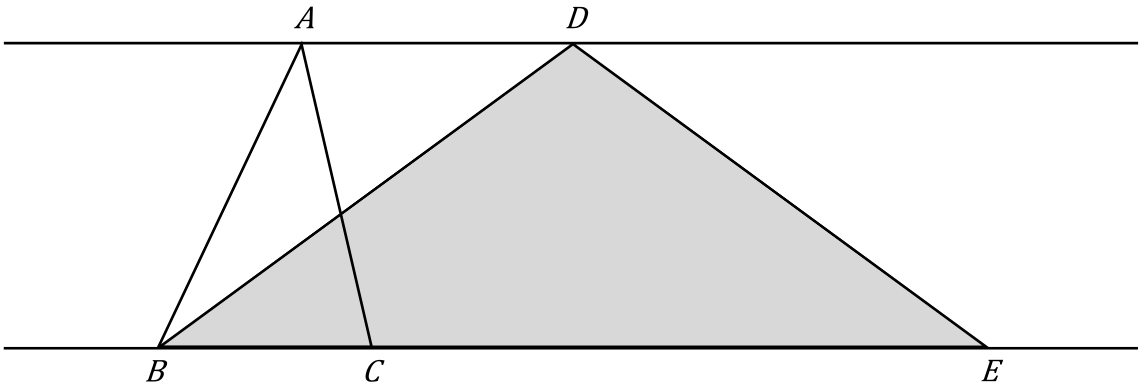
5. Contorna, no quadriculado, os triângulos que te foram distribuídos e calcula a sua área.

Podes utilizar a régua se achares necessário.



6. Observa os triângulos $[ABC]$ e $[DBE]$, desenhados entre as retas paralelas $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$. Desenha, entre estas duas retas, um triângulo com maior área do que o triângulo $[ABC]$ e menor área do que o triângulo $[DBE]$.

Nota: A tua figura pode sobrepor os triângulos $[ABC]$ e $[DBE]$.

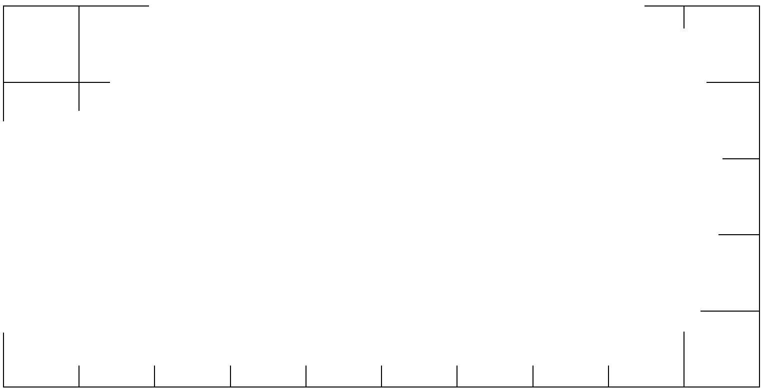


Explica como pensaste. Podes fazê-lo utilizando palavras ou desenhos.

Anexo L – Primeiro problema de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões

O problema do retângulo

1. Cada uma das figuras abaixo representa um retângulo. Como podes observar, o segundo retângulo tem partes apagadas.



1.1. Observa o segundo retângulo. Quantos quadrados iguais ao que te foi distribuído é que será que precisas para cobrir completamente este retângulo? ____________

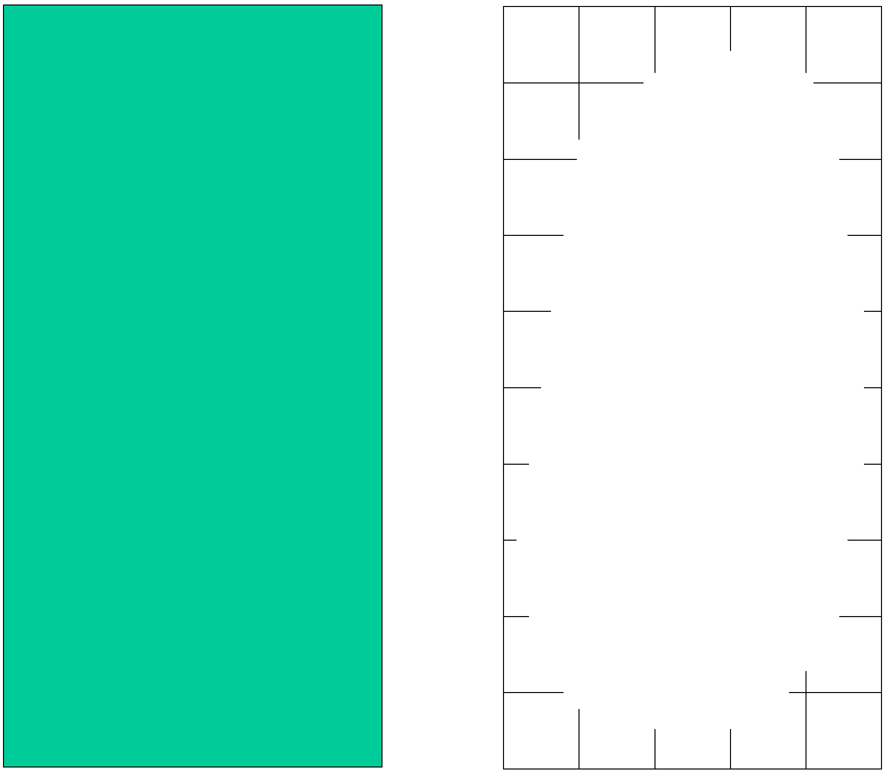
1.2. Desenha os quadrados em falta no segundo retângulo. Quantos quadrados é que será que precisas para cobrir completamente este retângulo? ____________

1.3. Preenche o segundo retângulo com os quadrados que te foram distribuídos. Quantos quadrados é que precisaste para cobrir completamente este retângulo? ____________

Anexo M – Segundo problema de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões (menos complexo do que o primeiro)

O problema do retângulo

1. Cada uma das figuras abaixo representa um retângulo. Como podes observar, o retângulo do lado direito tem partes apagadas.



1.1. <u>Observa</u> o retângulo do lado direito. Quantos quadrados iguais ao que te foi distribuído é que será que precisas para cobrir completamente este retângulo? ____________

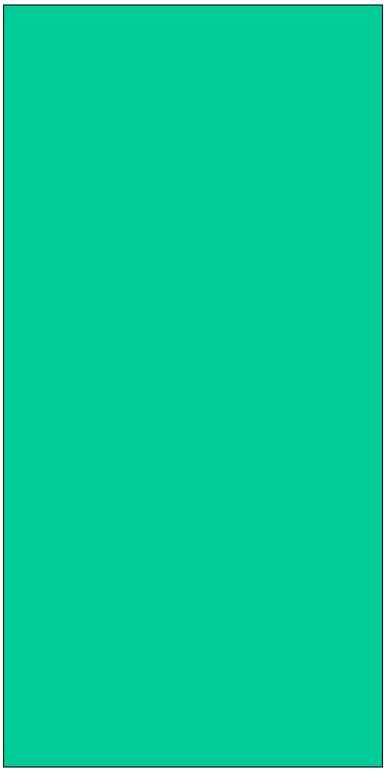
1.2. <u>Desenha</u> os quadrados em falta no retângulo do lado direito. Quantos quadrados é que será que precisas para cobrir completamente este retângulo? ____________

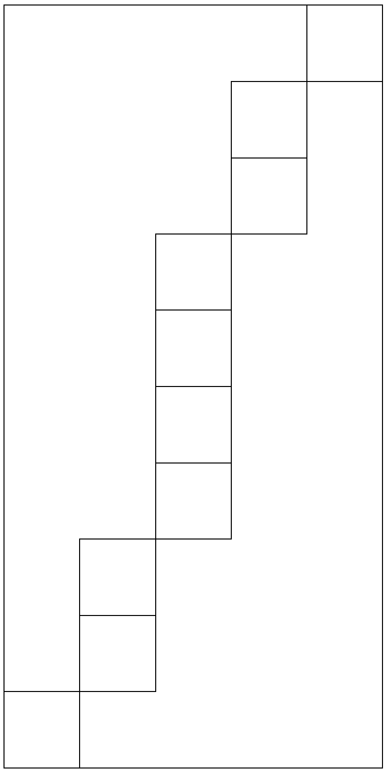
1.3. <u>Preenche</u> o retângulo do lado direito com os quadrados que te foram distribuídos. Quantos quadrados é que precisaste para cobrir completamente este retângulo? ____________

Anexo N – Segundo problema de estruturação de arranjos retangulares de quadrados em duas dimensões (mais complexo do que o primeiro)

O problema do retângulo

1. Cada uma das figuras abaixo representa um retângulo. Como podes observar, o retângulo do lado direito tem partes apagadas.





1.1. <u>Observa</u> o retângulo do lado direito. Quantos quadrados iguais ao que te foi distribuído é que será que precisas para cobrir completamente este retângulo? ____________

1.2. <u>Desenha</u> os quadrados em falta no retângulo do lado direito. Quantos quadrados é que será que precisas para cobrir completamente este retângulo? ____________

1.3. <u>Preenche</u> o retângulo do lado direito com os quadrados que te foram distribuídos. Quantos quadrados é que precisaste para cobrir completamente este retângulo? ____________