

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Integradora II

Elaborado por Paulo Flores, Filipe Marques, Nuno Dourado e Rui Pereira - 2016



Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 220
Fax: +351 253 516 007
E-mail: pflores@dem.uminho.pt
URL: www.dem.uminho.pt



Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 220
Fax: +351 253 516 007
E-mail: fmarques@dem.uminho.pt
URL: www.dem.uminho.pt



Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 220
Fax: +351 253 516 007
E-mail: nunodourado@dem.uminho.pt
URL: www.dem.uminho.pt



Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 436
Fax: +351 253 510 401
E-mail: rmp@math.uminho.pt
URL: www.math.uminho.pt

T.04 – SOBRE O CARRO ANALISADO

- 1. Introdução**
- 2. Breve Descrição do Carro**
- 3. Cálculo da Aceleração Máxima do Carro**
- 4. Deformação da Mola – Deslocamento do Carro**
- 5. Revisão de Conhecimentos**
- 6. Consultas Recomendadas**

1. Introdução

Antes de apresentar as principais características gerais do carro aqui analisado é oportuno tecer breves considerações sobre o conceito de carro.



Hipomóvel



Carro elétrico



Automóvel *Ford T*

Carro provém do **étimo latino “carru”** que significa carroça. Pode, pois, definir-se carro como sendo um **veículo com rodas para transportar** pessoas e coisas.

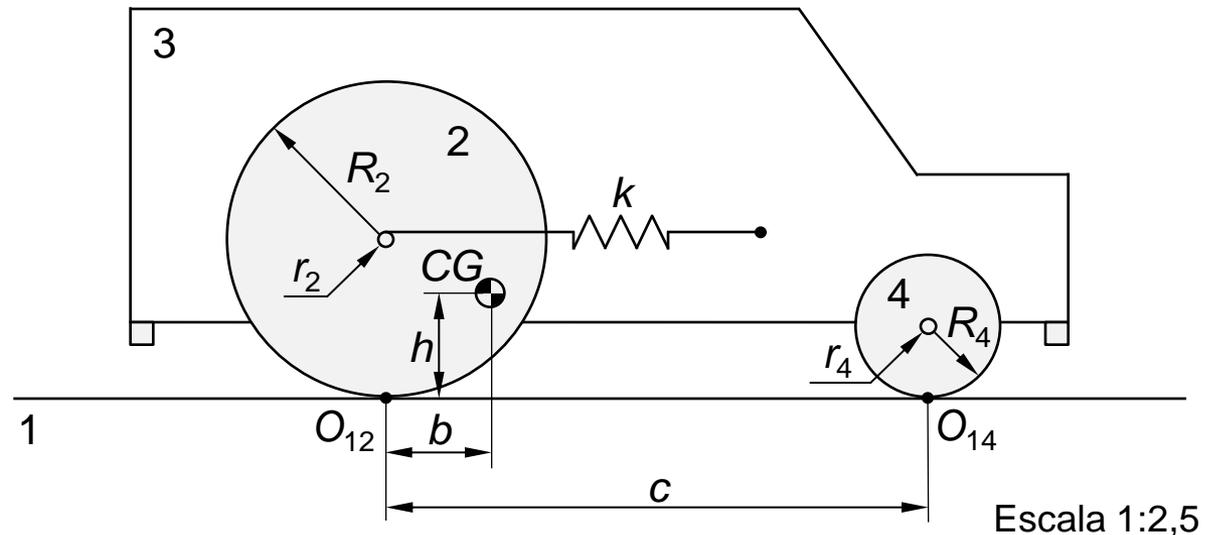
Automóvel, por sua vez, diz respeito a **veículos de pelo menos quatro rodas** (acionado, geralmente, por motores de combustão ou elétricos) utilizado no transporte de passageiros e de mercadorias.

Um automóvel é, pois, um veículo com **capacidade de locomoção autónoma**. **Carro** pode, portanto, confundir-se com veículo, viatura ou automóvel.

2. Breve Descrição do Carro

A figura de baixo ilustra uma **representação esquemática e genérica do carro** analisado no presente documento, tendo como principal propósito aplicar alguns conceitos relativos à sua análise dinâmica.

- 1 – Solo/chão
- 2 – Rodas traseiras
- 3 – Chassis (estrutura)
- 4 – Roda dianteira



Deve referir-se que nesta fase não há ainda grandes preocupações com os aspetos construtivos e de montagem do carro. O principal enfoque aqui é no **desempenho dinâmico do carro**.

2. Breve Descrição do Carro

Para a melhor compreensão do modelo do carro aqui estudado devem ser tidos em consideração os seguintes aspetos:

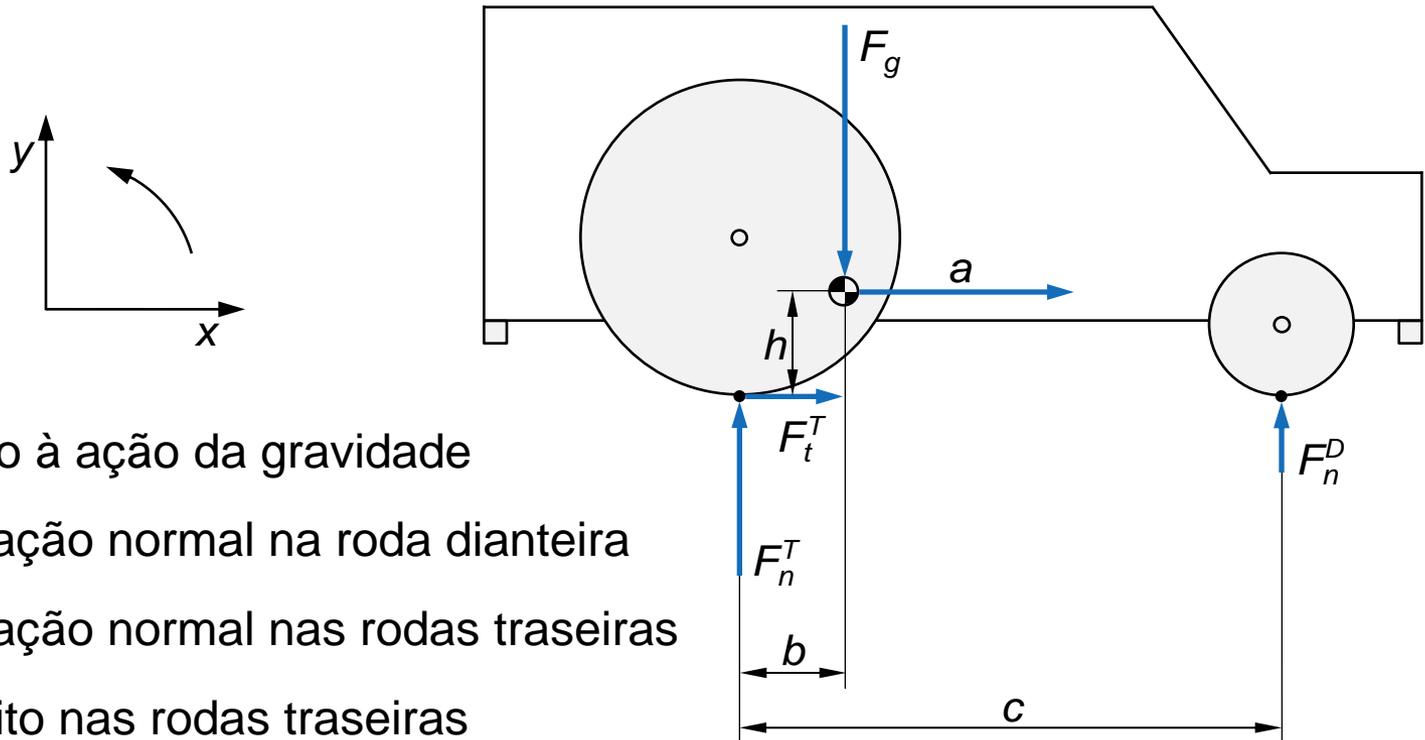
1. O carro irá descrever o seu movimento num plano horizontal liso numa distância de 10 m, gastando o menor tempo possível
2. Os pontos de contacto entre as rodas e o solo são centros instantâneos de rotação, uma vez que aquelas devem rodar sem escorregar
3. A massa total do carro é de 100 g (incluindo todos os componentes)
4. O centro de gravidade (ou de massa) do carro deverá estar localizado a 40 mm de altura do solo e 40 mm à frente do eixo traseiro ($h = b = 40$ mm)
5. A distância entre eixos é igual a 180 mm ($c = 180$ mm)
6. A largura do carro é igual a 70 mm
7. As rodas traseiras têm 100 mm de diâmetro, sendo estas as rodas motrizes

2. Breve Descrição do Carro

8. A roda dianteira tem 50 mm de diâmetro, sendo uma roda movida
9. O diâmetro do eixo traseiro é igual a 2 mm ($r_2 = 1$ mm)
10. O carro é acionado por uma mola helicoidal de tração que é esticada pelo enrolamento do fio ilustrado na figura anterior
11. A mola está posicionada horizontalmente sobre o chassis
12. A mola tem uma rigidez (constante de mola) igual a 190 N/m e não se considera a existência de pré-tensão na mola
13. A deformação máxima da mola permitida é de 100 mm
14. Não se considera a existência de qualquer sistema de acionamento externo
15. O carro é guiado por um fio de *nylon*, pelo que aquele incluirá 2 ilhós que estão colocados na parte inferior do carro

3. Cálculo da Aceleração Máxima do Carro

Para efetuar o **cálculo da aceleração máxima** que se pode transmitir ao carro, de modo a que **não haja escorregamento das rodas** motoras (traseiras), considere-se o diagrama do corpo livre representado em baixo.



F_g – Força devido à ação da gravidade

F_n^D – Força de reação normal na roda dianteira

F_n^T – Força de reação normal nas rodas traseiras

F_t^T – Força de atrito nas rodas traseiras

A força de atrito, que inclui o efeito das duas rodas traseiras, é responsável pelo movimento do carro. Esta força é frequentemente denominada de força de tração.

3. Cálculo da Aceleração Máxima do Carro

Na presente abordagem, considera-se que o carro é constituído apenas por um **único corpo** que concentra toda a massa do sistema mecânico. Deste modo, o diagrama do corpo livre é simplificado sobremaneira.

Na representação do corpo livre anteriormente exposta, considera-se que na **roda dianteira não existe atrito**, o que corresponde à situação ideal em termos de desempenho do carro.

Na análise aqui apresentada não é considerado efeito da **inércia rotacional** das rodas.

Deve ainda referir-se que nesta análise simplificada não se consideram quaisquer **perdas no sistema**.

O **momento motor** que atua no eixo das rodas traseiras é dado por

$$M_m = F_m r_2 \quad (1)$$

em que F_m é a força causada pela mola e r_2 é o raio do eixo das rodas traseiras.

3. Cálculo da Aceleração Máxima do Carro

De igual modo, o **momento desenvolvido pela força de atrito** é dado por

$$M_t = F_t^T R_2 \quad (2)$$

em que F_t^T é a força de atrito desenvolvida nas rodas traseiras.

Observa-se que quando $M_m > M_t$, então há deslizamento das rodas motoras.

Pode, portanto, dizer-se que há um **limite à potência que se consegue transmitir** do motor/acionador (mola) para o carro, e que corresponde a $M_m = M_t$.

Atente-se a que no caso de **não existir atrito entre as rodas e o solo** (e.g. carro sobre gelo) as rodas patinam e, conseqüentemente, **o carro não se movimenta**.

Donde se pode afirmar que a **força de atrito** é a força responsável pelo deslocamento do carro, sendo, esta força denominada de **força de tração**.

3. Cálculo da Aceleração Máxima do Carro

Aplicando agora as **leis de Newton** para os movimentos de translação e de rotação em relação ao diagrama do corpo livre anteriormente representado resulta que

$$\sum F_x = ma \Rightarrow F_t^T = ma \quad (3)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_n^T + F_n^D - F_g = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_{CG} = 0 \Rightarrow -F_n^T b + F_n^D (c - b) + F_t^T h = 0 \quad (5)$$

Da equação (4) vem que

$$F_n^D = F_g - F_n^T \quad (6)$$

Substituindo agora a equação (6) na equação (5) resulta que

$$F_n^T c - F_t^T h = F_g (c - b) \quad (7)$$

Atendendo a que nas rodas traseiras (motoras) é aplicável a lei de atrito de Coulomb (atrito estático), tem-se que

$$F_t^T = \mu F_n^T \quad (8)$$

3. Cálculo da Aceleração Máxima do Carro

Introduzindo agora a equação (8) na equação (7) resulta que

$$F_t^T = \frac{\mu F_g (c - b)}{c - \mu h} \quad (9)$$

Combinando as equações (3) e (9) obtém-se uma expressão para a aceleração

$$a = \frac{\mu g (c - b)}{c - \mu h} \quad (10)$$

A equação (10) permite calcular a **aceleração máxima** do carro quando as rodas traseiras (motrizes) descrevem um movimento de rolamento puro. Com efeito, considerando os dados anteriormente apresentados e que os valores dos **coeficientes de atrito de deslizamento estático e dinâmico** entre as rodas e o solo são iguais a 1,0 e 0,7, respetivamente, resulta que

$$(a_{\text{máx}})_e = \frac{1 \times 9,81 \times (180 - 40)}{180 - 1 \times 40} = 9,810 \text{ m/s}^2$$

$$(a_{\text{máx}})_d = \frac{0,7 \times 9,81 \times (180 - 40)}{180 - 0,7 \times 40} = 6,325 \text{ m/s}^2$$

3. Cálculo da Aceleração Máxima do Carro

Por seu lado, combinando agora as equações (4) e (5) pode escrever-se que

$$F_n^T = F_g \frac{c-b}{c} + F_t^T \frac{h}{c} \quad (11)$$

Considerando agora a equação (3) na equação (11) vem que

$$F_n^T = F_g \frac{c-b}{c} + \frac{mah}{c} \quad (12)$$

em que a primeira parcela do segundo membro representa a **carga estática** e a segunda diz respeito à **transferência de carga dinâmica** devido à aceleração do carro.

De igual modo, combinando agora as equações (6) e (12) vem que

$$F_n^D = F_g \frac{b}{c} - \frac{mah}{c} \quad (13)$$

onde a primeira parcela do segundo membro representa a **carga estática** e a segunda diz respeito à **transferência de carga dinâmica**.

3. Cálculo da Aceleração Máxima do Carro

Da análise do que foi anteriormente exposto, observa-se que a roda dianteira pode perder o contacto com o solo se o centro de gravidade do carro for demasiado alto, demasiado atrás ou uma combinação destes dois fatores.

Introduzindo agora a equação (8) na equação (11) obtém-se que

$$F_n^T = F_g \frac{c - b}{c - \mu h} \quad (14)$$

Substituindo agora a equação (14) na equação (6) vem que

$$F_n^D = F_g \frac{b - \mu h}{c - \mu h} \quad (15)$$

O valor máximo da força de reação normal traseira ocorre quando a força de reação na roda dianteira é nula, ou seja, da equação (15) resulta que

$$b - \mu h = 0 \quad (16)$$

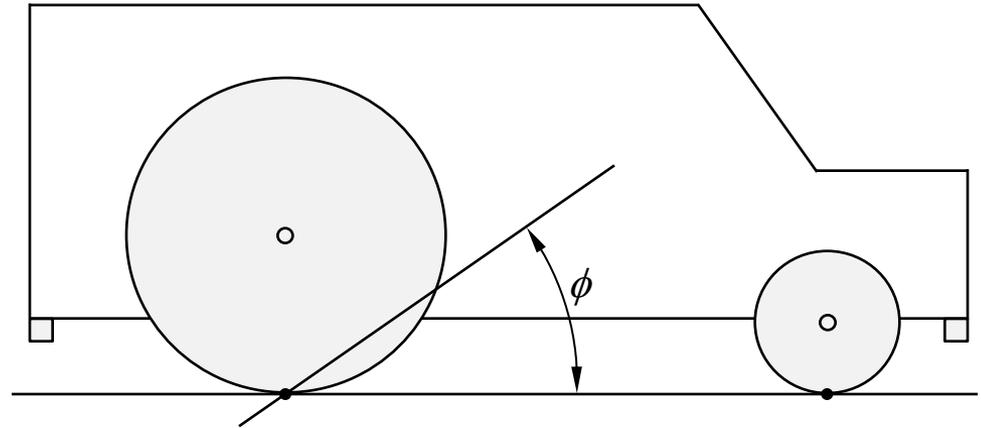
3. Cálculo da Aceleração Máxima do Carro

A distância ótima do centro de massa do carro, b , pode relacionar-se com a altura do centro de massa, h , de acordo com a aceleração. Igualando a zero a equação (13), resulta que

$$\frac{h}{b} = \frac{g}{a} \quad (17)$$

Assim, a reta ideal para a localização do centro de massa é dado por

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{h}{b} = \frac{g}{a} \quad (18)$$



Na verdade, o centro de massa do carro tem de estar um pouco à frente do ponto ideal para que o contacto da roda com o solo seja garantido.

Quanto mais à frente for o centro de massa do carro, maior a possibilidade de escorregamento na roda traseira.

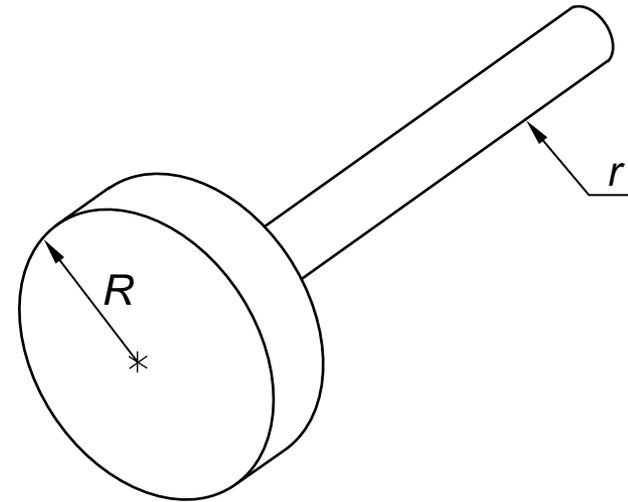
Quanto mais alto for o centro de massa, maior será a transferência de carga.

4. Deformação da Mola – Deslocamento do Carro

Neste parágrafo é apresentada uma breve análise que permite estabelecer a **relação entre a deformação da mola e o deslocamento do carro**. Para o efeito considere-se o **sistema roda-eixo** representado na figura seguinte.

O sistema roda-eixo é considerado **uma das 6 máquinas simples** descritas na Antiguidade e que serve para aumentar ou diminuir a força (ou velocidade).

Na verdade, **quando se transmite movimento do eixo para a roda** está a aumentar-se a velocidade linear ou tangencial periférica, e, por outro, diminui-se a força transmitida.



Sistema roda-eixo

Por outro lado, **quando se transmite movimento da roda para o eixo**, está a aumentar-se a força e a diminuir-se a velocidade.

De qualquer modo, o trabalho é o mesmo em ambos os elementos (no eixo e na roda), pois o **princípio da conservação da energia é preservado**.

4. Deformação da Mola – Deslocamento do Carro

O sistema mecânico roda-eixo era utilizado fundamentalmente para elevar cargas pesadas, funcionando como um guincho.

Da análise do funcionamento do sistema roda-eixo pode verificar-se que

$$\frac{M_{\text{roda}}}{M_{\text{eixo}}} = \frac{F_{\text{roda}} R}{F_{\text{eixo}} r} \quad (19)$$

ou seja

$$\frac{F_{\text{eixo}}}{F_{\text{roda}}} = \frac{R}{r} \quad (20)$$

A equação (20) representa a **vantagem mecânica (VM)** de um sistema mecânico.

Pode, pois definir-se VM como sendo o **quociente entre a força de saída** ou produzida por um sistema mecânico **e a força de entrada** ou aplicada no sistema.

A vantagem mecânica é tanto maior quanto menor for o raio do eixo, por isso é que, em geral, **os eixos ou veios são o mais finos possível.**

4. Deformação da Mola – Deslocamento do Carro

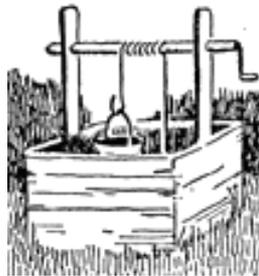
Para **aumentar a vantagem mecânica** do sistema roda-eixo pode **aumentar-se o raio da roda**, contudo, para evitar atravancamentos exagerados devem usar-se rodas intermédias (tipicamente rodas dentadas).

Não deve confundir-se **vantagem mecânica** com **rendimento** de um sistema mecânico.

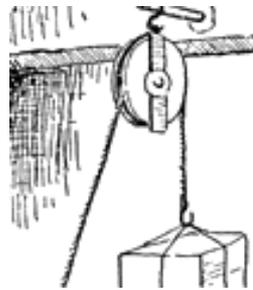
A título de curiosidade, deve referir-se que as **6 máquinas simples da Antiguidade** são a alavanca, a roda-eixo, a polia, o plano inclinado, a cunha e o parafuso, tal como se ilustra nas figuras seguintes.



Alavanca



Roda-eixo



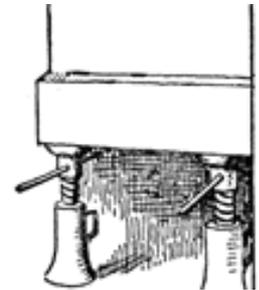
Polia



Plano inclinado



Cunha

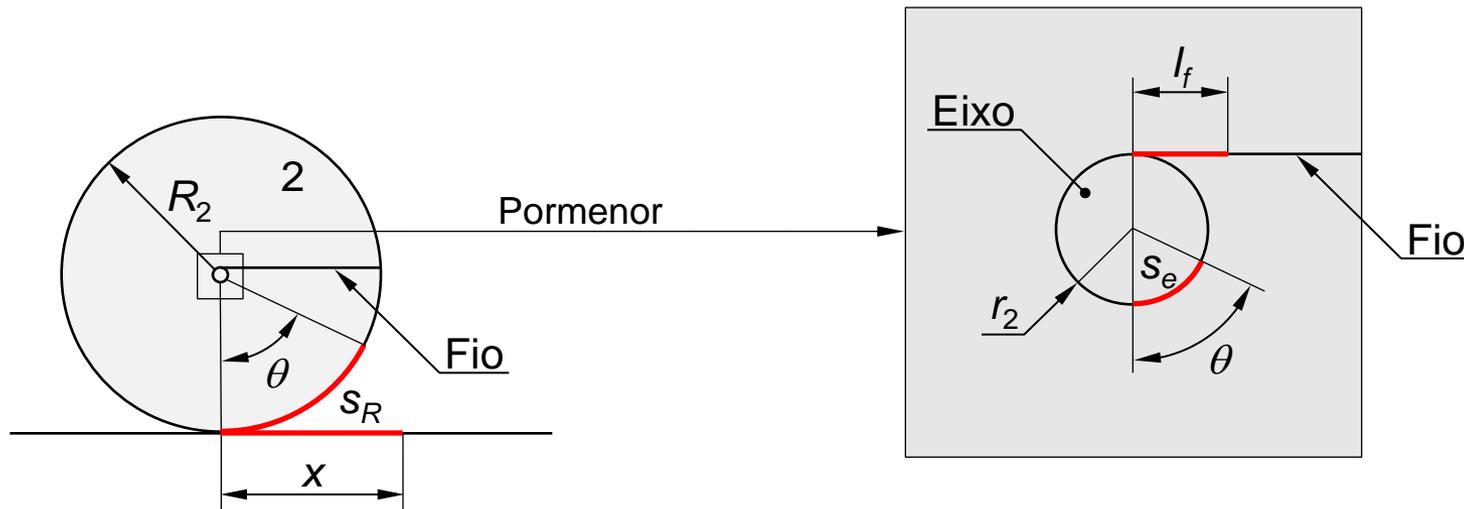


Parafuso

4. Deformação da Mola – Deslocamento do Carro

A figura de baixo mostra o sistema roda-eixo do carro descrito anteriormente.

Do funcionamento deste sistema mecânico sabe-se que a rotação é igual em ambos os elementos, pois admite-se que os corpos são rígidos não havendo, por isso, deformação angular.



Atendendo a que a roda descreve movimento de rolamento puro, isto é, roda sem escorregar, verifica-se que o deslocamento efetuado pelo carro é igual ao comprimento do arco correspondente descrito pela roda.

4. Deformação da Mola – Deslocamento do Carro

Assim, da [análise da roda](#) da figura anterior, relativa ao sistema roda-eixo, pode escrever-se que

$$x = s_R = R_2 \theta \quad (21)$$

ou seja

$$\theta = \frac{x}{R_2} \quad (22)$$

Por outro lado, [analisando o eixo](#) verifica-se que

$$l_f = s_e = r_2 \theta \quad (23)$$

ou seja

$$\theta = \frac{l_f}{r_2} \quad (24)$$

4. Deformação da Mola – Deslocamento do Carro

Como a amplitude da rotação da roda é igual à amplitude da rotação do eixo, então combinando as equações (22) e (24) resulta que

$$\frac{x}{R_2} = \frac{l_f}{r_2} \Rightarrow l_f = x \frac{r_2}{R_2} \quad (25)$$

em que l_f representa o deslocamento do fio em torno do eixo, x é o deslocamento do carro, r_2 é o raio do eixo e R_2 representa o raio da roda.

Observa-se, portanto, que a relação entre a deformação da mola ($\delta = l_f$) e o movimento do carro (x) depende da vantagem mecânica do sistema.

Como a deformação máxima da mola permitida ($\delta_{\text{máx}}$) é igual a 100 mm, então o fio deverá ser enrolado à volta do eixo exatamente um comprimento de 100 mm, pois o fio é considerado como inextensível.

Dividindo $\delta_{\text{máx}}$ pelo perímetro do eixo, obtém-se o correspondente número de voltas de enrolamento, ou seja

$$\frac{\delta_{\text{máx}}}{2\pi r_2} = \frac{100}{2\pi \times 1} = 15,916 \text{ voltas} \quad (26)$$

4. Deformação da Mola – Deslocamento do Carro

Com efeito, para 15,916 voltas, o carro desloca-se uma distância dada por

$$x = 2\pi R_2 \frac{\delta_{\text{máx}}}{2\pi r_2} = \frac{R_2}{r_2} \delta_{\text{máx}} = \frac{50}{1} \times 100 \times 10^{-3} = 5 \text{ m} \quad (27)$$

Atendendo a que não existe pré-tensão na mola, então a deformação da mola varia de acordo com a seguinte relação

$$\delta = \delta_{\text{máx}} - x \frac{r_2}{R_2} \quad (28)$$

ou seja, δ é a deformação da mola à medida que o fio se vai desenrolando e o carro vai avançando.

Logo, a força máxima que atua na mola corresponde ao início do movimento, ou seja

$$(F_m)_{\text{máx}} = k\delta = 190 \times \left(100 \times 10^{-3} - 0 \times \frac{1}{50} \right) = 19 \text{ N} \quad (29)$$

5. Revisão de Conhecimentos

Apresentam-se de seguida algumas questões que merecem uma reflexão mais profunda no decorrer da realização do projeto do carro.

Interessa ter modelos mais simples ou mais elaborados do carro?

Interessa ter um carro mais ou menos pesado?

Interessa ter o centro de massa do carro mais a trás ou mais à frente?

Interessa ter o centro de gravidade mais ou menos alto?

Interessa ter rodas de maior ou menor dimensão?

Interessa ter rodas maciças ou ocas?

Interessa ter maior ou menor inércia rotacional?

Interessa ter maior ou menor distância entre eixos?

Interessa ter tração traseira ou dianteira?



5. Revisão de Conhecimentos

Interessa ter rodas diferentes para trás e para a frente?

Interessa ter maior ou menor diâmetro para os eixos?

Interessa ter mola com uma pré-tensão?

Interessa ter uma mola mais ou menos rígida?

Interessa ter uma ou mais molas (em série ou em paralelo)?

Interessa ter maior ou menor atrito nas rodas traseiras?

Interessa ter maior ou menor atrito na roda dianteira?

Interessa ter maior ou menor inércia translacional?

Interessa ter tração integral?

Interessa ter rodas mais ou menos largas?

6. Consultas Recomendadas

Flores, P. (2012) *Análise Cinemática e Dinâmica de Mecanismos - Exercícios resolvidos e propostos*. Publindústria, Porto.

Flores, P., Claro, J.C.P. (2007) *Cinemática de Mecanismos*. Edições Almedina, Coimbra.

Martin, J.K., Dixon, J.C. (2001) Three seconds in two days: a theoretical and practical model for teaching basic dynamics analysis. *Journal of Multi-body Dynamics*, 214(4) 195-208.

<https://pt.wikipedia.org/wiki/Cinemática>

<https://pt.wikipedia.org/wiki/Dinâmica>

https://pt.wikipedia.org/wiki/Equações_de_movimento

<https://www.youtube.com/watch?v=dv-mXAhhWG0>

<https://www.youtube.com/watch?v=nDis6HbXxjg>