

## MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA ÓRGÃOS DE MÁQUINAS II

Elaborado por Paulo Flores e José Gomes - 2015



Universidade do Minho  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Campus de Azurém  
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 220  
Fax: +351 253 516 007  
E-mail: [pflores@dem.uminho.pt](mailto:pflores@dem.uminho.pt)  
URL: [www.dem.uminho.pt/People/pflores](http://www.dem.uminho.pt/People/pflores)



Universidade do Minho  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Campus de Azurém  
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 232  
Fax: +351 253 516 007  
E-mail: [jgomes@dem.uminho.pt](mailto:jgomes@dem.uminho.pt)  
URL: [www.dem.uminho.pt](http://www.dem.uminho.pt)

## T 06. ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE DENTES RETOS

1. Introdução
2. Relações Geométricas
3. Continuidade do Engrenamento
4. Relação de Condução
5. Escorregamento
6. Rendimento
7. Interferências
8. Revisão de Conhecimentos
9. Referências Bibliográficas

## Generalidades

As engrenagens cilíndricas de dentes retos podem ser **exteriores ou interiores**, como ilustra a figura 1. É indubitável que as engrenagens cilíndricas de dentado reto são as mais frequentemente utilizadas em máquinas e mecanismos quando se pretende transmitir movimento entre eixos paralelos.



**Fig. 1** Engrenagens cilíndricas de dentes retos: Engrenagem exterior e engrenagem interior

Algumas das razões que concorrem para a sua popularidade prendem-se com a **simplicidade** e **facilidade** associadas às atividades de **projeto**, **fabrico**, **montagem** e **manutenção**.

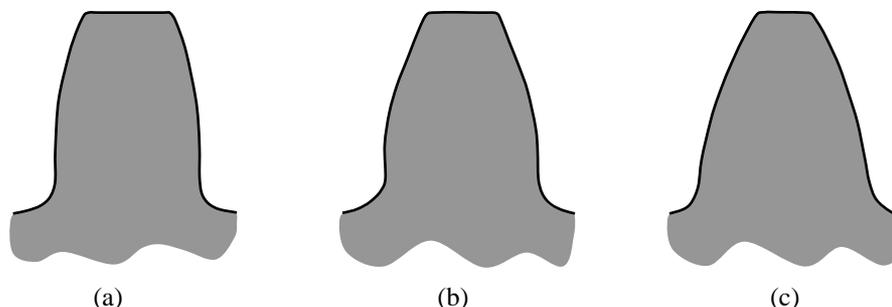
Este tipo de engrenagem apresenta **rendimentos** elevados (até 99%), possibilita a obtenção de **relações de transmissão** elevadas (8:1) e transmite **potências** elevadas.

## Ângulo de Pressão

Um dos principais parâmetros característicos do desempenho das engrenagens é o **ângulo de pressão**. Este parâmetro é normalizado e assume, em geral, o **valor de  $20^\circ$** . Quando assim acontece numa engrenagem, o dentado é denominado de **dentado normalizado**.

Nos Estados Unidos da América é frequente considerar-se um valor de  $25^\circ$  para o ângulo de pressão. No passado o valor de  $14,5^\circ$  era bastante utilizado, mas tem vindo a cair em desuso.

A figura 2 mostra o **efeito do valor do ângulo de pressão** no perfil dos dentes.



**Fig. 2** Efeito do ângulo de pressão no perfil do dente: (a)  $14,5^\circ$ ; (b)  $20^\circ$ ; (c)  $25^\circ$

**Ângulo de pressão** é o ângulo formado pela linha de ação ou de engrenamento com a direção tangente às circunferências primitivas no ponto primitivo.

Ao **dentado normalizado** está sempre associado um ângulo de pressão igual a  $20^\circ$ . **Dentado normal**, por seu lado, diz respeito a um dentado que não foi corrigido.

## Saliência, Reentrância, Altura do Dente e Diâmetro de Raiz

Na figura 3 são apresentadas as principais relações geométricas e proporções dos dentes para o caso de **engrenagens cilíndricas exteriores de dentado reto normal**.

O **módulo e o número de dentes** definem completamente uma roda dentada normal  
O produto destas duas quantidades resulta no **diâmetro primitivo** da roda, ou seja

$$d = mz$$

A **saliência e a reentrância** de um dente relacionam-se com o módulo da seguinte forma

$$h_a = m$$

$$h_f = 1,25m$$

A **altura total do dente** é dada pela soma da saliência com a reentrância, isto é

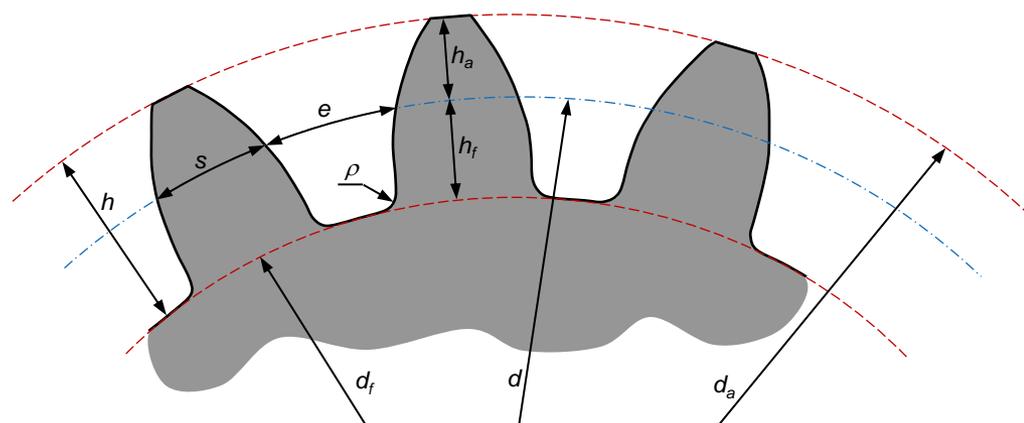
$$h = h_a + h_f = 2,25m$$

O **diâmetro de coroa** da roda é calculado do seguinte modo

$$d_a = d + 2h_a = d + 2m$$

ou seja,

$$d_a = d + 2m = mz + 2m = m(z + 2)$$



**Fig. 3** Elementos geométricos e proporções dos dentes

## Diâmetro de Raiz, Passo, Espessura e Intervalo do Dentes

De modo, o **diâmetro de raiz** da roda é definido como

$$d_f = d - 2h_f$$

ou seja

$$d_f = d - 2,5m$$

ou ainda

$$d_f = mz - 2,5m = m(z - 2,5)$$

Os **diâmetros de coroa e de raiz** podem ser relacionados entre si do seguinte modo

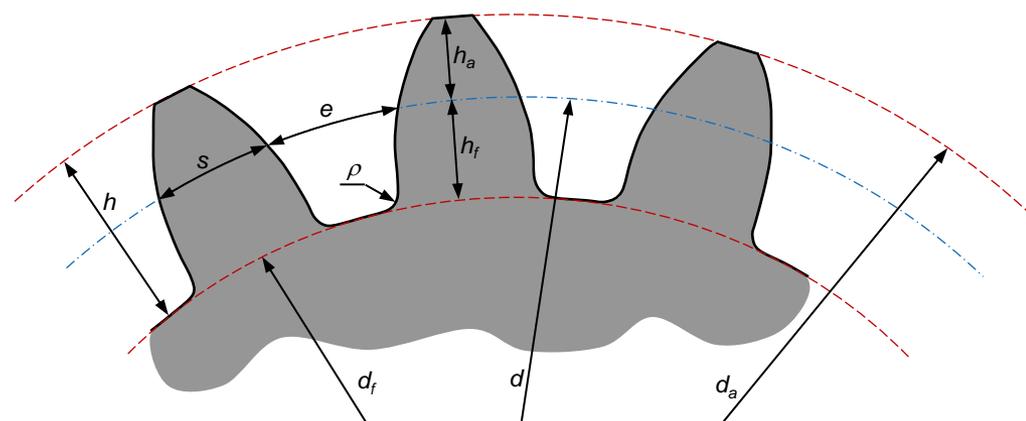
$$d_a = d_f + 2h$$

Se se considerar a **inexistência de qualquer folga** entre os dentes, então o **passo** pode ser medido pela soma da espessura do dente com o intervalo do dente, ou seja

$$p = s + e$$

donde, atendendo à definição de passo, a **espessura e o intervalo do dente** podem ser calculados do seguinte modo

$$s = e = \frac{p}{2} = \frac{\pi m}{2}$$



**Fig. 4** Elementos geométricos e proporções dos dentes

## Folga Entre Dentes e Folga da Raiz

A figura 5 mostra as folgas que existem nas engrenagens cilíndricas.

A **folga entre os dentes** depende do grau de precisão com que os dentes das rodas são produzidos. Assim, diferentes cenários podem ser distinguidos, nomeadamente

$$g \approx 0 \quad (\text{engrenagens de muito elevada precisão})$$

$$0 < g \leq \frac{1}{40} p, \quad s = \frac{39}{80} p \quad (\text{engrenagens de precisão})$$

$$\frac{1}{40} p < g \leq \frac{1}{20} p, \quad \frac{39}{80} p < s \leq \frac{19}{40} p \quad (\text{engrenagens correntes})$$

$$g = \frac{1}{20} p, \quad s = \frac{19}{40} p \quad (\text{engrenagens obtidas por fundição})$$

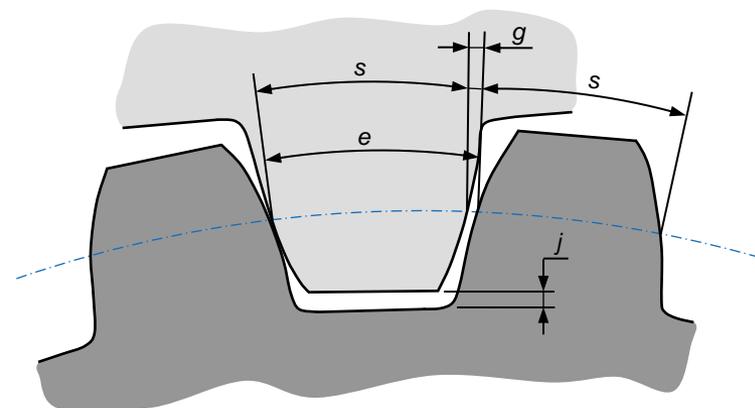


Fig. 5 Folga entre dentes e folga na raiz

A **folga no entredente** é expressa por

$$g = p - 2s$$

As recomendações para a **folga na raiz** sugerem a seguinte relação

$$j = h_f - h_a = 1,25m - m = 0,25m$$

## Raio de Concordância, Largura e Entre-eixo

O **raio de concordância** da raiz dos dentes deve ser proporcional ao módulo da seguinte forma

$$\rho = \frac{1}{3}m$$

A **largura dos dentes** deverá estar compreendida no seguinte intervalo

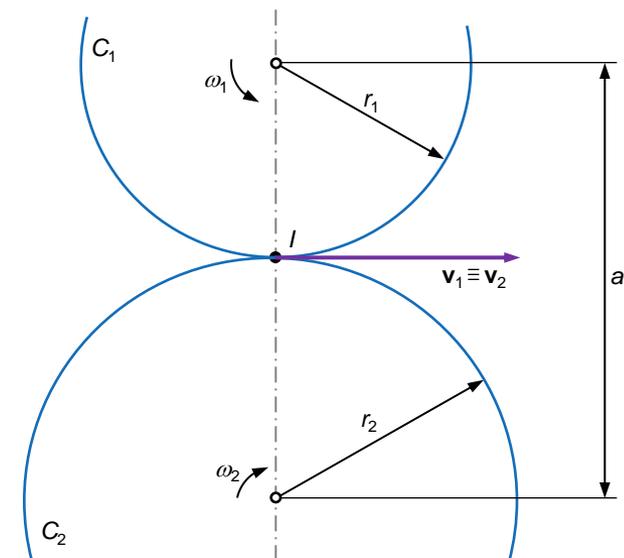
$$9m < b < 14m$$

Considerando agora uma engrenagem cilíndrica exterior de denteado reto normal, representada na figura 6 pelas circunferências primitivas, então a **distância entre os eixos** das rodas pode ser calculada com

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

em que os índices 1 e 2 se referem, respetivamente, ao pinhão (ou carreto) e à roda (ou coroa). O **entre-eixo** pode ser expresso do seguinte modo

$$a = \frac{mz_1 + mz_2}{2} = m \frac{z_1 + z_2}{2}$$



**Fig. 6** Engrenagem cilíndrica exterior

## Relação de Transmissão

O figura 7 está representada a **velocidade do ponto primitivo**, o qual pertence quer ao pinhão, quer à roda.

Atendendo a que este ponto é um centro instantâneo de rotação, então pode escrever-se a seguinte igualdade

$$v_1 = v_2 \Leftrightarrow \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

em que  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são as velocidades angulares do pinhão e da roda, respetivamente.

Atendendo à **definição de relação de transmissão**, pode escrever-se a seguinte expressão

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1}$$

Esta equação pode assumir a seguinte forma

$$i = \frac{d_2}{d_1} = \frac{mz_2}{mz_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

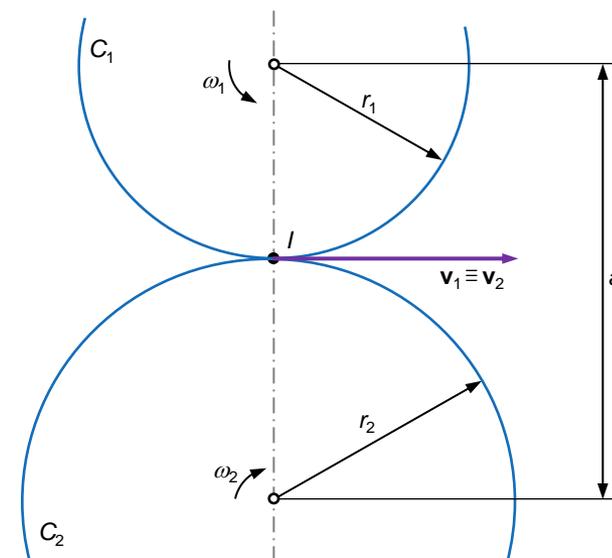


Fig. 7 Engrenagem cilíndrica exterior

## Principais Relações Geométricas e Proporções dos Dentes

À guisa de conclusão genérica, deve referir-se que todas as dimensões das rodas e proporções dos dentes podem ser expressas em **função, única e exclusivamente, do módulo e do número de dentes**.

A tabela 1 resume os principais parâmetros anteriormente apresentados.

**Tab. 1** Principais **relações geométricas** e **proporções dos dentes** para engrenagens cilíndricas exteriores de dentado reto normal

Parâmetro	Expressão
Diâmetro primitivo	$d = mz$
Saliência	$h_a = m$
Reentrância	$h_f = 1,25m$
Altura do dente	$h = 2,25m$
Diâmetro de coroa	$d_a = m(z + 2)$
Diâmetro de raiz	$d_f = m(z - 2,5)$
Entre-eixo	$a = m \frac{z_1 + z_2}{2}$
Relação de transmissão	$i = \frac{z_2}{z_1}$

## Exercício de Aplicação

Considere uma **engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto normalizado**, em que o pinhão e a coroa têm, respetivamente, 19 e 76 dentes. Atendendo a que o módulo é igual a 3 mm, **calcule os seguintes parâmetros geométricos** para o pinhão: (i) saliência, (ii) reentrância, (iii) altura do dente, (iv) diâmetro primitivo, (v) diâmetro de coroa e (vi) diâmetro de raiz. Represente graficamente os parâmetros anteriormente calculados.

Resposta:

$$h_a = m = 3 \text{ mm}$$

$$h_f = 1,25m = 3,75 \text{ mm}$$

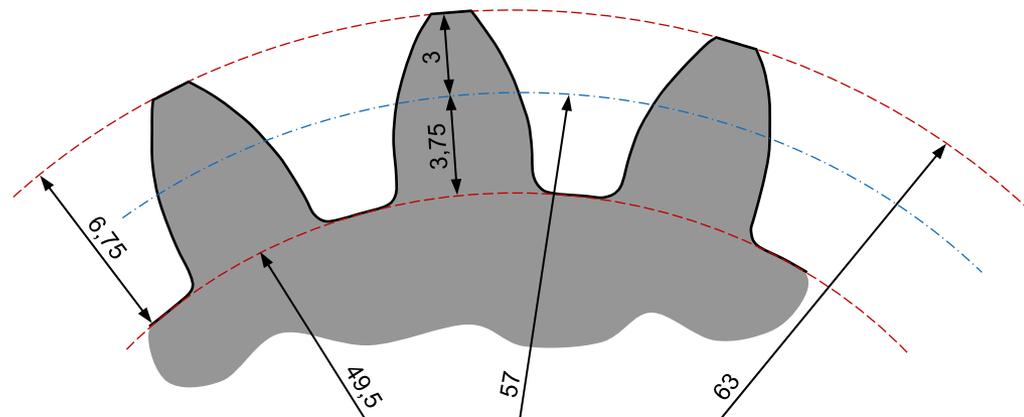
$$h = 2,25m = 6,75 \text{ mm}$$

$$d = mz_1 = 57 \text{ mm}$$

$$d_a = m(z_1 + 2) = 63 \text{ mm}$$

$$d_f = m(z_1 - 2,5) = 49,5 \text{ mm}$$

A figura 8 diz respeito à **representação gráfica** dos parâmetros geométricos previamente determinados.



**Fig. 8** Representação dos parâmetros calculados

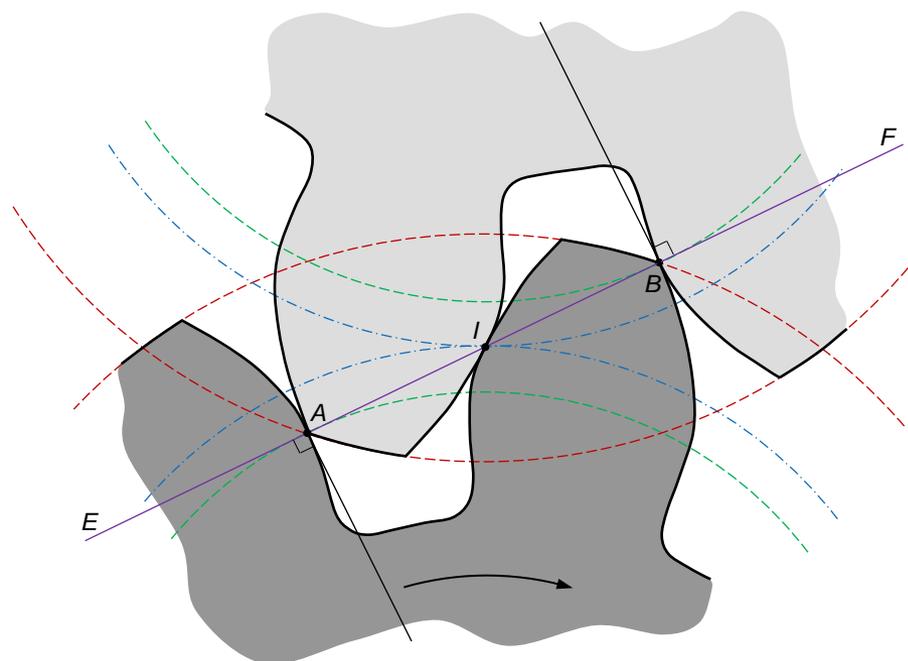
## Conceito de Continuidade do Engrenamento

A **continuidade do engrenamento** diz respeito à **quantidade de pares de dentes** que está engrenada em simultâneo durante funcionamento de uma engrenagem.

Assim, para que o engrenamento de duas rodas aconteça em boas condições, do ponto de vista da continuidade do engrenamento, é necessário **que pelo menos um par de dentes esteja engrenado** durante a transmissão do movimento.

Por outras palavras, pode dizer-se que existe continuidade do engrenamento quando **um par de dentes termina o seu engrenamento só após o par de dentes seguinte ter já iniciado o contacto**.

A situação limite, em que há apenas e só um par de dentes em contacto, está representada na figura 9.



**Fig. 9** Engrenamento de um par de dentes

No presente texto admite-se que o **pinhão ou carreto é a roda motora**, enquanto a **coroa é a roda movida**. Deve lembrar-se aqui que a linha de engrenamento é sempre tangente às **circunferências de base** das duas rodas, passa pelo ponto primitivo e faz um ângulo  $\alpha$  (ângulo de pressão) com a linha tangente às circunferências primitivas.

## Linha de Engrenamento

Da figura 10, pode afirmar-se que o engrenamento entre dois dentes se **inicia** quando a **circunferência de coroa da roda movida interseca a linha de ação**. Este ponto é representado pela letra **C** na figura 10.

Neste mesmo instante, o ponto em que o **perfil do dente do pinhão interseca a circunferência primitiva** é materializado pelo símbolo **L**.

De modo análogo, o engrenamento **termina** quando a **circunferência de coroa da roda motora interseca a linha de ação**. Este ponto é representado pela letra **D** na figura 10.

Neste mesmo instante, o ponto em que o **perfil do dente do pinhão interseca a circunferência primitiva** é materializado pelo símbolo **M**.

À distância entre os pontos de início e término do engrenamento (**CD**), chama-se **comprimento de condução** ou **comprimento de ação**.

O engrenamento entre um par de dentes está, em geral, compreendido entre os pontos **A** e **B** que definem a linha de engrenamento.

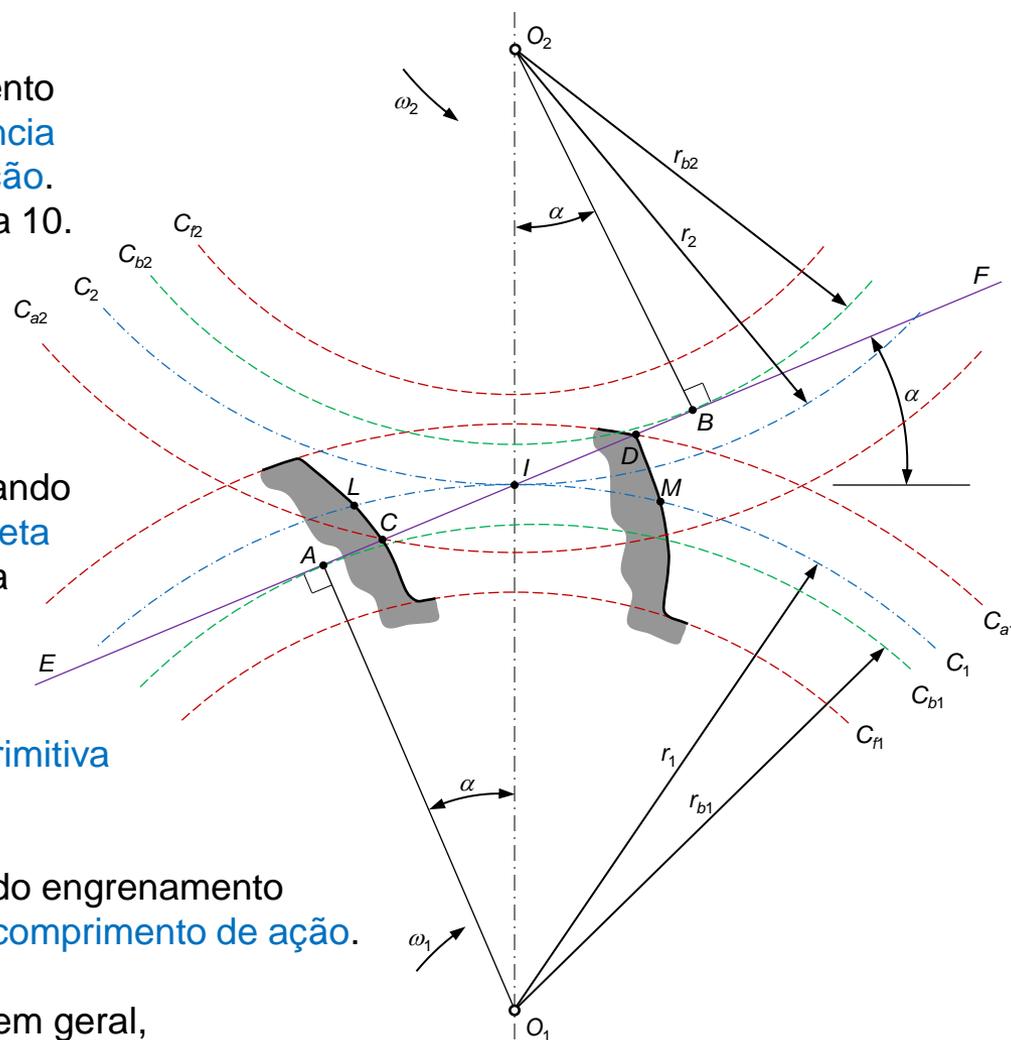


Fig. 10 Linha de Engrenamento

## Ângulos de Engrenamento

Os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  representados na figura 11 denominam-se de **ângulos de condução** ou ângulos de ação das rodas motora e movida, respetivamente.

Os ângulos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  representam os **ângulos de aproximação** das rodas motora e movida, e dizem respeito à amplitude de rotação de cada uma das rodas desde o início do contacto, até ao instante em que o ponto de contacto ocorre no ponto primitivo.

Do mesmo modo, os ângulos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  dizem respeito aos **ângulos de afastamento** das rodas motora e movida, respetivamente.

Estes ângulos representam a **amplitude de rotação das rodas** desde o instante correspondente ao ponto primitivo até que o ponto de engrenamento entre os dentes atinge o término do contacto (ponto  $D$ ).

É evidente, por definição e pela observação da figura 11, que

$$\theta_1 = \phi_1 + \gamma_1 \quad \theta_2 = \phi_2 + \gamma_2$$

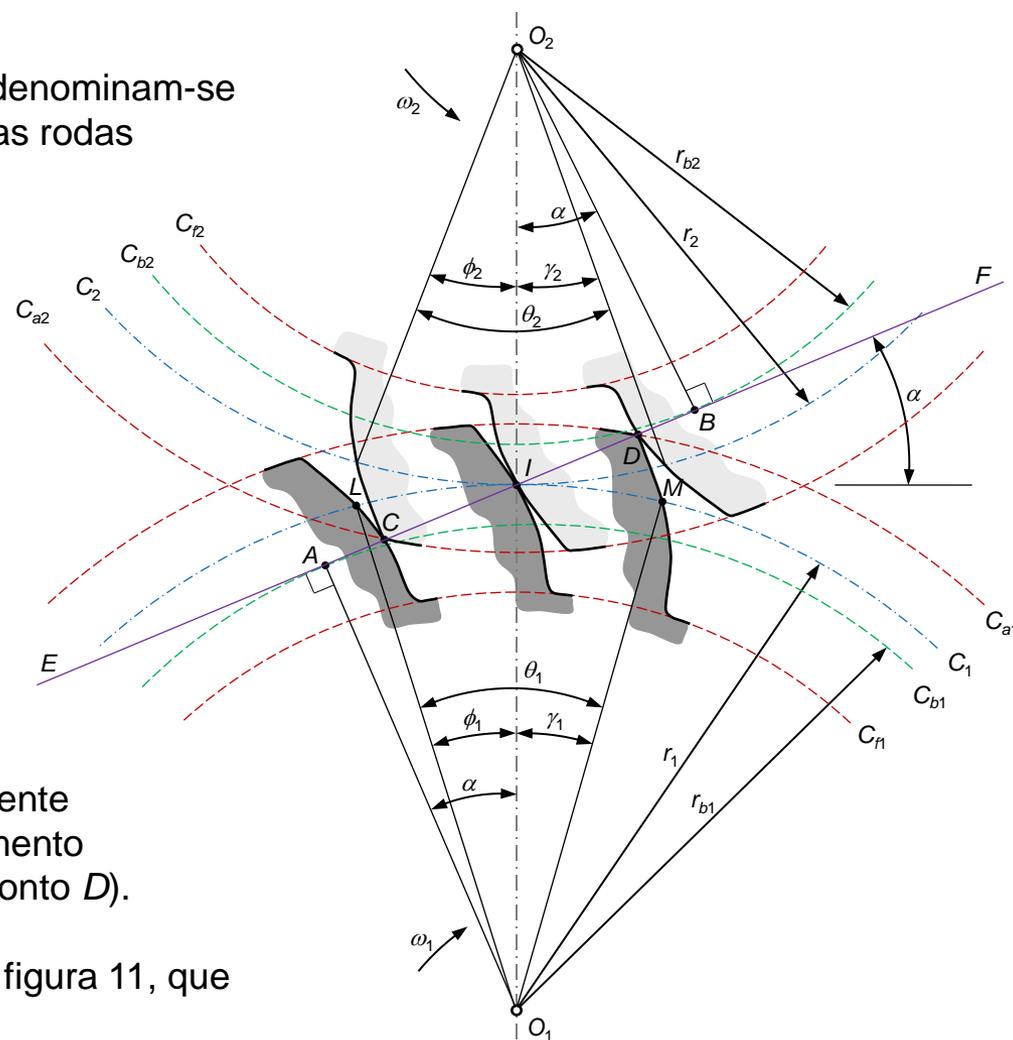


Fig. 11 Linha de engrenamento

## Fases de Engrenamento

A figura 12 refere-se a **três posições sucessivas** de um par dentes engrenado. Da análise desta figura pode dizer-se que **o engrenamento se inicia no ponto C**, isto é, quando a ponta do dente da roda movida contacta com o flanco do dente da roda motora.

O **engrenamento termina no ponto D**, ou seja, quando a ponta do dente da roda motora deixa de estar em contacto com o flanco do dente da roda movida. Durante o engrenamento, podem ser distinguidas duas fases, a saber:

- **Fase de aproximação**, segmento de reta  $CI$  ou arco de circunferência  $LI$

$$l_a = \overline{CI} \quad a_a = LI = \frac{l_a}{\cos \alpha}$$

- **Fase de afastamento**, segmento de reta  $ID$  ou arco de circunferência  $IM$

$$l_f = \overline{ID} \quad a_f = IM = \frac{l_f}{\cos \alpha}$$

Note-se que  $r_b = r \cos \alpha$

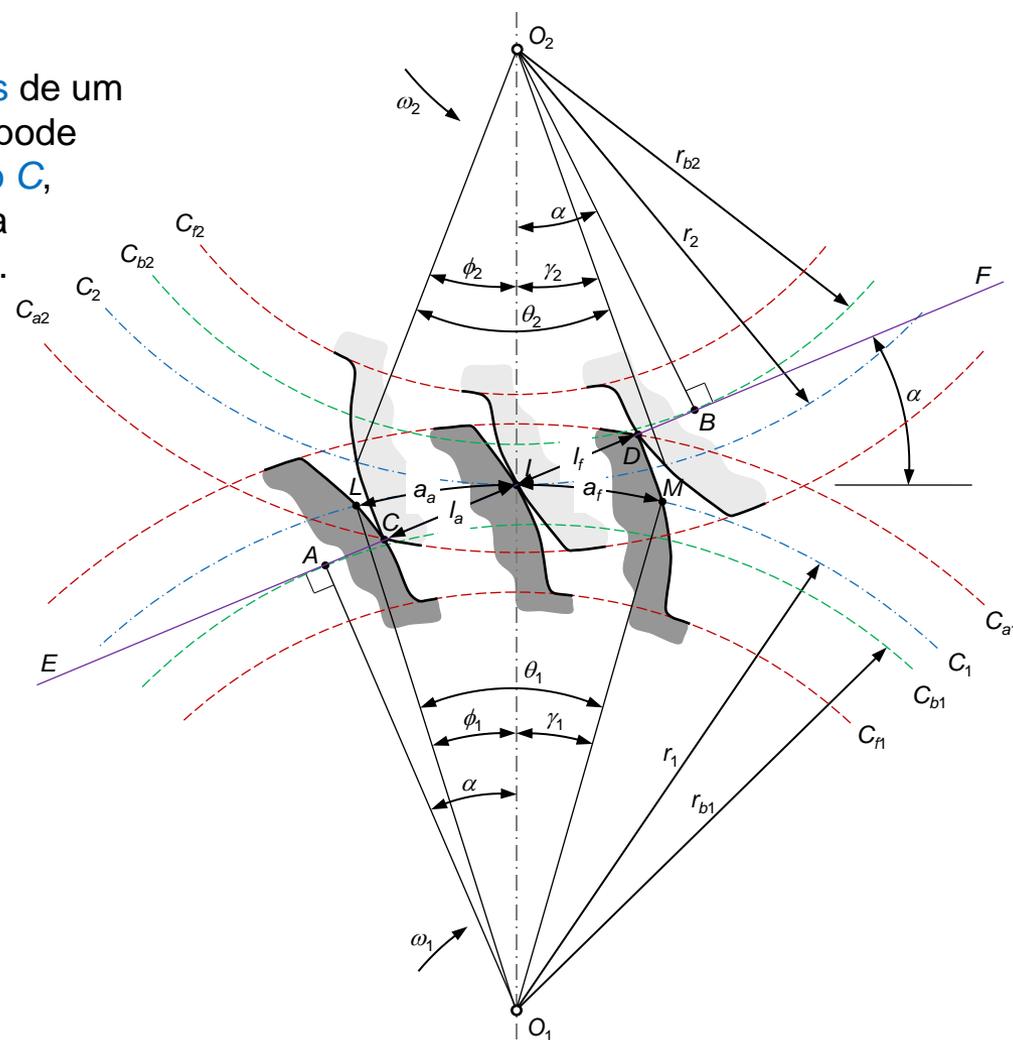


Fig. 12 Engrenamento de duas rodas

## Relação de Condução

A duração do engrenamento pode ser definida como a soma das parcelas correspondentes às fases de aproximação e de afastamento, ou seja

$$l = l_a + l_f = \overline{CD}$$

$$a = a_a + a_f = LM = \frac{l}{\cos \alpha}$$

Para que haja continuidade do engrenamento é necessário que se verifique a seguinte condição:

$$l > p_n \quad \text{ou} \quad a > p$$

em que  $p_n$  representa o passo normal e  $p$  é o passo primitivo.

Define-se relação de condução, ou razão de condução, como sendo o quociente entre o arco de condução e o passo, ou seja

$$\varepsilon = \frac{a}{p} = \frac{l}{\pi m \cos \alpha}$$

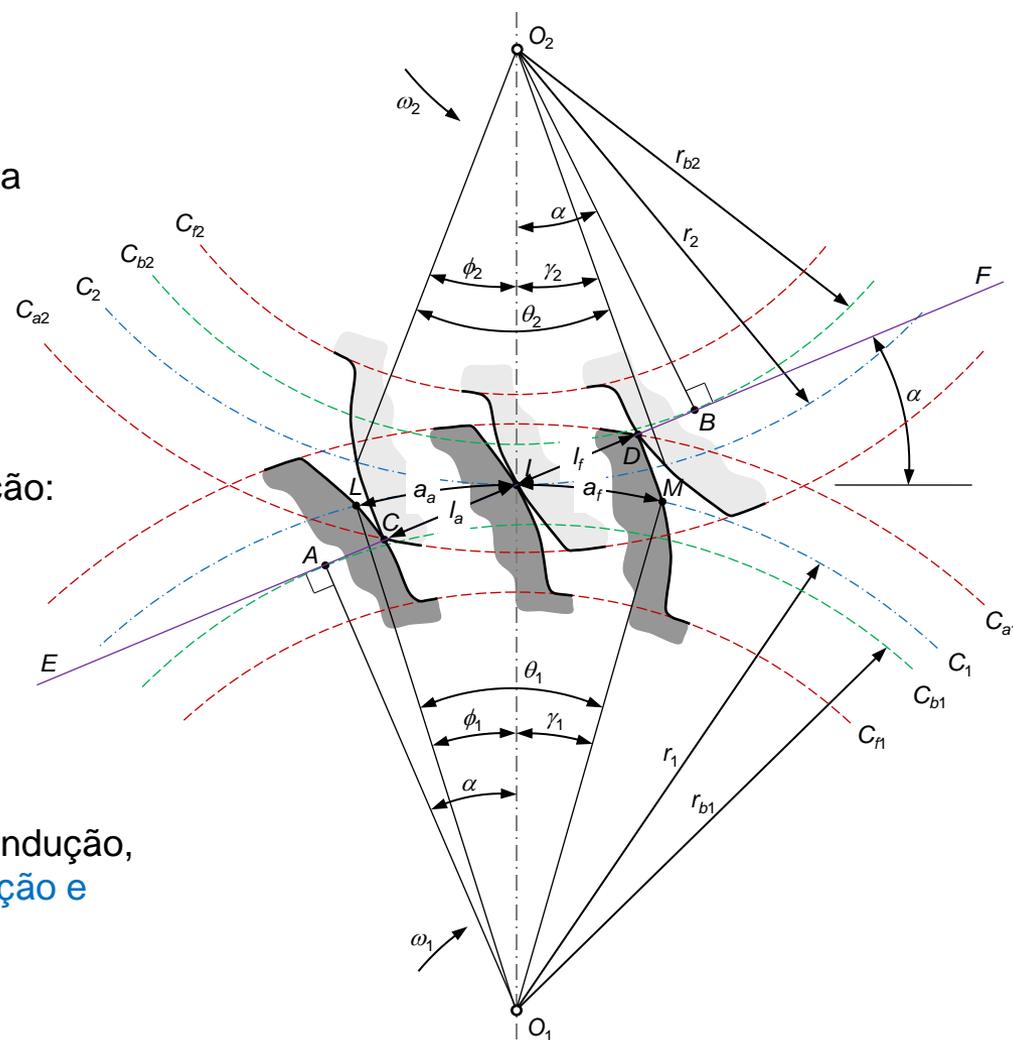


Fig. 13 Engrenamento de duas rodas

## Relação de Condução

A equação relativa à relação de condução permite determinar o **número médio de pares de dentes em contacto** durante o engrenamento.

O desempenho de engrenagens requer que o valor da **relação de condução** esteja situado entre **1,2 e 1,6**, de modo a garantir a continuidade do engrenamento, evitar choques entre os dentes e minimizar o ruído.

Valores muito elevados de  $\varepsilon$  são vantajosos em termos de continuidade, mas podem causar dificuldades ao nível das **interferências** entre os dentes.

É, portanto, necessário estabelecer um **compromisso entre a continuidade do engrenamento e as interferências** de funcionamento.

No caso mais geral, a relação de condução é constituída por duas componentes, uma **radial** e outra **axial**:

$$\varepsilon = \varepsilon_{radial} + \varepsilon_{axial}$$

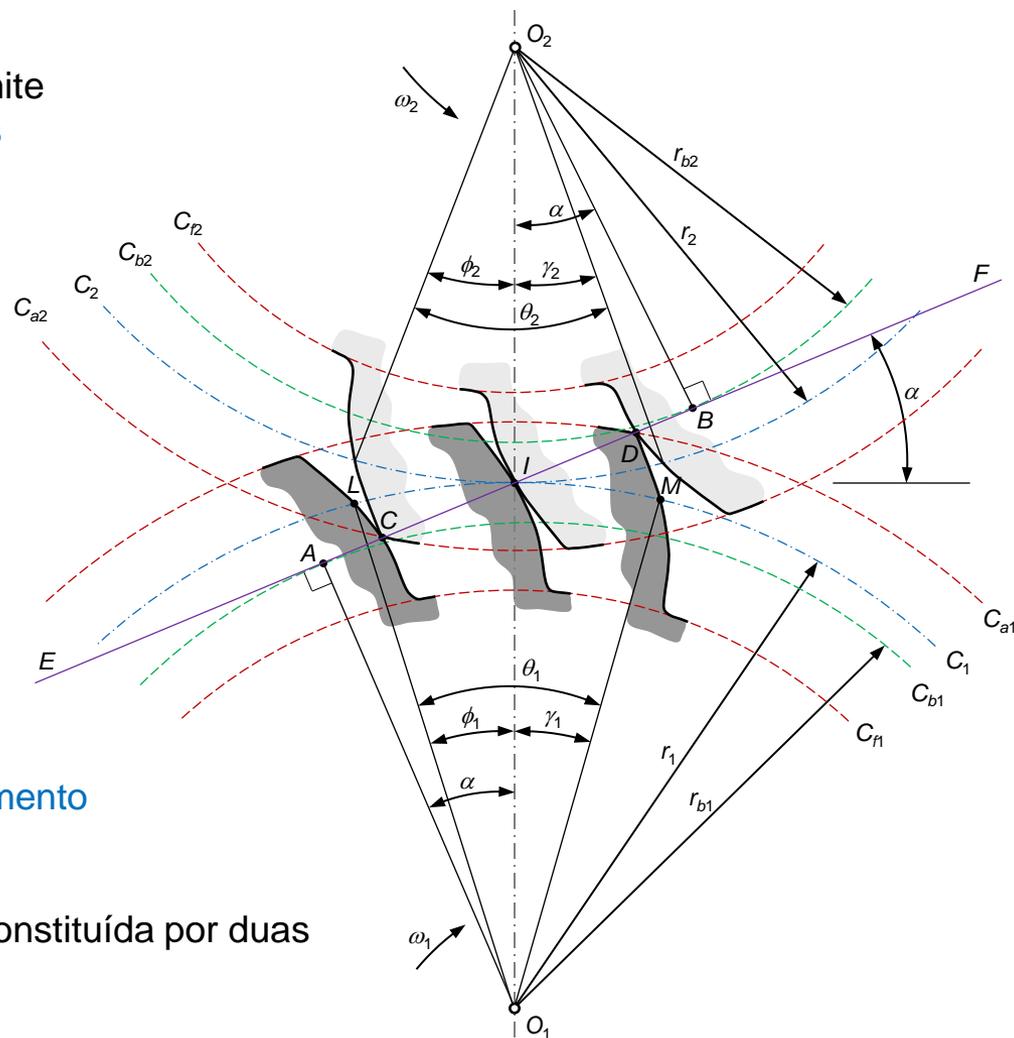


Fig. 14 Engrenamento de duas rodas

## Relação de Condução

A figura 15 ilustra a [animação relativa ao engrenamento de duas rodas dentadas](#), onde se podem identificar os pontos de início e fim do engrenamento.

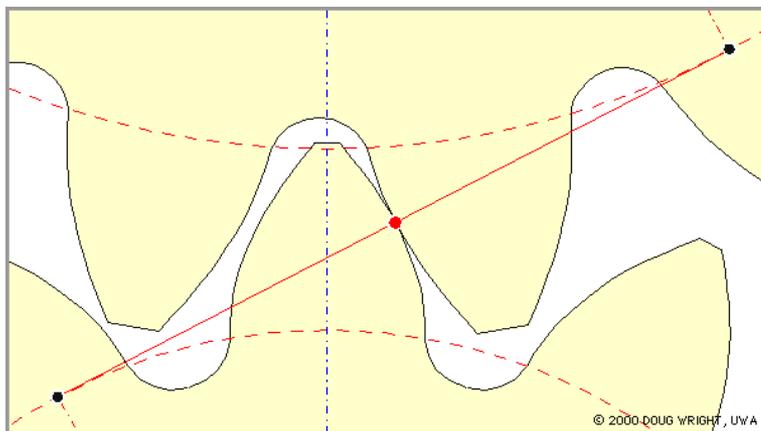


Fig. 15 Engrenamento de duas rodas

Neste caso verifica-se [que há continuidade do engrenamento](#).

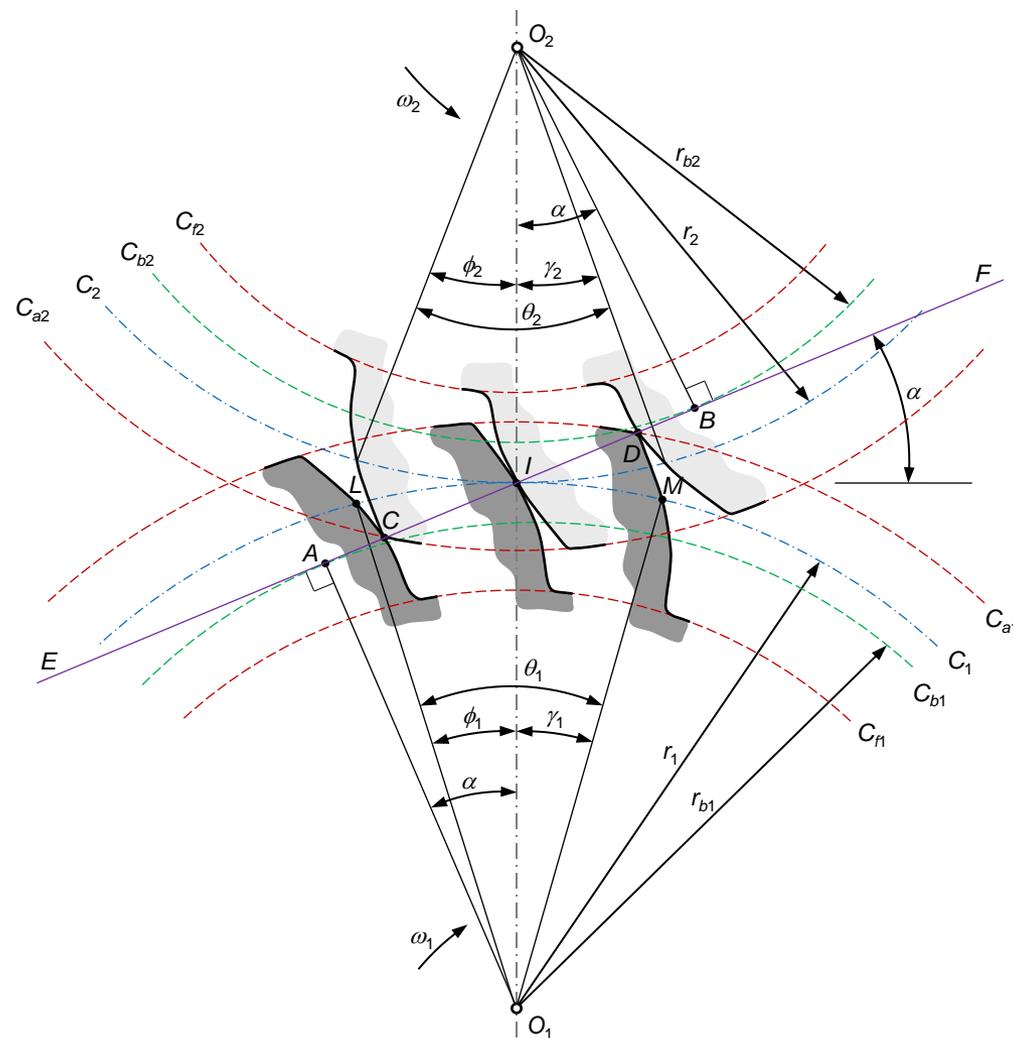


Fig. 16 Engrenamento de duas rodas

## Dedução da Expressão para a Relação de Condução

Considere-se a figura 17 onde se representa um engrenamento de duas rodas cilíndricas de dentes retos.

A **relação de condução** é, por definição, dada por

$$\varepsilon = \frac{a}{p}$$

em que  $a$  representa o **arco de condução** e  $p$  é o **passo** da engrenagem.

O **arco de condução** é igual à soma do arco de aproximação com o arco de afastamento

$$a = a_a + a_f = LI + IM$$

Atendendo ao conceito de amplitude de um arco ao centro tem-se que

$$a_a = LI = r_1 \phi_1$$

$$a_f = IM = r_1 \gamma_1$$

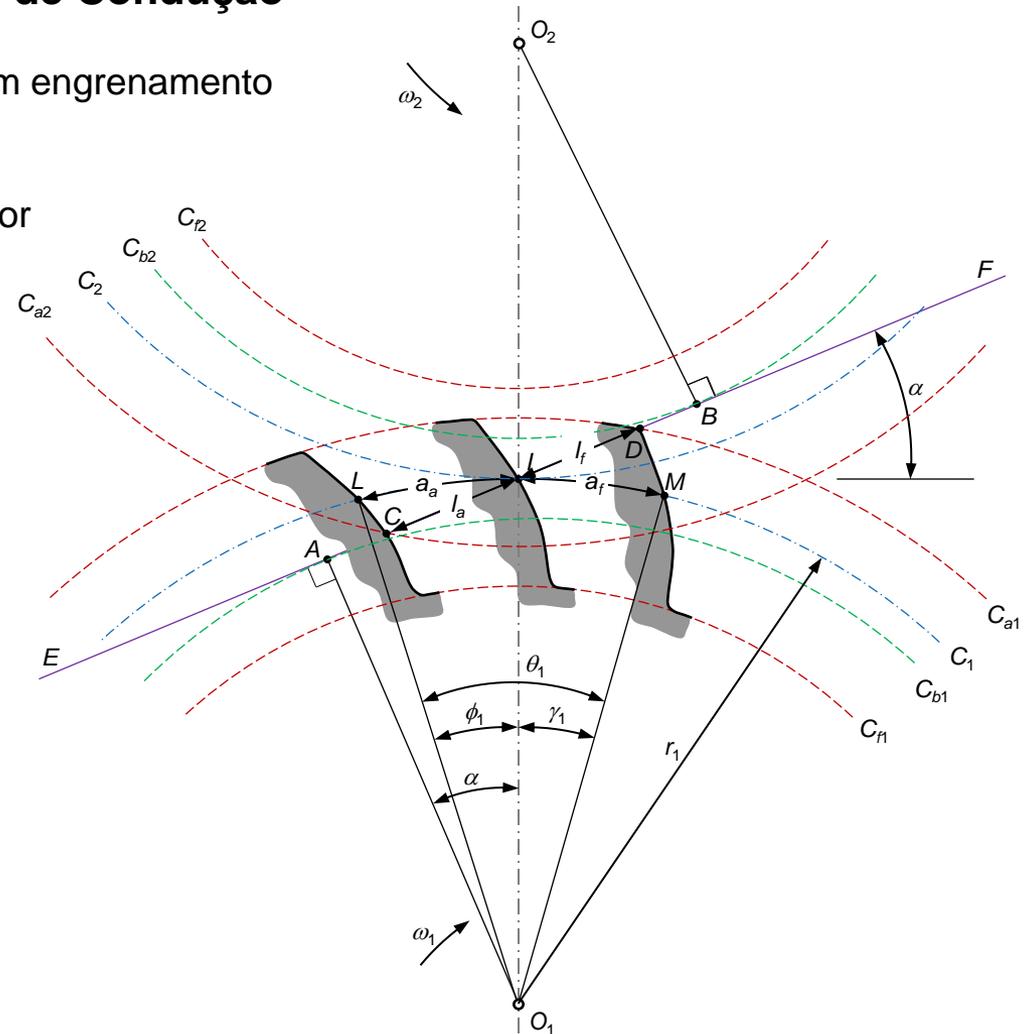


Fig. 17 Engrenamento de duas rodas

## Dedução da Expressão para a Relação de Condução

Tendo presente o conceito de curva evolvente de um círculo, então da análise da figura 18 os **comprimentos de aproximação** e de afastamento tem-se que

$$\overline{CI} = r_{b1} \phi_1$$

$$\overline{ID} = r_{b1} \gamma_1$$

Atendendo à relação entre o **raio de base** e o **raio primitivo** vem que

$$\phi_1 = \frac{\overline{CI}}{r_1 \cos \alpha}$$

$$\gamma_1 = \frac{\overline{ID}}{r_1 \cos \alpha}$$

Considerando estas expressões resulta que

$$a_a = LI = \frac{\overline{CI}}{\cos \alpha} = \frac{l_a}{\cos \alpha}$$

$$a_f = IM = \frac{\overline{ID}}{\cos \alpha} = \frac{l_f}{\cos \alpha}$$

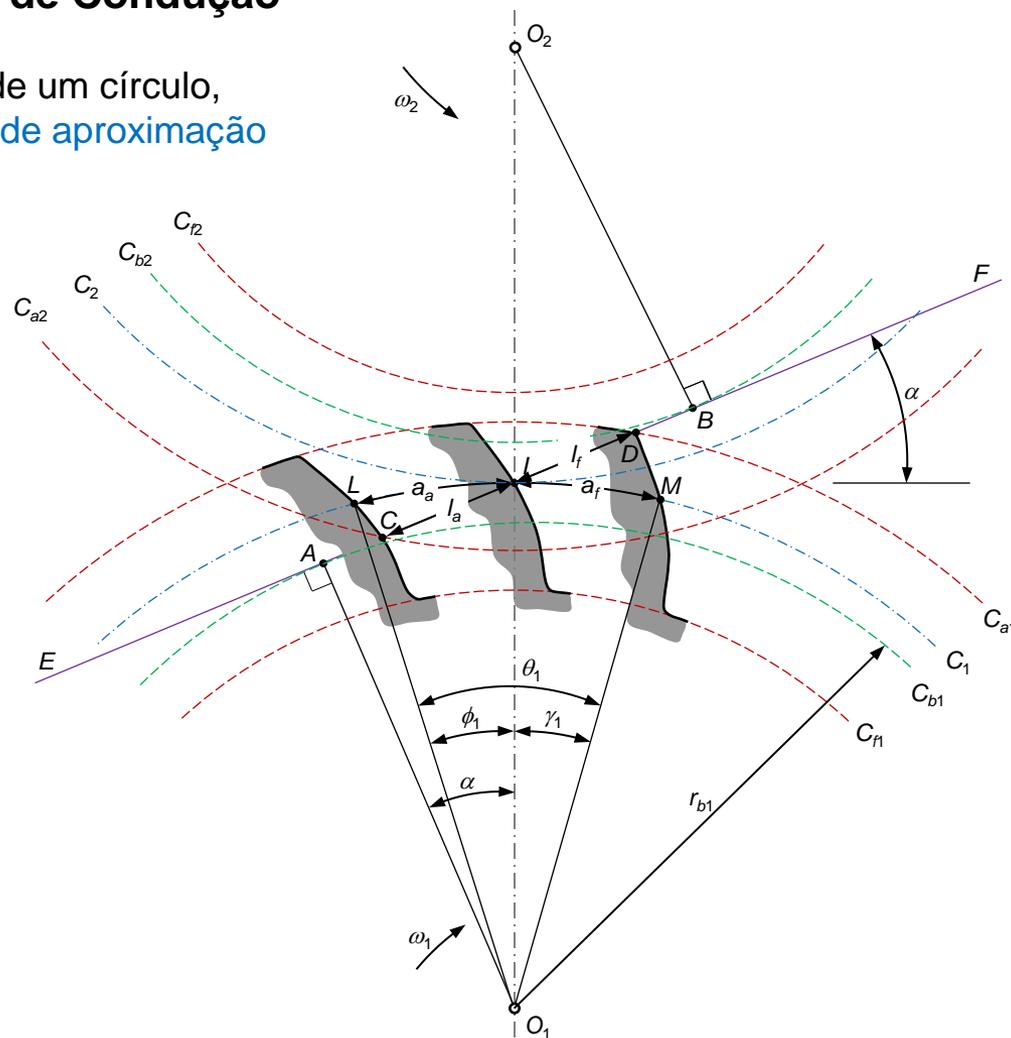


Fig. 18 Engrenamento de duas rodas

## Dedução da Expressão para a Relação de Condução

Atendendo à definição de passo, a **relação de condução** pode ser escrita como

$$\varepsilon = \frac{a}{p} = \frac{\overline{CI} + \overline{ID}}{\pi m \cos \alpha} = \frac{\overline{CD}}{\pi m \cos \alpha}$$

O **comprimento de condução** pode ser expresso da seguinte forma

$$\overline{CD} = \overline{CI} + \overline{ID}$$

em que

$$\overline{CI} = \overline{CB} - \overline{IB}$$

$$\overline{ID} = \overline{AD} - \overline{AI}$$

Em relação ao **triângulo retângulo**  $O_2BC$  podem ser determinados os comprimentos dos **lados**  $O_2C$  e  $O_2B$

$$\overline{O_2C} = r_2 + h_{a2}$$

$$\overline{O_2B} = r_2 \cos \alpha$$

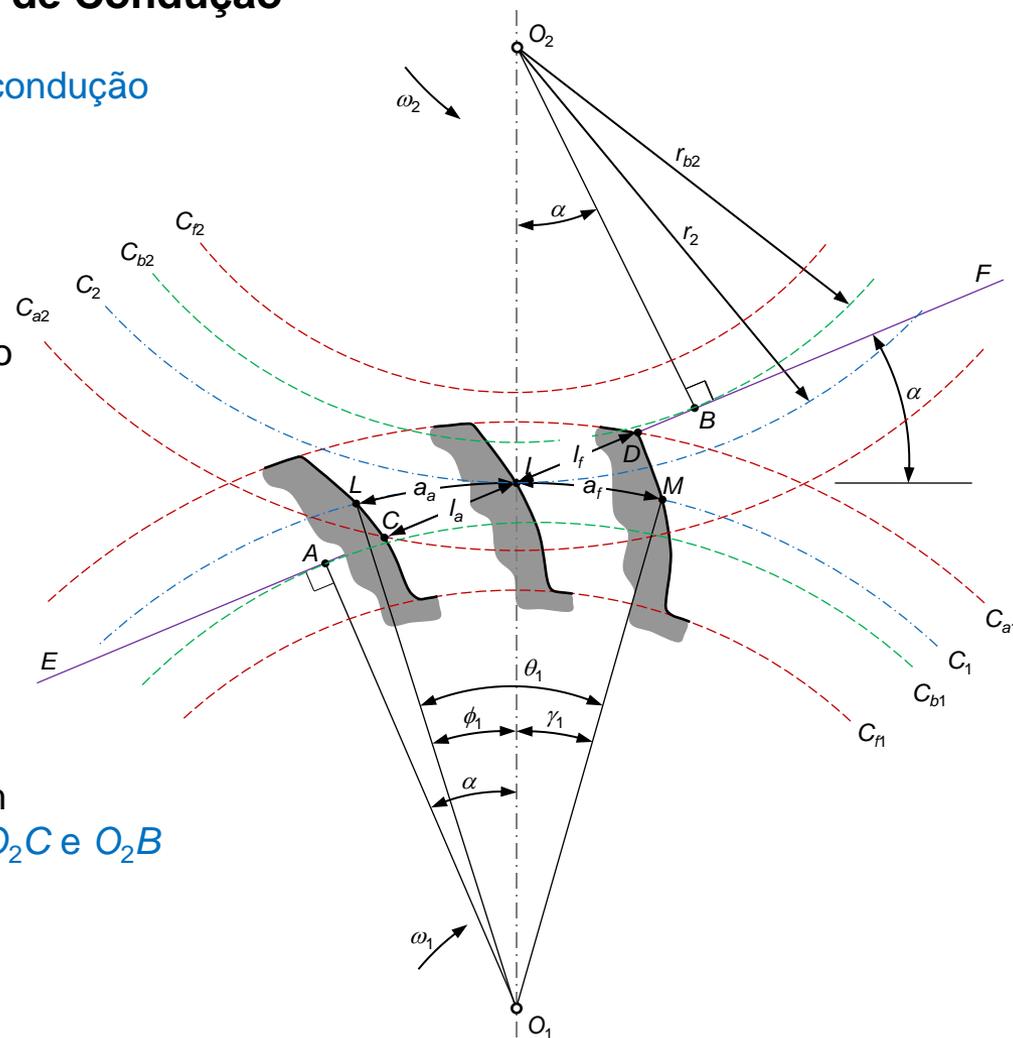


Fig. 19 Engrenamento de duas rodas

## Dedução da Expressão para a Relação de Condução

Aplicando agora o **teorema de Pitágoras ao triângulo  $O_2BC$** , vem que

$$\overline{CB} = \sqrt{(\overline{O_2C})^2 - (\overline{O_2B})^2} = \sqrt{(r_2 + h_{a2})^2 - r_2^2 \cos^2 \alpha}$$

Da análise da figura 20, verifica-se que

$$\overline{IB} = r_2 \operatorname{sen} \alpha$$

Logo, o **comprimento de aproximação** é dado pela seguinte expressão

$$l_a = \overline{CI} = \overline{CB} - \overline{IB} = \sqrt{(r_2 + h_{a2})^2 - r_2^2 \cos^2 \alpha} - r_2 \operatorname{sen} \alpha$$

De modo análogo, pode ser determinado o **comprimento de afastamento**

$$l_f = \overline{ID} = \overline{AD} - \overline{AI} = \sqrt{(r_1 + h_{a1})^2 - r_1^2 \cos^2 \alpha} - r_1 \operatorname{sen} \alpha$$

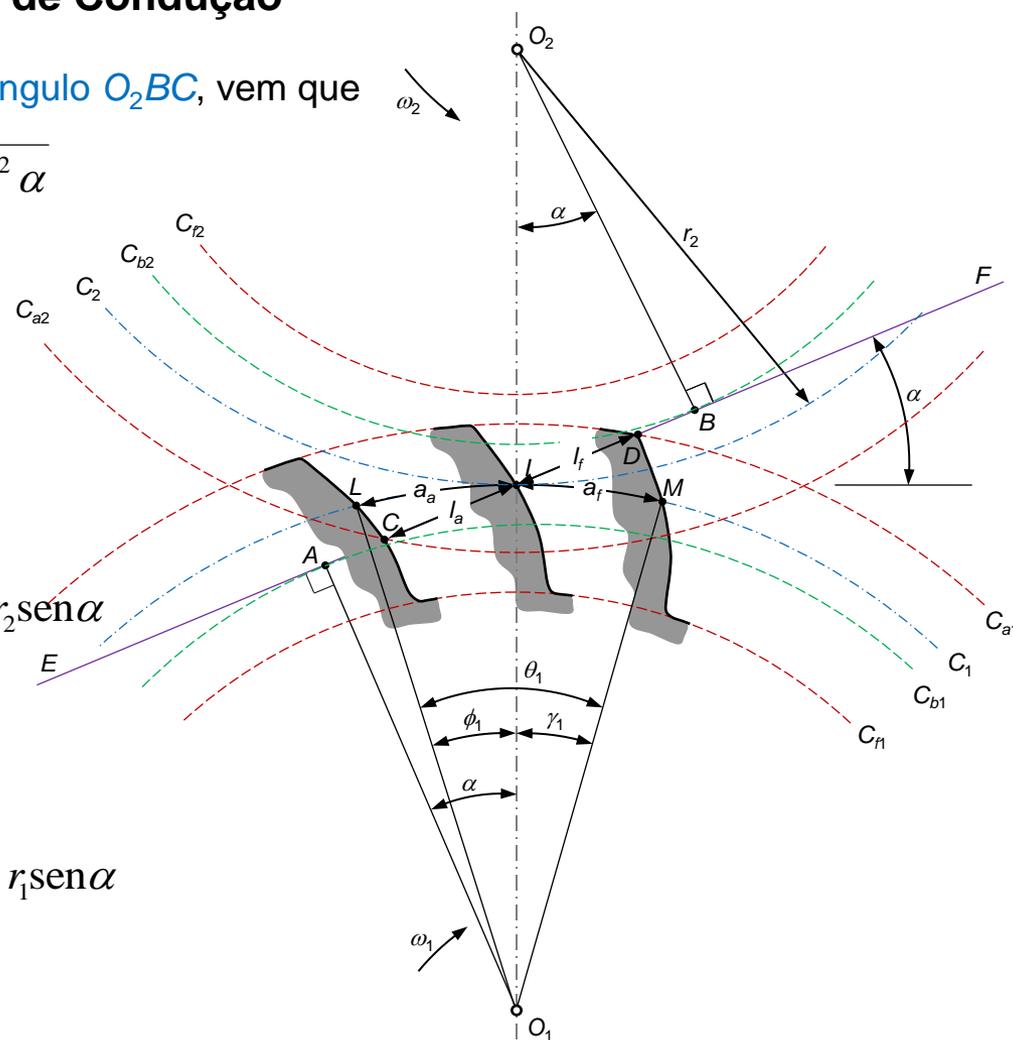


Fig. 20 Engrenamento de duas rodas

## Dedução da Expressão para a Relação de Condução

Com efeito, o **comprimento de condução** pode ser calculado somando  $l_a$  e  $l_f$ , ou seja

$$l = \overline{CD} = \sqrt{(r_2 + h_{a2})^2 - r_2^2 \cos^2 \alpha} - r_2 \sin \alpha + \sqrt{(r_1 + h_{a1})^2 - r_1^2 \cos^2 \alpha} - r_1 \sin \alpha$$

Finalmente, a **relação da condução** pode ser reescrita da seguinte forma

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(r_2 + h_{a2})^2 - r_2^2 \cos^2 \alpha} - r_2 \sin \alpha + \sqrt{(r_1 + h_{a1})^2 - r_1^2 \cos^2 \alpha} - r_1 \sin \alpha}{\pi m \cos \alpha}$$

Tendo em consideração as relações geométricas e proporções dos dentes, anteriormente estudadas, a relação de condução pode ser simplificada e expressa, **única e exclusivamente, em função do número de dentes e do ângulo de pressão**, ou seja

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi \cos \alpha} \left( \sqrt{\frac{z_2^2}{4} \sin^2 \alpha + z_2 + 1} + \sqrt{\frac{z_1^2}{4} \sin^2 \alpha + z_1 + 1} - \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \alpha \right)$$

## Estudo da Relação de Condução

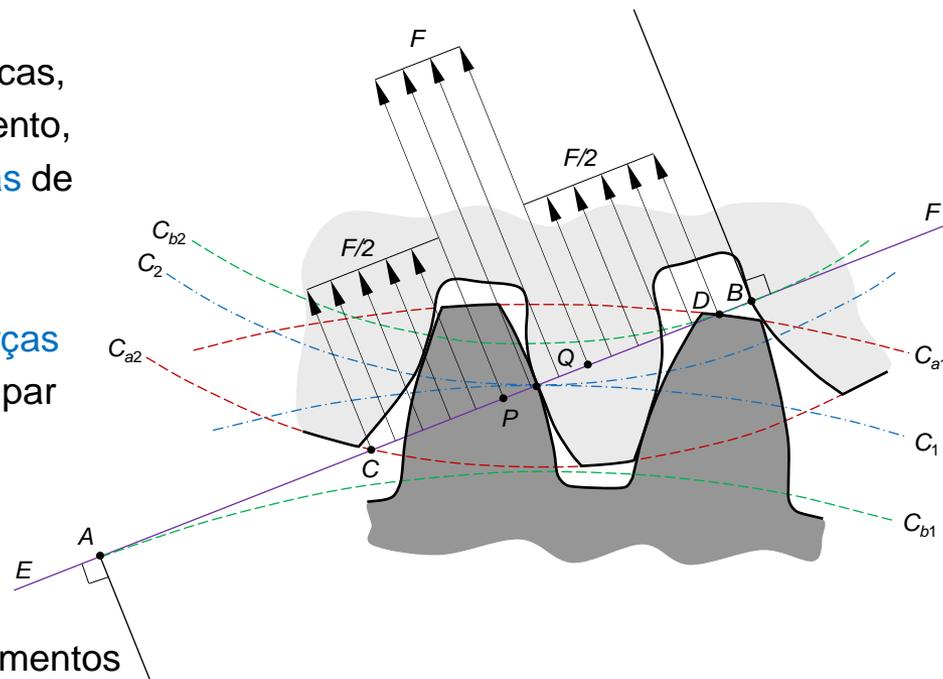
Pode concluir-se que a **continuidade do engrenamento melhora** (*i.e.*, aumenta) quando,

- Aumentam as **saliências** dos dentes
- Aumentam os **diâmetros primitivos** das rodas
- Diminui o **ângulo de pressão**

Relações de condução mais elevadas são benéficas, não só em termos de continuidade do engrenamento, mas também em termos da **distribuição das forças** de contacto entre as superfícies dos dentes.

Assim, a figura 21 diz respeito à **evolução das forças de contacto ao longo do engrenamento**, para um par de dentes com perfis conjugados.

Nesta representação admite-se que **existem dois pares de dentes engrenados** ao mesmo tempo durante os períodos correspondentes aos comprimentos de condução  $CP$  e  $QD$ .



**Fig. 21** Forças de contacto nos dentes

## Exercício de Aplicação

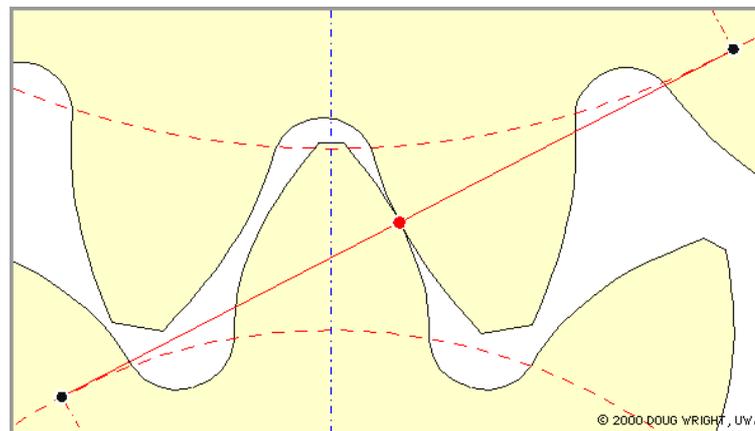
Considere uma **engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto normalizado**, em que o pinhão e a coroa têm, respetivamente, 19 e 76 dentes. Atendendo a que o módulo é igual a 3 mm, **calcule a relação de condução** da engrenagem. Comente o resultado obtido.

Resposta:

$$\varepsilon = 1,68$$

Pode, pois, concluir-se que a engrenagem em estudo apresenta **boa continuidade do engrenamento**, uma vez que, em média, há cerca de **1,68 dentes em contacto**.

Este valor está claramente acima das indicações de projeto, isto é,  $e > 1,3$ .



**Fig. 22** Engrenamento entre duas rodas

## Velocidades Periféricas

O movimento relativo entre as superfícies dos dentes do pinhão e da roda **não é do tipo rolamento puro**.

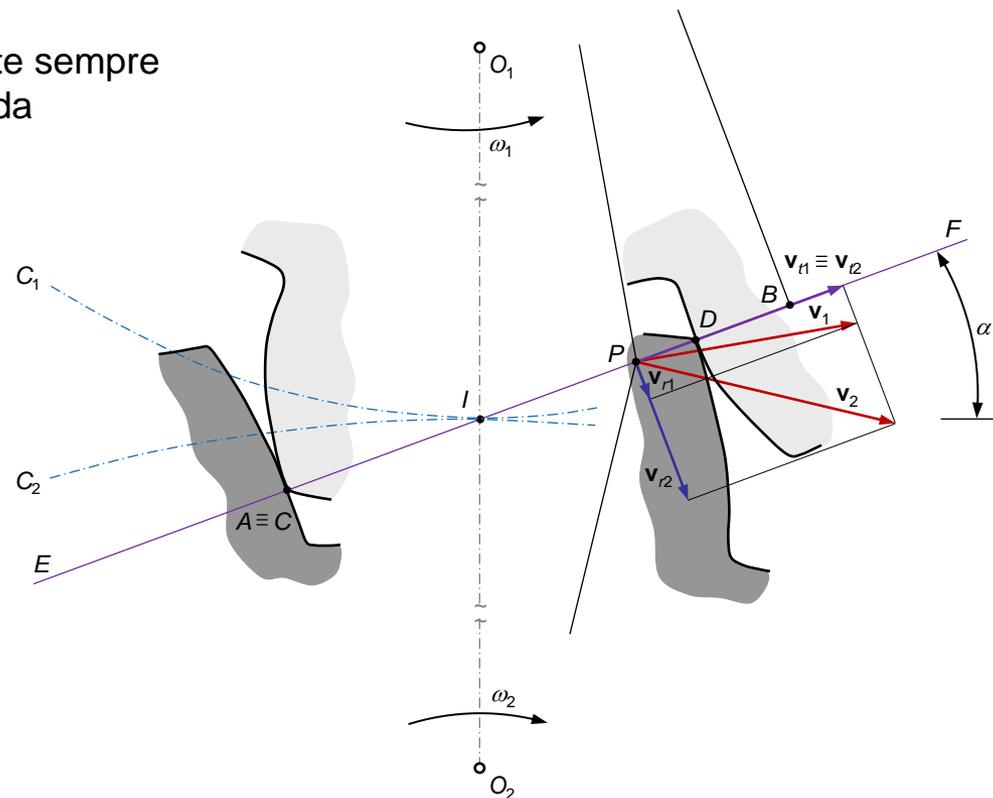
Na verdade, **à exceção do ponto primitivo**, existe sempre um **escorregamento** associado à ação conjugada entre os perfis dos dentes.

O engrenamento de dois perfis conjugados é composto por um **misto de rolamento e de escorregamento**.

Considere a figura 23, onde as **velocidades periféricas** de um ponto,  $P$ , situado na linha de engrenamento, estão representadas.

As velocidades do ponto  $P$  **projetadas na direção perpendicular à linha de engrenamento** são distintas.

Estas componentes das velocidades periféricas são **responsáveis pelo escorregamento** que existe no engrenamento de dois perfis conjugados para o caso de engrenagens cilíndricas exteriores.



**Fig. 23** Velocidades periféricas no engrenamento

## Velocidades Periféricas

A **velocidade de escorregamento total** é dada pela soma, **em valor absoluto**, das velocidades de rolamento  $v_{r1}$  e  $v_{r2}$ . Para o caso das engrenagens paralelas, a velocidade de escorregamento pode ser calculada com referência ao **ponto primitivo**, o qual é um centro instantâneo de rotação.

Para o ponto  $P$  a velocidade de escorregamento é expressa do seguinte modo

$$v_g = |\Omega| \overline{IP}$$

em que  $IP$  é a distância do ponto  $P$  ao ponto primitivo e  $|\Omega|$  representa o módulo da velocidade instantânea de rotação em relação ao centro instantâneo de rotação ( $I$ ), a qual pode ser calculada do seguinte modo

$$|\Omega| = \omega_1 + \omega_2 \quad (\text{engrenagens exteriores})$$

$$|\Omega| = \omega_1 - \omega_2 \quad (\text{engrenagens interiores})$$

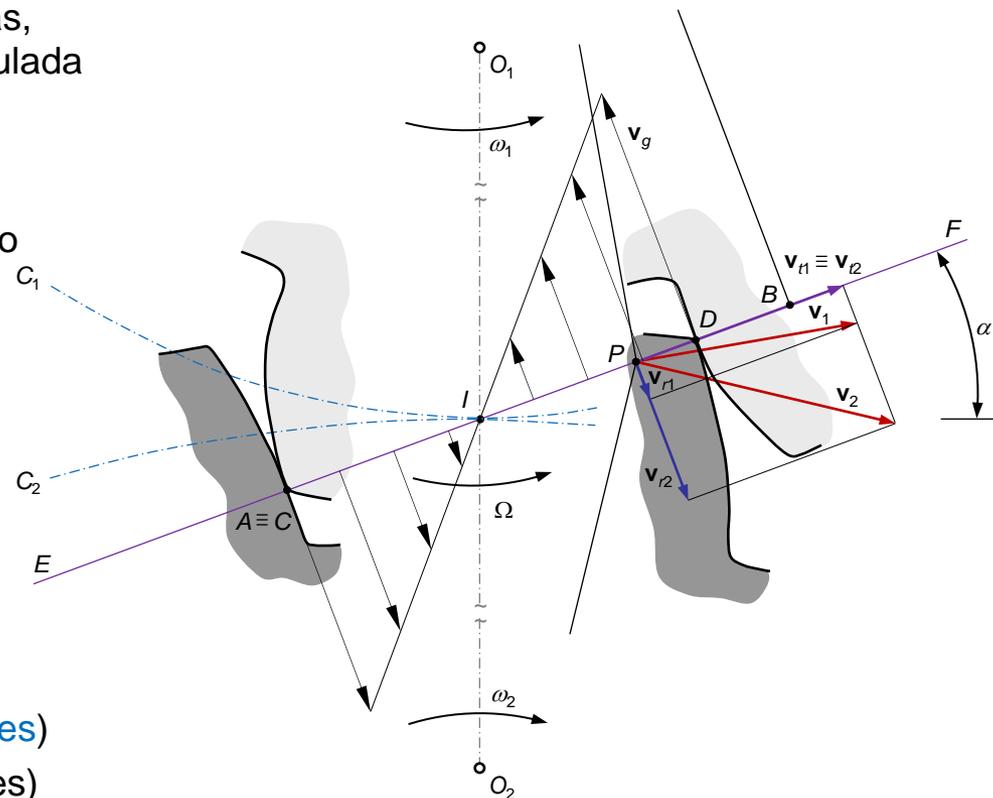


Fig. 24 Velocidades periféricas no engrenamento

Pode observar-se que no caso de **engrenagens interiores**, existe menos escorregamento uma vez que as duas rodas rodam no mesmo sentido e, conseqüentemente, é menor o valor absoluto de  $\Omega$ .

## Velocidades Periféricas

Uma vez definido o sentido de funcionamento de uma engrenagem exterior, verifica-se que  $\Omega$  mantém, quer o módulo, quer a intensidade, durante o engrenamento.

Com efeito, a velocidade de escorregamento, que varia linearmente, é

- Tangente aos perfis conjugados no ponto de contacto,
- Nula no ponto primitivo,
- Máxima no início e no fim do engrenamento, porém, com sentidos opostos

A figura 25 mostra a **variação da velocidade de escorregamento** ao longo do comprimento de condução.

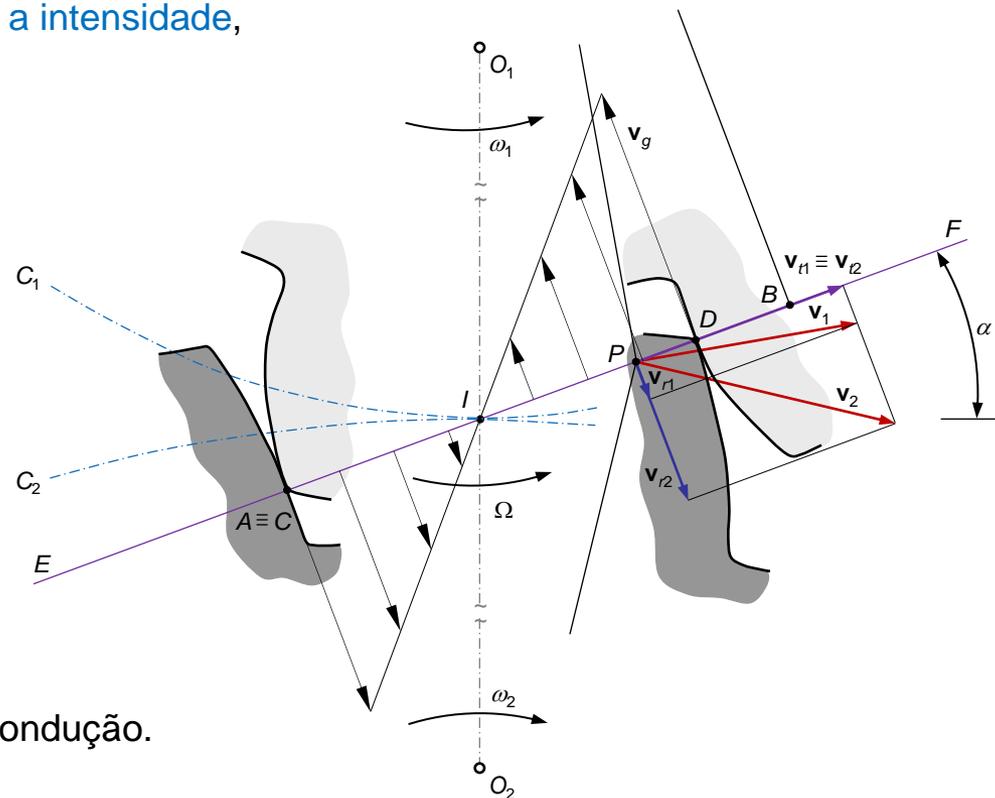


Fig. 25 Velocidades periféricas no engrenamento

## Escorregamento entre Perfis Conjugados

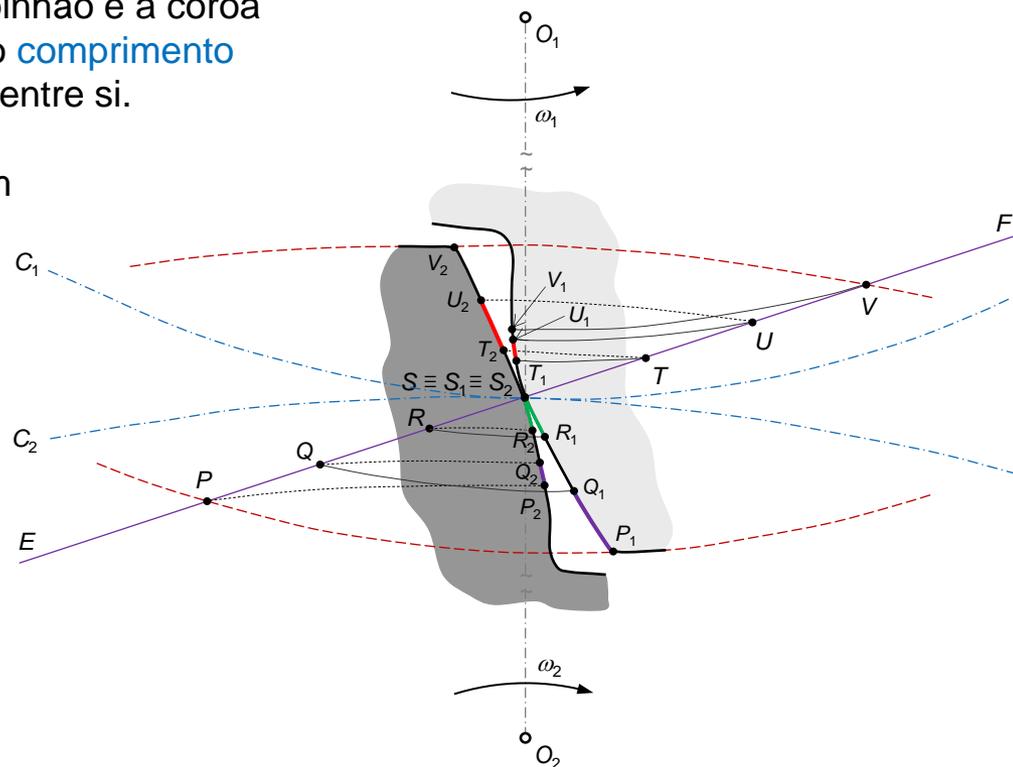
A figura 26 representa o engrenamento entre o pinhão e a coroa de uma engrenagem cilíndrica exterior, em que o **comprimento de condução está dividido em seis partes iguais** entre si.

As divisões do comprimento de condução podem ser **transferidas para os flancos dos dentes** do pinhão e da coroa desenhando arcos de circunferência com centros em  $O_1$  e  $O_2$ , respetivamente.

Assim, obtêm-se os **pontos correspondentes** a  $P$ ,  $Q$ , ...  $V$ , ou seja,

$$P_1, Q_1, \dots, V_1 \text{ e} \\ P_2, Q_2, \dots, V_2.$$

Atente-se agora a que os arcos  $P_1Q_1$  e  $P_2Q_2$  **têm comprimentos consideravelmente distintos**. Este facto, significa que no mesmo período de engrenamento, o movimento do ponto de contacto que descreve os arcos  $P_1Q_1$  e  $P_2Q_2$ , respetivamente nos flancos dos dentes do pinhão e da coroa, **acontece com escorregamento relativo entre os perfis dos dentes**.

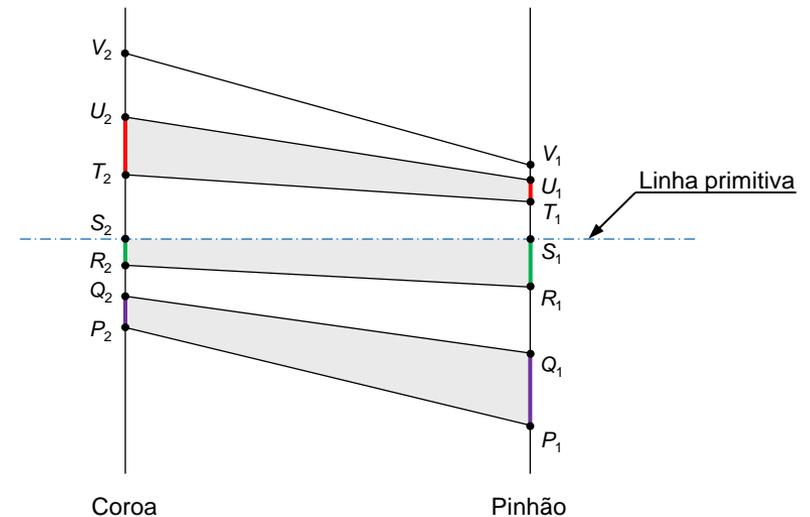


**Fig. 26** Escorregamento entre perfis conjugados

## Escorregamento entre Perfis Conjugados

A figura 27 diz respeito à [representação gráfica dos arcos representados na figura 26](#), em que são evidentes as diferenças nos comprimentos dos respetivos segmentos de reta.

Verifica-se, uma vez mais, que [o escorregamento é nulo no ponto primitivo](#) e que aquele aumenta à medida que o ponto de contacto se aproxima das extremidades dos perfis dos dentes.

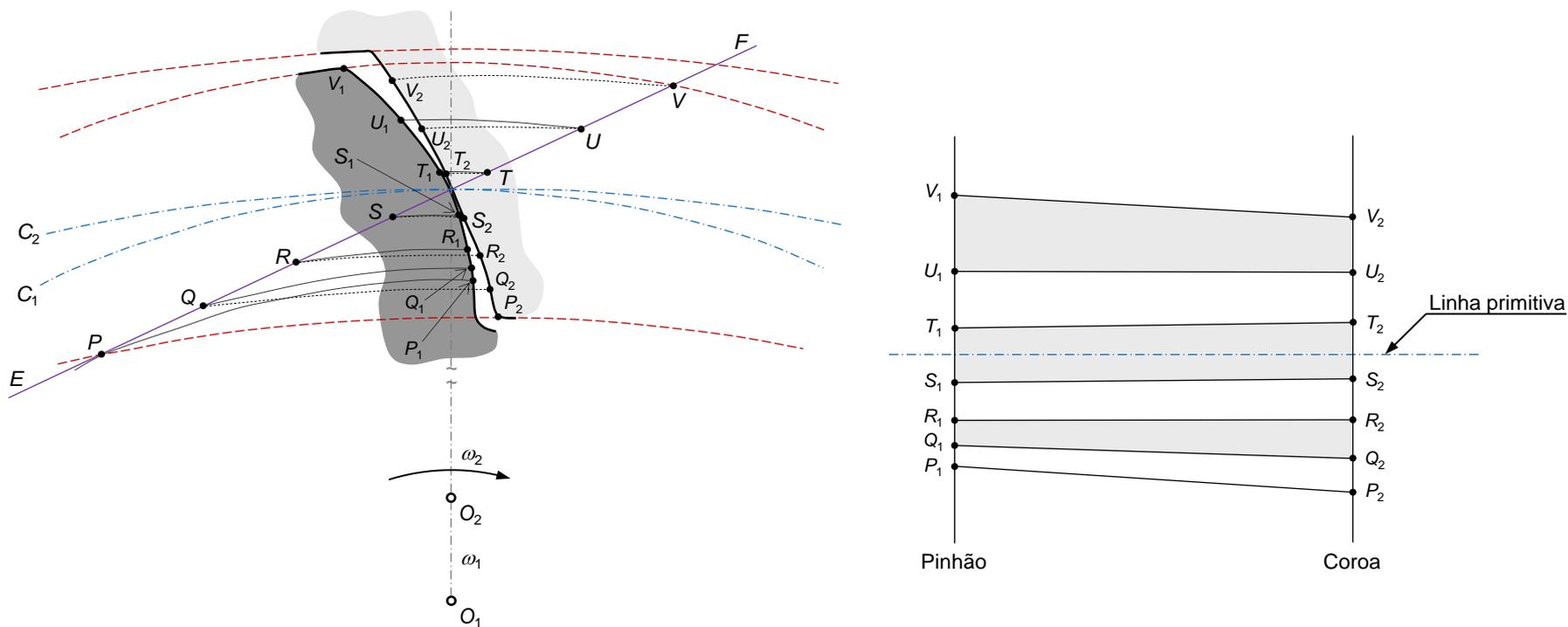


**Fig. 27** Escorregamento entre perfis conjugados

Na figura 28 (ver *slide* seguinte) apresenta-se graficamente o escorregamento para o caso de uma [engrenagem cilíndrica interior](#) em que foi seguida a mesma metodologia acima descrita para as engrenagens exteriores.

Em jeito de observação geral, pode dizer-se que as engrenagens interiores [apresentam menos escorregamento](#) que as engrenagens exteriores e, por conseguinte, [têm rendimentos superiores](#), tal como havia sido mencionado anteriormente.

## Escorregamento entre Perfis Conjugados



**Fig. 28** Escorregamento entre dois perfis conjugados de engrenagem interior

## Escorregamento Absoluto ou Total

O **escorregamento absoluto ou total** pode ser quantificado pelas **diferenças dos arcos dos perfis conjugados dos dentes do pinhão e da roda** nos períodos de aproximação e de afastamento.

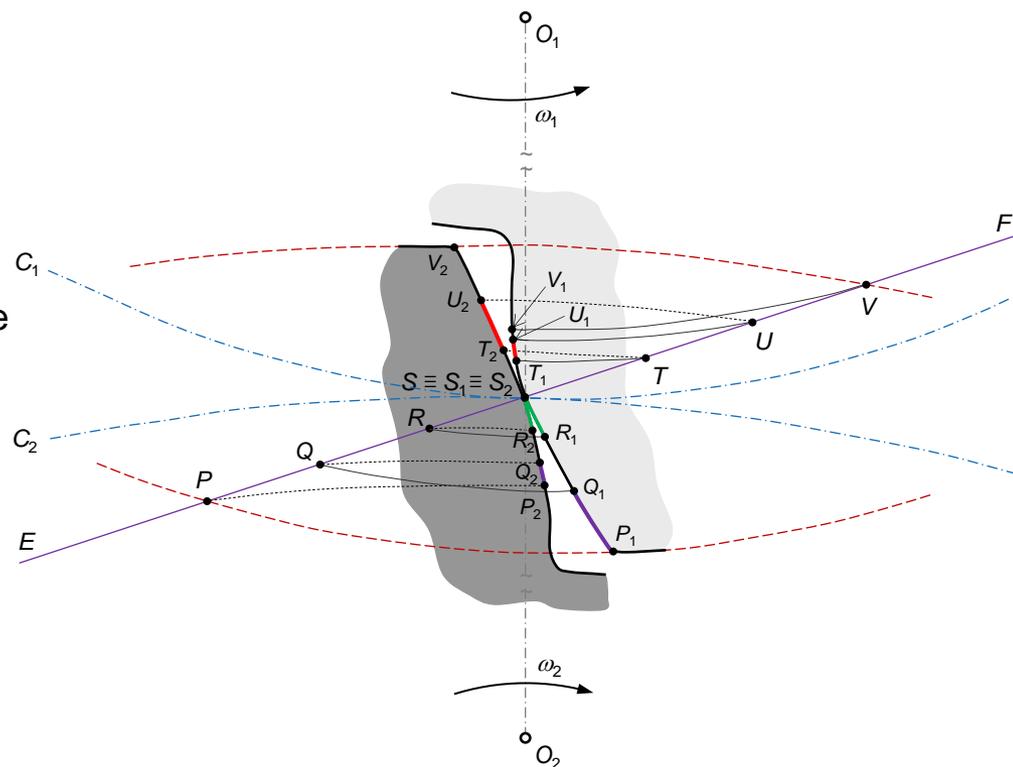
Com referência à figura 29 pode escrever-se que

$$g_a = IP_1 - IP_2 \quad (\text{escorreg. de aproximação})$$

$$g_f = IV_2 - IV_1 \quad (\text{escorreg. de afastamento})$$

Então, o **escorregamento total** é dado por

$$g = g_a + g_f = IP_1 - IP_2 + IV_2 - IV_1$$



**Fig. 29** Escorregamento entre perfis conjugados

## Escorregamento Absoluto ou Total

Considere-se agora a figura 30 em que um **ponto genérico,  $P$** , está localizado na **linha de engrenamento  $EF$** , o qual está a uma distância  $x$  do ponto primitivo.

Durante um **intervalo de tempo elementar  $dt$** , o ponto  $P$  desloca-se uma **distância elementar  $dx$** , enquanto as circunferências primitivas, que rolam sem escorregar, descrevem uma **trajetória angular elementar  $ds$** .

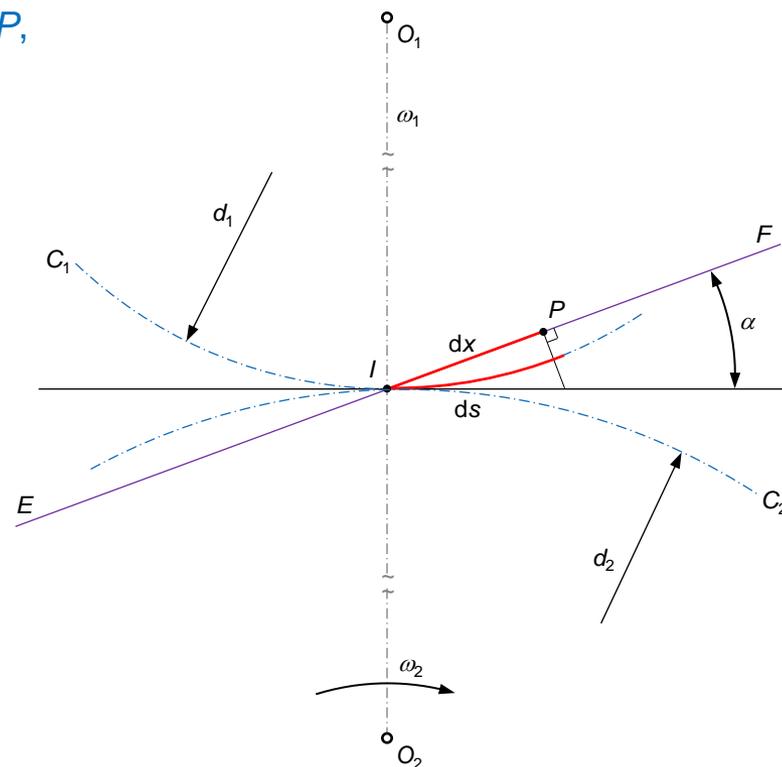
Da análise da figura 30 e atendendo a que as rodas rolam sem escorregar, pode escrever-se a seguinte relação

$$dx = ds \cos \alpha$$

Os arcos elementares descritos pelas circunferências primitivas podem ser determinadas considerando que aquelas descrevem um movimento uniforme

$$ds = v_1 dt = \omega_1 \frac{d_1}{2} dt$$

$$ds = v_2 dt = \omega_2 \frac{d_2}{2} dt$$



**Fig. 30** Deslocamento elementar

## Escorregamento Absoluto ou Total

Combinando agora as equações do slide anterior obtêm-se as seguinte expressões

$$\omega_1 dt = \frac{2}{d_1 \cos \alpha} dx$$

$$\omega_2 dt = \frac{2}{d_2 \cos \alpha} dx$$

Considerando a velocidade de escorregamento (*slide 27*), o **escorregamento elementar** correspondente ao intervalo de tempo  $dt$  pode ser escrito como

$$dg = (\omega_1 + \omega_2) x dt$$

Da substituição das equações de cima resulta que

$$dg = \left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \frac{2x}{\cos \alpha} dx$$

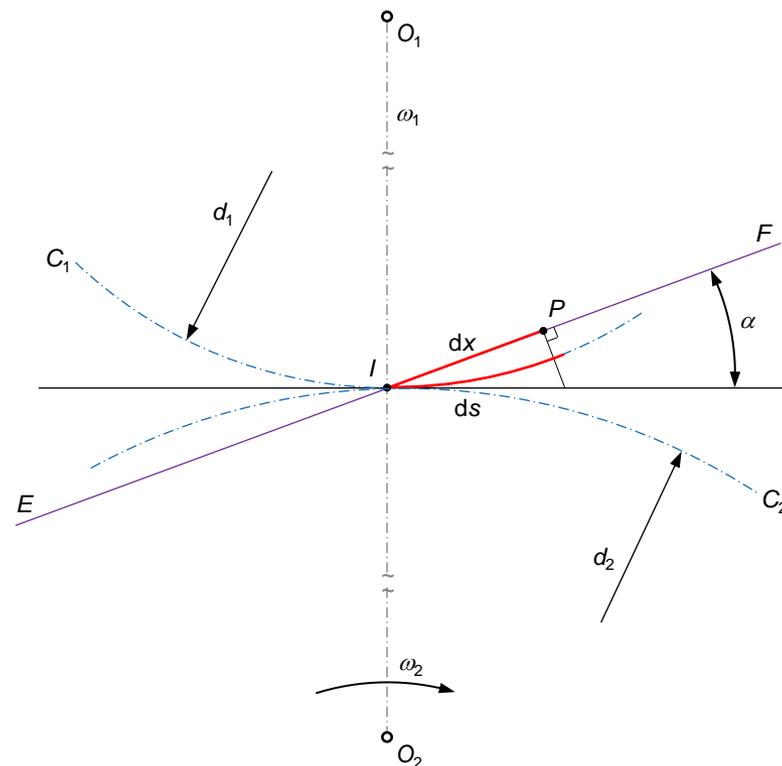


Fig. 31 Deslocamento elementar

## Escorregamento Absoluto ou Total

Logo, o **escorregamento total** pode ser obtido integrando a anterior ao longo de todo o comprimento de condução, em que se sabe que nos pontos  $C$  e  $D$  o valor de  $x$  é  $l_a$  e  $l_f$  respetivamente, ou seja

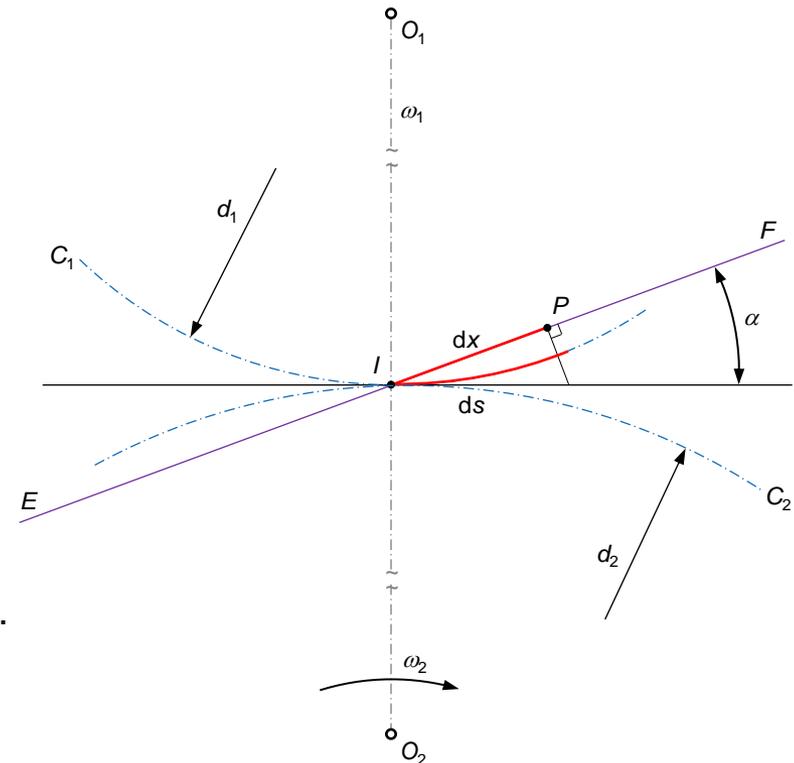
$$g = \int_{l_a}^{l_f} dg = \left( \frac{1}{d_1} \pm \frac{1}{d_2} \right) \frac{l_a^2 + l_f^2}{\cos \alpha}$$

onde o **sinal (+)** diz respeito às **engrenagens exteriores** e o sinal **(-)** se refere às engrenagens interiores.

O cálculo do escorregamento total é particularmente relevante na determinação do **rendimento das engrenagens**.

O conhecimento do escorregamento total **não é de per se** muito útil na caracterização **da evolução do desgaste que ocorre ao longo dos flancos dos dentes**, uma vez que o escorregamento é distribuído de modo bastante distinto no pinhão e na coroa (ver figura 27).

O **desgaste é mais acentuado no pinhão** do que na roda, sendo que a diferença nos desgastes será tanto maior quanto maior for a relação de transmissão. Os pontos críticos do desgaste são os pontos correspondentes ao **início e ao fim do engrenamento**.



**Fig. 32** Deslocamento elementar

## Escorregamento Específico

Com o intuito de mais facilmente se poderem relacionar os desgastes que ocorrem ao longo dos perfis dos dentes do pinhão e da coroa, define-se uma grandeza adimensional denominada de **escorregamento específico**.

O escorregamento específico é, por definição, o **quociente entre o escorregamento e o rolamento que se verifica nos perfis conjugados**. Assim, com referência à figura 27, durante o período de engrenamento que vai desde o ponto  $P$  até ao ponto  $Q$ , observa-se que

$$g_{s1} = \frac{\overline{P_1Q_1} - \overline{P_2Q_2}}{\overline{P_1Q_1}}$$

$$g_{s2} = \frac{\overline{P_1Q_1} - \overline{P_2Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}$$

em que  $g_{s1}$  e  $g_{s2}$  se referem aos escorregamentos específicos do pinhão e da coroa, respetivamente.

Com referência à figura 33 observa-se que as **velocidades de rolamento** dos perfis dos dentes do pinhão e da coroa estão representadas por  $v_{r1}$  e  $v_{r2}$ , respetivamente.

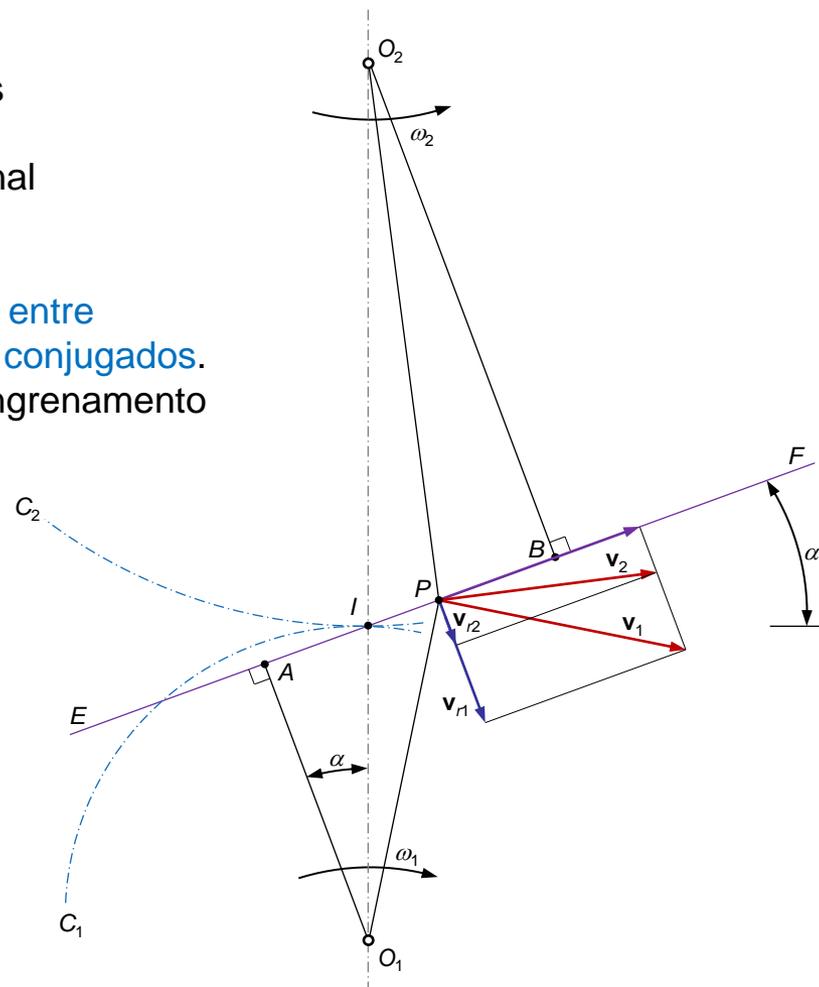


Fig. 33 Velocidades de rolamento

## Escorregamento Específico

Estas **velocidades de rolamento** podem ser expressas como

$$v_{r1} = \omega_1 \overline{AP}$$

$$v_{r2} = \omega_2 \overline{BP}$$

em que  $P$  é um ponto genérico que se considera como pertencente, ora ao pinhão, ora à coroa.

Assim, as **velocidades de escorregamento específico** entre os perfis dos dentes do pinhão e da coroa podem ser determinadas pela diferença entre as velocidades de rolamento. Então, tem-se que

$$v_{g1} = v_{r1} - v_{r2}$$

$$v_{g2} = v_{r2} - v_{r1}$$

onde  $v_{g1}$  é a **velocidade de escorregamento do perfil do dente do pinhão relativamente ao perfil do dente da coroa** e, por sua vez,  $v_{g2}$  diz respeito à **velocidade de escorregamento do perfil do dente da coroa em relação ao perfil do dente do pinhão**.

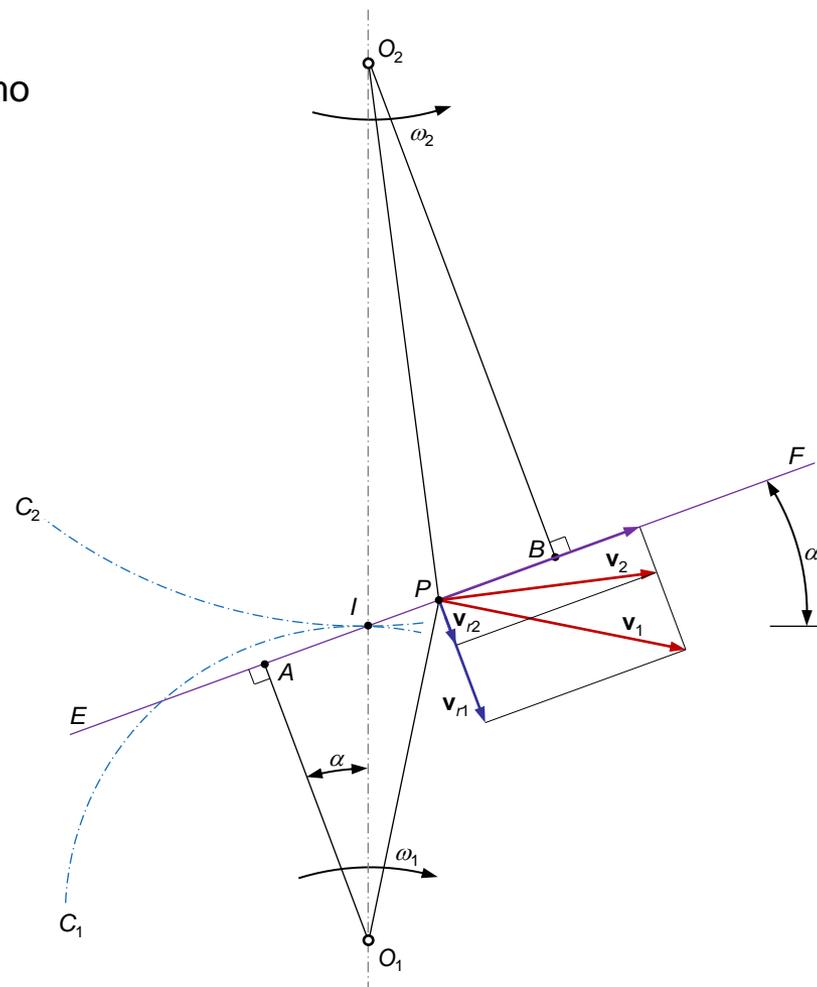


Fig. 34 Velocidades de rolamento

## Escorregamento Específico

O escorregamento específico pode também ser estabelecido como sendo o **quociente entre a velocidade de escorregamento e a velocidade de rolamento**, ou seja.

$$g_{s1} = \frac{v_{r1} - v_{r2}}{v_{r1}} = 1 - \frac{v_{r2}}{v_{r1}}$$

$$g_{s2} = \frac{v_{r1} - v_{r2}}{v_{r2}} = \frac{v_{r1}}{v_{r2}} - 1$$

Da análise das expressões anteriores observa-se que no **ponto primitivo os escorregamentos específicos são nulos**.

Por seu lado, no **ponto A** (ponto de início do engrenamento) **é nula a velocidade de rolamento  $v_{r1}$** , pelo que, neste ponto o correspondente escorregamento específico tende para infinito.

Do mesmo modo, no **ponto B** (ponto de término do engrenamento) **o escorregamento específico  $g_{s2}$  tende para infinito**.

Observa-se que os escorregamentos específicos  **$g_{s1}$  e  $g_{s2}$  são iguais à unidade nos pontos B e A**, respetivamente.

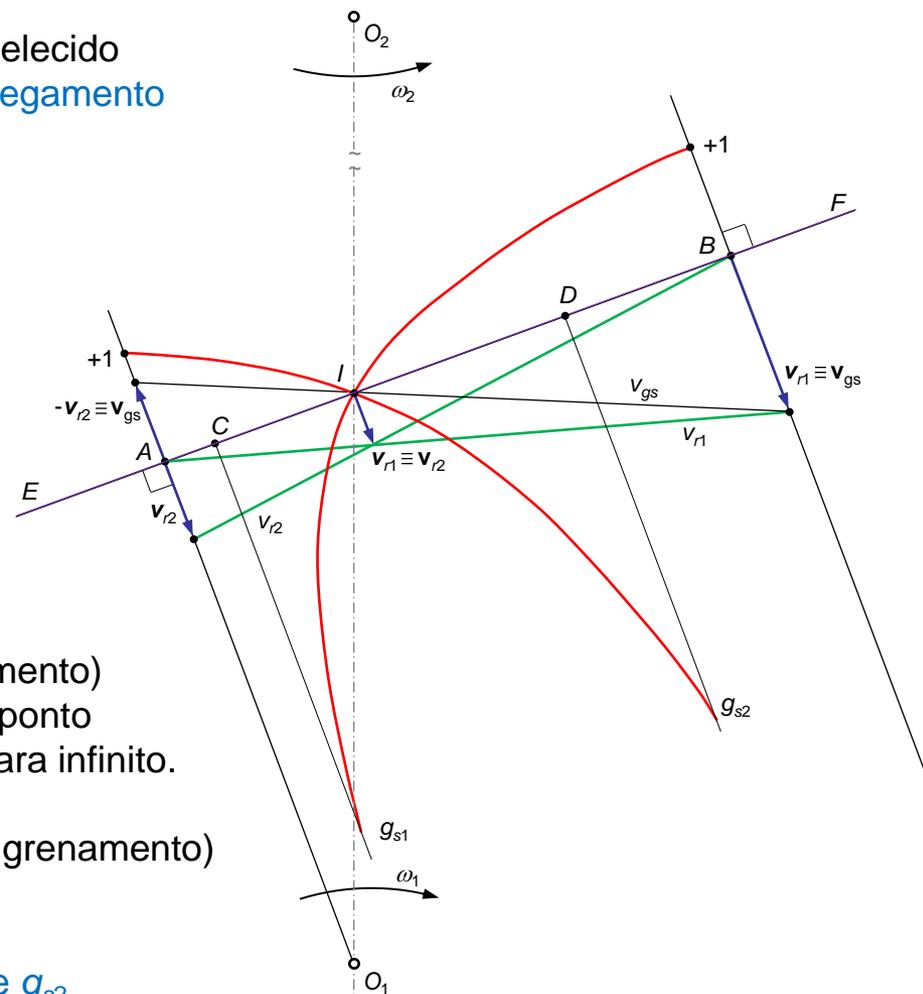


Fig. 35 Escorregamentos específicos

## Escorregamento Específico Máximo

Para **minimizar os escorregamentos específicos** (e o desgaste) nas engrenagens, deve **reduzir-se o comprimento do arco de condução nas proximidades dos pontos A e B**.

Com o propósito de proporcionar **durabilidades equivalentes para o pinhão e para a coroa** devem igualar-se os seus escorregamentos específicos. Todavia, do ponto de vista prático, apenas se torna relevante e útil igualar os **escorregamentos específicos máximos**, isto é

$$(g_{s1})_{\max} = (g_{s2})_{\max}$$

Considere-se a figura 35 em que se representa um **engrenamento entre o pinhão (1) e a coroa (2)**, bem como as respetivas velocidades de rolamento.

Verifica-se que o escorregamento específico máximo  $(g_{s1})_{\max}$  ocorre no início do engrenamento, ou seja no ponto C.

Com referência à figura 36 pode escrever-se que

$$v_{r1} = \omega_1 \overline{AC}$$

$$v_{r2} = \omega_2 \overline{BC}$$

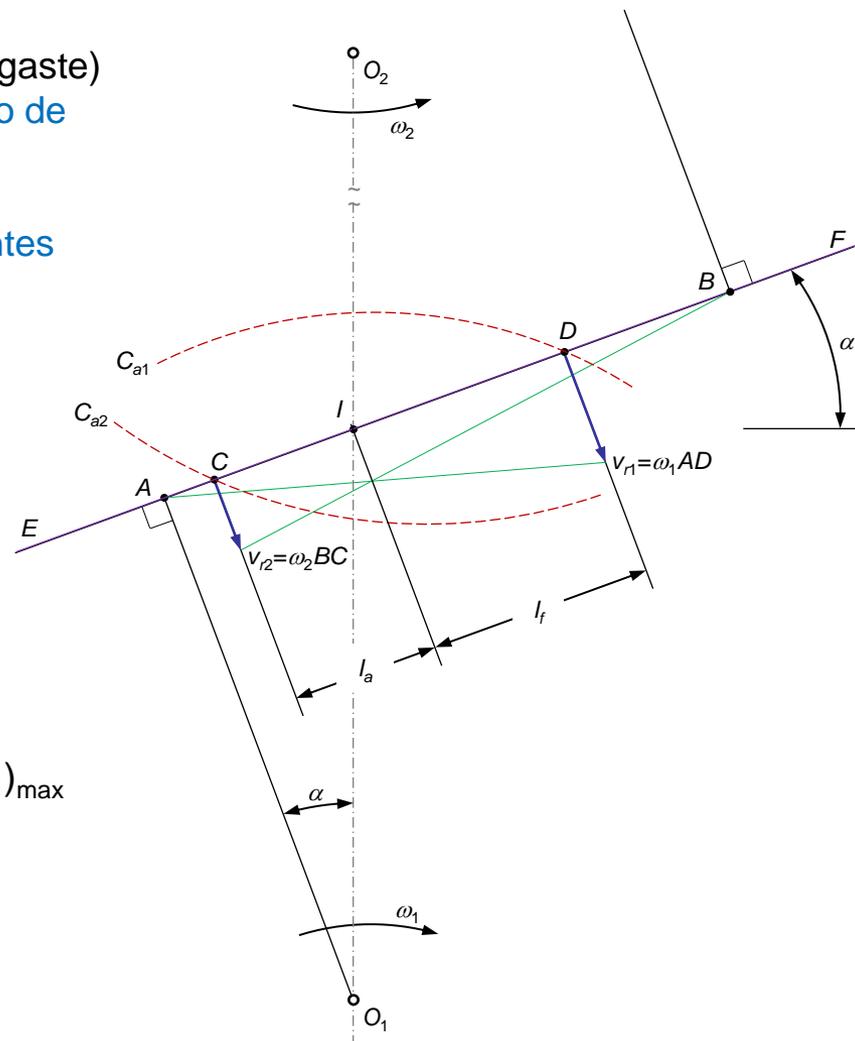


Fig. 36 Velocidades de rolamento

## Escorregamento Específico Máximo

Com referência à figura 36 pode escrever-se que

$$v_{r1} = \omega_1 \overline{AC} \quad v_{r2} = \omega_2 \overline{BC}$$

em que

$$\overline{AC} = \overline{AI} - \overline{IC} = \frac{d_1 \operatorname{sen} \alpha}{2} - l_a = \frac{d_1 \operatorname{sen} \alpha - 2l_a}{2}$$

$$\overline{BC} = \overline{IB} + \overline{IC} = \frac{d_2 \operatorname{sen} \alpha}{2} + l_a = \frac{d_2 \operatorname{sen} \alpha + 2l_a}{2}$$

Então, o **valor máximo do escorregamento específico**  $(g_{s1})_{\max}$  pode ser calculado combinando as equações anteriores, resultando em

$$(g_{s1})_{\max} = 1 - \frac{v_{r2}}{v_{r1}} = 1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{\frac{d_2 \operatorname{sen} \alpha + 2l_a}{2}}{\frac{d_1 \operatorname{sen} \alpha - 2l_a}{2}} = 1 - \frac{1}{i} \frac{d_2 \operatorname{sen} \alpha + 2l_a}{d_1 \operatorname{sen} \alpha - 2l_a}$$

De modo análogo tem-se que  $(g_{s2})_{\max}$

$$(g_{s2})_{\max} = i \frac{d_1 \operatorname{sen} \alpha + 2l_f}{d_2 \operatorname{sen} \alpha - 2l_f} - 1$$

em que  $l_a$  e  $l_f$  são os **comprimentos de aproximação e de afastamento**.

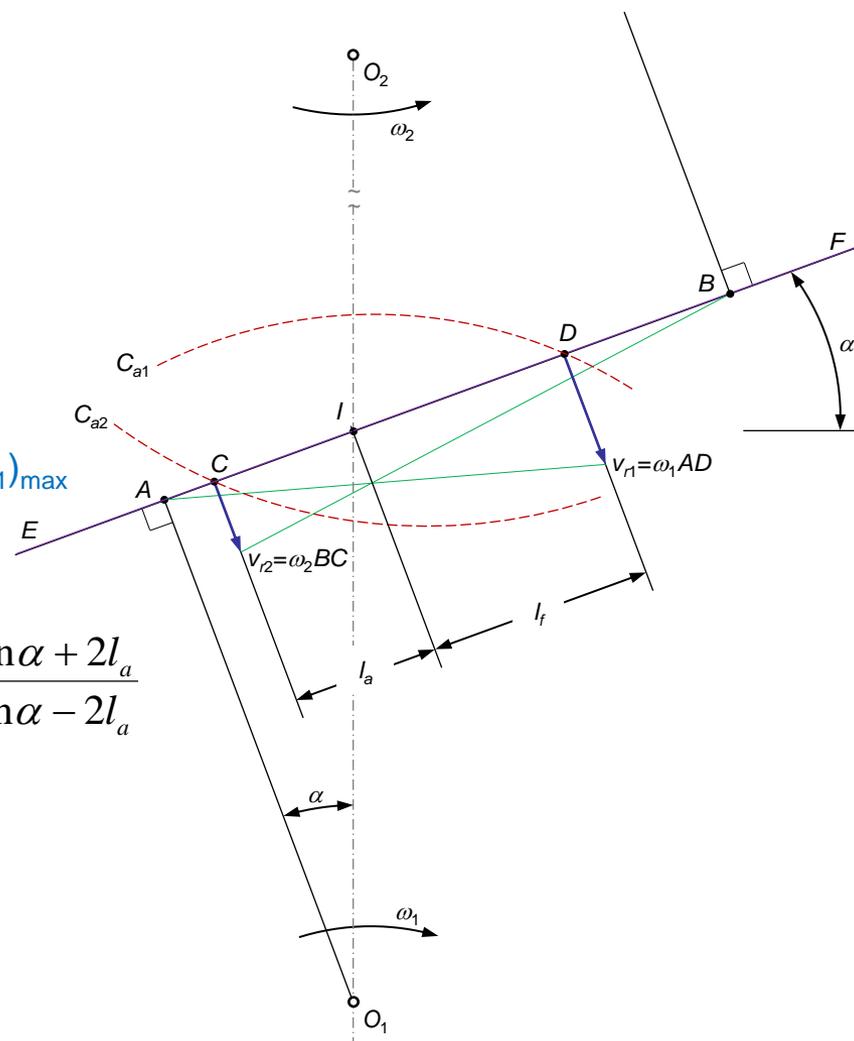


Fig. 37 Velocidades de rolamento

## Exercício de Aplicação

Considere uma [engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto normalizado](#), em que o pinhão e a coroa têm, respetivamente, 19 e 76 dentes. Atendendo a que o módulo é igual a 3 mm, [calcule os valores dos escorregamentos específicos máximos](#). Comente o resultado obtido.

Resposta:

$$(g_{s1})_{\max} = -5,95$$

$$(g_{s2})_{\max} = 1,06$$

Atente-se a que os escorregamentos específicos máximos que se verificam no pinhão e na roda são bastante desequilibrados.

Na verdade, para dentados não corrigidos, o desequilíbrio pode ser diminuído aumentando o ângulo de pressão. Se se aumentar ângulo de pressão para  $25^\circ$  resultam valores mais equilibrados, isto é

$$(g_{s1})_{\max} = -1,58$$

$$(g_{s2})_{\max} = 0,71$$

## Trabalho Útil e Trabalho Disponível

O **rendimento** de uma engrenagem pode ser estabelecido como o **quociente entre o trabalho útil e o trabalho disponível**

$$\eta = \frac{W_u}{W_d}$$

em que  $W_u$  diz respeito ao **trabalho útil**, ou seja, o trabalho que é efetivamente transmitido pela engrenagem, sendo  $W_d$  o **trabalho motor disponível** na engrenagem, isto é, o trabalho teórico ou total que existe na engrenagem.

O **trabalho útil** é dado pela diferença entre o **trabalho disponível** ( $W_d$ ) e o **trabalho dissipado por atrito** ( $W_a$ ) durante o engrenamento, ou seja

$$W_u = W_d - W_a$$

O **trabalho motor disponível**, que pode ser fornecido à coroa, durante **uma volta completa do pinhão**, é dado por

$$W_d = F_t \Delta s = N \cos \alpha \pi d_1$$

em que  $\Delta s$  é o **deslocamento** efetuado pelo pinhão durante uma volta completa, **ou seja, o perímetro  $\pi d_1$**

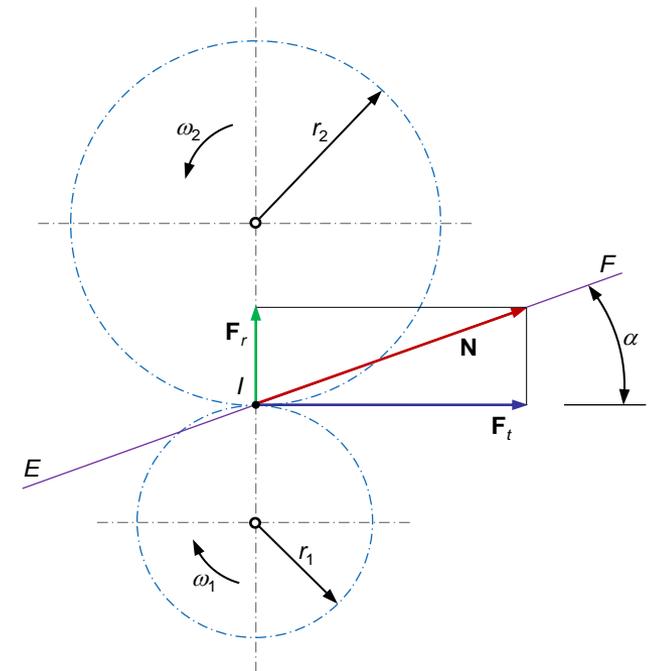


Fig. 38 Forças de engrenamento

## Trabalho Dissipado por Atrito

A **presença do atrito** entre os perfis conjugados dá origem a uma **força de atrito que atua perpendicularmente à linha de engrenamento**. Por conseguinte, a força resultante que atua nas superfícies dos dentes não tem a mesma direção da linha de engrenamento (ver figura 39).

Nesta análise admite-se que o **pinhão (1) é a roda motora**.

Atendendo à **lei de atrito de Coulomb**, pode escrever-se a seguinte expressão para a força de atrito

$$F_a = \mu N$$

onde  $\mu$  representa o **coeficiente de atrito** e  $N$  é a **força que atua na direção normal** aos perfis conjugados, isto é, na direção da linha de engrenamento (ver figura 39).

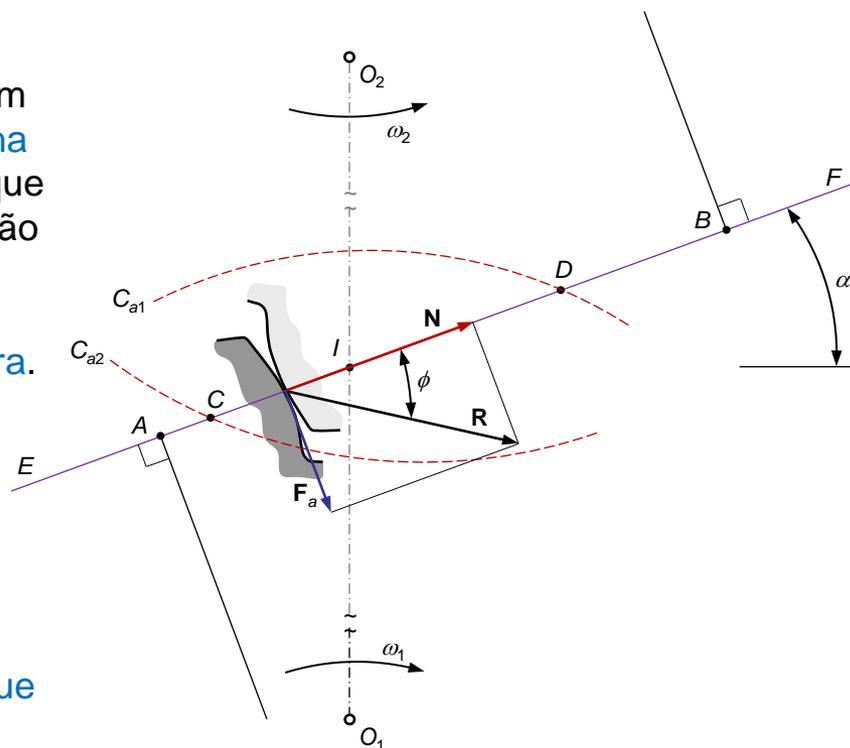


Fig. 39 Forças de contacto

O **trabalho dissipado por atrito** num par de dentes em contacto pode ser expresso do seguinte modo

$$W'_a = F_a \Delta s = \mu N g$$

em que o **deslocamento** associado a este trabalho é o **escorregamento total**.

## Trabalho Dissipado por Atrito

Considerando a expressão para o escorregamento total (ver *slide 35*) vem que

$$W'_a = \mu N \left( \frac{1}{d_1} \pm \frac{1}{d_2} \right) \frac{l_a^2 + l_f^2}{\cos \alpha}$$

Esta equação **apenas** representa o trabalho dissipado por atrito pelos perfis conjugados dos **pares de dentes engrenados**, a que corresponde o comprimento de condução ( $l = l_a + l_f$ ).

Da análise da figura 40 observa-se que **durante o período de engrenamento**, que vai desde o ponto C até ao ponto D, o **pinhão descreve um ângulo  $\theta$**  igual a

$$\theta = \frac{l_a + l_f}{r_{b1}} = \frac{2(l_a + l_f)}{d_1 \cos \alpha}$$

O **número total de períodos de engrenamento** é dado por

$$n_T = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{2(l_a + l_f)}{d_1 \cos \alpha}} = \frac{\pi d_1 \cos \alpha}{l_a + l_f}$$

A frequência ( $f$ ) diz respeito ao **número de ocorrências** de um evento num determinado intervalo de tempo.

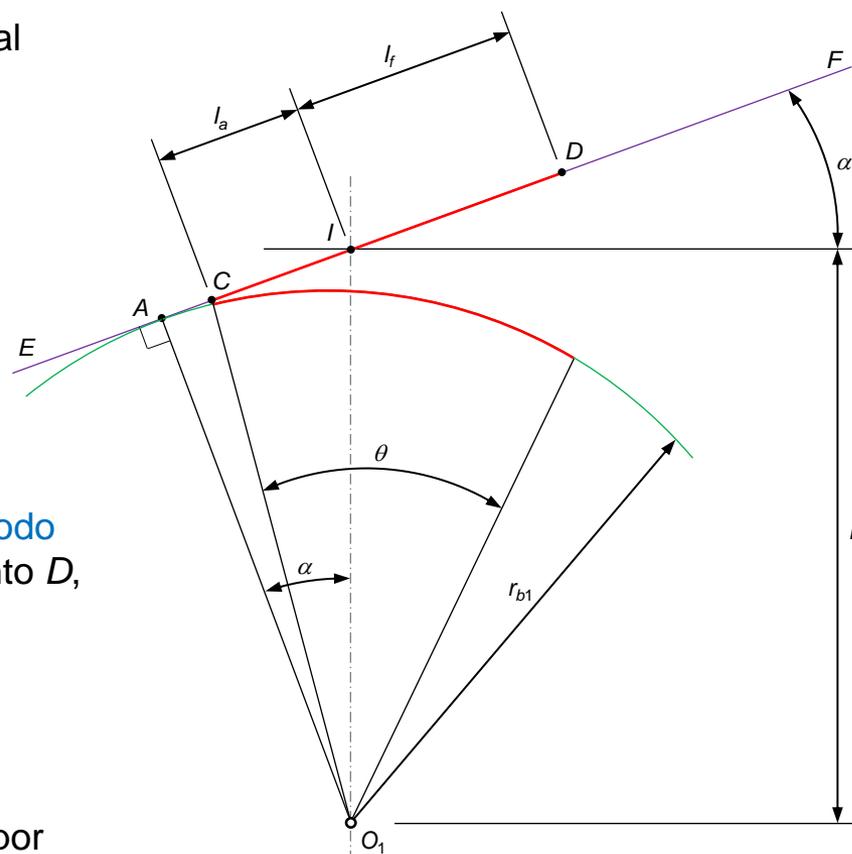


Fig. 40 Comprimento de condução

## Trabalho Dissipado por Atrito

Então, o **trabalho dissipado por atrito** (escorregamento) durante uma volta completa do pinhão é igual a

$$W_a = \mu N \left( \frac{1}{d_1} \pm \frac{1}{d_2} \right) \frac{l_a^2 + l_f^2}{\cos \alpha} \frac{\pi d_1 \cos \alpha}{l_a + l_f} \quad \text{ou seja} \quad W_a = \pi \mu N \left( \frac{1}{d_1} \pm \frac{1}{d_2} \right) \frac{l_a^2 + l_f^2}{l_a + l_f} d_1$$

Pelo que o **trabalho útil, que é transmitido efetivamente** pela engrenagem durante uma rotação completa do pinhão, é dado por

$$W_u = N \cos \alpha \pi d_1 - \pi \mu N \left( \frac{1}{d_1} \pm \frac{1}{d_2} \right) \frac{l_a^2 + l_f^2}{l_a + l_f} d_1$$

Então, o rendimento de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos (exterior ou interior) pode ser definido do seguinte modo

$$\eta = \frac{W_d - W_a}{W_d} \quad \text{ou seja} \quad \eta = 1 - \frac{\mu}{\cos \alpha} \left( \frac{1}{d_1} \pm \frac{1}{d_2} \right) \frac{l_a^2 + l_f^2}{l_a + l_f}$$

Finalmente, considerando

$$\frac{1}{d_1} \pm \frac{1}{d_2} = \frac{d_2}{d_1 d_2} \pm \frac{1}{d_2} = \frac{i}{d_2} \pm \frac{1}{d_2} = \frac{1}{d_2} (i \pm 1) = \frac{1}{m z_2} (i \pm 1) \quad \text{e que} \quad l_a + l_f = \varepsilon \pi m \cos \alpha$$

vem que

$$\eta = 1 - \frac{\mu (l_a^2 + l_f^2) (i \pm 1)}{\pi \varepsilon z_2 m^2 \cos^2 \alpha}$$

## Exercício de Aplicação

Considere uma [engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto normalizado](#), em que o pinhão e a coroa têm, respetivamente, 19 e 76 dentes. Atendendo a que o módulo é igual a 3 mm e que o coeficiente de atrito é de 0,05, [determine o rendimento da engrenagem](#). Comente o resultado obtido.

Resposta:

$$l_a = 8,05 \text{ mm}$$

$$l_f = 6,84 \text{ mm}$$

$$i = 4$$

$$\varepsilon = 1,68$$

Logo, o [rendimento da engrenagem](#) é  $\eta = 99,13\%$ .

Refira-se que, tal como seria expectável, as engrenagens cilíndricas de dentes retos apresentam valores de rendimento bastante elevados.

Deve dizer-se que os valores que resultam da expressão do rendimento não entram em consideração com a deformação elástica dos dentes, com o efeito da lubrificação, bem como possíveis erros associados ao fabrico e à montagem.

## Conceito de Interferência

Quando se projeta uma engrenagem com perfil dos dentes em evolvente de círculo é expectável que os **perfis conjugados** dos pares de dentes em contacto **sejam continuamente tangentes**.

Em determinadas situações os perfis dos dentes deixam de ser conjugados por uma de duas razões:

- os **perfis em contacto não são tangentes**
- os **flancos em contacto tendem a interpenetrar-se**

Da figura 40 observa-se que os **pontos de início e término de engrenamento**, pontos **C** e **D**, estão situados **fora dos limites** estabelecidos pelos pontos de tangência.

Este cenário configura uma situação **de interferência de funcionamento**, uma vez que a ponta da coroa contacta com o flanco do dente do pinhão no ponto **P**, o qual está situado no **interior da circunferência de base**  $C_{b1}$ .

Daqui pode inferir-se que as partes dos perfis dos dentes que se situam no interior da circunferência de base não são conjugados (ditos **perfis não evolventes**).

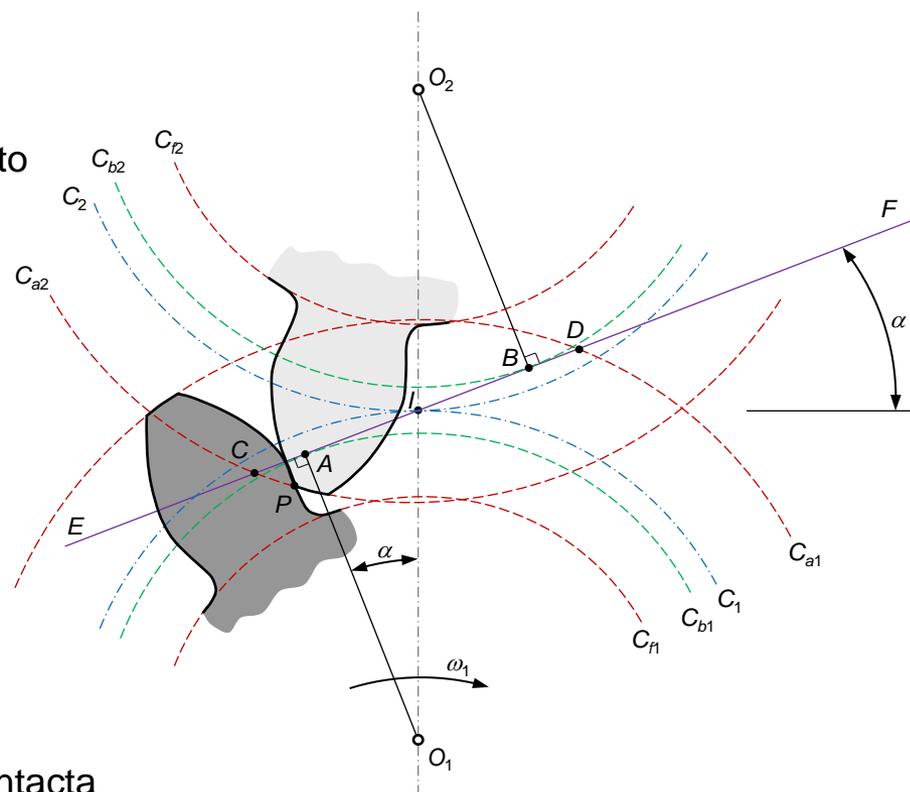


Fig. 41 Engrenagem de dentes retos

## Eliminação de Interferências

As interferências de funcionamento ocorrem quando a **coroa dos dentes da roda contacta com os flancos dos dentes do pinhão**.

Uma das consequências associadas às interferências de funcionamento prende-se com o bloqueio ou encravamento das engrenagens.

No caso do engrenamento ilustrado na figura 41, o seu funcionamento só poderia ocorrer **se se afastassem os centros das rodas** e, deste modo, impusesse uma folga significativa que permitisse o movimento entre o pinhão e a roda.

O problema das interferências de funcionamento é **total e automaticamente resolvido quando os dentes das rodas são talhados pelo processo de geração**, uma vez que a ferramenta de corte remove a porção interferente do flanco de raiz do dente (ver figura 42).

Em suma, para que não haja interferências de funcionamento, as saliências dos dentes devem ter um valor de modo a que o **comprimento de condução (segmento  $CD$ ) seja igual ou inferior à distância entre os pontos de tangência da linha de engrenamento com as circunferências de base (segmento  $AB$ )**.

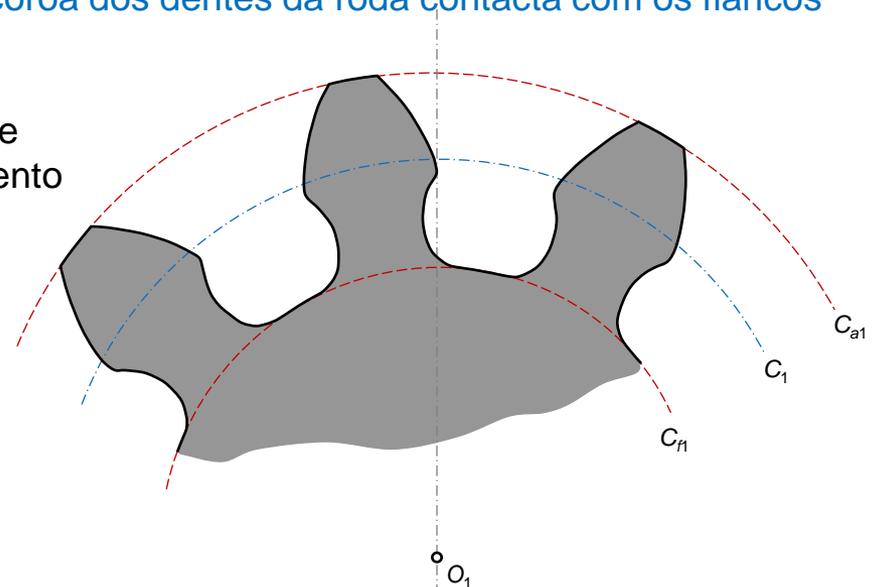


Fig. 42 Eliminação de interferências

## Determinação do Número Mínimo de Dentes

Na figura 43 representa-se a **situação limite de interferência**, isto é, as circunferências de coroa das rodas passam pelos pontos de tangência **A** e **B**.

Na figura 43 pode identificar-se o triângulo retângulo  $O_2AB$ , denominado **triângulo limite**. Da análise do triângulo  $O_2AB$ , pode escrever-se que

$$\left(\overline{O_2A}\right)^2 = \left(\overline{O_2B}\right)^2 + \left(\overline{AB}\right)^2$$

Atendendo a que

$$\overline{O_2A} = \frac{d_2}{2} + h_{a2} \quad \overline{O_2B} = \frac{d_2}{2} \cos \alpha$$

$$\overline{AB} = \overline{AI} + \overline{IB} \quad \overline{AI} = \frac{d_1}{2} \operatorname{sen} \alpha \quad \overline{IB} = \frac{d_2}{2} \operatorname{sen} \alpha$$

então, a **equação relativa ao triângulo limite** resulta que

$$\left(\frac{d_2}{2} + h_{a2}\right)^2 \leq \left(\frac{d_2}{2} \cos \alpha\right)^2 + \left(\frac{d_1}{2} \operatorname{sen} \alpha + \frac{d_2}{2} \operatorname{sen} \alpha\right)^2$$

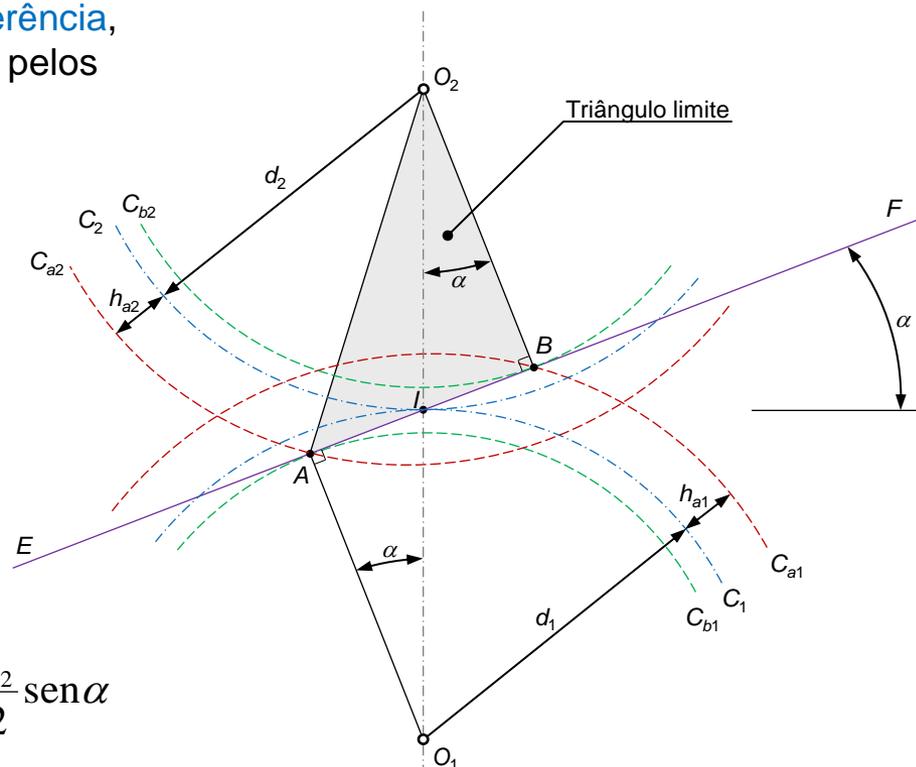


Fig. 43 Triângulo limite

## Determinação do Número Mínimo de Dentes

Por outro lado, sabe-se que

$$d_1 = mz_1$$

$$d_2 = mz_2$$

$$h_{a2} = m$$

Então, da equação do triângulo limite vem que

$$\left(\frac{mz_2}{2} + m\right)^2 \leq \left(\frac{mz_2}{2} \cos \alpha\right)^2 + \left(\frac{mz_1}{2} \operatorname{sen} \alpha + \frac{mz_2}{2} \operatorname{sen} \alpha\right)^2$$

E finalmente obtém-se que

$$z_1 \geq -z_2 + \sqrt{z_2^2 + \frac{4(z_2 + 1)}{\operatorname{sen}^2 \alpha}}$$

Esta equação permite calcular o número mínimo de dentes que um pinhão deve ter para que não haja interferências de funcionamento.

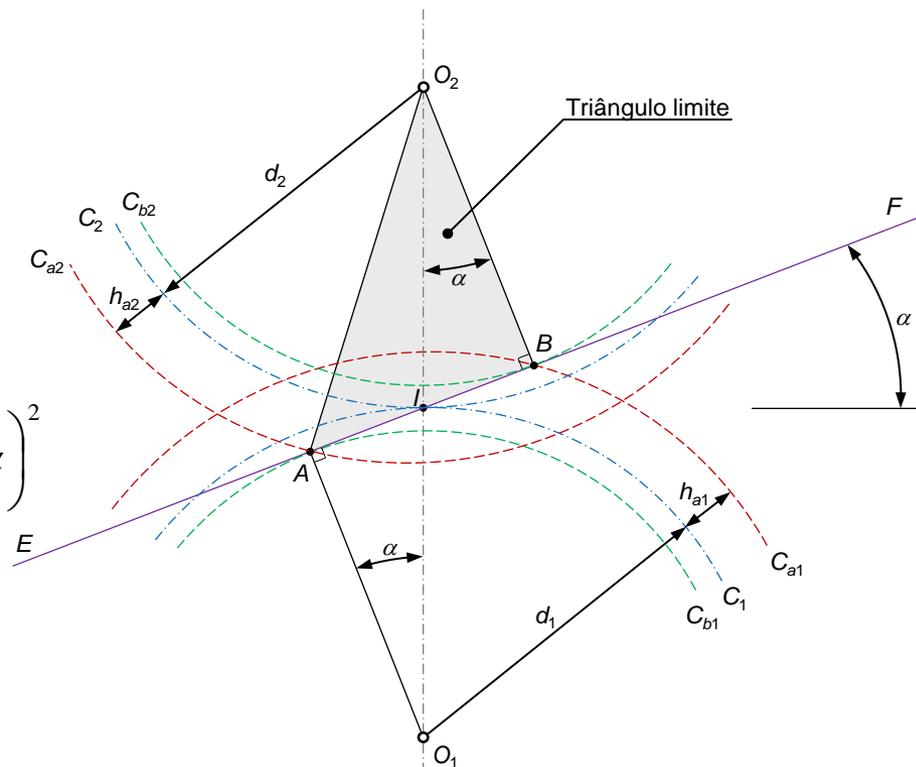


Fig. 44 Triângulo limite

## Determinação do Número Mínimo de Dentes

O **caso mais desfavorável** diz respeito ao **engrenamento pinhão-cremalheira**. Como uma cremalheira tem um número infinito de dentes, a equação anterior é simplificada e escrita do seguinte modo

$$z_1 \geq \frac{2}{\sin^2 \alpha}$$

Registe-se que para o valor mais comum do ângulo de pressão ( $20^\circ$ ), o número mínimo de dentes do pinhão para garantir a inexistência de interferências de funcionamento é igual de 17.

**As interferências de funcionamento podem ser controladas**, ou mesmo eliminadas, durante a fase de projeto, **reduzindo a saliência** dos dentes. A questão central que se coloca é a de saber **qual deverá o valor máximo da saliência** de modo a que não haja interferências de funcionamento. Assim, admita-se que a saliência pode ser expressa em função do módulo da seguinte forma

$$h_a = w_a m$$

em que  $m$  representa o módulo e  $w_a$  é o coeficiente de saliência.

Repetindo o raciocínio anteriormente desenvolvido obtém-se que

$$\left( \frac{mz_2}{2} + w_a m \right)^2 = \left( \frac{mz_2}{2} \cos \alpha \right)^2 + \left( \frac{mz_1}{2} \sin \alpha + \frac{mz_2}{2} \sin \alpha \right)^2$$

## Determinação do Coeficiente de Saliência

ou seja

$$(z_1^2 + 2z_1z_2)\text{sen}^2\alpha - 4w_a(z_2 + w_a) = 0$$

Resolvendo esta equação em ordem ao [coeficiente de saliência](#) tem-se que

$$w_a = -\frac{z_2}{2} \pm \sqrt{\frac{z_2^2}{4} + \frac{z_1^2 + 2z_1z_2}{4}\text{sen}^2\alpha}$$

Esta expressão permite [calcular o valor do coeficiente de saliência máximo](#) de modo a garantir que não há interferências de funcionamento entre duas rodas dentadas com um ângulo de pressão  $\alpha$  e com  $z_1$  e  $z_2$  dentes.

É evidente que o [coeficiente de saliência deverá ser inferior à unidade](#), quando numa engrenagem existe a possibilidade de ocorrerem interferências de funcionamento.

Deve agora chamar-se a atenção que [a redução da saliência dos dentes penaliza a continuidade](#) do engrenamento, pelo que, após a determinação do valor do coeficiente de saliência é necessário, fazer a verificação se existe, ou não, continuidade do engrenamento.



## Exercício de Aplicação

Considere uma [engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto normalizado](#), em que o pinhão e a coroa têm, respetivamente, 19 e 76 dentes. Atendendo a que o módulo é igual a 3 mm, [verifique se existem interferências de funcionamento](#).

Resposta:

$z_1 > 15,70$  (utilizando a última equação do *slide* 50)

Como na engrenagem em estudo o pinhão tem, de facto, [19 dentes](#), não há interferências de funcionamento



## Perguntas de Revisão

Apresenta-se, de seguida, um **conjunto diversificado de questões** relativas aos principais aspetos relacionados com a temática das engrenagens cilíndricas de dentes retos:

- Quais os principais parâmetros que caracterizam uma roda dentada cilíndrica de dentes retos normalizados?
- Distinga comprimento de aproximação de comprimento de afastamento.
- Defina continuidade do engrenamento.
- Quais são as principais variáveis que influenciam a relação de condução numa engrenagem cilíndrica de dentes retos?
- Explique por que razões a relação de condução deve estar compreendida entre 1,2 e 1,6.
- Explique porque existe sempre um escorregamento entre as superfícies de contacto de um par de dentes.
- Explique como varia a velocidade de escorregamento ao longo da linha de condução.
- Qual é a importância de igualar os escorregamentos específicos?
- Defina rendimento de uma engrenagem.
- Quais são as principais variáveis geométricas que afetam o rendimento de uma engrenagem?
- Explique o conceito de interferências de funcionamento.
- Liste dois métodos que permitem controlar ou minimizar as interferências de funcionamento.
- Qual é o número mínimo de dentes que o pinhão de uma engrenagem do tipo pinhão-cremalheira deve ter para que não haja interferências de funcionamento?



## Bibliografia

Apresentam-se em seguida as [principais fontes bibliográficas](#) utilizadas na preparação deste documento:

- Branco, C.M., Ferreira, J.M., da Costa, J.D., Ribeiro, A.S. (2009) *Projecto de Órgãos de Máquinas*. 2ª Edição, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Budynas, R.G., Nisbett, J.K. (2011) *Elementos de Máquinas de Shigley*. 8ª edição McGraw-Hill, Brasil.
- Flores, P., Gomes, J. (2014a) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens. 1. Aspectos gerais sobre engrenagens*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia, publicação interna, Guimarães, Portugal, 41p.
- Flores, P., Gomes, J. (2014b) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens. 2. Engrenagens cilíndricas de dentes retos*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia, publicação interna, Guimarães, Portugal, 44p.
- Henriot, G. (1979) *Traité Théorique et Pratique des Engrenages*. Editora Dunod.
- Juvinall, R.C., Marshek, K.M. (2006) *Fundamentals of Machine Component Design*. John Wiley and Sons, New York.
- Wilson, C.E., Sadler, J.P. (1993) *Kinematics and Dynamics of Machinery*. 2nd Edition, Harper Collins College Publishers, New York.