

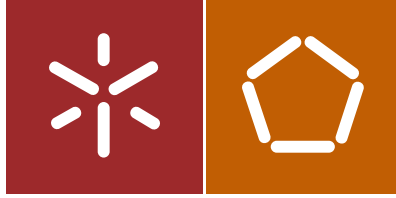


Universidade do Minho  
Escola de Engenharia

Liliana Oliveira Gonçalves

Retroanálise de parâmetros geomecânicos  
baseada em algoritmos de otimização





Universidade do Minho  
Escola de Engenharia

Liliana Oliveira Gonçalves

Retroanálise de parâmetros geomecânicos  
baseada em algoritmos de otimização

Dissertação de Mestrado  
Ciclo de Estudos Integrados Conducentes ao  
Grau de Mestre em Engenharia Civil

Trabalho efectuado sob a orientação do  
Professor Doutor Nuno Araújo

e coorientação do  
Professor Doutor Tiago Miranda

## DECLARAÇÃO

Nome: Liliana Oliveira Gonçalves

Endereço eletrónico: fito@live.com.pt

Telefone: 965171704

Número do Bilhete de Identidade: 11711413

Título dissertação/tese

Retroanálise de parâmetros geomecânicos baseada em algoritmos de otimização

Orientador (es):

Doutor Nuno Araújo

Doutor Tiago Miranda

Ano de conclusão: 2015

Designação do Mestrado ou do Ramo de Conhecimento do Doutoramento:

Mestrado Integrado em Engenharia Civil

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO INTEGRAL DESTA TESE/TRABALHO APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE;

Universidade do Minho, \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

## Agradecimentos

A realização desta dissertação apenas foi possível devido à contribuição de inúmeras pessoas. Cabe-me agora expressar os meus mais sinceros agradecimentos àquelas que mais se destacaram.

Começo por endereçar os meus agradecimentos ao meu orientador, Professor Nuno Araújo, pela sua disponibilidade no decurso desta dissertação, por toda a motivação transmitida e interesse demonstrado. Ao meu coorientador, Professor Tiago Miranda, por todo acompanhamento e apoio prestado. Agradeço a ambos todas as sugestões e conselhos que me deram ao longo deste trabalho.

Agradeço aos meus amigos e colegas pelo companheirismo e momentos de descontração e pelas palavras de incentivo ao longo de todo o curso, em especial à minha querida amiga Juliana Oliveira.

Quero agradecer ainda aos meus pais, António e Cristina, e à minha irmã Marisa, que estiveram sempre do meu lado, por todo o apoio, carinho e valores a mim providos.

Finalmente um carinhoso agradecimento ao meu marido, João Ângelo, e ao meu filho, João Pedro, pelo apoio incondicional, pela cumplicidade, paciência e incentivo nos momentos mais difíceis, permitindo-me chegar ao fim de mais uma etapa da minha vida.



## Resumo

O presente trabalho procura evidenciar o conceito de retroanálise e as suas potencialidades na identificação de parâmetros geomecânicos. Pretende-se estudar a aplicação de técnicas de retroanálise de parâmetros geomecânicos através de ferramentas de otimização. O algoritmo de otimização utilizado foi o HGPSAL, um algoritmo genético híbrido recente, baseado num padrão de busca local para refinar a melhor aproximação encontrada pelo Algoritmo Genético.

A previsão do comportamento dos maciços requer a utilização de modelos constitutivos que representem mais adequadamente a sua relação tensão/deformação. Foram utilizados os modelos constitutivos elástico linear e hiperbólico nas análises numéricas. A utilização do modelo constitutivo elástico linear teve como principal objetivo a calibração do modelo. Por outro lado, a utilização do modelo hiperbólico, uma vez que pressupõe a identificação de vários parâmetros, teve como objetivo a verificação da robustez e eficiência do algoritmo empregue.

O principal objetivo deste trabalho foi a avaliação da potencialidade do algoritmo de otimização, em termos de eficiência e robustez na identificação de parâmetros geomecânicos sob diferentes circunstâncias. Para isso analisou-se um caso de estudo teórico referente à escavação de um túnel considerando os dois modelos constitutivos.

**Palavras-chave:** retroanálise, otimização, parâmetros geomecânicos e modelos constitutivos.





## Abstract

This paper seeks to highlight the concept of back analysis and its potential in identifying geomechanical parameters. It was intended to study the application of back analysis techniques of geomechanical parameters using optimization tools. The optimization algorithm used was HGPSAL, a recent hybrid genetic algorithm, based on a local search pattern to refine the best approach found by Genetic Algorithm.

Massive behavior prediction requires the use of constitutive models that represent more properly their relationship stress/strain. The elastic linear and hyperbolic constitutive models were used in numerical analysis. The use of elastic linear constitutive model aims to model calibration. Moreover, the use of the hyperbolic model, since it presupposes the identification of several parameters, aims at checking the robustness and efficiency of the employed algorithm.

The main objective of this study was to evaluate the potential of optimization algorithm in terms of efficiency and robustness in identifying geomechanical parameters under different circumstances. For this we analyzed a case of theoretical study regarding the tunneling considering the two constitutive models.

**Keywords:** back analysis, optimization, geomechanical parameters and constitutive models.



## Siglas e símbolos

### Siglas

AGs	Algoritmos Genéticos
EEs	Estratégias Evolutivas
FLAC	Fast Langrangian Analysis of Continua
HGPSAL	Hybrid Genetic Pattern Search Augmented Langrangian
3D	Três dimensões

### Símbolos

$E$	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
$E_i$	Módulo de elasticidade inicial
$E_t$	Módulo de deformabilidade tangente
$G$	Módulo de distorção
$B$	Módulo de deformação volumétrico ou <i>Bulk Modulus</i>
$p_a$	Pressão atmosférica
$k$	Parâmetro de calibração, sem significado físico
$k_b$	Parâmetro de calibração, sem significado físico
$m$	Parâmetro de calibração, sem significado físico
$n$	Parâmetro de calibração, sem significado físico
$R_f$	Parâmetro de calibração, sem significado físico
$c$	Coesão
$\{\sigma\}$	Tensor de tensão
$\{\varepsilon\}$	Tensor de deformação
$[C]$	Matriz dos coeficientes elásticos ou matriz constitutiva

## Letras Gregas

$\phi$	Ângulo de atrito
$\varepsilon$	Deformação axial
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\sigma$	Tensão normal
$\sigma_1$	Tensão principal máxima
$\sigma_2$	Tensão principal intermédia
$\sigma_3$	Tensão principal mínima
$(\sigma_1 - \sigma_3)$	Diferença entre as tensões principais ou tensão de desvio
$(\sigma_1 - \sigma_3)_{última}$	Valor assintótico da diferença de tensões
$(\sigma_1 - \sigma_3)_{rutura}$	Diferença de tensões na rutura
$\gamma$	Peso volúmico

---

# Índice

1	Introdução .....	1
1.1	Motivação .....	1
1.2	Objetivos.....	3
1.3	Organização .....	4
2	Revisão bibliográfica .....	7
2.1	Retroanálise .....	7
2.2	Modelos constitutivos.....	10
2.2.1	Modelo constitutivo elástico linear .....	11
2.2.2	Modelo constitutivo hiperbólico.....	13
2.3	Otimização.....	21
2.3.1	Algoritmos Genéticos .....	23
3	Metodologia.....	27
3.1	Introdução.....	27
3.2	Modelo numérico.....	28
3.2.1	Modelo constitutivo elástico linear .....	30
3.2.2	Modelo constitutivo hiperbólico.....	34
3.3	Função objetivo .....	41
3.4	Otimização.....	42
4	Resultados e discussão .....	47
4.1	Resultados do modelo constitutivo elástico linear .....	47

4.1.1	Caso de estudo MEL-1.....	47
4.1.2	Caso de estudo MEL-2.....	50
4.1.3	Caso de estudo MEL-3.....	53
4.1.4	Caso de estudo MEL-4.....	56
4.2	Resultados do modelo constitutivo hiperbólico 1 .....	61
4.2.1	Caso de estudo MH1-1.....	61
4.2.2	Caso de estudo MH1-2.....	63
4.2.3	Caso de estudo MH1-3.....	64
4.3	Resultados do modelo constitutivo hiperbólico 2 .....	64
4.3.1	Caso de estudo MH2-4.....	64
4.3.2	Caso de estudo MH2-5.....	66
4.3.3	Caso de estudo MH2-6.....	68
4.3.4	Caso de estudo MH2-7.....	70
4.3.5	Caso de estudo MH2-8.....	72
4.3.6	Caso de estudo MH2-9.....	73
5	Conclusões e Considerações finais.....	77

## Lista de figuras

Figura 1 – Esquemas dos procedimentos de a) análise convencional e b) retroanálise (adaptado de Sakurai, 1997).....	8
Figura 2 – Características do comportamento tensão/deformação de um material elástico a) linear e b) não linear .....	11
Figura 3 – Representação da curva tensão/deformação hiperbólica idealizada (adaptado de Pereira, 2014).....	14
Figura 4 – Representação da curva tensão/deformação hiperbólica transformada (adaptado de Pereira, 2014).....	15
Figura 5 – Critério de rutura de Mohr-Coulomb .....	16
Figura 6 – Funcionamento simplificado do Algoritmo Genético (adaptado de Costa, 2003)..	23
Figura 7 – Esquema do procedimento de retroanálise (adaptado de Miranda, 2007) .....	28
Figura 8 – Geometria do modelo numérico.....	30
Figura 9 – Localização dos pontos monitorizados e direção dos deslocamentos considerados, com o modelo elástico linear .....	31
Figura 10 – Magnitudes dos deslocamentos no túnel e maciço envolvente, com o modelo elástico linear.....	33
Figura 11 – Magnitudes dos deslocamentos no túnel e maciço envolvente, com o modelo hiperbólico 1 .....	36
Figura 12 – Zonas em rotura da estrutura.....	37
Figura 13 – Localização dos pontos monitorizados e direção dos deslocamentos considerados, com o modelo hiperbólico 2 .....	39
Figura 14 – Magnitudes dos deslocamentos no túnel e maciço envolvente, com o modelo hiperbólico 2.....	40

Figura 15 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-1, intervalo pequeno, a) vista tridimensional, b) vista planar.....	49
Figura 16 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-1, intervalo médio, a) vista tridimensional, b) vista planar.....	49
Figura 17 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-1, intervalo grande, a) vista tridimensional, b) vista planar.....	50
Figura 18 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-2, intervalo pequeno, a) vista tridimensional, b) vista planar.....	52
Figura 19 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-2, intervalo médio, a) vista tridimensional, b) vista planar.....	52
Figura 20 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-2, intervalo grande, a) vista tridimensional, b) vista planar.....	53
Figura 21 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-3, intervalo pequeno, a) vista tridimensional, b) vista planar.....	55
Figura 22 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-3, intervalo médio, a) vista tridimensional, b) vista planar.....	55
Figura 23 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-3, intervalo grande, a) vista tridimensional, b) vista planar.....	56
Figura 24 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-4, intervalo pequeno, a) vista tridimensional, b) vista planar.....	58
Figura 25 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-4, intervalo médio, a) vista tridimensional, b) vista planar.....	58
Figura 26 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-4, intervalo grande, a) vista tridimensional, b) vista planar.....	59
Figura 27 – Desempenho do algoritmo ao longo do processo iterativo, caso MEL-4, intervalo pequeno .....	60



---

Figura 28 – Vista ampliada do desempenho do algoritmo ao longo do processo iterativo, caso MEL-4, intervalo pequeno.....	60
Figura 29 – Topologia da função objetivo para o caso MH1-1, a) vista tridimensional, b) vista planar .....	62
Figura 30 – Topologia da função objetivo para o caso MH2-4, a) vista tridimensional, b) vista planar .....	66
Figura 31 – Topologia da função objetivo para o caso MH2-5, a) vista tridimensional, b) vista planar .....	68
Figura 32 – Desempenho do algoritmo ao longo do processo iterativo, caso MH2-9 .....	74
Figura 33 – Vista ampliada do desempenho do algoritmo ao longo do processo iterativo, caso MH2-9 .....	75

## Lista de tabelas

Tabela 1 – Propriedades de rigidez para solos apresentadas por Duncan et al. (1980) (adaptada de Gerscovich, s.d.).....	20
Tabela 2 – Casos de estudo do modelo elástico linear.....	32
Tabela 3 – Deslocamentos dos pontos monitorizados, com o modelo elástico linear .....	33
Tabela 4 – Valores atribuídos aos parâmetros geomecânicos, com o modelo hiperbólico 1 ..	35
Tabela 5 – Deslocamentos dos pontos monitorizados, com o modelo hiperbólico 1 .....	35
Tabela 6 – Casos de estudo do modelo hiperbólico 1 .....	38
Tabela 7 – Valores atribuídos aos parâmetros geomecânicos, com o modelo hiperbólico 2 ..	38
Tabela 8 – Deslocamentos dos pontos monitorizados, com o modelo hiperbólico 2 .....	40
Tabela 9 – Casos de estudo do modelo hiperbólico 2.....	41
Tabela 10 – Argumentos e valores considerados para a função Lagrangiana Aumentada.....	43
Tabela 11 – Argumentos e valores considerados para o Algoritmo Genético.....	43
Tabela 12 – Argumentos e valores considerados para o algoritmo Hooke e Jeeves .....	44
Tabela 13 – Intervalos dos parâmetros geomecânicos, com o modelo elástico linear.....	44
Tabela 14 – Intervalos dos parâmetros geomecânicos, com o modelo hiperbólico 1.....	45
Tabela 15 – Intervalos dos parâmetros geomecânicos, com o modelo hiperbólico 2.....	45
Tabela 16 – Resultados do caso de estudo MEL-1 - Parâmetros.....	48
Tabela 17 – Resultados do caso de estudo MEL-1 - Deslocamentos .....	48
Tabela 18 – Resultados do caso de estudo MEL-2 - Parâmetros.....	51
Tabela 19 – Resultados do caso de estudo MEL-2 - Deslocamentos .....	51

---

Tabela 20 – Resultados do caso de estudo MEL-3 - Parâmetros .....	54
Tabela 21 – Resultados do caso de estudo MEL-3 – Deslocamentos .....	54
Tabela 22 – Resultados do caso de estudo MEL-4 - Parâmetros .....	57
Tabela 23 – Resultados do caso de estudo MEL-4 – Deslocamentos .....	57
Tabela 24 – Resultados do caso de estudo MH1-1 - Parâmetros .....	61
Tabela 25 – Resultados do caso de estudo MH1-1 - Deslocamentos .....	61
Tabela 26 – Resultados do caso de estudo MH1-2 - Parâmetros .....	63
Tabela 27 – Resultados do caso de estudo MH1-2 - Deslocamentos .....	63
Tabela 28 – Resultados do caso de estudo MH2-4 - Parâmetros .....	65
Tabela 29 – Resultados do caso de estudo MH2-4 - Deslocamentos .....	65
Tabela 30 – Resultados do caso de estudo MH2-5 - Parâmetros .....	67
Tabela 31 – Resultados do caso de estudo MH2-5 - Deslocamentos .....	67
Tabela 32 – Resultados do caso de estudo MH2-6 - Parâmetros .....	69
Tabela 33 – Resultados do caso de estudo MH2-6 - Deslocamentos .....	69
Tabela 34 – Resultados do caso de estudo MH2-7 - Parâmetros .....	71
Tabela 35 – Resultados do caso de estudo MH2-7 - Deslocamentos .....	71
Tabela 36 – Resultados do caso de estudo MH2-8 - Parâmetros .....	72
Tabela 37 – Resultados do caso de estudo MH2-8 - Deslocamentos .....	72
Tabela 38 – Resultados do caso de estudo MH2-9 - Parâmetros .....	73
Tabela 39 – Resultados do caso de estudo MH2-9 - Deslocamentos .....	74



# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Motivação

As obras subterrâneas têm adquirido uma importância crescente no atravessamento de zonas montanhosas, no planejamento e gestão de áreas urbanas associado às redes de transportes ferroviários e rodoviários, assim como no desenvolvimento de grandes empreendimentos hidroelétricos. Tratam-se de obras de grandes dimensões e complexidade.

A construção deste tipo de obras exige um conhecimento, tão aprofundado quanto possível, sobre as características geomecânicas dos maciços em que vão ser implementadas. As características dos geomateriais são de extrema importância devido à alta influência dos parâmetros geomecânicos nos processos de concepção, projeto e construção.

A determinação destes parâmetros pode ter duas abordagens possíveis, uma tradicional e outra baseada no método observacional. A primeira consiste em definir as características mecânicas do material através de ensaios laboratoriais e *in situ*. Contudo, esta pode ser uma tarefa de elevada complexidade devido à natureza heterogênea dos maciços e ao comportamento não linear dos materiais geotécnicos.

Esta abordagem origina incertezas quanto aos valores reais dos parâmetros geomecânicos. Estas incertezas podem ser “superadas” através de uma solução excessivamente conservativa, que poderá ser economicamente inviável ou, por outro lado, através de resultados de obras semelhantes, definindo soluções comprometedoras da segurança.

Durante a sua construção, as estruturas subterrâneas devem ser monitorizadas, mas de acordo com esta abordagem, os dados resultantes da monitorização são utilizados apenas para comparar a previsão calculada com a resposta obtida, não sendo por isso efetuada qualquer alteração ao projeto inicial.

Uma outra abordagem para resolver problemas de estimação dos parâmetros geomecânicos, de projetos de grandes obras subterrâneas, é de cariz observacional [1]. Essa abordagem consiste na utilização dos dados resultantes da monitorização para reajustar o projeto durante a construção.

Atualmente, no caso particular de obras subterrâneas, as medições realizadas nas primeiras fases de escavação podem ser utilizadas para determinar os reais parâmetros geomecânicos, através do processo de retroanálise, fornecendo uma base sólida para validar/adaptar o projeto e método de construção nas fases seguintes.

Este procedimento matemático consiste, basicamente, na formulação de uma função objetivo que avalia a discrepância entre os valores obtidos pela instrumentação de campo e aqueles calculados por um programa numérico e, a seleção de uma técnica de otimização que possibilite a procura do mínimo da função objetivo. Os parâmetros geomecânicos assumem um papel de variáveis de otimização.

As propriedades dos maciços são correlacionadas através de modelos constitutivos. Assim, é necessário incorporar ao programa numérico um modelo constitutivo que seja capaz de estimar as propriedades mecânicas dos materiais em estudo. Existe uma grande diversidade de modelos constitutivos para os materiais de engenharia geotécnica. Esses modelos têm diferentes classificações, de acordo com a teoria na qual são baseados.

Atendendo que a função objetivo normalmente é não linear, o processo iterativo deve ser realizado recorrendo a um algoritmo de otimização. Existe uma grande variedade de algoritmos de otimização. Estes podem ser divididos em duas categorias, determinísticos e probabilísticos.

Os primeiros apresentam um desempenho satisfatório para funções de objetivo que, no espaço dos parâmetros, apresentem uma forma convexa com um mínimo claramente definido e único. Fora destas circunstâncias, o que é bastante típico dos problemas da geomecânica, estes algoritmos apresentam problemas ao nível da convergência [2].

Os métodos probabilísticos incluem algoritmos evolutivos tais com Algoritmos Genéticos (AGs) e Estratégias Evolutivas (EEs). Os algoritmos evolutivos, baseados na inteligência artificial, são inspirados pela teoria da seleção natural e sobrevivência do mais apto de Darwin. Estes imitam a evolução natural das espécies em sistemas biológicos.

Apresentam-se como boas alternativas para ultrapassar ou minimizar algumas das limitações dos algoritmos determinísticos. Não necessitam que a função objetivo seja contínua e convexa para convergirem e só necessitam de informação sobre a função e as suas restrições.

A principal desvantagem dos algoritmos evolutivos é o número elevado de iterações que normalmente necessitam para atingirem a convergência o que pode comportar um peso computacional muito elevado. Este problema revela-se de particular importância quando se utilizam modelos numéricos complexos pois o esforço computacional pode transformar o procedimento de otimização inviável.

Uma das motivações desta dissertação insere-se na procura de métodos computacionalmente viáveis para a resolução deste tipo de problemas.

## **1.2 Objetivos**

Com este trabalho procura-se apresentar simplificadaamente os conceitos base do processo de retroanálise, assim como demonstrar a sua aplicabilidade a problemas geotécnicos, nomeadamente obras subterrâneas, com recurso a ferramentas de cálculo automático.

Pretende-se analisar o recurso a técnicas de otimização no âmbito de problemas de retroanálise baseado na formulação direta, com o propósito de possibilitar a implementação de modelos numéricos mais realistas dos fenómenos associados à execução de obras subterrâneas.

Tem sido constatado que o recurso a modelos constitutivos simplificados, como o modelo elástico linear e o modelo elasto-plástico com o critério de rutura de Mohr-Coulomb, não

permitem a correta simulação do real comportamento do maciço. Esta limitação condiciona a eficiência da retroanálise na previsão dos parâmetros de projeto e, conseqüentemente a redefinição deste.

Sendo ainda corrente, por limitação computacional, o recurso a modelos numéricos simplificados, isto é, modelos bidimensionais e implementados com recurso ao modelo constitutivo elástico linear, toma grande importância a implementação de técnicas capazes de minimizar o esforço iterativo associado ao processo de retroanálise. Esta minimização possibilitará simular os efeitos tridimensionais, de maior importância em obras subterrâneas, assim como o recurso a modelos constitutivos mais próximos do real comportamento dos maciços.

### **1.3 Organização**

A dissertação está organizada em 5 capítulos, descrevendo-se seguidamente o conteúdo de cada um. No presente capítulo é introduzido o tema, a motivação, os objetivos e a organização deste trabalho.

No segundo capítulo é apresentada a revisão bibliográfica onde se expõe uma revisão dos conceitos de retroanálise, modelos constitutivos e algoritmos de otimização. Relativamente aos modelos constitutivos, apresenta-se simplificada os fundamentos e equações relacionados com os modelos linear elástico e hiperbólico. Em termos de otimização, abordam-se algoritmos de otimização evolutivos, dando particular ênfase aos Algoritmos Genéticos. A maior fonte de conhecimento para elaboração deste capítulo teve como base Teses académicas, livros e artigos sobre o tema assim como a preciosa ajuda do orientador e coorientador.

No terceiro capítulo apresenta-se a metodologia necessária para a resolução de um problema de retroanálise do tipo direto, assim como a explicação da interação entre todos os módulos que constituem o “programa” de retroanálise. Descreve-se o caso teórico de escavação de um túnel onde é aplicado este tipo de procedimento. Este problema foi abordado considerando dois modelos constitutivos, modelo elástico linear e modelo hiperbólico, desenvolvendo-se por isso duas análises distintas.



Na primeira análise, considera-se o modelo elástico linear para representar o comportamento do maciço. Foram desenvolvidos quatro casos de estudo, um considerando quatro dados resultantes da monitorização e três casos considerando apenas dois dados através de diferentes combinações.

Na segunda análise, devido à complexidade do modelo hiperbólico, desenvolveram-se dois conjuntos de casos de estudo. Num primeiro conjunto atribuíram-se valores aos parâmetros considerando um solo real. No segundo conjunto atribuíram-se os mesmos valores a cinco dos parâmetros, aumentando-se apenas os parâmetros de resistência ao corte. Em cada um dos conjuntos a identificação dos parâmetros foi efetuada de forma sequencial. Inicialmente identificaram-se dois dos parâmetros ( $k$  e  $k_b$ ), em seguida quatro ( $k$ ,  $k_b$ ,  $n$  e  $m$ ) e, posteriormente seis parâmetros do modelo ( $k$ ,  $k_b$ ,  $n$ ,  $m$ ,  $c$  e  $\phi$ ).

Neste capítulo também se apresenta e justifica todas as considerações efetuadas ao longo de todo o trabalho.

Os resultados obtidos pela aplicação da metodologia e as discussões destes são apresentadas no quarto capítulo.

Finalizando este trabalho, são apresentadas no quinto capítulo, as considerações finais, onde se tecem as conclusões do trabalho realizado e se propõem algumas recomendações para trabalhos futuros.



## **Capítulo 2**

### **REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

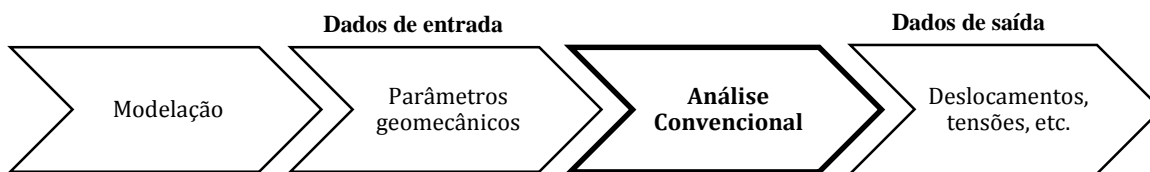
#### **2.1 Retroanálise**

O processo de retroanálise, no contexto desta dissertação, pode ser definido como uma técnica de determinação de parâmetros geomecânicos através da análise da sua resposta a uma determinada ação.

Geralmente, a análise de um determinado problema envolve a obtenção da resposta de uma estrutura (como deformações, tensões, deslocamentos) definida por um conjunto de parâmetros, quando sujeita a uma determinada solicitação. Este processo é designado por análise convencional.

Por oposição, num processo de retroanálise recorre-se, também, a um modelo matemático, mas percorre-se o caminho inverso. Este procedimento consiste em resolver um problema de estimação de parâmetros, a partir da resposta da estrutura obtida através da observação da obra em questão a uma determinada solicitação.

A figura 1 apresenta um esquema que pretende explicitar a diferença entre ambos os processos.



a)



b)

Figura 1 – Esquemas dos procedimentos de a) análise convencional e b) retroanálise (adaptado de Sakurai, 1997)

O nível de incertezas envolvidas na avaliação de parâmetros geomecânicos no dimensionamento de uma estrutura subterrânea é grande devido à natureza heterogênea dos maciços e ao comportamento não linear dos materiais geotécnicos. Assim a retroanálise contribui para que estas incertezas sejam reduzidas.

Em estruturas subterrâneas, informações obtidas por medições realizadas durante as primeiras fases de construção podem ser usadas para atualizar os valores dos parâmetros assumidos em projeto, fornecendo uma base sólida para adaptação do projeto e método de construção nas fases seguintes. Constata-se então que instrumentação de campo aliada à técnica de retroanálise é de grande utilidade para o engenheiro civil.

Os programas comerciais de simulação numérica não estão preparados para calcular os parâmetros geomecânicos a partir da introdução dos dados resultantes da monitorização. Dessa forma é necessário adotar um processo iterativo para determinar estes parâmetros [2].

Existem duas abordagens possíveis na definição de um problema de retroanálise, a inversa e a direta [3]. Mata (2013) refere que na metodologia inversa se estabelece uma relação entre a

resposta do modelo e os parâmetros a estimar através da inversão das equações que descrevem o comportamento do sistema, ou seja, define-se o modelo matemático para que os parâmetros a identificar sejam incógnitas e a resposta do modelo seja um dado.

Segundo o mesmo autor, esta metodologia pode conduzir a formulações bastante complexas, dado que normalmente os modelos numéricos se baseiam em elementos finitos ou outros métodos semelhantes em que não existe uma relação explícita entre os parâmetros e a resposta do modelo.

De acordo com Miranda (2007), a primeira aplicação de uma abordagem inversa foi realizada por Gioda (1980) para identificar os parâmetros elásticos e a pressão no revestimento de um túnel. Este fez uma modificação no algoritmo de inversão originalmente proposto por Kavanagh (1973) para problemas estruturais e posteriormente sugerido por Jurina et al. (1977) para problemas geotécnicos [3].

Posteriormente, Sakurai e Takeuchi (1983) apresentaram um algoritmo de retroanálise para resolver o problema de tensões iniciais em problemas de escavações de tuneis. O problema foi formulado para a condição plana (bidimensional) e considerando o comportamento isotrópico e elástico linear do material. O coeficiente de Poisson e a tensão inicial vertical eram assumidos e os parâmetros a identificar eram o módulo de elasticidade e o estado de tensão inicial. Este algoritmo não considera a não linearidade dos materiais geotécnicos assim como o efeito da tridimensionalidade. A partir destas limitações o algoritmo foi desenvolvido considerando os aspetos anteriormente descritos.

Na abordagem direta o modelo numérico não é modificado. Mata (2013) aponta que é definida com base em modelos matemáticos não invertidos, ou seja, modelos utilizados normalmente para estudar o comportamento de uma dada estrutura, através da introdução de parâmetros e solicitações e calculando a respetiva resposta. Procura-se então estimar os parâmetros através da minimização de uma função objetivo (como os mínimos quadrados) entre os dados observados e os calculados no modelo matemático, através de um processo iterativo em que em cada iteração se alteram os parâmetros do modelo até que a resposta seja a mais próxima dos dados observados.

Miranda (2007) afirma que esta abordagem é mais flexível, relativamente à anterior, uma vez que a rotina de otimização pode ser programada de forma independente a partir do modelo numérico e o acoplamento pode ser realizado utilizando uma programação simples. No entanto,

o processo iterativo pode ser demorado e a convergência para o mínimo global não é assegurada.

## 2.2 Modelos constitutivos

Modelos constitutivos são formulações matemáticas que têm como objetivo representar o comportamento dos materiais. Almeida (2010) salienta que a precisão com que determinado modelo constitutivo se assemelha ao comportamento do material depende do número de parâmetros que se introduz na equação constitutiva, procurando-se um equilíbrio entre o número de parâmetros e a precisão desejada.

O mesmo autor assegura que um modelo constitutivo permite relacionar as tensões com as deformações produzidas no interior do material em função de um número determinado de parâmetros que dependem das propriedades mecânicas dos maciços. Os materiais que constituem os maciços, ao contrário de outros materiais como o betão e o aço que podem ser facilmente representados como meios contínuos [4], são um material altamente não linear com resistência e rigidez dependentes do nível de tensão e deformação [5].

Devido à complexidade do comportamento tensão/deformação dos maciços, não existe um único modelo capaz de os representar. Contudo, vários modelos capazes de representar características importantes do seu comportamento têm sido propostos nas últimas décadas. Existem modelos constitutivos, desde os mais simples (modelos elásticos), a modelos de complexidade intermédia (modelos elasto-plásticos), ou com níveis de complexidade extrema (modelos visco-plásticos).

A consideração da influência da pressão intersticial, de grande relevância da análise em mecânica dos solos, vem ainda aumentar o nível de complexidade dos modelos constitutivos atualmente disponíveis. Ainda assim, é ainda corrente a utilização de leis elásticas em problemas de otimização (motivada pelo baixo esforço computacional associado), a qual pode limitar a capacidade dos modelos numéricos.

Nesta secção apresenta-se uma revisão de dois modelos constitutivos elásticos, modelo elástico linear e modelo elástico não linear (modelo hiperbólico). O modelo hiperbólico apresenta as vantagens do modelo elástico linear em termos de simplicidade de cálculo, mas pode contribuir

na melhor capacidade dos modelos numéricos, ou seja, traduz melhor os fenômenos físicos que pretende simular.

Neste contexto, é importante lembrar que se define material elástico aquele que recupera o seu estado inicial depois de submetido a um ciclo completo de carregamento e descarregamento sem sofrer deformações permanentes [6].

As deformações elásticas são independentes da trajetória de tensão à qual se submete o material, podendo-se atingir um mesmo estado de deformação através de trajetórias de tensão diferentes. Estas deformações dependem unicamente do incremento de tensões, conforme se mostra na figura 2.

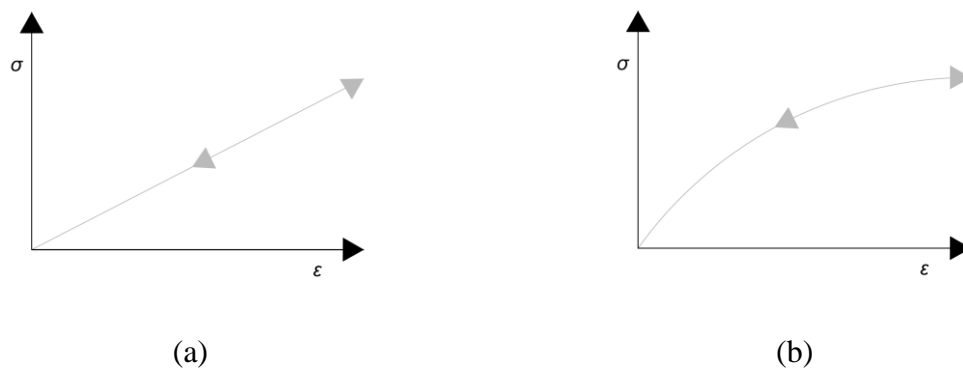


Figura 2 – Características do comportamento tensão/deformação de um material elástico a) linear e b) não linear

### 2.2.1 Modelo constitutivo elástico linear

O comportamento elástico linear constitui, sem dúvida, o modelo mais simples, sendo uma aproximação para um grande número de problemas, do ponto de vista prático. Os materiais do tipo elástico linear possuem módulo de elasticidade constante, independentemente do nível de tensões ao qual estão submetidos.

O primeiro modelo constitutivo utilizado para solos baseou-se na teoria da elasticidade linear, a partir da relação entre tensão ( $\sigma$ ) e a deformação ( $\epsilon$ ), formulada por Hooke em 1678 através de observações experimentais em fios metálicos quando submetidos a carregamentos uniaxiais, como mostra a equação (2.1):

(2.1)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

em que  $\sigma$  é a tensão,  $\varepsilon$  é a deformação e  $E$  é um parâmetro do material denominado módulo de elasticidade ou módulo de Young. A equação anterior é válida para situações unidimensionais, sendo que para situações de carregamento tridimensional é necessário a consideração da lei de Hooke generalizada, com base no tensor de tensão  $\{\sigma\}$ , no tensor de deformação  $\{\varepsilon\}$  e na matriz dos coeficientes elásticos ou matriz constitutiva  $[C]$ .

$$\{\sigma\} = [C] \cdot \{\varepsilon\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

A matriz constitutiva é expressa em função de 36 coeficientes, uma vez que há 6 componentes independentes de tensão e 6 de deformação. Porém, ao considerar-se a energia armazenada de um corpo elástico quando deformado, pode-se demonstrar que esta matriz é simétrica, e desta forma os coeficientes elásticos podem ser reduzidos a 21. Entretanto, considerando o solo homogêneo, isotrópico e o carácter linear das relações entre tensão e deformação que permite uma sobreposição dos efeitos, é possível representar a matriz constitutiva  $[C]$  em função de três variáveis, que são: o módulo de elasticidade ( $E$ ), o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) e módulo de distorção ( $G$ ). O módulo de distorção relaciona-se com o módulo de elasticidade de acordo com a seguinte equação (2.3):

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (2.3)$$



### 2.2.2 Modelo constitutivo hiperbólico

O modelo constitutivo apresentado anteriormente tem como principal característica a representação do comportamento elástico do solo através de um valor constante para o módulo de elasticidade. Contudo, o solo apresenta um comportamento tensão/deformação não linear, assim sendo, o seu módulo de elasticidade deve ser variável com a variação do seu estado de tensão.

Kondner (1963) analisando as curvas tensão/deformação de solos submetidos a ensaios de compressão triaxial convencional verificou que estas poderiam ser representadas por uma função hiperbólica. Porém, foram Duncan e Chang (1970) que, ao considerarem este conceito, formularam o modelo e por isso este é também conhecido por modelo Duncan e Chang.

Este modelo propõe uma relação tensão/deformação não linear, através da consideração de um módulo de elasticidade inicial ( $E_i$ ) variável com a tensão de confinamento ( $\sigma_3$ ) e da variação do módulo de deformabilidade tangente ( $E_t$ ) com o nível de tensões de desvio.

Kondner (1963) propôs que a não linearidade da curva tensão/deformação fosse representada por uma função hiperbólica com assíntota horizontal, definida pelos parâmetros  $a$  e  $b$ , equação (2.4).

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\varepsilon}{a + b \cdot \varepsilon} \quad (2.4)$$

em que  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  são tensões principais máxima e mínima, respetivamente,  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  é a diferença entre as tensões principais ou tensão de desvio e  $\varepsilon$  é a deformação axial. O parâmetro  $a$  está relacionado com a inclinação inicial da hipérbole, enquanto  $b$  se relaciona com a tensão assintótica ou última, conforme ilustra a figura 3.

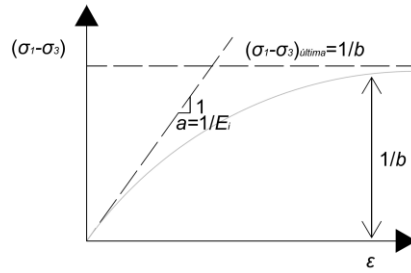


Figura 3 – Representação da curva tensão/deformação hiperbólica idealizada (adaptado de Pereira, 2014)

Os parâmetros  $a$  e  $b$  podem ser definidos pelas equações (2.5) e (2.6), respetivamente:

$$a = \frac{1}{E_i} \quad (2.5)$$

$$b = \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{\acute{u}ltima}} \quad (2.6)$$

em que  $E_i$  é o módulo de elasticidade inicial e  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{\acute{u}ltima}$  é o valor assintótico da diferença de tensões relacionado com a resistência do solo. Substituindo na equação (2.4) os parâmetros  $a$  (2.5) e  $b$  (2.6) obtém-se:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{E_i} + \frac{\varepsilon}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{\acute{u}ltima}}} \quad (2.7)$$

Transformando a equação anterior, obtém-se:

$$\frac{\varepsilon}{(\sigma_1 - \sigma_3)} = \frac{1}{E_i} + \frac{\varepsilon}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{\acute{u}ltima}} \quad (2.8)$$

Que representa uma linha reta no espaço  $[\varepsilon_a, \varepsilon_a/(\sigma_1 - \sigma_3)]$ , sendo  $1/E_i$  a interseção da linha reta com o eixo das ordenadas e  $1/(\sigma_1 - \sigma_3)_{\acute{u}ltima}$  a inclinação da reta, conforme figura 4:

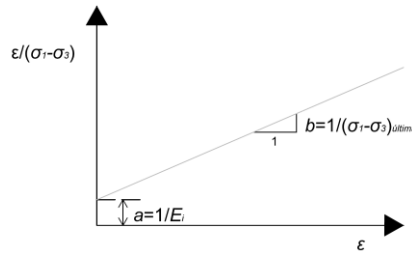


Figura 4 – Representação da curva tensão/deformação hiperbólica transformada (adaptado de Pereira, 2014)

Duncan e Chang (1970) reescreveram a equação da hipérbole, acrescentando a razão de rutura ( $R_f$ ) ao segundo termo do denominador da equação de Kondner [7]. O valor assintótico da diferença de tensões  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{\text{última}}$  é, em geral, ligeiramente maior do que a diferença de tensões na rutura  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{\text{rutura}}$ . Estes valores podem ser relacionados segundo este parâmetro,  $R_f$ , através da equação (2.9):

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{\text{última}} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_{\text{rutura}}}{R_f} \quad (2.9)$$

O parâmetro  $R_f$  é a razão entre a assíntota da curva hiperbólica e a máxima resistência ao corte, assim este fator representa o quanto a curva tensão/deformação do solo se afasta da hipérbole. Duncan e Chang (1970) indicam que o valor da razão de rutura ( $R_f$ ) é independente do valor da tensão de confinamento ( $\sigma_3$ ) para um determinado tipo de solo e sugerem, empiricamente, que varie entre 0,7 e 0,95, mas Castro (1996) observou um pequeno acréscimo deste fator com o aumento da tensão de confinamento ( $\sigma_3$ ). Ainda assim, Cruz (1996) admite ser comum na prática adotar um valor único para este parâmetro nos cálculos numéricos, mesmo sabendo que o seu valor cresce ligeiramente com o valor da tensão de confinamento ( $\sigma_3$ ).

Substituindo a equação (2.9) na equação (2.6) obtém-se:

$$b = \frac{R_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{\text{rutura}}} \quad (2.10)$$

Reescrevendo a equação (2.4), substituindo o parâmetro  $a$  (2.5) e  $b$  pela equação anterior obtém-se:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{E_i} + \frac{R_f \cdot \varepsilon}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{rutura}}} \quad (2.11)$$

A diferença de tensões na rutura  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rutura}$  pode ser relacionada com a tensão de confinamento através do critério de rutura de Mohr Coulomb:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{rutura} = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \phi + 2 \cdot \sigma_3 \cdot \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (2.12)$$

onde  $c$  é a coesão e  $\phi$  é o ângulo de atrito (parâmetros de resistência Mohr Coulomb). A figura 5, assim como a equação (2.13) são apresentadas para se mostrar como se chega à equação (2.12).

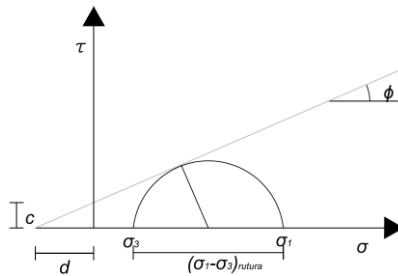


Figura 5 – Critério de rutura de Mohr-Coulomb

$$\left. \begin{aligned} \tan \phi &= \frac{c}{d} \leftrightarrow d = \frac{c \times \cos \phi}{\sin \phi} \\ \sin \phi &= \frac{\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_{rutura}}{2}}{d + \sigma_3 + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_{rutura}}{2}} \end{aligned} \right\} (\sigma_1 - \sigma_3)_{rutura} = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \phi + 2 \cdot \sigma_3 \cdot \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (2.13)$$

Substituindo a diferença de tensões na rutura  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rutura}$ , equação (2.12) na equação (2.11) obtém-se:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{E_i} + \frac{R_f \cdot \varepsilon}{2 \cdot c \cdot \cos \phi + 2 \cdot \sigma_3 \cdot \sin \phi}} \quad (2.14)$$

Duncan e Chang (1970) introduzem a equação de Jambú (1963) que representa a correlação entre o módulo de elasticidade inicial ( $E_i$ ) e a tensão de confinamento ( $\sigma_3$ ) conforme a equação (2.15):

$$E_i = k \cdot p_a \cdot \left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^n \quad (2.15)$$

em que  $\sigma_3$  é a tensão principal mínima (tensão de confinamento no caso de ensaios triaxiais),  $k$  e  $n$  são parâmetros adimensionais de calibração da equação,  $p_a$  é a pressão atmosférica expressa nas mesmas unidades do módulo de elasticidade, comumente assumida como 101,3 kPa. A função da pressão atmosférica é possibilitar a transformação de unidades, uma vez que os valores dos parâmetros  $k$  e  $n$  são independentes da unidade adotada.

Substituindo o módulo de elasticidade inicial, equação (2.15), na equação (2.14) obtém-se:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{k \cdot p_a \cdot \left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^n} + \frac{R_f \cdot \varepsilon}{2 \cdot c \cdot \cos \phi + 2 \cdot \sigma_3 \cdot \sin \phi}} \quad (2.16)$$

Ao assumir a tensão de confinamento ( $\sigma_3$ ) constante é possível obter o módulo de deformabilidade tangente ( $E_t$ ) em qualquer ponto da curva tensão/deformação, fazendo uma derivação dessa equação em função da deformação:

$$E_t = \frac{\partial(\sigma_1 - \sigma_3)}{\partial \varepsilon} = \frac{a}{(a + b \cdot \varepsilon)^2} \quad (2.17)$$

Substituindo na equação (2.17) o parâmetro  $a$  (2.5) e  $b$  (2.10), obtém-se:

$$E_t = \frac{\frac{1}{E_i}}{\left[ \frac{1}{E_i} + \frac{R_f \cdot \varepsilon}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{rutura}} \right]^2} \quad (2.18)$$

A deformação axial ( $\varepsilon$ ), da equação anterior, pode ser colocada em evidência pela reorganização da equação (2.11), resultando assim:

$$\varepsilon = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{E_i \left[ 1 - \frac{R_f \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{rutura}} \right]} \quad (2.19)$$

Pode-se ainda substituir na equação (2.18) a deformação axial (2.19), o módulo de elasticidade inicial (2.15) e, a diferença de tensões na rutura (2.12), obtendo-se, desta forma, a equação proposta por Duncan e Chang (1970):

$$E_t = \left[ 1 - \frac{R_f \cdot (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot (1 - \sin \phi)}{2 \cdot c \cdot \cos \phi + 2 \cdot \sigma_3 \cdot \sin \phi} \right]^2 \cdot k \cdot p_a \cdot \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (2.20)$$

De acordo com Duncan et al. (1980), muitos solos possuem uma não linearidade da variação de volume a qual é dependente do nível de tensões de confinamento e de desvio às quais o solo está submetido. De acordo com a teoria da elasticidade e, assumindo que o módulo de deformação volumétrica varia apenas com a tensão de confinamento, o valor deste pode ser calculado a partir de seguinte equação:

$$B = k_b \cdot p_a \cdot \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^m \quad (2.21)$$

A equação anterior introduz mais dois parâmetros adimensionais de calibração,  $k_b$  e  $m$ , que podem ser interpretados do mesmo modo que  $k$  e  $n$ . Segundo Gerscovich (s.d.), para a maioria dos solos o parâmetro  $m$  varia entre 0 e 1. Fisicamente, os valores negativos de  $m$  significam a redução do valor de  $B$  com o aumento da tensão de confinamento e, em geral,  $B$  cresce com o aumento da tensão de confinamento.

Entretanto, para se obter os parâmetros  $k_b$  e  $m$  da equação anterior é necessário calcular o módulo de deformabilidade tangente ( $E_t$ ). Com este valor é possível determinar o módulo de deformação volumétrica utilizando a relação da teoria da elasticidade para a variação da deformação volumétrica. Duncan et al. (1980) sugerem que o valor do módulo de deformabilidade tangente ( $E_t$ ) utilizado no cálculo do módulo de deformação volumétrica ( $B$ ) seja obtido no ponto  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rutura}$ , porque é onde ocorre a maior deformação antes da plastificação.

$$B = \frac{E_t}{3(1 - 2\nu)} \quad (2.22)$$

É importante salientar que quando  $B$  se aproxima de  $E_t/3$ , o valor do coeficiente de Poisson tende a zero. Por outro lado, se  $B$  é maior do que  $17E_t$  o coeficiente de Poisson iguala a 0,5. Estes limites devem ser evitados.

Em resumo, o modelo hiperbólico tem 7 parâmetros:  $k$  e  $n$  definem a variação do módulo de elasticidade com a tensão de confinamento;  $k_b$  e  $m$  definem a variação do módulo de deformação volumétrica com a tensão de confinamento;  $c$  e  $\phi$  definem a rutura e relacionam  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rutura}$  com  $\sigma_3$ ; e, por sua vez,  $R_f$  relaciona  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{última}$  com  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rutura}$ .

Duncan et al. (1980) fizeram um estudo extenso dos parâmetros de calibração do modelo hiperbólico por meio de dados publicados na literatura. Apresenta-se seguidamente a tabela 1 com os parâmetros encontrados por estes autores:

Tabela 1 – Propriedades de rigidez para solos apresentadas por Duncan et al. (1980) (adaptada de Gerscovich, s.d.)

Classificação	$\phi$ [°]	$c$ [kPa]	$k$	$n$	$k_B$	$m$	$R_f$
GW, GP SW, SP	42	0	600	0,4	175	0,2	0,7
	39	0	450	0,4	125	0,2	0,7
	36	0	300	0,4	75	0,2	0,7
	33	0	200	0,4	50	0,2	0,7
SM	36	0	600	0,25	450	0,0	0,7
	34	0	450	0,25	350	0,0	0,7
	32	0	300	0,25	250	0,0	0,7
	30	0	150	0,25	150	0,0	0,7
SM-SC	33	24	400	0,6	200	0,5	0,7
	33	19	200	0,6	100	0,5	0,7
	33	14	150	0,6	75	0,5	0,7
	33	10	100	0,6	50	0,5	0,7
CL	30	19	150	0,45	140	0,2	0,7
	30	14	120	0,45	110	0,2	0,7
	30	10	90	0,45	80	0,2	0,7
	30	5	60	0,45	50	0,2	0,7

Segundo Gerscovich (s.d.), embora o modelo hiperbólico seja capaz de ter uma boa relação para vários tipos de solo, ele possui limitações:

- O modelo hiperbólico não é aplicável para níveis de tensões e deformações após a rutura, já que é baseado na lei de Hooke generalizada;
- Não considera variações volumétricas devidas a tensões de corte, ou seja, não é aplicável a solos que possuam dilatância;



- Não simula a trajetória de tensão, não considerando assim a influência da tensão principal intermédia ( $\sigma_2$ );
- Além disso, um solo apresenta, após um ciclo completo de carregamento e descarregamento, além das deformações reversíveis ou elásticas, uma parcela não reversível de deformação, e esta característica também não é tida em conta neste modelo.

### 2.3 Otimização

A otimização pode ser simplificada como um método que tem como objetivo identificar a melhor solução de entre as inúmeras disponíveis para um determinado problema, a qual se designa por solução ótima. Identificar esta solução significa determinar os pontos máximo ou mínimo da função que descreve o problema.

Nos últimos anos, os processos de otimização têm sido aplicados em diversas áreas, nomeadamente em geotecnia [2] [8] [9] [10]. Os problemas encontrados são cada vez mais complexos, exigindo por isso algoritmos cada vez mais eficientes.

Existe uma grande variedade de algoritmos de otimização. No entanto, apesar das características de cada um, em geral é desejável que possuam duas importantes propriedades, robustez e eficiência. Devem encontrar uma boa aproximação à solução ótima e não devem requerer muito esforço computacional [11].

Grande parte da rotina de otimização é capaz somente de procurar por um mínimo local. Este facto é problemático pois para a maioria dos problemas práticos é importante encontrar a solução global. Resolver um problema de otimização global é um desafio, tanto do ponto de vista matemático como computacional, pois o esforço envolvido na resolução de problemas desse tipo é substancial.

De acordo com Eclaircy-Caudron et al. (2007), os métodos para os problemas de otimização global podem ser divididos em duas categorias, determinísticos e probabilísticos. Os métodos determinísticos definem o mínimo global através de uma procura exaustiva no conjunto de soluções viáveis e o sucesso do método é garantido somente nas funções que satisfaçam certas condições [5].

Estes métodos apresentam algumas vantagens. O número de iterações necessárias para realizar o processo de otimização é relativamente baixo mas, se a função objetivo apresentar mínimos locais, estes podem convergir para o primeiro mínimo encontrado [12].

Miranda (2007) refere que os métodos determinísticos apresentam um desempenho satisfatório para funções objetivo que, no espaço dos parâmetros, apresentam uma forma convexa com um mínimo claramente definido e único. Fora destas circunstâncias, o que é bastante típico dos problemas da geomecânica, estes algoritmos apresentam problemas ao nível da convergência.

O mesmo autor afirma, que estes métodos só podem ser usados para determinar um número reduzido de parâmetros (2 ou 3). À medida que o número de parâmetros aumenta, surgem problemas relacionados com a não unicidade da solução e com a convergência do processo. Estas desvantagens explicam porque é que esses métodos são raramente utilizados em problemas complexos. Para tais problemas são preferidos os métodos probabilísticos.

Guimarães (2008) explica que grande parte dos métodos probabilísticos baseiam-se em variações da procura aleatória pura. Alguns métodos são usados apenas para problemas de otimização discretos, enquanto outros podem ser utilizados em ambos os problemas, discretos e contínuos. Todos os métodos probabilísticos envolvem elementos aleatórios para determinar o ponto máximo ou mínimo global, mas cada um utiliza uma forma diferente para reduzir o esforço computacional.

Guimarães (2008) indica ainda que estes métodos são mais apropriados para problemas em que a dimensão do espaço de busca é alta, como por exemplo no caso da estimação de parâmetros geomecânicos, mas, no entanto, exigem mais cálculos da função objetivo quando comparados com os métodos determinísticos.

Os métodos probabilísticos incluem algoritmos evolutivos tais com Algoritmos Genéticos. Os algoritmos evolutivos são capazes de reproduzir a evolução natural das espécies nos sistemas biológicos e podem ser usados como uma ferramenta robusta de otimização global [12].

Em vários trabalhos sobre esta temática, nomeadamente em Miranda (2007) é apontada como principal desvantagem destes algoritmos o número elevado de iterações que normalmente necessitam para atingirem a convergência o que pode comportar um peso computacional muito elevado. Este problema revela-se de particular importância quando se utilizam modelos numéricos complexos (modelos numéricos tridimensionais recorrendo a modelos constitutivos

complexos) pois o esforço computacional pode transformar o procedimento de otimização inviável.

### 2.3.1 Algoritmos Genéticos

Os Algoritmos Genéticos pertencem à classe de algoritmos de otimização de procura estocástica, que utilizam regras probabilísticas e que não precisam da derivada da função erro [13]. Trata-se de um modelo computacional inspirado no princípio da seleção natural e sobrevivência do mais apto, proposto por Charles Darwin em 1859. Estes algoritmos foram introduzidos por John Holland, em meados dos anos 70, na Universidade de Michigan, e popularizados por um dos seus alunos, David Goldberg. Os Algoritmos Genéticos têm sido aplicados com sucesso em muitas áreas, especialmente em problemas de otimização numérica [14] [11] [15].

Os componentes básicos dos Algoritmos Genéticos são a população de indivíduos, onde cada um deles representa uma potencial solução para o problema, o mecanismo de avaliação dos indivíduos da população e os operadores genéticos que procuram novas soluções [10]. A figura 6 ilustra, simplificada, o funcionamento de um algoritmo genético.

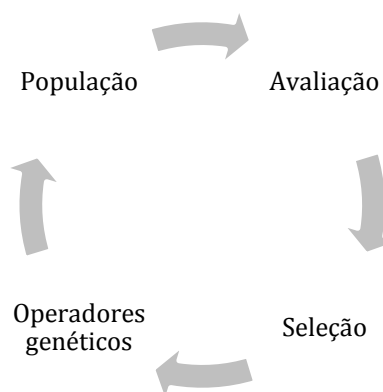


Figura 6 – Funcionamento simplificado do Algoritmo Genético (adaptado de Costa, 2003)

Estes algoritmos trabalham com uma população de potenciais soluções, ou indivíduos, em que é aplicado o princípio de sobrevivência dos melhores, ou seja, os indivíduos mais aptos tem

melhor probabilidade de serem selecionados (para progenitores) e gerar novos indivíduos (descendência). A geração de novos indivíduos é efetuada através de mecanismos baseados na genética. Assim, os descendentes são gerados a partir da recombinação dos progenitores herdando algumas das suas características. Além disso, a mutação é aplicada com o objetivo de permitir o aparecimento de algumas características verdadeiramente inovadoras. Os descendentes gerados competem entre si e com os progenitores. Este processo é repetido ao longo de um número determinado de gerações. Ao longo das gerações, com este processo, a população tende a ter cada vez melhores indivíduos [11].

Tal como acontece na adaptação natural, quando uma população de indivíduos evolui ao longo de gerações, as melhores características de sobrevivência tem tendência a ser transmitidas para as gerações seguintes, já que os indivíduos que possuem tais características têm maior probabilidade de sobreviver e de se reproduzir. Essas características individuais são armazenadas no genótipo. Os mecanismos de genética natural baseiam-se em operações que resultam numa troca aleatória de informação genética entre os cromossomas dos progenitores, sendo esses mecanismos a base dos Algoritmos Genéticos desenvolvidos por Holland, utilizando metodologias matemáticas apoiadas em processos como o cruzamento de informação entre cromossomas e a sua mutação [16].

De acordo com Levasseur et al. (2007) os Algoritmos Genéticos podem fornecer um conjunto de soluções satisfatórias e, portanto, podem ser implementados para resolver diferentes tipos de problemas. Eles são robustos e altamente eficientes mas, como são baseados numa metodologia heurística podem não garantir a identificação exata da solução ótima. No entanto, os mecanismos genéticos tais como reproduções, cruzamentos e mutações, permitem localizar um conjunto ótimo de soluções próximas do ótimo global, num determinado espaço de procura, mesmo com dados ruidosos. Para melhorar o desempenho destes algoritmos dever-se-á considerar métodos híbridos [17].

Os Algoritmos Genéticos são eficazes na identificação de zonas promissoras de espaços de procura, mas menos bons em termos de precisão. Entretanto, os algoritmos de procura local de pesquisa em padrão têm um bom desempenho na melhoria da precisão da aproximação. A hibridação de um Algoritmo Genético consiste na combinação de técnicas de otimização global e local.

Neste contexto, o Hybrid Genetic Pattern Search Augmented Lagrangian method (HGPSAL), é bastante promissor. É um algoritmo genético híbrido, relativamente recente, baseado num padrão de busca local para refinar a melhor aproximação encontrada pelo Algoritmo Genético. O estudo realizado por Costa et al. (2012), utilizando este algoritmo, concluiu que este exibe um bom desempenho em termos de exatidão e precisão na obtenção de aproximações ótimas. Os autores concluem que o algoritmo se mostra competitivo e eficiente quando comparado com outros.



## Capítulo 3

### METODOLOGIA

#### 3.1 Introdução

Nesta secção apresenta-se a metodologia utilizada para a resolução do problema de retroanálise do tipo direto. O procedimento de retroanálise inicia-se pela introdução dos dados resultantes da monitorização no programa que neste estudo correspondem a deslocamentos. Posteriormente, é gerada aleatoriamente uma potencial solução (parâmetros iniciais), através do algoritmo de otimização implementado no MATLAB. A solução diz respeito ao valor dos parâmetros que se pretendem identificar. Seguidamente, a solução é introduzida no modelo numérico, FLAC, e este calcula a resposta (deslocamentos) correspondente aos parâmetros iniciais. Estes deslocamentos são comparados com os deslocamentos resultantes da monitorização e é calculado o erro, ou seja, a diferença entre estes deslocamentos. Esta última operação é realizada pela função objetivo. É então desenvolvido um processo iterativo, realizado pelo algoritmo de otimização até que seja cumprido o critério de otimização. A cada iteração é gerada uma nova solução para o problema, ou seja, um novo conjunto de valores de parâmetros geomecânicos. Quando se verificar o critério de paragem, o processo iterativo é interrompido e a solução é o conjunto de parâmetros correspondente ao mais baixo valor da função objetivo. O critério de paragem definido para o presente trabalho é o número mínimo de iterações a realizar pelo algoritmo de otimização.

O procedimento de retroanálise encontra-se esquematizado na figura 7.

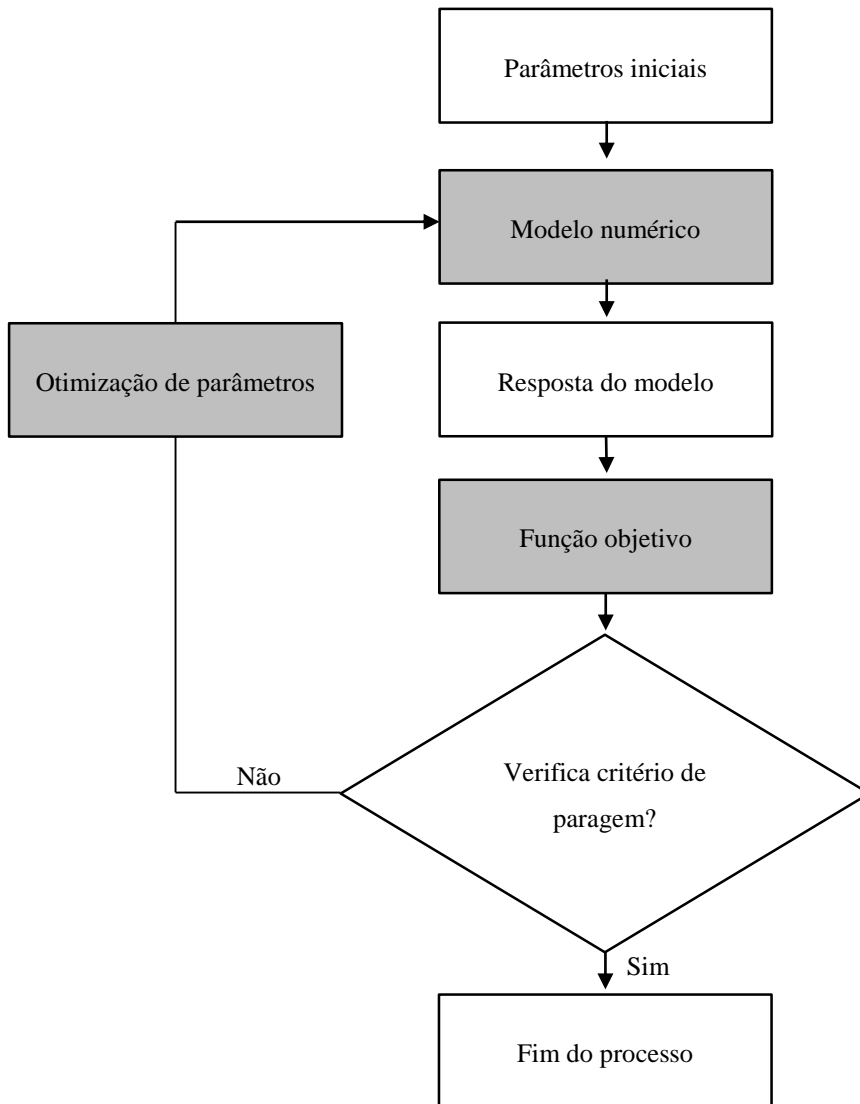


Figura 7 – Esquema do procedimento de retroanálise (adaptado de Miranda, 2007)

### 3.2 Modelo numérico

Neste trabalho foi analisado um caso teórico correspondente à escavação de um túnel com o objetivo de testar as capacidades do algoritmo, em termos de eficiência e robustez, na identificação de parâmetros geomecânicos.

A modulação do túnel e do maciço envolvente foi efetuada com recurso a um programa comercial, FLAC 3D. Este é um programa computacional programado em diferenças finitas, capaz de simular sequências construtivas de obras de engenharia civil.



No método de diferenças finitas, o processo de discretização é baseado na substituição de derivadas contínuas de equações que governam o problema por expressões algébricas. Estas expressões são escritas em função de variáveis de campo, como deslocamentos e tensões, em pontos discretos no espaço [18].

Os materiais são representados por elementos ou zonas, os quais formam uma malha que é ajustada pelo utilizador para se adequar à forma do objeto a ser modelado. Cada elemento tem um comportamento de acordo com o modelo constitutivo prescrito em resposta às forças aplicadas ou condições de contorno.

Neste programa, para atualizar as coordenadas da malha, considerando grandes deformações, são acrescentados deslocamentos incrementais às coordenadas das malhas, de tal forma que a malha move-se e deforma-se com o material que ela representa. Tal formulação é designada Lagrangiana, de onde deriva o seu nome, Fast Lagrangian Analysis of Continua [19].

O FLAC possui uma biblioteca de modelos constitutivos bastante completa, permitindo ainda que o utilizador introduza e utilize o seu próprio modelo constitutivo. Utilizaram-se no presente estudo dois modelos constitutivos, o modelo elástico linear e o modelo hiperbólico. O último não consta da biblioteca de leis constitutivas do FLAC, e foi programado pelo Professor Daniel Dias da University Joseph Fourier, Grenoble. Ambos foram utilizados para identificação de parâmetros geomecânicos, desenvolvendo-se por isso duas análises distintas.

O modelo tridimensional foi desenvolvido através do método das diferenças finitas, de forma a simular a geometria do túnel e a sua sequência construtiva. A malha é composta por 1110 elementos e 1375 nós. Este modelo foi originalmente desenvolvido por Miranda (2007).

O modelo utilizado corresponde a um túnel, localizado a 20 m de profundidade (até o coroamento do túnel), com 20 m de desenvolvimento composto por um arco com 4 m de altura e uma parede vertical com a mesma extensão.

O processo de construção inicia-se com a escavação do arco do túnel num comprimento de 3 m seguido pela aplicação de betão projetado no arco. Posteriormente, é escavada a restante parte do túnel e finalmente é aplicado betão projetado nas paredes e soleira deste.

O sistema de suporte é composto por 20 cm de espessura de betão projetado simulado por elementos de casca com um comportamento isotrópico elástico linear, com um módulo de elasticidade ( $E$ ) de 20 GPa e um coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) de 0,2. O maciço foi simulado como

um meio contínuo com um coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) de 0,1, e um peso volúmico ( $\gamma$ ) de 25 kN/m<sup>3</sup>.

A figura 8 ilustra a configuração do túnel analisado.

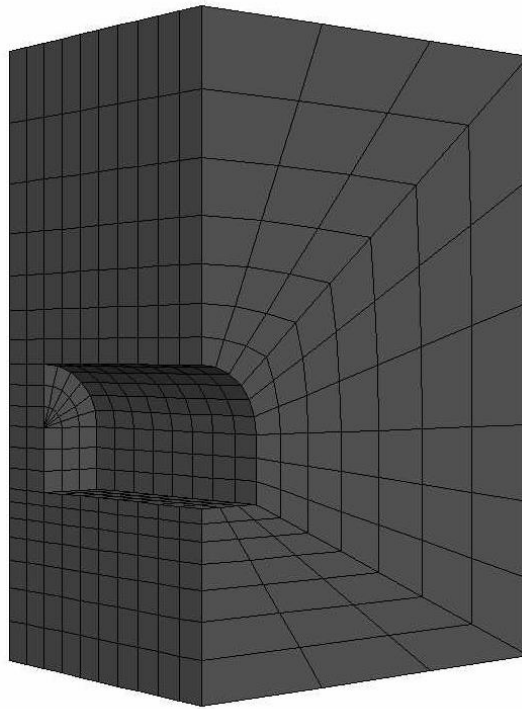


Figura 8 – Geometria do modelo numérico

### 3.2.1 Modelo constitutivo elástico linear

A utilização deste modelo constitutivo teve como objetivo a calibração do modelo e a verificação da eficiência e robustez do novo algoritmo de otimização empregue. Trata-se do modelo constitutivo mais simples, uma vez que a descrição dos materiais elásticos lineares é possível através da determinação de apenas duas constantes elásticas. Assim, com este modelo constitutivo pretendeu-se identificar dois parâmetros, o módulo de elasticidade ( $E$ ) e o coeficiente de impulso em repouso ( $K_0$ ). Para estimar estes parâmetros consideraram-se quatro dados resultantes da monitorização, que neste trabalho correspondem a deslocamentos. Uma vez que se trata de um caso teórico os deslocamentos são obtidos numericamente e não *in situ*.

Porém, doravante, estes deslocamentos calculados numericamente são considerados com obtidos pela monitorização de campo.

Os deslocamentos considerados são: o deslocamento vertical à superfície do maciço; o deslocamento vertical do coroamento e da soleira do túnel; e, o deslocamento horizontal da parede do túnel. Apresentam-se seguidamente na figura 9 os pontos monitorizados.

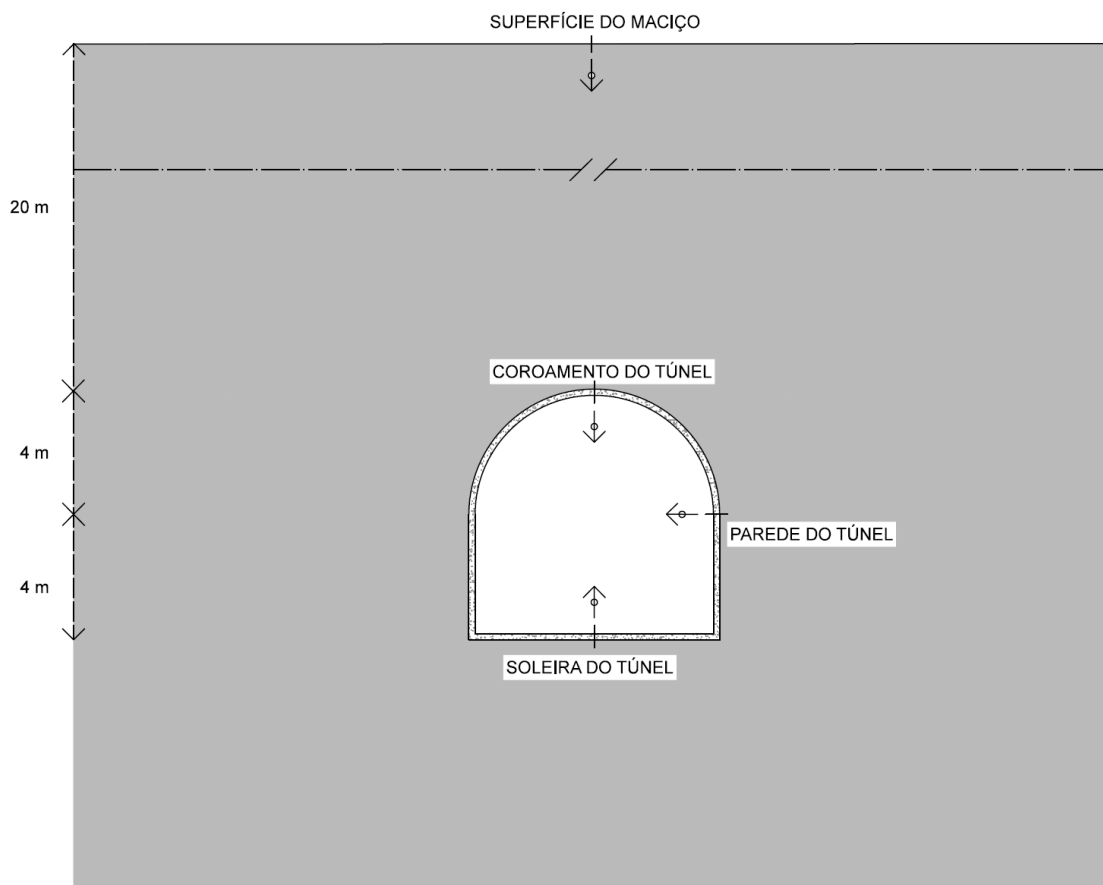


Figura 9 – Localização dos pontos monitorizados e direção dos deslocamentos considerados, com o modelo elástico linear

Foram definidos quatro casos de estudo distintos, um considerando os quatro deslocamentos e os outros três considerando apenas dois deslocamentos, através de diferentes combinações. Estes casos de estudo tem como objetivo por um lado avaliar a influência do número de dados de monitorização e, por outro, analisar a influência da localização destes pontos.

No primeiro caso consideraram-se os quatro deslocamentos: o deslocamento vertical da superfície do maciço, o deslocamento vertical do coroamento e da soleira do túnel, e o deslocamento horizontal da parede do túnel. Designou-se este caso de MEL-1 (modelo elástico linear 1). Nos seguintes casos consideraram-se dois deslocamentos. No segundo caso consideraram-se o deslocamento vertical do coroamento do túnel e o deslocamento horizontal da parede do túnel (MEL-2). No terceiro caso consideraram-se o deslocamento vertical da superfície do maciço e o deslocamento horizontal da parede do túnel (MEL-3). E, no quarto caso consideraram-se o deslocamento vertical da superfície do maciço e o deslocamento vertical do coroamento do túnel (MEL-4).

Mostra-se, a seguir, uma tabela síntese dos casos de estudo (tabela 2).

Tabela 2 – Casos de estudo do modelo elástico linear

Caso	Medições	
	Número	Local
MEL-1	4	Superfície, coroamento, soleira e parede
MEL-2	2	Coroamento e parede
MEL-3	2	Superfície e parede
MEL-4	2	Superfície e coroamento

Assim, a análise começou com a definição de um conjunto de parâmetros geomecânicos que foram atribuídos ao maciço para obter os resultados simulados da monitorização da secção central do túnel correspondente a uma fase intermédia da escavação.

Procedeu-se deste modo a uma análise convencional. Adotou-se um módulo de deformabilidade ( $E$ ) de 2 GPa e um coeficiente de impulso em repouso ( $K_0$ ) de 0,8. Estes valores já haviam sido adotados na análise deste mesmo modelo numérico mas com outros algoritmos de otimização [2] [8] [9].

Segue-se a tabela 3 com os deslocamentos obtidos através desta análise. Importa salientar que estes valores correspondem aos deslocamentos máximos, da seção central do túnel, verificados no final de todas as fases construtivas.

Tabela 3 – Deslocamentos dos pontos monitorizados, com o modelo elástico linear

Localização	Deslocamentos (mm)
Soleira do túnel	1,810
Coroamento do túnel	1,278
Parede do túnel	1,045
Superfície do maciço	0,493

Estes deslocamentos foram obtidos com o modelo numérico. Apresenta-se, em seguida, a figura 10 com a magnitude dos deslocamentos no túnel e no maciço envolvente, retirada do FLAC 3D.

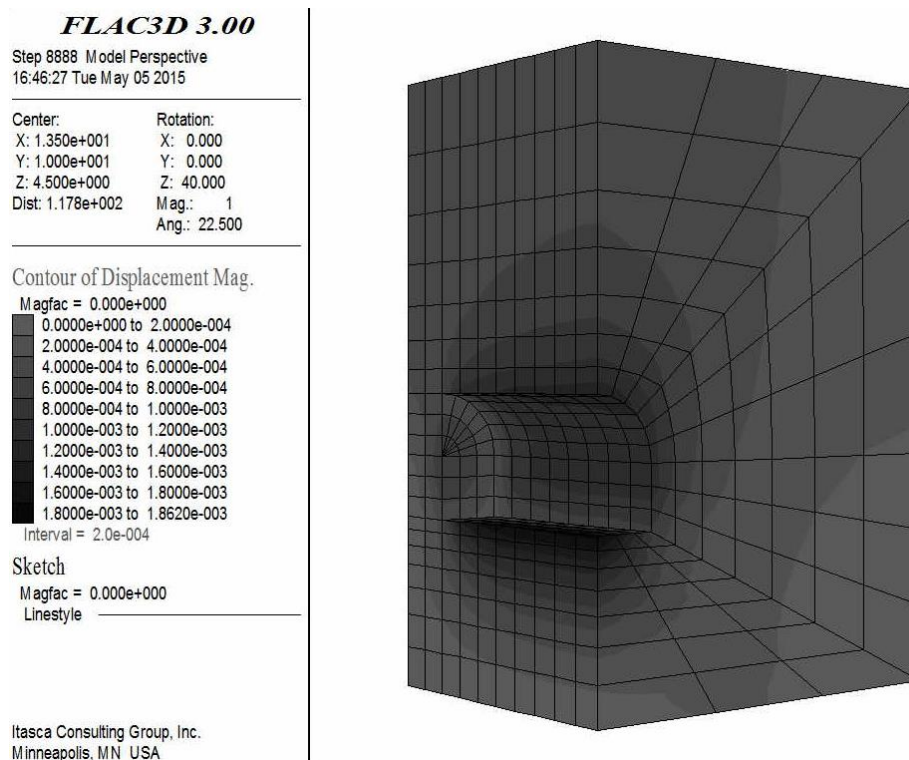


Figura 10 – Magnitudes dos deslocamentos no túnel e maciço envolvente, com o modelo elástico linear

Como se pode constatar, através da referida figura, o local onde se verificam os maiores deslocamentos corresponde à soleira do túnel e o local onde se verificam os menores deslocamentos corresponde à superfície do maciço.

### 3.2.2 Modelo constitutivo hiperbólico

O modelo constitutivo hiperbólico é bastante mais complexo do que o elástico linear. Para a descrição do comportamento elástico não linear (modelo hiperbólico) é necessário a identificação de sete parâmetros:  $k$  e  $n$  definem a variação do módulo de elasticidade com a tensão de confinamento;  $k_b$  e  $m$  definem a variação do módulo de deformação volumétrica com a tensão de confinamento;  $c$  e  $\phi$  definem a envolvente de rutura; e por último a razão de rutura,  $R_f$ .

Dada a complexidade deste modelo desenvolveram-se dois conjuntos de casos de estudo. Num primeiro conjunto atribuíram-se valores aos parâmetros considerando um solo concreto da tabela 1, pois trata-se de um solo real, logo os valores atribuídos aos parâmetros do modelo correspondem a valores verosímeis, assim como a relação entre eles. Pretendeu-se seleccionar um caso em que não houvessem parâmetros com valores nulos e, entre estes o que tivesse os parâmetros de resistência ao corte mais elevados, pois era expectável plastificação excessiva devido ao método construtivo considerado.

Num segundo conjunto atribuíram-se os mesmos valores aos parâmetros, do referido solo real, aumentando-se apenas os parâmetros de resistência ao corte. Estes parâmetros foram assumidos considerando um solo rijo/rocha branda, para permitir a utilização do método construtivo. Este conjunto foi desenvolvido pois previu-se deslocamentos excessivos no primeiro, uma vez que, o método de escavação não é o mais adequado para aquele tipo de maciços. O maciço em questão corresponde a um maciço terroso e, o método de escavação e o sistema de suporte utilizados são mais adequados para maciços rochosos.

Assim, designou-se modelo constitutivo hiperbólico 1 o primeiro conjunto de casos de estudo e, modelo constitutivo hiperbólico 2 o segundo conjunto de casos de estudo.

- **Modelo constitutivo hiperbólico 1**

Os valores atribuídos aos parâmetros do modelo hiperbólico 1 encontram-se na tabela 4.

Tabela 4 – Valores atribuídos aos parâmetros geomecânicos, com o modelo hiperbólico 1

Parâmetro	$k$	$n$	$k_b$	$m$	$c[kPa]$	$\phi [^\circ]$	$R_f$
Valor	400	0,6	200	0,5	24	33	0,7

Os pontos monitorizados foram os mesmos que os utilizados no modelo elástico linear. Assim, também com o modelo constitutivo hiperbólico 1 se determinaram os deslocamentos que seriam posteriormente considerados como dados resultantes da monitorização de campo. Para obter os resultados simulados da monitorização adotaram-se os valores dos parâmetros apresentados na tabela 4 e através de uma análise convencional calcularam-se os deslocamentos. Os resultados obtidos pelo programa, relativos à secção de referência, figuram na tabela 5.

Tabela 5 – Deslocamentos dos pontos monitorizados, com o modelo hiperbólico 1

Localização	Deslocamentos (cm)
Soleira do túnel	16,942
Coroamento do túnel	28,028
Parede do túnel	9,975
Superfície do maciço	3,578

Apresenta-se, a figura 11 com a magnitude dos deslocamentos, retirada do FLAC 3D.

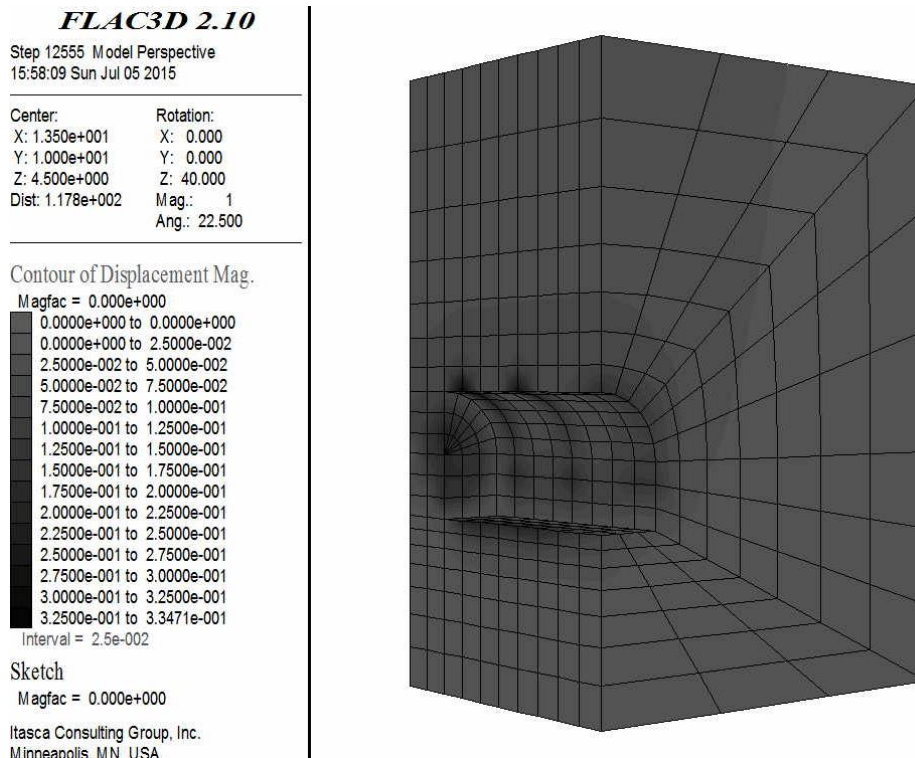


Figura 11 – Magnitudes dos deslocamentos no túnel e maciço envolvente, com o modelo hiperbólico 1

Como se pode confirmar, através da figura anterior, o local onde se verificam os maiores deslocamentos corresponde ao coroamento do túnel e o local onde se verificam os menores deslocamentos corresponde à superfície do maciço. É também neste local que se verificam os menores deslocamentos com o modelo linear elástico. Contudo, o local onde se verificam os maiores deslocamentos com o modelo linear elástico, soleira do túnel, é diferente do local com o modelo hiperbólico.

Em termos de grandeza pode-se considerar que estes deslocamentos são elevados. Estes podem dever-se a roturas consideráveis no modelo nas imediações da escavação, como pode ser observado na figura 12. Estas roturas tornam o problema de retroanálise ainda mais complexo porque aumenta a sua não linearidade. Assim, o algoritmo neste caso é testado em condições extremamente adversas.



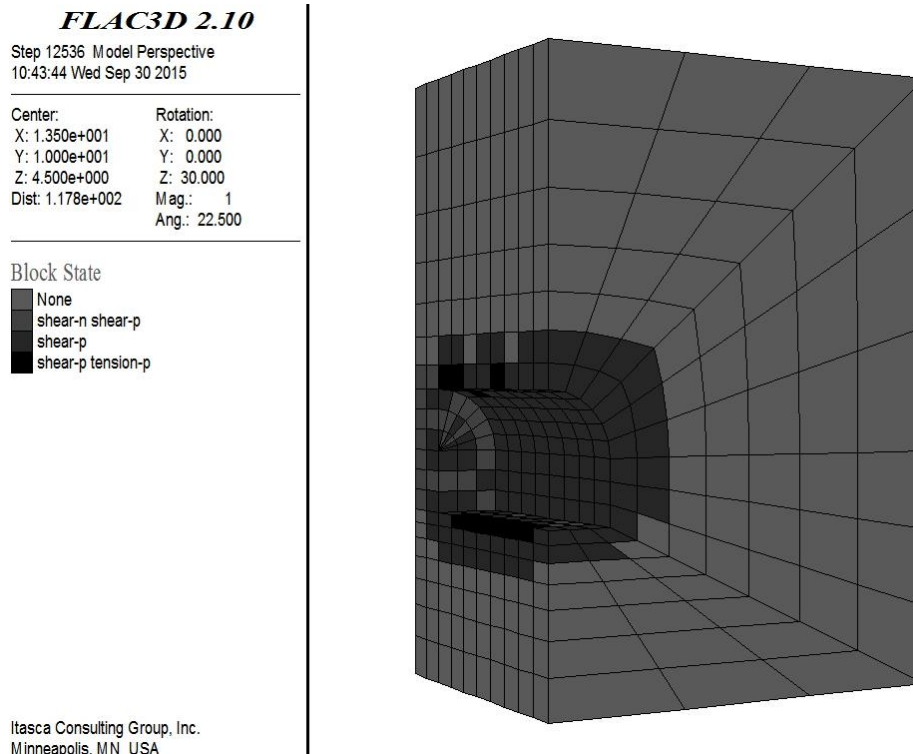


Figura 12 – Zonas em rotura da estrutura

Como neste modelo constitutivo existe um número substancial de parâmetros envolvidos no processo de retroanálise, para testar o desempenho do algoritmo na identificação dos parâmetros foram analisados três casos de estudo distintos. No primeiro pretendeu-se identificar dois parâmetros  $k$  e  $k_b$ , designou-se este caso de MH1-1 (modelo hiperbólico 1, caso de estudo 1). No segundo caso de estudo pretendeu-se identificar quatro parâmetros, os dois anteriormente referidos e  $n$  e  $m$  (MH1-2). No último caso de estudo pretendeu-se identificar seis parâmetros,  $k$ ,  $k_b$ ,  $n$ ,  $m$ ,  $c$  e  $\phi$  (MH1-3). Uma vez que é comum na prática adotar um valor único para  $R_f$  nos cálculos numéricos (0,7), este parâmetro não será estimado neste trabalho.

Mostra-se, a seguir, uma tabela síntese dos casos de estudo (tabela 6).

Tabela 6 – Casos de estudo do modelo hiperbólico 1

Caso	Número de medições	Parâmetros a estimar	
		Número	Designação
MH1-1	4	2	$k$ e $k_b$
MH1-2	4	4	$k$ , $k_b$ , $n$ e $m$
MH1-3	4	6	$k$ , $k_b$ , $n$ , $m$ , $c$ e $\phi$

- **Modelo constitutivo hiperbólico 2**

Os valores atribuídos aos parâmetros do modelo hiperbólico encontram-se na tabela 7.

Tabela 7 – Valores atribuídos aos parâmetros geomecânicos, com o modelo hiperbólico 2

Parâmetro	$k$	$n$	$k_b$	$m$	$c[kPa]$	$\phi$ [°]	$R_f$
Valor	400	0,6	200	0,5	100	45	0,7

Neste conjunto de casos de estudo foi aumentado o número de pontos de monitorização, uma vez que se quer analisar a influência do número de medições no desempenho do algoritmo. Foram acrescentados mais três pontos, todos localizados no interior do maciço; um localizado a 6 m, medidos na horizontal, da parede do túnel; um outro fica localizado entre o coroamento do túnel e a superfície do maciço, mais concretamente a 6 m do coroamento, medidos verticalmente; e, um último a 6 m da soleira do túnel, medidos na vertical.

Apresentam-se seguidamente na figura 13 a localização dos pontos monitorizados e direção dos deslocamentos considerados.

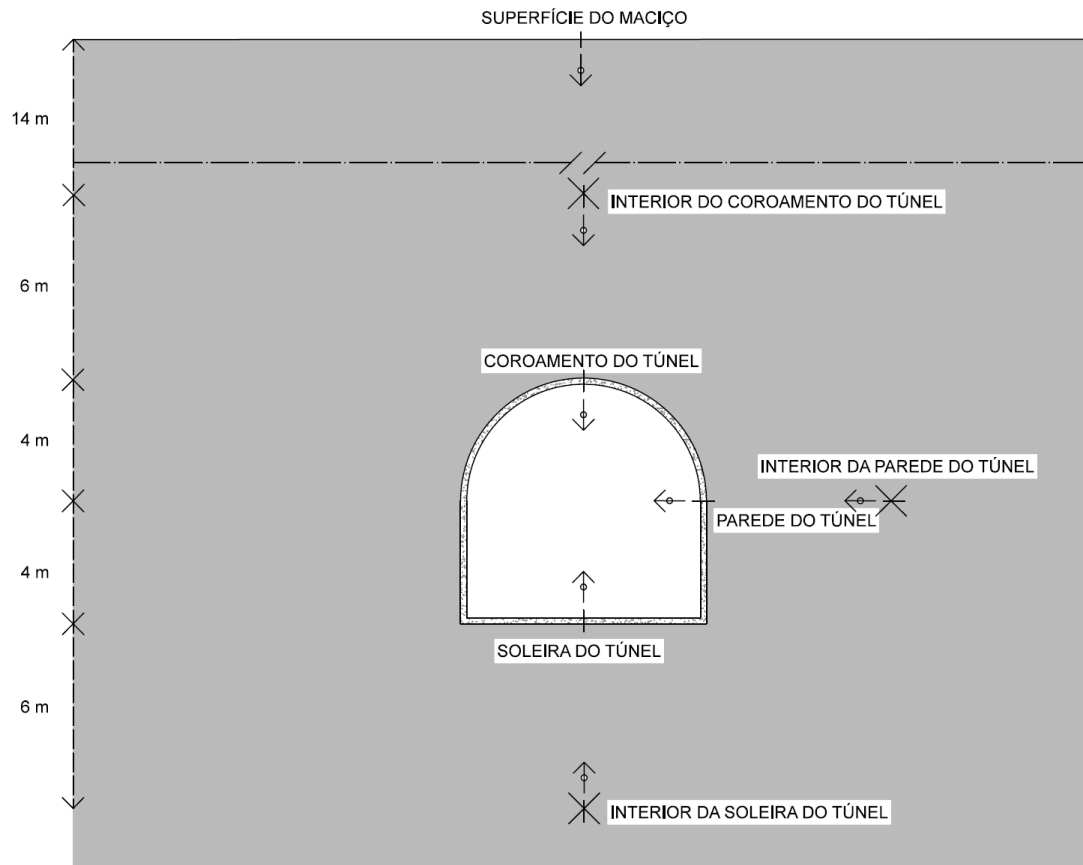


Figura 13 – Localização dos pontos monitorizados e direção dos deslocamentos considerados, com o modelo hiperbólico 2

Os deslocamentos obtidos pelo programa, considerando os valores dos parâmetros apresentados na tabela 7 apresentam-se expostos na tabela 8. Importa salientar uma vez mais que estes valores correspondem aos deslocamentos máximos, da seção central do túnel, verificados no final de todas as fases construtivas.

Tabela 8 – Deslocamentos dos pontos monitorizados, com o modelo hiperbólico 2

Localização	Deslocamentos (cm)
Soleira do túnel	5,872
Coroamento do túnel	3,434
Parede do túnel	3,248
Superfície do maciço	1,181
Interior da soleira do túnel	0,647
Interior do coroamento do túnel	1,607
Interior da parede do túnel	0,746

Apresenta-se a figura 14 com a magnitude dos deslocamentos, retirada do FLAC 3D.

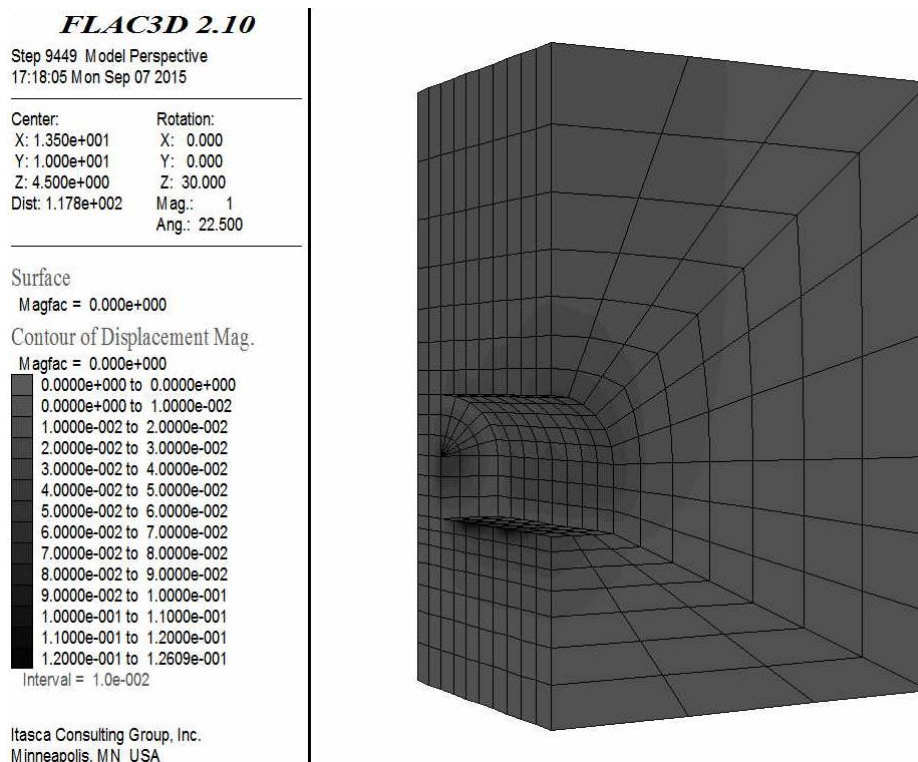


Figura 14 – Magnitudes dos deslocamentos no túnel e maciço envolvente, com o modelo hiperbólico 2

Através da figura anterior pode-se aferir que o local onde se verificam os maiores deslocamentos corresponde à soleira do túnel e o local onde se verificam os menores deslocamentos corresponde ao ponto localizado no interior da parede do túnel.

Foram estudados seis casos distintos para avaliar o desempenho do algoritmo empregue. Em três dos casos, os parâmetros foram estimados considerando os deslocamentos de quatro pontos monitorizados, os mesmos pontos utilizados no modelo elástico linear e no modelo constitutivo hiperbólico 1. Nos outros três casos os parâmetros foram estimados considerando os sete pontos monitorizados identificados na figura 13.

A designação dos casos de estudo, o número dos pontos considerados, assim como os parâmetros a estimar encontram-se sintetizados na tabela 9.

Tabela 9 – Casos de estudo do modelo hiperbólico 2

Caso	Número de medições	Parâmetros a estimar	
		Número	Designação
MH2-4	7	2	$k$ e $k_b$
MH2-5	4	2	$k$ e $k_b$
MH2-6	7	4	$k, k_b, n$ e $m$
MH2-7	4	4	$k, k_b, n$ e $m$
MH2-8	7	6	$k, k_b, n, m, c$ e $\phi$
MH2-9	4	6	$k, k_b, n, m, c$ e $\phi$

### 3.3 Função objetivo

O problema de retroanálise é transformado num problema de estimação de parâmetros geomecânicos. Procura-se então estimar os parâmetros através da minimização de uma função objetivo entre os dados observados e os calculados no modelo numérico, através de um processo iterativo em que em cada iteração se alteram os parâmetros do modelo até que a resposta seja a

mais próxima dos dados observados. A função objetivo utilizada foi a de mínimos quadrados, traduzida pela equação (3.23):

$$\varepsilon = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m \left[ \frac{n_j - f_j(x)}{n_j} \right]^2 = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m \left[ 1 - \frac{f_j(x)}{n_j} \right]^2 \quad (3.23)$$

onde  $\varepsilon$  é o erro médio quadrático,  $x$  é o vetor de  $n$  componentes dos parâmetros a identificar,  $n_j$  é a medida  $j$  obtida durante a construção do túnel,  $f_j$  é o valor calculado correspondente à medida  $j$  e  $m$  é o número da medição *in situ*.

### 3.4 Otimização

Um problema de otimização consiste, no âmbito desta dissertação, na minimização de uma função objetivo sem restrições, apenas se impõem limites simples aos valores dos parâmetros que são utilizados para definir intervalos de variação dos parâmetros a identificar. O problema tratado neste trabalho corresponde a um problema de otimização contínuo, ou seja, a procura da solução ótima é efetuada num conjunto infinito de pontos.

A minimização da função objetivo é executada por um algoritmo designado por HGPSAL, o qual se encontra programado em MATLAB. O HGPSAL [20] é um Algoritmo Genético híbrido com procura local que utiliza uma técnica baseada na Lagrangiana Aumentada para tratamento de restrições. Esta técnica consiste em determinar um novo problema equivalente ao problema original, associando a cada uma das restrições um multiplicador de Lagrange. Com este procedimento o problema com restrições é transformado num problema sem restrições. A função Lagrangiana Aumentada permite a solução do problema através de uma sequência de sub-problemas simples. Para a solução de cada sub-problema, é utilizado um Algoritmo Genético para executar uma procura global, seguido de um procedimento de procura local. Este último procedimento é conduzido por um algoritmo de pesquisa em padrão, o algoritmo Hooke e Jeeves.

Em suma, o HGPSAL é constituído por três metodologias:

- A função Lagrangiana Aumentada para tratamento das restrições;

- O Algoritmo Genético como otimizador global;
- O algoritmo Hooke e Jeeves de pesquisa em padrão como otimizador local.

Os algoritmos têm características específicas, e os valores atribuídos pelo utilizador aos argumentos que os constituem influenciam o seu desempenho. É o valor que se imputa a estes argumentos que, por exemplo delimita o número de iterações (e conseqüentemente o tempo de computação), o tamanho da população, o número de gerações, etc. Valores diferentes atribuídos a estes argumentos conduzem, certamente, a soluções completamente distintas. Assim, neste capítulo revelou-se de elevada importância, a apresentação dos valores considerados.

Salienta-se que o algoritmo foi implementado por Costa et al. (2012) e os valores dos correspondentes argumentos foram calibrados por estes autores. Ainda assim importa referir que se o utilizador pretender pode alterar estes valores. No presente trabalho apenas se definiu o número mínimo de iterações a realizar pelo algoritmo HGPSAL, possuindo os algoritmos Genético e Hooke Jeeves variáveis distintas para controlo do número de iterações, pré-estabelecidas por Costa et al. (2012) para funcionamento ideal do algoritmo. Nesta situação, o número de iterações realizadas será sempre igual ou superior a 1000, motivado pela finalização do processo iterativo pelo algoritmo HGPSAL apenas com a conclusão prévia dos restantes algoritmos.

Apresentam-se a seguir, as tabelas 10, 11 e 12 com os argumentos e os valores considerados para a função Lagrangiana Aumentada, Algoritmo genético e algoritmo Hooke e Jeeves, respetivamente.

Tabela 10 – Argumentos e valores considerados para a função Lagrangiana Aumentada

Designação	<i>omega0</i>	<i>alfaw</i>	<i>alfa_eta</i>	<i>betaw</i>	<i>beta_eta</i>	<i>gama1</i>	<i>teta_miu</i>
Valor	1	0,9	0,81	0,9	0,45	0,5	0,5

Tabela 11 – Argumentos e valores considerados para o Algoritmo Genético

Designação	<i>pop_size</i>	<i>elite_prop</i>	<i>tour_size</i>	<i>pcross</i>	<i>icross</i>	<i>pmut</i>	<i>imut</i>
Valor	40	0,1	2	0,9	20	0,1	20

Tabela 12 – Argumentos e valores considerados para o algoritmo Hooke e Jeeves

Designação	<i>gama</i>	<i>delta</i>	<i>teta</i>
Valor	1	1	0,5

Este algoritmo não utiliza aproximação inicial da solução mas restrições aos valores dos parâmetros que são utilizadas para definir intervalos de variação para os parâmetros geomecânicos a identificar. Neste contexto foram estabelecidas diferentes magnitudes para os intervalos de modo a avaliar a estabilidade do algoritmo.

Uma vez que o modelo constitutivo elástico linear é relativamente simples, e com este modelo apenas se pretendeu identificar dois parâmetros, para cada caso de estudo foram definidos três intervalos de variação. Assim, é possível analisar a influência do espaço de procura. A sua designação assim como os limites de cada intervalo encontram-se na tabela 13.

Tabela 13 – Intervalos dos parâmetros geomecânicos, com o modelo elástico linear

Designação	<i>E</i> (GPa)		<i>K<sub>0</sub></i>	
	Limite inferior	Limite superior	Limite inferior	Limite superior
Pequeno	1,5	3	0,6	1
Médio	1	4	0,6	1,5
Grande	0,5	10	0,3	2

Como a influência do espaço de procura é analisada com o modelo constitutivo anterior, e o modelo hiperbólico é mais complexo, apenas se considerou um intervalo para cada parâmetro. Estes figuram nas tabelas 14 e 15.



Tabela 14 – Intervalos dos parâmetros geomecânicos, com o modelo hiperbólico 1

Parâmetro	$k$	$n$	$k_b$	$m$	$c$ [kPa]	$\phi$ [°]
Limite inferior	10	0,1	10	0,1	10	20
Limite superior	900	1	900	1	50	50

Tabela 15 – Intervalos dos parâmetros geomecânicos, com o modelo hiperbólico 2

Parâmetro	$k$	$n$	$k_b$	$m$	$c$ [kPa]	$\phi$ [°]
Limite inferior	10	0,1	10	0,1	10	20
Limite superior	900	1	900	1	150	50



## Capítulo 4

### RESULTADOS E DISCUSSÃO

#### 4.1 Resultados do modelo constitutivo elástico linear

Como já foi referido, com este modelo desenvolveram-se quatro casos de estudo para a identificação de dois parâmetros geomecânicos, o módulo de elasticidade ( $E$ ) e o coeficiente de impulso em repouso ( $K_0$ ). Num dos casos existem quatro dados de entrada (deslocamentos) nos restantes três casos existem dois dados de entrada. Em todos os casos foram realizadas 1255 iterações, que demoraram cerca de 9,5 horas. A duração de cálculo depende das características do computador utilizado. Assim importa referir as características deste:

- Processador: Intel (R) Core (TM) i7 2600 CPU 3,4 GHz
- RAM: 8 GB
- Sistema operativo: 64 bits

##### 4.1.1 Caso de estudo MEL-1

Com este caso de estudo, pretendeu-se identificar os referidos parâmetros considerando quatro deslocamentos.

Apresentam-se, seguidamente, as tabelas 16 e 17 com os resultados obtidos com este caso e para todos os intervalos considerados.

Tabela 16 – Resultados do caso de estudo MEL-1 - Parâmetros

Caso	Intervalo	Parâmetros	
		$E$ (GPa)	$K_0$
MEL-1	Pequeno	2,0021	0,7997
	Médio	2,0002	0,7999
	Grande	1,9997	0,8011

Tabela 17 – Resultados do caso de estudo MEL-1 - Deslocamentos

Localização	Deslocamentos (mm)		
	Intervalo pequeno	Intervalo médio	Intervalo grande
Soleira do túnel	1,808	1,810	1,810
Coroamento do túnel	1,277	1,278	1,277
Parede do túnel	1,043	1,044	1,047
Superfície do maciço	0,492	0,493	0,493
Erro	$1,4 \times 10^{-6}$	$6,9 \times 10^{-8}$	$1,4 \times 10^{-6}$

Os resultados mostram que utilizando os quatro deslocamentos o processo de retroanálise foi estável e convergente tendo sido identificados os valores corretos dos parâmetros, isto é,  $E \approx 2GPa$  e  $k_0 \approx 0,8$ . Os resultados obtidos foram bastante satisfatórios, pois foi possível verificar que o algoritmo apresentou total convergência mesmo para intervalos alargados dos parâmetros, comprovando a sua robustez. O algoritmo obteve um melhor desempenho no caso do intervalo médio de variação dos parâmetros, pois foi neste que se registou o menor valor da

função objetivo. Relativamente aos outros dois intervalos considerados, pequeno e grande, foi obtido o mesmo valor do erro.

Utilizando a informação obtida ao longo das 1255 iterações foi possível desenhar, para todos os intervalos considerados, a topologia da função objetivo assim como uma vista planar das isolinhas dos valores do erro (figuras 15, 16 e 17).

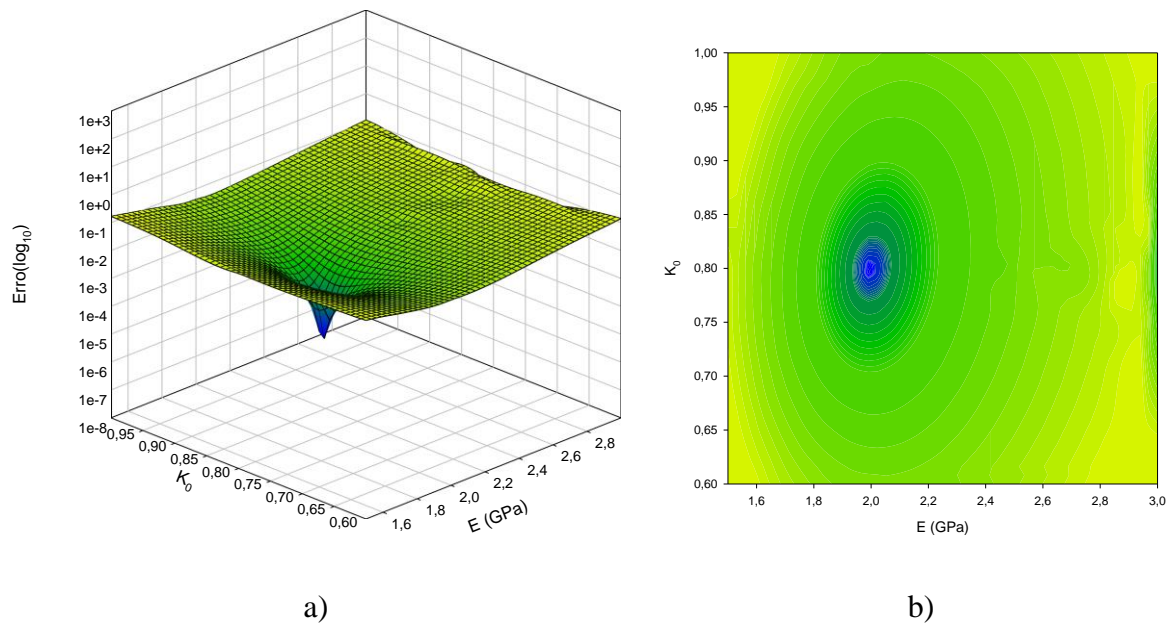


Figura 15 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-1, intervalo pequeno, a) vista tridimensional, b) vista planar

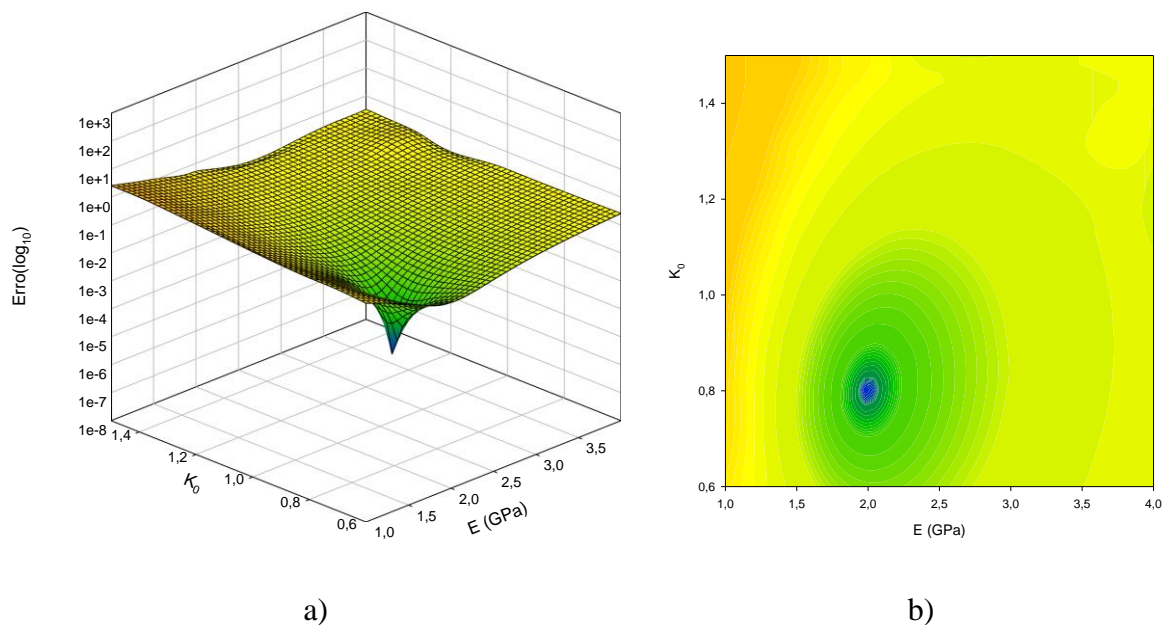


Figura 16 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-1, intervalo médio, a) vista tridimensional, b) vista planar

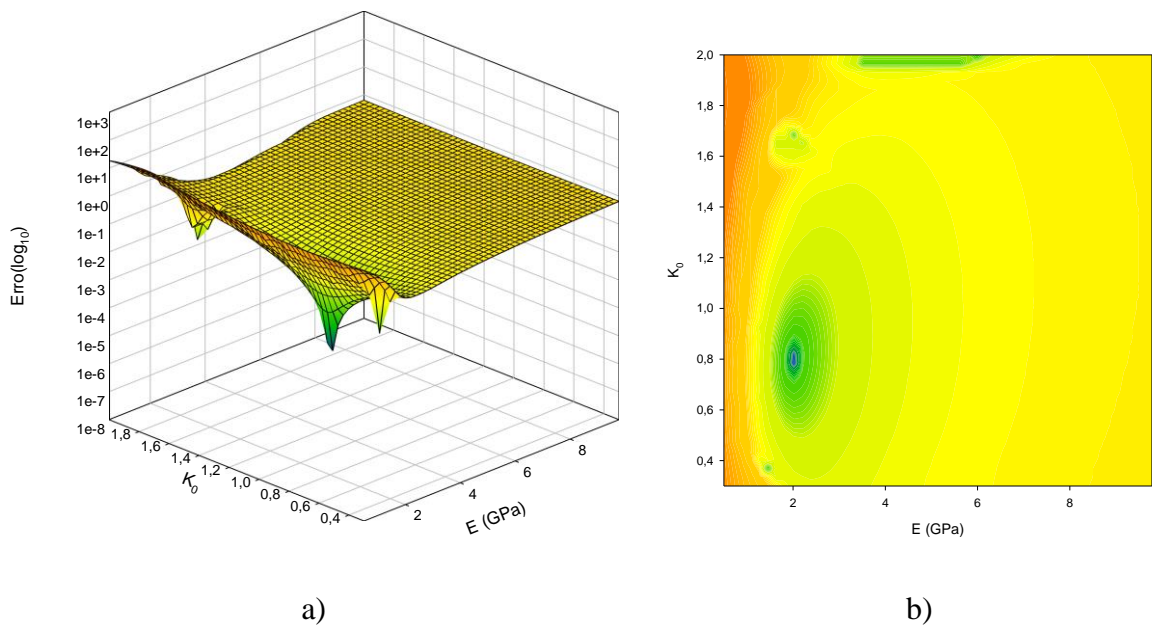


Figura 17 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-1, intervalo grande, a) vista tridimensional, b) vista planar

Através das referidas figuras é possível verificar que a função objetivo correspondente aos intervalos pequeno e médio é quase convexa e apresenta o mínimo global claramente definido. Por outro lado, no intervalo grande, a função objetivo não é estritamente convexa e apresenta alguns mínimos locais. No entanto, o algoritmo foi capaz de contornar esta situação e encontrar o mínimo global.

#### 4.1.2 Caso de estudo MEL-2

Neste caso foi reduzido o número de deslocamentos para metade. Assim consideraram-se o deslocamento vertical do arco do túnel e o deslocamento horizontal da parede para identificação dos parâmetros geomecânicos.

Apresentam-se de seguida os resultados nas tabelas 18 e 19 obtidos para este caso de estudo.

Tabela 18 – Resultados do caso de estudo MEL-2 - Parâmetros

Caso	Intervalo	Parâmetros	
		$E$ (GPa)	$K_0$
MEL-2	Pequeno	2,0000	0,7994
	Médio	2,0034	0,8015
	Grande	1,9952	0,7984

Tabela 19 – Resultados do caso de estudo MEL-2 - Deslocamentos

Localização	Deslocamentos (mm)		
	Intervalo pequeno	Intervalo médio	Intervalo grande
Soleira do túnel	1,810	1,806	1,815
Coroamento do túnel	1,278	1,274	1,282
Parede do túnel	1,043	1,046	1,044
Superfície do maciço	0,493	0,492	0,494
Erro	$8,8 \times 10^{-7}$	$4,1 \times 10^{-6}$	$6,0 \times 10^{-6}$

Neste caso, foram considerados dois deslocamentos pouco correlacionados. Assim, o número de dados de entrada corresponde ao mesmo número de parâmetros que se pretende identificar. Mesmo neste caso, que à partida se esperaria que fosse mais desfavorável devido ao número reduzido de deslocamentos, o algoritmo apresentou total convergência comprovando a sua robustez. O intervalo que registou o menor valor da função objetivo corresponde ao intervalo pequeno, ou seja, o intervalo que tem uma menor amplitude de variação dos parâmetros.

A topologia da função objetivo para cada intervalo deste caso de estudo pode ser observada nas figuras 18, 19 e 20.

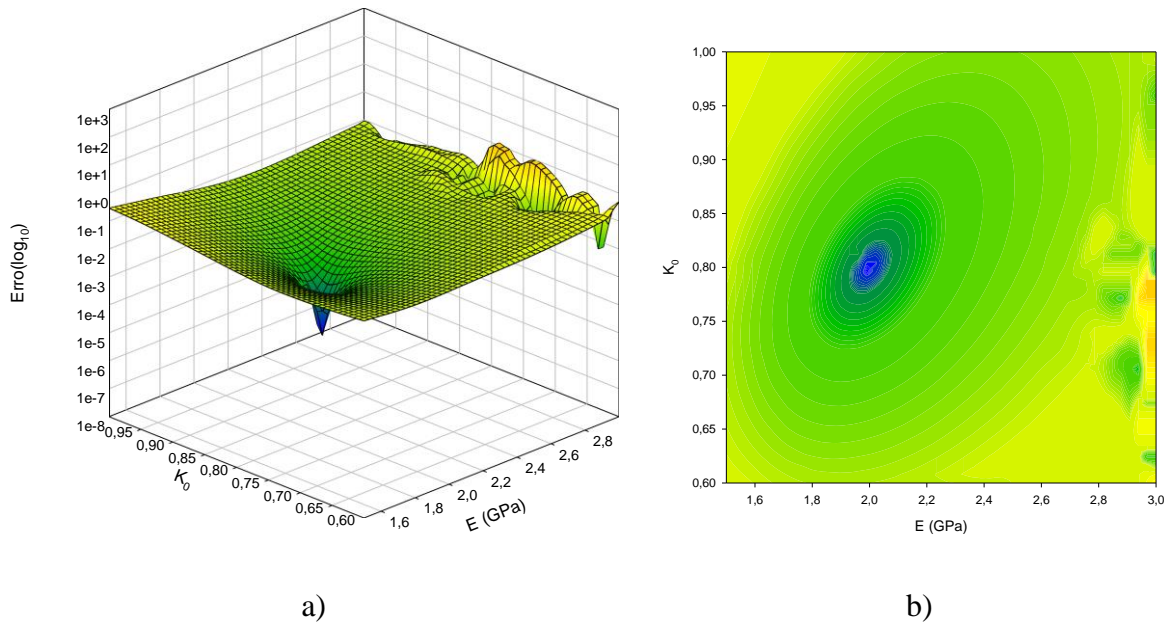


Figura 18 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-2, intervalo pequeno, a) vista tridimensional, b) vista planar

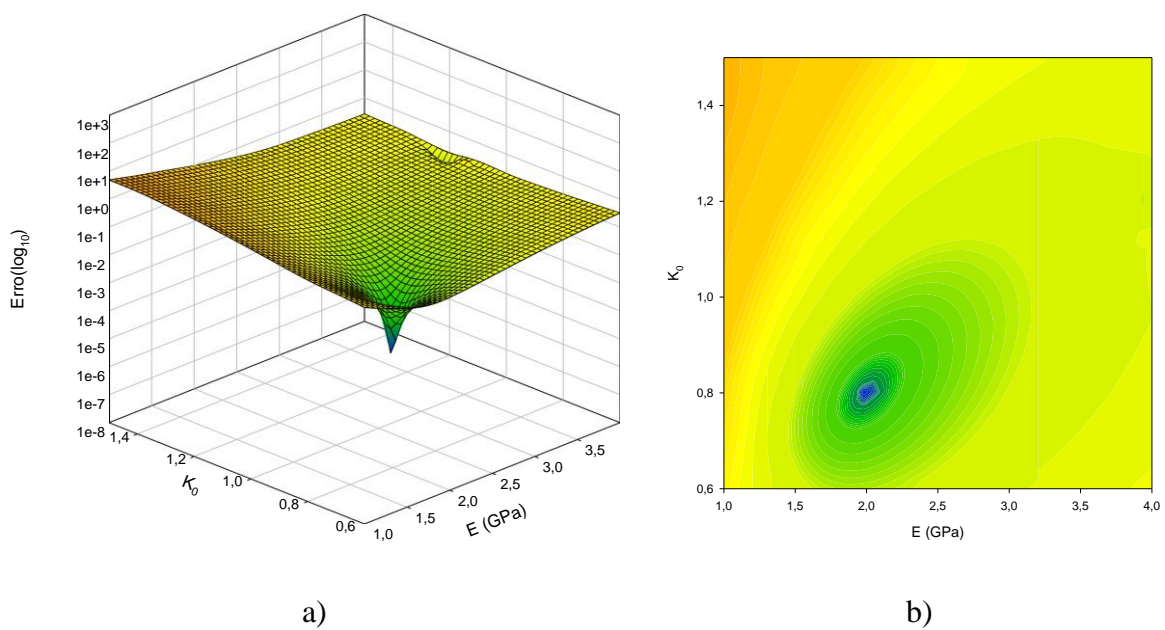


Figura 19 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-2, intervalo médio, a) vista tridimensional, b) vista planar



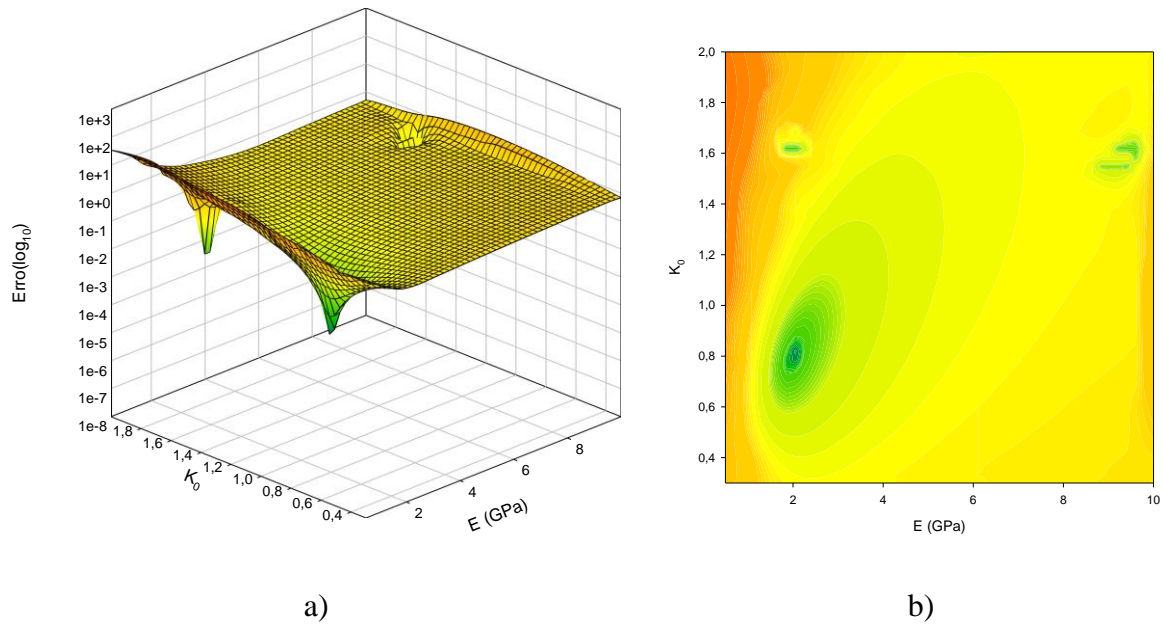


Figura 20 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-2, intervalo grande, a) vista tridimensional, b) vista planar

É possível constatar que apenas no intervalo médio a função objetivo é quase convexa e o mínimo global é bem definido. Nos outros dois intervalos é possível observar alguns mínimos locais.

### 4.1.3 Caso de estudo MEL-3

No caso de estudo MEL-3 foi considerado o mesmo número de dados de entrada que no caso anterior, um deslocamento vertical e um deslocamento horizontal. Estes dizem respeito ao deslocamento vertical à superfície e ao deslocamento horizontal da parede.

As tabelas 20 e 21 apresentam os resultados para este caso.

Tabela 20 – Resultados do caso de estudo MEL-3 - Parâmetros

Caso	Intervalo	Parâmetros	
		$E$ (GPa)	$K_0$
MEL-3	Pequeno	1,9993	0,7996
	Médio	2,0017	0,8028
	Grande	1,9998	0,7999

Tabela 21 – Resultados do caso de estudo MEL-3 – Deslocamentos

Localização	Deslocamentos (mm)		
	Intervalo pequeno	Intervalo médio	Intervalo grande
Soleira do túnel	1,811	1,808	1,810
Coroamento do túnel	1,278	1,274	1,278
Parede do túnel	1,044	1,049	1,045
Superfície do maciço	0,493	0,492	0,493
Erro	$2,1 \times 10^{-7}$	$1,3 \times 10^{-5}$	$2,1 \times 10^{-8}$

Também neste caso foram considerados dois deslocamentos, mas através de uma combinação diferente. Neste caso o deslocamento combinado com o deslocamento horizontal da parede do túnel é o deslocamento vertical da superfície do maciço e não o deslocamento do coroamento do túnel. Analisando os resultados verifica-se que o processo de identificação dos referidos parâmetros conseguiu convergir para o valor correto. O erro da função objetivo, para ambos os intervalos é relativamente baixo. Neste caso o valor mais baixo desta função foi verificado para o intervalo grande.

As figuras 21, 22 e 23 apresentam a topologia da função objetivo correspondente aos intervalos pequeno, médio e grande, respetivamente.

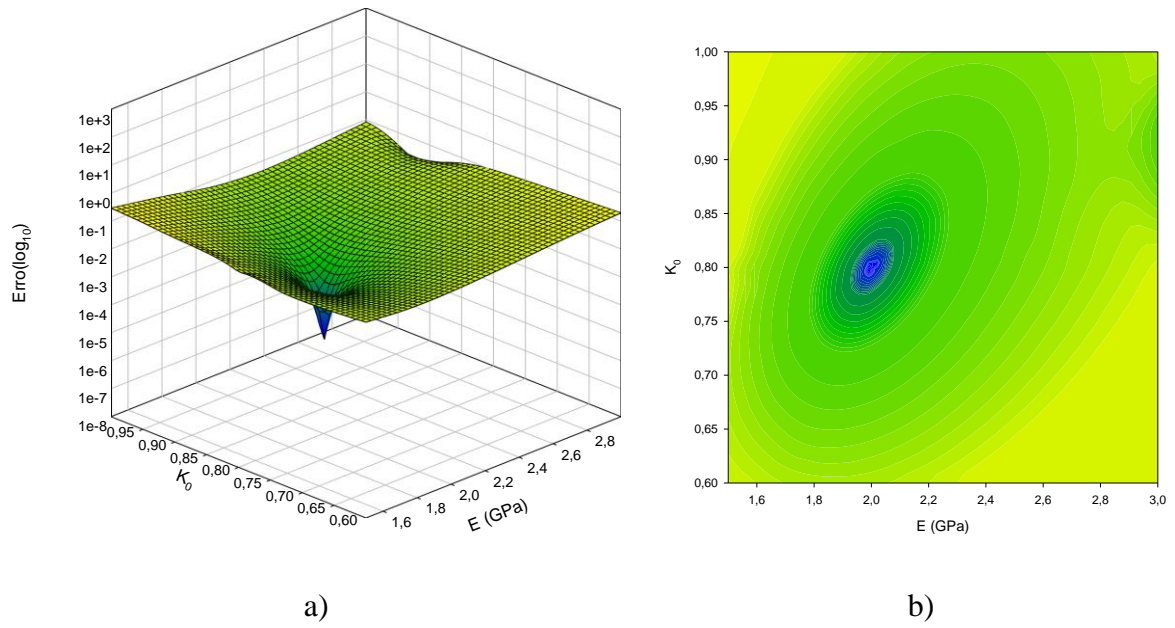


Figura 21 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-3, intervalo pequeno, a) vista tridimensional, b) vista planar

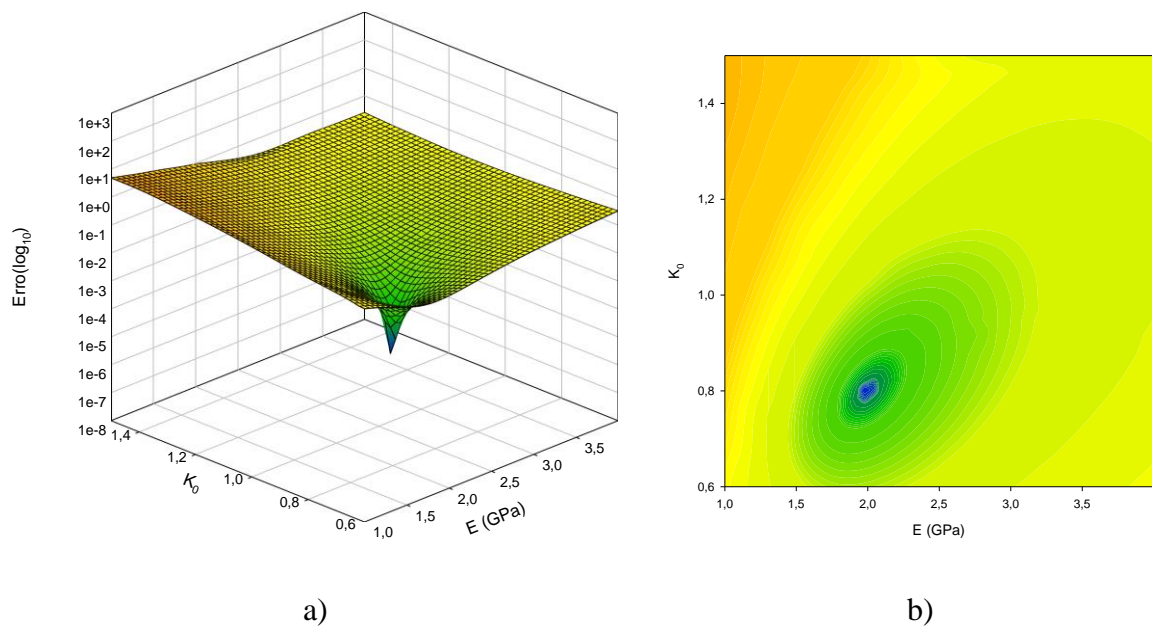


Figura 22 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-3, intervalo médio, a) vista tridimensional, b) vista planar

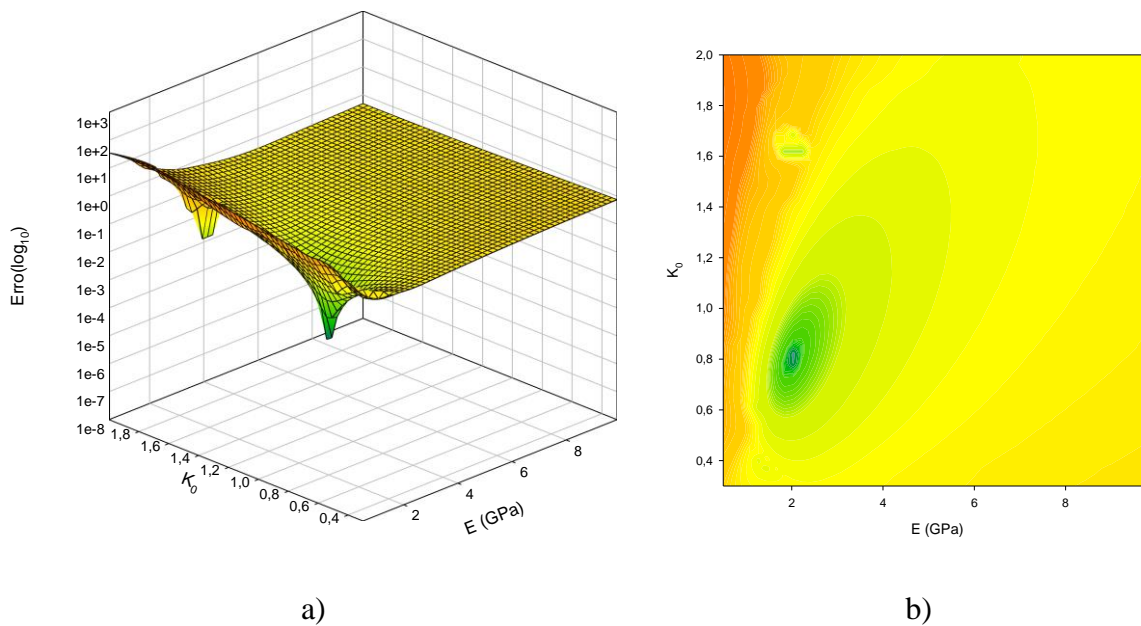


Figura 23 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-3, intervalo grande, a) vista tridimensional, b) vista planar

Nos intervalos pequeno e médio o mínimo global é facilmente identificável. Relativamente ao intervalo grande, a principal característica que pode ser observada é a presença, no espaço dos parâmetros, de mínimos locais. Neste intervalo existe algum “ruído”, mas ainda assim algoritmo convergiu.

#### 4.1.4 Caso de estudo MEL-4

O caso de estudo com a designação MEL-4 corresponde ao último caso em que se considerou o modelo constitutivo elástico linear. Também para este foram considerados dois deslocamentos, porém neste caso ambos os deslocamentos são verticais, superfície do maciço e coroamento do túnel.

Os resultados deste último caso de estudo com o modelo constitutivo elástico linear apresentam-se a seguir (tabelas 22 e 23).

Tabela 22 – Resultados do caso de estudo MEL-4 - Parâmetros

Caso	Intervalo	Parâmetros	
		$E$ (GPa)	$K_0$
MEL-4	Pequeno	2,0252	0,7825
	Médio	2,0219	0,7847
	Grande	1,9162	0,8619

Tabela 23 – Resultados do caso de estudo MEL-4 – Deslocamentos

Localização	Deslocamentos (mm)		
	Intervalo pequeno	Intervalo médio	Intervalo grande
Soleira do túnel	1,794	1,796	1,866
Coroamento do túnel	1,278	1,278	1,274
Parede do túnel	0,998	1,004	1,216
Superfície do maciço	0,493	0,492	0,494
Erro	$6,5 \times 10^{-7}$	$1,4 \times 10^{-6}$	$6,6 \times 10^{-6}$

Tal como acontece com todos os outros casos estudados, também aqui o algoritmo demonstrou o seu potencial, embora tenha demonstrado alguma dificuldade, principalmente no intervalo grande.

Apesar de alguma diferença entre os parâmetros obtidos e os considerados como reais, os primeiros originam deslocamentos muito próximos dos deslocamentos simulados como resultantes da monitorização de campo, isso pode ser comprovado pelo reduzido valor do erro. No presente caso o valor mais baixo da função objetivo foi verificado para o intervalo pequeno.

A topologia da função objetivo para cada intervalo deste caso de estudo pode ser observada nas figuras 24, 25 e 26.

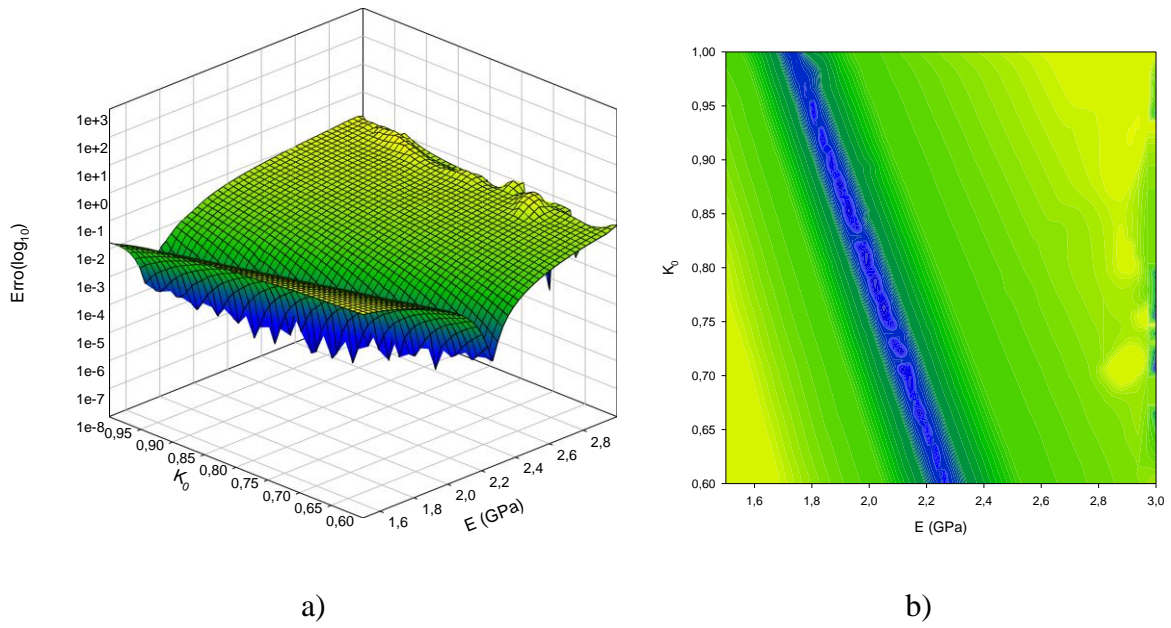


Figura 24 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-4, intervalo pequeno, a) vista tridimensional, b) vista planar

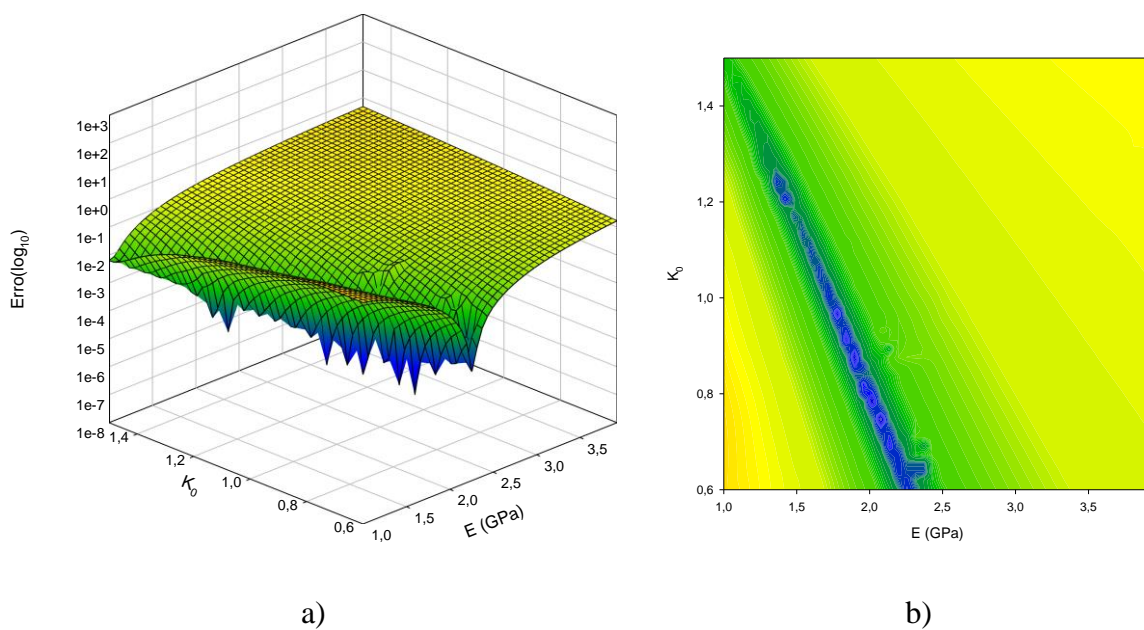


Figura 25 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-4, intervalo médio, a) vista tridimensional, b) vista planar

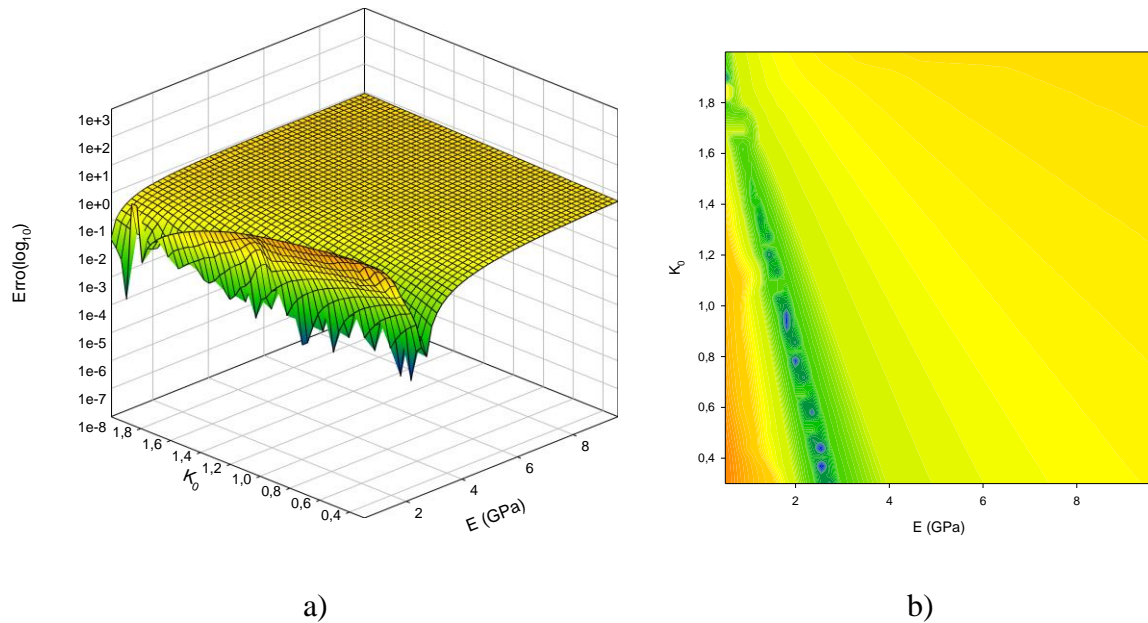


Figura 26 – Topologia da função objetivo para o caso MEL-4, intervalo grande, a) vista tridimensional, b) vista planar

Relativamente à tipologia da função objetivo (figuras 24, 25 e 26), esta, qualquer que seja o intervalo considerado, é bastante complexa. Esta afirmação justifica-se por se verificar a existência de inúmeros mínimos locais, ou seja, há um número infinito de combinações possíveis para os parâmetros que correspondem, aproximadamente, ao mesmo valor da função objetivo. Nesta situação o mínimo global não é claramente identificado. Este problema pode dever-se à elevada correlação entre os dois deslocamentos (dois deslocamentos verticais), já que na prática, esta elevada correlação é semelhante à utilização de apenas um deslocamento para identificação de dois parâmetros geomecânicos. Ainda assim o algoritmo conseguiu convergir para valores aproximados dos parâmetros.

Pode-se avaliar a eficiência do algoritmo empregue analisando o seu desempenho ao longo de todo o processo iterativo (figura 27).

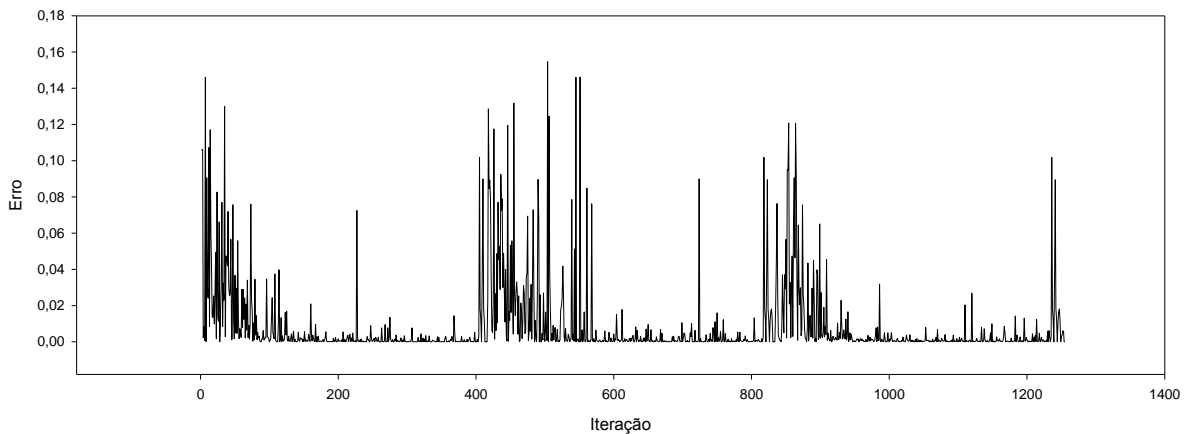


Figura 27 – Desempenho do algoritmo ao longo do processo iterativo, caso MEL-4, intervalo pequeno

Como se pode verificar, na figura anterior, o algoritmo somente necessitaria de cerca de 400 iterações para chegar a uma solução ótima. O comportamento deste algoritmo, considerando o modelo elástico, é semelhante em qualquer caso de estudo e qualquer que seja o intervalo considerado. Assim sendo, entendeu-se ser suficiente a apresentação de apenas uma única figura onde se mostra o seu desempenho durante todo o processo de cálculo. Pode-se aferir, tendo em conta o exposto, que o algoritmo HGPSAL é bastante eficiente. Apresenta-se em seguida, a figura 28, com o comportamento deste algoritmo ao longo das referidas 400 iterações, onde é visível a sua eficiência.

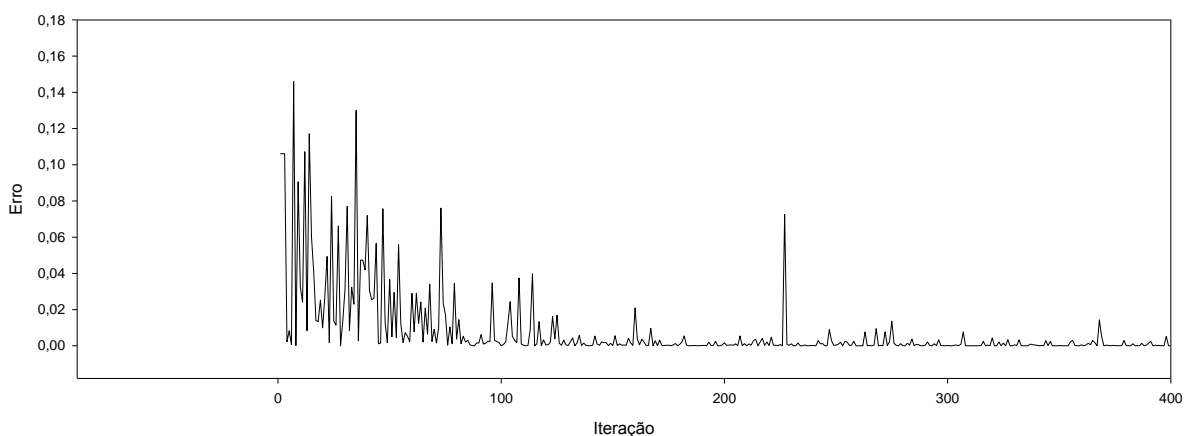


Figura 28 – Vista ampliada do desempenho do algoritmo ao longo do processo iterativo, caso MEL-4, intervalo pequeno



## 4.2 Resultados do modelo constitutivo hiperbólico 1

### 4.2.1 Caso de estudo MH1-1

Neste caso de estudo tentou-se identificar dois dos parâmetros do modelo:  $k$  e  $k_b$ . Para isso foram considerados os seguintes deslocamentos:

- Deslocamento vertical da superfície do maciço;
- Deslocamento vertical do coroamento;
- Deslocamento vertical da soleira do túnel;
- Deslocamento horizontal da parede do túnel.

O processo iterativo terminou ao fim de 1255 iterações e, para isso demorou cerca de 43,5 horas. Os resultados obtidos neste caso de estudo apresentam-se nas tabelas 24 e 25.

Tabela 24 – Resultados do caso de estudo MH1-1 - Parâmetros

Caso	Medições	Parâmetros	
		$k$	$k_b$
MH1-1	4	402,58	204,90

Tabela 25 – Resultados do caso de estudo MH1-1 - Deslocamentos

Localização	Deslocamentos (cm)
Soleira do túnel	16,758
Coroamento do túnel	27,992
Parede do túnel	9,951
Superfície do maciço	3,575
Erro	$3,2 \times 10^{-5}$

Os resultados (tabela 24) mostram que os valores obtidos dos parâmetros são relativamente próximos dos “reais” ( $k \approx 400$  e  $k_b \approx 200$ ). Conclui-se, portanto, que na identificação de apenas dois dos parâmetros do modelo, utilizando quatro deslocamentos, o processo de retroanálise é estável e convergente.

Através da tabela 25 é perceptível que a diferença entre os deslocamentos obtidos e os deslocamentos “medidos” é relativamente reduzida, tendo em conta o valor do erro obtido.

A topologia da função objetivo, obtida com este caso de estudo, é apresentada na figura 29.

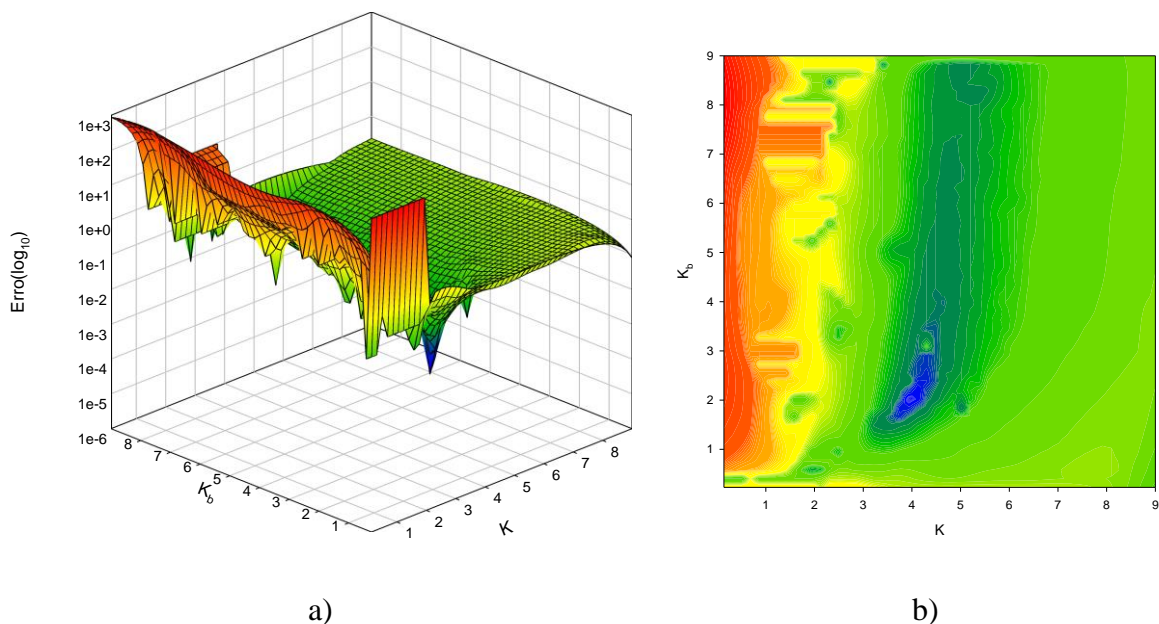


Figura 29 – Topologia da função objetivo para o caso MH1-1, a) vista tridimensional, b) vista planar

Verifica-se que a topologia da função objetivo é bastante irregular e ainda assim o algoritmo foi capaz de encontrar uma solução ótima. Pode-se concluir então que o bom desempenho do algoritmo empregue não está relacionado com topologias simples da função objetivo.

### 4.2.2 Caso de estudo MH1-2

No presente caso elevou-se a complexidade do processo iterativo pois pretendeu-se identificar quatro dos parâmetros do modelo ( $k$ ,  $k_b$ ,  $n$  e  $m$ ). Neste caso foram considerados os mesmos deslocamentos do caso anterior.

Para se obter os resultados foram necessárias 1291 iterações, um pouco mais do que no caso anterior, e estas demoram cerca de 48 horas.

Os resultados apresentam-se seguidamente expostos nas tabelas 26 e 27.

Tabela 26 – Resultados do caso de estudo MH1-2 - Parâmetros

Caso	Medições	Parâmetros			
		$k$	$k_b$	$n$	$m$
MH1-2	4	520,95	381,97	0,55	0,87

Tabela 27 – Resultados do caso de estudo MH1-2 - Deslocamentos

Localização	Deslocamentos (cm)
Soleira do túnel	16,726
Coroamento do túnel	28,120
Parede do túnel	9,448
Superfície do maciço	3,739
Erro	$1,2 \times 10^{-3}$

Examinado a tabela 26 conclui-se que neste caso os resultados ficaram um pouco abaixo das expectativas. Verifica-se uma discrepância entre os parâmetros obtidos e os considerados como reais. Existe uma relação verossímil entre os parâmetros  $k$  e  $k_b$ , ou seja, o valor do primeiro parâmetro é bastante superior ao do segundo, porém, a relação de verosimilhança entre os outros

dois parâmetros não se verifica. O parâmetro  $m$  deveria ser ligeiramente inferior ao  $n$ , mas o que se observa é que o primeiro é bastante superior a este último.

Tendo em conta o exposto seria de esperar que os deslocamentos obtidos fossem bastante diferentes dos deslocamentos “monitorizados” mas, o que se constata é que estes são bastante próximos. Tal constatação deve alertar para o facto de existirem conjuntos de parâmetros diferentes a que correspondem deslocamentos iguais e, neste caso concreto, conjunto de parâmetros relativamente diferentes (parâmetros obtidos comparativamente aos parâmetros “reais”).

### 4.2.3 Caso de estudo MH1-3

Com este caso de estudo pretendia-se identificar seis parâmetros do modelo:  $k$ ,  $k_b$ ,  $n$ ,  $m$ ,  $c$  e  $\phi$ . Considerou-se o mesmo número de deslocamentos dos casos anteriores.

Não foi possível obter resultados para este caso, uma vez que, o processo iterativo não convergiu. Este problema pode dever-se facto de que em determinada iteração os valores dos parâmetros estimados eram baixos resultando numa rotura generalizada e, por isso, o programa efetuava cálculos infinitos na mesma iteração.

## 4.3 Resultados do modelo constitutivo hiperbólico 2

### 4.3.1 Caso de estudo MH2-4

Neste caso de estudo pretendeu-se identificar os parâmetros  $k$  e  $k_b$ . Para o efeito serão considerados os seguintes deslocamentos:

- Deslocamento vertical da superfície do maciço;
- Deslocamento vertical do coroamento;
- Deslocamento vertical da soleira do túnel;
- Deslocamento horizontal da parede do túnel;
- Deslocamento vertical do interior da soleira do túnel;
- Deslocamento vertical do interior do coroamento do túnel;

- Deslocamento horizontal do interior da parede do túnel.

Foram realizadas 1255 iterações, que demoraram cerca de 36,5 horas, para chegar aos seguintes resultados (tabelas 28 e 29):

Tabela 28 – Resultados do caso de estudo MH2-4 - Parâmetros

Caso	Medições	Parâmetros	
		$k$	$k_b$
MH2-4	7	409,91	222,17

Tabela 29 – Resultados do caso de estudo MH2-4 - Deslocamentos

Localização	Deslocamentos (cm)
Soleira do túnel	5,834
Coroamento do túnel	3,456
Parede do túnel	3,224
Superfície do maciço	1,176
Interior da soleira do túnel	0,641
Interior do coroamento do túnel	1,615
Interior da parede do túnel	0,752
Erro	$4,9 \times 10^{-5}$

Através da tabela 28 é possível verificar que os parâmetros identificados estão relativamente próximos dos reais ( $k = 400$  e  $k_b = 200$ ). Embora haja alguma discrepância entre os valores obtidos e os considerados como “reais” pode-se considerar este resultado satisfatório. Neste caso, comparativamente ao MH1-1, em que se pretendeu identificar o mesmo número de parâmetros, já se esperava uma redução do desempenho do algoritmo devido ao elevado número e correlação de deslocamentos envolvidos na retroanálise dos parâmetros. Foram adicionados

três deslocamentos no interior do maciço, para evitar pontos suscetíveis de sofrer plastificação, e estes são pouco correlacionados com os verificados em torno do túnel.

Relativamente aos deslocamentos obtidos considerando os parâmetros estimados (tabela 29) pode-se observar que estes estão bastantes próximos dos deslocamentos considerados como “reais”. A diferença entre estes é inferior a um milímetro.

Apresenta-se a seguir representada a topologia da função objetivo (figura 30):

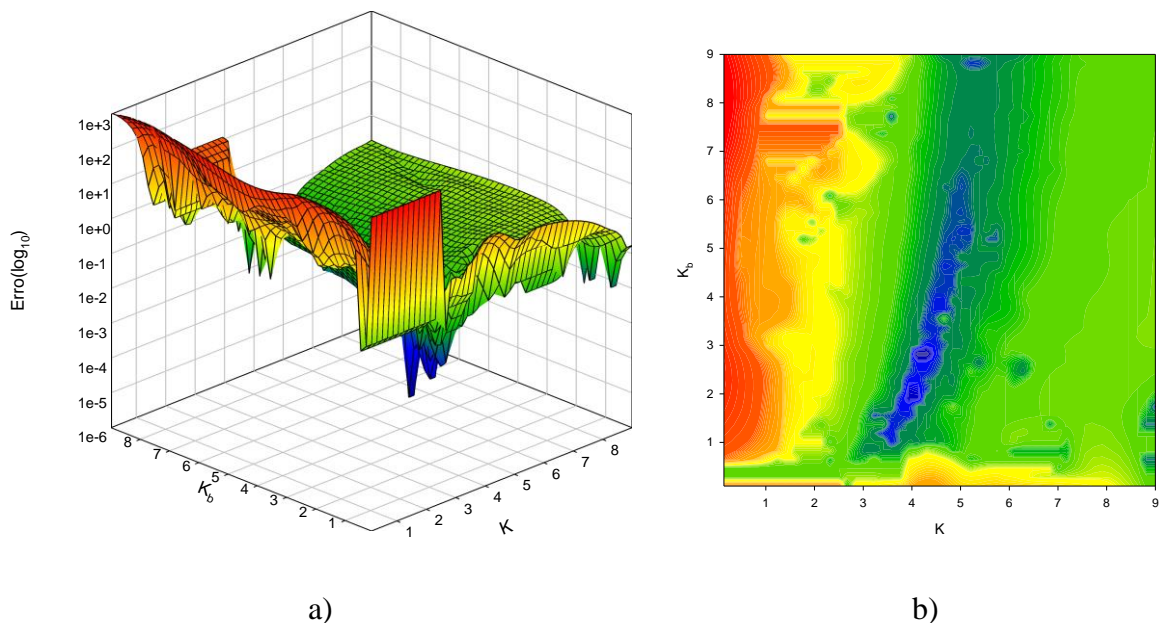


Figura 30 – Topologia da função objetivo para o caso MH2-4, a) vista tridimensional, b) vista planar

Pode-se observar na figura 30 que a topologia da função objetivo é bastante complexa. Na referida figura é possível visualizar uma área onde se concentram inúmeros mínimos locais, ou seja, um conjunto de soluções com valores aproximados da função objetivo, o que se traduzirá, em casos reais, em incertezas consideráveis sobre a definição da solução mais adequada.

### 4.3.2 Caso de estudo MH2-5

Com este caso de estudo pretendeu-se identificar os parâmetros:  $k$  e  $k_b$ . Para o efeito foram considerados os seguintes deslocamentos:

- Deslocamento vertical da superfície do maciço;
- Deslocamento vertical do coroamento;
- Deslocamento vertical da soleira do túnel;
- Deslocamento horizontal da parede do túnel.

Também neste caso de estudo foram realizadas 1255 iterações, que demoraram cerca de 36,5 horas para chegar aos resultados registados nas tabelas 30 e 31.

Tabela 30 – Resultados do caso de estudo MH2-5 - Parâmetros

Caso	Medições	Parâmetros	
		$k$	$k_b$
MH2-5	4	398,01	200,70

Tabela 31 – Resultados do caso de estudo MH2-5 - Deslocamentos

Localização	Deslocamentos (cm)
Soleira do túnel	5,948
Coroamento do túnel	3,473
Parede do túnel	3,252
Superfície do maciço	1,188
Erro	$8,2 \times 10^{-5}$

Neste caso de estudo a identificação dos dois parâmetros (tabela 30) foi mais bem sucedida, relativamente ao caso anterior. Os resultados mostram que utilizando os quatro deslocamentos o processo de retroanálise é estável tendo sido identificados os valores corretos dos parâmetros, isto é,  $k \approx 400$  e  $k_b \approx 200$ .

Embora os parâmetros estimados neste caso de estudo estejam mais próximos dos valores “reais” do que os do caso anterior, estes correspondem a uma maior diferença entre os deslocamentos obtidos (tabela 31) e os “reais” e, por isso, o erro é maior do que no caso anterior.

A topologia da função objetivo pode ser observada na figura 31.

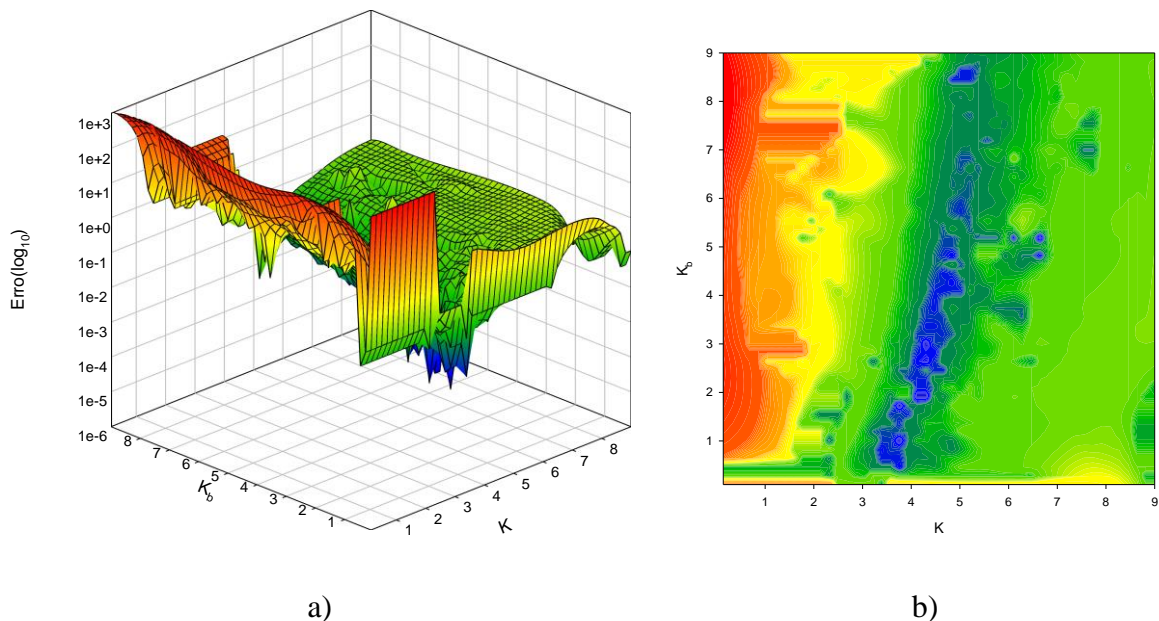


Figura 31 – Topologia da função objetivo para o caso MH2-5, a) vista tridimensional, b) vista planar

A complexidade da função objetivo é mais uma vez visível (figura 31), ainda assim o algoritmo apresentou um bom desempenho conseguindo convergir para valores dos parâmetros muito próximos dos valores corretos. É possível observar ainda a existência de inúmeros mínimos locais mas estes encontram-se mais dispersos comparativamente ao caso anterior.

### 4.3.3 Caso de estudo MH2-6

Tendo-se identificado apenas dois parâmetros do modelo hiperbólico nos dois casos anteriores, no caso de estudo MH2-6 teve-se como objetivo a identificação de quatro parâmetros:  $k$ ,  $k_b$ ,  $n$  e  $m$ . Para tal consideraram-se sete deslocamentos:

- Deslocamento vertical da superfície do maciço;



- Deslocamento vertical do coroamento;
- Deslocamento vertical da soleira do túnel;
- Deslocamento horizontal da parede do túnel;
- Deslocamento vertical do interior da soleira do túnel;
- Deslocamento vertical do interior do coroamento do túnel;
- Deslocamento horizontal do interior da parede do túnel.

Para se obter os resultados das tabelas 32 e 33 foram necessárias 1291 iterações, um pouco mais do que nos dois casos anteriores, e estas demoram cerca de 40 horas.

Tabela 32 – Resultados do caso de estudo MH2-6 - Parâmetros

Caso	Medições	Parâmetros			
		$k$	$k_b$	$n$	$m$
MH2-6	7	498,24	466,98	0,48	0,15

Tabela 33 – Resultados do caso de estudo MH2-6 - Deslocamentos

Localização	Deslocamentos (cm)
Soleira do túnel	5,751
Coroamento do túnel	3,483
Parede do túnel	3,106
Superfície do maciço	1,123
Interior da soleira do túnel	0,662
Interior do coroamento do túnel	1,609
Interior da parede do túnel	0,779
Erro	$1,1 \times 10^{-3}$

Como se pode verificar na tabela 32, também neste caso de estudo os resultados ficaram um pouco abaixo das expectativas. Existe uma discrepância entre os valores dos parâmetros identificados e os valores “reais”. Em relação aos parâmetros  $k$  e  $n$  a diferença não é tão acentuada, mas relativamente aos parâmetros  $k_b$  e  $m$  pode-se afirmar que os valores obtidos são significativamente diferentes. O desempenho do algoritmo neste caso de estudo não foi muito satisfatório. Tal comportamento já era expectável uma vez que no caso MH2-4, onde se identificaram apenas dois parâmetros, nas mesmas circunstâncias (com o mesmo número de deslocamentos), o algoritmo apresentou alguma dificuldade. Ainda assim, com estes parâmetros obtiveram-se deslocamentos que não estão tão longe da “realidade” como seria de esperar (tabela 33).

#### 4.3.4 Caso de estudo MH2-7

Para identificar os mesmos parâmetros do caso anterior ( $k$ ,  $k_b$ ,  $n$  e  $m$ ), utilizaram-se apenas quatro deslocamentos, assim pretendeu-se avaliar o desempenho do algoritmo numa situação mais desfavorável (comparativamente ao caso anterior), ou seja, o número de parâmetros que se pretende estimar é igual ao número de deslocamentos considerados para o efeito. Os dados considerados resultantes da monitorização são:

- Deslocamento vertical da superfície do maciço;
- Deslocamento vertical do coroamento;
- Deslocamento vertical da soleira do túnel;
- Deslocamento horizontal da parede do túnel.

À semelhança do que sucedeu com o caso anterior, também neste foram necessárias 1291 iterações. Nesta fase do trabalho podemos concluir que um dos fatores que influênciam o número de iterações necessárias para concluir o processo iterativo é o número de parâmetros a identificar.

Relativamente ao tempo, a conclusão dos cálculos demorou cerca de 40 horas. Os resultados obtidos apresentam-se nas tabelas 34 e 35.

Tabela 34 – Resultados do caso de estudo MH2-7 - Parâmetros

Caso	Medições	Parâmetros			
		$k$	$k_b$	$n$	$m$
MH2-7	4	376,61	197,31	0,71	0,67

Tabela 35 – Resultados do caso de estudo MH2-7 - Deslocamentos

Localização	Deslocamentos (cm)
Soleira do túnel	5,920
Coroamento do túnel	3,482
Parede do túnel	3,189
Superfície do maciço	1,186
Erro	$1,6 \times 10^{-4}$

Ao contrário do que seria de esperar, com este caso que à partida seria considerado como desfavorável, pelas razões supra mencionadas, obtiveram-se valores dos parâmetros mais próximos dos “reais” do que com o caso anterior, como se pode observar na tabela 34.

A discrepância entre os deslocamentos obtidos e os “reais” também é inferior neste caso, comparativamente ao anterior.

Conclui-se então, que o algoritmo teve um melhor desempenho neste caso, relativamente ao anterior, ou seja, os valores dos parâmetros obtidos são mais próximos dos “reais” quando se consideram apenas quatro deslocamentos. Tal fato pode dever-se à localização dos pontos de monitorização (sete pontos). Mesmo elevando os parâmetros de resistência o maciço apresenta zonas de plastificação muito próximas do túnel, os pontos mais afastados do túnel não sofrem tanto este efeito (pontos interiores). Assim, existem pontos que com a escavação do túnel “sofrem” bastantes deformações e outros nem tanto. O algoritmo tem de dar “respostas” tendo tudo isto em consideração.

### 4.3.5 Caso de estudo MH2-8

Nesta fase do trabalho teve-se com objetivo identificar seis dos sete parâmetros do modelo:  $k$ ,  $k_b$ ,  $n$ ,  $m$ ,  $c$  e  $\phi$ . Foram considerados os sete deslocamentos referidos anteriormente. Este cálculo demorou cerca de 58 horas e necessitou de 1442 iterações.

Apresenta-se seguidamente os resultados obtidos (tabelas 36 e 37).

Tabela 36 – Resultados do caso de estudo MH2-8 - Parâmetros

Caso	Medições	Parâmetros					
		$k$	$k_b$	$n$	$m$	$c$ (KPa)	$\phi$
MH2-8	7	575,60	384,79	0,4	0,1	70	41

Tabela 37 – Resultados do caso de estudo MH2-8 - Deslocamentos

Localização	Deslocamentos (cm)
Soleira do túnel	5,915
Coroamento do túnel	3,519
Parede do túnel	3,189
Superfície do maciço	1,157
Interior da soleira do túnel	0,661
Interior do coroamento do túnel	1,607
Interior da parede do túnel	0,749
Erro	$2,8 \times 10^{-4}$

Mais uma vez se verifica que o algoritmo em situações de elevada complexidade, como o presente caso de estudo, não convergiu para os valores “reais” dos parâmetros. A diferença entre os resultados (tabela 36) e os valores dos parâmetros “reais” é bastante significativa.

É provável que a “não convergência” se deva à insuficiente capacidade resistente para o método construtivo considerado e não à ineficiência do algoritmo.

Analisando os referenciados resultados verifica-se alguma verosimilhança na relação entre os parâmetros  $k$ ,  $k_b$ ,  $n$  e  $m$ . Os parâmetro  $k$  e  $n$  são superiores aos parâmetros  $k_b$  e  $m$ , respectivamente.

O valor estimado para a coesão, 70 KPa, é bastante inferior ao valor considerado, 100 KPa. Por sua vez, o valor identificado para o ângulo de atrito é bastante aproximado ao valor “real”.

Relativamente aos deslocamentos obtidos (tabela 37), a diferença entre estes e os simulados é relativamente reduzida, na ordem dos milímetros.

#### 4.3.6 Caso de estudo MH2-9

Em termos do número de incógnitas a identificar, este caso de estudo é igual ao anterior, procurou-se identificar seis parâmetros ( $k$ ,  $k_b$ ,  $n$ ,  $m$ ,  $c$  e  $\phi$ ), mas para isso foram considerados apenas quatro deslocamentos, os mesmos utilizados nos modelos elástico linear e constitutivo hiperbólico 1.

O processo iterativo deste último caso de estudo durou cerca de 43 horas, finalizando com 1377 iterações.

As tabelas 38 e 39 explanam os resultados:

Tabela 38 – Resultados do caso de estudo MH2-9 - Parâmetros

Caso	Medições	Parâmetros					
		$k$	$k_b$	$n$	$m$	$c$ (KPa)	$\phi$
MH2-9	4	623,13	400,02	0,28	0,12	31	47

Tabela 39 – Resultados do caso de estudo MH2-9 - Deslocamentos

Localização	Deslocamentos (cm)
Soleira do túnel	5,840
Coroamento do túnel	3,474
Parede do túnel	3,242
Superfície do maciço	1,173
Erro	$5,6 \times 10^{-5}$

Os resultados obtidos (tabela 38) para este caso não são os desejáveis. O algoritmo não convergiu para os valores considerados. Os valores obtidos são ligeiramente piores comparativamente com os valores do caso anterior. Apenas o valor do ângulo de atrito se aproximou mais do valor considerado.

Mesmo com este conjunto de parâmetros obteve-se valores dos deslocamentos muito próximos dos considerados.

Um dos objetivos deste trabalho consiste em avaliar a eficiência do algoritmo. Esta pode ser aferida através do seu desempenho ao longo de todo o processo iterativo (figura 32).

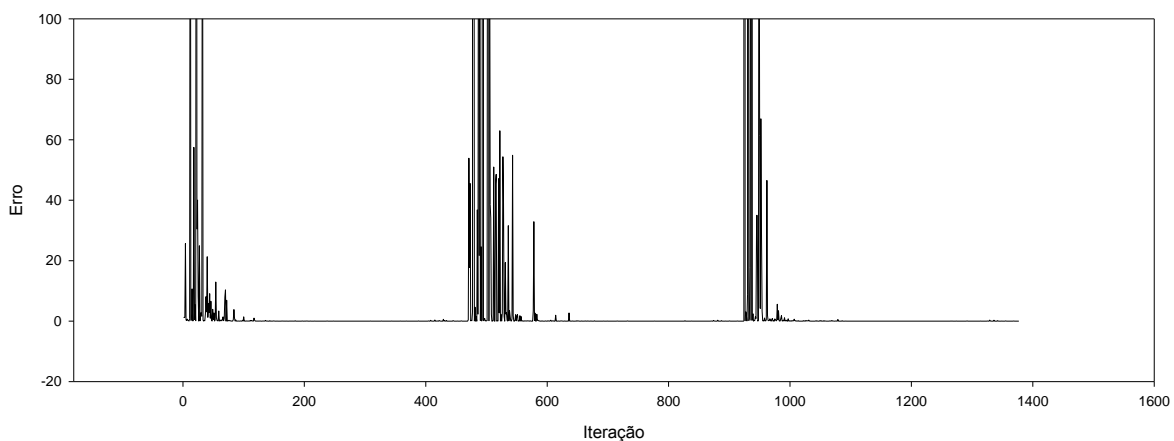


Figura 32 – Desempenho do algoritmo ao longo do processo iterativo, caso MH2-9

Também com este modelo constitutivo se pode verificar o algoritmo somente necessitaria de cerca de 400 iterações para chegar a uma solução (figura 32). Comprova-se desta forma que o funcionamento interno do algoritmo é semelhante qualquer que seja o modelo constitutivo considerado e qualquer que seja o número de parâmetros a estimar. A figura anterior sugere que os algoritmos Genético e de Hooke e Jeeves são executados três vezes. É perceptível que bastava executar estes algoritmos apenas uma vez para se obter a solução ótima. Pode-se aferir, tendo em conta o exposto, que o algoritmo HGPSAL é bastante eficiente. Apresenta-se, em seguida a figura 33 com o comportamento deste algoritmo, ao longo das referidas 400 iterações, onde é visível a sua eficiência.

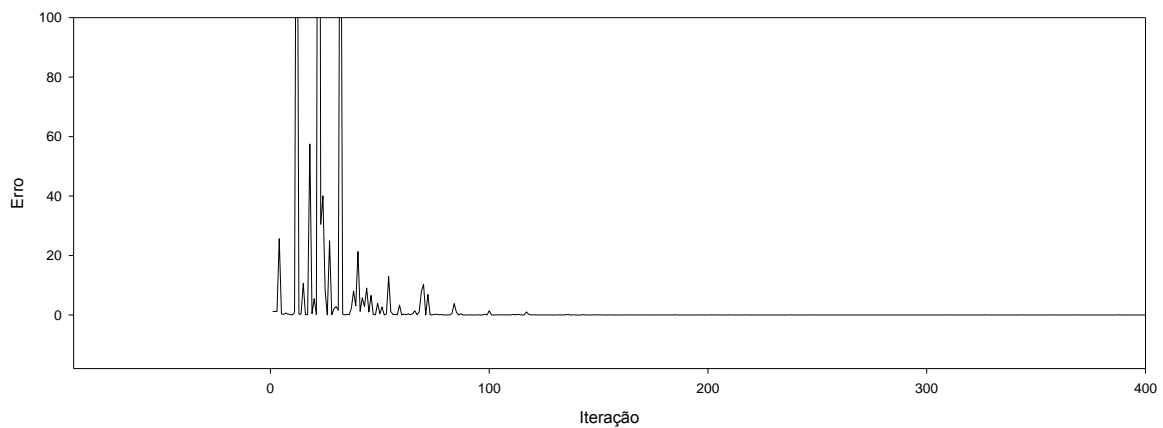


Figura 33 – Vista ampliada do desempenho do algoritmo ao longo do processo iterativo, caso MH2-9





## Capítulo 5

### CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho pretende contribuir para a definição de um processo fiável de retroanálise de parâmetros geomecânicos dando particular ênfase à utilização de modelos constitutivos mais próximos do real comportamento dos maciços e à implementação de técnicas capazes de minimizar o esforço iterativo associado ao processo de retroanálise

O algoritmo utilizado neste trabalho foi testado em diferentes circunstâncias. Inicialmente foi testado com o modelo constitutivo elástico linear. Os testes permitiram concluir que o algoritmo é bastante eficiente pois convergiu para soluções ótimas com cerca de 400 iterações. Este apresenta um desempenho robusto já que conseguiu convergir em todos os casos de estudo. Em processos de retroanálise baseados em quatro ou duas medições pouco correlacionáveis, a topologia da função objetivo é praticamente convexa e o mínimo global é bem definido. O caso de estudo MEL-4 representa o pior cenário utilizando duas medições com a mesma direção. A topologia da função objetivo é bastante complexa devido à existência de inúmeros mínimos locais. Este caso também contribui para comprovar a sua robustez já que foi demonstrado que o algoritmo conseguiu evitar a convergência para um mínimo local da função objetivo. Confirma-se então que o algoritmo empregue não necessita que a função objetivo apresente uma forma convexa com um mínimo claramente definido e único para convergir. Estas características apontam para a potencial aplicabilidade deste algoritmo em problemas na área

da geomecânica onde as funções objetivo apresentam, tipicamente, topologias complexas com diversos mínimos locais.

Um outro objetivo da utilização do modelo elástico linear, uma vez que se apresenta como um modelo relativamente simples, era o de avaliar a influência do intervalo de variação dos parâmetros. Através do estudo realizado, conclui-se que a amplitude do intervalo considerada não tem influência na robustez do algoritmo. No primeiro caso o menor erro é registado para o intervalo médio, no segundo o menor erro corresponde ao intervalo pequeno, no terceiro o menor erro é atribuído ao intervalo grande e, no último caso é com o intervalo pequeno que se obtém a melhor solução.

O algoritmo foi também testado em não linearidade com a utilização do modelo hiperbólico. Os resultados obtidos não são muito satisfatórios. Este modelo é extremamente complexo, pois existem muitos parâmetros envolvidos. Durante a revisão bibliográfica nada foi encontrado sobre a temática da retroanálise de parâmetros geomecânicos utilizando este modelo constitutivo dada a sua complexidade.

Na identificação de dois parâmetros o algoritmo é robusto. O primeiro caso testado com este modelo constitutivo, onde se considerou o solo real, MH1-1, o algoritmo convergiu para os valores corretos, apesar de apenas se considerarem quatro medições efetuadas em zonas de plastificação elevada. A topologia da função objetivo é bastante irregular. Nos outros dois casos em que se pretendeu estimar dois dos parâmetros, a convergência também foi alcançada. Nestas situações a topologia da função objetivo é bastante mais complexa e observou-se inúmeros mínimos locais, contudo o algoritmo convergiu para o mínimo global da função.

Na identificação de quatro dos parâmetros o algoritmo não teve um desempenho satisfatório. Dos três casos utilizados para estimar os quatro parâmetros, o caso MH2-7 é o que representa o melhor cenário. Dada a especificidade do problema (complexidade da topologia da função objetivo, localização dos pontos da monitorização onde ocorre elevada plastificação e número elevado de parâmetros a identificar) pode-se considerar que se tratou de um problema muito complexo.

O algoritmo não convergiu para uma solução ótima na identificação de seis parâmetros do modelo. Porém, através dos resultados verifica-se alguma verosimilhança na relação entre os alguns dos parâmetros. É provável que a não convergência se deva à insuficiente capacidade resistente para o método construtivo considerado e não à ineficiência do algoritmo.

Ainda que os resultados, utilizando este modelo, não tenham sido os desejados contribuiu-se de alguma forma para a introdução de modelos mais complexos, e por isso mais realistas, na identificação de parâmetros geomecânicos através da retroanálise.

Conclui-se que algoritmo tem bastante potencial, ainda assim deve ser desenvolvido e testado em trabalhos futuros.

Um ponto a ser melhorado será o desenvolvimento de um modelo numérico com um método construtivo mais adequado ao tipo de solos estudados com o modelo constitutivo hiperbólico. Este também deverá considerar além dos deslocamentos o valor das tensões, como dados resultantes da monitorização de campo.

Uma vez verificada a eficiência do algoritmo empregue é recomendada a diminuição do número de iterações máximo para minimizar o esforço computacional, assim um dos critérios de paragem a definir poderia ser um determinado valor do erro.

Dever-se-ia analisar também os parâmetros com mais influência no comportamento dos modelos, uma vez que, os algoritmos, geralmente, só conseguem identificar com maior ou menor precisão parâmetros com influência significativa no comportamento. Os parâmetros com pouca influência, o algoritmo terá sempre mais dificuldade.

A análise todos os pontos anteriormente referidos possibilitaria a aplicação do procedimento de retroanálise de parâmetros geomecânicos, considerando o modelo constitutivo hiperbólico, a um caso real.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] K. Terzaghi e R. Peck, "Soil Mechanics in engineering practice", Jonh Wiley & Sons, 1948.
- [2] T. Miranda, "Geomechanical parameters evaluation in underground structures. Artificial intelligence, bayesian probabilities and inverse methods", Tese de Doutorado, Universidade do Minho, Portugal, 2007.
- [3] A. Cividini, L. Jurina e G. Gioda, "Some aspects of characterization problems in geomechanics", International Journal of Rock Mechanics and Mining Science, 1981.
- [4] J. Júnior, "Estudo do comportamento de um solo residual melhorado através de técnicas mecânicas e físico-químicas e sua aplicação à análise de fundações superficiais", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil, 1996.
- [5] A. Guimarães, "Análise inversa para determinação de parâmetros de deformabilidade de solos", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Viçosa, Brasil, 2008.
- [6] S. Timoshenko e J. Goodier, "Theory of elasticity", McGraw-Hill Book Company, 1951.
- [7] R. Kondner, "Hiperbolic stress-strain response: Cohesive soils", Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, 1963.
- [8] T. Miranda, D. Dias, S. Eclaircy-Caudron, A. Gomes Correia e L. Costa, "Back analysis of geomechanical parameters by optimisation of a 3D model of underground structure", Tunnelling and Underground Space Technology, 2011.
- [9] M. Cardoso, "A retroanálise de parâmetros geomecânicos em estruturas subterrâneas, comparação de diferentes técnicas de otimização", Tese de Mestrado, Universidade do Minho, Portugal, 2013.
- [10] N. Moreira, T. Miranda, M. Pinheiro, P. Fernandes, D. Dias, L. Costa e J. Sena-Cruz, "Back analysis of geomechanical parameters in underground works using an Evolution Strategy algorithm", Tunnelling and Underground Space Technology, 2013.

- 
- [11] L. Costa, "Algoritmos evolucionários em otimização uni e multi-objetivo", Tese de Doutorado, Universidade do Minho, Portugal, 2003.
- [12] S. Eclaircy-Caudron, D. Dias, R. Kastner, T. Miranda, A. Gomes Correia e L. Ribeiro e Sousa, "Inverse analysis on two geotechnical works: a tunnel and a cavern", Taylor & Francis, 2007.
- [13] A. Papon, Y. Riou, C. Dano e P.-Y. Hicher, "Single- and multi-objetive genetic algorithm optimization for identifying soil parameters", International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2011.
- [14] L. Costa e P. Oliveira, "Evolutionary algorithms approach to the solution of mixed integer non-linear programming problems", Computers and Chemical Engineering , 2001.
- [15] L. Costa, L. Fernandes, I. Figueiredo, J. Júdice, R. Leal e P. Oliveira, "Multi- and single-objective approaches to laminate optimization with genetic algorithms", Structural and Multidisciplinary Optimization, 2004.
- [16] C. Mata, "Aplicação de retroanálise em obras subterrâneas", Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Portugal, 2013.
- [17] S. Levasseur, Y. Malécot, M. Boulon e E. Flavigny, "Soil parameter identification using a genetic algorithm", International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2007.
- [18] Itasca, "FLAC - Fast Lagrangian Analysis of Continua", Version 5.0, User's manual, Minneapolis, USA, 2005.
- [19] K. Pimentel, "Estradas não-pavimentadas e ferrovias reforçadas com geossintéticos", Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, Brasil, 2007.
- [20] L. Costa, I. Espírito Santo e E. Fernandes, "A hybrid genetic pattern search augmented Lagrangian method for constrain global optimization", Applied Mathematics and Computation, 2012.

- [21] S. Sakurai, "Lessons learned from field measurements in tunnelling", Tunnelling and Underground Space Technology, 1997.
- [22] M. Almeida, "Estudo de tensão deformação de barragem de terra e enrocamento", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil, 2010.
- [23] S. Sakurai e K. Takeuchi, "Back analysis of measured displacements of tunnels", Rock Mechanics and Rock Engineering, 1983.
- [24] P. Pereira, "Modelagem numérica do comportamento tensão-deformação de barragens de terra: Estudo de caso da UHE de São Simão", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil, 2014.
- [25] C. Castro, "Comportamento da barragem de Serra da Mesa durante o periodo de construção", Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro, Brasil, 1996.
- [26] P. Cruz, "100 grandes barragens brasileiras: casos históricos, materiais de construção, projeto", Oficina de textos, São Paulo, Brasil, 1996.
- [27] D. Gerscovich, "Modelos constitutivos - Hiperbólico", Sebenta da disciplina, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil, s.d..
- [28] J. M. Duncan, P. Byrne, K. S. Wong e P. Marry, "Streng, stress-strain, and bulk modulus parameters for finite element analyses of stress and movements in soil mass", University of California, College of Engineering, Berkeley, 1980.
- [29] J. M. Duncan e C. Y. Chang, "Nonlinear analysis of stress and strain in soils", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1970.
- [30] N. Jambu, "Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial tests", Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Wiesbaden, Germany, 1963.
- [31] K. T. Kavanagh, "Experiment versus analysis: computational technics for the description of satatic response", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1973.

- [32] L. Jurina, G. Maier e K. Podolak, "On model identification problems in rock mechanics", Proc International Symposium on the Geotechnics of Structurally Complex Formations, 1977.
- [33] G. Gioda, "Indirect identification of the average elastic characteristics of rock masses", Proc. International Conference on Structural Foundations on Rocks, 1980.