

Comparação de probabilidades de acontecimentos formulados de forma explícita e implícita

Comparison of probabilities of events posed by explicit and implicit form

José António Fernandes
jfernandes@ie.uminho.pt

Carmen Batanero
batanero@ugr.es

Paulo Ferreira Correia
ferreiracorreiapaulo@gmail.com

M. Magdalena Gea
mmgea@ugr.es

Resumo

Neste artigo estuda-se a realização de alunos futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade na comparação de probabilidades de acontecimentos em diferentes contextos sociais, formulados de forma explícita e implícita, tendo em vista averiguar a influência do nível de explicitação na comparação de probabilidades. Participaram no estudo 51 alunos futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade, que responderam a um questionário contendo duas questões, com vários itens envolvendo a comparação de probabilidades de acontecimentos formulados explícita e implicitamente. Em termos de resultados, globalmente, verificou-se que os itens formulados implicitamente se revelaram mais difíceis para os alunos do que os itens formulados explicitamente.

Palavras-chave: Comparação de probabilidades. Acontecimentos explícitos e implícitos. Futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade.

Abstract

In this paper the responses by prospective educators and teachers of early years of schooling is studied when comparing probabilities of events posed by explicit and implicit form, in order to determine the influence of the level of explicitness in the comparison of probabilities. Fifty-one prospective educators and teachers of the first years of education participated in this study, and answered a questionnaire containing two questions with many items that involved the comparison of probabilities of events posed explicitly and implicitly. Results suggested that, globally, the items formulated in the implicit form were more difficult for the students than those formulated in explicit form.

Keywords: Comparison of probabilities. Explicit and implicit events. Prospective educators and teachers of the first years of schooling.

1. Introdução

Cada vez mais a visão probabilística do mundo se tem tornado mais proeminente nos tempos atuais, recorrendo-se à aplicação dos métodos probabilísticos para a resolução de problemas dos mais variados setores da sociedade, incluindo outras ciências e as suas aplicações. Borovcnik e Kapadia (2010) salientam a importância das probabilidades em situações variadas, como na tomada de decisões, em testes médicos, veredictos de júris, investimentos, na compreensão de qualquer procedimento inferencial de Estatística, como ferramenta para modelar realidades e enquanto assunto interessante merecedor de estudo por si mesmo.

Fischbein (1975) atribui mesmo à visão determinista do mundo, que tem sido largamente dominante na escola, desde a época do Renascimento, a origem das dificuldades que as pessoas enfrentam em probabilidades. Assim, para contrabalançar tal visão determinista, advoga-se que as crianças, desde o início da sua escolarização, sejam confrontadas com situações probabilísticas (BATANERO, 2013), o que contribuirá, certamente, para a não consolidação de ideias intuitivas erradas.

Ora, ao longo das duas últimas décadas, o ensino da estatística e das probabilidades tem sido incluído nos programas escolares de matemática de muitos países desde os primeiros anos de escolaridade, o que também se verifica em Portugal (PORTUGAL, 2013).

Já no final da década de 1980, nos Estados Unidos de América, se preconizava que os alunos do 9.º ao 12.º ano deveriam aprofundar e ampliar as suas experiências probabilísticas experienciadas em anos anteriores, explorando conceitos de probabilidades “tais como acontecimentos dependentes e independentes e a sua relação com acontecimentos compostos e probabilidade condicional” (NCTM, 1991, p. 205).

Em Portugal, no início da década de 1990 o tema de Probabilidades passou a fazer parte do currículo de Matemática do ensino básico (do 1.º ao 9.º ano), integrando vocabulário probabilístico no 6.º ano e os conceitos frequentista e clássico de probabilidade no 9.º ano. No ensino secundário aprofundava-se o estudo das situações de probabilidade estudadas através do recurso a técnicas de contagem (arranjos, permutações e combinações), introduziam-se as distribuições binomial e normal e os conceitos de probabilidade condicionada e independência. Nas reformulações dos programas escolares, que entretanto se verificaram, não foram introduzidas alterações significativas neste tema.

Ora, essas novas orientações curriculares requerem que os futuros professores e professores em exercício, incluindo os dos primeiros anos de escolaridade, tenham uma adequada formação nesta área.

Com base numa ampla revisão de literatura sobre a compreensão de conceitos probabilísticos, focada em alunos do 6.º ao 9.º ano, Watson (2005) concluiu que, geralmente, os alunos são capazes de apreciar a incerteza e o propósito das tarefas que lhes são propostas, enquanto raciocínios sofisticados envolvendo raciocínio proporcional, independência e espaços amostrais complexos são difíceis para a maioria destes alunos. Contudo, mesmo neste último caso, a autora conjectura que a situação pode melhorar com a introdução, em muitos países, do ensino de probabilidades no currículo de matemática deste nível de ensino, o que não acontecia aquando das investigações analisadas no seu estudo.

2. Investigação prévia

Na opinião de Watson (2005), tradicionalmente, o currículo escolar sugere o ensino de probabilidades numa vertente de matemática pura, com situações circunscritas a espaços amostrais finitos em que é possível listar, contar e comparar resultados de forma explícita. Reconhecendo a importância desta abordagem, a autora advoga também a exploração de situações inseridas em contextos sociais, em que os espaços amostrais são de natureza mais difusa, não explicitamente referidos, não envolvendo necessariamente números e onde estão presentes questões de linguagem e interpretação probabilística.

A exploração de situações que surgem em contextos públicos, incluindo os meios de comunicação social, teve origem em estudos conduzidos por psicólogos, em que se destacam os trabalhos de Tversky e Kahneman, com estudantes universitários, envolvendo o uso de *heurísticas* (1982a), a adesão a *raciocínios causais* (1982b) e à *falácia da conjunção* (1983) na avaliação de probabilidades. No caso da falácia da conjunção, Tversky e Kahneman (1983) observaram que os sujeitos tendem a considerar a conjunção de dois acontecimentos como sendo mais provável do que qualquer um desses acontecimentos, violando, assim, a lei da extensão que estabelece que $P(A \cap B) \leq P(A)$ e $P(A \cap B) \leq P(B)$.

O fenómeno da falácia da conjunção, em que os sujeitos avaliam a probabilidade da conjunção como sendo superior à probabilidade de um dos acontecimentos seus constituintes, verifica-se, sobretudo, quando um dos acontecimentos é altamente representativo do outro, como é o caso do acontecimento: “Um ser humano nasceu em África” é altamente

representativo do acontecimento “Um ser humano é de cor negra”. Nesta situação, Fernandes (1990) verificou que a maioria dos alunos do 11.º ano (sem ensino de probabilidades) e futuros professores de matemática que participaram no estudo afirmaram ser mais provável o acontecimento “Um ser humano é de cor negra e nasceu em África” do que o acontecimento “Um ser humano é de cor negra”, violando assim a lei da extensão.

Mais tarde, esta abordagem às probabilidades foi também estudada com alunos do 3.º ciclo do ensino básico e secundário, verificando-se que, em geral, as intuições a que os alunos universitários recorriam nas suas resoluções também eram exibidas pelos alunos mais novos, tal como constataram Fischbein e Schnarch (1997).

No presente estudo referimo-nos à probabilidade condicionada como restrição do espaço amostral, em que a probabilidade condicionada consiste na proporção do subconjunto implicado em relação ao conjunto total (WATSON; MORITZ, 2002). Assim, a probabilidade condicionada de um acontecimento A dado que ocorreu o acontecimento B , que se representa por $P(A|B)$, é a probabilidade de A considerando apenas os resultados possíveis da experiência aleatória que são elementos de B . Adicionalmente, Tarr e Lannin (2005) defendem que a verificação da igualdade entre $P(A|B)$ e $P(A)$ é a forma mais intuitiva de estudar a independência dos acontecimentos A e B .

Em geral, a investigação realizada mostra que os alunos sentem muitas dificuldades quando lhes é requerida a determinação de probabilidades condicionadas e de probabilidades de acontecimentos compostos (e.g., FERNANDES, 1999; POLAKI, 2005; WATSON; MORITZ, 2002).

Para Watson (1995) introduzir mais cedo a probabilidade condicionada no currículo do 3.º ciclo e secundário é útil para desenvolver o uso de linguagem e para interpretar situações condicionadas com origem exterior à matemática.

Watson e Moritz (2002), num estudo envolvendo tarefas em contextos sociais e alunos de escolas do ensino primário, secundário e recém-matriculados na universidade, sugerem que as questões lógicas e de linguagem associadas à conjunção de acontecimentos, formulados em contextos sociais, são difíceis para os alunos do 3.º ciclo do ensino básico, antecipando dificuldades dos alunos quando é requerida a transferência do que aprenderam em pequenos espaços amostrais para contextos sociais mais complexos.

Ainda Watson e Moritz (2003), num outro estudo, que decorreu ao longo de vários anos, investigaram a compreensão da linguagem do acaso de alunos do 5.º ao 11.º ano, recorrendo, para tal, a duas tarefas: uma relativa à avaliação e localização na escala $[0, 1]$ das chances de realização de vários acontecimentos e outra sobre a interpretação de um enunciado envolvendo um valor de probabilidade em percentagem. Em ambas as tarefas verificou-se um aumento de respostas adequadas com o ano de escolaridade, variando entre 46% (6.º ano) e 20% (10.º ano) a percentagem de alunos que avaliaram de forma limitada ou não avaliaram as afirmações da primeira tarefa, e entre 44% (5.º ano) e 0% (11.º ano) a percentagem de alunos que interpretaram de forma vaga ou inapropriada a segunda tarefa.

Num estudo conduzido por Fernandes, Batanero, Correia e Gea (2014), envolvendo alunos do mesmo curso e do mesmo ano daqueles que participaram no presente estudo, constatou-se que os participantes revelaram um melhor desempenho nos itens de probabilidade condicionada do que nos itens de probabilidade conjunta, sendo a média de respostas corretas no primeiro caso de 56% e, no segundo caso, de 26%. Estes resultados, obtidos através de itens formulados no contexto de extração de bolas de um saco e de seleção de pessoas de um grupo, são confirmados nos estudos Contreras (2011) e de Estrada e Díaz (2006), em que os dados eram fornecidos numa tabela de contingência. Segundo Fernandes et al. (2014),

a maior dificuldade dos participantes na probabilidade conjunta no nosso estudo pode explicar-se por se tratar de um conceito mais elaborado, na medida em que a probabilidade condicionada, tal como foi abordada aqui, a partir da restrição do espaço amostral, pode ser determinada sem requerer a combinação das probabilidades dos acontecimentos e/ou questões de ordem, ao contrário do que acontece na determinação da probabilidade conjunta. (p. 50)

Pollatsek, Well, Konold e Hardiman (1987) verificaram que os alunos confundem os significados das probabilidades condicional e conjunta, isto é, $P(A|B)$ com $P(A \cap B)$, confusão que se tornou particularmente evidente aquando da interpretação de enunciados de problemas que implicavam a identificação destas probabilidades. Esta dificuldade também foi observada em futuros professores do ensino primário (Estrada & Díaz, 2006) e em alunos do 9.º ano de escolaridade (CORREIA; FERNANDES; CONTRERAS, 2011) na resolução de uma tarefa envolvendo frequências de dois acontecimentos numa tabela de dupla entrada.

Falk (1986) verificou que muitos alunos aderem à *falácia da inversão do eixo temporal*, afirmando uma visão determinista, em que a probabilidade de algo que ocorre depois não pode afetar algo que ocorreu antes, e não discriminam entre uma probabilidade condicionada e a sua transposta, isto é, entre as duas probabilidades $P(A|B)$ e $P(B|A)$, erro designado

por *falácia da condicional transposta*. No estudo de Correia et al. (2011) verificou-se que alguns alunos do 9.º ano também cometeram este erro.

No caso da falácia da inversão do eixo temporal, no estudo já antes referido, Fernandes et al. (2014) verificaram que os alunos sentiram muitas dificuldades (apenas dois alunos responderam corretamente), assumindo que um acontecimento que ocorre depois não pode afetar um acontecimento que ocorre antes.

Também no estudo de Díaz e Batanero (2009), em que participaram estudantes universitários de Psicologia, verificou-se que eles exibiram, com elevada incidência, vários enviesamentos de raciocínio sobre probabilidade condicional, dos quais se salientam a falácia da condicional transposta, a falácia da inversão do eixo temporal, a falácia da conjunção e a confusão entre acontecimentos independentes e mutuamente exclusivos.

Relativamente à probabilidade conjunta, Polaki (2005) concluiu no seu estudo que os alunos apresentam muitas dificuldades no estabelecimento do espaço amostral de experiências compostas, apresentando conjuntos de resultados incompletos com base em raciocínios subjetivos ou estratégias de tentativa-e-erro. Ora, estas dificuldades repercutem-se na determinação de probabilidades e, segundo este autor, mesmo alguns alunos que foram sucedidos na definição do espaço amostral cometeram muitos erros na predição de probabilidades. Face a estas dificuldades, recomenda-se o uso da regra do cardinal do produto cartesiano como forma de confirmação de que o espaço amostral está realmente completo.

Watson e Moritz (2002) acrescentam às dificuldades antes referidas que os alunos quando confrontados com a determinação de uma probabilidade conjunta, para além de a confundirem com a probabilidade da união, simplesmente adicionam as probabilidades dos acontecimentos que a constituem ou determinam a sua média. No estudo que realizaram, estes autores verificaram que o aumento de nível escolar e de compreensão de conceitos básicos de probabilidade esteve associado ao aumento de respostas corretas, mas não esteve associado à diminuição da incidência da falácia da conjunção.

Também no estudo de Fernandes (2001), em que foram incluídos vários itens de probabilidade em experiências compostas, se verificou que alunos do 8.º e 11.º ano (sem ensino de probabilidades) revelaram muitas dificuldades, as quais se deveram ao recurso a probabilidades das experiências simples implicadas na experiência composta, a uma descrição incompleta do espaço amostral, a fatores causais e ao *enviesamento de equiprobabilidade*.

Neste último caso, os alunos avaliam os acontecimentos de caráter aleatório como sendo equiprováveis (LECOUTRE; DURAND, 1988).

2. Metodologia

A presente investigação centra-se no estudo da avaliação da probabilidade de acontecimentos por alunos futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade, formulados de forma explícita e implícita e envolvendo a probabilidade da conjunção e da reunião e a probabilidade condicionada.

Participaram no estudo 51 alunos que se encontravam a frequentar a unidade curricular de Números de Probabilidades, que se integrava no 2.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica de uma universidade do norte de Portugal. A conclusão do 3.º ano do curso, que confere o grau de Licenciatura, dá acesso a cursos de mestrado em Educação Pré-Escolar, em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e em Ensino do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico, portanto cursos de formação de educadores e/ou professores dos primeiros anos de escolaridade. Tal como é habitual neste curso, a maioria dos alunos é do sexo feminino, sendo que neste caso eram todos do sexo feminino.

À entrada na universidade, a formação matemática dos alunos era muito variada, tendo estudado pela última vez matemática em cursos muito distintos, de que se salientam: Matemática A (41,2%), disciplina do ensino secundário dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas; Matemática Aplicada às Ciências Sociais (33,3%), disciplina do ensino secundário dos Cursos de Científico-Humanístico de Ciências Sociais e Humanas e Tecnológico de Ordenamento do Território e Ambiente; e Matemática do 9.º ano do ensino básico (15,7%). Em geral, os alunos percecionaram dificuldades na aprendizagem das disciplinas do âmbito da matemática na universidade, afirmando a maioria ter muita dificuldade (27,5%) ou ter dificuldade (43,1%), enquanto muito menos afirmaram ter pouca dificuldade (29,4%).

Os alunos foram inquiridos através de um questionário constituído por quatro questões, das quais duas são tratadas neste texto. Estas questões sobre probabilidade de acontecimentos, formulados de forma explícita e implícita, em que era pedido aos alunos para identificarem o acontecimento mais provável de entre dois ou três acontecimentos, ou afirmarem a sua equiprobabilidade. Dessas duas questões, a questão 1 é constituída por três itens formulados na forma explícita (forma habitual em contexto escolar) e a questão 2 é constituída por dois

itens formulados na forma implícita (forma não habitual em contexto escolar), requerendo dos alunos o reconhecimento de problemas de probabilidade condicionada e a identificação dos respectivos acontecimentos condicionante e condicionado. Ambas as questões e os respectivos itens serão apresentados na próxima secção, onde são apresentados os resultados do estudo.

Os alunos responderam ao questionário numa aula da unidade curricular Números e Probabilidades, antes referida, e integrava-se na avaliação formal das aprendizagens dos alunos nessa unidade curricular.

Por último, em termos de análise de dados, nos cinco itens das questões 1 e 2, aqui analisadas, estudaram-se as escolhas dos alunos segundo as opções de resposta e as justificações por eles apresentadas para a seleção das respetivas opções. Em ambos os casos determinaram-se percentagens das respostas e dos tipos de justificações, sintetizadas em tabelas de frequências no primeiro caso. Tendo por referência cada uma das opções de resposta de cada item, as justificações foram agrupadas em categorias definidas *a posteriori* com base nas ideias subjacentes e na literatura revista e são especificadas na próxima secção.

3. Apresentação de resultados

Nesta secção apresentam-se as respostas e as justificações dadas pelos alunos para a seleção dessas respostas, segundo cada uma das duas questões aqui analisadas.

3.1. Itens de formulação explícita

Nesta questão incluem-se três itens (Figura 1): um primeiro envolvendo a probabilidade conjunta (item 1.1); um segundo envolvendo a probabilidade da reunião (item 1.2) e um terceiro envolvendo a probabilidade condicionada (item 1.3). Em qualquer dos itens requer-se que o aluno compare probabilidades de acontecimentos e que identifique o acontecimento mais provável ou a equiprobabilidade dos acontecimentos. Por outro lado, em todos estes itens não são apresentados valores numéricos, tendo o aluno de efetuar avaliações globais acerca da cardinalidade dos conjuntos envolvidos para comparar as respetivas probabilidades, o que implica que os alunos possuam conhecimentos acerca dos contextos dos itens.

A formulação explícita destes acontecimentos resulta dos conectivos “e” e “ou”, no caso da probabilidade conjunta e da reunião, e da expressão “sabendo que”, no caso da probabilidade condicionada. Ora, como é habitual em contexto escolar, tal formulação facilita a identificação das probabilidades estabelecidas nesses enunciados.

Figura 1: Itens formulados na questão 1.

- 1.** Considerando o universo dos **seres humanos**, em cada alínea seguinte, alguma das afirmações é mais provável? Assinala a tua resposta com X e justifica-a.
- 1.1.** **a)** Um ser humano é de cor negra.
 b) Um ser humano é de cor negra e nasceu em África.
 c) Ambos os acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.
Justifica a resposta.
- 1.2.** **a)** Um ser humano nasceu em África.
 b) Um ser humano é de cor negra.
 c) Um ser humano é de cor negra ou nasceu em África.
Justifica a resposta.
- 1.3.** **a)** Um ser humano nasceu em África.
 b) Um ser humano é de cor negra.
 c) Um ser humano é de cor negra, sabendo que nasceu em África.
Justifica a resposta.

Considerando os acontecimentos A : *Um ser humano nasceu em África* e N : *Um ser humano é de cor negra*, no item 1.1 comparam-se as probabilidades $P(N)$ e $P(N \cap A)$, sendo mais provável $P(N)$ porque o número de seres humanos de cor negra é superior ao número de seres humanos de cor negra que nasceram em África, pois existem seres humanos de cor negra que nasceram fora de África. No item 1.2 comparam-se as probabilidades $P(A)$, $P(N)$ e $P(N \cup A)$, sendo $P(N \cup A)$ mais provável: $P(N \cup A)$ é mais provável do que $P(N)$ porque o número de seres humanos de cor negra ou que nasceram em África é superior ao número de seres humanos de cor negra, pois existem seres humanos que nasceram em África que não são de cor negra; $P(N \cup A)$ é mais provável do que $P(A)$ porque existem seres humanos de cor negra que não nasceram em África. Finalmente, no item 1.3 comparam-se as probabilidades $P(A)$, $P(N)$ e $P(N|A)$, sendo mais provável $P(N|A)$: $P(N|A)$ é mais provável do que $P(N)$ porque a proporção de seres humanos de cor negra que nasceram em África é superior à proporção de seres humanos de cor negra (que nasceram em qualquer parte do mundo); $P(N|A)$ é mais provável do que $P(A)$ porque também a proporção de seres humanos de cor negra que nasceram em África é superior à proporção de seres humanos que nasceram em África.

Na Tabela 1 apresentam-se as frequências (percentagens) de alunos segundo cada uma das três opções de resposta de cada item.

Tabela 1: Frequências (percentagens) nas diferentes opções de resposta dos itens da questão 1

Item	Frequência (%) por opção de resposta			
	a)	b)	c)	NR
1.1	36 (70,6)*	11 (21,6)	4 (7,8)	—
1.2	2 (3,9)	3 (5,9)	46 (90,2)*	—
1.3	1 (2,0)	22 (43,1)	38 (54,9)*	—

Nota: A opção assinalada com o asterisco (*) é a correta; NR — Não Respostas.

Em todos os itens, a maioria dos alunos respondeu corretamente, salientando-se a maior percentagem no item da reunião (90,2%), seguindo-se o item de probabilidade conjunta (70,6%) e a menor percentagem no item de probabilidade condicionada (54,9%).

No caso do item de probabilidade conjunta (item 1.1), a justificação da resposta correta (opção a) a partir da identificação da lei da extensão, que afirma que a probabilidade da interseção é menor (ou igual) que a probabilidade de qualquer dos acontecimentos que a constituem, foi adotada pela maioria dos alunos (33), como se exemplifica na justificação da Figura 2.

Figura 2: Justificação apresentada pelo aluno A₁₂ no item 1.1, opção a).

Há seres humanos de cor negra em todo o mundo, sem ter nascido em África. Fora além disso, um ser humano de cor negra pode ter nascido em África. Assim o acontecimento "um ser humano é de cor negra e nasceu em África" pode estar contido no acontecimento "um ser humano de cor negra".

Já no caso das respostas erradas, na opção b), os alunos (11) aderiram à falácia da conjunção, avaliando como sendo mais provável a conjunção do que o acontecimento “ter nascido em África” pelo facto de este acontecimento ser altamente representativo do acontecimento “ser de cor negra” (Figura 3).

Figura 3: Justificação apresentada pelo aluno A₃₁ no item 1.1, opção b).

É mais provável que um ser humano seja negro se tiver nascido em África do que se tiver nascido noutro continente, pois em África existe muito mais negros que em outra zona do mundo.

Já na opção c), poucos alunos (3) parecem ter sido influenciados pelo enviesamento de equiprobabilidade, que se traduz em classificar os acontecimentos em equiprováveis pelo facto de serem aleatórios (Figura 4).

Figura 4: Justificação apresentada pelo aluno A₃₇ no item 1.1, opção c).

São igualmente prováveis pois no universo dos seres humanos existem diferentes raças sendo uma delas a raça negra, a qual predomina no continente Africano.

Por fim, nas opções a) e c), alguns alunos apresentaram justificações irrelevantes (3) ou simplesmente repetiram parte do enunciado (1) para justificarem diferentes opções de resposta.

No item de soma de probabilidades (item 1.2), a justificação da resposta correta (opção c), quase sempre, incorporou a alusão à reunião de acontecimentos (36), como se exemplifica na Figura 5.

Figura 5: Justificação apresentada pelo aluno A₁₀ no item 1.2, opção c).

ser humano ou nascer em África abrange as duas condições, logo a probabilidade engloba tanto nascer em África com ser de cor negra, por tanto é maior.

No caso da opção b), poucos alunos (3) centraram-se apenas no acontecimento “ser de cor negra”, afirmando a sua maior probabilidade pelo facto de existirem pessoas de cor negra fora de África (Figura 6).

Figura 6: Justificação apresentada pelo aluno A₃₃ no item 1.2, opção b).

É mais provável ser de cor negra, pois há muitos seres humanos de cor negra pelo mundo, para além dos africanos.

Finalmente, no caso das opções a) e c), alguns alunos apresentaram justificações irrelevantes (8), repetiram parte do enunciado (2) ou não justificaram a sua resposta (2).

Finalmente, no item de probabilidade condicionada (item 1.3), a maioria dos alunos (18) que respondeu corretamente justificou a sua resposta aludindo à restrição do espaço amostral (Figura 7), havendo ainda dois alunos em cuja justificação se alude à condicional transposta (Figura 8).

Figura 7: Justificação apresentada pelo aluno A₂₇ no item 1.3, opção c).

Justifica a resposta: Pois, a maior parte da população que nasceu em África é de cor negra. E este conjunto é menor que o universo dos seres humanos.

Figura 8: Justificação apresentada pelo aluno A₂₆ no item 1.3, opção c).

Porque dentro do universo dos seres humanos existe uma maior probabilidade de este ter nascido em África, do que não ter nascido.

No caso da opção a), ela foi selecionada por apenas um aluno, que não identificou corretamente o espaço amostral. Já na opção b), selecionada por bastantes alunos (22), eles não atenderam à restrição do espaço amostral, que torna a opção c) como sendo a mais provável (Figura 9).

Figura 9: Justificação apresentada pelo aluno A₅ no item 1.3, opção b).

Justifica a resposta:
O acontecimento "um ser humano é de cor negra" é mais provável pois engloba todos os seres humanos negros do universo e não apenas os que nasceram em África.

Por último, na opção c), alguns alunos apresentaram justificações irrelevantes (3) ou não justificaram a sua resposta (5).

3.2. Itens de formulação implícita

Os dois itens incluídos nesta questão (Figura 10) envolvem a comparação de probabilidades condicionadas (item 2.1) e a comparação de uma probabilidade condicionada com uma probabilidade conjunta (item 2.2). Tal como nos itens da questão 1, também neste caso não são fornecidos quaisquer valores numéricos, requerendo-se que o aluno faça avaliações globais da cardinalidade dos conjuntos envolvidos, implicando igualmente que os alunos possuem conhecimentos acerca dos contextos dos itens.

Ambos os itens, aqui propostos, têm opções de resposta envolvendo probabilidades condicionadas (duas no item 2.1 e uma no item 2.2) formuladas numa forma não habitual em contexto escolar. Nestes enunciados não é explícito o acontecimento condicionante nem o acontecimento condicionado, tal como acontece no caso da opção c) do item 1.3, donde terá de ser o respondente a identificá-los.

Figura 10: Itens formulados na questão 2.

2. Considerando o universo dos **portugueses**, em cada alínea seguinte, alguma das afirmações é mais provável? Assinala a tua resposta com X e justifica-a.
- 2.1. a) Que uma mulher seja professora.
 b) Que um professor seja mulher.
 c) Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.
 Justifica a resposta.
- 2.2. a) Que um homem pratique futebol.
 b) Que uma pessoa pratique futebol e seja homem.
 c) Os dois acontecimentos anteriores são igualmente prováveis.
 Justifica a resposta.

No item 2.1, considerando os acontecimentos M : *Ser mulher* e P : *Ser professor*, comparam-se as probabilidades $P(P|M)$ e $P(M|P)$, sendo mais provável $P(M|P)$ porque a proporção de mulheres no universo dos professores é superior à proporção de professores no universo das mulheres pois, no primeiro caso, a percentagem de mulheres que são professores é largamente maioritária e, no segundo caso, é minoritária uma vez que a maior parte das mulheres têm outras profissões diferentes de professor.

No item 2.2, considerando os acontecimentos F : *Praticar futebol* e H : *Ser homem*, comparam-se as probabilidades $P(F|H)$ e $P(F \cap H)$, sendo mais provável $P(F|H)$ porque neste caso o universo é o conjunto dos homens portugueses e em $P(F \cap H)$ o universo é o conjunto dos portugueses, portanto mais vasto do que aquele.

Pela Tabela 2 podemos verificar que a maioria dos alunos selecionou a resposta correta no item 2.1 (56,9%), enquanto muito menos o fizeram no item 2.2 (13,7%).

Tabela 2: Frequências (percentagens) nas diferentes opções de resposta dos itens da questão 2

Item	Frequência (%)			
	a)	b)	c)	NR
2.1	12 (23,5)	29 (56,9)*	9 (17,6)	1 (2,0)
2.2	7 (13,7)*	10 (19,6)	33 (64,7)	1 (2,0)

Nota: A opção assinalada com o asterisco (*) é a correta; NR — Não Respostas.

Em termos de justificações, no item 2.1, à exceção de um, todos os alunos que selecionaram a resposta correta (28) referem-se, explicitamente ou implicitamente, às restrições dos espaços amostrais implicados (Figura 11).

Figura 11: Justificação apresentada pelo aluno A₄ no item 2.1, opção b).

Justifica a resposta:

O segundo acontecimento é ^{o mais} provável pois a maior parte dos professores são mulheres e não a maioria das mulheres são professoras.

Na seleção da opção a) destaca-se que alguns alunos (7) avaliaram a probabilidade da condicional transposta, e não da condicional estabelecida (Figura 12).

Figura 12: Justificação apresentada pelo aluno A₃₅ no item 2.1, opção a).

Uma vez que, existem mais mulheres do que professores, logo há mais probabilidade de entre as mulheres, uma seja professora, do que entre os professores um seja mulher.

Já na opção c), alguns alunos (7) identificam as duas primeiras afirmações como definindo o mesmo acontecimento e, destes, alguns baseiam essa identidade na confusão da conjunção com condicional (Figura 13).

Figura 13: Justificação apresentada pelo aluno A₃₃ no item 2.1, opção c).

Justifica a resposta:

A probabilidade de ser mulher e professora e um professor seja mulher ~~é~~ ^é exatamente a mesma, visto que são ambos iguais, ou seja, são ambos mulheres e professoras, ao mesmo tempo. Assim, são igualmente prováveis.

Ainda nesta opção, dois alunos não distinguem entre probabilidade condicional e probabilidade condicional transposta (Figura 14).

Figura 14: Justificação apresentada pelo aluno A₂₈ no item 2.1, opção c).

Ambas dizem que o professor é uma mulher por isso têm ambas a mesma probabilidade.

Por fim, ao longo das várias opções, alguns alunos apresentaram justificações irrelevantes (5) ou repetiram parte do enunciado (1).

No item 2.2, os alunos (7) justificaram a seleção da resposta correta aludindo à restrição dos espaços amostrais implicados, como se ilustra na justificação da Figura 15.

Figura 15: Justificação apresentada pelo aluno A₂₃ no item 2.2, opção a).

É mais provável um homem praticar futebol porque o universo das pessoas homens e mulheres que praticam futebol é muito maior logo a probabilidade é mais provável no primeiro acontecimento que restringe ao universo dos homens.

Na seleção da opção b), todos os alunos (10) nas suas justificações não distinguiram claramente entre a probabilidade conjunta e probabilidade condicionada (Figura 16).

Figura 16: Justificação apresentada pelo aluno A₄₅ no item 2.2, opção b).

É mais provável visto que é uma prática masculina e é mais provável encontrar alguém que pratique futebol e seja homem.

Na opção c), os alunos (26) identificam as duas primeiras afirmações como definindo o mesmo acontecimento e, deles, alguns (5) interpretaram a condicional como conjunção (Figura 17).

Figura 17: Justificação apresentada pelo aluno A₂₉ no item 2.2, opção c).

Pois os acontecimentos são "exigem" as mesmas coisas, que seja homem e que pratique futebol.

Ainda nesta opção, dois alunos parecem ter sido influenciados nas suas respostas pelo enviesamento de equiprobabilidade (Figura 18).

Figura 18: Justificação apresentada pelo aluno A₁₂ no item 2.2, opção c).

Os praticantes de futebol podem ser homens ou mulheres.
Os homens podem ou não praticar futebol?
Assim, as probabilidades são igualmente prováveis porque podem ter o mesmo número de opções

Finalmente, também na opção c), alguns alunos repetiram parte do enunciado (4) ou não justificaram a sua resposta (1).

4. Discussão e conclusão

Nos três itens formulados na questão 1, onde são explícitas as probabilidades em questão, a maior percentagem de respostas corretas (90,2%) verificou-se no item 1.2, em que se compara a probabilidade da reunião de dois acontecimentos com a probabilidade de qualquer deles. Esta percentagem diminuiu no item 1.1 (70,6%), no qual se compara a probabilidade da conjunção de dois acontecimentos com qualquer deles. Neste caso, as dificuldades dos alunos resultaram da sua adesão à falácia da conjunção (21,6%) e ao enviesamento de equiprobabilidade (5,9%). Finalmente, a menor percentagem de respostas corretas (54,9%) foi obtida no item 1.3, em que se compara a probabilidade condicionada de dois acontecimentos com qualquer deles. Neste item a maior dificuldade dos alunos (41,3%) resultou da não consideração da restrição do espaço amostral, parecendo estarem a comparar a probabilidade da conjunção com a de um dos acontecimentos.

Assim, nos itens da questão 1, salientam-se os erros da falácia da conjunção (TVERSY; KAHNEMAN, 1983), também observado por Díaz e Batanero (2009) e Fernandes (1990) em estudantes universitários, e de ignorar o condicionamento na probabilidade condicionada. O facto de o acontecimento “Um ser humano nasceu em África” ser muito representativo do acontecimento “Um ser humano é de cor negra” repercutiu-se apenas na conjunção, não afetando quer o acontecimento disjunção quer o condicional.

Globalmente, os dois itens formulados na questão 2, onde não são explícitas as probabilidades condicionadas implicadas, revelaram-se mais difíceis para os alunos. No item 2.1 um pouco mais de metade dos alunos respondeu corretamente (56,9%), salientando-se em termos de dificuldades a adesão à falácia da condicional transposta (13,7%) e a não distinção entre um acontecimento condicional e o seu transposto (17,6%). No item 2.2 foram muito poucos os alunos que responderam corretamente (13,7%), revelando dificuldades em distinguir entre probabilidade conjunta e probabilidade condicionada (19,6%) ou considerando ambos os acontecimentos como sendo o mesmo (51,0%).

Donde, nos itens da questão 2, que se revalaram significativamente mais difíceis para os alunos, salienta-se o erro da condicional transposta (FALK, 1986), também observado por Díaz e Batanero (2009) em alunos universitários e por Watson e Moritz (2002) em alunos do ensino básico e secundário. Comparativamente com os itens da questão 1, as maiores dificuldades reveladas pelos alunos nestes itens podem ser explicadas, racionalmente, pelo facto de estar apenas implícito o tipo de acontecimentos compostos neles envolvidos. Assim,

nestes casos, tratava-se de uma descodificação menos óbvia quando comparada com os itens formulados na questão 1, o que se confirma quando os alunos não distinguem entre acontecimento condicional e o seu transposto e entre acontecimento condicional e acontecimento conjunto ou quando consideram como idênticos acontecimentos distintos.

Em resumo, comparativamente com os itens formulados na forma explícita (habitual em contexto escolar), são notórias as maiores dificuldades dos alunos nos itens estabelecidos na forma implícita (não habitual em contexto escolar) ao nível da comparação de probabilidades. Apesar dessas maiores dificuldades observadas, também afirmadas por (Watson & Moritz, 2002), este tipo de itens devem ser explorados pelos alunos, e portanto também na formação dos professores, uma vez que eles se constituem como uma componente formativa importante ao promoverem a literacia probabilística (WATSON; MORITZ, 2003).

Agradecimentos: Este trabalho contou com o apoio de Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projecto PEst-OE/CED/UI1661/2014 do CIEd-UM e do Proyecto EDU2013-41141-P (MEC).

Referências

BATANERO, C. La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación? In: FERNANDES, J. A.; VISEU F.; MARTINHO, M. H.; CORREIA, P. F. (Orgs.). **Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola**. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho, 2013, p. 9-21.

BATANERO, C.; DÍAZ, C. Training teachers to teach statistics: What can we learn from research? **Statistique et Enseignement**, v. 1, n. 1, p. 5-20, 2010.

BOROVČNIK, M. G.; KAPADIA, R. Research and developments in probability education internationally. In: JOUBERT, M.; ANDREWS, P. (Eds.). **Proceedings of the British Congress for Mathematics Education**. University of Keele: British Society for Research into Learning Mathematics, 2010, p. 41-48. On line: <http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip30-1/BSRLM-IP-30-1-06.pdf>

FALK, R.. Conditional probabilities: Insights and difficulties. In: DAVIDSON, R.; SWIFT, J. (Eds.). **Proceedings of Second International Conference on Teaching Statistic**. Victoria, BC: University of Victoria, 1986, p. 292–297.

CONTRERAS, J. M. **Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional**. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España, 2011.

CORREIA, P. F.; FERNANDES, J. A.; CONTRERAS, J. M. Intuições de alunos do 9.º ano de escolaridade sobre probabilidade condicionada. In: NUNES, C.; HENRIQUES, A.;

CASEIRO, A.; SILVESTRE, A.; PINTO, H.; JACINTO, H.; PONTE, J. (Orgs.). **Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2011, p. 1-13.

ESTRADA, A.; DÍAZ, C. Computing probabilities from two way tables: an exploratory study with future teachers. In: ROSSMAN, A.; CHANCE B. (Eds.). **Proceedings of Seventh International Conference on Teaching of Statistics**. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education, 2006.

FERNANDES, J. A. **Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos**. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal, 1990.

FERNANDES, J. A. **Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º ano de escolaridade**. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga, Portugal, 1999.

FERNANDES, J. A. Intuições probabilísticas em alunos do 8.º e 11.º anos de escolaridade. **Quadrante**, v. 10, n. 2, p. 3-32, 2001.

FERNANDES, J. A.; BATANERO, C.; CORREIA, P. F.; GEA, M. M. Desempenho em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta de futuros professores do ensino básico. **Quadrante**, v. XXIII, n. 1, p. 43-61, 2014.

FISCHBEIN, E. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children**. Dordrecht: D. Reidel, 1975.

FISCHBEIN, E.; SCHNARCH, D. The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 28, n. 1, p. 96-105, 1997.

LECOUTRE, M.-P.; DURAND, J.-L. Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire. **Educational Studies in Mathematics**, v. 19, n. 3, p. 357-368, 1988. NCTM. **Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar**. Lisboa: APM e IIE, 1991. (Tradução do original em inglês de 1989.)

POLAKI, M. V. Dealing with compound events. In: JONES, G. A. (Ed.). **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning**. New York, NY: Springer, 2005, p. 191-214.

POLLATSEK, A.; WELL, A. D.; KONOLD, C.; HARDIMAN, P. Understanding conditional probabilities. **Organization, Behavior and Human Decision Processes**, v. 40, n. 2, p. 255-269, 1987.

PORTUGAL (2013). **Programa de matemática para o ensino básico**. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

TARR, J. E.; LANNIN, J. K. How can teachers build notions of conditional probability and independence? In: JONES, G. A. (Ed.). **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning**. New York, NY: Springer, 2005, p. 215-238.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. In: KAHNEMAN, D.; SLOVIC, P.; TVERSKY, A. (Eds.). **Judgment under uncertainty: Heuristics and biases**. Cambridge: Cambridge University Press, 1982a, p. 3-20.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Causal schemas in judgment under uncertainty. In: KAHNEMAN, D.; SLOVIC, P.; TVERSKY, A. (Eds.). **Judgment under uncertainty: Heuristics and biases**. Cambridge: Cambridge University Press, 1982b, p. 117-128.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. **Psychological Review**, v. 90, n. 4, p. 293-315, 1983.

WATSON, J. M. Conditional probability: Its place in the mathematics curriculum. **Mathematics Teacher**, v. 88, n. 1, p. 12-17, 1995.

WATSON, J. M. The probabilistic reasoning of middle school students. In: JONES, G. A. (Ed.). **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning**. New York, NY: Springer, 2005, p. 145-169.

WATSON, J. M.; MORITZ, J. B. School students' reasoning about conjunction and conditional events. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 33, n. 1, p. 59-84, 2002.

WATSON, J. M.; MORITZ, J. B. The development of comprehension of chance language: Evaluation and interpretation. **School Science and Mathematics**, v. 103, n. 2, p. 65-80, 2003.