António Costa Canas, João Caramalho Domingues, Luis Saraiva (Eds.)

Actas/Anais do 7.º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática

Volume II

SPM
Sociedade Portuguesa de Matemática

2018

Actas/Anais
do
7.º Encontro Luso-Brasileiro
de
História da Matemática
Volume II

Actas/Anais
do
7.º Encontro Luso-Brasileiro
de
História da Matemática

(Óbidos, Portugal, 15 a 19 de Outubro de 2014)

Volume II

Editores:
António Costa Canas
João Caramalho Domingues
Luis Saraiva

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

2018

Título	**Actas / Anais do 7.º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática**
Editores	António Costa Canas João Caramalho Domingues Luis Saraiva
Edição	**Sociedade Portuguesa de Matemática** Av. da República, 45, 3.º esq. 1050–187 Lisboa www.spm.pt
Data de edição	2018
Paginação	João Caramalho Domingues (com colaboração de António Costa Canas)
Arquivo fotográfico	Luis Saraiva
Foto da capa	Município de Óbidos
Impressão	Copissaurio Repro, Lda. Universidade do Minho Campus de Gualtar, Ed. 2 4710–057 Braga
Depósito Legal	443493/18
ISBN	978-989-8243-07-2

Três tradições algébricas em Portugal na primeira metade do séc. XVIII

João Caramalho Domingues
Centro de Matemática da Universidade do Minho
jcd@math.uminho.pt

Resumo: Apresentamos três tradições distintas de ensino da álgebra em Portugal na primeira metade do séc. XVIII: uma álgebra cossista semelhante à do século XVI associada a aritmética prática; uma evolução nos colégios jesuítas, partindo de uma versão antiquada de álgebra cossista e chegando a versões de álgebra especiosa, mas mantendo sempre um papel muito secundário; e uma introdução à matemática de inspiração cartesiana, assente na álgebra especiosa, no ensino de engenharia militar.

Abstract: We present three distinct traditions in the teaching of algebra in Portugal in the first half of the 18th century: cossic algebra similar to the 16th-century one, associated to practical arithmetic; an evolution in Jesuit colleges, from an antiquated version of cossic algebra to versions of specious algebra, while always keeping a very secondary role; and a Cartesian-inspired introduction to mathematics, based on specious algebra, in military engineering teaching.

1 A sobrevivência da "regra da cousa" e a aritmética prática

A primeira publicação em português depois do século XVI com uma secção sobre álgebra é um *Tratado de Aritmética e Álgebra* [Pereyra 1713] que testemunha a sobrevivência da "regra da cousa" — um tipo de álgebra que normalmente se considera exclusivo ou quase do século XVI. [Pereyra 1713] teve ainda uma segunda edição, em 1760, com o texto inalterado.

Sabe-se muito pouco sobre o autor deste livro, António Pereira. Segundo Barbosa Machado [1741–59, I, 346–347] era natural de Lisboa e morreu na Congregação do Oratório de Estremoz em 1698; tinha vivido os últimos anos da sua vida (desde 1686) como irmão leigo oratoriano. A sua única obra conhecida sugere que Pereira foi professor de matemática prática — segundo a página de

Este trabalho foi parcialmente financiado por Fundos FEDER através do Programa Operacional Factores de Competitividade — COMPETE e por Fundos Nacionais através da FCT — Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do Projecto Est–C/MAT/UI0013/2011.

rosto, [Pereyra 1713] era "nam so necessario aos Contadores [...], mas tambem aos q́ seguem a Milicia, Pilotos, navegantes, ourives, & aos q̃ exercitam a mercancia, ou de qualquer modo negoceam"[1]. Os oratorianos tiveram um papel muito importante na educação em Portugal, mas apenas num período posterior, em pleno século XVIII; a entrada de Pereira para o Oratório na parte final da sua vida parece uma forma de aposentação e não deve estar relacionada com o seu papel como professor.

É claro que, embora publicado no século XVIII, [Pereyra 1713] foi escrito no século XVII. Mas, como já foi observado por Leal Duarte [2010, 41] este é, num certo sentido, um livro do século XVI: usando um termo da época, a álgebra que apresenta é puramente *numerosa* (por oposição à álgebra *especiosa*, ou *literal*, criada e desenvolvida por François Viète, René Descartes e outros), enquadrando-se mais precisamente na tradição cossista [Reich 1994][2]. De facto, não aparece sequer qualquer referência à álgebra especiosa, sendo ignoradas todas as inovações do século XVII. "Regra da cousa", expressão tipicamente quinhentista, é uma designação alternativa para a álgebra [Pereyra 1713, 230]. A notação utilizada para a incógnita e suas potências é uma variante da usada na tradição cossista italiana:

co	ce	cu	$cece$	R	$cecu$	...
cousa	censo	cubo	censo de censo	relato	censo de cubo	...

(correspondentes a $x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, \ldots$, respectivamente, na álgebra especiosa) [Pereyra 1713, 235]. Assim, por exemplo, é tratada a equação $5\,ce.\,p.\,45$ *ig.* a $30\,co.$ [Pereyra 1713, 328–329] ou seja, $5x^2 + 45 = 30x$.

As referências de Pereira, das quais assume ter extraído a sua álgebra [1713, 231], são o *Libro de Algebra* de Pedro Nunes [1567] e a *Arithmetica* de Juan Pérez de Moya [1562]. No entanto, a referência a Pedro Nunes pode ter uma motivação essencialmente patriótica.[3] As principais características distintivas da álgebra de Pedro Nunes — o enraizamento na geometria euclidiana, o cuidado em demonstrar as regras da álgebra — estão completamente ausentes de [Pereyra 1713]. Na classificação das "conjugações" (isto é, equações), Pereira começa por apresentar o esquema de Pedro Nunes de três conjugações simples e

[1] Na segunda edição (1760) os pedreiros e carpinteiros foram adicionados a esta lista.

[2] "Cossista" deriva do alemão "Coss", que por sua vez vem do italiano "cosa" ("coisa"), a designação mais habitual para a incógnita, de onde "regra da cousa" como sinónimo de "álgebra" dentro desta tradição.

[3] Esta referência surge no seguimento de considerações sobre os estrangeiros serem em geral "muito melhores Contadores" que os portugueses, não por terem "melhor discurso" (isto é, não por serem mais inteligentes), mas por terem mais curiosidade, enquanto "nenhum Portuguez aprende mais contas, que as necessarias para as suas occupaçoens e officios".

três compostas; no entanto, a seguir desmente-o, adoptando na verdade o esquema de Pérez de Moya, com os mesmos argumentos deste.[4] Seria desejável um estudo comparativo detalhado, que não está feito, mas estes dados sugerem que Pérez de Moya terá sido bastante mais influente do que Pedro Nunes em [Pereyra 1713].

Este "livro do século XVI" representará a sobrevivência da regra da cousa até que época? Tendo António Pereira vivido inteiramente no século XVII, o seu ensino de álgebra cossista limitou-se obviamente a esse século. A publicação do seu texto em 1713 poderia ser apenas uma iniciativa extemporânea do editor. Mas o aparecimento de uma segunda edição em 1760, com um editor diferente, sugere a existência de alguma procura pelo texto, pelo menos na primeira metade do século XVIII. Podemos perguntar-nos se o interesse pelo livro no século XVIII não seria motivado apenas pela secção de aritmética: embora a álgebra ocupe cerca de dois quintos do volume, quer as dedicatórias (uma por edição, assinadas pelos editores) quer a licença do Santo Ofício mencionam a aritmética mas não a álgebra. Mas a verdade é que a secção sobre álgebra foi incluída nas duas edições, e podia não o ter sido.

Por vezes os historiadores parecem partir do princípio de que a álgebra de Viète e Descartes deve ter levado rapidamente à extinção da álgebra cossista.[5] Uma conclusão natural é que a existência de um livro como [Pereyra 1713] é mais um indício do atraso científico português nos séculos XVII e XVIII. No entanto, a sobrevivência até ao século XVIII da álgebra cossista em livros didácticos (nomeadamente livros de aritmética mercantil ou prática) não é um fenómento exclusivamente português. Leal Duarte [2010, 42] deu dois exemplos importantes: [Pérez de Moya 1562], que foi reeditado mais de dez vezes em Espanha no século XVIII, a última em 1798; e o texto de aritmética francês [Le Gendre 1648], que a partir da edição de 1657 inclui um resumo da álgebra ("Abregé de l'Algebre") também puramente cossista[6]; este livro também teve várias edições no século XVIII — em algumas, a partir de 1774, o resumo de álgebra aparece substituído por outro com notações mais modernas, mas

[4]Limitando-nos às "conjugações simples", Pedro Nunes considera três tipos, correspondentes a $ax^2 = bx$, $ax^2 = b$ e $ax = b$; Pérez de Moya identifica o primeiro com o terceiro destes tipos, e em geral com todas as equações da forma $ax^{n+1} = bx^n$ ("sem haver outra dignidade de permeyo" [Pereyra 1713, 295]); quer esta identificação quer a consideração efectiva de potências de grau superior a 3 colocariam dificuldades às interpretações geométricas de Pedro Nunes.

[5]Por exemplo, segundo Reich [1994, 198] "the time of Coss was over" ("o tempo da álgebra cossista acabou") quando Viète publicou a sua álgebra literal.

[6]Este resumo é muito menos desenvolvido do que [Pérez de Moya 1562], [Pereyra 1713], ou os exemplos dados a seguir. Le Gendre explica apenas a aritmética de polinómios (por exemplo, o produto de 4 ℞ P 9 por 3 ℞ P 7 é 12 Q P 55 ℞ P 63, o que corresponde a $(4x+9)\times(3x+7) = 12x^2 + 55x + 63$) e a seguir usa-a em aplicações de regras tais como a regra de três.

a antiga versão cossista ainda foi reimpressa em 1781 em Rouen. Mas podemos dar mais exemplos. Em Espanha, [Puig 1672], que no século XVIII foi reimpresso pelo menos em 1715 e 1745, e [Garcia 1733], que tem a particularidade de ser um livro com uma secção de álgebra (apenas) cossista *composto* no século XVIII. Em Itália, [Figatelli 1664] que a partir da edição de 1678 inclui um "trattato d'algebra" puramente cossista e que teve pelo menos dez reedições no século XVIII.[7] Na Alemanha, [Beutel 1663] é ainda um compêndio de aritmética com uma secção sobre "Coß oder Algebra" ("coss [a regra da cousa], ou álgebra") que se mantém nas reedições até 1735. Todos estes exemplos (que não pretendem ser exaustivos) são não de livros primariamente de álgebra nem cursos gerais de matemática, mas de livros de aritmética (prática) que também incluem álgebra, dedicando-lhe mais ou menos espaço. [Pereyra 1713] encaixa perfeitamente nesta tradição de sobrevivência tardia da álgebra cossista em vários livros de aritmética prática, de vários países europeus.

2 A álgebra nos colégios jesuítas

Em 1692 Tirso González, Geral da Companhia de Jesus, ordenou uma reforma profunda do ensino da matemática nos colégios portugueses da Companhia, no seguimento de queixas relativas ao baixo nível que esse ensino tinha atingido e ao facto de não haver jesuítas portugueses habilitados para ensinar matemática.[8] Entre outras medidas, González ordenou que todos os alunos dos cursos de filosofia tivessem efectivamente aulas de matemática e que todos os anos alguns dos jesuítas que completassem o curso de filosofia fossem seleccionados para estudos mais avançados de matemática nos colégios de Coimbra e Évora. Estas medidas tiveram um sucesso muito claro, embora incompleto: os professores de matemática nos colégios jesuítas portugueses passaram a ser nacionais, deixando de ser necessário recorrer a jesuítas estrangeiros; por outro lado, o prestígio da matemática manteve-se baixo, e são raríssimos os casos de jesuítas portugueses que seguiram uma carreira matemática.

Relativamente a conteúdo, [González 1692] insiste sobretudo na geometria de Euclides, como era normal na tradição jesuíta. Mas há também uma secção dedicada à álgebra [González 1692, 661–662, 720–721]. No início desta secção

[7] Não foi possível consultar todas as edições, mas pelo menos nas de 1737 e 1762 a álgebra continua cossista — isto apesar da revisão, feita para a edição de 1737, por um Gaetano Guidi, "maestro di scuola d'aritmetica".

[8] O principal texto desta reforma, e que contém o que nos interessa aqui, é a ordenação [González 1692], mas outras instruções se seguiram até 1702 (ou até 1711, contando com uma carta do sucessor de González). Esta reforma foi estudada por Baldini [2004, 318–326], num artigo que é o estudo mais detalhado da matemática nos colégios jesuítas portugueses no período 1640–1759.

González lamenta que os jesuítas portugueses desconheçam a álgebra. Segue-se um brevíssimo resumo histórico, próprio da época: entre os antigos, Diofanto tinha tratado a álgebra "em números"; mais recentemente, Viète e outros passaram a álgebra para a quantidade contínua (referência à criação da álgebra especiosa); entre estes González salienta Descartes, malquisto na Filosofia "mas altamente louvado pela sua *Geometria*", especialmente nas edições latinas com comentários de Van Schooten e outros. González sugere que se aparecesse algum jesuíta português esforçado e instruído na geometria vulgar, este poderia aprender o método algébrico estudando individualmente a *Geometria* de Descartes. Mas quanto ao ensino propriamente dito, não é muito ambicioso: a álgebra deveria ser ensinada não no curso de filosofia, mas apenas nos estudos avançados de matemática, onde deveria haver contacto com alguns princípios de álgebra e o método deveria ser exercitado "pelo menos em números" — e prevê que mesmo este ensino não ocorra, no caso de o professor não ter aprendido álgebra.

Para compreender o que significavam estes conteúdos — alguns princípios e exercícios "pelo menos em números" — convirá não só notar que a expressão "em números" é a mesma que González usa algumas frases acima para se referir à álgebra pré-Viète (na época frequentemente chamada "álgebra numerosa") como ter em atenção as versões da álgebra que aparecem em dois compêndios jesuítas, um alemão e um francês, dos fins do séc. XVII: [Schott 1661], reeditado em 1674 e 1677, e [Dechales 1674], reeditado em 1690. No primeiro caso, o "livro" sobre álgebra [Schott 1661, 526–587] inclui cinco partes (48 páginas) sobre álgebra numerosa e apenas a sexta e última parte (13 páginas) sobre álgebra especiosa; no segundo caso também aparecem os dois tipos de álgebra, mas misturados,[9] porque "têm princípios comuns e os seus métodos são maioritariamente os mesmos" [Dechales 1674, III, 661]. Nem Schott nem Dechales se aproximam sequer da geometria analítica.

Em resumo, se é verdade que Tirso González desafiou os jesuítas portugueses a estudar a álgebra especiosa e mesmo a geometria cartesiana, pelo menos no que diz respeito à segunda não contava com mais do que estudo autónomo por parte de algum indivíduo mais esforçado e instruído, que poderia ou não aparecer na província portuguesa; e quanto ao ensino da álgebra em aulas, provavelmente não exigia mais do que a álgebra numerosa (e mesmo esta apenas se o professor tivesse algum conhecimento de álgebra).

[9]Por exemplo, o problema da divisão de um número em duas partes tais que o seu produto é 10 vezes o quadrado da menor é resolvido pelos dois métodos, através da equação $110R - 1q = 10q$ (onde R é a raiz — isto é, a incógnita — e q o seu quadrado), e através da equação $bA - A2 = 10A2$ (as consoantes representam quantidades conhecidas e as vogais incógnitas; os expoentes não aparecem elevados) [Dechales 1674, III, 681].

Sobre o que aconteceu efectivamente nos colégios jesuítas portugueses no século XVIII, no que diz respeito ao ensino de álgebra, não temos muitos dados (não conhecemos, por exemplo, apontamentos de aulas que abordem a álgebra). Mas os dados que temos permitem esboçar uma imagem do que terá sido a evolução desse ensino.

Conhecem-se 41 teses impressas de matemática dos colégios jesuítas de Coimbra e Évora, do período em estudo [Vários autores (S. J.) 1695–1743].[10] Destas, três apresentam secções sobre álgebra — todas de Évora, mas dois dos respectivos professores tinham estudado matemática em Coimbra (e é aos professores, não aos alunos, que é normalmente atribuída a autoria das teses jesuítas).

Na primeira, *Theses Mathematicas*, de 1706, o professor é Francisco Cardozo (1676?–1723), que tinha estudado matemática no colégio de Coimbra em 1699–1700; a partir de 1710 esteve no Tribunal das Matemáticas em Pequim e desenhou mapas de províncias chinesas para o imperador [Baldini 2004, 409, 413]. A secção sobre álgebra (em latim como toda a tese) consiste num brevíssimo resumo de [Clavius 1608], um bom livro de um matemático jesuíta muito respeitado, mas nessa altura já com muito perto de um século; e que mesmo na altura da publicação não estava perfeitamente actualizado, não referindo a álgebra especiosa de Viète. Este resumo apresenta os números cóssicos (unidade, raiz, censo, cubo, etc.); as regras dos sinais; a "regra da álgebra" (compor a equação, dividir pelo coeficiente do termo de maior grau e extrair uma raiz se necessário); a extracção da raiz quadrada (correspondente à fórmula resolvente do segundo grau); e sete problemas do primeiro grau.

A segunda tese, *Horologium Duplex Mathematicum, Solare, scilicet, et Mechanicum*, é de 1734. O professor é Francisco Gião (1699–1761), que tinha estudado matemática em Évora, ensinando depois matemática e a seguir filosofia ainda em Évora, depois matemática em Lisboa e finalmente teologia em Coimbra; com a expulsão dos jesuítas em 1759 partiu para o exílio em Itália [Baldini 2004, 438]. Neste caso a secção sobre álgebra (em português, embora a maior parte da tese esteja em latim) é constituída quase inteiramente por problemas e as fontes são menos óbvias, mas o uso da palavra "defectivos" (com o significado de "negativos") na primeira das duas frases que não são enunciados

[10] Estas "teses" são listas de proposições ou problemas, da responsabilidade dos respectivos professores, que os alunos se propunham defender ou resolver num exame final público. O facto de o exame ser aberto ao público limitava as questões a assuntos em que os alunos estivessem à vontade, já que deveriam transmitir uma boa imagem do ensino jesuíta. Assim, as teses não apresentam necessariamente o que de mais avançado era ensinado. Por simplicidade de linguagem, chamaremos a cada uma destas listas uma "tese", embora de facto seja um conjunto de "teses".

de problemas sugere [Dechales 1674] como fonte “teórica”. Há dois grupos de problemas: 18 sobre números, que podem ter sido extraídos de [Dechales 1674] e/ou [Clavius 1608], embora em diversos casos com adaptações nos dados; e 12 problemas “concretos”, dos quais 10 podem ter sido extraídos (um com adaptação) também de [Dechales 1674] e/ou [Clavius 1608].

A terceira tese, *Organum Mathematicum*, é de 1736. O professor é Francisco Ribeiro (1702–1761 ou 1766), que tinha estudado matemática no colégio de Coimbra (1724–1726), ensinando depois matemática e filosofia em Évora; com a expulsão dos jesuítas em 1759 partiu para o exílio em Itália [Baldini 2004, 435–436]. A secção sobre álgebra (em português, como perto de metade da tese) inclui uma espécie de introdução teórica que parece seguir principalmente [Schott 1661], com a divisão da álgebra em vulgar (isto é, numerosa) e especiosa e dos números em racionais e irracionais (aspecto a que Schott dá relevo na organização do seu “livro” sobre álgebra); refere ainda as denominações dos “numeros Algebraicos, ou Cossicos” (sem as especificar); no entanto, alguns detalhes retóricos são claramente extraídos de [Tosca 1709], um livro onde a álgebra é puramente especiosa (pelo menos na notação) e (surpreendentemente?) de um autor oratoriano. São apresentados também seis problemas, do primeiro grau, três dos quais aparecem em [Schott 1661], um em [Tosca 1709] e os restantes dois em ambas estas fontes.

O último documento que temos sobre o ensino da álgebra nos colégios jesuítas é o *Compendio dos Elementos de Mathematica* de Inácio Monteiro [Monteyro 1754–56]. Inácio Monteiro (1724–1812) tinha estudado matemática em Évora (1746–1748), ensinando depois matemática em Coimbra e a seguir filosofia em Santarém; com a expulsão dos jesuítas em 1759 partiu para o exílio em Itália, instalando-se em Ferrara, onde ensinou no colégio jesuíta e depois foi prefeito de estudos na Universidade; em Itália publicou outras obras, de filosofia (em sentido lato, incluindo filosofia natural); é geralmente apontado como, de entre os jesuítas portugueses do século XVIII, o mais destacado professor/divulgador das ciências físico-matemáticas e o mais importante exemplo de abertura à modernidade científica [Rosendo 1996; Silva 2001]. O capítulo final de [Monteyro 1754–56] são uns “Elementos de Algebra, ou Arte Analytica”. Trata-se essencialmente de uma breve introdução à álgebra especiosa (e apenas especiosa), até às equações de primeiro grau. Equações de segundo ou terceiro grau seriam mais difíceis, e “superfluas nestes Elementos, cujo fim naõ he fazer perfeito analytico ao leitor” — no prólogo do primeiro volume Inácio Monteiro já tinha sublinhado o carácter introdutório, e de apoio à filosofia natural, da sua obra. De referir que Monteiro apresenta sugestões de leitura para os estudiosos: para os principiantes, os *Entretiens Mathématiques*

(1743) do jesuíta francês Noël Regnault, os *Élémens des Mathématiques* de Bernard Lamy [1680], os *Elementa Matheseos* (1738) do Padre Brixia (da Brescia) e *Dell'Aritmetica Comune e Speciosa Trattato* (1731) de Francesco Saverio Brunetti; mais avançados, os *Elementa Matheseos Universae* (1713) de Christian Wolff ("pode servir a toda a especie de estudiosos da arte analytica"), a *Analyse demontrée* (1708) de Reyneau, a *Analyse des infiniment petits* (1696) do Marquês de l'Hôpital e os *Élémens de la géométrie des infinis* (1727) de Fontenelle. Ana Isabel Rosendo [1996, 151–152] identificou o livro de Regnault como a principal fonte deste capítulo.

Estas três teses e este livro são fontes muito parcelares, mas parecem marcar três fases duma evolução, consistente com o que terá sido a (mais ou menos lenta) criação duma estrutura de ensino de matemática quase a partir do zero:

1. Em 1706 vemos álgebra cossista pura, com a adopção de um livro clássico, mas com quase 100 anos.

2. Nos anos 1730 vemos o que parece ser genericamente a versão de [Schott 1661] e [Dechales 1674]: álgebra cossista como uma versão mais simples e introdutória, mas álgebra especiosa certamente também presente. De notar em ambas as teses o uso de mais do que uma fonte e numa a adaptação de problemas, o que sugere mais à-vontade do que a simples adopção de um livro.

3. Nos anos 1750 (pelo menos no caso de Inácio Monteiro) vemos álgebra especiosa pura e a recomendação de várias fontes, contemporâneas ou quase contemporâneas.

Mas há também características que se mantêm constantes ao longo desta evolução, consistentes com o maior relevo tradicionalmente dado pelos jesuítas à geometria euclidiana, mas neste caso português com um certo exagero:

1. A álgebra tem sempre um lugar secundário na organização da matemática: quer nas teses de 1734 e 1736 quer em [Monteyro 1754–56] a álgebra ocupa a última secção; na tese de 1706, que tem formato de poster em vez de livreto, a álgebra está no fundo da primeira coluna.

2. A álgebra aparece apenas como um método para resolver problemas numéricos — não é efectivamente aplicada a quantidades contínuas e muito menos à "grandeza em geral" (v. secção 3).

3. Uma consequência óbvia do ponto anterior é a ausência total da geometria analítica.

3 A "grandeza em geral" no ensino de engenharia militar

Encontram-se na Biblioteca Nacional quatro manuscritos que permitem afirmar que a álgebra, e em particular a álgebra especiosa, teve um lugar central no ensino matemático na Aula de Fortificação / Academia Militar da Corte, pelo menos nas décadas de 20 e 30 do séc. XVIII. A estes manuscritos podemos ainda juntar a Parte III ("Logica Analitica") de [Fortes 1744], cujo texto está relacionado com esses manuscritos e que é o mais antigo compêndio de álgebra especiosa publicado em português.

Três desses manuscritos (códices 6205^{17}, 5194^{1} e 1861)[11] contêm essencialmente o mesmo texto[12]: uns *Elementos das Mathematicas ou Tractado da Grandeza em Geral*, versão portuguesa de [Lamy 1680]. O responsável por esta versão portuguesa é quase certamente Manuel de Azevedo Fortes[13] (1660–1749), engenheiro-mor do reino desde 1719 e lente (primeiro substituto e depois proprietário) na Aula de Fortificação desde 1696. Azevedo Fortes, embora nascido em Lisboa de mãe portuguesa, era provavelmente filho de um nobre francês, e foi educado em Espanha e França, sendo durante seis anos professor de filosofia na Universidade de Siena. Volta a Portugal já na casa dos trinta, seguindo uma brilhante carreira técnico-militar, chegando ao cargo de engenheiro-mor do reino e ao posto de sargento-mor de batalhas. Foi um dos primeiros sócios da Academia Real da História Portuguesa (1720). Publicou sobre cartografia, engenharia militar, filosofia e matemática e é um nome incontornável na história de qualquer destes assuntos no Portugal do século XVIII [Andrade 1950; Bernardo 2005; Fernandes 2006].

[11] Quando um códice inclui vários textos, estes são indicados por números sobrescritos à cota do códice. Assim, "códice 6205^{17}" não é de facto um códice, mas sim o 17.º texto do códice 6205.

[12] No entanto, o texto do códice 6205^{17} está truncado, terminando a meio duma proposição do livro 6.º. Haverá ainda diferenças textuais, mas aparentemente menores.

[13] Nenhum destes manuscritos indica claramente o autor da versão portuguesa. O que mais se aproxima de o fazer é o códice 5194 onde, no rosto do segundo texto (uma versão dos *Elementos de Euclides*) foi escrito por quem este texto foi ditado, em 1722. Mas esse nome e essa data foram rasurados e substituídos por José Sanches da Silva (lente na Aula de Fortificação) e 1739. No entanto, é quase certo que o nome original era o de Manuel de Azevedo Fortes, por comparação com um manuscrito da Biblioteca Pública de Évora, códice Manizola 258, que inclui o mesmo texto dos *Elementos de Euclides* e que indica no rosto "Autor Manoel de Azevedo Fortes Engenheiro Mor na era de 1724". O prólogo destes *Elementos de Euclides*, presente nos dois manuscritos, faz referência a um "tratado da grandeza em geral" dado anteriormente, o que mostra que os dois textos do códice BNP 5194 estão em sequência e que o códice BPE Manizola 258 é também continuação dos *Elementos de Mathematica* que estamos a examinar. Podemos ainda acrescentar, para fortalecer esta atribuição, que por essa altura Azevedo Fortes era o principal responsável pelo ensino da engenharia militar.

Os códices 6205[17] e 1861 não estão datados, mas o códice 5194 (ou pelo menos o 5194[2]) data de 1722 e foi reutilizado em 1739 (v. nota 13). Os códices 5194[1] e 1861 trazem o subtítulo *Tractado da grandeza em geral*[14] (tradução do título da primeira edição de [Lamy 1680] e subtítulo das restantes) e é por esta expressão que o texto é referido quer no início do seu próprio "proemio" quer no pequeno prefácio aos *Elementos de Euclides* nos códices BNP 5194[2] e BPE Manizola 258.

O quarto manuscrito, códice 5659, datado de 1732–34, tem um título ligeiramente diferente: *Elementos das Mathematicas, ou Principios Geraes de todas as Sciencias que tem por objecto a grandeza em geral.* Foi escrito por Elias Sebastião Poppe, aluno da Academia Militar, quando o professor era Filipe Rodrigues de Oliveira (1700–?), substituto de Azevedo Fortes. Também Barbosa Machado [1741–59, IV, 123] atribui a Filipe Rodrigues de Oliveira um manuscrito com este título. Este manuscrito foi já estudado por Dulcyene Ribeiro [2009, cap. 6].

Como já foi dito, tratam-se de versões de [Lamy 1680], um compêndio muito popular de aritmética e álgebra, actualizado e ampliado pelo autor três vezes até 1715 e com várias reedições até 1765. O seu autor, Bernard Lamy (1640–1715), era um padre oratoriano francês, cartesiano, com ligações quer a Malebranche quer ao grupo de Port Royal; além de [1680], escreveu uns *Élémens de géométrie* [1685] seguindo a "ordem natural" cartesiana do simples para o complexo, um tratado de mecânica, e outras obras de filosofia, estudos bíblicos e moral [Girbal 1964]. [Lamy 1680] insere-se claramente numa tradição cartesiana (mais dos cartesianos do que do próprio Descartes) de promoção da *mathesis universalis*, ciência da grandeza em geral (quer contínua quer discreta), como introdução a todas as matemáticas; e de identificação desta ciência da grandeza em geral com a álgebra especiosa. Quer o "Proemio" comum aos códices 6205[17], 5194[1] e 1861 quer o "Prologo" do códice 5659, traduzindo uma passagem do prefácio de [Lamy 1680], explicam que os *Elementos de Geometria* de Euclides são menos próprios para servir como introdução à matemática, por tratarem apenas de uma espécie particular de grandeza — os corpos — que, ainda para mais, sugerem imagens corpóreas: "é muito importante aos que principiam o estudo das Matemáticas o acostumarem-se a fazer uso do entendimento puro sem intervenção dos sentidos, ou da imaginação, que são causa de muitos erros". Neste esquema, que como vimos esteve em vigor na Aula de Fortificação / Academia Militar pelo menos nas décadas de 1720 e 1730, a geometria (especulativa e prática) era naturalmente ensinada, mas apenas depois desta introdução algébrica à matemática.

A principal base para as versões portuguesas parece ser a segunda edição,

[14] O mesmo deveria acontecer no códice 6205[17], mas o título foi abreviado para *Elementos das Mathematic* [sic].

datada de 1689, na qual o compêndio de Lamy está dividido em sete “livros”. O livro 1.º, depois de algumas considerações introdutórias sobre a grandeza em geral, grandezas contínuas e grandezas discretas, etc., explica as quatro operações aritméticas, primeiro em grandezas notadas com números e depois em grandezas notadas com letras; segundo Lamy, é a esta aritmética com letras que se chama “álgebra”. O livro 2.º trata de potências, extracção de raízes e “combinações e mudanças de ordem” (isto é, arranjos e permutações). Os livros 3.º e 4.º tratam de razões, proporções e progressões. O livro 5.º trata de fracções (“quebrados” nas versões portuguesas) e operações aritméticas sobre fracções e razões. O livro 6.º trata das grandezas incomensuráveis. Finalmente, o livro 7.º é sobre o “método de resolver uma questão, ou problema” — depois de falar dos métodos sintético e analítico, segue a análise, explicando como encontrar equações para resolver problemas e como resolvê-las (1.º e 2.º graus).

A terceira edição (1704) teve alterações importantes. O livro 7.º foi ampliado, passando a incluir fórmulas para as equações do 2.º grau (na segunda edição eram resolvidas por redução a proporções) e resoluções das de 3.º e 4.º graus.[15] E foi acrescentado um 8.º livro, intitulado “Suplemento”, com quatro pequenos “tratados”: o primeiro sobre algumas propriedades das progressões dos números naturais e dos números ímpares e uma introdução à aritmética dos infinitos (indivisíveis); o segundo com propriedades do triângulo de Pascal e uma introdução aos logaritmos; o terceiro sobre a proporção harmónica; e o quarto sobre “combinações e mudanças de ordem” (versão ampliada do que na segunda edição era a última secção do livro 2.º). A quarta edição manteve a estrutura da terceira.

Curiosamente, as versões manuscritas portuguesas misturam a segunda e a terceira edições francesas[16]: os livros 1.º a 6.º seguem a segunda edição francesa; mas o livro 7.º segue a terceira edição (indo portanto até à resolução das “igualações” dos 3.º e 4.º graus); no fim dos códices 5194[1] e 1861 surge ainda um apêndice que não é mais do que uma adaptação do livro 8.º, com a ordem invertida (primeiro as “combinações”, depois a proporção harmónica, a seguir os logaritmos e finalmente as progressões dos números naturais e ímpares e a aritmética dos infinitos) e omitindo algumas passagens (como o que já tinha sido visto sobre “combinações” no livro 2.º e que se aparecesse aqui resultaria em duplicação). O códice 5659 omite este apêndice e introduz pequenas modificações no resto do texto; é mais provável que se trate de uma adaptação da

[15] Embora a resolução das do 4.º grau esteja errada: pressupõe que é sempre possível eliminar o segundo e o quarto termos, reduzindo a equação a uma do 2.º grau no quadrado da variável.

[16] O códice 6205[17] tem de ficar à parte desta observação, por o texto estar incompleto, terminando a meio da proposição 14 do livro 6.º.

versão de Azevedo Fortes feita por Filipe Rodrigues de Oliveira, do que de outra versão a partir das edições francesas. Mas um estudo comparativo detalhado dos quatro manuscritos ainda está por fazer.

De qualquer forma, a origem mista dos textos sugere que a primeira versão portuguesa tenha sido feita exclusivamente a partir da segunda edição francesa, em data anterior a 1722 (possivelmente em data próxima do início da docência de Azevedo Fortes em 1696; ou da sua passagem a lente proprietário, antes de 1710). Mais tarde, tendo acesso à terceira ou quarta edição, Fortes terá modificado o livro 7.º e acrescentado o apêndice. A ter sido assim, durante trinta ou quarenta anos os engenheiros militares portugueses terão tido uma introdução algébrica e cartesiana à matemática, baseada em Bernard Lamy.

Um dado contraditório: os códices BNP 5194 e BPE Manizola 258 mostram que a esta introdução tão algébrica à matemática seguia-se uma versão dos *Elementos* de Euclides — geometria sintética, sem aplicação da álgebra. Compare-se com a geometria de Lamy [1685], que inclui quatro "livros" de geometria sintética e um quinto, "Do Método", aplicando a álgebra à geometria — e ainda, a partir da 4.ª edição, um apêndice onde as secções cónicas são estudadas sinteticamente e analiticamente.

Falta referir a parte III (e última) de [Fortes 1744], intitulada "Logica Analitica", que é ainda uma versão do "tratado da grandeza em geral", mais livre e parcial: algumas passagens são resumidas, outras desaparecem; por exemplo, a resolução das "igualaçoens" de grau superior a 1 desaparece, embora a passagem sobre extracção de raízes seja aumentada com o completamento do quadrado, permitindo resolver as de 2.ª grau (incompletamente, devido à não consideração de raízes negativas); no apêndice desaparecem os logaritmos, as progressões de números e a aritmética dos infinitos, mas aparecem questões mais "filosóficas" (o ângulo de contingência e se a unidade é número).

Uma questão sem resposta é o porquê de a "Logica Analitica" aparecer depois da "Logica Geometrica" (parte II de [Fortes 1744], versão de [Lamy 1685]), invertendo a ordem que vimos ser seguida no ensino militar nas décadas de 1720 e 1730. Teria Azevedo Fortes mudado de opinião? Teria a ordem seguida no ensino militar também mudado? Ou a mudança deve-se apenas a este ser um livro de Lógica, e não um curso de matemática?

Há ainda a possibilidade (meramente conjectural) de a "Logica Geometrica" ter alguma correspondência com o ensino militar na década de 1740 — isto é, de os *Elementos* de Euclides terem sido substituídos por uma versão portuguesa de [Lamy 1685]. Se isso tiver acontecido, é natural que alguma geometria analítica tenha passado a ser ensinada: a "Logica Geometrica" em [Fortes 1744], embora omita o capítulo sobre o "Método" (possivelmente devido a alguma sobreposição com a “Logica Analitica”), inclui parcialmente o apêndice sobre secções cónicas — quase sem geometria analítica (talvez por vir antes da álgebra), mas pelo menos com as igualações $ax - xx = yy$ “que exprime a natureza do circulo” e $ax = yy$ relativa à parábola; é possível que na Academia Militar se fosse mais longe, como se ia na álgebra.

4 Três tradições distintas e paralelas

As três tradições que analisámos são distintas em diversos aspectos. O mais óbvio é a total ausência de álgebra especiosa em [Pereyra 1713], a sua progressiva assimilação entre os jesuítas e a sua exclusividade no ensino militar (pelo menos a partir de 1720). Mas uma diferença mais profunda reside nos diferentes papéis atribuídos à álgebra: uma regra para resolver problemas numéricos em [Pereyra 1713]; nos colégios jesuítas potencialmente mais do que isso, mas na realidade não desenvolvendo esse potencial e mantendo um lugar secundário; e um papel fundamental como base da matemática para os engenheiros militares.

Convém observar que [Pereyra 1713] se afasta dos jesuítas e dos militares pelos diferentes objectivos e audiência, tendo em vista profissionais que necessitavam de aritmética prática, como mercadores e contabilistas. O ensino de engenharia militar e os cursos avançados de matemática nos colégios jesuítas tinham objectivos mais próximos — a formação de elites técnicas. Mas outras características afastavam estas instituições, como o facto de estes cursos jesuítas não serem autónomos de uma organização educativa onde a matemática não tinha o prestígio da filosofia e muito menos da teologia (embora também Azevedo Fortes tivesse de se insurgir contra o menosprezo pelos engenheiros entre os militares); ou a falta de continuidade no corpo docente matemático jesuíta [Baldini 2004, 360–362], que contrasta com a prolongada docência e presença tutelar de Azevedo Fortes. E, afinal, as diferenças entre os jesuítas e os militares parecem resultar em boa parte de posicionamentos filosóficos: os jesuítas apegados a uma matemática clássica, os militares influenciados por um engenheiro-mor notoriamente cartesiano.

Referências

Impressos

António Alberto Banha de Andrade, 1950. “Manuel de Azevedo Fortes, primeiro sequaz, por escrito, das teses fundamentais cartesianas em Portugal”, *Actas do XIII Congresso da Associação Portuguesa para o Progresso das Ciências*, VIII, Lisboa, 255-263; reimpr. em A. A. Banha de Andrade, *Contributos para a história da mentalidade pedagógica portuguesa*, Lisboa, 1982, 191-226.

Ugo Baldini, 2004. "The teaching of mathematics in the Jesuit colleges of Portugal, from 1640 to Pombal", em Luís Saraiva e Henrique Leitão (eds.), *The Practice of Mathematics in Portugal*, Coimbra: Imprensa da Universidade, 293–465.

Luís Manuel A. V. Bernardo, 2005. *O Projecto Cultural de Manuel de Azevedo Fortes*, Lisboa: INCM.

Tobias Beutel, 1663. *Neu auffgelegte Arithmetica, Oder sehr nützliche und schöne Rechen-Kunst*, Leipzig: Scheibe; várias reedições, com ligeiras variantes no título, até 1735.

Christophorus Clavius, 1608. *Algebra*, Roma: Bartholomaeum Zannettum.

Claude François Milliet Dechales, 1674. *Cursus seu mundus mathematicus*, 3 vols., Lyon: Anisson; 2.ª ed. editada por A. Varcin, 4 vols., Lyon: Anisson, Posuel & Rigaud, 1690.

António Leal Duarte, 2010. "A note on mathematics in the eighteenth century Portugal", em Assis Azevedo, M. Elfrida Ralha e Lisa Santos (eds.), *Research Seminar on History and Epistemology of Mathematics: Proceedings*, Braga: CMAT, 39–44.

Mário Gonçalves Fernandes (coord.), 2006. *Manuel de Azevedo Fortes (1660–1749) Cartografia, Cultura e Urbanismo*, Porto: GEDES, Dep. Geografia da Faculdade de Letras da Univ. Porto.

Giuseppe Maria Figatelli, 1664. *Ristretto aritmetico*, Modana: A. Cassiani; várias reedições, com o título *Trattato aritmetico*, em Veneza e Bolonha, até 1797.

Manuel de Azevedo Fortes, 1744. *Logica Racional, Geometrica, e Analitica*, Lisboa: Jozé Antonio Plates.

Francisco Xavier Garcia, 1733. *Arithmetica Especulativa, y Practica, y Arte Mayor, o Algebra*, Zaragoza: Imprenta Real de Luis de Cueto.

François Girbal, 1964. *Bernard Lamy (1640-1715): étude biographique et bibliographique*, Paris: Presses universitaires de France.

Tirso González, 1692. "Ordinatio ad suscitandum fovendumque in Provincia Lusitaniae studium Mathematicae", transcr. em Luís Saraiva e Henrique Leitão (eds.), *The Practice of Mathematics in Portugal*, Coimbra: Imprensa da Universidade, 648–664; trad. port., 704–723.

Bernard Lamy, 1680. *Traité de la grandeur en général*, Paris: A. Pralard; reedições com o título *Élémens des mathématiques, ou Traité de la grandeur en général*, 1689, 1704, 1715 (mais algumas reimpressões, desde 1692, e edições póstumas até 1765).

Bernard Lamy, 1685. *Les élémens de géométrie, ou de la mesure du corps*, Paris: A. Pralard; 4.ª ed. com o título *Les élémens de géométrie, ou de la mesure de l'étendue*, Paris: F. De Laulne, 1710 (outras edições e reimpressões até 1758).

François le Gendre, 1648. *L'Arithmetique en sa Perfection*. Paris: ed. autor; pelo menos 20 reedições, até 1812.

Diogo Barbosa Machado, 1741–59. *Bibliotheca Lusitana*, 4 vols., Lisboa Ocidental: Antonio Isidoro da Fonseca, 1741, Lisboa: Ignacio Rodrigues, 1747, 1752, Lisboa: Francisco Luiz Ameno, 1759.

Ignacio Monteyro, 1754–56. *Compendio dos Elementos de Mathematica*, 2 vols., Coimbra: Real Collegio das Artes da Companhia de Jesu.

Pedro Nunes, 1567. *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*, Antuérpia: herdeiros de Arnold Birckman.

Antonio Pereyra, 1713. *Tratado de Arithmetica, & Algebra*, Lisboa: Jozé Lopes Ferreira; 2.ª ed. (nome do autor escrito Pereira), Lisboa: Antonio Vicente da Silva, 1760.

Juan Pérez de Moya, 1562. *Arithmetica Practica, y Speculativa*, Salamanca: Mathias Gast; muitas edições posteriores, até 1798.

Andrés Puig, 1672. *Arithmetica Especulativa, y Practica, y Arte de Algebra*, Barcelona: Antonio Lacavalleria; 2.ª ed. [?, diz ser a 4.ª impr.], Barcelona: Joseph Giralt, 1715; 3.ª ed. [*sic*], Barcelona: Juan Jolis, 1745.

Karin Reich, 1994. "The 'Coss' tradition in algebra", em Ivor Grattan-Guinness (ed.), *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, London and New York: Routledge; reimpr., Baltimore and London: The Johns Hopkins University Press, 2003, vol. I, 192–199.

Dulcyene Maria RIBEIRO, 2009. *A formação dos engenheiros militares: Azevedo Fortes, Matemática e ensino da Engenharia Militar no século XVIII em Portugal e no Brasil*, tese de doutoramento em Educação, Universidade de São Paulo.

Ana Isabel ROSENDO, 1996. *Inácio Monteiro e o Ensino da Matemática em Portugal no Século XVIII*, Coimbra: DMUC/CMUC, 1998 (publicação de uma dissertação de mestrado apresentada em 1996).

Gaspar SCHOTT, 1661. *Cursus Mathematicus*, Würzburg: herdeiros de J. G. Schönwetter; 2.ª ed., 1674; 3.ª ed., 1677.

Lúcio Craveiro da SILVA, 2001. "Um jesuíta no contexto das Luzes: Inácio Monteiro (1724–1812)", em Pedro Calafate (dir.), *História do Pensamento Filosófico Português*, vol. 3, Lisboa: Caminho, 177–194.

Thomas Vicente TOSCA, 1709. *Compendio Mathematico*, Valencia: Antonio Bordazer; 2.ª ed., Madrid: Antonio Marin, 1727; 3.ª ed., Valencia: Joseph Garcia, 1757.

VÁRIOS AUTORES (S. J.), 1695–1743. *Dissertações académicas sobre matemática e astronomia*, Biblioteca Central da Marinha (Lisboa), cota RBa5-06-01/41.

Manuscritos

Biblioteca Nacional de Portugal, Cod 1861. *Elementos das Mathematicas ou Tractado da grandeza em geral*, s/d.

Biblioteca Nacional de Portugal, Cod 5194. [1] *Elementos das Mathematicas ou Tractado da Grandeza em Geral*, s/d [1722?]; [2] *Elementos de Euclides ou Tractado de Geometria Elementar*, 1722.

Biblioteca Nacional de Portugal, Cod 5659. Elias Sebastião Poppe, *Elementos das Mathematicas, ou Principios Geraes de todas as Sciencias que tem por objecto a grand[ez]a em geral*, 1732–1734.

Biblioteca Nacional de Portugal, Cod 6205[17]. João Thomas Correa de Britto (cop.), *Elementos das Mathematic[as]*, s/d.

Biblioteca Pública de Évora, Cod Manizola 258. Manoel de Azevedo Fortes, *Geometria Espiculativa; Trigonometria Espherica; Modo de Riscar e Dar Aguadas nas Plantas Melitares*, 1724.

Índice

Simpósio História dos Instrumentos Científicos

Objetos com história: a preservação e divulgação do património científico e didático da Escola Superior de Educação de Lisboa **3**
Nuno Martins Ferreira, Paulo Maurício, Mercês Sousa Ramos, Ana Teodoro

Três embarcações, alguns caixotes e uma travessia: a transferência do Real Gabinete de Física da Ajuda para o Rio de Janeiro (1810–1812) **15**
David Felismino

Simpósio Luciano Pereira da Silva

As Obras Completas de Luciano Pereira da Silva **33**
Carlota Simões

Curta passagem de Luciano Pereira da Silva pelo actuariado português **45**
Ana Patrícia Martins

Astrolábios: De Luciano Pereira da Silva aos nossos dias **59**
António Costa Canas

Simpósio História da Cartografia

Mapeamento da Amazônia na segunda metade do século XVIII: Contribuições dos cartógrafos e astrônomos da comissão demarcadora de limites **75**
Iran Abreu Mendes, Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha
(Conferência plenária de encerramento)

O cartólogo no seu labirinto: Jaime Cortesão e o «mito da Ilha--Brasil» 91
Francisco Roque de Oliveira

Um desafio científico: a representação cartográfica das fronteiras do Brasil segundo o Tratado de Madrid (1750) 123
Mário Clemente Ferreira

OUTRAS COMUNICAÇÕES

Os pontos imaginários nas obras de Poncelet, Chasles e Laguerre 147
Jansley Alves Chaves, Gerard E. Grimberg

A classificação das geometrias: um diálogo entre os textos de Arthur Cayley e de Félix Klein 157
Leandro Silva Dias, Gerard Emile Grimberg

A distinção da loxodromia e da ortodromia nas obras de Pedro Nunes 173
Aline Mendes Penteado Farves

O "setor trigonal" e o "saber-fazer" matemático nos séculos XVI e XVII 191
Fumikazu Saito

A *Supputatrix* e a Aritmética: Adriaan van Roomen e a Classificação das Matemáticas 211
Zaqueu Vieira Oliveira

Os comentários perdidos de Francisco de Melo aos *Elementos* de Euclides 221
Bernardo Mota

Francisco Antonio Lacaz Netto (1911–1991): um estudo biográfico 233
Angelica Raiz Calabria

Algumas considerações sobre os primeiros livros de lógica moderna editados no Brasil 247
Carlos Roberto de Moraes

A variável "Grau de Instrução" avaliada nos quatro primeiros Censos Demográficos Brasileiros 271
Martha Werneck Poubel

Os primeiros doutores em Matemática no Brasil **283**
Mônica de Cássia Siqueira Martines

Cursos superiores de formação específica de professores de matemática no Espírito Santo: uma formação sustentada por engenheiros **297**
Marina Gomes dos Santos, Lígia Arantes Sad

As duas teorias da probabilidade na obra de Charles Sanders Peirce e a Estatística norte americana no final do século XIX **315**
Maria de Lourdes Bacha, Fumikazu Saito

As curvas de Descartes construídas por instrumentos. Um olhar pelo aplicativo geométrico GeoGebra **331**
Eduardo Sebastiani Ferreira

Considerações sobre a obra *Elementos de Álgebra* de André Perez e Marin: Apontamentos sobre o seu método de ensino **345**
Adriana de Bortoli

Três tradições algébricas em Portugal na primeira metade do séc. XVIII **357**
João Caramalho Domingues

Os *Principios Mathematicos* de Anastácio da Cunha: Notícias russas no século XIX **373**
Maria Elfrida Ralha, Maria Fernanda Estrada

Os primeiros anos do Curso Matemático na Universidade de Coimbra: História pessoal de como o Morgado de Mateus se formou em Matemáticas **387**
Ângela Lopes, Maria Elfrida Ralha, Abel Rodrigues

"*Exame de bombeiros*": como fazer os bombeiros brasileiros do século XVIII servir melhor a coroa portuguesa através da matemática **405**
Alexandre J. F. de Sousa, Gert Schubring

Grupos de Pesquisa em história da Matemática do Brasil: um estudo sobre suas genealogias **423**
Carlos Aldemir Farias da Silva, Iran Abreu Mendes

A Academia Politécnica do Porto — alguns marcos na sua história **439**
Hélder Pinto

Os matemáticos portugueses nos primeiros Congressos Ibéricos para o Progresso das Ciências (1921–1932) **457**
Luis Manuel Ribeiro Saraiva

Niccolò Tartaglia e a Música **481**
Carla Bromberg

Alberti, Finé e Fabri e suas contribuições em problemas de medir alturas no Renascimento **495**
Andressa Cesana

A matemática desconhecida da Escola de Minas de Ouro Preto **513**
Vinicius Mendes Couto Pereira, Gert Schubring

Sociedades Científicas ligadas à Matemática no Brasil **533**
Viviane de Oliveira Santos

Theodoro Augusto Ramos: contribuições para a matemática e seu desenvolvimento no Brasil **549**
Sabrina Helena Bonfim

Arquivo fotográfico **563**