O conhecimento de Probabilidades de futuros educadores e professores dos primeiros anos

José António Fernandes[1]

Floriano Viseu[2]

María M. Gea[3]

Resumo

Neste texto apresenta-se um estudo sobre a adequação do conhecimento de probabilidades de futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade às exigências de ensino desse tema aos alunos que irão ter no futuro. Para tal, os futuros educadores e professores, que já tinham estudado o tema de Probabilidades no curso de graduação universitária, responderam a três tarefas, com vários itens, versando os conteúdos: definição de acontecimentos certos, probabilidade simples e probabilidade conjunta e condicional. Em termos de resultados, excetuando a tarefa de probabilidade simples, em que se observou um melhor desempenho, as dificuldades sentidas pelos futuros educadores e professores na resolução das outras tarefas recomendam que a sua formação em probabilidades seja aprofundada ao longo da sua formação acadêmica.

Palavras-chave: Conhecimento para ensinar. Probabilidades. Futuros professores dos primeiros anos.

---

1 Doutor em Educação, área de conhecimento de Metodologia do Ensino da Matemática, pela Universidade do Minho. Professor Associado do Instituto de Educação da Universidade do Minho. Investigador do Centro de Investigação em Educação (CIEd). Contacto: jfernandes@ie.uminho.pt

2 Doutor em Educação, Especialização em Didática da Matemática, pela Universidade de Lisboa. Professor Auxiliar do Instituto de Educação da Universidade do Minho. Investigador do Centro de Investigação em Educaçãp (CIEd). Contato: fviseu@ie.uminho.pt.

3 Doutora em Ciencias de la Educación, especialidade em Didáctica de la Matmática, pela Universidade de Granada. Professora Ayudante Doctora do Departamento de Didáctica de la Matemática da Universidade de Granada. Membro do Grupo de Investigación sobre Educación Estadística. Contacto: mmgea@ugr.es

Cada vez mais o mundo em que vivemos envolve aspectos de incerteza, que se manifestam nos mais variados setores e domínios pessoais e sociais, tais como na medicina, na produção, no *marketing,* na política, na ciência e na tomada de decisões. Ora, a teoria das probabilidades constitui, por excelência, o instrumento para lidar com essas situações de incerteza.

Segundo Fischbein (1975), a visão determinista do mundo, que tem sido prevalecente na escola desde o Renascimento até o século passado, tem relegado o ensino das probabilidades para um plano secundário ou mesmo inexistente. Em consequência, para este autor, a pouca visibilidade da incerteza na escola explicaria, por sua vez, muitas das dificuldades experimentadas pelos alunos na sua aprendizagem.

A importância que é atribuída às Probabilidade e Estatística nas sociedades atuais tem levado muitos países a introduzirem estas temáticas nos currículos escolares de Matemática desde os primeiros anos de escolaridade, o que também acontece em Portugal (PORTUGAL, 2007). Adicionalmente, para além do reconhecimento da sua importância, alguns autores (e.g., BATANERO, 2013; BOROVCNIK; PEARD, 1996) veem no ensino das Probabilidades desde os primeiros anos uma forma de evitar que os alunos consolidem ideias erradas.

Ora, o ensino de noções elementares de Probabilidades aos alunos dos primeiros anos de escolaridade exige que os seus professores adquiram conhecimentos nesta temática. Assim, no presente texto avaliam-se os conhecimentos de futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade[4] no tema de Probabilidades, tendo em vista perceber se estes futuros educadores e professores são detentores de um conhecimento adequado às necessidades do ensino.

Seguidamente, na próxima secção, abordaremos a questão do conhecimento do professor para ensinar, nas três secções seguintes apresentaremos o desempenho de futuros educadores e professores dos primeiros anos em tarefas de Probabilidades e, finalmente, sintetizaremos as principais conclusões e implicações para a formação de professores.

Conhecimento do professor para ensinar

Embora a preparação dos professores se verifique ao longo de toda a sua carreira, é no período da formação inicial que é dado um impulso decisivo

4 Os futuros educadores trabalharão com crianças antes do ensino formal e os futuros professores lecionarão alunos até ao 6.º ano de escolaridade (inclusive).

para a construção do seu conhecimento profissional. Os cursos de formação inicial de professores seguem modelos diversificados, desde aqueles que integram a prática e a teoria ao longo do curso até os modelos sequenciais, em que primeiro se tratam as matérias teóricas (da Matemática e da Didática) e só depois se realiza o estágio pedagógico. Atualmente, em resultado da adaptação do ensino superior português às determinações do processo de Bolonha, a formação inicial de professores de Matemática de todos os níveis de ensino é obtida através da realização de dois cursos sequenciais, o primeiro de licenciatura (com seis semestres) e o segundo de mestrado (com três ou quatro semestres). O curso de licenciatura fornece ao futuro professor o conhecimento na área de docência, neste caso, da Matemática. O curso de mestrado é orientado para a preparação dos licenciados em áreas de formação educacional geral, de didáticas específicas e de prática de ensino supervisionado, ou seja, proporciona sobretudo o conhecimento relativo ao currículo, aos alunos e aprendizagem e à prática letiva.

A investigação em educação matemática tem dado um destaque especial ao conhecimento que o professor precisa para ensinar. Shulman (1986) reconhece a existência de um conhecimento específico para ensinar, organizando-o em conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico geral, conhecimento do currículo e conhecimento pedagógico do conteúdo. Destes conhecimentos, Shulman dá particular destaque ao conhecimento pedagógico do conteúdo, que consiste nas formas de representar e formular o assunto de modo a torná-lo compreensível ao aluno. O interesse por este tipo de conhecimento deriva da ligação que se estabelece entre o conhecimento do conteúdo e a prática de ensino, o que significa que as discussões sobre o conteúdo devem ser relevantes para o ensino e que as discussões sobre o ensino devem garantir que se dê atenção ao conteúdo (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Ponte (2012) defende que o conhecimento do professor de Matemática é orientado para a atividade de ensinar, apoiando-se em conhecimentos de natureza teórica e também de natureza social e experiencial, integrando quatro vertentes fundamentais: (i) conhecimento da matemática; (ii) conhecimento dos alunos e da aprendizagem; (iii) conhecimento do currículo; e (iv) conhecimento da prática letiva.

Para Shulman (1986), o conhecimento do conteúdo abrange não só o conhecimento dos assuntos a ensinar, mas também o conhecimento das suas estruturas organizacionais, tanto de natureza substantiva – a variedade de formas pelas quais os conceitos e princípios básicos de uma disciplina específica são organizados – como sintática – o conjunto de regras que determinam o que é verdadeiro ou falso, o que é válido ou não num domínio disciplinar. Nesta perspetiva, ensinar um dado assunto é mais do que conhecer os fatos e os conceitos que são apresentados na prática. Como refere este autor, para um professor não basta saber que 'uma dada coisa é assim', tem que saber 'porque é que é assim', sustentando as suas afirmações e distinguindo claramente o que é central e o que é periférico. Determinadas tarefas de ensino dependem, sobretudo, do conhecimento do conteúdo matemático. Tomar decisões sobre como e quando abordar um dado tópico matemático, orientar os alunos no que têm que fazer, ouvir e comentar as suas ideias, determinar a validade de um argumento matemático ou a adequação das representações matemáticas e estabelecer conexões entre os tópicos abordados quer noutras disciplinas quer na própria Matemática são exemplos de tarefas em relação às quais o conhecimento do conteúdo é determinante (BALL ET AL., 2008; KAHAN; COOPER; BETHEA, 2003; KILPATRICK; SWAFFORD; FINDELL, 2001; OSANA; LACROIX; TUCKER; DESROSIERS, 2006; SANTOS; PONTE, 2002; SHULMAN, 1986).

Ball *et al.* (2008) distinguem dois tipos de conhecimento do conteúdo, o comum e o especializado. O conhecimento comum do conteúdo traduz o conhecimento que qualquer pessoa com formação matemática manifesta quando responde corretamente a uma dada questão ou resolve corretamente um dado problema matemático. O conhecimento especializado do conteúdo é o que distingue o professor de Matemática de qualquer outra pessoa com formação matemática. Este conhecimento está na base da capacidade do professor para explicar a razão de ser dos procedimentos matemáticos e a especificidade da linguagem matemática. É este conhecimento especializado que permite ao professor usar representações adequadas dos conceitos matemáticos, analisar diferentes estratégias de resolução de tarefas e envolver os alunos nas suas atividades e na discussão dos seus resultados.

Relativamente ao conhecimento do currículo, Shulman (1986) considera que se trata do conhecimento que o professor tem dos programas da sua área disciplinar, da variedade de materiais que podem utilizar no seu ensino e das vantagens e desvantagens do uso desses programas e materiais na sala de aula. Este autor salienta duas dimensões do conhecimento curricular que considera importantes para o ensino, o conhecimento horizontal – que relaciona os conteúdos de uma dada disciplina com os assuntos que os alunos aprendem noutras disciplinas – e o conhecimento vertical – que inclui a familiaridade com os assuntos da mesma área disciplinar, ensinados em diferentes níveis escolares, e com os materiais que podem ser usados no seu ensino. Segundo Canavarro (2003), o conhecimento destas duas componentes do conhecimento curricular ajuda o professor a equacionar as melhores opções de abordar os conteúdos, "pondo em prática as orientações metodológicas, para dar consecução às finalidades principais da aprendizagem da Matemática" (p. 49). Para esta autora, o conhecimento do currículo abrange outros conhecimentos para além dos conteúdos e dos materiais. Integra também o conhecimento que articula os conteúdos matemáticos, as recomendações metodológicas, as finalidades e objetivos e as indicações sobre a avaliação das aprendizagens dos alunos. Para esta articulação se tornar eficiente, a autora considera que o professor precisa conhecer o teor dos programas, de os interpretar e de os adaptar à sua pessoa e ao contexto onde exerce a sua profissão docente. Considera também que o professor precisa dar atenção à importância que a Matemática tem na formação do aluno, que se pretende matematicamente alfabetizado para que seja capaz de lidar com as situações da sociedade atual.

Outro domínio do conhecimento que o professor precisa desenvolver para ensinar é o conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem. Abrange o conhecimento dos alunos como pessoas, dos seus interesses, dos seus gostos, das suas formas habituais de reagir, dos seus valores, das suas referências culturais (SANTOS; PONTE, 2002) e das formas como aprendem e desenvolvem as suas ideias matemáticas (KILPATRICK *et al.*, 2001). O professor deve ser sensível aos modos próprios de aprender, de pensar e de fazer Matemática que os alunos desenvolvem ao longo da sua escolarização. Cada aluno constrói as suas próprias abordagens sobre as tarefas matemáticas, o que pode contribuir para um maior envolvimento nas atividades da aula. Desde a planificação até a concretização dos planos de aula, o professor precisa de atender ao que os alunos conhecem, saber como responder às suas questões ou afirmações e como tomar decisões sobre o que fazer com as diferentes ideias que os alunos colocam (KILPATRICK *et al.*, 2001). O professor desempenha, assim, um papel de facilitador da aprendizagem dos alunos e não de transmissor de conceitos, fatos ou técnicas.

Ball *et al.* (2008), ao analisarem a relação entre o conteúdo e os alunos, identificaram um conhecimento do conteúdo e os alunos e um conhecimento do conteúdo e o ensino. O conhecimento do conteúdo e os alunos resulta da combinação do conhecimento sobre os alunos e sobre a Matemática.

Trata-se de um conhecimento que o professor precisa, por um lado, para antecipar possíveis reações dos alunos e, por outro, para ouvir e interpretar o que emerge do pensamento dos alunos. Cada uma destas tarefas exige do professor uma compreensão matemática específica e uma familiaridade com os alunos e o seu pensamento matemático. Como componente central destas tarefas sobressai o conhecimento que o professor deve possuir sobre as conceções mais comuns e as conceções erróneas dos alunos em relação a um dado conteúdo matemático.

Já o conhecimento do conteúdo e o ensino é o que combina conhecimento sobre o ensino e sobre a Matemática. Muitas das tarefas matemáticas do ensino requerem conhecimento matemático na fase da sua planificação. Tal conhecimento emerge quando o professor precisa sequenciar os conteúdos a ensinar, escolher os exemplos que levem os alunos a compreender melhor o conteúdo, avaliar as vantagens e as desvantagens de diversas representações para ensinar uma ideia específica e selecionar métodos e procedimentos. O conhecimento do conteúdo e do ensino também emerge quando o professor precisa tomar decisões sobre as contribuições que deve solicitar aos seus alunos. Ao discutir com os alunos as suas atividades, o professor tem que decidir quando lhes deve pedir que clarifiquem melhor as suas ideias, usar os seus comentários para fazer um ponto da situação e colocar novas propostas de trabalho para facilitar a sua aprendizagem. Cada uma destas tarefas requer uma interação entre a compreensão específica da matemática e a compreensão dos assuntos pedagógicos que podem afetar a aprendizagem dos alunos.

Entre os diferentes tipos de conhecimento para ensinar, referidos por Ball *et al.* (2008), no presente trabalho tratamos o conhecimento do conteúdo de Probabilidades. Para tal, analisaremos nas três secções seguintes as respostas de futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade as tarefas sobre acontecimentos certos, probabilidade simples e probabilidade condicionada e conjunta. À altura da aplicação das tarefas, estes futuros educadores e professores já tinham estudado o tema de Probabilidades na universidade, no âmbito de uma unidade curricular.

Definição de acontecimentos certos

Foi proposta a 63 futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade uma tarefa sobre a definição de acontecimentos certos num processo de extração de berlindes (bola de gude) de um saco (Figura 1), contendo berlindes de três cores, de modo a ter-se a certeza de obter pelo menos um, dois ou três berlindes de cores especificadas.

Figura 1 – Enunciado da tarefa proposta aos alunos sobre acontecimentos certos

Num saco há 4 berlindes vermelhos, 3 verdes e 2 brancos.

a) Quantos berlindes se devem retirar do saco (sem reposição) para termos a certeza de obter pelo menos um berlinde de cor verde? Porquê?

b) Quantos berlindes se devem retirar do saco (sem reposição) para termos a certeza de obter pelo menos um berlinde de cor vermelha e outro de cor verde? Porquê?

c) Quantos berlindes se devem retirar do saco (sem reposição) para termos a certeza de obter pelo menos um berlinde de cada cor? Porquê?

Fonte: Os autores.

Uma estratégia de resolução da tarefa consiste em considerar os berlindes da cor que estão em maior número, começando por aqueles que não são favoráveis e continuando com os que são favoráveis ao acontecimento (se for o caso). Por exemplo, no caso do item a) temos de extrair sete berlindes para obter de certeza uma bola verde, número que corresponde à soma do número de berlindes de cor vermelha, branca e mais um berlinde. Em alternativa, podemos analisar o número de berlindes que ficam no saco depois da extração. Ainda no caso do item a), ao extrairmos sete berlindes, ficam no saco dois berlindes, os quais podem ser ambos vermelhos, verdes ou brancos, ou de cores diferentes. Em qualquer caso terá saído pelo menos um berlinde verde. Já no caso de termos extraído seis berlindes (ou menos), restarão no saco três berlindes (ou mais), os quais poderão ser todos verdes, não garantindo, assim, a obtenção do berlinde verde.

Na Tabela 1 apresenta-se, em cada item, o número de berlindes que os alunos indicaram ser necessário extrair para garantir a realização certa do respetivo acontecimento.

Pela tabela podemos verificar que o número correto de berlindes a extrair do saco para a realização certa do acontecimento (7 berlindes nos itens a e b, e 8 berlindes no item c) é indicado por mais alunos no item a) (84%), diminui no item b) (59%) e mais ainda no item c) (38%). Assim, o desempenho dos alunos diminuiu sistematicamente com a garantia de extrair pelo menos um berlinde de uma cor, dois berlindes de duas cores e um berlinde de cada uma das três cores consideradas.

Tabela 1 - Percentagem de alunos segundo o n.º de berlindes extraídos em cada um dos três itens (*n=63*)

Nº de berlindes extraídos	Itens		
	a)	b)	c)
2	—	5	—
3	6	9	16
4	2	—	—
5	3	2	2
6	2	17	27
7	84*	59*	6
8	—	3	38*
9	—	—	8
NR	3	5	3

*Resposta correta; NR – Não Resposta.
Fonte: Os autores.

Em termos de raciocínio, para garantir a obtenção de pelo menos um berlinde de uma cor, os alunos centraram-se no total de berlindes das outras cores, o que conduzia à seleção da resposta correta. Para garantir a obtenção de pelo menos um berlinde de cada uma de duas cores distintas, os alunos centraram-se no total de berlindes da cor não pretendida e de uma das cores pretendidas, o que conduzia à resposta correta ou errada consoante se escolhia uma ou outra das cores pretendidas. Finalmente, para garantir a obtenção de pelo menos um berlinde de cada uma das três cores, os alunos consideraram o total de berlindes de duas das cores, o que conduzia à resposta correta ou errada consoante as cores consideradas. Quer no caso dos dois berlindes de cores distintas, quer no caso dos três berlindes de cores distintas, a obtenção da resposta correta requer que se considere o número total de berlindes da cor ou cores pretendidas por ordem decrescente, começando pela cor mais numerosa e continuando com a que se segue ou seguem na ordenação. Ora, é a não consideração sistemática deste requisito que explica o aumento das dificuldades dos alunos quando se passa da garantia de extrair pelo menos uma bola de uma cor para duas bolas de cores distintas e, finalmente, para três bolas de cores distintas. Adicionalmente, alguns alunos justificaram o número de berlindes a extrair com base na obtenção de certos valores de probabilidade das cores envolvidas, incluindo a equiprobabilidade de todas as cores, que eles avaliaram subjetivamente como sendo suficientemente elevados para garantir a obtenção da cor ou cores pretendidas.

No caso do item c), desta tarefa, ele foi proposto por Fischbein e Gazit (1984) a alunos do 5.º, 6.º e 7.º ano (com 10-13 anos), com ensino prévio em probabilidades, tendo-se obtido percentagens de respostas corretas muito díspares (14% no 5.º ano, 32% no 6.º ano e 54% no 7.º ano), e aumentando claramente com o ano escolar. Também Ortiz e Mohamend (2014) propuseram este item a futuros professores do ensino primário, tendo obtido uma percentagem de respostas corretas um pouco superior (46%), enquanto Fernandes e Barros (2005), num item muito semelhante, aplicado a futuros educadores e professores dos primeiros anos, obtiveram uma percentagem de respostas corretas muito baixa (24%), talvez por estar em jogo um maior número de berlindes.

Dos resultados obtidos, conclui-se que os futuros educadores e professores revelaram muitas dificuldades, sobretudo no caso da certeza da extração de um berlinde de cada cor. Neste último caso, obteve-se uma percentagem de respostas corretas mesmo inferior à obtida pelos alunos do 7.º ano do estudo de Fischbein e Gazit (1984).

Probabilidade simples

Na tarefa seguinte (Figura 2), constituída por duas questões, a questão 1 e a questão 2 foram propostas a 72 e 61 alunos, futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade, respetivamente. Entre as duas questões, a questão 1 é semelhante a uma outra proposta por Batanero, Gómez-Torres, Contreras e Díaz (2015) a professores dos primeiros anos em formação.

Figura 2 - Enunciado da tarefa proposta aos alunos probabilidade simples

Questão 1. Um saco tem 3 bolas brancas (B) e 4 bolas pretas(P). Que bolas devem ser acrescentadas às existentes no saco para que a probabilidade de obter:
a) Uma bola preta seja 2/3 ? **b)** Uma bola branca seja 2/3?

Questão 2. Paulo tem 5 bolas brancas e 7 pretas numa caixa. Miguel tem outra caixa com 3 bolas brancas e 5 pretas. Quantas bolas, pretas ou brancas, devem ser deslocadas de uma caixa para a outra para que ambos os meninos tenham a mesma probabilidade de extrair uma bola preta da sua caixa? Justifique.

Fonte: Os autores.

Tanto a questão 1 como a questão 2 são questões que admitem mais do que uma resposta correta. No caso da questão 1, em ambas os itens, uma estratégia sistemática a considerar consiste em estabelecer as sucessivas frações equivalentes a 2/3 (2/3=4/6=6/9=8/12=10/15=12/18=14/21=16=24...) e determinar o número de bolas de ambas as cores a acrescentar ao saco, até se obter um valor da probabilidade dado por uma destas frações equivalentes. De entre outras possibilidades, no caso do item a), poderíamos acrescentar 2P e 0B (obtendo-se P(P)=6/9) ou acrescentar 4P e 1B (obtendo-se P(P)=8/12), enquanto, no caso do item b), poderíamos acrescentar 5B e 0P (obtendo-se P(B)=8/12) ou acrescentar 7B e 1P (obtendo-se P(B)=10/15).

No caso da questão 2 identificam-se três possibilidades distintas: 1) deslocar 1B e 1P da caixa do Paula para a do Miguel, ficando as duas caixas com a composição e, portanto, com a igual probabilidade extrair uma bola preta [P(P)=6/10 (Paulo e Miguel)]; deslocar 3B e 4P da caixa do Paulo para a do Miguel [P(P)=3/5 (Paulo)=9/15 (Miguel)]; e, finalmente, deslocar 1B e 2P da caixa do Miguel para a do Paulo [P(P)=9/15] (Paulo)=3/5 (Miguel)].

Na Tabela 2 apresentam-se os resultados obtidos em cada uma das questões/itens da tarefa, codificando as respostas dadas pelos alunos em corretas, incorretas e não respostas.

Tabela 2 – Percentagem de respostas corretas, erradas e não respostas nos itens de probabilidade simples

	Questão 1 (*n*=72)		Questão 2 (n=61)
Tipo de resposta	a)	b)	
Correta	69	68	80
Incorreta	21	25	18
Não resposta	10	7	2

Fonte: Os autores.

Pela Tabela 2, observa-se que as percentagens dos diferentes tipos de resposta são muito próximas em ambos os itens da questão 1. No caso das respostas corretas, cerca de dois em cada três alunos apresentaram essa resposta.

As respostas corretas aos itens a) e b) apresentam alguma variabilidade em termos do número de bolas (de ambas as cores) a acrescentar às já existentes no saco. No caso do item a), a maioria dos alunos (69%) apresentou a resposta "acrescentar 0B e 2P", que resulta em P(P)=6/9, seguindo-se os alunos (29%) que apresentaram a resposta "acrescentar 1B e 4P, que resulta em P(P)= 8/12, e apenas um aluno (2%) apresentou a resposta "acrescentar 4B e 10P", que resulta em P(P)=14/21.

No caso do item b), a maioria dos alunos (84%) apresentou a resposta "acrescentar 5B e 0P", que resulta na P(B)=8/12, seguindo-se os alunos (8%) que apresentaram a resposta "acrescentar 13B e 4P", que resulta em P(B)=16/24, os alunos (5%) que apresentaram a resposta "acrescentar 7B e 1P, que resulta em P(B)=10/15), e apenas um aluno (3%) apresentou a resposta "acrescentar 11B e 3P", que resulta em P(B)=14/21.

Em ambas os itens, de entre as inúmeras respostas corretas possíveis, uma larga maioria dos alunos (69% no item a) e 84% no item b) apresentaram como resposta correta a possibilidade que corresponde ao menor número de bolas (de ambas as cores) a acrescentar às já existentes no saco, ou seja, duas bolas (0B e 2P) no item a) e cinco bolas (5B e 0P) no item b). A maior adesão dos alunos a estas respostas pode dever-se ao fato de, em ambos os casos, se acrescentar bolas de apenas uma das cores pois, nessa situação, será mais fácil obter a composição pretendida do saco do que quando se acrescentam bolas das duas cores.

Em relação às respostas incorretas, fundamentalmente, elas não respeitam as proporções entre as razões relativas à probabilidade requerida e indicada, sendo que alguns alunos concentraram-se apenas nos casos favoráveis.

Comparativamente com a questão 1, na questão 2 obteve-se uma maior percentagem de respostas corretas, próxima da que foi obtida por Batanero *et al*. (2015) no seu estudo (76%), tendo quatro em cada cinco alunos apresentado essa resposta. Diferentemente do que se verificou na questão anterior, nesta questão todos os alunos, que responderam corretamente, deslocaram bolas de uma caixa do Paulo para a caixa do Miguel de modo a obterem a mesma composição de bolas em ambas as caixas. Adicionalmente, um aluno (2%) referiu também a possibilidade "deslocar 1B e 2P da caixa do Miguel para a do Paulo" (portanto duas possibilidades ao todo) e outro aluno (2%) referiu a mesma possibilidade e a possibilidade "deslocar 3B e 4P da caixa do Paulo para a do Miguel" (portando três possibilidades ao todo).

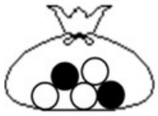
Mesmo não tendo sido inquiridos os alunos sobre todas as possibilidades de deslocar bolas de uma caixa para a outra, de modo a obter-se igual probabilidade de extrair uma bola preta em ambas as caixas, não deixa de ser surpreendente que quase todos os alunos (96%) tenham indicado apenas uma possibilidade, precisamente aquela que se refere à igual composição das caixas. Ora, este fato, conjuntamente com a prevalência de acrescentar bolas de apenas uma das cores, que se verificou nos dois itens da questão 1 (cerca de dois em cada três no item a) e cerca de quatro em cada cinco no item b), denotam pouca flexibilidade dos alunos para formularem outras respostas igualmente corretas.

Probabilidade conjunta e condicionada

No estudo realizado por Fernandes, Batanero, Correia e Gea (2014) foi proposta a seguinte tarefa (Figura 3), envolvendo os conceitos de probabilidade condicionada e probabilidade conjunta, a 46 futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade.

Figura 3 - Enunciado da tarefa proposta aos alunos sobre probabilidade condicionada e conjunta

Questão 1. Num saco há 3 bolas brancas e 2 bolas pretas, conforme se mostra na figura seguinte. As bolas são todas iguais exceto na cor. Sem ver, tiram-se sucessivamente **duas** bolas do saco.



Considera que a 1ª bola extraída *é colocada* de novo no saco antes de se extrair a 2ª bola.

a) Sabe-se que a 1ª bola extraída é branca. Qual a probabilidade de a 2ª bola ser branca?

b) Qual a probabilidade de obter *duas* bolas brancas?

Considera que a 1ª bola extraída *não é colocada* de novo no saco antes de se extrair a **2ª** bola.

c) Sabe-se que a 1ª bola extraída é branca. Qual a probabilidade de a 2ª bola ser preta?

d) Qual a probabilidade de obter uma bola branca e uma bola preta (por qualquer ordem)?

Questão 2. Num grupo de 25 pessoas, 10 são homens e 15 são mulheres.

Escolhem-se, ao acaso, *duas* pessoas do grupo das 25 pessoas.

a) Sabendo-se que a primeira pessoa escolhida é mulher, qual a probabilidade de a segunda pessoa ser homem?

b) Sabendo-se que a segunda pessoa escolhida é mulher, qual a probabilidade de a primeira pessoa ser homem?

c) Qual a probabilidade de obter duas mulheres?

d) Qual a probabilidade de obter um homem e uma mulher (por qualquer ordem)?

Fonte: Os autores.

Na Tabela 3 apresentam-se as percentagens de respostas corretas, erradas e não respostas nos itens de probabilidade condicionada e de probabilidade conjunta nos contextos de extração de bolas de um saco (questão 1) e de seleção de pessoas de um grupo (questão 2).

Tabela 3 – Percentagem de respostas corretas, erradas e não respostas nos itens de probabilidade condicionada e conjunta segundo o contexto (n = 46)

Tipo de resposta	Probabilidade condicionada				Probabilidade conjunta			
	Saco de bolas		Grupo de pessoas		Saco de bolas		Grupo de pessoas	
	1a)	1c)	2a)	2b)	1b)	1d)	2c)	2d)
Correta	81	76	63	4	37	17	30	20
Incorreta	17	20	30	83	52	72	59	63
Não resposta	2	4	7	13	11	11	11	17

Fonte: Os autores.

Pela Tabela 3, constata-se que, no conjunto de todos os itens, os participantes revelaram um claro melhor desempenho nos itens de probabilidade condicionada (1a), 1c), 2a), 2b)) do que nos itens de probabilidade conjunta (1b), 1d), 2c) e 2d)), com média de respostas corretas de 56% no primeiro caso e de 26% no segundo. Estes resultados vão de encontro aos de Contreras (2011), que obteve 44% de respostas corretas na probabilidade condicionada e 41% na conjunta, e de Estrada e Díaz (2006), que obtiveram 56% e 52%, respetivamente, num grupo de futuros professores que tinham realizado previamente um curso de Estatística. Já Contreras, Estrada, Díaz e Batanero (2010) obtiveram 23% e 22% de respostas corretas, respetivamente, noutro grupo que não tinha realizado o curso. Em todos estes estudos os dados eram fornecidos numa tabela de contingência, o que pode explicar os resultados ligeiramente melhores que foram obtidos nos dois primeiros estudos.

No nosso estudo, a maior dificuldade dos alunos na probabilidade conjunta, relativamente à probabilidade condicionada, pode explicar-se por se tratar de um conceito mais elaborado, pois a probabilidade condicionada, tal como foi aqui abordada, a partir da restrição do espaço amostral, pode ser determinada sem requerer a combinação das probabilidades dos acontecimentos e/ou questões de ordem (caso dos itens 1d) e 2d)), ao contrário do que aconteceu na determinação da probabilidade conjunta. Analogamente, os problemas colocados nos estudos anteriores não requerem também estas operações, podendo resolver-se simplesmente através da leitura dos dados da tabela em questão.

Em geral, entre os contextos de formulação dos itens, extração de bolas de um saco e seleção de pessoas de um grupo, excetuando o caso do item 2b), não se verificaram grandes discrepâncias no desempenho dos alunos quer no caso da probabilidade condicionada, quer no caso da probabilidade conjunta. Por outro lado, verifica-se que os alunos revelaram um melhor desempenho nos itens 1a) e 2a) relativamente aos itens 1c) e 2b), respetivamente, o que corrobora a conclusão de Fischbein e Gazit (1984), quando referem que os alunos sentem mais dificuldades na determinação da probabilidade condicionada em situações de não reposição do que em situações com reposição.

No caso do item 2b), com apenas duas respostas corretas, pensamos que as grandes dificuldades dos alunos resultam da sua estrutura. Nesta situação, o fato de se ter invertido o eixo temporal na sequencialização dos acontecimentos tornou muito mais difícil a questão para os alunos, pois eles tendem a assumir que um acontecimento que ocorre depois não pode afetar um acontecimento que ocorre antes. Este enviesamento na avaliação de probabilidades, conhecido por "falácia do eixo temporal" (FALK, 1986), tem origem na atribuição de relações de causa-efeito, em que as causas precedem os efeitos, o que deixa de ser válido em probabilidades. Este resultado aponta na direção dos que foram obtidos por Contreras (2011) e Contreras, Batanero, Díaz e Arteaga (2013), em que apenas aproximadamente 25% dos futuros professores apresentou a resposta correta num item de estrutura similar ao proposto no nosso trabalho.

No caso da probabilidade conjunta, verifica-se um desempenho dos alunos ligeiramente melhor nos itens 1b) e 2c) do que nos itens 1d) e 2d). Também neste caso, muito provavelmente, as maiores dificuldades dos alunos estão relacionadas com o fato de que no cálculo da probabilidade destes acontecimentos compostos é necessário reconhecer que a ordem das configurações conduz a possibilidades distintas, o que não é relevante nos outros dois itens. Finalmente, ainda na probabilidade conjunta, verifica-se um melhor desempenho dos alunos nos itens 1b) e 2c), relativamente aos itens 1d) e 2d), o que reafirma o melhor desempenho dos alunos em situações de reposição, que foi também verificado no caso da probabilidade condicionada.

Conclusões e implicações

Em geral, nas três tarefas propostas aos futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade, conclui-se que, excetuando o caso da probabilidade simples, eles revelaram um desempenho bastante limitado: 60% nos itens de definição de acontecimentos certos; 72% nos itens de probabilidade simples; 56% nos itens de probabilidade condicionada; e 26% nos itens de probabilidade conjunta.

As menores dificuldades experimentadas pelos futuros educadores e professores nos itens de probabilidade simples e de definição de acontecimentos certos foi também observada por Fernandes (1999) em alunos do 8.º e 11.º ano. Quando comparada com a probabilidade condicionada e conjunta, o melhor desempenho dos alunos na probabilidade simples pode explicar-se por se tratar de uma determinação menos complexa do que a daquelas, uma vez que nas primeiras estão envolvidos mais conceitos. Ainda segundo o mesmo autor, as maiores dificuldades nos acontecimentos certos decorre do fato de que estes acontecimentos têm de se verificar em todos os casos do universo amostral, diferentemente dos acontecimentos possíveis (mas não certos) nos quais não é necessário uma análise exaustiva de todos os casos.

Entre a probabilidade condicionada e a probabilidade conjunta, a maior dificuldade nesta última foi também observada em alunos do 9.º ano por Fernandes, Correia e Contreras (2013). Para estes autores, isso poderá dever-se ao fato de a probabilidade conjunta poder ser considerado um conceito mais elaborado do que o conceito de probabilidade condicionada, quando se trabalha no contexto de amostragem com ou sem reposição, tal como foram aqui explorados, enquanto pode ser mais similar quando, como nos estudos citados anteriormente, se calcula diretamente da leitura de uma tabela de dupla entrada. Já entre os dois contextos em que a probabilidade condicionada e a probabilidade conjunta foram exploradas no nosso trabalho, o contexto de extração de bolas de um saco e de seleção de pessoas de um grupo, não se observaram grandes discrepâncias do sucesso dos alunos.

Segundo Polaki (2005), as dificuldades dos alunos em estabelecer o espaço amostral de experiências compostas têm origem na exigência de integração de mais do que um aspecto da situação numa estrutura significativa. Por exemplo, no caso da experiência de lançamento de duas moedas, o aluno terá de coordenar simultaneamente a contagem e a ordem dos elementos de dois conjuntos, integrando-os para obter o espaço amostral da experiência composta.

Para além dos aspectos antes referidos, o desempenho dos alunos na probabilidade condicionada deve ser visto com precaução, pois os itens estavam formulados de forma explícita, isto é, estavam formulados em contexto escolar, em que é explícita a aplicação da probabilidade condicionada. Todavia, Fernandes, Martinho e Viseu (2015) verificaram que futuros educadores e professores dos primeiros anos sentiram muitas dificuldades em itens de probabilidade condicionada formulados em contexto social (e.g., "Que uma mulher seja professora", no universo dos portugueses), em que é implícita a aplicação da probabilidade condicionada. Apesar das dificuldades reveladas pelos alunos nos itens de formulação implícita, este tipo de itens devem ser explorados pelos alunos, e, portanto, também na formação dos professores, uma vez que eles se constituem como uma componente formativa importante ao promoverem a literacia probabilística (WATSON; MORITZ, 2003).

No caso da probabilidade condicionada e conjunta, concretamente no âmbito didático, algumas dificuldades reveladas pelos alunos no presente estudo podem ser enfrentadas a partir de estratégias adequadas. Por exemplo, na perspetiva de Watson e Moritz (2002), os alunos devem ser encorajados a interpretar corretamente o significado das operações lógicas envolvidas nos acontecimentos compostos, o que certamente ajudará os alunos no reconhecimento do acontecimento conjunção, distinguindo-o dos acontecimentos disjunção e condicional.

O desempenho dos futuros educadores e professores dos primeiros anos, tal como foi observado no presente estudo, recomenda que a sua formação ao nível do conhecimento do conteúdo de Probabilidades seja aprofundado ao longo da sua formação acadêmica, para poderem dar respostas às exigências do ensino desta temática, sem descurar a importância do seu estudo em contextos sociais e não meramente escolares.

Agradecimento

Este trabalho contou com o apoio de Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projecto PEst-OE/CED/UI1661/2014 do CIEd-UM e do Proyecto EDU2013-41141-P (MEC).

Referências bibliográficas

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BATANERO, C. La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación? In: FERNANDES, J. A.; VISEU F.; MARTINHO, M. H.; CORREIA, P. F. (Orgs.). *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola.* Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho, 2013, p. 9-21.

BATANERO, C.; GÓMEZ-TORRES, E.; CONTRERAS, J. M.; DÍAZ, C. Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: Un estudio exploratorio. *Praxis Educativa*, v. 10, n. 1, p. 11-34, 2015.

BOROVCNIK, M.; PEARD, R. Probability. In: BISHOP A. J. ET AL. (Eds.). *International handbook of mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996, p. 239-287.

CANAVARRO, A. P. *Práticas de ensino da Matemática: Duas professoras, dois currículos*. Tese de Doutoramento em Educação, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2003.

CONTRERAS, J. M. *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España, 2011.

CONTRERAS, J. M.; BATANERO, C.; DÍAZ, C.; ARTEAGA, P. Evaluación de la falacia del eje temporal en futuros profesores de educación secundaria. *Acta Scientiae*, v. 14, n. 3, p. 346–362, 2013.

CONTRERAS, J. M.; ESTRADA, A.; DÍAZ, C.; BATANERO, C. Dificultades de futuros profesores en la lectura y cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada. In: *Investigación en Educación Matemática XIV*. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), 2010, p. 271–280.

ESTRADA, A.; DÍAZ, C. Computing probabilities from two way tables: an exploratory study with future teachers. In: ROSSMAN, A.; CHANCE, B. (Eds.). *Proceedings of Seventh International Conference on Teaching of Statistics*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education, 2006.

FALK, R. Conditional probabilities: Insights and difficulties. In DAVIDSON, R.; SWIFT, J. (Eds.). *Proceedings of Second International Conference on Teaching Statistic*. Victoria, BC: University of Victoria, 1986, p. 292-297.

FERNANDES, J. A. *Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º ano de escolaridade*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga, Portugal, 1999.

FERNANDES, J. A.; BARROS, P. M. Dificuldades de futuros professores do 1.º e 2.º ciclos em estocástica. In: *Actas do V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática (CIBEM)*, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2005.

FERNANDES, J. A.; BATANERO, C.; CORREIA, P. F.; GEA, M. M. Desempenho em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta de futuros professores do ensino básico. *Quadrante*, v. XXIII, n. 1, p. 43-61, 2014.

FERNANDES, J. A.; CORREIA, P. F.; CONTRERAS, J. M. Ideias intuitivas de alunos do 9º ano em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, n. 4, p. 5-26, 2013.

FERNANDES, J. A.; MARTINHO, M. H.; VISEU, F. Avaliação de probabilidades condicionadas em contextos sociais. In: CONTRERAS, J. M.; BATANERO, C.; GODINO, J. D.; CAÑADAS, G. R.; ARTEAGA, P.; MOLINA, E.; GEA, M.M.; LÓPEZ, M. M. (Eds.). *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2.* Granada, 2015, p. 153-161.

FISCHBEIN, E. *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1975.

FISCHBEIN, E.; GAZIT, A. Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, v. 15, n. 1, p. 1-24, 1984.

KAHAN, J.; COOPER, D.; BETHEA, K. The role of mathematics teachers' content knowledge in their teaching: a framework for research applied to a study of student teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 6, n. 3, p. 223-252, 2003.

KILPATRICK, J.; SWAFFORD, J.; FINDELL, B. (Eds.). *Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, D. C.: National Academy Press, 2001.

PORTUGAL. *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Autor, 2007.

ORTIZ, J. J.; MOHAMEND, N. Conocimiento de futuros profesores sobre espacio muestral. *Quadrante*, v. XXIII, n. 2, p. 5-22, 2014.

OSANA, H.; LACROIX, G.; TUCKER, B. J.; DESROSIERS, C. The role of content knowledge and problem features on preservice teachers' appraisal of elementary tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 9, n. 4, p. 347-380, 2006.

POLAKI, M. V. Dealing with compound events. In: JONES, G. A. (Ed.). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. New York, NY: Springer, 2005, p. 191–214.

PONTE, J. P. Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In: PLANAS, N. (Coord.). *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. Barcelona, España: Graó, 2012, p. 83-98.

SANTOS, L.; PONTE, J. P. A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: Um estudo com três professoras do ensino secundário. *Quadrante,* v. XI, n. 2, p. 29-54, 2002.

SHULMAN, L. Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v. 15, n. 2, p. 3-14, 1986.

WATSON, J. M.; MORITZ, J. B. School students' reasoning about conjunction and conditional events. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* v. 33, n. 1, p. 59-84, 2002.

WATSON, J. M.; MORITZ, J. B. The development of comprehension of chance language: Evaluation and interpretation. *School Science and Mathematics*, v. 103, n. 2, p. 65-80, 2003.