Universidade do Minho
Instituto de Educação

Joana Rita Guedes Costa

Desenvolver a explicitação do raciocínio matemático: Estudo com alunos do Ensino Básico

outubro de 2014

Desenvolver a explicitação do raciocínio matemático: Estudo com alunos do Ensino Básico
Joana Rita Guedes Costa

UMinho|2014

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Joana Rita Guedes Costa

Desenvolver a explicitação do raciocínio matemático: Estudo com alunos do Ensino Básico

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico

Trabalho realizado sob a orientação da
Doutora Maria Helena Martinho

outubro de 2014

DECLARAÇÃO

NOME: Joana Rita Guedes Costa

ENDEREÇO ELETRÓNICO: joanaritaguedescosta@hotmail.com

TELEFONE: 919197483

NÚMERO DE CARTÃO DE CIDADÃO: 13914603

TÍTULO DO RELATÓRIO DE ESTÁGIO: Desenvolver a explicitação do raciocínio matemático: Estudo com alunos do Ensino Básico.

ORIENTADORA: Doutora Helena Martinho

DESIGNAÇÃO DO MESTRADO: Mestrado em Ensino do 1.° e 2.° Ciclo do Ensino Básico.

Universidade do Minho, 31 de outubro de 2014

Assinatura: ____

AGRADECIMENTOS

Percorrido este caminho, muitas vezes angustiante, prescrito de sentimentos contraditórios entre desânimo, entusiasmo, dedicação e emoção, fico incessantemente grata a todos aqueles que se cruzaram comigo, enquanto o ia percorrendo, passo a passo…

Um eterno Obrigada,

À minha orientadora, Doutora Helena Martinho, por todos os ensinamentos, pela sua disponibilidade em acompanhar sempre o meu trabalho, pelo encorajamento, pelos seus conselhos, orientações, apoio e pelas suas palavras reconfortantes em momentos menos bons.

À Professora Fátima Araújo, pela sua total disponibilidade em todos os assuntos relativos a este estudo, pelas oportunidades dadas em sala de aula, pelas suas sugestões, pelo seu carinho, compreensão, dedicação e amizade.

Aos alunos, pela confiança depositada, pela colaboração, entusiasmo e pelo interesse em aprender. E ainda, pela alegria com que me recebiam todos os dias, por todo o carinho, sorrisos, abraços e beijinhos, porque são e serão para sempre "as minhas crianças" e porque foram eles que tornaram o período de estágio tão especial.

À escola, ao pessoal docente e não docente que me recebeu de braços abertos para realizar este estágio.

À amiga e companheira de estágio, Daniela Costa, pela amizade, camaradagem, cooperação, partilha de informações e apoio em todas as fases de elaboração do estudo.

Ao Diogo, pelo exemplo de lealdade, pela curiosidade pelo saber que me impõe, pela paciência, pelas tontices, pelo seu altruísmo, pelo amor, pela entrega e apoio que sempre me dá e por todas as pequenas e grandes coisas que fez para que eu conseguisse chegar à meta.

À Mariana, que é parte de mim, pelo seu apoio incondicional, pelo amor sincero, pela cumplicidade, por nunca me deixar desistir e por acreditar sempre em mim. Também aos meus pais pelo amparo, afeto, indulgência e por reconhecerem que sou capaz.

À Liliana e à Catarina que, mesmo não estando dentro do assunto, nunca deixaram de transmitir coragem e de dizer uma palavra animadora. E à pequena Carolina, pelo seu sorriso cintilante, que mesmo nos momentos mais penosos, também me fez sorrir e esperançar.

A realização deste mestrado foi apoiada financeiramente por fundos nacionais através da FCT– Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto LiDEs – a literacia das disciplinas escolares: Características e desafios para mais *engagement* e aprendizagem (FCOMP-01-0124-FEDER-041405 (Refª. FCT, EXPL/MHC-CED/0645/2013)).

"O amor é a maior força educativa,
sem ele qualquer pedagogia é inútil."
(Paula Frassinetti)

DESENVOLVER A EXPLICITAÇÃO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO: ESTUDO COM ALUNOS DO ENSINO BÁSICO

Joana Rita Guedes Costa
Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico
Universidade do Minho – 2014

RESUMO

Esta investigação teve como propósito compreender o desenvolvimento da explicitação do raciocínio matemático, com alunos do Ensino Básico, ao longo da realização de uma sequência de tarefas. Com esta experiência pretendeu-se criar condições para que os alunos desenvolvessem o raciocínio através da sua explicitação. Neste sentido, durante a investigação realizada estiveram presente as seguintes questões de investigação: i) quais as dificuldades com que os alunos se depararam na resolução das tarefas e na explicitação do raciocínio?; ii) como é que os alunos evoluíram, ao longo da intervenção pedagógica, na sua capacidade de explicitar os seus raciocínios?

Todo o estudo desenvolveu-se de acordo com a metodologia de investigação-ação de cariz qualitativo, recorrendo sempre ao ciclo de planificação, ação, observação e reflexão. Os instrumentos de recolha de dados foram vários: a observação participante com o apoio de gravações áudio e vídeo, os registos escritos em forma de diários da professora investigadora, as produções dos alunos ao longo das aulas e uma ficha de reflexão, realizada no final da intervenção. É de salientar que se optou por diferentes formas de trabalho, tendo os alunos realizado atividades individuais e em grupo.

Com este estudo foi possível compreender que o trabalho colaborativo ajudou a desenvolver nos alunos a capacidade de raciocinar e de explicitar os seus raciocínios, tendo-se verificado que a interação entre os alunos foi promotora de uma aprendizagem significativa. Além disso, perante os resultados obtidos, conclui-se que os alunos desenvolveram a capacidade de explicitar os seus raciocínios, seguindo os padrões de raciocínio identificados na educação matemática, justificando as suas posições.

Globalmente, este projeto contribuiu para o enriquecimento curricular dos alunos pois, adquiriram novos conhecimentos na área da matemática, desenvolveram o raciocínio matemático e vivenciaram uma diversidade de situações e experiências proporcionadas pelas interações.

Palavras-chave:
Raciocínio matemático; tarefas; trabalho colaborativo.

DEVELOPING THE EXPLANATION OF MATHEMATICAL REASONING: STUDY UNDERTAKEN WITH STUDENTS OF BASIC EDUCATION

Joana Rita Guedes Costa
Internship Report
Master in Teaching 1st and 2nd Cycle of Basic Education
University of Minho - 2014

ABSTRACT

This research aimed to understand the development of explicit mathematical reasoning, within students of basic education, along the accomplishment of a task sequence. With this experience was intended to create conditions for students to develop reasoning through its explicitness. In this sense, during this investigation the following research questions were taken under consideration: i) what difficulties students encountered in the resolution of tasks and explanation of reasoning? ii) how do students progressed through the educational intervention in their ability to explain their reasoning?

The entire study was carried out according to the methodology of action research of a qualitative nature, always resorting to the planning, action, and observation and reflection cycle. The instruments for data collection were several: participant observation supported by audio and video recordings, records taken as diaries by the teacher researcher, students/productions during classes and a reflection rubric at the end of intervention. Note that different ways to work with students were held and the students developed/conducted individual and group activities.

With this study it was possible to understand that the collaborative work helped students developing their ability to reason and explain their reasoning, and it was found that the interaction between students was a significant promoter of learning. Furthermore, with the results we concluded that students developed the ability to explain their reasoning, following the patterns of reasoning identified in mathematical education, justifying their positions.

Overall, this project has contributed to the *curriculum* enrichment because students have acquired new mathematical knowledge, have developed mathematical reasoning and have experienced a variety of situations and experiences provided by the interactions.

Keywords:

Mathematical reasoning; tasks; collaborative work.

ÍNCIDE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentado o objetivo da experiência realizada no Ensino Básico, em que se procurou desenvolver a capacidade de explicitação do raciocínio matemático dos alunos, recorrendo à implementação de uma sequência de tarefas. Apresenta-se, em primeiro lugar, o objetivo do estudo e as questões de investigação que o orientam. Posteriormente é exibida a sua relevância em termos de investigação, assim como a organização de todo o estudo realizado.

1.1. Objetivo e questões de investigação

Faz parte do senso comum, na nossa sociedade, considerar que a matemática desenvolve o raciocínio. Porém, o próprio raciocínio é indispensável para a compreensão desta ciência. Para que um conceito seja compreendido em matemática não chega conhecer a sua definição, é também necessário entender como é que ele se relaciona com outros conceitos e como pode ser utilizado. A compreensão de procedimentos envolve perceber a razão por que funcionam, como podem ser utilizados e como podem ser interpretados os seus resultados (NCTM, 2009). Assim, desenvolver a capacidade de raciocínio matemático nos alunos não se confina a memorizar conceitos e procedimentos rotineiros, pelo contrário, quando a memorização é o centro da aprendizagem os alunos ficam com uma visão da matemática como sendo um conjunto de regras desconexas, ao invés de uma ciência lógica e coerente (ME, 2007).

As orientações curriculares para o ensino da matemática propõem uma importância acrescida para o desenvolvimento das capacidades de raciocínio matemático, de resolução de problemas e de comunicação matemática (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; ME, 2007; NCTM, 1991, 1994, 2007). Além disso, propõem também que essas mesmas capacidades sejam alvo de atenção desde o início da escolaridade dos alunos. Estas indicações vêm contrariar a ideia preconcebida de que a matemática dos alunos, nos primeiros anos de escolaridade, se restringe ao contar e ao calcular, que implicitamente presume que as crianças não têm capacidade de produzir raciocínios matemáticos não elementares ou de resolver problemas não triviais (Canavarro & Pinto, 2012). Realça-se que esta ideia predominou em Portugal no decorrer de algumas décadas, associada à existência de expectativas limitadas em relação ao que os alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico eram capazes de fazer em matemática (Serrazina, Canavarro, Rocha, Guerreiro & Portela, 2011). Contudo, a investigação matemática tem vindo a proporcionar evidências de que os alunos mais jovens são capazes de explorar problemas e de criar estratégias adequadas para os resolver (Cai, 2010).

De igual modo, a comunicação matemática também tem vindo a adquirir um lugar cada vez mais importante no estudo do processo de ensino aprendizagem. Nos contextos onde as interações são incentivadas, os alunos podem exprimir as suas ideias, ouvir as dos colegas e do professor, formular e defender as suas conjeturas, comparar processos, compreender ideias e relações, refletir e desenvolver os seus vocabulários matemáticos (Hiebert, 1992; NCTM, 1991). Com efeito, têm a oportunidade de clarificar, organizar e consolidar os seus pensamentos, desenvolvendo o conhecimento matemático, a capacidade de resolver problemas, o poder de abstração, bem como a capacidade de raciocínio e a confiança neles próprios e alcançar uma compreensão mais profunda de conceitos e princípios matemáticos (Barrody, 1993; Martinho, 2011).

O desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, a par da comunicação matemática, surge como um aspeto central em todos os níveis de educação (ME, 2007; NCTM, 2007). Para prosseguir na compreensão desta questão, um passo fundamental é conhecer melhor os processos de raciocínio destes. Por tal razão, este estudo tem como objetivo compreender e desenvolver a explicitação do raciocínio matemático, ao longo da implementação de uma sequência de tarefas. A planificação desta sequência de tarefas foi efetuada com o intuito de permitir, aos alunos, trabalhar individualmente, em pequeno e em grande grupo de modo a desenvolver a explicitação do raciocínio matemático, valorizar as suas ideias matemáticas e, também, promover discussões.

Assim, com a presente investigação pretendeu-se responder às seguintes questões:

i) Quais as dificuldades com que os alunos se depararam na resolução das tarefas e na explicitação do raciocínio?

ii) Como é que os alunos evoluíram, ao longo da intervenção pedagógica, na sua capacidade de explicitar os seus raciocínios?

1.2. Pertinência do estudo

As motivações que levaram a professora investigadora a optar pelo tema em estudo prenderam-se com a consciencialização das dificuldades que os alunos evidenciaram na exposição clara e concisa dos seus pensamentos matemáticos, nas justificações das conclusões obtidas nas tarefas propostas e em desenvolver raciocínios que validassem as suas ideias matemáticas. Mas também, de um estimulo pessoal em compreender melhor os raciocínios dos alunos, analisá-los e responder ao desafio de os desenvolver.

1.3. Organização do estudo

Este estudo é apresentado em três partes: a fundamentação teórica, a parte empírica e as conclusões.

A fundamentação teórica (capítulo II) constitui a primeira parte e debruça-se sobre a área de investigação em que se enquadra o estudo, o raciocínio matemático. Com efeito, este capítulo permite compreender as questões relacionadas com o raciocínio na educação matemática, assim como as suas controvérsias.

A parte empírica constitui a segunda parte do estudo e compreende o capítulo da metodologia (capítulo III) e o capítulo da apresentação e discussão dos resultados (capítulo IV). No capítulo da metodologia descrevem-se ao longo das várias subsecções: as Opções metodológicas, as Pedagogias de ensino, os Participantes, as Fases do estudo, a Intervenção, os Instrumentos de recolha de dados e a Análise de dados. O capítulo da apresentação e discussão dos resultados é composto pelas seguintes subsecções: a Explicitação do raciocínio matemático na realização das tarefas propostas, onde são apresentadas as dificuldades dos alunos, na resolução e na explicitação dos raciocínios, ao longo da execução das tarefas, e a Síntese global e evolução dos alunos, onde é realizado um cruzamento de toda a informação obtida e, além disso, analisada a evolução dos alunos na capacidade de explicitação dos seus raciocínios.

Na terceira parte, as conclusões (capítulo V), é realizada uma pequena síntese de todo o estudo e são relatadas as conclusões do mesmo respondendo às questões de investigação em paralelo com a fundamentação teórica apresentada. Por fim, são mencionadas as limitações intrínsecas ao estudo e mencionadas algumas sugestões para futuras investigações.

CAPÍTULO II

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo apresenta-se uma revisão da literatura sobre o raciocínio matemático, relacionando-se esta temática com o ensino e a aprendizagem. São expostas subsecções organizadoras do estudo que fazem referência a algumas ideias-chave, definições e aspetos considerados importantes nas leituras realizadas. Primeiramente apresenta-se a classificação do raciocínio matemático, de acordo com as perspetivas de alguns autores, seguindo-se a classificação da prova matemática, a natureza do raciocínio matemático e a descrição dos processos de raciocínio. Por último, surge o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, na aula de matemática.

2.1. O raciocínio matemático

O raciocínio matemático é um termo difícil de definir, uma vez que é usado por professores e investigadores com uma diversidade de significados associados a práticas e abordagens teóricas distintas. No presente estudo, o raciocínio matemático será analisado do ponto de vista cognitivo e basear-se-á na ideia, partilhada por diversos autores (Lannin, Ellis & Elliot, 2011; Polya, 1945), de que se trata de um processo que abarca a formulação de questões, a formulação e teste de conjeturas, a generalização e a justificação.

Do ponto de vista etimológico, raciocinar reporta para usar a razão, para julgar, compreender, examinar, avaliar, justificar e concluir. Neste sentido, em matemática o raciocínio não está expresso apenas quando há a prova de alguma coisa, está também presente na apresentação de razões que justificam afirmações ou posicionamentos ou ainda quando se procura explicar a coerência entre o que se admite como válido e as suas consequências (Boavida, 2008). Com efeito, a nível histórico, epistemológico e também ao nível do senso comum, sempre houve uma grande relação entre este conceito e a matemática. Tal como expressa o NCTM (2007), o raciocínio é, cada vez mais, considerado como um aspeto central no ensino desta ciência, uma vez que "ser capaz de raciocinar é essencial para compreender a matemática" (p. 56). Segundo Dewey (1910) é através do raciocínio que alcançamos a compreensão de situações matemáticas, que observamos um determinado problema sob diversas perspetivas e que, examinando e instituindo relações, transformamos as ideias iniciais em hipóteses que dão origem à formulação de conjeturas. Neste sentido, o raciocínio matemático abarca mais do que a compreensão das ideias matemáticas e o emprego de métodos e procedimentos úteis (Cuoco, 2003).

Na perspetiva de Oliveira (2008) o raciocínio matemático é uma expressão utilizada para referir "um conjunto de processos mentais através dos quais se obtêm novas preposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)" (p. 3). Aliseda (2003) nomeia o raciocínio como inferência lógica, caracterizada pela presença de uma relação indispensável entre premissas e conclusões e pela irrefutabilidade das conclusões, concebendo o raciocínio matemático numa perspetiva dedutiva. Para Russel (1999) o raciocínio, na aprendizagem da matemática, é "o que usamos para pensar sobre as propriedades de um determinado objeto matemático e desenvolver generalizações que se apliquem a toda a classe de objetos" e é "a ferramenta para compreender a abstração" (p.1).

De acordo com Yackel e Hanna (2003) "o raciocínio matemático é uma atividade partilhada em que quem aprende participa enquanto interage com outros para resolver problemas matemáticos" (p. 228) por isso a explicação, a justificação e a argumentação são aspetos-chave da atividade dos alunos nas salas de aula em que é valorizado o raciocínio. Com o objetivo de clarificar o significado de raciocinar em matemática, as mesmas autoras focam-se no contexto escolar e defendem que raciocinar é uma atividade que o aluno exercita quando resolve problemas matemáticos e é incentivado a explicar e a justificar a sua resolução.

Como declaram Whitenack e Yackel (2008) "explicar e justificar são aspetos importantes do raciocínio sobre ideias matemáticas" (p.85). A dissemelhança entre explicar e justificar, segundo estes autores, citado em Canavarro e Pinto (2012), pode ser subtil mas existe e reside nas razões que provocam estas atividades. A explicação é motivada pela necessidade do aluno clarificar melhor o seu raciocínio, nem que seja para si mesmo. A justificação é motivada pela necessidade do aluno validar as suas ideias e raciocínios não apenas para si próprio mas também para a turma.

Segundo Canavarro e Pinto (2012) o raciocínio é assumido como uma atividade intelectual que o aluno aprofunda quando se embrulha com tarefas de natureza problemática com o propósito de as resolver e, para tal, procura dar sentido à situação em causa, confronta matematicamente os elementos significativos e cria, em consequência, uma resposta, a qual consegue explicar e/ou justificar de forma lógica por meios próprios. Para que esta atividade ocorra, o aluno pode valer-se de conhecimentos ou de estratégias anteriormente aprendidos e/ou de processos criativos que ele próprio invente, mas precisa sempre de usar representações que apoiem o processo e provem o produto do seu pensar.

Perante o mencionado, enquanto alguns autores salientam sobretudo os aspetos lógicos outros valorizam mais o processo intuitivo, ou seja, como se formula novas ideias e se chega a conclusões.

2.2. A prova matemática

De acordo com Harel e Sowder (2007) e Stylianou, Blanton e Knuth (2009) a prova estruturada como um sistema axiomático e dedutivo advém dos antigos gregos, que transformaram a matemática empírica dos babilónios e egípcios numa ciência demonstrativa. Assim, historicamente, a prova é associada ao raciocínio dedutivo, característico da matemática formal (Stylianou, et al., 2009).

Polya (1968) contrasta a prova, apresentada no seu produto final, como sendo puramente demonstrativa e o processo de chegar à prova, como sendo o processo que produz conhecimento. Lakatos na sua obra *Proof and Refutations* contraria a perspetiva vigente que vê a matemática como um mero sistema informal e considera que essa visão não possibilita o desenvolvimento da matemática (Hersh, 1999). Segundo o mesmo autor, a matemática é uma ciência que se desenvolve através de um processo crítico e de um apuramento contínuo em que tanto os enunciados como as provas estão sujeitos a um processo de revisão. O mesmo autor admite ainda que, a matemática quando é encarada como um processo de crescimento e de descoberta é falível, é questionável e admite o erro (Hersh, 1999). A matemática deve então ser vista como sendo questionável, onde a construção do conhecimento gera conhecimento contínuo levando os alunos a fazer, compreender e a usar o conhecimento matemático de forma flexível (Schoenfeld, 1992).

Na perspetiva de Hanna e Barbeau (2010), a principal função da prova é a de permitir estabelecer a verdade de uma afirmação matemática. Posto isto, e tendo em conta as dificuldades dos alunos em provar e em compreender a importância da prova, De Villiers (1999) investigou outras funções da prova matemática, de modo a serem usadas no contexto de sala de aula tornando-a uma atividade mais significativa. Com efeito, fruto da sua investigação o autor propõe outras funções para a prova: explicação – proporcionando interiorização da razão pela qual é verdade; sistematização – organização dos resultados num sistema dedutivo de axioma, principais conceitos e teorema; descoberta – descoberta ou invenção de novos resultados;

comunicação – transmissão de conhecimento matemático e desafio intelectual – a autorrealização proveniente da construção de uma prova.

Assim, Schoenfeld (2009) e Hanna e Bardeau (2010) fazem a distinção entre a prova como produto do processo criativo matemático (a demonstração), com o intuito de estabelecer a verdade de uma afirmação, e a prova como processo com a função de dar sentido e de desenvolver a compreensão matemática. Hanna e Jahnke (1996), nesta mesma perspetiva de prova como processo, revelam que é importante que os professores se concentrem na comunicação do significado da prova, em detrimento da derivação formal da mesma. Para tal, é necessário que os professores selecionem provas e formas de provar adequadas ao desenvolvimento da compreensão. Segundo Tall (1999) é importante considerar o desenvolvimento cognitivo dos alunos relativamente à forma de apresentação da prova. O mesmo autor propõe que os investigadores matemáticos utilizem tipos de provas variados de acordo com o respetivo desenvolvimento dos alunos e refere a importância de que a forma de apresentação da prova tenha significado para eles.

Reid e Knipping (2010) defendem que as atividades de prova na sala de aula podem ser distinguidas, de acordo com o tipo de processo ser um processo psicológico de raciocínio ou ser um processo social. Segundo os mesmos autores, provar pode dizer respeito a um processo de raciocínio de outra natureza que não dedutiva, cuja importância não reside na natureza dos raciocínios mas, pelo contrário, na sua função de compreensão e de verificação da verdade de uma afirmação.

Segundo Duval (1999) provar tornou-se um processo social na sala de aula quando foram tidas em conta as interações entre os alunos, introduzidas pelo trabalho de grupo. As formas de discurso coletivas com determinadas características são designadas por argumentação. Assim, de acordo com a perspetiva de Krummheuer (1995), a argumentação constitui um fenómeno social que ocorre quando os indivíduos cooperam e tentam ajustar as suas intenções e interpretações apresentando verbalmente a lógica das suas ações. Por isso, a argumentação, segundo este autor, refere-se às interações na sala de aula com a intenção de explicar o raciocínio. Devido à argumentação ser um fenómeno social, está dependente da comunidade em que ocorre, sendo que a aceitação do que se entende por argumentos válidos é definida pela respetiva comunidade (Reid & Knipping, 2010).

Assim, como defendem Stylianides e Stylianides (2009), o processo de prova, com enfoque na função de explicar por que é que uma afirmação é verdadeira ou falsa promove a compreensão e a função de justificar promove a convicção. Estas duas funções da prova envolvem os alunos numa atividade matemática que faz sentido. Stylianides e Stylianides (2008) expõem que a prova matemática é um argumento matemático, que usa afirmações verdadeiras e válidas sem mais justificações e aceites pela turma, que aplica formas de raciocínio (modos de argumentação) válidas e conhecidas (dentro do alcance conceptual) e que comunica através de formas de expressão (modos de representação de argumentos) adequadas e conhecidas (dentro do alcance conceptual) da comunidade turma.

Perante esta definição, argumentos empíricos não podem ser considerados como prova, por serem modos inválidos de argumentação, enquanto argumentos dedutivos são formas válidas de argumentação.

2.3. A natureza do raciocínio matemático

A origem do raciocínio dedutivo advém da matemática grega, na qual a prova era alcançada por um esquema dedutivo e axiomático, reconhecendo-se aos gregos a criação da matemática como ciência racional (Harel & Sowder, 2007; Nápoles, 2000). Porém Aristóteles já considerava dois tipos de raciocínio, o indutivo e o dedutivo, tendo-se dedicado ao estudo dos raciocínios dedutivos elementares que designou de silogismos e que foram a base do raciocínio sistemático até à época do Renascimento (Cohen & Manion, 1994; Nápoles, 2000).

Raciocinar diz respeito a produzir inferências, no sentido de recorrer à informação existente para alcançar novas conclusões. Por isso, alguns autores consideram o raciocínio matemático como dedutivo ou indutivo e, ampliam-no também ao campo abdutivo. Neste último, e de acordo com Rivera e Becker (2009), as generalizações são formuladas a partir do estabelecimento de relações entre vários aspetos de determinada situação.

No que diz respeito aos tipos de raciocínio Polya (1968), na sua obra *Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy Mathematics,* reconhece o *raciocínio plausível* utilizado no processo de descoberta da prova e o *raciocínio demonstrativo* utilizado na prova enquanto resultado do processo criativo matemático. Admite, ainda, que a prova matemática surge como meramente dedutiva, mas que ela é descoberta por raciocínio plausível, através de conjeturas. O mesmo autor constata ainda que, a matemática presenteia os alunos com boas oportunidades para aprender o raciocínio dedutivo e que o currículo da matemática escolar oferece também boas oportunidades para a aprendizagem do raciocínio plausível. Além disso, compara estes dois raciocínios concluindo que o dedutivo é seguro, é definitivo, segue códigos rígidos e não está sujeito a controvérsias e que o plausível é controverso e provisório. Esta distinção completa-se com o facto de no raciocínio dedutivo ser fulcral distinguir uma prova de um palpite e no raciocínio plausível ser crucial diferenciar entre um e outro palpite, em termos de razoabilidade. Este autor atesta ainda que, o raciocínio indutivo é um caso particular do raciocínio plausível e que é através da indução que se chega da observação à conjetura.

Na perspetiva de Reid e Knipping (2010), na investigação matemática foram identificados, como sendo os mais importantes para ensinar e aprender a prova, três tipos de raciocínios: o dedutivo, o indutivo e a analogia. Com efeito, sugerem distingui-los através do modo como utilizam casos (observação específica contida numa conclusão), regras (proposição geral que afirma que se uma condição ocorre a outra também ocorre) e resultados (observação específica similar a um caso mas referindo-se a uma condição que depende de outra ligada por uma regra), adotando a mesma estrutura dos silogismos, isto é, a que inclui uma regra e um caso, chegando a um resultado (o mesmo que duas premissas e uma conclusão).

Segundo a tradição, julga-se que o *raciocínio dedutivo* não leva a um novo conhecimento, uma vez que toda a informação já está contida nas premissas. Todavia, os mesmos autores evidenciam que na sala de aula se encontram exemplos de raciocínio dedutivo com a função de explicar e mesmo de explorar, uma vez que os alunos podem experienciar a descoberta ao tornar algo que sabem implicitamente em conhecimento explícito. Além disso, salientam o facto de uma particularização poder ser um raciocínio dedutivo, quando uma afirmação geral se testa por particularização.

No *raciocínio indutivo*, um caso e um resultado levam a uma regra. Neste tipo de raciocínio parte-se de casos particulares e concluem-se regras gerais; usa-se o que se sabe para concluir algo que não se sabe; todavia, o que se conclui é apenas provável, não é certo.

O *raciocínio por analogia* é referido como sujeito a algumas características relevantes, entre elas: a provável confusão com uma generalização seguida de uma particularização; a hipótese de ser usado para explorar e para explicar em matemática; e a semelhança com a forma do raciocínio dedutivo implicando a dificuldade de os distinguir. Segundo Polya (1968) este raciocínio é determinado como a perceção de aspetos semelhantes entre situações. O mesmo autor refere, ainda, que as analogias atravessam todo o nosso pensamento.

Por sua vez Oliveira (2002) ao realizar o seu estudo sobre o raciocínio, do ponto de vista epistemológico, apresenta quatro tipos de raciocínio: (i) indução, (ii) dedução, (iii) abdução e (iv) transformação. Todavia, no atual Programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013) há uma maior incidência na dedução e na indução. Por isso, o conhecimento de semelhanças e diferenças entre estes dois tipos de raciocínios estabelece um ponto de partida para a compreensão do que caracteriza o raciocínio matemático e os seus processos.

De acordo com as perspetivas de Polya (1954) os *processos de indução* começam na maioria das vezes através da observação, sendo a partir desta que se constroem conjeturas que devem ser testadas. O mesmo autor menciona ainda outros processos importantes no raciocínio indutivo e que surgem frequentemente durante a resolução de problemas matemáticos, designadamente a generalização, a especialização e a analogia. Oliveira (2002) destaca também esta estreita relação entre analogia e indução revelando que "quem induz fá-lo por analogia, i.e., a pessoa infere a semelhança das conclusões a partir da diferença dos factos" (p. 174). De acordo com Oliveira (2008), em matemática o ponto de partida do processo indutivo é a observação atenta e incisiva, de determinados factos de uma experiência. Naturalmente, isto leva ao que Burton defende de "aprendizagem intuitiva" (1984, p. 38), iniciando pela observação e análise de particularizações de um certo fenómeno matemático, o aluno procura uma generalização. Quando não são conhecidos contraexemplos que refutem essa generalização, ou quando os que se conhecem são epistemologicamente irrelevantes, nasce a demonstração para a validar. Deste modo, a demonstração é necessária num ensino que dê maior enfase ao pensamento intuitivo. Polya (1954) citado em Oliveira (2008) defende três valores éticos básicos da indução: coragem intelectual (devemos estar prontos a rever as nossas conceções); honestidade intelectual (devemos alterar uma conceção quando houver uma razão compulsória para o fazer) e contenção sensata (não devemos mudar uma conceção sem motivo). Efetivamente, o raciocínio indutivo é heurístico, desenvolvendo-se do particular para o geral, sem uma conclusão necessária e com um papel de criação de conhecimento (Oliveira, 2002).

O *raciocínio dedutivo* é característico da matemática, onde ocupa um lugar essencial. Este é um raciocínio formal, relacionado com as demonstrações e a lógica. De acordo com Ponte, Branco e Matos (2008) "raciocinar envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento" (p. 89). Como indica Oliveira (2008), desde que a cadeia de deduções esteja liberta de erros "o raciocínio dedutivo produz conclusões que são necessariamente válidas" (p. 7). Este raciocínio integra assim "o elemento estruturante, por excelência, do conhecimento matemático" (Oliveira, 2002, p. 178), sendo um raciocínio lógico, desenvolvido do geral para o particular, com uma conclusão necessária e com um papel de validação de conhecimento.

No *raciocínio abdutivo* um resultado e uma regra conduzem a um caso. Este raciocínio é o reverso do raciocínio dedutivo e o seu ponto de partida dá-se através de um caso particular.

Em suma, a abdução e a dedução compõem a compreensão conceptual de um fenómeno enquanto a indução constitui a verificação quantitativa. Na abdução o propósito é explorar os dados, descobrir um padrão e seguir uma conjetura plausível, utilizando categorias adequadas; a dedução consiste na construção de uma hipótese lógica e testável com base noutras premissas plausíveis; e a indução comporta uma aproximação à verdade com vista a fixar as nossas crenças para pesquisa adicional.

2.4. Os processos de raciocínio

De acordo com Dreyfus (1991), o processo de aprendizagem pela descoberta é uma forma eficiente de aprender matemática e é uma mais-valia para o desenvolvimento dos processos de raciocínio. Neste sentido, este processo de descoberta reside na formulação de conjeturas e na tentativa de validação das mesmas. Este caminho é feito, normalmente, sinuosamente entre tentativas de provar a verdade das afirmações e a criação de contraexemplos que as contrariem, passando ainda por um processo de refinamento antes de serem submetidas a novas tentativas de prova (Lakatos, 1999). Nesta perspetiva do processo de descoberta, os alunos concebem, na turma, novo conhecimento ao articular todos os tipos de raciocínio, contribuindo assim para o desenvolvimento de competências demonstrativas.

Mason, Burton e Stacey (1985), na obra *Thinking Mathematically*, recomendam aos leitores, aprenderem pela experiência de fazer matemática desde a formulação de conjeturas à sua generalização e respetiva justificação. Esta obra aborda o processo de desenvolvimento do pensamento matemático, influenciada pelas ideias de George Polya porém, integra a novidade de auxiliar o leitor na progressão do desenvolvimento do seu pensamento pela tomada de consciência desse processo propondo a reflexão.

A figura 1 apresenta um quadro para a análise do raciocínio que estabelece uma ligação entre a generalização e a justificação com os raciocínios indutivo e dedutivo, assim como com a formulação de questões e conjeturas (Mata-Pereira & Ponte, 2011). O raciocínio matemático, que se encontra no centro da figura, apoia-se nas representações e articula-se com os processos de representação e significação (*sense making*). Devido à impossibilidade de alcançar diretamente o raciocínio dos alunos, as representações evidenciam-se como peças fundamentais que os mesmos usam para comunicar esses raciocínios. Por outro lado, o raciocínio matemático articulado com os processos de significação revela-se fundamental para uma compreensão efetiva da matemática (NCTM, 2009). Os raciocínios indutivo e abdutivo sucedem sobretudo durante a formulação de conjeturas, enquanto o raciocínio dedutivo tem lugar em especial durante o teste e a justificação (figura 1).

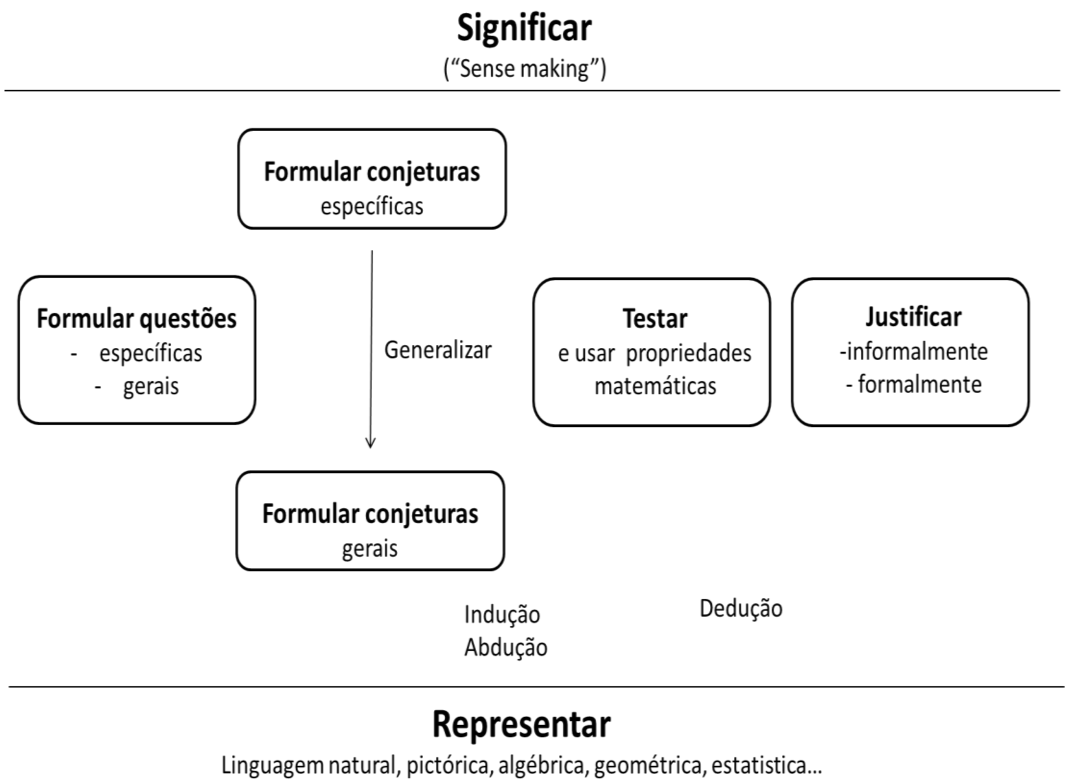


Figura 1 - Quadro concetual para a análise do raciocínio matemático
(adaptado de Mata-Pereira & Ponte, 2011)

Da formulação da conjetura à generalização

De acordo com a perspetiva de Mason et al. (1985), o processo de conjeturar passa por formular conjeturas, testá-las com diferentes exemplos, tentar refutá-las com contraexemplos e usá-las para fazer previsões. Neste processo, ao verificar se a conjetura serve para outros casos, começa a ponderar-se se está certa ou de que maneira é necessário reformulá-la, dando origem a uma nova conjetura. Com efeito, a figura 2 é representativa deste diagrama cíclico defendido pelos autores.

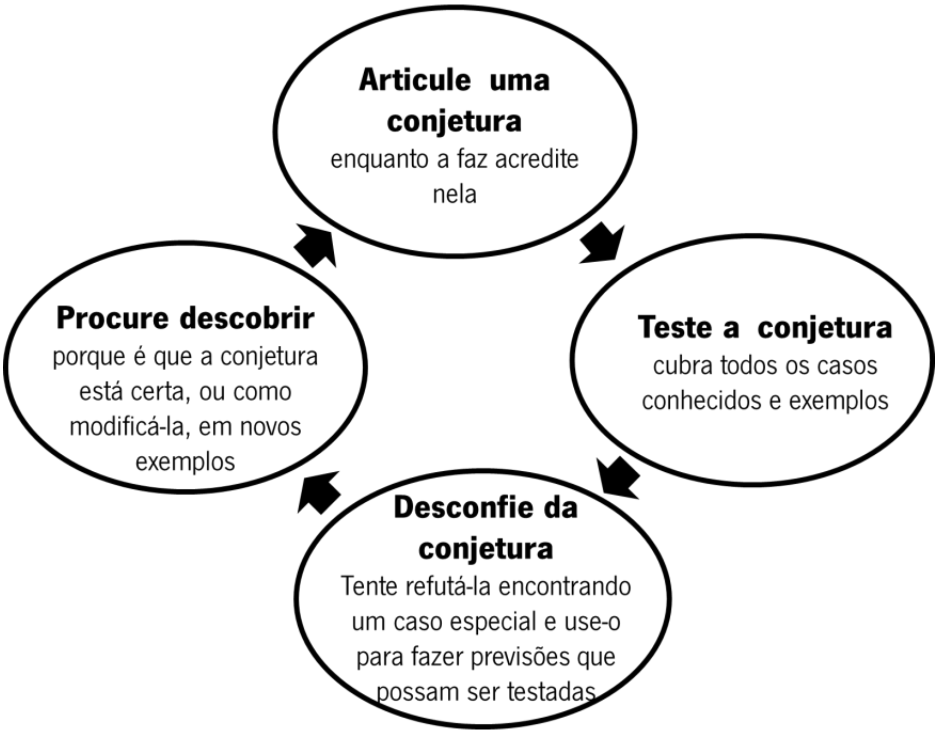


Figura 2 - Processo de conjeturar

A generalização é um processo matemático muito importante na formulação de conjeturas sendo imprescindível reconhecer um padrão ou fazer uma analogia, como declaram Mason et al. (1985). Mais ainda, estes autores afirmam que a matemática é rica em padrões e por isso, quando está em contacto com a investigação matemática essa perspetiva de encontrar padrões aumenta. Para Polya (1968) o ato de generalizar define-se pela passagem da consideração de um dado conjunto de objetos para um conjunto maior, onde os primeiros estão contidos. Ora, este ato envolve a perceção de aspetos comuns, ou seja, regularidades, ao mesmo tempo que se ignora outros aspetos. Na teoria de Dreyfus (1991), generalizar passa por derivar ou induzir do particular, para identificar semelhanças e para alargar domínios de validade.

Com o intuito de reconhecer o padrão intrínseco aos dados de um problema/situação, segundo Mason, et al. (1985) e Polya (1968), particularizar possibilita compreender a questão através de exemplos concretos ao mesmo tempo que as evidências para a generalização são reunidas. Particularizar tem dois objetivos específicos, o de se perceber com o que se está a lidar, tornando a questão significativa para si próprio e o de fazer emergir o padrão subjacente dos dados (Mason, et al., 1985). Na tentativa de articular o padrão emergente cria-se uma conjetura, que será suportada ou refutada através de mais particularização, ou seja, testando novos casos particulares. Para Reid e Knipping (2010), a particularização para testar a conjetura é um tipo simples de raciocínio dedutivo em que se concebem casos específicos a partir da conjetura.

A reorganização dos dados reunidos pode manifestar-se como elemento essencial possibilitando reorganizar o pensamento (Mason, et al., 1985). Com efeito, existem dois tipos de dados recolhidos, os testados antes de formular a conjetura, sendo os que a formam, e os testados depois da formulação da conjetura, sendo os que a suportam. As conjeturas são sujeitas a inúmeros testes para apurar a sua veracidade. Os casos particulares que refutam uma conjetura funcionam como contraexemplos por mostrarem que ela é falsa (Walton & Mason, 2008).

Da justificação à prova

Depois do processo de formular conjeturas, as afirmações produzidas transformam-se em generalizações convictas de verdade por quem as produziu. Para provar é preciso sentir a necessidade de persuadir os outros ou ter a noção de que se pode estar equivocado. Neste sentido, provar impõe a capacidade de questionar mesmo o que aparentemente se evidencia óbvio, sendo que esta atitude de questionamento é uma componente da atitude de pensar matematicamente (Mason, 1998). Na perspetiva de Mason et al. (1985) é necessário ser-se crítico e formular conjeturas sobre a "razão", seguindo o normal processo de conjeturar, em três fases distintas com grau de dificuldade crescente: convencermo-nos a nós próprios; convencermos um amigo; convencermos um inimigo. Os mesmos autores afirmam que quando convencemos um amigo somos obrigados a exteriorizar as razões pelas quais estamos convencidos, mas quando convencemos alguém que não acredita somos obrigados a rever todo o processo de questionar as afirmações conjeturadas desenvolvendo-as. Ora, este processo de revisão provoca tomar consciência do mesmo e, se, ao fazê-lo, existir reflexão, torna-se possível generalizar os métodos usados chegando à compreensão da questão, uma vez que ser capaz de refletir requer a capacidade de compreender, identificar, articular e interiorizar.

Mason (1998) salienta que as crianças têm a capacidade de obter um estado de certeza com grande facilidade, generalizando com frequência. Acrescenta então que, para lidar com isso é necessário trabalhar no sentido de perceber que essa generalização pode não ser verdadeira e, por isso, tem de ser testada e que é necessário procurar argumentos, para que os outros fiquem convencidos. Se uma conjetura resistiu a vários testes, a convicção de que ela é verdadeira permanece até que se encontre um contraexemplo que a contradiga ou que se prove a sua validade. Por outro lado se se conseguir provar, a convicção passa a verdadeira. Deste modo, segundo Polya (1968) e De Villiers (1999) justificar está diretamente relacionado com o processo de ganhar convicção da verdade da conjetura e com a revelação de uma estrutura ou relação subjacente que liga o que se sabe ao que se quer saber, sendo que, a exposição dessa ligação será a argumentação. Para Balacheff (1988) a justificação é o processo de apresentar razões verdadeiras perante uma comunidade. Mais, para este autor a explicação é um processo simples que diz respeito à clarificação de determinado conteúdo, tendo em conta a sua narração. De acordo com o NCTM (1994) "os alunos devem ser estimulados a explicar os raciocínios que seguiram para chegar a determinada conclusão ou para justificar porque razão o seu modo de abordar um problema é apropriado" (p. 98).

Em suma, segundo Domingues (2011), a atividade de provar baseada na metodologia de descoberta descreve-se nos processos de raciocínio que surgem em duas fases distintas: o ciclo desde a formulação de conjeturas até à produção de generalizações que podem não estar matematicamente provadas; e a justificação das generalizações produzidas até à prova em que será descrito o percurso necessário para orientar o aluno a construir um argumento geral. Mata-Pereira e Ponte (2012) defendem que os processos de raciocínio incluem a formulação de questões, a formulação e teste de conjeturas e a realização de justificações. O processo de conjeturar, que se refere ao método de pensar nas relações matemáticas para construir afirmações reais, é muito importante pois quando os alunos o fazem, reconhecem pontos comuns entre várias situações, desenvolvendo generalizações que os conduzem a usar e aclarar o significado de conceitos, símbolos e representações. Assim sendo, é essencial que os alunos sejam estimulados a apresentarem justificações. Como indicam Lannin et al. (2011), nas aulas de matemática o professor deve procurar-se que os alunos: produzam justificações através de argumentos lógicos baseados em ideias já entendidas antes; fundamentem refutações partindo do facto de uma determinada afirmação ser falsa; avaliem a validade dos argumentos aplicados; tenham presente que uma justificação matemática não é um argumento sustentado na autoridade, perceção, senso comum ou exemplos particulares; e procurem justificar o porquê de uma generalização ser verdadeira ou falsa investigando quais os fatores que podem influenciar essa generalização.

2.5. O desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, na aula de matemática

O raciocínio é um elemento que tem vindo a ganhar cada vez mais destaque nos documentos curriculares da matemática e em investigações que se centram nesta capacidade e no seu desenvolvimento. No entanto, o modo como, nos diferentes níveis de ensino, os alunos são apoiados no desenvolvimento do seu raciocínio está largamente por explorar.

As orientações curriculares de 2007 (ME) para o ensino da matemática propõem que os alunos aprendam os conceitos matemáticos ao mesmo tempo que desenvolvem capacidades matemáticas fundamentais, nomeadamente de resolução de problemas, de raciocínio matemático e de comunicação matemática. De acordo com Boavida (2008) e Yackel e Hanna (2003) apesar de cada uma destas três capacidades transversais ter as suas características, de um certo modo são indissociáveis quando se adota uma conceção global de raciocínio matemático.

A forma como os alunos aprendem e aquilo que aprendem também é um aspeto fundamental na sala de aula e, segundo Love (1996), as ações do professor têm uma grande influência neste processo, uma vez que é ele quem toma as decisões sobre o ambiente de aula, as atividades que desenvolve com os alunos, as formas de trabalho e o discurso no qual todos participam.

Para Barbosa (1999) é importante que na sala de aula seja considerada a diversidade dos alunos, se construam ambientes de aprendizagem onde estes se sintam confiantes e seguros para aprender, sejam questionados e que se exiba interesse por todo o seu processo de aprendizagem, de modo a que as suas capacidades sejam tidas em conta e que sejam reforçadas todas as suas intervenções.

Segundo Lannin et al. (2011) desenvolver o raciocínio matemático dos alunos é um elemento central na aula de matemática. Por isso, no processo de desenvolvimento do raciocínio dos alunos é muito importante que sejam promovidos momentos de discussões, onde ocorra a interpretação e a atribuição de sentido às produções e comentários dos alunos. Isto porque no processo de ensino-aprendizagem é fundamental que haja a promoção de um entendimento por parte dos mesmos do que fazem e porque o fazem, possibilitando desenvolver o seu conhecimento matemático. Ora, é essencial o estabelecimento da comunicação na sala de aula de matemática, para que paralelamente seja promovida a explicitação do raciocínio por parte dos alunos. Tal como é defendido pelo NCTM (2007) o ambiente na sala de aula deve ser favorável à comunicação, estimulando os alunos a verbalizarem os seus raciocínios, pois ser capaz de raciocinar é essencial para a compreensão da Matemática. Martinho (2011) acrescenta esta ideia defendendo que quantas mais oportunidades forem criadas para que o aluno comunique o que sabe, utilizando os recursos linguísticos disponíveis, maior será o seu desenvolvimento, quer nos conhecimentos propriamente ditos, quer no próprio vocabulário. Ainda, Martinho e Ponte (2005) salientam que as interações entre alunos geram discussões estimulando-os a novas descobertas possibilitando, assim, que construam um conhecimento mais sólido. Ao falarem e ouvirem os colegas, esclarecem os significados das palavras bem como os seus pensamentos e ideias.

Com efeito, as capacidades de raciocínio e de comunicação devem ser consideradas importantes recursos a ter em conta nas atividades matemáticas, de modo a serem criadas oportunidades para o desenvolvimento das mesmas. Ao mesmo tempo, o ambiente na sala de aula deve ser de respeito mútuo e de confiança, de modo a que os alunos se sintam confortáveis para argumentar e discutir as ideias dos outros. Como refere Boavida (2008)

> criar condições para os alunos aprenderem a raciocinar matematicamente passa não apenas, nem sobretudo, por propor-lhes tarefas com determinadas características, mas por ajudá-los a desenvolver um habito de pensamento que tem a ver com o porquê das coisas. (p. 1)

Neste sentido, para além da comunicação, as tarefas também desempenham um papel fundamental na promoção e desenvolvimento do conhecimento e do raciocínio. A seleção de tarefas estimulantes e o encorajamento dos alunos a tomar decisões, defendê-las e a persuadir os outros do seu ponto de vista é um elemento relevante na prática do professor (Lampert & Cobb, 2003; Ponte & Santos, 1998; Stein, 2001). Além disso, de acordo com o NCTM (1994), o recurso a tarefas e a materiais diversificados ajuda a fomentar o discurso centrado nas ideias matemáticas e não em cálculos e procedimentos. Como mostram Christiansen e Walther (1986), mais do que motivar os alunos para a atividade numa determinada tarefa, é primordial distribuir tarefas que os motivem para a atividade. Então, de preferência a tarefa deve ser cuidada, pois só terá valor matemático se despertar os alunos a exercitar o seu poder para pensar matematicamente e a exibir esse pensamento em termos matemáticos significativos (Manson & Houssart, 2000).

Do mesmo modo, de acordo com a perspetiva de Ball e Bass (2003), é essencial que as planificações integrem tarefas promotoras do desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Pois, através dessas tarefas os alunos antecipam os seus raciocínios, mas também as representações e estratégias que vão surgindo. Por isso, Ponte, Nunes e Quaresma (2012) apontam quatro momentos fundamentais que devem decorrer na sala de aula ao longo de uma tarefa: apresentação que decorre de forma breve e que tem como objetivo a compreensão da tarefa; trabalho autónomo dos alunos (em grupo ou em pares) em que o professor circula pela sala respondendo às questões dos alunos; discussão coletiva com a turma toda, em que os alunos apresentam os seus resultados; momento de síntese e sistematização.

Neste processo é fundamental que os alunos sejam ajudados a valorizar e a usar o poder do raciocínio matemático e sejam constantemente, motivados para a concretização de atividades que exijam refletir e raciocinar. Além disso, deve ser prestada atenção aos raciocínios dos alunos para que estes sejam explicitados com nitidez.

No ensino da matemática, o objetivo primordial é o desenvolvimento da capacidade dos alunos pensarem matematicamente. Todavia, de acordo com Mata-Pereira e Ponte (2011) este é um objetivo ousado. Segundo o que o antigo Programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007) defendia, a aprendizagem de conceitos, algoritmos e procedimentos rotineiros não é suficiente para levar os alunos a compreender a matemática como uma disciplina lógica e coerente. Para que, efetivamente, ocorra a compreensão dos procedimentos pelo aluno, é necessário o desenvolvimento do raciocínio. Esta compreensão dos procedimentos passa pela sua aplicação, mas também por entender porque funcionam, como podem ser utilizados e como os resultados podem ser interpretados (NCTM, 2009). No antigo programa (ME, 2007) o raciocínio matemático era considerado uma capacidade transversal, a toda a aprendizagem da matemática, sendo-lhe dado sempre grande enfoque. Ao mesmo tempo fazia parte dos objetivos gerais de aprendizagem, sendo dada grande atenção à importância e à necessidade de incrementar esta competência nos alunos de uma forma consistente. Porém, os documentos curriculares de matemática, atuais, em oposição a todo o trabalho dos investigadores, desenvolvido até aqui, não apontam o desenvolvimento do raciocínio matemático como um objetivo central do ensino da disciplina. No atual Programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013) o raciocínio matemático está explícito, todavia, não está salientado e evidenciado tal como no antigo programa. No documento curricular mais recente, é mencionado que é importante que os alunos raciocinem matematicamente empregando os conceitos e procedimentos matemáticos, "(...) é decisivo para a educação futura dos alunos que se cultive de forma progressiva (...) o rigor das definições e do raciocínio, a aplicabilidade dos conceitos abstratos ou a precisão dos resultados" (MEC, 2013, p. 4) mas, a aplicação de processos e a memorização está evidenciado com mais relevância, realçando-se que "o domínio de procedimentos padronizados, como por exemplo algoritmos e regras de cálculo, deverá ser objeto de particular atenção no ensino desta disciplina" (MEC, 2013, p. 4) e que "a memorização de alguns factos tem igualmente um papel fundamental na aprendizagem da matemática" (MEC, 2013, p. 4).

Compare-se que, no documento Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007) está evidenciada a relevância de todos os alunos serem capazes de reconhecer o raciocínio e a demonstração como elementos centrais da matemática; formular e investigar conjeturas matemáticas, desenvolver e avaliar argumentos e provas matemáticas, e também, selecionar e utilizar vários tipos de raciocínio e métodos de demonstração. Com efeito, neste documento mencionam o raciocínio matemático como uma capacidade essencial, que abarca a explicação e a justificação de ideias, a formulação e o teste de conjeturas e, numa fase mais avançada, a demonstração.

Neste sentido, e contrariamente ao que o atual Programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013) refere, desde os primeiros anos de escolaridade, os alunos devem estrear-se na justificação de passos e operações na resolução das tarefas para evoluírem gradualmente para argumentações mais complexas, terminando por distinguir e apresentar generalizações, casos particulares e contraexemplos, e ainda, identificar e utilizar diferentes métodos de demonstração.

Um dos instrumentos através do qual os alunos podem confrontar as suas estratégias de resolução de tarefas, bem como reconhecer e debater os raciocínios elaborados pelos seus colegas é a discussão oral na sala de aula. Todavia, um outro instrumento importante é a escrita de textos, pois os alunos têm a oportunidade de clarificar e elaborar de forma mais aprofundada as suas estratégias e os seus argumentos, reconhecendo assim, a relevância do rigor no uso da linguagem matemática.

Na mesma linha de pensamento, Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) defendem que os alunos são capazes de raciocinar matematicamente, desde os primeiros anos de escolaridade, desde que sejam geradas condições apropriadas, ou seja, devem ser criados ambientes ajustados onde os alunos são

> capazes de explicar e de justificar os raciocínios usados durante o processo de resolução de uma tarefa matemática, de fazer generalizações a partir da análise de casos particulares, de compreender o que significa um contraexemplo, de refletir sobre o que constitui um argumento aceitável e adequado quando se trabalha em matemática e de aplicar resultados gerais a exemplos específicos. (p. 81)

Para caminhar nesse sentido é primordial proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem em que sejam criadas oportunidades para explicar e justificar as suas ideias e resoluções e para formular, testar e provar conjeturas. Para o desenvolvimento deste trabalho os problemas e as investigações apresentam-se como contextos privilegiados, porém alguns exercícios e acontecimentos do quotidiano também podem servir para o professor espicaçar os alunos a argumentarem, a confrontarem e a discutirem as suas ideias matemáticas.

O que se revela importante é que o raciocínio matemático esteja presente, de modo consciente, em qualquer tópico matemático não ficando limitado a situações esporádicas ou a determinado tema matemático (Boavida et al., 2008).

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

Nas seguintes subsecções fundamentar-se-ão as opções metodológicas efetuadas, no que diz respeito à investigação desenvolvida e ao ensino traçado. Serão também descritos os participantes, as fases do estudo e a intervenção. Por fim, apresentam-se os procedimentos realizados na recolha de dados e na análise de dados.

3.1. Opções metodológicas

Para a realização deste projeto adotou-se uma metodologia de investigação-ação de índole qualitativa. Esta escolha entendeu-se a mais apropriada, pois estabelece um desafio ao melhoramento das práticas educativas e ao desenvolvimento profissional, com benefícios para todos os intervenientes no processo educativo. Com efeito, considera-se pertinente definir este conceito e esclarecer as suas principais características.

A investigação qualitativa, segundo Wolcott (1994), apresenta-se como um conjunto de procedimentos e técnicas, que procura incluir todos os aspetos importantes de um estudo ou de uma situação. Por sua vez, McMillan e Schumacher (2001), salientam que a investigação qualitativa tem por base o processo no qual os investigadores recolhem dados em situações de interação entre os intervenientes nos seus ambientes naturais. Maxwell (1996) afiança que, não se iniciando num ponto fixo, nem se processando através de determinados passos, a investigação qualitativa possibilita a modificação de cada componente do projeto em resposta a novos desenvolvimentos.

Para Bogdan e Biklen (1994) a investigação-ação consiste "na recolha de informações sistemáticas com o objetivo de promover mudanças sociais" (p. 292), onde os investigadores agem como cidadãos e baseiam-se nas suas crenças. Na perspetiva de Kemmis e McTaggart (1992), a investigação-ação é "uma forma de indagação introspetiva coletiva" (p. 9) demarcada por sujeitos em situações sociais, com o objetivo de melhorar a racionalidade e a justiça das práticas sociais ou educativas e, também, de compreendê-las. Por esta razão, os mesmos autores acrescentam ainda que a investigação-ação é uma investigação participativa, colaborativa e que se ergue normalmente da procura pela clarificação de preocupações experienciadas por um grupo. Então, esta metodologia diz respeito a "planificar, atuar, observar e refletir mais cuidadosamente, mais sistematicamente e mais rigorosamente do que aquilo que fazemos todos os dias" (Kemmis & McTaggart, 1992, p. 16). De acordo com Elliott (1991), autor que teve um forte impacto junto dos professores através da sua proposta de focalizar a investigação-ação no desenvolvimento curricular, esta metodologia pode ser definida "como o estudo de uma situação social no sentido de melhorar a qualidade da ação que nela decorre" (p. 69).

Máximo-Esteves (2008) acrescenta que, na investigação-ação, deve ser promovido o diálogo e a colaboração entre os participantes, de maneira a criarem-se condições para um questionamento sustentado da realidade e um impacto positivo nos intervenientes e no contexto.

A metodologia de investigação-ação possibilita então, ao professor/investigador, reconhecer problemas ou dificuldades na sua prática pedagógica, bem como na sua turma e conceber ações de intervenção no seu contexto educativo. O professor/investigador é encarado como um prático reflexivo que reflete, discute e analisa a sua própria conduta, com o propósito de a melhorar, transformar e inovar. Assim, a investigação-ação define a metodologia mais reconhecida de investigação, pela parte do professor, para promover o seu desenvolvimento profissional (Latorre, 2003; Maximo-Esteves, 2008). Nesta metodologia é indispensável a articulação entre a teoria e a prática. Então, estas duas componentes devem encontrar-se rigorosamente ligadas e em permanente diálogo, com a finalidade de melhorar, inovar e compreender os contextos educativos, tendo como meta a qualidade da educação (Latorre, 2003; Máximo-Esteves, 2008).

Latorre (2003), na sua obra *La Investigación-acción: Conocer y cambiar la práctica educativa,* refere que a investigação-ação

> se suele conceptualizar como un "proyecto de acción" formado por "estratégias de acción", vinculadas a las necesidades del professorado investigador y/o equipos de investigación. Es un processo que se caracteriza por su carácter cíclico, que implica un "vaivén" – espiral dialéctica – entre la acción y la reflexión, de manera que ambos momentos quedan integrados y se complementan. El processo es flexible e interactivo en todas las fases o pasos del ciclo. (p. 32)

Com efeito, a investigação-ação alterna a ação e a reflexão crítica, nomeadamente, planear com flexibilidade, agir, refletir, avaliar/validar e dialogar (Fischer, 2001, citado por Máximo-Esteves, 2008, p. 82). Esta espiral de ciclos mencionada, também pode ser traduzida no esquema de Latorre (2003, p. 21) representado na figura 3. A figura mostra o ciclo da investigação-ação, onde o processo de reflexão na ação constitui também, um processo de investigação na ação. Este ciclo de investigação-ação configura-se em torno de quatro momentos ou fases: planificação; ação; observação e reflexão e é um procedimento base para melhorar a prática educativa.

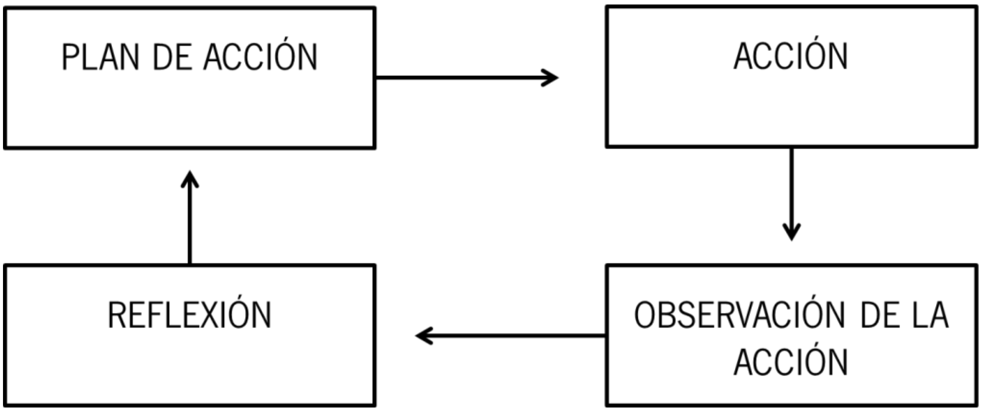


Figura 3 - Ciclo da investigação-ação

Como se observa na figura 3, um processo de investigação-ação não se confina a um único ciclo. Com esta metodologia pretende-se operar mudanças nas práticas educativas, com o intuito de alcançar melhorias de resultados. Para isso, esta sequência de fases repete-se ao longo do tempo pois, o professor precisa de explorar e analisar, convenientemente e com consciência, todo o conjunto de interações sucedidas durante o processo, não deixando de lado eventuais desvios que têm de ser levados em conta e, desse modo, proceder a reajustes na investigação.

Desta forma, neste estudo foi desenvolvido um plano de ação que, ao pretender alcançar a melhoria da explicitação do raciocínio matemático no grupo turma, teve de ser capaz de se adaptar às situações imprevistas. Com efeito, a professora investigadora realizou uma observação, reflexão e avaliação da prática e dos alunos. Em seguida avançou para a implementação do plano, de forma intencional e controlada. Durante a ação foi observando os efeitos da sua própria ação, através da recolha de evidências, usando, para tal, diversos instrumentos de recolha de informação de que se falarão numa subsecção mais à frente. Esta ação foi concretizada tendo em conta o resultado das várias pesquisas realizadas no contexto prático.

Na fase posterior à ação, a professora investigadora debateu de forma reflexiva, através dos elementos recolhidos, sobre os efeitos da ação, no sentido de reconstruir o plano para o desenvolvimento da capacidade de explicitação do raciocínio matemático e, com base no trabalho realizado, reviu o plano delineado e partiu para um novo ciclo de investigação-ação.

3.2. Pedagogias de ensino

Ao longo desta investigação pretendeu-se desenvolver um conjunto de pedagogias de ensino que encarassem o aluno com um papel ativo no processo de construção do seu conhecimento, estando portanto no centro de todo o decurso de aprendizagem. Com efeito, neste estudo foram adotadas algumas das conceções do construtivismo, de modo a proporcionar aos alunos uma aprendizagem significativa. Além disso, foram também adotadas as perspetivas do trabalho colaborativo.

De acordo com a perspetiva construtivista, a atividade mental do aluno é a base dos processos de desenvolvimento pessoal (Coll, 1991). Segundo este autor, mediante a realização de aprendizagens significativas, o aluno constrói, modifica, diversifica e coordena os seus pensamentos estabelecendo, deste modo, redes de significado que enriquecem o conhecimento do mundo físico e social e potenciam o seu crescimento pessoal.

Neste estudo foram seguidas as perspetivas da teoria construtivista da aprendizagem, sendo que foram criadas oportunidades para que tal acontecesse, onde foram tidas em conta as necessidades individuais dos alunos e os seus interesses, de modo a proporcionar experiências de aprendizagem significativas e adequadas às características de cada um. Com as atividades desenvolvidas nesta investigação pretendeu-se que os alunos construíssem os seus próprios significados e que estes fossem enriquecidos pelas interações sociais que se estabeleceram entre os colegas e a professora investigadora. Assim, ao longo do estudo teve-se como finalidade contribuir para que o aluno desenvolvesse a capacidade de realizar aprendizagens significativas, por si mesmo, ao longo das experiências, para que "aprendesse a aprender".

Além do mencionado, foram também seguidas as perspetivas do trabalho colaborativo, adotando-se o modelo de trabalho de grupo, uma vez que este tipo de estrutura "dá oportunidade aos alunos com diferentes experiências e condições para trabalharem interdependentemente em tarefas comuns" (Arends, 2008, p. 345). Ao mesmo tempo também Matos e Serrazina (1996), defendem que este tipo de trabalho favorece a aprendizagem cooperativa "ao proporcionar inúmeras oportunidades para a formulação e discussão de conjeturas, argumentos e estratégias de resolução de problemas (...)" (p. 149). Pois, através da comunicação e das discussões proporcionadas, as crianças transmitem as suas conceções matemáticas havendo uma troca recíproca de informação entre a turma.

Com efeito, ao abordar esta dimensão de trabalho pretendeu-se que as crianças transmitissem as suas ideias à turma e desencadeassem novas ideias nos seus colegas. Além disso, esta perspetiva foi abordada, pois os alunos compreendem melhor os conteúdos se usufruírem de oportunidades onde verbalizem as ideias com os colegas e tenham de confrontar as suas justificações. Deste modo, ao longo da intervenção foram valorizadas as ideias dos alunos e as suas formas de pensar, uma vez que é através delas que ocorre a aprendizagem. Por fim, salienta-se que ao longo das discussões proporcionadas e da resolução das tarefas propostas foi retribuído aos alunos o *feedback* das suas ideias e dos processos que usaram para explicitarem os seus raciocínios.

3.3. Participantes

A professora investigadora desenvolveu a investigação em duas escolas de um agrupamento de escolas de Vila Nova de Famalicão, numa turma do 2.º ano do Ensino Básico e numa turma do 5.º ano do Ensino Básico, na disciplina de matemática, em que desempenhava o papel de professora estagiária no contexto de intervenção.

As escolas

As escolas onde decorreram o presente estudo são estabelecimentos de ensino público situados numa cidade de um concelho da região do Minho. Estes estabelecimentos de ensino estão localizados numa zona económica e socialmente homogénea.

Para a realização do estudo, no início do ano letivo 2013/2014, a professora investigadora solicitou autorização ao diretor do agrupamento e aos directores das escolas para desenvolver a investigação, assim como aos Encarregados de Educação das turmas em questão (anexo 1).

A turma do 1.º Ciclo

A turma onde se realizou o estudo é constituída por 25 alunos, dos quais 14 do género masculino e 11 do género feminino, com idades compreendidas entre os 7 e os 8 anos. Todos os alunos são de nacionalidade portuguesa.

Ao longo do período de observação e do período de intervenção a turma demonstrou ser bastante ativa, interessada e trabalhadora. Os alunos revelaram gostar da escola, das aprendizagens que nela fazem e dos momentos de diversão com os colegas.

A maioria dos alunos tem um aproveitamento satisfatório, exceto dois deles que demonstram mais dificuldades de aprendizagem, principalmente da área da matemática e do português, no entanto nenhum deles está referenciado com NEE. Em relação à caracterização socioeconómica dos agregados familiares dos alunos predomina a classe média. No que diz respeito às habilitações literárias dos pais dos alunos predomina o ensino superior, seguindo-se o ensino secundário e por último, numa minoria, o ensino básico.

Como o intuito do presente estudo é estudar o desenvolvimento da explicitação do raciocínio matemático na resolução de tarefas matemáticas, toda a turma foi selecionada enquanto elementos pertencentes ao grupo turma.

A turma do 2.º Ciclo

No 2.º Ciclo do Ensino Básico o estudo desenvolveu-se numa turma do 5.º ano de escolaridade composta por 24 alunos, dos quais 12 do género feminino e 12 do género masculino, com idades compreendidas entre os 10 e os 12 anos. Dois dos alunos são de etnia cigana e todos eles são de nacionalidade portuguesa.

Ao longo do desenvolvimento do estudo, perante as observações e interações realizadas com a turma a professora investigadora averiguou que esta é trabalhadora e aplicada. Alguns alunos evidenciam mais dificuldades do que outros, todavia, o esforço de todos é notório. Esta turma tem cinco alunos repetentes que contam com um Plano de Acompanhamento Pedagógico e oito alunos que frequentam as aulas de apoio educativo. Destes, quatro às disciplinas de português e inglês e os outros quatro às disciplinas de matemática e ciências. Uma das alunas da turma está a ser seguida pelo gabinete de psicologia do estabelecimento de ensino. Além disso, dois alunos estão sinalizados como tendo mais dificuldades de aprendizagem, sendo por isso esperado dos professores um maior trabalho com eles para que as mesmas dificuldades sejam amenizadas. Os restantes alunos evidenciam um aproveitamento satisfatório.

No que diz respeito ao nível socioeconómico dos agregados familiares dos alunos prevalece a classe média. Na turma, seis alunos beneficiam de escalão A e cinco de escalão B. Relativamente às habilitações literárias dos pais dos alunos predomina o ensino secundário, seguindo-se o ensino básico e por último numa minoria o ensino superior.

A nível de ocupação de tempos livres nesta turma predomina o gosto pela televisão e pelo computador.

Como o intuito do presente estudo é estudar o desenvolvimento da explicitação do raciocínio matemático na resolução de tarefas matemáticas, toda a turma foi selecionada enquanto elementos pertencentes ao grupo turma.

Os grupos do 1.º Ciclo

Com vista ao desenvolvimento de uma aprendizagem cooperativa, os alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico, com o início do período de intervenção, começaram a trabalhar pela primeira vez em grupo. Assim, antes do começo da intervenção as duas professoras investigadoras presentes na sala, juntamente com a professora titular de turma, realizaram um pequeno mapa com a distribuição dos grupos e comunicaram à turma que esta iria ser dividida em seis grupos: um de cinco elementos e cinco de quatro elementos. Os grupos, representados na tabela 1, foram projetados com o propósito dos alunos trabalharem com vários colegas e experienciarem novas vivências, bem como de proporcionar uma boa interação entre eles para que todos raciocinassem.

Para uma melhor distinção entre os grupos foram selecionados, pelos alunos, nomes para eles, que se mantiveram ao longo de todo o ano letivo. É ainda importante salientar que os nomes próprios contidos ao longo deste estudo são fictícios.

Tabela 1 - *Constituição dos grupos ao longo do período de intervenção*

Designação do grupo	Designação do grupo
Sol	Íris; Mariana; Filipa; Gil.
Alegria	Dinis; Diogo; Magda; Adriano.
Silencioso	António; Isa; Madalena; Luísa.
Estrela	Mafalda; Miguel; Gabriel; Bruno.
Arco-íris	Fábio; Tomás; Cátia; Sónia.
Trabalhador	Luís; Jorge; Guilherme; Artur.

Para o desenvolvimento deste estudo foi importante observar cada um dos grupos de trabalho, tornando possível tirar algumas conclusões sobre a importância das tarefas realizadas em grupo, no desenvolvimento da explicitação do raciocínio matemático. Todos os grupos eram heterogéneos, com pequenas diferenças entre os elementos que os constituíam.

Justificação do contexto contemplado no estudo

O período de intervenção desenhado com o intuito de desenvolver a capacidade de explicitação do raciocínio matemático desenvolveu-se num primeiro momento no 1.º Ciclo do Ensino Básico, numa turma do 2.º ano e, num segundo momento, no 2.º Ciclo do Ensino Básico, numa turma do 5.º ano. Porém, neste estudo será apenas contemplada a investigação desenvolvida na turma do 2.º ano.

A intervenção foi realizada nos dois ciclos contudo, na fase final, foi notória a disparidade de dados obtidos entre as duas turmas. Esta disparidade relaciona-se com o número de aulas lecionadas e com a qualidade dos dados recolhidos o que, consequentemente provocaria uma análise desequilibrada dos resultados. Com efeito, após uma pequena reflexão com a professora orientadora, decidiu-se explorar apenas os dados do 1.º Ciclo do Ensino Básico.

O período de intervenção no 2.º ano decorreu ao longo de quatro meses, com um total de dezassete aulas lecionadas nas várias áreas, sendo que nove delas foram dedicadas à matemática. Estas aulas decorreram durante o período letivo da manhã ou da tarde, sendo este tempo dividido entre as duas professoras investigadoras que realizavam as suas experiências. O período de intervenção no 2.º Ciclo do Ensino Básico desenvolveu-se, também, ao longo de quatro meses mas, com apenas cinco aulas lecionadas, sendo estas unicamente na área da matemática. As aulas foram dadas em períodos de noventa minutos, sendo que, três foram lecionadas individualmente e as outras duas em conjunto com a outra professora investigadora, presente na sala de aula.

Além do mencionado, a professora titular de turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico concedeu às professoras investigadoras uma maior liberdade de gestão das aulas, de maneira a que fossem adequadas e convenientes ao desenvolvimento do estudo. Pelo contrário, o trabalho desenvolvido no 2.º Ciclo do Ensino Básico não foi flexível, limitando de certa forma a execução da investigação, bem como a recolha de dados relevantes para a mesma, não sendo possível recolher a informação pretendida. Com efeito, dada a forma como os alunos trabalhavam e dada a rigidez do que era feito com eles não permitiu que mostrassem aquilo que era esperado, ou seja, a explicitação do raciocínio matemático. E ainda, o período de tempo de intervenção, como foi menor, não permitiu, numa última fase, a análise da evolução na explicitação do raciocínio matemático, tal como se pretendia com uma das questões de investigação.

Terminada a experiência no 2.º Ciclo do Ensino Básico e, como não foi possível realizar uma análise dos dados obtidos, tornou-se pertinente realizar uma segunda visita ao 1.º Ciclo do

Ensino Básico, passados alguns meses, com o intuito de recolher mais informação, aplicando mais problemas para perceber se os alunos continuavam a explicitar os seus raciocínios e como o faziam, desde a última intervenção.

Em suma, devido à maior quantidade de informação recolhida no 1.º Ciclo do Ensino Básico, considerou-se pertinente a dedicação exclusiva à análise e ao estudo destes dados. Contudo, apesar de no 2.º Ciclo do Ensino Básico não ser possível recolher o que era pretendido, a intervenção foi importante para a aquisição de experiência profissional.

3.4. Fases do estudo

Para uma melhor caracterização desta investigação julgou-se adequado dividir todo o processo que lhe está inerente em sete fases. Estas fases pretendem descrever o que foi realizado ao longo do mesmo e estão sustentadas na metodologia de investigação-ação. Deste modo, passam pelo processo de observação, planificação, intervenção e reflexão da ação, segundo o modelo de Latorre (2003), tal como é apresentado:

1.ª Fase – Observação: esta fase decorreu ao longo das primeiras semanas do período de intervenção e diz respeito ao momento de observação das práticas letivas da professora titular de turma/professora cooperante. Num primeiro momento a professora investigadora observou as estratégias de ensino usadas pela professora da turma, captando as mais eficazes para, posteriormente, as implementar nas aulas a lecionar. Ao longo desta observação, foi registando comentários dos alunos, que considerou pertinentes, recolhendo assim algumas características da turma. Com estes registos a professora investigadora foi percebendo algumas das dificuldades dos alunos, algumas capacidades e também, as áreas em que se sentiam mais seguros.

Num segundo momento interligou-se a observação com alguns momentos de interação. A observação foi realizada ao longo das práticas da professora titular e a interação ao longo da realização das tarefas. Nestes períodos a professora investigadora circulou pela sala auxiliando os alunos na execução das mesmas. Estes pequenos momentos de interação permitiram perceber com mais clareza o funcionamento da turma e algumas particularidades dos alunos. Com efeito, esta fase foi de conhecimento da realidade da turma, para a professora investigadora e, de ambientação, para os alunos.

2.ª Fase - Revisão da literatura: esta fase foi de leitura das perspetivas de vários autores para a escolha de um tema a ser trabalhado, de acordo com as características da turma. O tema selecionado foi o raciocínio matemático pois, ao longo da fase de observação a professora investigadora percebeu que os alunos apresentavam algumas dificuldades na exposição clara e concisa dos seus pensamentos matemáticos. Deste modo, foram realizadas inúmeras leituras sobre o raciocínio matemático de modo a fundamentar o estudo e a perceber a melhor forma de o trabalhar ao longo da intervenção.

3.ª Fase - Pré-planificação: esta foi uma fase de múltiplos diálogos com os professores titulares de turma, onde foram discutidos os conteúdos a abordar ao longo da intervenção. Nestas conversas foram trocadas informações sobre as turmas, nomeadamente algumas características particulares e, também, alguns conselhos para a implementação da prática letiva. Por um lado, os professores titulares foram sugerindo algumas atitudes a ter com a turma, de modo a que a professora investigadora orientasse e firmasse o seu trabalho obtendo também a dedicação dos alunos. Por outro lado, esta última deu a conhecer aos professores as leituras que realizou e o trabalho que pretendia desenvolver com os alunos.

4.ª Fase – Planificação: neste ponto foi delineado o plano de ação do estudo, com base na literatura e no conhecimento do contexto de intervenção. A professora investigadora construiu as primeiras planificações e selecionou o material de apoio necessário, nomeadamente as tarefas a trabalhar com os alunos. As planificações foram discutidas e refletidas com a professora cooperante e com os professores orientadores, de modo a proporcionar uma aprendizagem significativa onde as crianças fossem agentes ativos da sua própria aprendizagem. Estas planificações pretendiam introduzir, ao longo das aulas, o raciocínio matemático, para que os alunos se confrontassem, faseadamente, com o processo de explicitação do mesmo. As tarefas começaram por solicitar a forma como os alunos pensaram, evoluindo para tarefas de carácter exploratório onde explicitaram tudo o que fizeram ao longo das mesmas.

5.ª Fase – Intervenção: nesta fase colocou-se em prática o plano da ação, ou seja, as atividades contempladas nas primeiras planificações. Ao longo destas intervenções a professora investigadora registou algumas notas e também assinalou no seu diário alguns comentários e conversas de alunos ao longo da realização das tarefas propostas. Além disso, as aulas foram gravadas para uma posterior reflexão das práticas educativas.

6.ª Fase – Reflexão: esta fase diz respeito a dois momentos, ao de reflexão individual e ao de reflexão conjunta. Num primeiro momento a professora investigadora realizou reflexões individuais sobre a sua prática e, também, sobre a reação dos alunos às aulas por si lecionadas, recorrendo às gravações das mesmas. Nestas reflexões constaram os aspetos positivos e os aspetos a melhorar, bem como todas as emoções sentidas ao longo das intervenções.

Num segundo momento a professora investigadora reuniu-se com a professora cooperante e com a professora orientadora para partilharem opiniões e para refletirem sobre o trabalho realizado. Nesta reunião foram confrontados e avaliados todos os aspetos inerentes às aulas lecionadas. Além disso, foram partilhados sentimentos experimentados ao longo das intervenções. Nesta fase o *feedback* da professora cooperante e da professora orientadora foi determinante pois ajudou a progredir nas seguintes intervenções.

7.ª Fase – Replanificação: nesta fase, com base nas reflexões realizadas e nos *feedbacks* obtidos, a professora investigadora realizou novas planificações, reajustando os métodos e as estratégias de ensino utilizadas para alcançar o desenvolvimento da explicitação dos raciocínios dos alunos e, também, um melhoramento das práticas. Desta forma, as planificações para as aulas seguintes foram construídas tendo em conta as observações realizadas aquando a implementação das aulas anteriores e, ainda, todos os aspetos refletidos com a professora cooperante e com a professora orientadora.

Como a metodologia de investigação-ação caracteriza-se por ser um processo cíclico, a professora investigadora, no decorrer do estudo, no fim da sétima fase regressou à quinta fase, a da intervenção. Isto quer dizer que, após a reflexão das primeiras ações a professora investigadora replanificou as aulas posteriores e colocou-as em prática. Depois disso, observou-as e refletiu sobre elas para consequentemente replanificar as aulas seguintes com base nos aspetos refletidos. Este processo cíclico foi realizado ao longo de toda a intervenção, com o intuito da professora investigadora desenvolver a capacidade de explicitação dos raciocínios matemáticos na turma, melhorar as suas práticas de aula para aula, obtendo assim os resultados pretendidos, e também, proporcionar aos alunos uma aprendizagem significativa.

3.5. Intervenções

Esta subsecção destina-se à apresentação das aulas lecionadas na área da matemática. A tabela 2 representa sinteticamente cada uma das aulas do 1.º Ciclo do Ensino Básico expondo os assuntos abordados ao longo da implementação do projeto, o tempo de intervenção, as tarefas realizadas e o seu propósito. É de salientar que a ordem pela qual são apresentadas as aulas, corresponde à ordem cronológica com que foram realizadas.

Tabela 2 - *Aulas lecionadas, na área da matemática, ao longo da implementação do projecto no 1.º Ciclo*

Mês	Tempo	Conteúdo	Tarefas	Objetivos
novembro	2h30min	Números ordinais	Tarefa 1 Tarefa 2 Tarefa 3 Tarefa 4	- Reconhecer os conjuntos dos números inteiros, das diferentes formas de representação dos elementos desses conjuntos e das relações entre eles; - Explicitar os raciocínios matemáticos.
novembro	2h30min	Estimativa	Tarefa 5 Tarefa 6 Tarefa 7	- Estimar valores aproximados e decidir a razoabilidade de resultados obtidos por qualquer processo de cálculo ou estimação; - Explicitar os raciocínios matemáticos.
janeiro	2h30min	Subtração	Tarefa 8	- Compreender a subtração nos sentidos retirar, comparar e completar; - Discutir com os outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação; - Explicitar os raciocínios matemáticos.
janeiro	2h30min	Subtração (continuação)	Tarefa 9	- Compreender a subtração nos sentidos retirar, comparar e completar; - Discutir com os outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação; - Explicitar os raciocínios matemáticos.
janeiro	2h30min	Multiplicação	Tarefa 10 Tarefa 11	- Compreender a multiplicação nos sentidos aditivo e combinatório; - Discutir com os outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação; - Explicitar os raciocínios matemáticos.
janeiro	2h30min	Multiplicação (continuação)	Tarefa 12	- Compreender a multiplicação nos sentidos aditivo e combinatório; - Discutir com os outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação; - Explicitar os raciocínios matemáticos.
janeiro	2h30min	Subtração	Tarefa 13	- Compreender a subtração nos sentidos retirar, comparar e completar; - Discutir com os outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação; - Explicitar os raciocínios matemáticos.
junho	2h30min	Não se aplica um conteúdo	Tarefa 14 Tarefa 15	- Reconhecer e trabalhar diferentes estratégias necessárias à resolução de problemas;

		específico		- Discutir com os outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação; - Explicitar os raciocínios matemáticos.
junho	2h30min	Não se aplica um conteúdo específico	Tarefa 16 Tarefa 17	- Reconhecer e trabalhar diferentes estratégias necessárias à resolução de problemas; - Discutir com os outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação; - Explicitar os raciocínios matemáticos.

Para a presente investigação, com o propósito de desenvolver a capacidade de explicitação do raciocínio matemático, a professora investigadora procedeu à elaboração de diversas tarefas (anexo 2), construindo uma sequência que proporcionasse aos alunos várias experiências em que a explicitação do raciocínio fosse utilizada de forma adequada e crítica.

A elaboração e a seleção dessas tarefas realizou-se, pela professora investigadora, de modo ponderado, fruto de uma pesquisa exaustiva sobre o tema do desenvolvimento do raciocínio, e de modo a estarem de acordo com o nível cognitivo dos alunos da turma em estudo. No planeamento da intervenção atribuiu-se atenção os alunos que apresentavam mais dificuldades na área da matemática pois, se eles aprendessem os conteúdos, à partida os outros também o conseguiriam. Para abordar os diferentes temas, a professora investigadora procurou utilizar situações reais, exemplos que os alunos pudessem vivenciar, visualizar ou utilizar concretamente, para que as aprendizagens fossem significativas.

Perante a tabela acima apresentada é relevante mencionar que as sete primeiras aulas, compreendidas entre o mês de novembro e o mês de janeiro, dizem respeito à primeira intervenção e que as duas últimas aulas, no mês de junho, referem-se à segunda intervenção na turma.

Dada a densidade das tarefas realizadas e a impossibilidade de apresentação de todas elas, a professora investigadora considerou adequado escolher algumas e, assim, desenvolver uma análise mais pormenorizada das mesmas. Com efeito, selecionou três tarefas, 8, 15 e 17 que serão apresentadas no capítulo seguinte. As tarefas referidas foram as selecionadas, pois foram as que melhor revelaram o trabalho desenvolvido pelos alunos ao longo da intervenção. Os problemas contidos nas mesmas divulgaram, notoriamente, a explicitação dos raciocínios matemáticos por parte dos alunos, bem como algumas das dificuldades em explicitá-los. Além disso, a partir das tarefas escolhidas foi possível compreender a evolução destes na explicitação do raciocínio matemático, ao longo da implementação do projeto, tal como se pretendia com as questões de investigação.

Um outro aspeto importante a revelar sobre as tarefas escolhidas é o seu nível de complexidade. As primeiras tarefas apresentadas à turma foram simples, onde os alunos aplicaram o conteúdo que estavam a trabalhar e no final explicaram à turma toda como fizeram. Neste sentido, as primeiras aulas foram de iniciação ao processo de explicitação do raciocínio matemático onde os alunos foram habituados a explicar tudo o que faziam e o porquê de o fazerem. As tarefas seguintes tornaram-se mais complexas, envolvendo mais passos e estratégias a utilizar para a sua resolução, assim como para a explicitação do raciocínio, uma vez que se pretendeu que os alunos fossem confrontados com o processo de explicitação do raciocínio de forma faseada. Na segunda visita à escola foi possível implementar um conjunto de tarefas, de cariz exploratório, onde tiveram a possibilidade de explorar e analisar livremente os problemas contidos, recolher todas as informações deles e desenvolver estratégias diferentes para os resolver. Assim, tornaram-se mais motivadoras para os alunos, uma vez que exigiam uma investigação. Com estas tarefas foi possível sentir a sua evolução nas atividades e especialmente no processo de explicitação do raciocínio, a par, também, do desenvolvimento de projetar a capacidade de raciocinar.

A exploração das tarefas desenvolveu-se em três diferentes fases: i) breve introdução ao problema com a sua leitura e com a descoberta do seu significado em grande grupo; ii) exploração do mesmo em pequeno grupo ou individualmente; iii) correção do problema e discussão em grande grupo sobre as conclusões obtidas na exploração de toda a tarefa. Como um dos objetivos desta experiência é o estudo da evolução da explicitação do raciocínio matemático a professora investigadora deu atenção a todas as fases de investigação da tarefa.

A primeira tarefa selecionada, tarefa 8, foi acessível no sentido em que desafiava os alunos a começar a explicitar as suas ideias matemáticas. O problema contido na mesma relacionou-se com a subtração, sendo um problema que requereu a aplicação dos conteúdos lecionados na aula. Nesta tarefa a professora investigadora teve como propósito iniciar as crianças num processo de adaptação e familiarização à explicitação do raciocínio.

A tarefa 15 foi de natureza mais prática e, com a aplicação da mesma, a professora investigadora pretendeu que os alunos contactassem com o processo de descoberta matemática, aliado à comunicação dos raciocínios. Para tal, foram desafiados a explorar o enunciado do problema. Com a execução desta tarefa teve-se como objetivo principal envolver os alunos no processo de explicitação do raciocínio matemático e, ao mesmo tempo, proporcionar a exploração com materiais manipulativos.

Na tarefa 17, também de carácter exploratório, o aluno foi incentivado a investigar os números e as suas propriedades. Nesta tarefa foi estimulado a formular ideias matemáticas, justificá-las e comprová-las, através da explicitação do raciocínio matemático.

Durante a implementação das tarefas a professora investigadora, enquanto observadora participante, procurou estar atenta às estratégias, raciocínios e dificuldades suscitadas pelos alunos de modo que todos mantivessem uma postura ativa e, nas duas últimas atividades, uma atitude investigativa.

Os alunos, ao realizarem estas tarefas, desenvolveram a capacidade de explorar, conjeturar, provar, justificar e comunicar matematicamente, assim como a de trabalhar de forma autónoma e criativa.

Ainda ao longo das intervenções no 2.º Ciclo do Ensino Básico lecionei 5 aulas de matemática. A tabela 3 apresentada seguidamente mostra, sistematizadamente, cada uma das aulas expondo a duração de cada uma, as fichas que foram realizadas (anexo 3), os conteúdos abordados nas distintas aulas, bem como os seus objetivos.

Tabela 3 - *Aulas lecionadas, na área da matemática, ao longo da implementação do projecto no 2.º Ciclo*

Mês	Tempo	Conteúdo	Tarefas	Objetivos
Março	90min	Aproximação por defeito e por excesso Arredondamentos	Tarefa 1	- Determinar aproximações de números racionais positivos por excesso ou por defeito, ou por arredondamento, com uma dada precisão; - Explicitar os raciocínios matemáticos.
Abril	90min	Fração irredutível Adição e subtração de números racionais	Tarefa 2 Tarefa 3	- Desenvolver a aptidão para escrever uma fração irredutível equivalente a uma fração dada; - Explorar a capacidade de adicionar e subtrair dois números racionais representados por frações com o mesmo denominador. - Discutir com os outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação; - Explicitar os raciocínios matemáticos.

Abril	90min	Adição e subtração de números racionais	Tarefa 4	- Explorar a capacidade de adicionar e subtrair dois números racionais representados por frações com o mesmo denominador; - Adicionar e subtrair dois números racionais não negativos expressos como numerais mistos; - Discutir com os outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação; - Explicitar os raciocínios matemáticos.
Abril	90min	Produto de um número natural por uma fração Multiplicação de números racionais	Tarefa 5 Tarefa 6	- Compreender a multiplicação de números racionais não negativos e do produto de um número natural por uma fração, bem como adquirir aptidão para usá-las em situações concretas e de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias. - Discutir com os outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação; - Explicitar os raciocínios matemáticos.
Abril	90min	Divisão de números racionais	Tarefa 7	- Definir o quociente de dois números racionais positivos. - Discutir com os outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação; - Explicitar os raciocínios matemáticos.

Importa salientar que dado o teor das tarefas não foi possível integrá-las no relatório, apesar de todas terem sido analisadas. Ora, com a oportunidade que a professora investigadora teve de aplicar diferentes tarefas, construídas com alguma rigidez imposta pelo docente da turma, foi-lhe possível realçar a opinião que possuía relativamente à importância de trabalhar e estimular as capacidades dos alunos, em oposição à ideia de subestimá-las. Assim, é crucial desafiar os alunos nas aulas de matemática e isso não é possível se recorrermos apenas a exercícios de aplicação e de respostas previsíveis, não favorecendo o raciocínio matemático, bem como outras capacidades. Pois, só desta forma é que estes ficam devidamente preparados para conseguir encarar, com uma postura ativa e investigativa, um problema, não se acostumando a resolver apenas situações rotineiras.

3.6. Instrumentos de recolha de dados

Para a realização deste estudo, segundo a metodologia de investigação-ação, tornou-se necessário pensar nas formas de recolher a informação que a própria investigação foi proporcionando. Ao longo desta, a professora investigadora teve necessidade de recolher informação sobre a intervenção, no sentido de ver com mais distanciamento os efeitos da sua prática letiva, tendo, para isso, que aprimorar de um modo sistemático e intencional o seu "olhar" sobre os aspetos secundários da realidade que estava a estudar, reduzindo o processo a um sistema de representação que se tornasse mais fácil de analisar, auxiliando, assim, a fase da reflexão. Para isso, recorreu a um conjunto de instrumentos de recolha de dados que serão detalhados a seguir: observação participante, diário da professora investigadora, produções dos alunos e ficha de reflexão.

A observação participante permite o conhecimento direto dos fenómenos tal como eles acontecem e ajuda a compreender os contextos, as pessoas que nele se movimentam e as suas interações. Por isso, a professora investigadora envolveu-se num processo de observação durante as aulas e também em situações informais, como por exemplo, nos intervalos. Pois, para a professora interpretar a realidade necessitava de interagir com os alunos. Esta observação teve como objetivos primordiais investigar o nível de comunicação das ideias matemáticas dos alunos e, consequentemente, as suas dificuldades na explicitação das mesmas, como também analisar as práticas letivas.

Como complemento a este instrumento aliam-se as *gravações áudio e vídeo.* Estas são uma ferramenta indispensável quando se pretende realizar estudos de observação em contextos naturais. Associando a imagem em movimento ao som, permitiu, deste modo, à professora investigadora obter uma repetição da realidade e, assim, detetar factos ou pormenores que tenham escapado durante a observação ao vivo. As gravações foram captadas nas aulas em que os alunos realizaram atividade matemática por uma câmara de vídeo. Esta gravava essencialmente o quadro da sala de aula com o intuito de captar os momentos de correção dos problemas realizados, dos raciocínios explicitados oralmente e, também, os momentos de discussão em grande grupo, proporcionados a partir de conteúdos trabalhados e da resolução de problemas que ocasionaram a comunicação de ideias matemáticas. Nas aulas em que foram realizadas investigações matemáticas a professora investigadora auxiliou a gravação vídeo da aula com gravadores áudio dispostos em cada grupo para, assim, ter acesso aos diálogos dos alunos no decorrer da experiência. Todas as gravações foram integralmente transcritas para formato de texto.

O diário da professora investigadora que representa o lado mais pessoal do trabalho de campo, uma vez que inclui os sentimentos, as emoções e as reações a tudo o que rodeia o professor investigador (Spradley, 1980). Este diário foi subdividido em diário de reflexão e diário de registos, onde se inserem as notas de campo retiradas ao longo da observação e intervenção. Estas apresentam-se de maneira descritiva, com alguns detalhes, e incluem partes reflexivas remetendo para os procedimentos utilizados ao longo das aulas, quer pela professora titular quer pela professora investigadora, reações dos alunos perante as atividades propostas e, também, comentários e interpretações feitas pelos mesmos.

As produções dos alunos consistiram nos registos escritos que os mesmos efetuaram ao longo das atividades matemáticas realizadas. Estas produções, simultaneamente com as observações e as transcrições das aulas gravadas, possibilitaram a reconstrução e interpretação dos dados fornecidos pela turma no decorrer da prática letiva.

A *ficha de reflexão* realizada, pelos alunos, no final de toda a intervenção pedagógica, com o intuito de perceber as suas opiniões sobre o trabalho desenvolvido (anexo 4). Esta era constituída por duas questões, sendo que o objetivo delas foi perceber se os alunos consideraram que o trabalho desenvolvido, sobre a explicitação do raciocínio, foi importante para as suas aprendizagens e se, decorrido o tempo de intervenção, estes se sentiam mais capazes de explicitar os seus raciocínios.

A recolha de dados, realizada pela professora investigadora, decorreu ao longo de todo o período de intervenção, uma vez que, para se observar o desenvolvimento da capacidade de explicitação do raciocínio dos alunos é necessário um período de tempo prolongado. O processo de recolha de dados teve início nas primeiras aulas observadas, prolongando-se até à última aula de intervenção, remetendo então, para o período de observação e para o de intervenção. Os instrumentos de recolha de dados, apresentados, foram diversificados e tinham o propósito de dar resposta às questões de investigação formuladas, como se verifica na tabela 3.

Tabela 4 - *Instrumentos que pretendem dar resposta às questões de investigação formuladas*

	Observação	Produções dos alunos	Diário da professora	Ficha de reflexão
Questão 1				
Questão 2				

3.7. Análise de dados

A análise de dados tem como propósito a interpretação de todo o material recolhido ao longo da intervenção pedagógica de maneira a dar-lhe fundamento, para posteriormente ser divulgado de forma clara e bem estruturada. De acordo com a perspetiva de Merriam (1988), a análise começa no momento em que é realizada a primeira observação. Depois da primeira análise, podem emergir elementos que levem à necessidade de recolha de mais dados ou até que desencadeiem uma revisão das questões de investigação, antecipadamente formuladas pelo investigador.

Nesta investigação, a análise de dados foi realizada após terem sido reunidos alguns dados pertinentes para o estudo. Estes dados foram recolhidos, como mencionado, desde o período de observação atá ao fim da intervenção pedagógica. Após uma pequena observação sobre os dados recolhidos no primeiro período de intervenção na turma, a professora investigadora considerou pertinente realizar uma segunda recolha de dados que melhor caracterizassem o trabalho desenvolvido, para uma investigação mais sustentada. Estes dados foram recolhidos, como já referido anteriormente, na segunda fase de visita à escola com a aplicação de novas tarefas de carácter exploratório.

Todo o material recolhido ao longo das intervenções, desde as observações e gravações das aulas, o diário da professora investigadora, as produções escritas dos alunos e a ficha de reflexão, foi posteriormente organizado e categorizado de modo a ser possível estabelecer relações entre as diferentes categorias consideradas para este estudo. Tendo, então, em conta o objetivo de compreender e desenvolver a explicitação do raciocínio matemático dos alunos, a professora investigadora elaborou duas categorias de análise que, ao longo da apresentação dos resultados, pretendem responder às questões de investigação e que envolvem: as dificuldades apresentadas pelos alunos, quer na resolução das tarefas propostas, quer na explicitação dos raciocínios e a evolução deles na sua capacidade de explicitar os raciocínios matemáticos. Desta forma, a professora investigadora analisou o processo de execução de cada tarefa selecionada, com o auxílio das observações, das gravações e dos seus registos. Ao mesmo tempo foi salientando os aspetos pertinentes relacionados com a comunicação das ideias matemáticas dos alunos e as estratégias que encontraram para a resolução dos problemas propostos. Posteriormente, apresentou as dificuldades surgidas ao longo das mesmas, desde a resolução das tarefas à explicitação dos raciocínios. Por fim, através das informações obtidas a partir dessas mesmas tarefas analisou a evolução dos alunos, no que diz respeito à explicitação dos raciocínios matemáticos, visível quer na execução das tarefas mencionadas, quer ao longo de todo o período de intervenção.

CAPÍTULO IV

APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo é feita uma apresentação aos resultados obtidos no projeto de intervenção no 1.º Ciclo do Ensino Básico. Esta secção divide-se em duas partes: *Tarefas propostas* e *Síntese global e evolução*. Na subsecção *Tarefas propostas* apresentam-se e discutem-se os resultados relativos à atividade matemática dos alunos, na realização de três tarefas, centrada na explicitação do raciocínio matemático. A segunda, e última subsecção, *Síntese global e evolução,* sumaria os resultados do estudo através de um cruzamento de toda a informação obtida e relata a evolução dos alunos na sua capacidade de explicitar os raciocínios.

4.1. A explicitação do raciocínio matemático na realização das tarefas propostas

As tarefas expostas, a seguir, apresentam os resultados obtidos que serviram de base para dar resposta às questões de investigação, previamente formuladas no início deste relatório. A discussão dos resultados, de cada uma das tarefas, rege-se de acordo com uma das categorias de análise deste estudo, isto é, dificuldades apresentadas na resolução das tarefas e na explicitação do raciocínio matemático. A segunda categoria de análise, a evolução da capacidade de explicitação dos raciocínios matemáticos, é relatada no final da apresentação de todos os resultados obtidos.

A elaboração das tarefas foi feita pela professora investigadora, de acordo com uma sequência que permitisse aos alunos a aquisição contínua de conhecimentos de uma forma autónoma. A primeira lida com a subtração e os processos que a ela são inerentes, enquanto a segunda e a terceira não apresentam um domínio específico. Na primeira tarefa a atividade dos alunos centrou-se na explicitação dos pequenos passos que realizaram ao longo da subtração, com o intuito de os familiarizar para os instrumentos de comunicação e de explicação dos raciocínios. Na segunda e na terceira tarefa, realizadas numa fase já tardia, a atividade dos alunos centrou-se na explicitação do raciocínio matemático ao longo da elaboração de estratégias para alcançar as soluções procuradas.

Tarefa 8 "Visita à quinta de Santo Inácio"

A seguinte tarefa, figura 4, foi aplicada no dia 17 de janeiro no decorrer das aulas destinadas à abordagem da subtração. Esta fez parte da sequência de tarefas para iniciar os alunos no processo de explicitação do raciocínio matemático. Nesta fase de apropriação os alunos começaram por realizá-la individualmente e, posteriormente, no momento de correção explicaram à turma como a resolveram. O enunciado desta tarefa é o apresentado na seguinte figura:

VISITA À QUINTA DE SANTO INÁCIO

Numa manhã, várias turmas da escola da Beatriz foram visitar a quinta de Santo Inácio. Ao todo a escola da Beatriz tem 160 alunos.

Sabendo que à visita foram:

- 1 turma do 1° ano, com 17 alunos;
- 2 turmas do 2° ano, uma com 15 alunos e outra com menos 3 alunos;
- 1 turma do 3° ano, com 20 alunos;
- 2 turmas do 4° ano, uma com 18 alunos e outra com mais 4 alunos;

Quantos alunos da escola da Beatriz não foram visitar a quinta de Santo Inácio? Explica como pensaste.

Figura 4 - Enunciado da tarefa 8 "Visita à quinta de Santo Inácio"

Com a aplicação desta tarefa, os alunos contactaram com o processo de resolução de problemas e foram desafiados a resolverem-na explicando todo o seu raciocínio. Assim, o objetivo era trabalhar, através da resolução do problema, a capacidade de explicitar o raciocínio matemático.

Nesta fase do projeto de intervenção, os problemas aplicados caracterizaram-se como sendo problemas de conteúdo, uma vez que os alunos colocaram em prática os conteúdos lecionados nas aulas e os conhecimentos matemáticos adquiridos. Desta forma, nesta aula, a professora investigadora tencionou iniciar as crianças num processo de adaptação e familiarização à exploração do raciocínio. Com efeito, ao longo desta tarefa, foi solicitado às crianças que explicitassem os seus raciocínios e as suas ideias matemáticas.

Depois de todos resolverem o problema, a professora investigadora selecionou, aleatoriamente, um aluno para o corrigir no quadro e explicar à restante turma como o resolveu e quais os seus raciocínios. Com esta medida pretendeu-se que os alunos fossem acostumados a explicar à turma todos os passos realizados ao longo da resolução, bem como todas as decisões que tomavam.

À medida que foram resolvendo o problema, a professora investigadora andou pelos lugares a tentar perceber os passos que realizaram e as decisões que tomaram para chegar à solução. Neste processo percebeu que todos os alunos encontraram a solução pretendida, porém, ao longo da resolução, optaram por estratégias diferentes.

Para auxiliar os passos na resolução dos problemas e, também, como objeto de estudo da outra professora investigadora presente na sala, os alunos adotaram três questões de orientação que os ajudaram no processo de resolução. Estas foram: *O que me é dado?; O que quero saber?; Como vou fazer?*. Deste modo, as crianças resolveram o problema, seguindo as etapas do modelo de Polya (1995), com base nas questões referidas.

Os alunos iniciaram o trabalho com a leitura conjunta da tarefa e a discussão do seu significado, também em conjunto. Nesse momento, esclareceram o que o problema solicitava e foi explorada a compreensão do mesmo. Depois, individualmente, voltaram a ler o enunciado e resolveram-no.

Após uma breve análise das resoluções, a professora investigadora percebeu que estas diferenciavam-se, não pela solução, a que todos chegaram facilmente, mas pelos raciocínios dos alunos. Ao longo da resolução foram visíveis as dissemelhanças nos seus raciocínios e, consequentemente, as decisões tomadas. Isto é, apesar do problema ser relativamente acessível e não exigir um grande esforço a nível do raciocínio matemático, uma vez que era um problema que colocava em prática os conteúdos lecionados, os alunos diferenciaram-se sobretudo na explicitação do mesmo.

O Diogo, na sua resolução, não evidenciou os passos intermédios executados, mesmo percebendo-se que os realizou. Na pergunta "*o que me é dado?*", o aluno registou todos os dados importantes para a descoberta da solução. Nesses dados, escreveu que a turma do 1.º ano tinha 17 alunos, que as duas turmas do 2.º ano tinham 15 e 12 alunos, que a turma do 3.º ano tinha 20 alunos e que as duas turmas do 4.º ano tinham 18 e 22 alunos. Perante o mencionado a professora investigadora percebeu que o seu raciocínio estava correto, contudo os passos que realizou até descobrir a quantidade de alunos de cada turma foram ocultados. O enunciado referia que existiam duas turmas do 2.º ano sendo que, uma tinha 15 alunos e a outra tinha menos 3 e, o Diogo, na recolha dos dados colocou que as turmas do 2.º ano tinham, respetivamente, 15 e 12 alunos. O mesmo aconteceu no caso das duas turmas do 4.º ano, uma com 18 alunos e outra com mais 4. O aluno referiu que as duas turmas tinham 18 e 22 alunos, tal como de verifica na figura 5. Com isto percebeu-se que o Diogo, ao selecionar a informação pertinente para a resolução do problema realizou mentalmente os cálculos, isto é, a diferença entre 15 e 3 e a soma do 18 com o 4, mas não explicitou esse raciocínio.

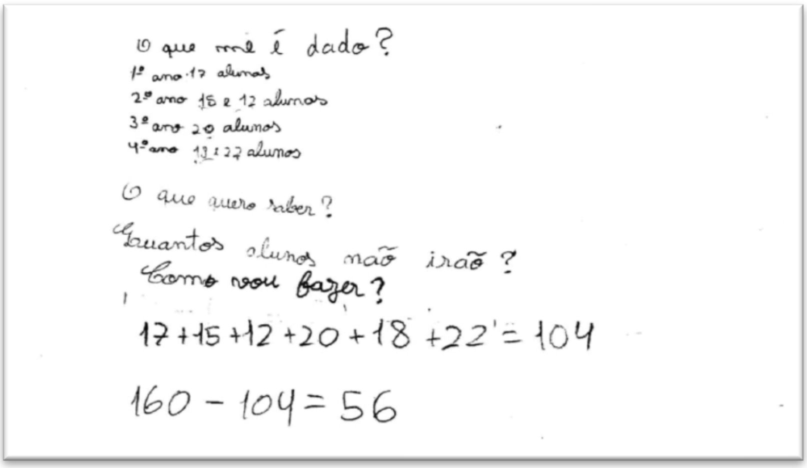
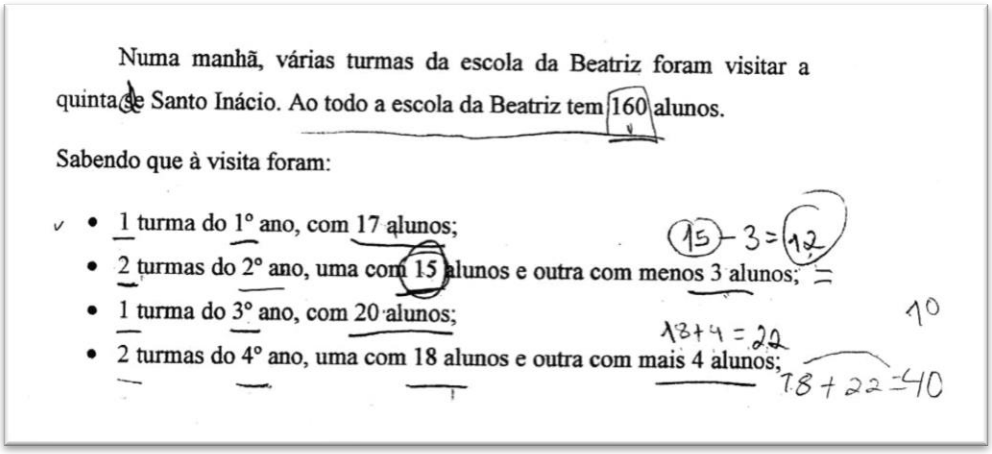

O que me é dado?
1º ano 17 alunos
2º ano 15 e 12 alunos
3º ano 20 alunos
4º ano 18 e 22 alunos
O que quero saber?
Quantos alunos não irão?
Como vou fazer?
17+15+12+20+18+22=104
160-104=56

Figura 5 - Resolução realizada pelo Diogo

Contrariamente ao Diogo, a sua colega Sónia explicitou esses passos na resolução do problema. Esta aluna, à medida que leu o enunciado da tarefa, sublinhou a informação que considerou importante e realizou os cálculos intermédios necessários, reveladores do seu raciocínio, visível na figura 6. Do mesmo modo, alguns alunos da turma recorreram a esta estratégia, de maneira a saberem exatamente a quantidade de alunos de cada turma.


Numa manhã, várias turmas da escola da Beatriz foram visitar a quinta de Santo Inácio. Ao todo a escola da Beatriz tem 160 alunos.

Sabendo que à visita foram:

- 1 turma do 1º ano, com 17 alunos;
- 2 turmas do 2º ano, uma com 15 alunos e outra com menos 3 alunos;
- 1 turma do 3º ano, com 20 alunos;
- 2 turmas do 4º ano, uma com 18 alunos e outra com mais 4 alunos;

15-3=12
18+4=22
18+22=40
10

Figura 6 - Parte da resolução realizada pela Sónia

O Guilherme, tal como o seu colega Diogo, ocultou muitos passos efetuados na resolução do problema. Este aluno não explicitou nenhum dos seus raciocínios ao longo da recolha de dados e, para além disso, na resposta à pergunta *como vou fazer?* também não explicitou os pensamentos matemáticos que o levaram a realizar aquele cálculo, tal como se visualiza na figura 7. Mediante a análise à resolução entendeu-se, claramente, todos os seus pensamentos mas, a explicitação escrita do que foi feito não constou na folha do enunciado. Como resposta ao problema um dos cálculos que efetuou foi 17+ 27 + 20 + 40. Neste cálculo percebeu-se que os números 17 e 20 diziam respeito aos alunos das turmas do 1.º e do 3.º ano, respetivamente, e que o número 27 referia-se à soma dos alunos das duas turmas do 2.º ano (15 + 12), assim como o número 40 se referia à soma dos alunos das duas turmas do 4.º ano (18 + 22).

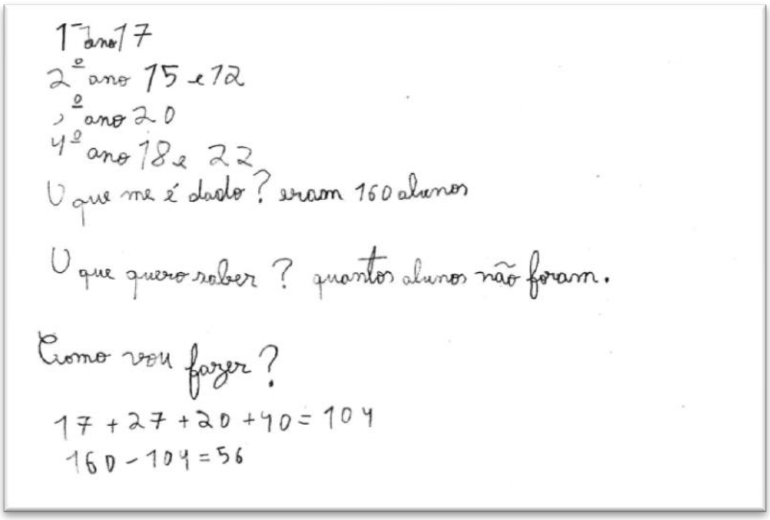

1º ano 17
2º ano 15 e 12
3º ano 20
4º ano 18 e 22
O que me é dado? eram 160 alunos
O que quero saber? quantos alunos não foram.
Como vou fazer?
17 + 27 + 20 + 40 = 104
160 - 104 = 56

Figura 7 - Resolução realizada pelo Guilherme

Com efeito, percebeu-se que existiram vários raciocínios que não foram explicitados na folha de resposta, ao longo da resolução. Com uma breve análise, durante a aula, das respostas a professora investigadora percebeu que os alunos resolveram bem os problemas, mas, alguns deles, não conseguiram transmitir aquilo que fizeram e o que pensaram.

Após a resolução da tarefa, com o intuito de verificar se os alunos se apercebiam das diferenças nas resoluções, a professora investigadora selecionou uma aluna para a correção, a Madalena. Esta, ao longo da mesma, assumiu uma atitude de imitação daquilo que a professora investigadora costumava fazer. Assim, questionou os seus colegas sobre os passos que deveria realizar para resolver o problema. Desta forma, ao mesmo tempo que foi dizendo como resolveu a tarefa, também perguntou aos seus colegas o que tinha de escrever. Durante a correção da Madalena no quadro, o Diogo esteve sempre muito atento e participativo, respondendo às questões que a colega colocava. A atitude deste aluno, ao longo do diálogo que se foi proporcionando, sobressaiu-se em relação aos outros pois, quando respondeu à Madalena sobre os dados do problema referiu-os tal como estavam explícitos no enunciado, ou seja, não deu informações nenhumas do seu raciocínio aquando a sua resolução. Pelo contrário, o Guilherme, quando questionado pela professora investigadora sobre a quantidade de alunos das turmas do

4.º ano explicou todos os passos que omitiu na sua resolução. Neste processo, a professora investigadora não corrigiu o Diogo propositadamente, pois queria perceber as suas dificuldades.

Madalena: A professora disse que nós tínhamos de pôr o que me é dado. Quais são os dados que nós temos?
Diogo: Uma turma do 1.º ano, com 17 alunos.
Madalena: Mais?
Diogo: Duas turmas do 2.º ano, uma com 15 alunos e outra com menos 3 alunos.
(...)
Prof.: Quem é que teve dificuldade em recolher os dados do problema? Todos conseguiram olhar para o problema e recolher logo os dados?
Alunos: Sim.
Prof.: Este 12 vem de onde?
Jorge: Porque no texto diz que há duas turmas do 2º ano, uma com 15 alunos e outra com menos 3 alunos.
Prof.: A Mariana está a dizer que na turma do 4.º ano também temos de fazer uma conta. Porquê Guilherme?
Guilherme: Porque no texto diz duas turmas do 4.º ano, uma com 18 alunos e outra com mais quatro alunos.
Guilherme: Por isso é 18 + 4 que é igual a 22.
Prof.: O número 18 representa o quê?
Guilherme: Uma turma.
Prof.: E o 18 + 4?
Guilherme: É a outra turma que tem mais 4 pessoas.

Com o desenrolar da aula a atitude do Diogo manteve-se sempre igual. A professora investigadora colocou algumas questões relacionadas com a informação do texto e o aluno continuou a responder sem dar pistas do seu raciocínio. Pelo contrário, a sua colega Íris, mesmo não sendo diretamente questionada pela professora, respondeu às perguntas colocadas explicitando o seu raciocínio e os passos que realizou no decorrer da sua resolução. Por último, a Madalena também forneceu uma pista da sua resolução, dizendo o processo que utilizou para efetuar os cálculos.

Prof.: E agora na questão *como vou fazer*?
Diogo: Tem de se fazer uma conta.
Professora: Só uma?
Diogo: Não duas.
Íris: Duas contas. Primeiro temos de fazer quantos alunos foram, depois temos de fazer quantos alunos não foram.
Madalena: Qual é a conta?
Diogo: 17 + 15 + 12 + 20 + 18 + 22.
(...)
Prof.: Sim, mas o que é que nós pretendemos saber com essa conta? Somar o quê?
Magda: O total de alunos que foram à visita.

Íris: Oh professora para ela resolver a conta mais rápido vai somar 17 + 15 e põe uma coisinha assim [o V de associação dos termos] e põe o resultado, depois põe 12 + 20 e o total. Depois faz igual na outra conta, soma todos os resultados.
Madalena: Vou somar as unidades e depois as dezenas.

Ao longo da correção a Madalena continuou a explicar como resolveu. Neste processo explicou os passos que realizou para prosseguir na execução da tarefa e, além disso, continuou a envolver os seus colegas na correção, através das questões que foi colocando.

Prof.: E agora Madalena como vamos fazer?
Madalena: Vamos fazer a conta de quantos alunos não foram à quinta.
Prof.: Sim, nós já sabemos o número de alunos total da escola...
Madalena: Vamos buscar o número de alunos da escola toda aqui, o 160, e vamos pô-lo aqui. E a conta vai ser de mais ou de menos?
Alunos: de menos.
Madalena: E agora vamos buscar o 104 e metemos aqui.

Por fim, na fase de revisão de todo o trabalho desenvolvido na aula, a professora investigadora voltou a colocar algumas questões relacionadas com a informação do problema, de modo a perceber se os alunos explicitavam ou não os seus raciocínios e, além disso, se o faziam facilmente. Perante as respostas verificou que os alunos evidenciaram algumas dificuldades na explicitação dos seus pensamentos e raciocínios pois, aquilo que responderam estava de acordo com o que executaram na realização do problema. Como é o caso do Luís que demonstrou algumas dificuldades na explicitação do que fez, mas respondeu corretamente na folha de resposta.

Prof.: Luís, explica o que é que a Madalena fez aqui? Por que é que ela somou isto tudo? De onde vem este valor?
Luís: Hum... [hesitação] vem das turmas, da do 1.º ano, das turmas do 2.º ano, do 3.º ano e das turmas do 4.º ano.
Prof.: Então nós somamos os números todos que foram onde?
Luís: À quinta de Santo Inácio.
Prof.: E deu 104. Depois o que é que fizemos?
Luís: Oh professora...hum...voltamos a somar para ver quais é que não foram.
Prof.: Somaste? Isto é uma soma?
Alunos: Não, é uma subtração.
Prof.: Então o que é que fizeste aqui?
Luís: Retiramos os alunos que foram à quinta.

Perante os todos diálogos apresentados verificou-se que os alunos demonstraram algumas dificuldades na explicitação oral dos seus pensamentos e raciocínios pois, aquilo que responderam esteve de acordo com o que executaram na realização do problema. Ou seja, se, por um lado, o raciocínio estava expresso na folha de resposta os alunos explicitavam oralmente quando eram questionados, se, por outro lado, os alunos não evidenciavam na folha também não explicitavam oralmente. Além disso, quando os alunos se sentiam pressionados, hesitavam e muitas vezes respondiam incorretamente, como foi o caso do Luís, visível no diálogo acima apresentado.

Dificuldades apresentadas

Nesta tarefa os alunos não demonstraram dificuldades ao longo da sua resolução. De um modo geral recolheram e organizaram a informação crucial do problema e realizaram os cálculos auxiliares determinando os alunos existentes em cada turma, tal como foi solicitado. Seguidamente realizaram os últimos cálculos necessários para determinar a solução. O único aspeto que salientaram como sendo um entrave à resolução foi a quantidade de informação existente, porém este foi facilmente ultrapassado.

Relativamente às dificuldades presentes na explicitação do raciocínio, os alunos, nesta fase inicial de adaptação revelaram algumas ao nível da comunicação. Isto verifica-se pois, até à implementação deste projeto, não estavam habituados a comunicar as suas ideias matemáticas e a explicitar os seus raciocínios. Por tal razão, alguns alunos demonstraram certas dificuldades nesse campo, uma vez que, apesar de terem resolvido bem o problema e de todos os passos que realizaram estarem corretos, não conseguiram explicar o porquê de o terem feito. No caso particular do Diogo, não explicitou por escrito o seu raciocínio durante a resolução do problema e também não o fez quando foi questionado, pela professora investigadora, sobre o que realizou. O Guilherme, ao longo da resolução da tarefa também não explicitou na folha de resposta os seus raciocínios, porém quando foi questionado explicou sem dificuldade e justificou as suas ações. Com isto verifica-se que a dificuldade deste aluno relaciona-se com a representação escrita do seu raciocínio e não com a explicitação oral. Pelo contrário, o Diogo, nesta fase, apresentou algumas dificuldades tanto ao nível da explicitação escrita como da explicitação oral. A turma, de um modo geral, não demonstrou muitas dificuldades na explicitação escrita dos seus pensamentos. Em contrapartida, foram evidenciadas mais complicações na explicitação oral pois, quando os alunos eram questionados sobre os seus raciocínios e as suas decisões ao longo da resolução do problema hesitavam e demonstravam algum receio em fazê-lo, tal como se verificou com o Luís. Este aluno resolveu o problema corretamente, e explicitou todos os seus raciocínios na folha de resposta, todavia não conseguiu explicar aquilo que fez de modo claro. Com efeito, a professora investigadora considerou que esta atitude deve-se ao facto dos alunos ainda não estarem completamente à vontade com a explicitação do raciocínio e todos os processos que lhe são pressupostos.

Posto isto, percebeu-se que nesta fase inicial de implementação do projeto, certos alunos evidenciaram algumas dificuldades no que diz respeito à explicitação oral dos raciocínios, enquanto outros evidenciaram algumas dificuldades na explicitação escrita. Com efeito, considerou-se fundamental continuar a desenvolver um longo trabalho relativamente à explicitação oral e escrita dos raciocínios com o objetivo dos alunos evoluírem e desenvolverem mais esta capacidade.

Tarefa 15 “Três filas”

Esta tarefa, figura 8, foi aplicada na aula de 4 de junho, primeira aula da segunda intervenção realizada nesta turma, e fez parte da sequência de tarefas planificada para investigarem atividades de cariz exploratório. O enunciado da tarefa é o apresentado na figura:

TRÊS FILAS

Estavam nove meninos no recreio a brincar. A professora viu que estavam em três filas, mas que cada fila tinha quatro meninos. Como é isto possível? Explica como pensaste.

Figura 8 - Enunciado da tarefa 15 “Três filas”

Nesta fase do estudo, a constituição dos grupos de trabalho foi a exposta na tabela 4, tendo sida elaborada com o intuito de proporcionar uma boa interação entre os elementos do grupo para que todos raciocinassem e se entreajudassem. A designação dos grupos, tal como já referido, diz respeito às escolhas dos alunos, uma vez que foram os mesmos que selecionaram cada um dos nomes.

Tabela 5 - *Constituição dos grupos na tarefa "Três filas"*

Designação do grupo	Designação do grupo
Sol	Íris; Mariana; Filipa; Gil.
Alegria	Dinis; Diogo; Magda; Adriano.
Silencioso	António; Isa; Madalena; Luísa.
Estrela	Mafalda; Miguel; Gabriel; Bruno.
Arco-íris	Fábio; Tomás; Cátia; Sónia.
Trabalhador	Luís; Jorge; Guilherme; Artur.

Através desta tarefa, os alunos contactaram com o processo de descoberta matemática e foram desafiados a explorar o enunciado apresentado. Inicialmente, estranharam a sua complexidade, uma vez que não estavam habituados a tarefas que os levassem a realizar investigações. Nas tarefas anteriormente realizadas, evidenciaram-se os exercícios ou problemas cuja resolução foi mais breve e o grau de desafio foi menor. Neste sentido, a professora investigadora, inicialmente, sentiu algumas dificuldades em orientar os grupos no processo de condução dos raciocínios, pois estes, quando foram deparados com o enunciado, mostraram-se muito reticentes afirmando que o mesmo não tinha solução e por isso, era impossível de resolvê-lo. Todavia, após um diálogo de encorajamento por parte da professora investigadora e, também, depois de comentários de alguns alunos, que se mostraram mais persistentes não desistindo de encontrar a solução, a aula decorreu de modo satisfatório.

Esta tarefa teve como objetivo central o envolvimento dos alunos no processo de descoberta matemática, aliado à comunicação das ideias matemáticas. Ao mesmo tempo requereu o alargamento do espaço de resolução de modo a envolver os alunos com materiais manipuláveis.

Era esperado que os alunos iniciassem o trabalho pela exploração da situação, ou seja, discutissem perspetivas e refletissem sobre as ideias dos colegas.

No momento de implementar a tarefa na aula a professora investigadora explicou aos alunos que iam fazer uma pequena exploração, projetando-a no quadro, e que a iam realizar em grupo, tal como estavam dispostos. Além disso, referiu que, para a realização da mesma, era necessário numa primeira fase fazer algumas experiências e delinear algumas estratégias, sem passar ao registo escrito. A professora investigadora adotou esta medida pois, pretendia que num primeiro momento, os alunos comunicassem e discutissem as suas estratégias e os passos que traçaram para resolver o problema. Se lhes fosse dado o enunciado, estes passariam de imediato para a resolução do problema e não eram ouvidas as suas ideias matemáticas, tal como se desejava.

> Prof.: Vai ser projetado um problema. De seguida vão, em grupo, discutir uma estratégia para o resolver, mas sem chegar à solução. Não queremos soluções, só queremos ver qual é a estratégia que vão usar.

Nesta tarefa era pretendido que descobrissem como colocar os nove alunos em três filas, sendo que cada uma dessas filas teria de ter quatro crianças.

A turma iniciou o trabalho com a leitura do enunciado e discussão do seu significado. Ao fazê-lo os alunos confrontaram os seus conhecimentos com os dos restantes colegas. O António fez a leitura do problema e, posteriormente, o Guilherme explicou por palavras suas o que entendeu.

> Guilherme: Havia 9 meninos.
> Prof.: Sim, como é que eles estavam dispostos no recreio?
> Guilherme: Estavam em 3 filas (...) mas cada uma tinha 4 meninos.

Em pequenos grupos os alunos foram-se clarificando e esclarecendo mutuamente, precisando o significado da tarefa.

> Cátia: Temos de pensar no problema, é um bocadinho complicado.
> Fábio: O truque é estarmos atentos.
> Cátia: Como é que fazemos? Como é que estão quatro meninos em cada fila e no fim são nove?
> Sónia: 4 + 4 + 4 dá 12.
> Tomás: Vamos olhar para o desenho do problema. Pode-nos ajudar. Temos de ver como é que estão as filas.

Este processo revelou-se um pouco demorado o que evidenciou que os alunos necessitavam de tempo para se apropriarem do significado do enunciado. Numa primeira fase da realização da tarefa proposta os alunos, em pequenos grupos, discutiram os seus conhecimentos matemáticos e raciocínios de modo a tentar encontrar estratégias para a realização do mesmo. Neste processo elaboraram um conjunto de ideias que assentiam serem determinantes para a resolução da tarefa. Desta forma, recolheram todas as opiniões dos elementos constituintes dos grupos e consequentemente foram delineando alguns passos.

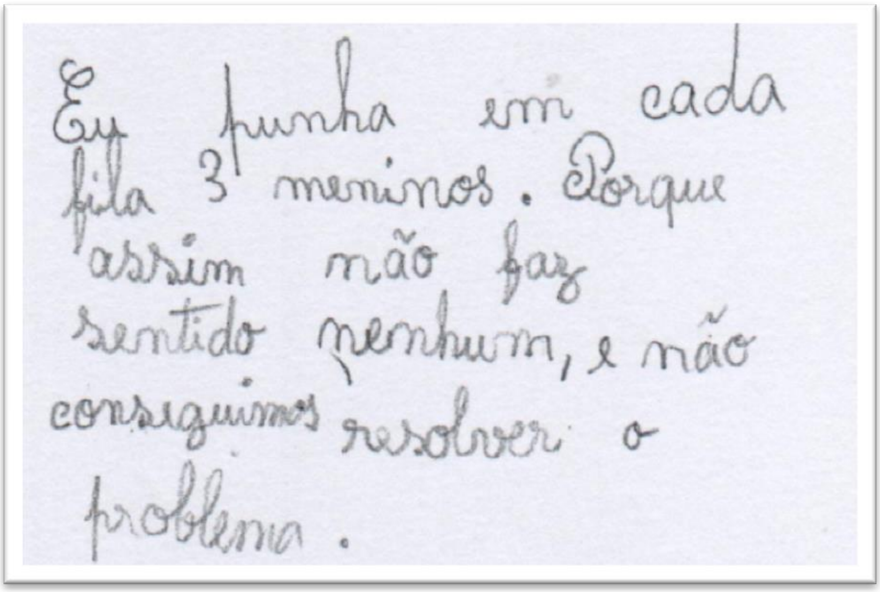
Uma das dificuldades que a professora investigadora sentiu diz respeito à exploração das possibilidades de resposta. A consideração da existência de filas dispostas, apenas, lado a lado na vertical, sendo que cada uma delas continha quatro alunos, foi um entrave. Com efeito, alguns grupos partiram do princípio que não era possível resolver o problema, enquanto outros, mais persistentes, debateram-se com mais firmeza sobre o enunciado alegando que a professora não ia colocar um problema impossível para que eles resolvessem.

Luís: O problema não tem solução.
Guilherme: Pois não. Se metermos três filas com quatro meninos [cada uma], temos 12 meninos.
Artur: Se o problema está aqui tem solução. A professora não ia dar um problema sem solução.
Luís: Podia dar só para nós pensarmos.

A investigação propriamente dita iniciou-se após os grupos estarem convencidos que precisavam de partir para a descoberta com o objetivo de identificar a verdadeira posição dos alunos nas filas. A partir da observação dos dados obtidos, com as conversas que tiveram com os colegas, construíram ideias mais sólidas, que se constituíram tentativas de resolução. As primeiras tentativas de generalização foram formuladas com base nas propriedades que se sobressaíram inicialmente, considerando apenas as filas de alunos dispostas lado a lado. A formulação das ideias foi feita na forma declarativa, talvez por influência da orientação da professora investigadora quando lhes disse para colocarem as suas estratégias e a forma como pensaram na folha de resposta. Os alunos não mostraram ter dificuldades na forma de escrever as suas ideias nem na forma de as contestar através de contraexemplos.

Com o propósito de desenrolar, de modo informal, a aula de acordo com os processos de raciocínio, os alunos depois de conversarem em grupo escreveram no enunciado do problema as suas ideias, nomeadamente apresentadas como estratégias para a resolução do problema.

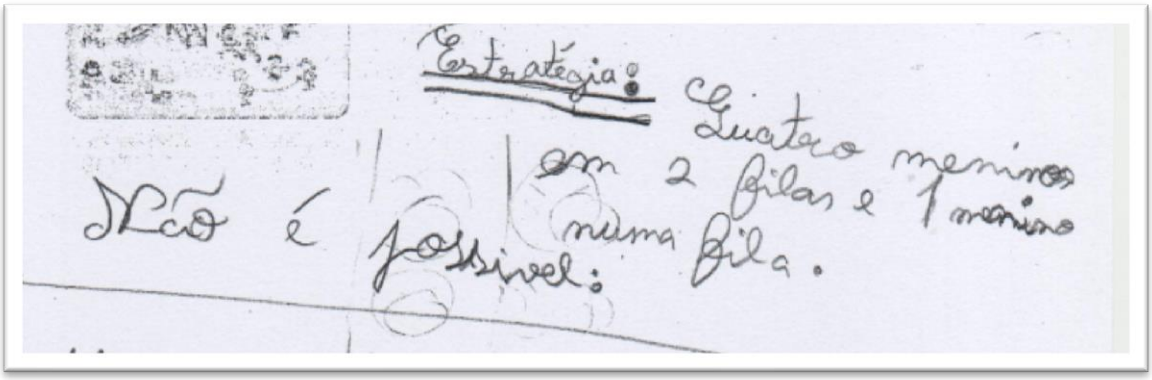
Nesta fase evidenciou-se que alguns grupos continuavam a acreditar que tal situação não era possível, como foi o caso do grupo Silencioso e do grupo Trabalhador apresentado na figura 9 e na figura 10, respetivamente. O grupo Silencioso discordou do enunciado e, por isso, tentou encontrar uma solução para que assim conseguisse resolver o problema. Neste sentido referiu através da estratégia realizada que, em vez de quatro alunos por fila, colocaria três, acrescentando ainda que com três meninos já era possível esquematizar as três filas.



Eu punha em cada
fila 3 meninos. Porque
assim não faz
sentido nenhum, e não
conseguimos resolver o
problema.

Figura 9 - Registo da estratégia do grupo Silencioso

O grupo Trabalhador não alterou o enunciado do problema, mas tal como o grupo Silencioso, assumiu que tal situação não era possível de se concretizar. Desta forma, admitiu colocar duas filas com quatro meninos cada uma e, sobrando um menino para completar os nove, colocava uma nova fila apenas com um aluno.



Estratégia: Quatro meninos
em 2 filas e 1 menino
numa fila.
Não é possível:

Figura 10 - Registo da estratégia do grupo Trabalhador

Pelo contrário, outros grupos tentaram, mediante as ideias que foram discutidas, encontrar uma solução para resolver o problema. Na figura 11 é apresentada a estratégia elaborada pelo grupo Estrela. Este constatou que a sua opção seria colocar três filas retas. Porém, não identificaram quantos alunos teria em cada uma das filas.

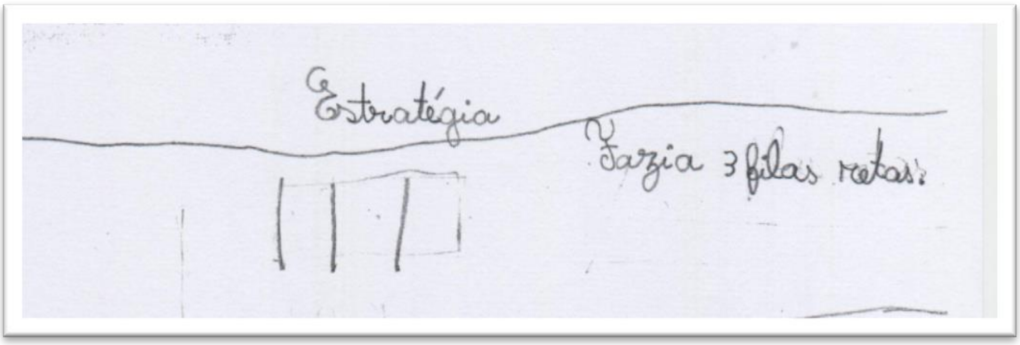


Figura 11 - Registo da estratégia do grupo Estrela

Por fim, o grupo Alegria escreveu a sua estratégia e tentou de imediato representá-la através de um esquema, figura 12. Para este, colocavam-se quatro meninos em cada uma das três filas (informação igual à do enunciado) mas, acrescentaram que cada menino é comum em duas filas. Esta última informação evidenciou-se muito relevante para a solução do problema, porém os alunos, quando interrogados pela professora investigadora, não conseguiram esclarecer o que queriam dizer com o termo comum.

> Prof.: O que significa isto que escreveram [cada menino é comum em duas filas]?
> Magda: O Diogo é que disse.
> Prof.: Diogo, o que queres dizer com comum?
> Diogo: Já não sei. Foi o que estivemos a falar ao bocado.
> Prof.: Tenta lembrar-te. Ajudem lá o Diogo. O que querem dizer com comum?
> (...)
> Prof.: Tentem descobrir através do esquema que fizeram.
> Dinis: Não sabemos professora!

Além disso, o esquema não correspondia àquilo que era referido. Desta forma, a professora investigadora conseguiu verificar que os alunos escreviam as suas estratégias mas não conseguiam transparecer essas mesmas estratégias para o desenho, sendo portanto uma dificuldade revelada.

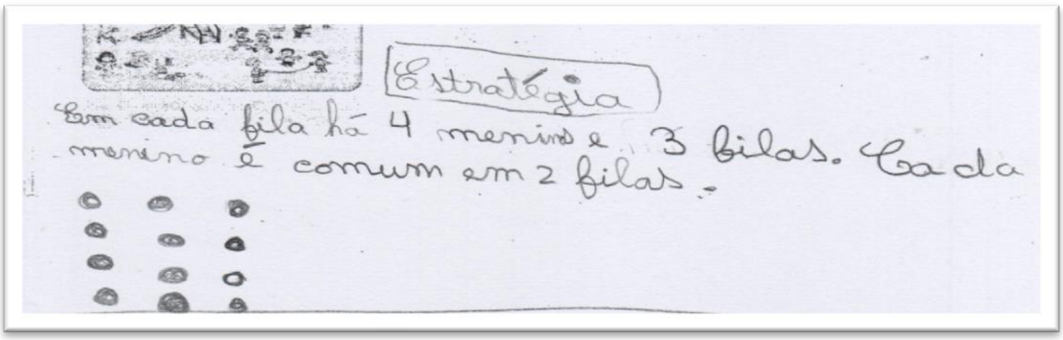


Figura 12 - Registo da estratégia do grupo Alegria

As estratégias e ideias apresentadas não resolveram o problema e evidenciaram algum desânimo, uma vez que acabaram por ser refutadas ao mesmo tempo que iam sendo realizadas. A professora investigadora sentiu então necessidade de entusiasmar os alunos e, para isso, resolveu fornecer uma pequena pista de modo a conduzi-los para a solução. Para isso, com o objetivo de fazer com que os grupos evoluíssem na investigação da tarefa, decidiu realizar um pequeno diálogo com a turma para que, em conjunto, obtivessem uma pista do enunciado. Nesse diálogo os alunos passaram a admitir que alguns dos meninos das filas pudessem pertencer a duas filas, introduzindo-se o termo "comum".

Prof.: Vamos lá pôr as cabecinhas todas a trabalhar. O que se passa no problema?
Tomás: Há três filas...com quatro meninos.
Prof.: Há três filas com quatro meninos cada uma, certo.
Prof.: Então o que é que vocês já viram?
Íris: Que não dá para pôr três filas todas seguidinhas.
Cátia: E com quatro meninos em cada fila.
Prof.: Muito Bem. Então já vimos que não podemos colocar as filas lado a lado. Certo? Vamos pensar noutras formas de organizar as filas. Lembrem-se de situações do dia-a-dia ou mesmo de jogos que já fizeram e que tiveram de estar em filas.
Jorge: Há alguns jogos em [educação] física que [o professor] põe um aluno em duas filas.
Prof.: Aquilo que o Jorge está a dizer é muito importante. Se o professor põe o mesmo aluno em duas filas, qual é a função dele?
António: Ajudar as duas filas.
Filipa: Estar nas duas filas ao mesmo tempo.
Prof.: Então fazer parte das duas filas é ser o quê?
Diogo: É ser comum.
Prof.: Muito bem Diogo, então o que é que o vosso grupo queria dizer ao bocado?
Dinis: Que um aluno é comum.
Diogo: Um aluno está nas duas filas ao mesmo tempo.
Prof.: Exatamente, muito bem.
Prof.: Ai está uma pista. Os alunos podem ser comuns entre as filas. Pensem, em grupo, nisso.

Após o diálogo os alunos envolveram-se em mais discussões e troca de opiniões com vista a descobrirem o enigma.

Terminado o primeiro tempo da aula a turma saiu para um pequeno intervalo. Neste período alguns deles, entre os quais os mais intrigados com a tarefa, resolveram juntar-se e recriar a situação do enunciado no pátio da escola. Estes começaram por experimentar algumas ideias, entre elas a de se colocarem em filas lado a lado com quatro alunos em cada uma, estratégia visível na figura 13. Ao perceberem que esta tentativa era falhada foram testando outras, de maneira a procurarem uma solução para o problema. Após algumas experiências chegaram a uma possível solução, a de se colocarem em filas fechadas formando um triângulo, como na figura 14. Adotando essas posições os alunos conseguiram-se organizar de modo a estarem quatro alunos em cada uma das três filas. Além disso, colocaram em prática as aprendizagens adquiridas na discussão anterior, pois introduziram na sua estratégia o termo “comum”.

Figura 13 - Alunos a realizarem tentativas: filas lado a lado

Ao realizarem esta tentativa os alunos envolvidos no processo de descoberta do problema perceberam que através da formação de um triângulo era possível responder à questão lançada no enunciado da tarefa.

Figura 14 - Alunos a realizarem tentativas: triângulo

Depois do intervalo os grupos dedicaram mais algum tempo à troca de opiniões e de ideias matemáticas. Quando se mostraram preparados para avançar, a professora investigadora decidiu passar para uma segunda fase, a concretização do que tinham discutido, uma vez que alguns alunos, durante o intervalo, já haviam descoberto uma possível resolução da tarefa.

O grupo Sol e o grupo Arco-íris, impulsionadores da descoberta no pátio da escola, explicaram à turma todo o processo decorrido até à solução. Expuseram que, para ser possível resolver a tarefa, era necessário colocar os alunos em filas formando um triângulo, sendo que os que estavam nos seus vértices eram comuns às duas filas, exemplificando as posições na sala de aula.

Íris: Então nós temos 9 meninos e temos 3 filas, cada uma com 4 meninos. Nós podemos com essas 3 filas, formar, por exemplo, um triângulo e cada menino de uma fila pode-se repetir na outra fila. Esse menino é comum a uma fila.

Madalena: É o triângulo. Conseguimos fazer um triângulo com 3 filas. Cada fila com 4 meninos.

Prof.: Então escrevam aquilo que acabaram de descobrir.

(...)

Prof.: Agora vão ver se o que escreveram está correto, através do material manipulável. Vão usar nove peças de xadrez, imaginando que cada uma delas é um menino. Além disso vão registar as conclusões que tiraram.

Gil: Como?

Prof.: Vão testar aquilo que foi descoberto. Depois disso, vão tentar descobrir outras estratégias. Se encontrarem têm de dizer a diferença entre a nova estratégia e a já encontrada.

Após a produção da solução em conjunto, a professora investigadora distribuiu pelos grupos nove peças de xadrez, figura 15, com o intuito de serem manipuladas e de representarem os nove meninos relatados no enunciado da tarefa. A solução encontrada foi testada por todos os grupos

Ao confrontarem a solução com a manipulação das peças de xadrez, a aceitação foi evidente, uma vez que verificaram que uma posição possível para a posição das filas era a triangular.

Figura 15 - Alunos a testarem a solução

A professora investigadora pediu à Filipa que se dirigisse ao quadro e explicasse, mais uma vez, todo o trabalho desenvolvido ao longo da aula. Com isso tencionava que os alunos não sentissem nenhuma dificuldade relativamente ao que estava a ser trabalhado.

Filipa: Este aqui [a peça branca que estava num dos vértices do triângulo] pertence a esta e a esta fila, este aqui [outra peça branca que estava noutro vértice] pertence a esta e a esta fila e este [última peça branca que estava no último vértice] pertence a esta e a esta fila.
Prof.: E por isso temos 9 meninos aí?
Filipa: Sim, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.
Prof.: Temos também 3 filas?
Filipa: Sim
Prof.: Temos 4 meninos em cada fila?
Filipa: Sim professora.
Prof.: Então o que é que são estes meninos representados pelas peças brancas, Íris?
Íris: São os que repetem nas filas.
Prof.: E os que se repetem são o quê?
Íris: São os comuns.
Prof.: Então os meninos das pontas são comuns às duas filas.
Íris: Quer dizer que fazem parte das duas filas.

A professora investigadora, sabendo das soluções possíveis para resolver a tarefa e, numa tentativa de fazer os alunos pensar e refletir sobre os seus raciocínios questionou-os sobre a possibilidade de existirem mais soluções. Porém, os alunos negaram, uma vez que foram realizadas, ao longo da manipulação do material, várias tentativas e não foram encontradas outras soluções. Além disso, alguns grupos testaram as estratégias e ideias refutadas inicialmente para, assim, perceberem se existiam outras formas de colocar as filas. A professora investigadora, ainda no momento de diálogo com os alunos, questionou-os sobre a possibilidade de se construir uma outra figura geométrica semelhante ao quadrado (retirando-lhe um dos lados). De imediato a Filipa, juntamente com colegas da turma, demonstraram que tal não era possível, pois assim seriam necessários 10 meninos.

Prof.: Então a forma que acham que dava era qual?
Alunos: O triângulo.
Prof.: E se em vez do triângulo fizéssemos uma figura semelhante ao quadrado, sem um dos lados? Como este aqui que estou a desenhar.
Filipa: Não é possível.
Alunos: Não dava.
Prof.: Por que é que não dava Filipa?
Filipa: Porque estão 10.
Prof.: Porque aqui estão 10 meninos e no problema só são 9.
Prof.: Existe mais alguma maneira de colocar as filas?
Bruno: Não, só o triângulo.

A descoberta feita por alguns alunos no intervalo facilitou a resolução da tarefa, pois ao encontrarem as relações entre as filas e a forma triangular a solução estava ao seu alcance desde que organizassem o raciocínio. De uma forma geral, com esta tarefa, compreendeu-se que as ideias matemáticas dos alunos, bem como as suas estratégias contribuíram para o desenvolvimento dos seus raciocínios de modo a justificarem as conclusões apresentadas.

Infelizmente, pela indisponibilidade de tempo, não se conseguiu investigar as outras possíveis soluções.

Dificuldades apresentadas

Esta tarefa foi a primeira do tipo exploratório pelo que se sobressaíram as dificuldades inerentes a quem explora atividades matemáticas pela primeira vez, tais como: não se sentir seguro para avançar sem apoio, não ter os sentidos despertos para procurar padrões, não registar todo o trabalho e não estar a contar com uma tarefa de tão árduo trabalho.

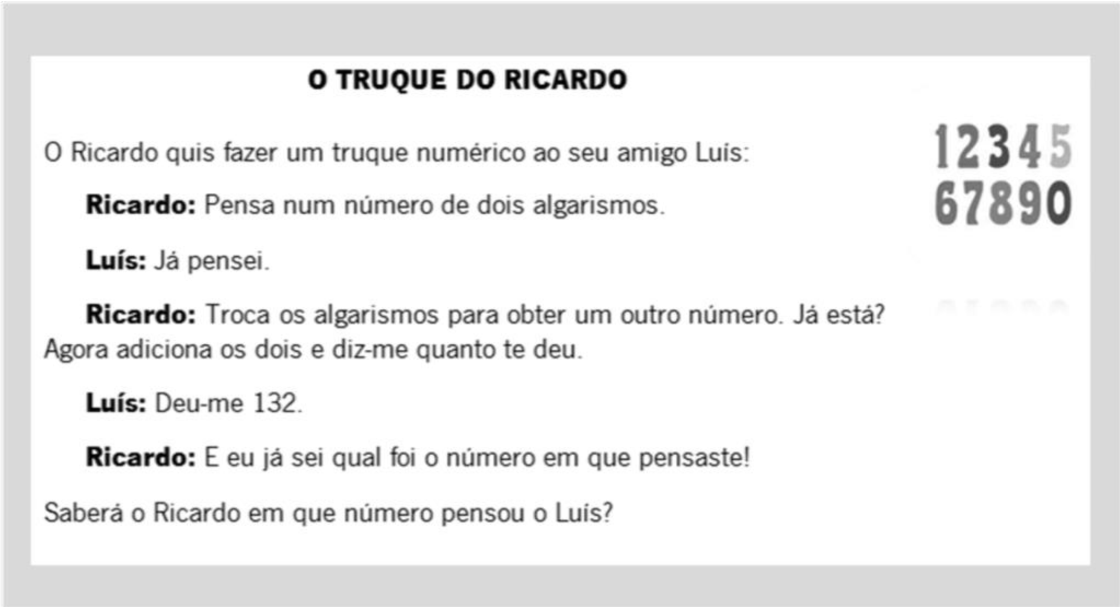
Relativamente às dificuldades evidenciadas ao longo da resolução da tarefa sobressaem-se, tal como já mencionado, a dificuldade em procurar padrões e abrirem-se a outras perspetivas. Quando a turma foi deparada com a condição de colocar os alunos em filas, centrou-se apenas nas filas convencionais a que estão habituados, ou seja, lado a lado dispostas na vertical. Desta forma, demonstraram dificuldade em sair do seu ambiente de segurança para explorarem outras alternativas, nomeadamente filas diagonais. Esta hipótese só foi considerada quando a professora investigadora forneceu a pista de alguns alunos poderem pertencer a duas filas ao mesmo tempo. Além do referido, inicialmente, na resolução também demonstram algumas dificuldades em aceitar o problema. Devido ao tipo de tarefa, de carácter mais exploratório e com um grau de complexidade mais elevado, os alunos mostraram-se recetivos e desanimados, pois a primeira impressão da mesma foi não ser possível de resolver. Esta postura de negação evidenciou-se, pois os alunos não estavam acostumados a este tipo de problemas. Demonstraram, ainda, mais dificuldade na resolução, uma vez que neste tipo de tarefas não há um procedimento definido a seguir, aspeto a que a turma estavam anteriormente habituados.

No que diz respeito às dificuldades evidenciadas na explicitação do raciocínio continua a sobressair-se como obstáculo, tal como na tarefa anteriormente analisada, a explicitação escrita dos raciocínios. Os alunos têm o raciocínio bem organizado e esquematizado nas suas mentes porém, se lhes for solicitado que traduzam para a folha de respostas essas ideias, colocando em prática o que estão a pensar, sentem algumas dificuldades em fazê-lo. Exemplo dessa dificuldade, foi a estratégia inicialmente apresentada pelo grupo Alegria, que considerava filas com meninos comuns. Um membro desse grupo, o Diogo, organizou o seu pensamento e descobriu que os alunos podiam ser comuns mas, não conseguiu escrever a justificação dessa ideia. Além disso, quando a professora investigadora questionou o grupo sobre esta relação nenhum dos membros conseguiu explicar. Isto revela uma dificuldade em explicitar por escrito os raciocínios e, ao mesmo tempo, dificuldade em explicitar oralmente os mesmos raciocínios. Pois, o Diogo também não conseguiu explicar ao grupo essa característica. Um outro aspeto que pode ser considerado dificuldade é o discurso desordenado o que consequentemente origina, algumas das vezes, a omissão de passos importantes na explicitação.

Todavia, apesar das dificuldades apresentadas, foram mostradas melhorias significativas em relação à explicitação do raciocínio matemático realizado oralmente. Ao mesmo tempo, evidenciaram-se algumas mudanças na postura dos alunos, uma vez que começaram a comunicar os seus raciocínios por iniciativa própria, principalmente nos momentos de discussão em pequenos grupos, em que explicaram as suas ideias aos colegas.

Tarefa 17 "O truque do Ricardo"

Esta tarefa foi aplicada no dia 6 de junho, segunda aula da segunda intervenção no 1.º Ciclo do Ensino Básico. O objetivo desta tarefa foi descobrir um par de números de dois algarismos, em que a ordem desses é invertida, cujo resultado da soma é 132. O enunciado da tarefa é o apresentado na figura 16:



O TRUQUE DO RICARDO

O Ricardo quis fazer um truque numérico ao seu amigo Luís:

Ricardo: Pensa num número de dois algarismos.

Luís: Já pensei.

Ricardo: Troca os algarismos para obter um outro número. Já está? Agora adiciona os dois e diz-me quanto te deu.

Luís: Deu-me 132.

Ricardo: E eu já sei qual foi o número em que pensaste!

Saberá o Ricardo em que número pensou o Luís?

Figura 16 - Enunciado da tarefa 3 "O truque do Ricardo"

Esta tarefa foi, também, realizada em grupos e a constituição dos mesmos consta na tabela 5.

Tabela 6 - *Constituição dos grupos na tarefa "O truque do Ricardo"*

Designação do grupo	Designação do grupo
Sol	Íris; Mariana; Filipa; Gil.
Alegria	Dinis; Diogo; Magda; Adriano.
Silencioso	António; Isa; Madalena; Luísa.
Estrela	Mafalda; Miguel; Gabriel; Bruno.
Arco-íris	Fábio; Tomás; Cátia; Sónia.
Trabalhador	Luís; Jorge; Guilherme; Artur.

Com a aplicação desta tarefa pretendia-se que os alunos explorassem os números e as suas propriedades, através do recurso a vários exemplos, para aprofundarem a compreensão da questão central. Além disso, tencionava-se que os alunos formulassem várias ideias matemáticas e as testassem através dos seus raciocínios, chegando a uma solução lógica. Para efeitos do estudo interessava que os alunos explorassem os números através de tentativas e da descoberta de padrões. Importava, ainda, como referido, que formulassem ideias matemáticas e que concluíssem que, para obter o 2 como algarismo das unidades, no número 132, era necessário que a soma dos números correspondentes aos algarismos das unidades das parcelas fosse 12, ao mesmo tempo que justificavam os seus raciocínios.

Com o intuito de orientar os alunos neste processo a professora investigadora focou-se essencialmente na discussão, revendo todo o processo seguido desde a formulação das ideias matemáticas à conclusão, auxiliando os alunos na sequência coerente de todo o processo.

Nesta tarefa os alunos foram realizando várias tentativas para encontrar um par de números de dois algarismos, em que a ordem desses fosse invertida, e cujo resultado da soma fosse 132. Além disso, foram-se questionando se haveria mais números cuja soma desse o mesmo resultado. A sugestão dada de iniciar a tarefa através de um processo de tentativa erro, mas de forma organizada e planeada, partira do pressuposto de essa estratégia ser aceite como válida para todos os alunos.

A professora investigadora pensou, inicialmente, que a dificuldade dos alunos consistiria em perceber que poderiam existir mais pares de números do que apenas um, tal como era esperado.

Os elementos do grupo Alegria começaram por discutir entre si, de modo a encontrarem um par de números cuja soma estivesse perto do número 130. Para este grupo, encontrar um número próximo do 130 era o objetivo, uma vez que depois disso fariam alguns ajustes para, então, encontrar a solução procurada, ou seja o 132. Envolveram-se em discussões de modo a pensarem como poderiam combinar os números e quais as adições que seriam necessárias fazer. Depois de algumas trocas de opiniões e de alguma orientação por parte da professora investigadora começaram a efetuar cálculos.

Por um lado a Magda e o Diogo estavam preocupados em encontrar alguma relação entre os números de modo a que, tal como já foi mencionado anteriormente, fosse mais fácil descobrir um número próximo do 132. Para eles o processo de resolução de um problema através de tentativas era muito difícil pois, de acordo com as suas opiniões, demorava muito porque poderiam tentar e nunca encontrar a solução. Por esta razão, estavam preocupados em encontrar um plano, segundo o qual os seus raciocínios deveriam seguir, para mais facilmente descobrirem o número pretendido. O Dinis nesta aula assumiu uma atitude mais ativa, apoiando os colegas e ajudando quando fosse necessário intervir. Por outro lado o Adriano, sempre muito relaxado, não se mostrou preocupado com o facto de ter de realizar várias tentativas.

Ao longo do processo a professora investigadora foi auxiliando o grupo de maneira a que não se estendessem muito na discussão, uma vez que o intuito era que explorassem os números, as suas combinações e descobrissem padrões.

> Prof.: Ao longo da troca de opiniões vão escrevendo os números que vão conversando e vendo se algum pode ser o que andam à procura. Se não der, já sabem que esse podem "deitar fora", ou seja, colocar de parte.

Os alunos seguiram o conselho da professora investigadora. Pegaram, então, numa folha de rascunho e o Dinis foi fazendo algumas tentativas ao longo da conversa.

> Magda: Podíamos começar com o 47 e com o 74.
> Dinis: Esses números não dão.
> Magda: Porquê?
> Diogo: 4 dezenas mais 7 dezenas é 110. Ainda faltam 20 para o 130.
> Adriano: Temos de pensar mais para encontrar o número certo.
> Magda: Então a pista é encontrar dois números que [a soma dos algarismos das dezenas] deem 130.
> Magda: Esperem deixem-me pensar.
> Dinis: Podemos experimentar um número já perto do 100. Olha, por exemplo o 90.
> Magda: Então tem de ser o 90 e tal, porque se trocar a ordem dos algarismos dá 09. E 90 + 09 é igual a 99. Não dá.
> Diogo: 90 + 30 é igual a 120. Podemos experimentar o 93. Assim, temos de fazer a conta do 93 com o 39.

Esta oportunidade de discussão e de reflexão em grupo tão participativa, neste caso, com a grande participação da Magda e do Dinis, provavelmente não aconteceria em situação de aula com a turma toda, uma vez que os alunos com mais dificuldades não participariam. Com efeito, este tipo de aulas demonstrou ser um elemento que proporciona a evolução dos alunos, no que diz respeito ao desenvolvimento dos seus conhecimentos, dos seus raciocínios e da sua autoestima.

Ao efetuarem o cálculo acima referido, ou seja, 93 + 39 o grupo Alegria encontrou a solução procurada. Através desta adição conseguiram obter o número 132 e deram por terminada a investigação. Deste modo, mediante os passos que realizaram a professora investigadora solicitou que escrevessem a sua estratégia para chegarem ao resultado final.

Prof.: Agora que descobriram o número, gostava que escrevessem nas vossas folhas a estratégia que utilizaram para conseguirem resolver a questão. Ou seja, queria que escrevessem a vossa ideia sobre como se resolve o problema.

Recorrendo novamente à discussão, os alunos do grupo Alegria tentaram chegar a um consenso e assim, escreveram a sua estratégia. Depois de poucos minutos esta estava elaborada. Para este grupo, para obter o número 132, é preciso escolher um par de números que, quando lhe é trocada a ordem dos algarismos e, quando são somadas as dezenas, o resultado está próximo do 130.

Magda: Temos de escrever a pista que descobrimos.
Dinis: Aquilo de encontrar um número perto do 130?
Magda: Sim.
Magda: Como vamos escrever isso?
Adriano: Escrevemos que pensamos no 93 e que deu.
Diogo: Mas não é isso que a professora quer.
(...)
Diogo: Podemos escrever que...que a nossa estratégia foi primeiro encontrar dois números e somar as dezenas...depois vimos se dava um número perto do 130. Assim depois era mais fácil encontrar o 132.

O grupo Sol utilizou uma estratégia diferente da apresentada pelo grupo anterior. Colocou de parte os momentos de partilha de ideias e de planos, para desvendar a solução do problema, e começou de imediato a tentar encontrar um número possível. Para tal, impuseram apenas uma condição, cada aluno diria um par de números para ver se com a soma dos mesmos obtinham o número 132. A ideia do grupo era iniciar prontamente o trabalho e, segundo eles, não perder tempo com momentos de discussão.

Íris: Começo eu a dizer um número e vemos se dá. Depois diz a Filipa. E assim. Todos dizemos um número. Concordam?
Íris: Então... pode ser o...não é melhor o 29.
Gil: Esse número não pode ser, é muito pequeno. Temos de pensar em números grandes.
Íris: Mas se trocar a ordem já é grande, porque é o 92.
Gil: Pois, mas mesmo assim não dá. Estes números não chegam ao 132.
Filipa: É...como é que sabes se ainda nem fizeste a conta?
Gil: Porque 29 é quase 30. E 92 + 30 não dá 132.
Íris: Pois não, 92 + 30 dá...102...112...dá 122, menos um é igual a 121.
Mariana: Temos de pensar noutro número.

A Filipa pensou num novo número para ver se conseguia descobrir a solução. Como o Gil disse que era melhor começar com números grandes decidiu escolher o maior número de dois algarismos, o 99. No entanto, de imediato viu os seus colegas indignados com a escolha.

Filipa: O 99.
Íris: Achas?
Íris: Esse número é que não pode ser mesmo. É quase 100. E 100 + 100 já é duzentos.
Gil: Por isso 99 + 99 é...200 - 2. É igual a 198.
Mariana: este número está muito longe do 132.

Neste momento a professora investigadora achou pertinente intervir de modo a ajudar o grupo a encontrar um plano a seguir para a resolução da tarefa, evitando assim momentos, como estes, de plena confusão dentro do grupo.

Prof.: Esqueceram-se de, inicialmente, como já fomos falando nas outras aulas, estabelecer um plano daquilo que estavam a pensar fazer ao longo da resolução da tarefa. Qual é a estratégia que vão seguir para encontrar o número 132? É nisso que têm de pensar agora.

A professora deixou-os a refletir e a discutir a estratégia a seguir, a partir deste ponto. Rapidamente a escreveram e deram seguimento à exploração da tarefa.

Filipa: Já chegamos a acordo!
Íris: Cada um tem de pensar num número em que a sua soma [com outro número de dois algarismos com a ordem destes invertida] esteja próximo do 132. Assim ou acrescentámos um ou retirámos um.
Filipa: E chegámos à solução que procuramos.

A estratégia utilizada por este grupo parece-se com a do grupo anterior, Alegria, pois ambos tentaram encontrar um par de números de dois algarismos, cuja ordem desses fosse invertida e a soma estivesse próxima do 132. Todavia, evidenciou-se uma pequena diferença. O grupo Alegria quando determinou a primeira combinação de números deu como terminada a investigação. Ao contrário, o grupo Sol através desta estratégia de adicionar ou subtrair números ao obtido inicialmente persistiu na descoberta partindo para outras soluções. Este grupo conseguiu avançar na investigação da tarefa depois de se descentrar das tentativas desorganizadas.

Gil: Podemos tentar com o 85 e o 58.
Mariana: 80 + 50 dá 130...5 + 8 é 13.
Íris: Não dá, o resultado dá 143.
Mariana: E se subtrairmos um? Se pensarmos no 84?

Gil: 84 + 48 dá...120 + 12...dá 132. Já encontramos.
Filipa: Pode haver mais do que uma solução. Podemos procurar mais números.
(...)
Filipa: E se tentarmos o 92?
Mariana: Não pode ser, dá 121. Temos de aumentar um para ver se assim já dá.
Íris: Então 39 + 93 é igual a...Olha há mais do que uma solução, porque 39 + 93 também dá 132.

As tentativas continuaram sempre através do mesmo método, adicionar ou subtrair um número ao escolhido inicialmente. Como o grupo não encontrou, para além das acima referidas, mais nenhuma solução a professora investigadora pediu para que escrevessem a sua estratégia, de modo a, mais tarde, explicarem-na à turma. Rapidamente mencionaram que a estratégia estava relacionada com o trabalho que tinham feito, por isso a professora investigadora incitou que a escrevessem na folha de respostas.

Íris: A nossa estratégia foi o que fizemos para descobrir o número.
Gil: Mas não vamos escrever isso!
Prof.: Escrevam na tarefa qual a estratégia que utilizaram para alcançar o número 132.
Filipa: Para descobrir o número 132 procuramos números...depois de encontrarmos um trocamos a ordem. Depois somamos e vimos que dava quase 132.
Mariana: Depois se não desse acrescentávamos ou retirávamos um número até encontrar o 132.
Prof.: Então escrevam isso.

A estratégia ficou então registada, segundo o grupo Sol, para se obter o número 132 era necessário procurar um número, onde a soma com seu par, com a ordem dos algarismos trocada, fosse próxima do 132. Se isso não acontecesse era preciso acrescentar ou retirar um número aos iniciais até encontrar o 132.

O grupo Estrela estabeleceu como objetivo encontrar um número para determinar a solução do problema. Para isso foram organizados nos seus pensamentos e delinearam como ponto de partida o número 132. De acordo com este grupo, a estratégia principal para a resolução do problema é a partir do número dado. Desta maneira, os alunos concentraram os seus pensamentos nele e foram analisando as suas características. No decorrer da discussão no grupo, foram mobilizando alguns conhecimentos e saberes das aulas anteriores e perceberam que o número 132 é um número par e, por isso, pode ser dividido “a meio”, segundo as suas expressões. Ou seja, com esta estratégia, os alunos a partir do resultado estabeleceram a sua divisão, ainda que de modo informal, para a encontrar a metade de 132. Para tal, mobilizaram os conhecimentos adquiridos e foram dividindo cada uma das classes dos algarismos, iniciando pelas unidades e terminando nas centenas, até obter o número pretendido.

> Gabriel: Nas unidades temos o 2.
> Mafalda: Um mais um é dois. Por isso nas unidades vamos ficar com o 1.
> Gabriel: Nas dezenas temos o 30.
> Miguel: 15 mais 15 é 30.
> Mafalda: Metade de 100 é 50.
> Miguel: Então temos o 50 o 15 e o 1.
> Mafalda: Bruno quanto é 15 mais 1?
> Bruno: 16
> Gabriel: 50 mais 16 é 66.
> Mafalda: Então já temos o número que procurávamos, o 66.

Na perspetiva deste grupo, para se encontrar a solução do problema, era necessário centrarem-se num elemento essencial, que admitiram ser o resultado. A partir daí encontraram um número, partindo da metade, para obter o número 132, sendo o resultado obtido o 66.

Este grupo, ao contrário dos referidos anteriormente, revelou ser muito organizado nos seus pensamentos e também no objetivo que queriam alcançar, neste caso a solução do problema. Foram construindo o caminho da resolução em conjunto, com ordem e com sentido. Porém, quando a professora investigadora os confrontou com a possibilidade de existir mais soluções para o problema o grupo negou, afirmando que no enunciado só pedia uma solução. Além disso, argumentaram que realizaram outras tentativas, sem um plano delineado, mas não conseguiram encontrar mais números.

> Prof.: Encontraram o 66, muito bem. Mas, será que existe mais algum número para além desse que também seja solução?
> Gabriel: Não professora, no enunciado diz que é só um número.
> Mafalda: Oh professora, já fizemos outras tentativas, com números à sorte e não dá nenhum.
> Prof.: Então escrevam o plano utilizado para chegarem ao resultado. Escrevam a estratégia que, segundo o vosso grupo, vos leva ao resultado.

O grupo trocou, mais uma vez, as diversas opiniões e de novo, de modo organizado, escreveu na folha de resposta a sua estratégia. Segundo este, para obter o número 132 é necessário dividi-lo em dois para encontrar a metade. Depois, o resultado tem de ser adicionado a ele próprio.

Os restantes grupos, Silencioso, Arco-íris e Trabalhador, fizeram tentativas aleatórias para encontrar uma combinação cuja soma fosse 132. Os esforços da professora investigadora de os incitar a estabelecer um plano para a resolução do problema e a estabelecer estratégias para encontrar o número procurado foram em vão. Neste sentido, durante o tempo estipulado para a realização desta parte da tarefa, estes grupos não conseguiram encontrar nenhuma solução.

O momento de discussão seguiu-se a esta primeira etapa, de modo a que a turma discutisse as estratégias formuladas por cada grupo. Os três grupos que descobriram soluções foram ao quadro explicar os seus raciocínios e os resultados obtidos. Nesta apresentação a estratégia do grupo Estrela de, partindo do resultado proceder à divisão para encontrar um número menor, foi contestada. Após a sua explicação os restantes alunos justificaram que não podia ser verdadeira uma vez que, existiam mais soluções do que a apresentada por esse grupo.

Tomás: Essa estratégia é falsa professora.
Prof.: Porquê Tomás?
Tomás: Porque o grupo Estrela diz que temos de dividir por dois o resultado. Mas assim só conseguem encontrar uma solução.
Íris: Pois professora e o meu grupo já tem duas soluções.
Íris: Por isso a estratégia do grupo Estrela não pode ser verdadeira.
Prof.: Então se a estratégia do grupo Estrela foi contestada, ou seja, foi considerada falsa, quais as estratégias que nos restam?
Diogo: Temos a nossa, professora. Temos de encontrar dois números e somar as dezenas, para ver se dá próximo do 130, depois é mais rápido encontrar o 132.
Filipa: E a do grupo Sol, professora. Para descobrir o número 132 temos de procurar alguns números...depois de encontrarmos trocamos a ordem. Depois somamos e vimos se dá perto do 132. Depois se não der acrescentamos ou retiramos um número até encontrar o 132.
Prof.: Então aqui temos as duas estratégias.
Artur: São parecidas.
Prof.: Elas são muito parecidas, porquê?
Artur: Porque nas duas diz que temos de tentar encontrar um número e somar com o outro número [com a ordem dos algarismos] trocado até encontrar um próximo do 132.
Prof.: Exatamente, e depois se não encontrarmos?
Artur: Temos de procurar outros números próximos do primeiro.

Segundo os alunos, para se obter o número 132 na soma de duas parcelas com os mesmos algarismos, mas com as ordens invertidas, era indispensável pensar num número cuja soma fosse próxima do 132 para depois, caso fosse preciso, serem feitos alguns ajustes, procurando outro número próximo do inicial.

A discussão, em grande grupo, pretendia levar os alunos a justificarem os seus raciocínios e os seus pensamentos. Para tal, foi importante rever todo o processo garantindo que todos tivessem oportunidade de refletir sobre os raciocínios realizados.

A professora investigadora começou por explicar à turma que iam discutir as conclusões a que tinham chegado. Projetou o enunciado no quadro e ao seu lado elaborou uma pequena tabela, tal como na figura 9, com os pares de números que foram descobertos e que serviam de solução ao enunciado do problema. Este processo foi considerado importante, uma vez que alguns grupos ao encontrarem a primeira solução ficaram convencidos de que tinham resolvido a questão considerando que o Ricardo, de facto, sabia o número em que o Luís tinha pensado.

Com efeito, o objetivo da professora investigadora, com a tabela realizada, era o de demonstrar que as soluções encontradas eram todas diferentes e encorajar os alunos a analisar pormenorizadamente as características de cada um dos números.

Tabela 7 - *Tabela semelhante à elaborada na aula com os pares de números descobertos*

93 + 39 = 132
48 + 84 = 132
66 + 66 = 132

Prof.: Estas adições são as que vós descobristes. Haverá apenas uma solução correta ou todas as que aqui estão referidas são verdadeiras?
António: São todas verdadeiras.
Prof.: Então porque é que existe mais do que um número se o Luís só pensou num?

Neste momento os alunos ficaram pensativos pois ainda não se tinham apercebido deste pormenor. Perante os números escritos no quadro tinham de encontrar a resposta à questão da professora investigadora, ou seja, por que razão existiam muitas soluções se o Luís só tinha pensado num número. Durante alguns minutos trocaram ideias com os colegas, de maneira a chegarem a alguma pista. O Tomás, a dado momento, perguntou *"professora, a solução do problema não pode ser vários números?".* De facto, a pergunta deste aluno era muito perspicaz uma vez que, realmente, o problema tinha um conjunto de números que eram a solução. Todavia, a professora investigadora pretendia que os alunos analisassem e investigassem essas soluções, por isso, deu indicações para o fazerem.

Prof.: O que acham da pergunta do Tomás?
Íris: Ele tem razão. O meu grupo encontrou duas soluções. E dão as duas. Por isso deve haver mais números.
Tomás: E todos esses números é que são a solução.
Prof.: Mas como é que sabemos se existem mais números ou se são só os que vós descobristes?
Tomás: Temos de investigar.
Prof.: Muito bem, então vamos lá todos investigar.

Cátia: Como é que fazemos isso, professora?
Prof.: Vamos, em conjunto, investigar os números que já descobrimos. Assim, podemos descobrir outras pistas.

A professora investigadora achou pertinente que esta investigação fosse feita em conjunto pois, exigia algum trabalho e auxílio, no sentido das características serem descobertas. Além disso, os momentos de discussão e de trabalho em grande grupo foram também importantes pois, através da comunicação das ideias matemáticas os alunos organizaram e clarificaram os seus pensamentos. A investigação seguiu com a análise dos números expressos no quadro, números esses que foram descobertos pelos alunos.

Prof.: Vamos olhar para estes números e tentar encontrar algumas características.
Tomás: O 93 e 39 são números ímpares e os outros [66, 48 e o 84] são pares.
Madalena: Então se o primeiro número for par o segundo também tem de ser.
Guilherme: E se for ímpar também tem de ser ímpar o segundo.
António: Mas no 59 são os dois números ímpares e 59 + 95 não dá 132.
Íris: O 62 + 26 também são todos pares. E não dá 132.
Prof.: Então já viram que não podemos dizer que se os números forem os dois pares ou ímpares, conseguimos obter o 132.
Tomás: Temos que ver outra coisa, então.
(…)
Prof.: Já viram que a característica dos pares e dos ímpares não dá. Por isso, tentem descobrir outra coisa. Vou dar uma pista, olhem para os números individualmente e não para as adições.
Madalena: Como, professora?
Artur: Assim, por exemplo, só para o 93, para o 48 e para o 66?
Prof.: Sim, isso mesmo. Olhem para esses três números e vejam as suas particularidades.

Depois de terem analisado algumas características dos números e de terem contestado a previsão feita primeiramente, sobre os números pares e ímpares, a professora investigadora decidiu ajudar os alunos na investigação, dando-lhes uma pista, de modo a instigá-los. O objetivo da pista era o de os animar, uma vez que os sinais de cansaço já começavam a manifestar-se.

Íris: Então os números são: 93, 48 e 66. Ó professora, 9 + 4 + 6 dá (…) dá 17. E 3 + 8 + 6 dá…oh já não é igual. Dá 19.
Tomás: E se for ao contrário?
Prof.: Ao contrário? O que queres dizer com isso?
Tomás: 9 + 3 é 12. 6 + 6 é 12 também.
Íris: 4 + 8 também é 12.
Tomás: Já descobrimos! Já descobrimos! Se fizermos a conta dos números…se…se…
Prof.: Adicionarmos.
Tomás: Isso, se adicionarmos os dois números de cada, dão todos 12.
Prof.: Acham que essa é a solução?
Íris: Sim, se os números derem 12 são os números que também dão 132.

Prof.: Calma, vamos ter de explicar isso muito bem e vamos ter ver se isso é verdade.

Os alunos descobriram uma particularidade dos números descobertos. Se os analisarmos individualmente e se adicionarmos os dois algarismos que os compõem a soma é sempre 12. Mediante a descoberta, a primeira reação por parte dos alunos, demonstrada através do comentário da Íris, foi assumir que para obtermos como soma o 132 temos de adicionar números constituídos por algarismos que quando adicionados deem 12. Para verificar se esse comentário estava correto e para demonstrar o que tinha sido referido a professora investigadora pediu então que mostrassem. De imediato, o Tomás, demonstrou uma atitude muito ativa pedindo aos colegas para delinearem um plano.

Tomás: Temos de ter um plano. Para provar o que a Íris disse temos de ver o que vamos fazer.
Madalena: Temos de ver se outros números que não dão 12, também não dão 132.
Íris: Antes temos de ver todos os números que dão 12.
Filipa: Já vimos que 9 + 3 e também 3 + 9 é 12.
Cátia: 6 + 6 também é 12.
Madalena: 4 + 8 e 8 + 4 é 12. Há mais números que deem 12?
Tomás: Então vamos ter de decompor o 12.
Prof.: Boa, vamos decompor o 12. Vamos escrever no quadro para que todos possam ver e acompanhar.

As decomposições do 12, em parcelas com um algarismo, foram realizadas no quadro. Foram transcritas as que já tinham sido referidas pelos alunos e introduzida uma nova decomposição, mostrando-se assim que esses números também eram solução do enunciado do problema.

Prof.: Já temos cinco decomposições, haverá mais alguma?
António: 5 + 8.
Artur: Não dá 12. Tem de ser 5 + 7, e dá 12.
Tomás: então 57 + 75 também dá 132. Espera, espera (...) sim dá mesmo 132.
Íris: Não há mais decomposições para o 12, professora.
Prof.: O que queres dizer com isso?
Íris: Que não há mais decomposições para o 12 com números sozinhos [com números com apenas um algarismo]
Prof.: Se não há mais decomposições do 12 em parcelas com um algarismo o que têm de fazer?
Tomás: Escrever a solução.
Madalena: Não, antes ainda temos de ver se outros números que não dão 12, também não dão 132.

Os alunos experimentaram vários contraexemplos e nenhum se verificou verdadeiro. Deste modo, partiram para a formalização da conclusão. Em grande grupo e com o auxílio da professora demonstraram então que, para obter 2 como algarismo das unidades, é necessário que a soma dos números correspondentes aos algarismos das unidades das parcelas seja 12. Constatando-se portanto que há sete soluções possíveis para o enunciado do problema. Além disso, concluíram também que o Ricardo não podia saber o número em que o Luís pensou, uma vez que havia sete números possíveis.

Dificuldades apresentadas

Nesta última tarefa proposta as dificuldades emergidas foram menores do que as apresentadas nas tarefas anteriores.

No que diz respeito às dificuldades de resolução salienta-se o facto de os alunos não estarem acostumados a realizar atividades com recurso ao método de tentativa e erro. Alguns grupos, inicialmente, demonstraram não estar muito à vontade, pois não sabiam quando tinham de parar com as tentativas. Além disso evidenciaram-se também algumas dificuldades em estabelecer planos e estratégias para chegarem à solução pretendida. Pois, alguns alunos queriam resolver o problema sem o recurso a um planeamento de uma estratégia. Depois perceberam que tal processo não era viável, uma vez que na fase final toda a turma se organizou para procurarem uma solução. Nesta fase de intervenção as tarefas apresentadas deixaram de demonstrar ser uma dificuldade, uma vez que os alunos foram aceitando as suas particularidades e os processos inerentes às suas resoluções, nomeadamente de exploração, de comunicação e explicitação dos raciocínios matemáticos.

Em relação às dificuldades apresentadas na explicitação do raciocínio apenas foi realçada a dificuldade em explicitar os raciocínios e as ideias matemáticas através de texto ou representações. Numa análise às folhas de respostas dos alunos verificou-se que os raciocínios não estavam expressos e que as ideias contidas nelas estavam todas desordenadas. Ainda, as estratégias de resolução que a professora investigadora solicitou que registassem, ao longo da aula, também não estavam coerentes, relativamente ao que os alunos tinham mencionado oralmente.

Em oposição, a explicitação do raciocínio oral foi evoluindo ao longo do período de intervenção, pois percebeu-se que o discurso dos alunos estava mais rico e organizado. Além disso, estes começaram a utilizar a explicitação do raciocínio matemático, nas aulas, como instrumento de justificação de ideias e perspetivas. Alguns alunos começaram a comentar os seus raciocínios e também das suas ideias matemáticas por iniciativa própria.

4.2. Síntese global e evolução da explicitação do raciocínio matemático

Nesta subsecção, será realizada uma análise comparativa da sequência de tarefas apresentada durante o presente estudo, relativamente à categoria de análise: dificuldades apresentadas ao longo da resolução das tarefas e da explicitação do raciocínio. Esta tem como propósito o cruzamento dos dados obtidos nos diferentes momentos da experiência e pretende estar de acordo com o objetivo e as questões de investigação deste estudo. Além disso, será também realizada uma análise à evolução da capacidade de explicitação dos raciocínios dos alunos da turma.

O cruzamento de dados obtidos, a partir da análise dos trabalhos desenvolvidos individualmente e em grupo, das discussões em grande grupo, das produções dos alunos e da respetiva ficha de reflexão, sobre o trabalho realizado ao longo da intervenção, permitiu reparar que os resultados alcançados tinham aspetos comuns, no que se refere ao desenvolvimento da capacidade de explicitação dos raciocínios dos alunos da turma em estudo. Além disso, permitiu também evidenciar a evolução dessa capacidade ao longo de toda a experiência.

Durante a implementação da sequência de tarefas, verificou-se que os alunos foram sentindo, progressivamente a necessidade de explicitar os seus raciocínios e as suas ideias, encontrando para tal justificações válidas e coerentes. Na primeira tarefa, constatou-se que ainda não apresentavam grande facilidade em explicitar os raciocínios relativamente a cada um dos resultados obtidos, no decorrer da mesma. Este facto foi mais evidente nas primeiras tarefas realizadas pois o discurso era menos rico em termos de argumentação e estes não sentiam a necessidade de fundamentar os seus raciocínios. Ao longo das restantes tarefas apresentadas à turma verificou-se que os alunos já demonstravam algum cuidado em apresentar os raciocínios, quer na discussão em pequeno e em grande grupo, quer na resolução dos problemas, explicitando todos os raciocínios desenvolvidos, ideias e estratégias formuladas e rejeitadas.

As normas instituídas pela professora investigadora ao nível do trabalho de grupo foram compreendidas, uma vez que os grupos de trabalho, na generalidade, funcionaram bem. Primeiramente os alunos sentiam a necessidade de se dirigirem à professora investigadora em vez de falarem para todos e não havia uma verdadeira interação entre os restantes colegas. Todavia, estes aspetos foram melhorando e colmatados até ao final do estudo.

Para alguns alunos o trabalho colaborativo foi fundamental neste processo de aprendizagem pois, passaram a desempenhar um papel mais ativo durante a atividade matemática. Até à implementação deste projeto, esta metodologia de trabalho não tinha sido abordada na sala de aula e, por isso, os alunos não estavam habituados a trabalhar em grupo. Com efeito, alguns beneficiaram bastante com esta pedagogia adotada, como é o caso da Magda, da Sónia, do Dinis e do Bruno. No período de observação foi notória a dificuldade, destes alunos, de interagir com a turma nos momentos de discussão e de partilha de ideias. Assumiam uma atitude muito passiva e não participavam ativamente nas aulas. Além disso, quando tinham dificuldades em algum conteúdo sentiam complexos em admitir e em pedir ajuda à professora. Estas dificuldades foram sendo retificadas ao longo da implementação deste projeto. Na tarefa "O truque do Ricardo" o dinamismo dos alunos referidos foi notório, sendo que participaram sem receito e foram dando as suas opiniões.

Ao longo da realização das tarefas apresentadas foram surgindo algumas dificuldades que se salientaram ao longo de toda a intervenção. Alguns alunos evidenciaram algumas limitações na explicitação escrita dos raciocínios enquanto outros apresentaram algumas dificuldades na explicitação oral. Evidenciou-se, também, o facto de alguns alunos, como o caso do Diogo, sentirem num primeiro momento dificuldade em explicitar os seus raciocínios quer através da escrita quer oralmente. Outros, como é o caso do Guilherme evidenciaram a falta de explicitação escrita do raciocínio sendo que a explicitação oral esteve presente sem complicações. Na maioria dos alunos da turma a dificuldade era explicitar oralmente os raciocínios, pois sentiam-se pressionados. A maior parte deles tinha medo de errar, associando que a explicitação do raciocínio matemático estava relacionado com as perguntas que a professora titular colocava ao longo das suas aulas. Deste modo tinham medo de errar e sentiam vergonha. Devido a esse receio, numa fase inicial foi difícil implementar o projeto, uma vez que os alunos mostravam-se reticentes a explicitar os raciocínios.

Na primeira tarefa analisada os alunos não demonstraram dificuldades ao longo da sua resolução. Pelo contrário, no que diz respeito à explicitação foram verificadas algumas limitações, nomeadamente ao nível da comunicação. Logo, demonstraram-se dificuldades de explicitação do raciocínio matemático oral e algumas de explicação escrita. Na segunda tarefa, esta já de investigação, continuou a verificar-se alguns obstáculos relativos à explicitação escrita do raciocínio. Todavia, verificou-se uma melhoria significativa em relação à explicitação do raciocínio matemático realizado oralmente, uma vez que os alunos já se mostravam mais disponíveis para tal. Na terceira e última tarefa, as dificuldades ao nível da explicitação oral mostraram-se muito diminuídas. Persistindo apenas, ainda que menos significativa a dificuldade em explicitar os raciocínios através da escrita.

Ao longo da análise e apresentação dos resultados salientou-se uma caso particular, o da Íris, a única aluna que desde as primeiras atividades não demonstrou hesitação em explicitar oralmente as suas ações. Na primeira tarefa apresentada foi respondendo às questões da professora investigadora, mesmo quando não era questionada diretamente, e ao longo de todas as outras tarefas realizadas foi mantendo sempre uma atitude muito ativa.

Com a implementação deste projeto verificou-se, então, uma evolução dos alunos na capacidade de explicitar os raciocínios, pois foram elucidando todas as suas ideias, muitas vezes voluntariamente, o que antes isso não se verificava. Demonstraram, portanto, uma atitude mais ativa no que fiz respeito à explicitação dos raciocínios nas últimas tarefas e, o medo e a vergonha de falar foram superados.

Relativamente à natureza dos raciocínios os alunos sobressaíram-se, na fase de exploração, os raciocínios indutivos. Isto pode estar relacionado com o facto de, nestes raciocínios, os alunos partirem dos casos particulares do problema para encontrarem regras gerais, ou seja, os alunos utilizaram todo o seu conhecimento e o que sabiam do problema para concluírem o desconhecido.

Por fim, em relação à evolução dos alunos na sua capacidade de explicitar os raciocínios matemáticos é possível evidenciar-se a mesma evolução referida em cima. Inicialmente os alunos demonstraram muitas dificuldades em explicitar os seus raciocínios mas com o trabalho desenvolvido muitas delas foram colmatadas. Os alunos ao longo do período de intervenção foram demonstrando a evolução através dos raciocínios explicitados, pois eram mais ricos e fundamentados. Além disso, quando algum colega não considerava nem apoiava o que o outro dizia, automaticamente justificavam os seus pontos de vista. E ainda, como referido anteriormente, já não esperavam que fosse a professora investigadora a questioná-los, começaram a demonstrar autonomia na explicitação.

Para reverificar se estavam conscientes dessa mesma evolução a professora investigadora elaborou uma pequena ficha de reflexão onde os alunos examinaram o trabalho desenvolvido ao longo do projeto de intervenção e justificaram se foi benéfico para a sua aprendizagem. As respostas obtidas foram bastante esclarecedoras, uma vez que todos admitiram terem progredido relativamente a esta capacidade.

Os alunos testemunharam a sua evolução através das respostas à ficha de reflexão. Como esclarecimento à questão, *Ao longo das aulas de matemática pedimos para que explicasses como pensaste para resolveres os problemas. Achas que isso foi importante para a tua* *aprendizagem? Porquê?,* todos os alunos responderam afirmativamente considerando que o trabalho realizado foi muito importante para a aprendizagem pois ajudou-os a esclarecer os problemas e a clarificar os pensamentos. Como exemplo dessas opiniões apresentam-se respostas de alguns alunos que revelam o que foi referido: "sim, foi importante para a minha aprendizagem eliminou-me as dúvidas e ajudou-me a explicar o meu raciocínio." (António); "foi importante para clarificar melhor o pensamento" (Tomás); "sim, ajudou a desenvolver o nosso pensamento" (Guilherme); "porque assim percebia melhor o problema" (Íris); "sim, foi importante para a minha aprendizagem porque isto ajudou-nos a perceber melhor os problemas e a ver se estava mal" (Diogo). Salienta-se que o Diogo foi o aluno que, inicialmente, apresentou mais dificuldades na explicitação do raciocínio. Como resposta à mesma pergunta a Magda relata que a experiência foi importante para a sua aprendizagem e ao mesmo tempo evidencia também o trabalho colaborativo dizendo que isso também foi importante "(...) foi muito importante porque quando os outros meninos e meninas não percebiam eu e a professora ajudávamos e quando eu não percebia as professoras e os meninos e meninas também ajudavam".

Notoriamente o Miguel salientou que o trabalho desenvolvido na aula foi importante pois colmatou as dificuldades que sentia "foi importante para quando escrever as minhas ideias para conseguir escrever os pensamentos". Através desta resposta é evidente que foi colmatada uma dificuldade sentida pelo aluno.

Relativamente à questão *Depois das nossas aulas já és capaz de explicar melhor às professoras e aos colegas a forma como pensaste para resolver um determinado problema? Porquê?* a turma também respondeu afirmativamente justificando que com a ajuda do trabalho desenvolvido para a explicitação do raciocínio já se sentem mais capazes. As suas respostas são reveladoras do mencionado: "a ajuda das professoras ajudaram imenso porque fazíamos muitos problemas" (Íris); "ajudaram-me a explicar" (Sónia); "sim, já sou capaz de explicar melhor às professoras e aos colegas como pensei" (Mariana).

Com estes testemunhos percebe-se que o trabalho realizado para desenvolver a explicitação do raciocínio matemático foi importante porque, tanto ajudou na compreensão global de conceitos, como também em aspetos mais particulares como a compreensão do problema e a colmatação de dificuldade de explicitação do raciocínio escrito. Com efeito, a comunicação foi uma capacidade e um instrumento fundamental neste processo.

Concluo assim que, o balanço das minhas intervenções é positivo e que o objetivo central deste estudo de desenvolver a explicitação do raciocínio ao longo de uma sequência de tarefas foi conseguido. Porém, é ainda importante salientar que as tarefas realizadas ao longo de todo o projeto de intervenção são insuficientes para que os alunos aprendam a raciocinar consistentemente. Não obstante, ao experimentarem descobrir a matemática estão a envolver o raciocínio.

CAPÍTULO V

CONCLUSÃO

Este capítulo está organizado em quatro subsecções. Na primeira é efetuada uma síntese do trabalho desenvolvido, focando os objetivos do estudo, as questões de investigação que lhe estão subjacentes assim como a metodologia adotada. Na segunda subsecção são apresentadas as conclusões e a discussão dos resultados. Na terceira subsecção, são expostas as limitações do estudo. Por último, na quarta subsecção são apresentadas algumas sugestões para futuras investigações.

5.1. Síntese do estudo

O presente estudo teve como objetivo compreender o desenvolvimento da explicitação do raciocínio em matemática de alunos do Ensino Básico, ao longo da implementação de uma sequência de tarefas. A partir deste objetivo, esta experiência procurou dar respostas às seguintes questões de investigação:

i) Quais as dificuldades com que os alunos se depararam na resolução das tarefas e na explicitação do raciocínio?

ii) Como é que os alunos evoluíram ao longo da intervenção pedagógica na sua capacidade de explicitar os seus raciocínios?

A sequência de tarefas foi elaborada pela professora investigadora com o intuito de que cada uma delas estivesse adequada ao nível cognitivo dos alunos e que os desafiasse intelectualmente.

Considerando o objetivo do presente estudo e as respetivas questões de investigação, adotou-se uma metodologia de investigação-ação de cariz qualitativo. Com o intuito de efetuar uma análise detalhada de todos os dados deste estudo foram adotadas diferentes técnicas de recolha de dados: observação participante com o apoio de gravações áudio e vídeo, registos escritos em forma de diários da professora investigadora, produções dos alunos ao longo das aulas e uma ficha de reflexão, realizada no final da intervenção.

Neste estudo, a análise de dados foi realizada ao longo de todo o processo de investigação e de acordo com as categorias de análise previamente elaboradas pela professora investigadora, nomeadamente: as dificuldades apresentadas pelos alunos, quer na resolução das tarefas propostas, quer na explicitação dos raciocínios e, também, a evolução deles na sua capacidade de explicitar os raciocínios matemáticos. Estas categorias foram analisadas no contexto de trabalho individual e de grupo, nas discussões com toda a turma, nas produções dos alunos e na ficha de reflexão.

5.2. Conclusões dos resultados obtidos

Nesta subsecção, são apresentadas as principais conclusões da experiência efetuada com os alunos 2.º ano e estabelecem-se algumas conexões com trabalhos desenvolvidos por outros autores, que foram relatados nos capítulos iniciais deste relatório. Para melhor se perceber o desenvolvimento da capacidade de explicitar o raciocínio matemático, ao longo da realização da sequência de tarefas, a professora investigadora apresenta, de seguida, as conclusões deste estudo, de acordo com as categorias de análise consideradas.

Ao longo do projeto de intervenção desenvolvido, foram realizadas algumas mudanças nas aulas, da turma em estudo, nomeadamente a sua estrutura, as práticas letivas e a organização do espaço. Com efeito, os alunos foram apoiados pela professora investigadora em relação aos fatores psicológicos, defendidos por Mason et al. (1985), envolvidos nos processos de mudança na aula de matemática. Assim, as mudanças necessárias na aula de matemática foram conseguidas, através da explicação, aos alunos, das razões didáticas que presidiram à experiência em curso.

Antes da implementação deste projeto, os alunos não estavam habituados a investigar e, por isso, esta experiência colocou-os, pela primeira vez, no papel de investigadores. Para investigar tiveram de ultrapassar o obstáculo de descodificação do enunciado das tarefas propostas e de experimentar estratégias desenvolvidos em grupo. Estas últimas possibilitaram uma aprendizagem cooperativa, pois foram proporcionadas inúmeras oportunidades para a formulação e discussão de conjeturas e de estratégias de resolução de problemas, à semelhança do que defendem Matos e Serrazina (1996) nas suas investigações. Do mesmo modo que o estudo realizado por Ponte (2005), nesta investigação, os alunos, com este novo papel, tiveram a oportunidade de desenvolver a sua experiência matemática e a sua autonomia.

Em todas as tarefas iniciou-se o trabalho pela discussão do enunciado e trocaram-se ideias sobre o que se pretendia, esclarecendo os conceitos necessários à compreensão da mesma. Esta etapa é muito importante e corresponde à *entrada* na designação de Mason et al. (1985), fase em que os alunos se apropriam da situação com a qual estão confrontados.

Constatou-se então que, quando os alunos não fazem esta primeira abordagem de esclarecimento das ideias subjacentes, o trabalho fica comprometido. Um exemplo deste facto aconteceu com o grupo Sol, na realização da tarefa 17 "O truque do Ricardo", uma vez que quando foram confrontados com ela colocaram de parte os momentos de partilha de ideias e de apropriação do seu significado, avançando, de imediato, para a descoberta da solução do problema. Consequentemente, o tempo disponibilizado para a sua resolução foi decorrendo e os alunos não conseguiram avançar. Nesse momento, a professora investigadora teve de intervir e solicitar que, antes de resolverem o problema, discutissem as ideias de todos os alunos e delineassem um plano de ação.

Após a compreensão dos significados dos problemas, os alunos passaram à sua exploração, iniciando-se, então, *o ataque*, fase que depende dos processos de conjeturar e justificar, como referem Mason et al. (1985). Finalmente, depois de obtidas todas as conclusões realizaram-se, em todas as tarefas, momentos de discussão e de verificação do trabalho realizado, ou seja, os alunos reviram toda a atividade que haviam desenvolvido, como descrevem Mason et al. (1985) quando se referem à etapa de *revisão*.

Em resposta à questão formulada *"Quais as dificuldades com que os alunos se depararam na resolução das tarefas e na explicitação do raciocínio?"* conclui-se que as dificuldades inerentes à explicitação do raciocínio matemático relacionam-se com a transcrição dos raciocínios para a folha de respostas, ou seja, dificuldades em representá-los através da escrita. Além disso, uma outra complicação inicialmente revelada, mas que, numa fase final, foi colmatada, relacionou-se com a capacidade de explicitar oralmente os raciocínios e as ideias matemáticas. Com o desenvolvimento do estudo percebeu-se que esta lacuna foi retificada devido ao trabalho realizado. Inicialmente os alunos sentiam medo e vergonha de expor as suas ideias e os seus raciocínios. Por isso, a professora investigadora adotou nas suas práticas um conjunto de estratégias para construir um ambiente de aprendizagem, onde estes se sentissem confiantes e onde as suas capacidades fossem tidas em conta, de maneira a que se sentissem mais confortáveis e, assim, dispostos a colaborar com as aulas. Pois, tal como refere Barbosa (1999) no seu estudo, é importante que na sala de aula os alunos se sintam seguros, uma vez que só assim ocorre a aprendizagem.

De igual modo, a lacuna existente no que se refere à explicitação oral do raciocínio matemático também foi ultrapassada pois a professora investigadora preocupou-se em desenvolver inúmeros momentos de discussão para, assim, os alunos explicarem aos colegas os seus raciocínios. Como referem Lannin et al. (2011), numa das suas análises, os momentos de discussão, onde ocorra a interpretação e a atribuição de sentido às produções e comentários dos alunos, promovem o desenvolvimento do raciocínio.

Relativamente à outra questão de investigação *"Como é que os alunos evoluíram ao longo da intervenção pedagógica na sua capacidade de explicitar os seus raciocínios"* conclui-se que a turma toda desenvolveu esta capacidade e que evoluiu na explicitação dos raciocínios. Inicialmente as suas justificações eram muito sucintas e os discursos usados não eram elaborados. Este facto foi arduamente trabalho, ao longo das aulas, e, na fase final, as explicitações evidenciaram-se mais ricas e pormenorizadas. Além disso, os alunos já o faziam autonomamente, sem que a professora investigadora o solicitasse. Em conformidade com o que refere Martinho (2011) na sua investigação, através das oportunidades criadas para que o aluno comunique os seus pensamentos e os seus raciocínios, é proporcionado o desenvolvimento, quer nos conhecimentos propriamente ditos, quer no próprio vocabulário. Deste modo, esta evolução desencadeou-se devido aos ambientes proporcionados, com uma constante solicitação da explicitação dos raciocínios. Com isto, percebe-se que os alunos são capazes de raciocinar matematicamente, desde os primeiros anos de escolaridade, desde que, para tal, sejam criadas condições apropriadas, como também referem Boavida et al. (2008).

Refletindo ainda, sobre toda a investigação e revendo todos os aspetos da mesma, a professora investigadora constata também, que os alunos, de acordo com a natureza dos raciocínios matemáticos, seguiram o método indutivo. À semelhança do que menciona Polya (1954), também os alunos desta turma começaram a resolução das tarefas pela observação, sendo que, a partir desta, construíram ideias para serem testadas.

Por tudo aquilo que foi dito, com este estudo percebeu-se que os alunos desenvolveram a capacidade de explicitar os seus raciocínios, seguindo os padrões de raciocínio identificados na educação matemática, justificando as suas posições. Além disso, perante os resultados obtidos conclui-se que, a aprendizagem cooperativa ajudou a desenvolver, na turma, a capacidade de raciocinar e de explicitar os seus raciocínios.

Em suma, como futura professora, esta experiência proporcionou uma aprendizagem e uma reflexão profunda sobre as próprias aulas. A preocupação do desenvolvimento do raciocínio matemático na aula de matemática fez emergir a estrutura da matemática e, consequentemente, a compreensão da mesma. A professora constatou ter sito um grande desafio compreender e orientar os raciocínios dos alunos, assim como gerir e promover as discussões na aula de matemática.

5.3. Limitações do estudo

Ao longo desta experiência as limitações que senti referem-se ao tempo estabelecido para o desenvolvimento do projeto de intervenção. A professora cooperante forneceu uma grande disponibilidade de tempo para a intervenção pedagógica. Todavia, devido à dimensão do tema selecionado, considera-se que se houvesse um período mais alargado para a implementação do projeto, por exemplo durante todo o ano escolar, os resultados obtidos seriam mais consistentes.

5.4. Futuras investigações

Com este estudo a professora investigadora pretendeu contribuir para uma melhor compreensão da forma como os alunos desenvolvem a sua capacidade de explicitar os raciocínios em matemática, ao longo da exploração de uma sequência de tarefas. A professora investigadora pretende também sensibilizar a comunidade científica relativamente à necessidade de alteração do currículo do Ensino Básico, de modo a que se conceda, na sala de aula, um lugar de destaque à importância de incentivar os alunos a desenvolver a sua capacidade de explicitação, devido a estar intimamente relacionada com a capacidade de raciocinar matematicamente.

Em Portugal, são poucas as investigações que se debruçam sobre o raciocínio, principalmente no 1.º Ciclo do Ensino Básico. Este estudo suscita então, novas propostas de trabalho e de investigação. De forma particular, revela-se necessária a existência de mais investigações em torno do desenvolvimento da capacidade dos alunos raciocinarem em matemática, em diferentes momentos da aula, nomeadamente, durante a implementação de diferentes tipos de tarefas e em diferentes temas do programa do Ensino Básico. Além disso, revela-se, também, necessária a existência de mais estudos relativos às representações dos alunos, na resolução de problemas, pois é através delas que se acede diretamente ao raciocínio matemático dos alunos. Com efeito, estes trabalhos de investigação poderiam ser mais direcionados para ajudar a compreender como é que os alunos raciocinam e quais são os argumentos que apresentam relativamente ao que pensam.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Aliseda, A. (2003). Mathematical reasoning vs. Abductive reasoning: A strutural approach. *Synthese*, *134*, 25-44.

Arends, R. I. (2008). *Aprender a ensinar* (7.ª ed.). Espanha: McGraw-Hill.

Balacheff, N. (1988). *Une etude des processus de prevue en mathématique chez des élèves de collège*. Thèse d'état. Grenoble: Université Joseph Fourier.

Ball, D., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles ans standards for school Mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: NCTM.

Barbosa, M. (1999). Para construir uma nova utilidade da escola: educar para a autonomia e preparar para a cidadania. In M. Barbosa (Org.), *Olhares sobre educação, autonomia e cidadania.* Braga: Centro de Estudos em Educação e Psicologia, Instituto de Educação e Psicologia, Universidade do Minho.

Barrody, A. (1993). *Problem solving, reasoning, and communicating K-8: Helping children think mathematically.* New York: Macmillan.

Boavida, A. M. R. (2008). Raciocinar para aprender e aprender a raciocinar. *Educação e Matemática*, *100*, 1.

Boavida, A. M. R., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico: Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education, 15* (1), 35-49.

Cai, J. (2010). Helping elementary school students become successful mathematical problem solvers. In D. Lambbin & F. Lester (Eds.), *Teaching and learning mathematics: Translating research for elementary school teachers* (pp. 9-14). Reston, VA: NCTM.

Canavarro, A. P., & Pinto, M. E. (2012). O raciocínio matemático aos seis anos: Características e funções das representações dos alunos. *Quadrante*, *21*(2), 51-79.

Christiansen, B., & Walter, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspetives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Cohen, L., & Manion, L. (1994). *Research Methods in Education.* London: Routledge.

Coll, C. (1991). *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento*. 2.ª ed. Barcelona: Ediciones Paidos.

Cuoco, A. (2003). Mathematical habits of mind. In H. Schoen (Ed.), *Teaching mathematics through problem solving: Grades 6-12* (pp. 27-37). Reston, VA: NCTM.

De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with sketchpad. In M. D. Villiers, *Rethinking Proof with Sketchpad.* USA: Key Curriculum Press.

Dewey, J. (1910). *How we think*. New York: Dover Publications, Inc.

Domingues, C. (2011). *Desenvolvimento do raciocínio matemático: Uma experiência com uma turma de 9.º ano.* Dissertação de Mestrado, Instituto de Educação, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall. (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-39). Dordrecht. Kluwer.

Duval, R. (1999). Questioning Argumentation. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.* Retirado em 28 de março de 2014 de http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeUK.html.

Elliott, J. (1991). *Action research for educational change*. Milton Keynes: Open University Press.

Hanna, G., & Barbeau, E. (2010). Proof as bearers of mathematical knowledge. In G. Hanna (Ed.), H. N. Jahnke & H. Pulte, *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 85-100). London: Springer.

Hanna, G., & Jahnke, H. (1996). Proof and Prooving. In A. Bishop (Ed.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877-908). Netherlands: Kluwer Academic Press.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and the Teaching of Proof. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805-842). USA: NCTM.

Hersh, R. (1999). W*hat is mathematics, really?* Oxford: Oxford University Press.

Hiebert, J. (1992). Reflection and communication: Cognitive considerations in school mathematics reform. In W. Secada (Ed.), *Interntional Journal of Educational Research* (pp. 439-456). Oxford: Pergamon Press.

Kemmis, S., & McTaggart, R. (1992). *Cómo Planificar la Investigación Acción*. Barcelona: Editorial Laertes.

Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. In P. Cobb (Ed.), H. Bauersfeld, *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lakatos, I. (1999). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery.* United States of America: Bembo.

Lampert, M., & Cobb. P. (2003). Communication and language. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Shifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 237-249). Reston, VA: NCTM.

Lannin, J., Ellis, A.B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Latorre, A. (2003). *La investigación-acción. Conocer y cambiar la prática educativa*. Barcelona: Editorial Graó.

Love, E. (1996). Avaliando a atividade matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 89-115). Lisboa: Projeto MPT e APM.

Martinho, M. H., & Ponte, J. P. (2005). A comunicação na sala de aula de matemática: Um campo de desenvolvimento profissional do professor. *CIBEM – Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 1-11), Porto.

Martinho, M. H. (2011). *A comunicação na sala de aula de matemática: Um projeto colaborativo com três professoras do ensino básico.* Braga: Universidade do Minho, Instituto de Educação.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1985). *Thinking Mathematically*. London: Addison-Wesley Publishing Company.

Mason, J. (1998). Resolução de problemas no Reino Unido: Problemas abertos, fechados e exploratórios. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Edits.), *Investigar para aprender Matemática: Textos selecionados* (pp. 107-115). Lisboa: Projeto MPT e APM.

Mason, J., & Houssart, J. (2000). Arithmogons: A case study in locating the mathematics in tasks. *Primary Teaching Studies, 11*(2), 34-42.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2011). Raciocínio matemático em contexto algébrico: uma análise com alunos do 9.° ano. In M. H. Martinho, R. A. Tomás Ferreira, I. Vale & J. P. Ponte (Eds.), *Encontro de Investigação em Educação Matemática: Ensino e aprendizagem da álgebra* (pp. 347-364). Póvoa de Varzim: SPIEM.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: uma investigação no 3.° ciclo. *Quadrante*, *21*(2), 81-110.

Matos, J., & Serrazina, M. (1996). *Didática da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Máximo-Esteves, L. (2008). *Visão panorâmica da investigação-acção*. Porto: Porto Editora.

Maxwell, J. (1996). *Qualitative Research Design*: *An Interactive Approach*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

ME (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

MEC (2013). *Programa de matemática para o ensino básico*. Lisboa: MEC-DGIDC.

McMillan, J., & Schumacher, S. (2001). *Research in Education: A Conceptual Introduction*. New York: Longman.

Nápoles, S. M. (Ed.). (2000). *A Matemática na Antiguidade: Texto baseado em notas das lições de "História do Pensamento Matemático" do Professor José Sebastião e Silva.* Lisboa: SPM.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM

NCTM (2009). *Focus in high school mathematics: reasoning and sense making*. Reston, VA: NCTM.

Oliveira, P. (2002). A aula de matemática como espaço epistemológico forte. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.), *Atividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 25-40). Coimbra: SPIEM

Oliveira, P. (2002). *A investigação do professor, do matemático e do aluno: Uma discussão epistemológica*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática*, *100*, 3-9.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Patterns of plausible inference.* Vol. 2. New Jersey: Princeton University Press.

Polya, G. (1968). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and Analogy in Mathematics (Vol. I).* New Jersey: Princeton University Press.

Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas*. (Tradução do original inglês de 1887). Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P., & Santos, L. (1998). Práticas letivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante, 7*(1), 3-32.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Educação Matemática, 100,* 89-96.

Ponte, J. P., Nunes, C. C., & Quaresma, M. (2012). Explorar, investigar, interagir na aula de Matemática: Elementos fundamentais para a aprendizagem. In A. C. Silva, M. Carvalho & R.G. Rêgo (Eds.), *Ensinar Matemática: Formação, investigação e práticas docentes* (pp. 49-74). Cuiabá: UFMT.

Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics education: Research, learning and teaching.* Netherlands: Sense Publishers.

Rivera, F., & Becker, J. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teacher in the Middle School*, *15*(4), 213-221.

Russel, S. (1999). Mathematical reasoning in the elementar grades. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 1-12). Reston, VA: NCTM

Serrazina, L., Canavarro, A. P., Guerreiro, A., Rocha, I., & Portela, J. (2011). O programa de formação contínua em matemática: Contributos da investigação. In C. Nunes, A. C. Henriques, A. Caseiro, A. I. Silvestre, H. Pinto, H. Jacinto, J. P. Ponte (Orgs.), *Atas do Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 1-14). Lisboa: APM.

Schoenfeld, A. (2009). Series Editor's Foreword: the Soul of Mathematics. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton & E. J. Knuth, *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K– 16 Perspective* (pp. xii-xviii). New York: Routledge.

Schoenfeld, A. (1992). Learning To Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research On Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillian.

Spradley, J. (1980). *Participant observation*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Stein, M. K. (2001). Mathematical argumentation: Putting umph into classroom discussions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *7*(2), 110-112.

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(3), 314-352.

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematics Thinking and Learning, 10*(2), 103-133.

Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Knuth, E. J. (Edits.). (2009). *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K– 16 Perspective.* New York: Routledge.

Tall, D. (1999). The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof for all or for some? In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in school Mathematics Education around the World* (pp. 117-136, vol.4). Reston, Virginia: NCTM.

Watson, A., & Mason, J. (2008). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples.* New York: Routledge.

Whitenackm, J., & Yackel, J. (2008). Construindo argumentações matemáticas nos primeiros anos: A importância de explicar e justificar ideias. *Educação e Matemática*, *100*, 85-88.

Wolcott, H. (1994). *Transforming Qualitative Data: Description, Analysis, and Interpretation*. Thousand Oaks: SAGE.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227-236). Reston, VA: NCTM.

ANEXOS

Anexo 1 - Pedido de autorização

Somos estagiárias da Universidade do Minho e estamos a desenvolver um projeto na área da matemática que envolve a resolução de problemas e a explicitação do raciocínio matemático. Pretendemos então, realizar um estudo sobre a forma como os alunos resolvem problemas e comunicam as suas ideias matemáticas, bem como, analisar a evolução destes aspetos.

Com efeito, vimos por este meio, solicitar a autorização dos encarregados de educação para a gravação áudio e vídeo das próximas intervenções. O objetivo das gravações é perceber quais as dificuldades com que os alunos se deparam na resolução de problemas e na comunicação matemática, as estratégias que empregam no decorrer das tarefas e ainda, analisar a evolução dos alunos ao longo das intervenções.

Importa ainda salientar que todas as gravações serão sujeitas ao princípio da confidencialidade, sendo apenas para uso exclusivo das estagiárias no âmbito da análise do estudo.

Eu, encarregado de educação do(a) aluno(a) ______________________________ ______________________________ AUTORIZO/NÃO AUTORIZO a gravação das intervenções.

O Encarregado de Educação

____

Anexo 2 – Tarefas do 1.º Ciclo

Tarefa 1 - Quem sou eu?

31 Descobre:

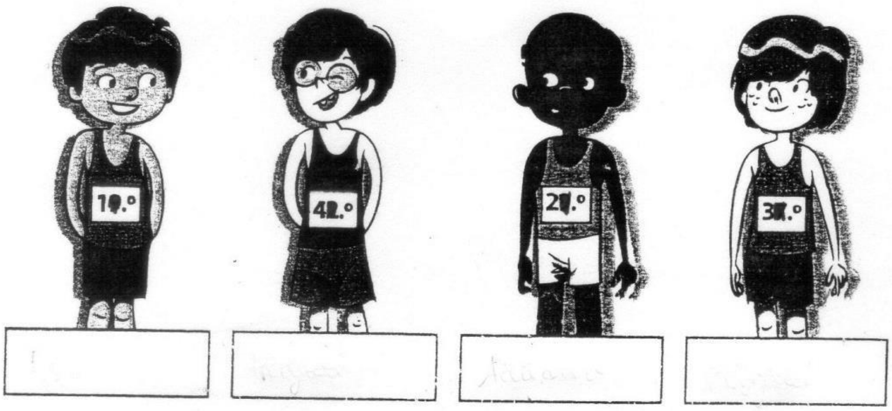
- sou a última letra da palavra BRUXA.
- sou a primeira letra da palavra MATEMÁTICA.
- que lugar ocupa a letra R na palavra IRMÃO?
- fico no meio da palavra UVA.
- a letra L que lugar ocupa na palavra PORTUGAL?
- sou o 5.º mês do ano.
- sou o primeiro dia da semana.
- sou o primeiro mês do ano.

Tarefa 2 - Prova de atletismo

25 **Realizou-se uma prova de atletismo. Na chegada à meta, os quatro primeiros chegaram na seguinte ordem:**

- **o Rui chegou antes do Adriano;**
- **o Pedro chegou depois do Miguel;**
- **o Adriano chegou à frente do Miguel.**

Escreve os nomes dos quatro atletas por ordem de chegada.

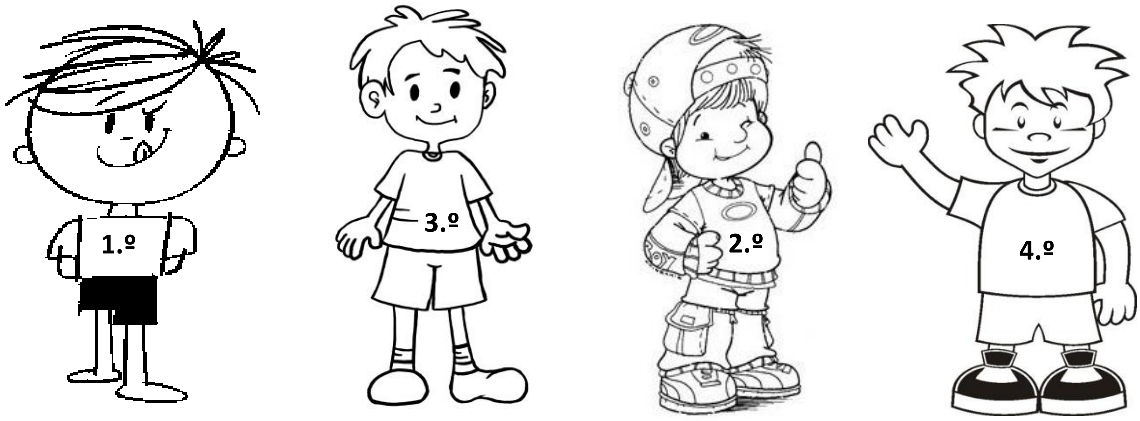


Tarefa 3 - Concurso de leitura

Realizou-se um concurso de leitura. Na sala de aula os alunos elegeram os quatro leitores da turma:

- **O Adriano ficou depois do Miguel;**
- **O Rui ficou antes do Pedro;**
- **O Miguel ficou atrás do Pedro.**

Escreve o nome dos quatro leitores por ordem de eleição. Explica como pensaste.

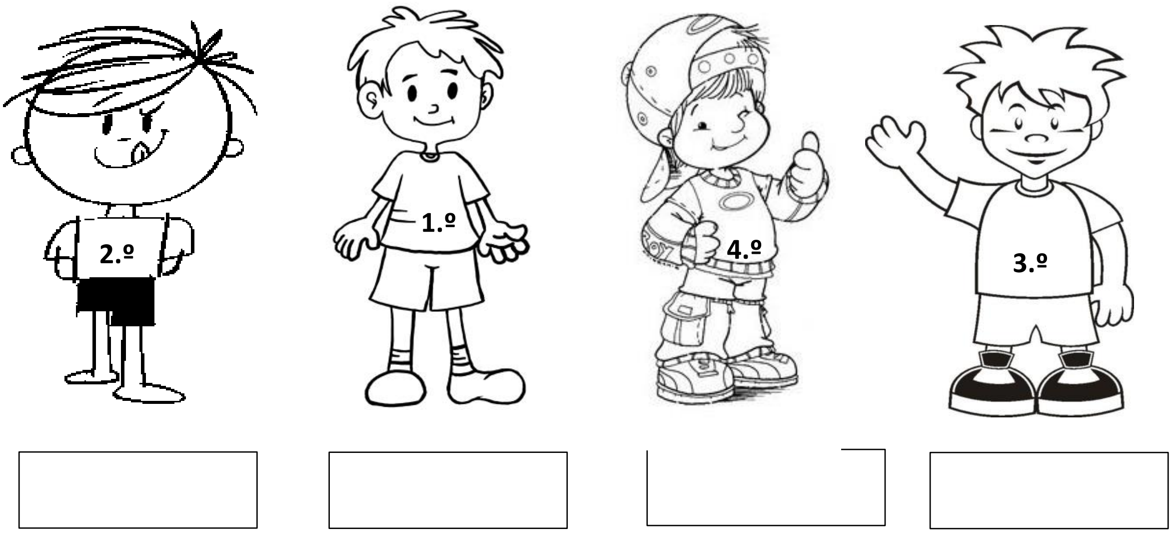


Tarefa 4 – Ficha de avaliação

Realizou-se uma ficha de avaliação de matemática. Os quatro primeiros alunos terminaram-na na seguinte ordem:

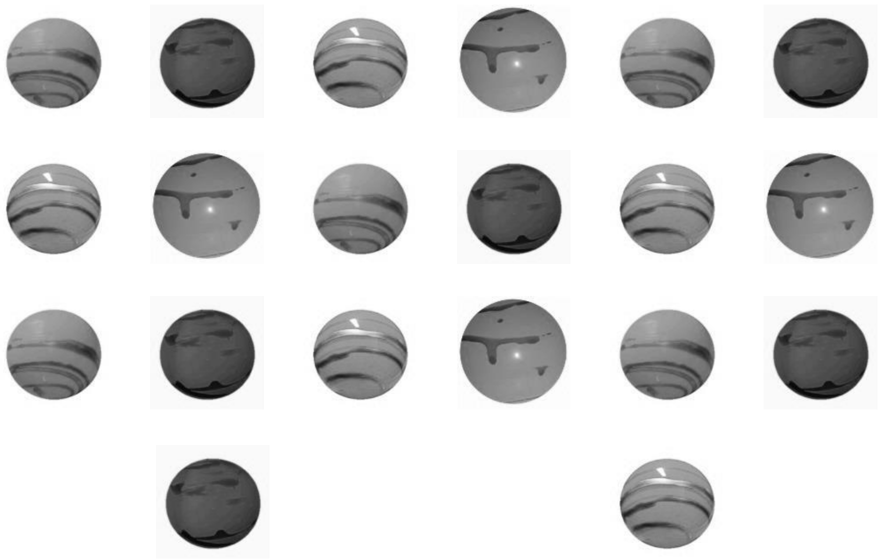
- **O Diogo terminou antes do Luís;**
- **O Bruno terminou depois do Martim;**
- **O Luís terminou entre o Martim e o Diogo.**

Escreve o nome, por ordem, dos quatro primeiros alunos a terminar a ficha de avaliação. Explica como pensaste.



Tarefa 5 - Bolas coloridas

Observa a seguinte figura.



Faz uma estimativa do número de bolas verdes existentes, sem as contares. Explica como pensaste.

___

Sem contares, qual é a cor das bolas que achas que tem em maior quantidade? Explica como pensaste.

___

Calcula o valor exato do número de bolas verdes, azuis, amarelas e cor-de-rosa. Depois verifica se as tuas estimativas anteriores estão iguais ou muito diferentes do valor exato.

___

___

Conta o número total de bolas existentes e explica que método utilizaste para fazer essa contagem.

___

___

___

Tarefa 6 - Castanhas e bolas

Observa a seguinte figura.

Faz uma estimativa do número de castanhas existentes. Explica como pensaste.

____

____

____

Agora conta as castanhas e regista o valor.

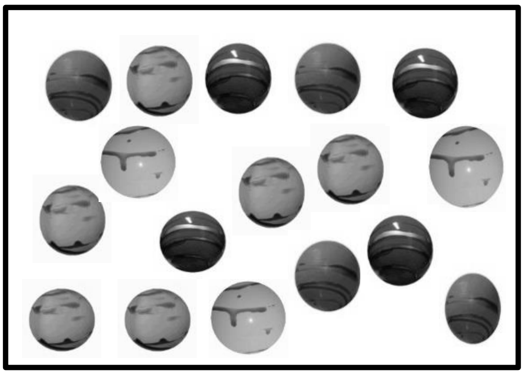
____

A tua estimativa é igual ou muito diferente do valor exato?

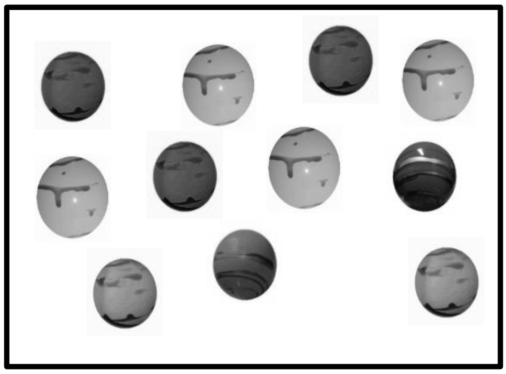
____

Tarefa 7 – Grupos de bolas

Observa as figuras A e B.



A



B

Faz uma estimativa do número de bolas verdes existentes na caixa A e na caixa B.

Sem contares, em que caixa achas que tem mais bolas verdes?

Agora conta as bolas verdes da caixa A e da caixa B e regista os valores.

O número de bolas verdes que achavas que existia na caixa A e na caixa B é igual ou muito diferente do valor exato?

Tarefa 8 - Visita à quinta de Santo Inácio

Numa manhã, várias turmas da escola da Beatriz foram visitar a quinta se Santo Inácio. Ao todo a escola da Beatriz tem 160 alunos.

Sabendo que à visita foram:

- 1 turma do 1º ano, com 17 alunos;
- 2 turmas do 2º ano, uma com 15 alunos e outra com menos 3 alunos;
- 1 turma do 3º ano, com 20 alunos;
- 2 turmas do 4º ano, uma com 18 alunos e outra com mais 4 alunos;

Quantos alunos da escola da Beatriz não foram visitar a quinta de Santo Inácio? Explica como pensaste.

Tarefa 9 - Disfarces

1) Para celebrar o Carnaval, o senhor Antunes comprou para vender na sua loja uma centena, duas dezenas e quatro unidades de disfarces. Na loja ao lado, o senhor Silva tem 178 disfarces também para vender.

Quantos disfarces há a mais na loja do senhor Silva para venda? Explica como chegaste à resposta.

2) No salão de festas da vila onde o Carlos mora vai celebrar-se um baile de máscaras. Para o baile inscreveram-se 68 pessoas. Sabe-se que 15 são crianças e os restantes são adultos. Do total de adultos, 23 são mulheres.

Quantos homens se inscreveram para o baile de máscaras? Explica como chegaste à resposta.

Tarefa 10 - Multiplicação

1) Observa com atenção a seguinte operação:

$21 \times 5 = 105$

Nesta operação, os números 21 e 5 são o produto e o resultado 105 é o fator? Justifica a tua resposta.

2) Numa escola existem 6 salas de aula. Em cada sala existem cinco placares. Quantos placares existem nas 6 salas de aula? Explica como pensaste

<u>Tarefa 11 - Combinações</u>

1) Observa atentamente as imagens.

Diferentes tipos de pão

Pão de centeio

Pão de forma

Recheio para o pão

Fiambre

Manteiga

Queijo

Chocolate

1.1) Escolhendo um tipo de pão e um dos recheios, quantas sandes diferentes se podem fazer? Quais são? Explica como pensaste.

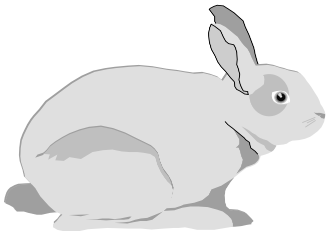
2) A Mariana foi às compras e comprou três caixas com cinco vernizes cada uma e com duas embalagens de algodão. Nessas caixas havia vernizes azuis, cinzentos, castanhos, lilás e cor-de-rosa. Quantos vernizes comprou ela? Explica como pensaste

Tarefa 12 – Multiplicar

1) Resolve:

1 coelho tem 2 orelhas.

E 3 coelhos? Explica como pensaste.



Um trevo tem 3 folhas.

E 4 trevos? Explica como pensaste.

A Ana tinha 4 jarras todas iguais, cada uma com 7 rosas.

Então, quantas rosas tem a Ana nas 4 jarras? Explica como pensaste.

2) Uma turma do 2.º ano foi visitar um Museu no Porto. Neste havia uma parede com imensas fotografias. Existiam 3 filas horizontais com 12 fotografias cada.

Qual o número total de fotografias que existiam na parede? Indica como pensaste.

Tarefa 13 - Subtrair

1) A Salomé decidiu fazer uma surpresa a duas das suas amigas. Assim, comprou duas caixas diferentes com bombons e detetou que as duas caixas juntas tinham 75bombons. Depois resolveu contar os bombons apenas de uma caixa e apurou que existiam 32bombons. Então quantos bombons havia na outra caixa? Explica como chegaste à resposta.

2) A Patrícia está a organizar uma festa de Carnaval na sua escola, mas para a festa se realizar são precisas 250 inscrições. Ela já conseguiu convencer 173 alunos a inscreverem-se. Quantas inscrições faltam para conseguir realizar a festa? A sua amiga Mafalda diz que lhe faltam 77 inscrições. O seu amigo Simão diz que lhe faltam 86 inscrições.

Qual dos amigos da Patrícia tem razão? Explica como chegaste à resposta.

Tarefa 14 - Coelhos e faisões

Imagina que há um certo número de coelhos e de faisões numa gaiola, totalizando 7 cabeças e 22 patas.

Quantos coelhos e faisões estão na gaiola? Explica como pensaste.

Tarefa 15 - Filas de meninos

Estavam nove meninos no recreio a brincar. A professora viu que estavam em três filas, mas que cada fila tinha quatro meninos. Como é isto possível?

Tarefa 16 - Material escolar

No início do ano letivo todas as famílias gastam dinheiro com a compra de material escolar para as crianças. Faz um levantamento de quanto gasta os teus pais ao comprar todo o teu material escolar, como por exemplo, os cadernos, a mochila, as canetas, lápis, régua, entre outros.

Tarefa 17 - O truque do Ricardo

O Ricardo quis fazer um truque numérico ao seu amigo Luís:

Ricardo: Pensa num número de dois algarismos.

Luís: Já pensei.

Ricardo: Troca os algarismos para obter um outro número. Já está? Agora adiciona os dois e diz-me quanto te deu.

Luís: Deu-me 132.

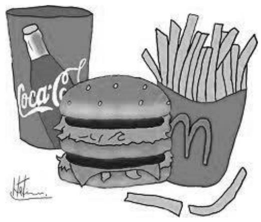
Ricardo: E eu já sei qual foi o número em que pensaste!

Saberá o Ricardo em que número pensou o Luís?

Anexo 3 – Tarefas do 2.º Ciclo

Tarefa 1 - Arredondamentos

1) Três amigos foram lanchar juntos. Cada um tinha 5 euros para gastar. O Guilherme tinha duas moedas de 2 euros e uma de 1 euro e pediu um hambúrguer e uma cola. A Camila tinha cinco moedas de 1 euros e quis uma bifana e um sumo. Por fim, sabemos que o Zé tinha dez moedas de 0,50 euros e pediu dois croissants e um sumo.



Menu	
Hambúrguer	2,48 €
Batatas fritas	0,82 €
Croissant	0,70 €
Cachorro	1,57 €
Bifana	3,23 €
Pão c/ fiambre	0,53 €
Cola	0,56 €
Sumo	1,27 €

1.1) Quanto é que gastou cada um? Explica como pensaste, apresentando todos os cálculos que efetuares e arredonda os resultados às décimas. Explica como pensaste.

1.2) Quanto é que cada um recebeu de troco? Explica como pensaste, apresentando todos os cálculos que efetuares e escreve os valores aproximados por defeito e por excesso, com aproximação às décimas.

1.3) Será que a despesa total do Guilherme e do Zé foi superior a 10 euros? Explica como pensaste, respondendo sem calculares a despesa total dos dois amigos.

1.4) Será que a Camila conseguia comprar um hambúrguer, uma embalagem de batatas fritas, um croissant e um cachorro? Justifica a tua resposta. Arredonda todos os resultados a uma casa decimal.

Tarefas 2 - Frações irredutíveis

1) As senhoras do bairro do Alecrim são muito talentosas a fazer peças de roupa em crochet. Por isso, a retrosaria da Dona Anica é muito requisitada pelas mesmas senhoras para a compra de linhas e tecidos.

Certo dia a Dona Anica enquanto arrumava a loja apercebeu-se que já tinha vendido 180 novelos de linha vermelha, 68 verdes e 14 agulhas de crochet. Além disso, reparou também que já tinha vendido 256 novelos de linha azuis, 78 novelos de lã amarelos e 10 dedais.

1.1 Qual é a fração de novelos de linha vermelha que já foram vendidos? Explica como pensaste e escreve a resposta sob a forma de fração irredutível.

1.2 Qual é a parte vendida de novelos de linha que não são azuis? Explica como pensaste e escreve a resposta sob a forma de fração irredutível.

Tarefa 3 - Adição e subtração de números racionais

1) A Inês e o Pedro iam almoçar e repararam que o sumo tinha acabado. Decidiram então ir ao supermercado e compraram 4 garrafas de sumo, mas quando chegaram a casa, apenas abriram uma das garrafas. Em cada uma estão $\frac{9}{9}$ litro de sumo. A Inês bebeu $\frac{2}{9}$ litro do sumo de uma garrafa e o João bebeu o restante.

1.1) Que quantidade de sumo bebeu o João? Explica como pensaste.

1.2) Elabora uma outra questão para este problema, diferente da anterior, e resolve-a. Explica como pensaste.

Tarefa 4 - Adição e subtração de números racionais

1) A Bárbara, a Sandra e a Margarida prepararam diferentes quantidades de batidos para a festa de aniversário do amigo André.

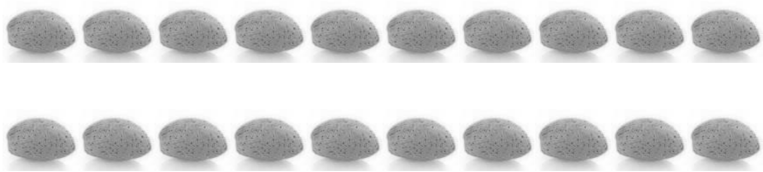
A Bárbara preparou $\frac{5}{9}$ L de batido e a Sandra $\frac{1}{3}$ L de batido. No total as três amigas prepararam $2\frac{2}{3}$ L de batido.

1.1) Que quantidade de batido preparou a Margarida? Explica como pensaste, apresentando os cálculos que efetuares e mostra o resultado sob a forma de fração irredutível.

2) A Filipa comprou $\frac{2}{5}$ kg de maçãs, $\frac{1}{10}$ kg de nozes e $1\frac{1}{3}$ kg de laranjas. E a sua mãe comprou $\frac{2}{5}$ kg de peras e $\frac{3}{4}$ kg de morangos.

2.1) Calcula quantos quilogramas de fruta comprou ao todo a Filipa? Explica como pensaste, apresentando os cálculos que efetuares e mostra o resultado sob a forma de fração irredutível.

3) A Adriana foi comprar amêndoas. Comprou as amêndoas representadas na figura 1.



O Pedro comeu $\frac{1}{4}$ das amêndoas que a Adriana comprou e o Alexandre comeu $\frac{2}{5}$.

3.1) O que representa a expressão $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$? Explica como pensaste.

3.2) Calcula a parte das amêndoas que sobraram. Explica como pensaste, apresentando os cálculos que efetuares e mostra o resultado sob a forma de fração irredutível.

<u>Tarefa 5 - Produto de um número natural por uma fração</u>

1) Dois professores foram a uma turma de 8º ano de escolaridade, formada por 15 alunos, e perguntaram quantos sabiam andar patins.

$\frac{2}{3}$ responderam Sim.

Quantas deles responderam Sim? Explica como pensaste, apresentando todos os cálculos que efetuares.

2) A Inês tem 60 amigos. Desses amigos, sabe-se que $\frac{2}{3}$ sabem andar a cavalo.

Quantos amigos da Inês não sabem andar a cavalo? Explica como pensaste, apresentando todos os cálculos que efetuares.

<u>Tarefa 6 - Multiplicação de números racionais</u>

1) O Diogo leu $\frac{2}{15}$ do número de páginas de uma revista na escola, $\frac{1}{3}$ do número de páginas no autocarro e $\frac{1}{4}$ das restantes páginas em casa.

1.1) Que fração do livro leu o Diogo em casa? Explica como pensaste, apresentando todos os cálculos que efetuares.

1.2) Sabendo que a revista tem 120 páginas, quantas páginas ainda lhe faltam ler? Explica como pensaste, apresentando todos os cálculos que efetuares.

2) Uma caixa tinha 60 pêssegos. Ao lanche quatro amigas comeram $\frac{1}{4}$ dos pêssegos e ao jantar comeram $\frac{2}{3}$ dos restantes.

Quantos pêssegos comeram as quatro amigas ao jantar? Explica como pensaste, apresentando todos os cálculos que efetuares.

Tarefa 7 - Divisão de números racionais

1) Um carpinteiro demora três quartos de hora a fazer uma peça de madeira. Quantas peças faz num dia em que trabalhe cinco horas e um quarto? Explica como chegaste à tua resposta.

2) O Luís encheu $\frac{2}{5}$ da metade das bolas que tinha.

2.1) Que parte das bolas encheu? Explica como pensaste.

2.2) Que parte das bolas ainda tem para encher? Explica como pensaste.

2.3) Se o Luís tem 70 bolas, quantas bolas já encheu? Explica como pensaste.

Ao longo das aulas de matemática pedimos para que explicasses como pensaste para resolveres os problemas. Achas que isso foi importante para a tua aprendizagem? Porquê?

- Sim ☐ Não ☐

____
____
____
____
____
____

Depois das nossas aulas já és capaz de explicar melhor às professoras e aos colegas a forma como pensaste para resolver um determinado problema? Porquê?

Sim ☐ Não ☐

____
____
____
____
____
____