Universidade do Minho
Escola de Ciências

Isabel Sofia da Silva Ferreira

Relatório de Atividade Profissional

ao abrigo do despacho RT-38/2011

Mestrado em Ciências
Formação Contínua de Professores
Área de especialização em Matemática

Trabalho efetuado sob a orientação da

Professora Doutora Ana Cristina Ferreira

Outubro de 2014

Agradecimentos

A realização deste trabalho só foi possível graças à contribuição e apoio recebido de várias pessoas a quem devo expressar a minha gratidão.

À Professora Doutora Ana Cristina Ferreira, pelo seu trabalho de orientação, pelos conhecimentos que me transmitiu, pelos sábios conselhos, pelos comentários construtivos e pela disponibilidade que sempre demonstrou.

Aos meus filhos e marido um agradecimento muito especial, pois sem a sua força, sem os seus sorrisos, sem os seus mimos, toda esta caminhada não teria sido possível nem faria sentido.

À Paulinha e ao Filipe que contribuíram de uma forma positiva e incondicional, ajudando a encarrar as diferentes fases com motivação e sugestões.

Aos meus Pais, um enorme obrigada por acreditarem sempre em mim e naquilo que faço, por me incentivarem a ir sempre mais longe e por todos os ensinamentos de vida. Espero que mais esta etapa possa, de alguma forma, retribuir e compensar todo o apoio e dedicação.

Resumo

O presente relatório evidencia a experiência profissional relevante da autora em diversas vertentes, com destaque para as componentes científica, pedagógica e tecnológica, tendo sido elaborado para a obtenção do grau de Mestre em Ciências – Formação Contínua de Professores, área de especialização em Matemática, ao abrigo do despacho RT-38/2011. Este documento transmite um conjunto de vivências e aprendizagens permanentes de um percurso profissional que, no seu todo, ultrapassam um espaço físico e um horário escolar.

O enquadramento histórico da evolução dos currículos, das metodologias e do estudo da Geometria, permite perceber o fantasma do insucesso da Matemática que se arrasta por gerações. O enquadramento científico do tema escolhido – *Teorema de Tales e a Semelhança de Triângulos* – compreende uma breve descrição do Plano Euclidiano e a demonstração do Teorema de Tales. A questão da incomensurabilidade surge no contexto da demonstração do teorema de Tales e é feito o seu enquadramento. Evidenciam-se as diversas aplicações do teorema, nomeadamente na demonstração dos critérios de semelhança de triângulos e na definição das razões trigonométricas.

Num relato conciso e contextualizado revela-se o trabalho desenvolvido com os alunos nas diversas tarefas de sala de aula, sobressaindo ambientes de tecnologia, experiências práticas no terreno e a participação em projetos, concursos, competições matemáticas, exposições, destacando-se o projeto *Uma janela para a Matemática* participante na 7.ª edição do Prémio Fundação Ilídio Pinho "*Ciência na Escola*".

A formação contínua de atualização da área específica procurou acompanhar os ventos de mudança dos diferentes programas da Matemática e a evolução tecnológica que a nova era impõe. O crescimento profissional foi conseguido pelas bases científicas sólidas e atualizadas, apoiado numa atitude pedagógica atenta e integradora. A reflexão do trabalho desenvolvido valida conjeturas e projeta um trabalho futuro mais consciente da verdadeira competência matemática a desenvolver nos nossos alunos.

Abstract

This report highlights the relevant professional experience of the author in several aspects, with emphasis on the scientific, educational and technological components, having been prepared in order to obtain the Master's Degree in Sciences - Continuous Teacher Training in the Mathematics area of expertise, under the order RT-38/2011. This document conveys a set of permanent life and learning experiences of a career that, on the whole, goes beyond a physical space and a school schedule.

The historical background in the evolution of curricula, the methodologies and the study of Geometry, allows us to comprehend the ghost of failure in mathematics that endures for generations. The scientific framework of the chosen theme - *Thales' Theorem and the Similarity of Triangles* - includes a brief description of the Euclidean Plane and the proof of Thales' theorem. The issue of incommensurability arises in the context of the proof of Thales' theorem and the corresponding framework is done. Various uses of the theorem are highlighted, namely in the proof of the similarity of triangles criteria and in the definition of the trigonometric ratios.

In a concise and contextualized analysis, the work done with the students in the various tasks of a classroom is exposed, stressing technology environments, practical field experiments and the participation in projects, contests, mathematical competitions, exhibitions, giving emphasis to the project *A window for mathematics* present at the 7th edition of the *Fundação Ilídio Pinho "Ciência na Escola"* Award (Ilídio Pinho Foundation "Science in School").

The continuous training to update the specific area aimed to follow the winds of change in the different programs of Mathematics and the technological developments that the new era enforces. The professional growth was achieved through solid and updated scientific background knowledge, supported by a mindful and integrating educational approach. The outcome of the completed work validates conjectures and it projects a future working more aware of the true mathematical competence to develop in our students.

Índice

Lista de acrónimos

ALG	Álgebra
APM	Associação de Professores de Matemática
CEE	Comunidade Económica Europeia
DGE	Direção-Geral da Educação do Ministério da Educação e Ciência
DGIDC	Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular
ESPBS	Escola Secundária Padre Benjamim Salgado
FSS	Funções, Sequências e Sucessões
GAVE	Gabinete de Avaliação Educacional (Ministério da Educação)
GM	Geometria e Medida
GSP	*Geometer's Sketchpad*
GTI	Grupo de Trabalho para Investigação da APM
IAVE	Instituto de Avaliação Educativa (Ministério da Educação)
MAT_{789}	Projeto de Inovação Curricular em Matemática para o 7.°, 8.° e 9.°anos
ME	Ministério da Educação
MEC	Ministério de Educação e Ciência
MINERVA	Meios Informáticos na Educação: Racionalização, Valorização, Atualização
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
NO	Números e Operações
OCDE	Organização para o Desenvolvimento e Cooperação Económico
OTD	Organização e Tratamento de Dados
PAA	Plano Anual de Atividades
PAM	Plano Ação para a Matemática
PM	Plano da Matemática
PCE	Projeto Curricular de Escola
PCT	Projeto Curricular de Turma
PMEB	Programa de Matemática para Ensino Básico
PMMC	Programa de Matemática e Metas Curriculares
PIRLS	*Progress in International Reading Literacy Study*
UE	União Europeia

Índice de figuras

Capítulo 1. Introdução

O ensino da Matemática em Portugal tem conhecido, ao longo dos anos, marcos históricos que conduziram a debates, reflexões e mudanças, emergindo novas tendências, assentes em diferentes objetivos e finalidades do ensino. Destacam-se os conceitos de educação matemática e competência matemática, enquadrados numa nova realidade tendo ainda por sombra o fantasma do insucesso da Matemática.

As exigências de um quadro internacional, influenciado pela fase de avaliações internas e externas, obrigaram a reformulações nos programas, currículos e metodologias que nem sempre se revelaram profícuas e capazes de vencer a insegurança e o medo que se apodera dos alunos. Essas avaliações colocam à prova não só os sistemas de ensino como também as práticas profissionais, questionando, de forma discreta, a capacidade de um professor monitorizar e avaliar aprendizagens socialmente relevantes.

A integração das novas tecnologias, numa sociedade da informação e do conhecimento, tem marcado também o contexto educativo conduzindo, pois, a mudanças nas metodologias e pedagogias da sala de aula. Espera-se, hoje, muito do professor.

A necessidade de compreender e de usar a Matemática na vida diária nunca foi tão premente, exigindo ao professor a escolha atenta nas suas metodologias, tendo por base os princípios do rigor, reflexividade, criatividade e inovação. A competência matemática, cada vez mais, abre portas a futuros produtivos na nossa sociedade.

É neste cenário educativo e social que se pautou a prática docente descrita neste documento e que vai muito para além de portas e com espírito de abertura a novas ideias, perspetivando mentes mais abertas e questionáveis.

1.1. Enquadramento

Este relatório da atividade profissional retrata de uma forma sucinta o trabalho desenvolvido numa caminhada profissional de dezassete anos iniciada no ano letivo 1998/1999.

Neste percurso de vários quilómetros percorridos de norte a sul do país, conheci nove escolas, inseridas em contextos sociais diferenciados, marcadas pelas suas especificidades. De todas, impõe-se destacar a Escola Secundária Padre Benjamim Salgado, em Joane, Vila Nova de Famalicão, onde permaneci oito anos consecutivos, que marcou o meu percurso e a aprendizagem pessoal. A cultura e o ambiente de escola primaram pelo trabalho colaborativo entre pares e pela forte iniciativa em participar em projetos, concursos e eventos educativos que muito influenciam as aprendizagens e rotinas dos alunos.

Na planificação do trabalho docente procurei ter presente os documentos estruturantes e orientadores de cada escola – Projeto Educativo, Projeto Curricular de Escola, Regulamento Interno e Plano Anual de Atividades – conseguindo um enquadramento das reais necessidades de cada meio escolar.

Desempenhei diferentes cargos, desde diretora de turma a coordenadora de departamento, passando pela coordenação do grupo disciplinar de Matemática, para além de assumir a coordenação de diversos projetos e a participação em concursos. A passagem por estas etapas foram encaradas como desafios que considero ser parte integrante do currículo de um profissional do ensino, criando uma visão mais integradora e responsável da realidade matemática que se espera de uma escola pública.

A atividade profissional foi desenvolvida, na sua maioria, com alunos do 3.º ciclo do ensino básico – 7.º, 8.º e 9.ºanos de escolaridade, sentindo uma grande responsabilidade em criar perspetivas positivas da disciplina, capazes de motivar e envolver os alunos numa aprendizagem com sucesso. O trabalho com alunos das camadas mais jovens é determinante para desenvolver uma verdadeira e efetiva competência matemática. De facto, o ensino da matemática requer um ambiente de aprendizagem desafiante, obrigando à tomada de decisões que colocam à prova o empenho, a persistência e a autonomia de cada aluno.

A noção de competência matemática em cada uma das quatro fases a que reporta a minha atividade profissional – Programa de Matemática de 1991, novo Currículo Nacional do Ensino Básico de 2001, reajustamento do programa de 1991, em 2007 e Programa e Metas Curriculares de

Matemática para Ensino Básico em 2013 – conheceu terminologias e abordagens diferentes, embora remetam, claramente, para um conjunto de desempenhos que se espera que os alunos alcancem no final do ciclo de estudos.

Consciente de um percurso de aprendizagem pessoal ao longo da vida, procurei desenvolver, com qualidade, o meu conhecimento profissional, científico, pedagógico e didático quer enquanto autodidata, quer de forma cooperativa ou através de formação contínua institucional.

Considerando a avaliação uma parte integrante de qualquer trabalho profissional, submeti-me a avaliação, com aulas observadas, em dois períodos distintos – 2007 a 2009 e 2009 a 2011 – tendo obtido, em ambas, a classificação de Muito Bom (Anexo D).

Com o amadurecimento da experiência profissional, a prática letiva foi conhecendo novos contornos, ajustada às exigências das orientações curriculares que se desenharam e perspetivaram ao longo dos anos.

1.2. Objetivos e contribuições do relatório

O presente relatório de atividade profissional enquadra-se no âmbito do ponto 3 do Despacho RT-38/2011, e tem como finalidade obter o grau de mestre, centrando-se na discussão, reflexão de experiências e competências adquiridas no exercício de funções de docente da disciplina de Matemática.

A síntese histórica da evolução das tendências, finalidades e metodologias do ensino da Matemática, apresentada neste relatório, permite perceber e enquadrar as diferentes fases deste percurso profissional. A ênfase dada ao estudo da Geometria nos programas e currículos, ao longo dos tempos, permite compreender a sua importância em contexto de aula e as dificuldades que a sua abordagem implica.

Apresenta-se o enquadramento científico de um tema, do programa da Matemática, para o 7.º ano de escolaridade, no âmbito da Geometria: *o Teorema de Tales e a Semelhança de Triângulos*. A sua escolha teve como principal motivação as alterações de fundo que ocorreram no novo Programa da Matemática e definição de Metas Curriculares, em vigor a partir do ano letivo

2013/2014. Numa fase de mudanças no estudo da Geometria, é necessário um conhecimento mais profundo do tema e perceber as novas diretrizes, não só numa vertente didática e pedagógica, como também na sua componente científica.

A importância do estudo do Teorema de Tales e o conhecimento das suas aplicações é transversal aos três anos do 3.º ciclo pelo que, descorar um estudo científico mais profundo sobre o tema seria uma atitude pouco responsável com consequências graves. Por outro lado, este tema privilegia as três grandes finalidades do Ensino da Matemática para 3.º ciclo - *estruturação de pensamento, análise do mundo natural e a interpretação da sociedade* (PMMC, 2013), assumindo um papel determinante na resolução de problemas de geometria que envolvam a comparação de triângulos em contexto de modelação matemática. Numa nova abordagem do estudo da Geometria na escola, espera-se que os alunos sejam capazes de demonstrar alguns resultados geométricos elementares, enfatizando um raciocínio mais dedutivo e menos intuitivo, apoiando-se numa vertente mais analítica. É, sem dúvida, uma nova visão da Geometria que valoriza o encadeamento de etapas que revelem um efetivo raciocínio dedutivo e que exige uma linguagem escrita mais rigorosa.

A motivação dos alunos, em contexto escolar, está relacionada com o grau de envolvimento nas tarefas da aula e com o investimento na superação de desafios individuais ou de grupo. Muitas vezes os alunos surpreendem com a participação em projetos, atividades e/ou concursos que não passam, exclusivamente, por um trabalho de sala de aula. Neste relatório apresentam-se algumas das atividades dinamizadas que se consideram ter contribuído para uma melhor compreensão e integração dos conhecimentos, especialmente os de Geometria previstos no Programa da Matemática para o 3.º ciclo. Destaca-se o projeto *Uma Janela para a Matemática*, desenvolvido com os alunos do 7.º ano em 2008/2009, no âmbito da "Ciência na Escola".

1.3. Organização do documento

Este relatório divide-se em seis capítulos que, no seu todo, pretende projetar um percurso profissional contextualizado. Para além do presente capítulo introdutório, integra os seguintes:

Capítulo 2 – O ensino da Matemática no 3.º ciclo

Neste capítulo é feito o enquadramento histórico da evolução dos programas e currículos da Matemática, o conceito de competência matemática através dos tempos e as diretrizes para o ensino da Geometria no 3.º ciclo. Destacam-se os objetivos e conceitos essenciais do ensino da Geometria, sublinhando-se o papel do professor enquanto gestor de um currículo.

Capítulo 3 – O teorema de Tales e a Semelhança de Triângulos

A organização deste capítulo tem por base uma breve descrição do Plano Euclidiano, com a apresentação de doze axiomas que estabelecem relações entre pontos, permitem definir distância, ângulo e paralelismo. A apresentação do axioma das paralelas será sucessivamente adiada ao longo do capítulo, permitindo, com isso, mostrar um conjunto de resultados válidos na geometria neutra, considerados de grande interesse histórico e matemático. A apresentação do teorema de Tales e sua demonstração, bem como os seus casos particulares, permite retratar um trabalho a realizar pelo professor na planificação do tema e pensar a sua abordagem com alunos do 7.ºano de escolaridade. A questão da incomensurabilidade surge no contexto da demonstração do teorema de Tales e é feito o seu enquadramento. Numa última fase, cria-se a ponte entre este teorema e as suas diversas aplicações, nomeadamente na demonstração dos critérios de semelhança de triângulos e na definição das razões trigonométricas.

Capítulo 4 – Atividades desenvolvidas no 3.º ciclo

Neste capítulo apresentam-se algumas das atividades dinamizadas com alunos do 3.º ciclo, que se consideram ter contribuído para uma melhor compreensão e integração dos conhecimentos, especialmente os de Geometria previstos no Programa da Matemática. As atividades de exterior revelaram-se experiências matemáticas inovadoras para os alunos promovendo a resolução de problemas em contextos exteriores à própria Matemática. Realçam-se algumas atividades implementadas em ambientes de tecnologia e salienta-se o trabalho realizado com a participação em projetos, concursos, competições matemáticas e atividades integradas no Plano Anual de Atividades das diferentes escolas.

Capítulo 5 – Formação e aprendizagem

Neste penúltimo capítulo, elencam-se as ações de formação e os eventos frequentados realçando o contributo direto na prática letiva e na aprendizagem da atividade docente.

Capítulo 6 – Reflexão e conclusão

No último capítulo, apresenta-se uma reflexão crítica de um percurso profissional marcado por diferentes contextos escolares, numa sociedade em constante evolução tecnológica que exige compreender a Matemática na vida quotidiana.

Todas as construções geométricas apresentadas neste documento são originais e construídas usando software específico de geometria - *Geogebra* e *Geometer's Sketchpad* (versão 4.0), a notação matemática é apresentada com recurso ao software *Microsoft Equation*. Os esquemas que surgem ao longo do relatório, que pretendem ser mapas de ideias dos temas em análise, são também originais e construídos usando o software de diagramas profissional *Microsoft Visio 2010*.

Capítulo 2. O ensino da Matemática no 3.º ciclo

Não existe “uma forma correta de ensinar”.
(NCTM, 2007, p.19)

O ensino da Matemática em Portugal tem conhecido desde os anos 40 alguns marcos históricos que conduziram a debates, reflexões e mudanças sem, contudo, conseguir afastar o fantasma do insucesso, uma preocupação que persiste até aos nossos dias. No período de quase seis décadas, até ao início do novo milénio, Ponte (2003, pp.1-2) destaca cinco momentos principais do ensino em Portugal: a ação pedagógica de Bento de Jesus Caraça; o programa-piloto de José Sebastião e Silva; a proposta curricular de Milfontes; o reajustamento do programa do ensino secundário; e, a identificação de competências essenciais.

As tendências, os currículos e as finalidades da educação foram marcadas por épocas diferentes, destacando-se o movimento da Matemática Moderna e os contextos que conduziram à viragem das tendências no novo milénio, marcado por um ensino por competências que, nos nossos dias, dá lugar a um ensino assente em metas curriculares. As exigências de um quadro internacional, influenciado pela fase de avaliações internas e externas, obrigaram à estruturação de uma nova Lei de Bases do Sistema Educativo (1986), surgindo documentos de referência no ensino da Matemática em Portugal que conheceram reformulações ao longo dos anos: Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais (ME, 2001), Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008) e Programa de Matemática e Metas Curriculares (ME, 2013).

No combate ao insucesso da Matemática foram empreendidos esforços assentes num conjunto de estratégias que visaram melhorar as experiências de aprendizagem dos alunos - o Plano de Ação para a Matemática (PAM), em 2006, os subsequentes Planos de Matemática (I e II) e a implementação de um Programa de Formação Contínua em Matemática de professores do 1.º e 2.º ciclos. Recentemente, criaram-se cadernos de apoio ao professor, na orientação ao cumprimento das metas curriculares, decorrentes da aplicação do novo programa da Matemática de 2013. Este programa conhece outras exigências influenciadas pelos resultados dos alunos portugueses nas avaliações nacionais (Exames Nacionais para o ensino secundário e Provas Finais para o ensino básico) e internacionais (PISA[1], TIMSS[2], PIRLS[3]).

Neste capítulo retrata-se o enquadramento histórico da evolução dos programas e currículos da Matemática, o conceito de competência matemática através dos tempos e as diretrizes para o ensino da Geometria no 3.º ciclo. Destacam-se os objetivos e conceitos essenciais do ensino da Geometria sublinhando-se o papel do professor enquanto gestor de um currículo.

2.1. Marcos históricos no ensino da Matemática

Uma visão da evolução do ensino da Matemática não pode estar dissociada das mudanças que ocorreram na sociedade ao longo dos tempos, onde se destacam períodos diferentes da educação com as suas prioridades, finalidades e metodologias. A subdivisão destes marcos históricos em quatro períodos principais (figura 1) pretende dar a conhecer as tendências mais marcantes das finalidades do ensino da Matemática, enaltecendo o trabalho de alguns matemáticos e associações no progresso indiscutível do conceito de educação matemática.

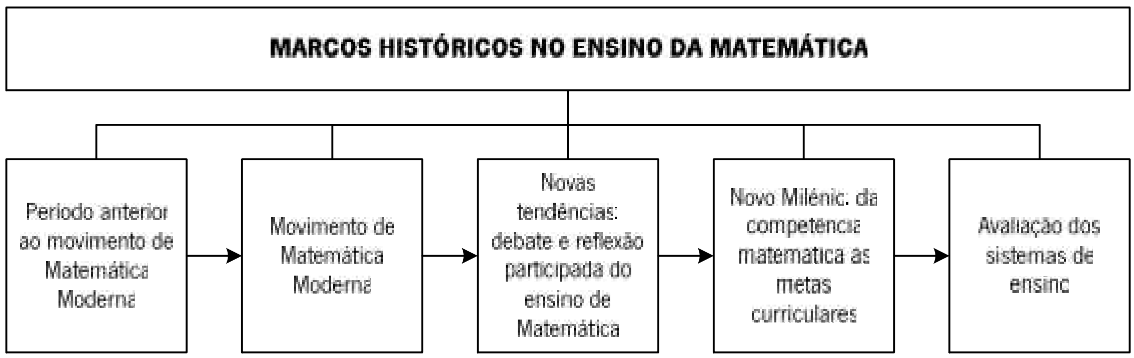


Figura 1: Esquema de referência dos marcos históricos no ensino da Matemática

[1] Programme for International Student Assessment
[2] Trends in International Mathematics and Science Study
[3] Progress in International Reading Literacy Study

2.1.1. Período anterior ao movimento da Matemática Moderna

Até à década de 60 vivia-se, em Portugal, o período da *Matemática Tradicional*. Segundo Ponte, J.P., Matos, J.M. & Abrantes, P. (1998) a elaboração do currículo, tinha por detrás, muitas vezes, uma única figura proeminente que, depois da sua publicação em diploma, ficaria oficializado. O livro único era uma realidade, sendo escolhido pelo Ministério da Educação e usado uniformemente em todo o país. Cabia ao professor decifrar as intenções, objetivos e estratégias imaginadas e delineados por outros e procurar a sua melhor aplicação em sala de aula.

O estudo da Geometria tinha um lugar de destaque sendo alvo de avaliação obrigatória em exame. Sobressaía um ensino marcado pela memorização e mecanização, onde era preciso saber de cor demonstrações de teoremas geométricos (Ponte, 2003).

Veloso (1998) refere ainda que o currículo de geometria nos liceus assentava, essencialmente, nas construções geométricas valorizando a identificação de lugares geométricos e o cálculo algébrico com segmentos. Enfatizava-se o estudo da geometria euclidiana no plano e no espaço – muito próximo dos Elementos de Euclides, procurando nos alunos do 2.º ciclo, do antigo ensino liceal (12 aos 14 anos), desenvolver hábitos de raciocínio rigoroso, assentes em demonstrações de enunciados de teoremas e listas infindáveis de exercícios. A resolução dos exercícios geométricos eram do tipo «Mostre que..», sendo retratada, esta fase, por Ponte(1987), pelo "*período áureo dos célebres livros de Palma Fernandes*[4]".

A reflexão sobre os problemas da Educação Matemática dava os primeiros passos, sobretudo, em iniciativas promovidas pela Sociedade Portuguesa de Matemática[5] (SPM). Surge uma geração de matemáticos que procurava dar novo ânimo à investigação matemática no país, através de reflexões sobre os métodos e as finalidades do ensino da Matemática. Nasceram diversos projetos, entre os quais a revista *Portugaliæ Mathematica* (1937), a *Gazeta de Matemática* (1939) e o Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa e do Porto (1940 e 1942, respetivamente).

---

[4] António Nascimento Palma Fernandes (1907- 1968), autor de "*Elementos de Geometria*", um dos livros únicos da década de 60, destinado aos alunos do 3°, 4° e 5° anos dos Liceus (alunos de 13 a 15 anos). Também autor de livros de exercícios resolvidos e por resolver, todos com respostas que incluíam também Pontos de Revisão para os três anos com exame: 2.º, 5.º e 7.º.

[5] Sociedade Portuguesa de Matemática, fundada em 12 de dezembro de 1940, é uma associação vocacionada para o desenvolvimento do ensino, da divulgação e da promoção da investigação matemática em Portugal.

As décadas de 1930 a 1950 foram especiais para a Matemática em Portugal, tendo sido marcadas pela ação de Bento de Jesus Caraça e Sebastião e Silva (1914-1972). O primeiro agitou pensamentos, intocáveis para a época, questionando o ensino da geometria assente na memorização e mecanização, o segundo, traduzia para a *Gazeta Matemática* (n.°33, Agosto de 47), o artigo "*Um método activo no ensino da geometria intuitiva*." de *Emma Castelnuovo* (1913-2014). Neste artigo, a autora italiana, reforçava a necessidade de uma mudança no tipo de abordagem do estudo da geometria, que deveria ser assente num método construtivo substituindo o método demonstrativo, Veloso (1998). Este cenário traduzia os efeitos dos primeiros ventos das tendências internacionais do movimento da Matemática Moderna, pondo em causa as diretrizes tradicionais do ensino em Portugal.

2.1.2. Movimento da Matemática Moderna

Nos anos 60, em Portugal, sob as influências do movimento internacional da época – Matemática Moderna, assiste-se a tentativas de reformulação do currículo da Matemática, procurando um corte com a Geometria de Euclides, sendo José Sebastião e Silva um protagonista de relevo nesta ação de mudança. O mesmo insistiu na importância das aplicações matemáticas e na necessidade de renovação dos métodos de ensino, contra o método expositivo, alertando para a necessidade do aluno passar a ser agente participativo, desenvolvendo a sua intuição e sentido crítico. Produziu, em 1964 e 1965, o *"Compêndio de Matemática"* e os respetivos guias para professores com metodologias diferentes e novas abordagens dos temas. As novas tendências procuram valorizar uma aprendizagem pela descoberta privilegiando a seleção cuidada de exercícios em substituição da mecanização e quantidade de exercícios resolvidos, Silva (1964).

O aparecimento da Matemática Moderna deu mais atenção às propriedades das operações, começando a ser ponderado o uso de instrumentos de cálculo e de análise de dados como a régua de cálculo e o computador, colocando em questão o papel dos algoritmos escritos tradicionais (Albergaria, I. et al, 2008). Paralelamente, Assude (1990) aponta a falta de formação dos professores que acabou por comprometer a introdução, com êxito, das calculadoras no ensino. Haveria necessidade de desmistificar a utilização das calculadoras e afastar certos "fantasmas" da sua utilização.

Introduziram-se novos temas - *Estruturas Algébricas, Álgebra Linear e as Probabilidades* - e suprimiram-se outros mais diretamente relacionados com a Geometria – *Geometria de Euclides, Geometria Analítica, Geometria Clássica, Aritmética Racional e a Trigonometria*. A Geometria foi lentamente desaparecendo do currículo implementado pelos professores. Veloso (1998) tenta justificar o facto, com a memória de experiências negativas vividas pelos próprios professores, quando lhes fora administrado o ensino axiomático da Geometria. Por outro lado, as atividades interessantes de Geometria mais relacionadas com construções geométricas foram sendo transferidas para a disciplina de Educação Visual, perdendo-se o caráter interdisciplinar com a Matemática. Este adormecimento do ensino da Geometria prevaleceu até aos anos 90.

Apesar do notável e reconhecido trabalho de José Sebastião e Silva, este não conheceu a aceitação desejada por parte dos professores que, pela ausência de formação, não entraram no espírito das novas orientações. Veloso (1998) afirma que as consequências dos novos ventos em Portugal foram, afinal, restritas às turmas experimentais do último ciclo do ensino liceal[6] e o relevo que se pretendia atribuir às transformações geométricas, perdeu-se com a abordagem formal, caindo também no esquecimento o carácter dedutivo. Na verdade, conferia-se uma excessiva importância às definições *à priori* da experimentação, tornando o estudo da Geometria isolado sem articulação com os restantes conteúdos. Para Ponte (1988) nas escolas a "*aprendizagem se desenvolve por transmissão e absorção, e não por construção*", longe das ideologias do novo movimento.

As questões relacionadas com o ensino da Matemática entravam num período estagnado, marcado pela turbulência política registando-se, pois, "*assinaláveis prejuízos para sucessivas gerações de alunos*" (Ponte et al, 1998). Alguns dos evidentes prejuízos passaram pelo desaparecimento da Geometria, pela desvalorização do uso de materiais didáticos e pela atitude de crescente aversão dos alunos à disciplina de Matemática.

No início da década 70, apesar de Portugal iniciar um novo ciclo curricular para a disciplina de Matemática com a reforma de Veiga Simão (em 1972), permaneceu um isolamento internacional, influenciado pela situação política interna ainda não resolvida. Assiste-se à perseguição dos

[6] O sistema educativo português, nos anos 50 e 60, compreendia o ensino primário de 4 anos, dois ciclos, um de 2 e outro de 3 anos com dois ramos distintos - liceus e técnicas e um 3.º ciclo liceal de 2 anos de preparação para a universidade.

matemáticos, à extinção dos Centros de Matemática e à proibição das atividades da SPM em qualquer dependência do Ministério da Educação[7]. Paralelamente, procura-se implementar uma reforma, onde o currículo passa a ter explicitamente objetivos, sugestões metodológicas e indicações sobre a avaliação. Na prática, sem a força dos matemáticos e com o falecimento de José Sebastião e Silva, deixa de haver representações oficiais portuguesas em documentos internacionais sobre o ensino da Matemática, acabando por se manter, internamente, as mesmas ideias do período anterior.

2.1.3. Novas tendências: debate e reflexão participada do ensino da Matemática

O aparecimento da Associação de Professores de Matemática (APM), em 1986, marca um novo período de debate e reflexão, procurando estreitar as relações de trabalho com diversas organizações internacionais, voltando a ser questionado o currículo e o programa da Matemática. A Educação Matemática passa a ter um espaço de reflexão, sobretudo, nos encontros nacionais de professores de Matemática (ProfMat), estabelecendo-se uma interação com os professores dos diversos graus de ensino. Em 1988, no *II Encontro ProfMat*, em Vila Nova de Milfontes, a propósito da renovação do Currículo de Matemática, estiveram em discussão documentos relacionados com a situação atual do ensino. Debateram-se os grandes objetivos do ensino da Matemática, a natureza e organização das atividades de aprendizagem, a necessidade de um novo papel do professor e a integração das novas tecnologias nas tarefas da sala de aula. Deste encontro saiu um novo documento orientador - *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar* (1991) - importado do NCTM - *National Council of Teachers of Mathematics*, dos Estados Unidos da América, tendo por base as orientações e ideias presentes na *Agenda para a Acção* traduzida anteriormente, em 1985, do NCTM também pela APM.

Em resultado das inúmeras iniciativas de reflexão sobre o currículo e programa da Matemática, aprovou-se uma nova Lei de Bases do Sistema Educativo, por Roberto Carneiro, Lei n.º 46/86,

---

[7] Fonte: www.spm.pt/spm/historia/ consultada a 01 de julho de 2014

considerada a última grande reforma educativa, em vigor ainda hoje. Esta lei nos seus princípios gerais aponta três dimensões a privilegiar na educação: a individual, a social e a da inserção no mundo do trabalho. Surgiram novos planos curriculares dos ensino básico e secundário (Decreto-lei nº 286/89, 29 de Agosto), deu-se o salto para a escolaridade obrigatória de nove anos e foi estruturado um novo programa da Matemática pelo Despacho n.º 139/ME/90, de 16 de agosto, inicialmente com um período de experimentação, procedendo-se depois à sua implementação obrigatória em 1991. Vigoravam diversos documentos curriculares oficiais para o ensino da Matemática – *Organização Curricular e Programas* (volume I) e *Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem*.

No *Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem* (1991), enunciam-se diferentes finalidades para o ensino básico, sendo que umas reportam para aspetos específicos da Matemática e as outras para aspetos transversais a desenvolver com a aprendizagem dos alunos.

A necessidade de mudança radical no panorama educativo, associada à exigência dos condicionalismos próprios de uma adesão à nova Europa[8], com ajuda de fundos comunitários, fez nascer uma nova perspetiva de educação e ensino da Matemática, apoiada nas *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática*, uma tradução portuguesa dos *Professional Standards* (NCTM, 1994). Neste documento, destaca-se a importância do papel do professor na mudança curricular, questionando a sua preparação profissional, as suas funções e o seu papel na mudança do ensino-aprendizagem da Matemática. Realça questões relativas à prática pedagógica, em especial em contexto de sala de aula, valorizando a natureza das atividades a desenvolver e os papéis do professor e aluno, tendo em conta os diversos aspetos da avaliação. Aponta ainda, de uma forma muito objetiva, os pressupostos que acabariam por conduzir às necessárias mudanças para ocorrer uma transformação no ensino da Matemática:

> - Os professores são os protagonistas na mudança dos processos pelos quais a Matemática é ensinada e aprendida nas escolas.
> - Tais mudanças requerem que os professores tenham um apoio contínuo e recursos adequados.
>
> (NCTM, 1994, p.2)

[8] Portugal assinou o tratado de adesão à CEE em 12 de junho de 1985, a atual UE, com o propósito de fomentar o progresso económico, a liberdade e a paz entre os países membros.

As orientações profissionais para o ensino da Matemática encontram-se distribuídas por seis normas que devem servir de fonte de informação para planificar e melhorar o ensino a curto e a longo prazo:

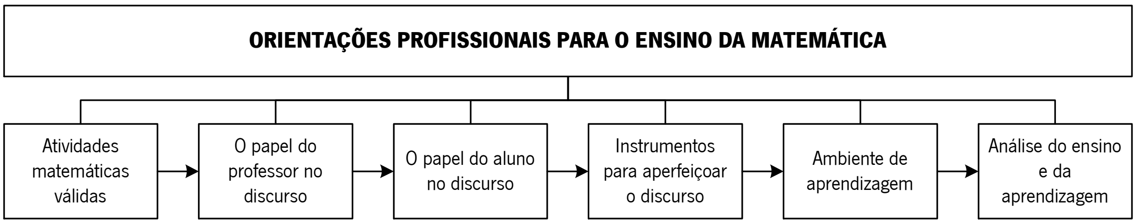


Figura 2: Diretrizes profissionais para o ensino da Matemática, in NCTM (1994)

Estas normas pretendiam ser um conjunto de princípios, com indicadores, que possam ser usados para "*julgar o que válido e apropriado*" em prol de uma "*excelência no ensino da Matemática*" (NCTM, 1994, p.8).

Introduziram-se, pela primeira vez, os computadores nas salas de aula, com o objetivo de integrá-los na prática letiva e nos planos curriculares. Para muitos autores o papel desta ferramenta numa aula é indiscutível. Papert, S. (1991) refere que o computador é um instrumento de trabalho por excelência, que permite aos alunos livrarem-se de cálculos fastidiosos e explorar conceitos, descobrir relações ou semelhanças, modelar fenómenos, inventar e reinventar a Matemática. Ainda Matos, J. (1991) argumenta que "*pese embora, a variedade, de perspetivas existentes acerca da introdução do computador na modelação, parece decisivo que este adquira, do ponto de vista educativo, o estatuto de autêntica ferramenta cognitiva*". Em contexto de sala de aula, Campos, L. (1994) sublinha a enorme curiosidade dos alunos em relação aos computadores e acrescenta que os professores de Matemática podem tirar partido dessa situação, criando ambientes apropriados, com a introdução de atividades e experiências que motivem os alunos.

Outros projetos se implementaram desde finais dos anos 80 e década de 90: "*Ensinar é Investigar*"[9] e MAT789 [10], evidenciando uma preocupação com o conteúdo a ensinar e a forma como este estava a ser ensinado. Sublinha-se a importância do papel das atividades de aprendizagem (de exploração, investigação e descoberta) e o papel central da resolução de problemas como veículo

[9] Projeto "*Ensinar é Investigar*" (1995–1998) direcionado para a conceção, experimentação e avaliação de tarefas exploratórias e investigativas a desenvolver no 2°, 3° ciclos do ensino básico e ensino secundário.

[10] MAT 789 (1989–1994) projeto de Inovação Curricular em Matemática para o 3.° ciclo, centrado na resolução de problemas, orientado para os processos e para os conceitos, apoiando-se na utilização dos computadores e das calculadoras.

para a aprendizagem. Para além das novas metodologias e utilizando o computador como ferramenta para o ensino da Geometria, foram realizadas várias tarefas e experiências em ambientes geométricos dinâmicos – linguagem *LOGO* (1998) e programa *Cabri-Geométre* (1995). O uso da tecnologia revela ter um peso considerável nos currículos da época, e que não deixa de estar associado a inúmeros projetos e teses desenvolvidos no âmbito do projeto MINERVA[11].

Neste novo programa consideram-se como conteúdos de aprendizagem os conhecimentos a adquirir mas também "*as atitudes e as aptidões a desenvolver*" (ME, 1991, p.171). As ideias de George Pólya[12] encontram-se marcadamente nos currículos a partir de 1991, onde a transversalidade da resolução de problemas abarca todos os níveis de ensino e sublinha a sua importância no papel educativo.

Na definição das finalidades do ensino básico há uma nova centralidade do processo - "*o centro do processo ensino-aprendizagem é o aluno como pessoa*" (ME, 1991, p.175). A resolução de problemas e o reconhecimento de conexões dentro da Matemática ocupam um lugar de destaque em todos os documentos curriculares do ensino básico. Surgem as primeiras referências à História da Matemática e procura-se promover as metodologias de trabalho em grupo. Destaca-se o regresso do estudo da Geometria, que encontra algumas barreiras estruturantes que impediram o melhoramento do seu ensino ao longo da escolaridade obrigatória. Exemplos destes entraves encontravam-se, mais uma vez, na formação dos professores e na criação de condições das escolas, onde a utilização de computadores no ensino da Matemática acontecia "*quando possível*" (DEB, 2001, p.169). O novo programa ficaria, pois, dependente das condições para a sua concretização, comprometendo o progresso nos seus principais pontos.

Uma outra das tarefas centrais para a reforma educativa passou pela elaboração dos novos programas para todas as disciplinas. Nos estudos realizados pelo *Instituto de Inovação Educacional* (IIE) aponta-se, mais uma vez, a falta de coordenação entre a elaboração dos novos programas e a formação dos professores (Ponte, J.P., et al, 1998). Somam-se os pareceres sobre a necessidade

---

[11] Projeto MINERVA (1985-1994) - Meios Informáticos na Educação: Racionalização, Valorização, Atualização - teve como objetivo integrar na escola o uso do computador.

[12] George Pólya (1887-1945) matemático húngaro que publicou, em 1945, um dos seus livros mais famosos: "*How to Solve it*" onde define as quatro etapas essenciais para a resolução de problemas: 1ª etapa - Compreender o problema; 2ª etapa - Traçar um plano; 3ª etapa - Colocar o plano em prática; 4ª etapa - Comprovar os resultados.

indiscutível da formação inicial e contínua dos professores ao nível dos conhecimentos científicos necessários ao ensino da disciplina (Sousa e Fernandes, 2004; Gomes, 2004; Loureiro, 2004; Gomes & Ralha, 2005).

Em 1991, surge o Grupo de Trabalho para Investigação[13] (GTI), no seio da APM, proporcionando espaços de reflexão e de investigação em Educação Matemática, promovendo a sua articulação com o ensino da Matemática. Neste contexto, em 1996, o Departamento de Educação Básica do Ministério de Educação inicia, pela primeira vez, um movimento da reflexão participada dos currículos do ensino básico que culminaria com a publicação do Currículo Nacional de Ensino Básico (CNEB). Em matéria de tecnologia, depois do desaparecimento do projeto *MINERVA*, seguiu-se, em 1996, o programa *Nónio – Século XXI*, cuja prioridade era a de familiarizar os alunos com a grande rede mundial de computadores, a *Internet* e consequente modernização das escolas nesta área da tecnologia.

[13] O GTI está essencialmente direcionado para a investigação sobre o currículo e desenvolvimento curricular. Procura trabalhar sobre diferentes temas matemáticos numa perspetiva de investigação sobre a prática profissional, enquadrando-os nos seus objetivos, abordagens e concretização em sala de aula, conduzindo a discussões e reflexões sobre os resultados, sendo o objetivo final a sua divulgação em artigos.

2.1.4. Novo milénio: da competência matemática às metas curriculares

Desde o início do milénio até aos nossos dias assiste-se a momentos de viragem nas tendências e perspetivas do ensino da Matemática (Figura 3): em 2001, a implementação do Currículo Nacional para o Ensino Básico; em 2006, uma nova estratégia com a implementação do Plano de Ação para a Matemática; em 2007, o reajustamento do programa de Matemática de 1991; em 2009, a Estratégia Global de Desenvolvimento do Currículo Nacional; em 2012, a homologação das metas curriculares para ensino básico; e, em 2013, a implementação do Programa e Metas Curriculares do ensino básico.

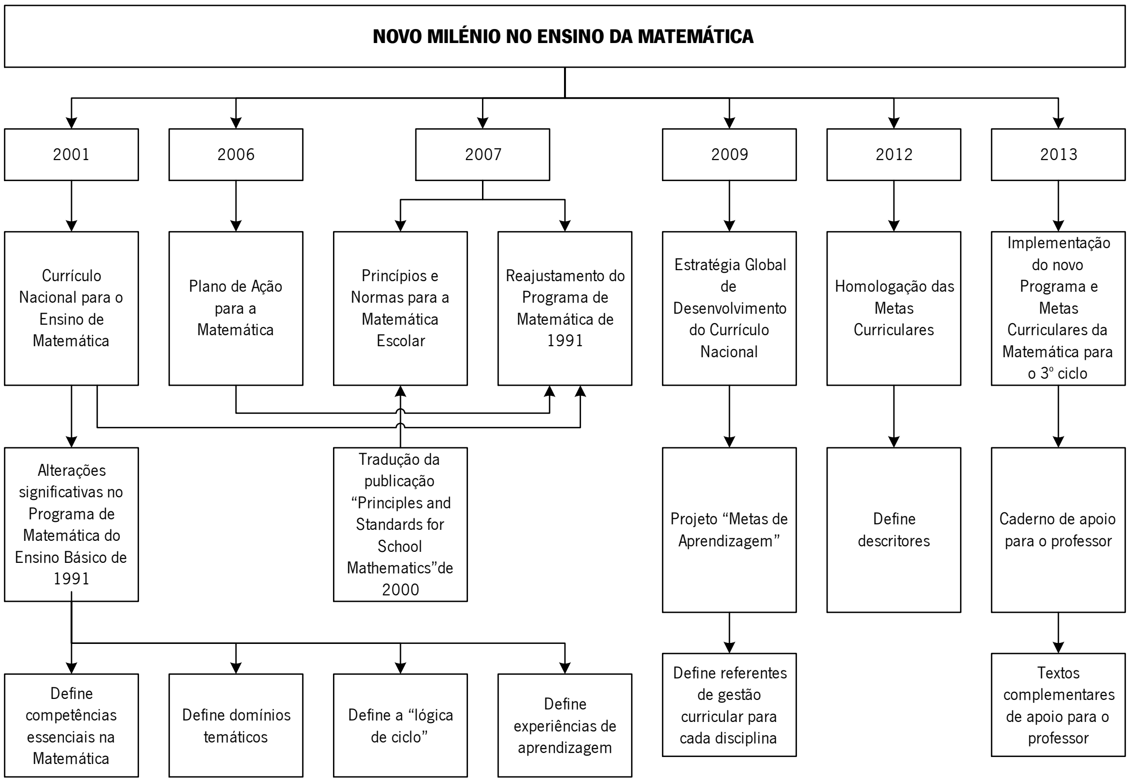


Figura 3: Destaque das fases de mudança no ensino da Matemática no novo milénio

Com a entrada do novo milénio, surgiram novos documentos de referência com diferentes visões do desenvolvimento da competência matemática nos seus diversos domínios – *Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais,* (ME, 2001), o *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2008), Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) e novo Programa de Matemática e Metas Curriculares (ME, 2013).

Com a publicação, em 2001, do *Currículo Nacional do Ensino Básico* (CNEB)*,* surgem novas propostas curriculares na sua organização e gestão. Para além dos tempos de caráter estritamente disciplinar, passam a constar no horário escolar dos alunos tempos para novas áreas de "*natureza transversal e integradora*" (Decreto-lei n.º6/2001) – a *Área de Projeto*, o *Estudo Acompanhado* e a *Formação Cívica*. Esta visão de currículo "*prevê novos papéis para a escola e professores que não se situam unicamente no domínio da execução, mas também nos da decisão e da organização*" (Pereira, M. et al, 2013). Assume-se um objetivo estratégico de garantia de uma educação de base para todos e atribui-se à escola um papel central no desenvolvimento do currículo. Surgem novos documentos nas escolas - *Projeto Educativo de Escola* (PEE)[14] e o *Projeto Curricular de Escola* (PCE)[15].

As novas orientações curriculares, publicadas pelo ME, segundo um projeto coordenado por Paulo Abrantes, em CNEB (2001), revelam uma nova visão do ensino da Matemática. O conhecimento matemático deixa de ficar restringido a um somatório de fórmulas e procedimentos, constituindo estas as ferramentas para trabalhar a verdadeira Matemática que se situa ao nível das ideias (Santos, L et al., 2006).

> "A ênfase da Matemática escolar não está na aquisição de conhecimentos isolados e no domínio de regras e técnicas, mas sim na utilização da Matemática para resolver problemas, para raciocinar e para comunicar, o que implica a confiança e a motivação pessoal para fazê-lo."
>
> (DEB, 2001, p.58)

Assume-se o conceito estruturante de *Experiência Matemática*, distinguindo-se quatro tipos de experiências a desenvolver com os alunos – resolução de problemas, atividades de investigação, realização de projetos e jogos.

Figura 4: Experiências matemáticas a desenvolver com os alunos (CNEB, 2001)

---

14 O PEE procura formalizar "*as intenções e as ações da política educativa e curricular de uma escola.*" (Leite, Gomes & Fernandes, 2001, p.68) e é elaborado pela comunidade educativa e para a comunidade educativa tendo em conta as suas especificidades.

15 O PCE procura estabelecer prioridades ao nível das competências essenciais e transversais a desenvolver na escola.

A ideia do novo CNEB era a de manter inalteráveis os programas de 1991 das diferentes disciplinas mas, no caso da Matemática, são introduzidas alterações significativas:

1) É valorizada a noção de competência matemática, que *"(...) integra conhecimentos, capacidades e atitudes que podem ser entendidas como saber em acção ou em uso."* (p.9);
2) Os «objetivos mínimos» são substituídos por «competências essenciais», salientando que as mesmas se referem aos "*saberes que se consideram fundamentais, para todos os cidadãos, na nossa sociedade actual, tanto a nível geral como nas diversas áreas do currículo.*" (p.10);
3) Sofrem modificações as finalidades e objetivos de aprendizagem valorizando-se a lógica de ciclo, em detrimento de uma prática de programas por ano letivo;
4) A forma como são apresentados os temas matemáticos também é alterada. Os aspetos da competência matemática distribuem por quatro domínios temáticos: Números e Cálculo; Geometria; Estatística e Probabilidades; Álgebra e Funções.

(ME, 2001)

O CNEB (2001) apresenta duas finalidades para o ensino da Matemática no ensino básico:

> "...proporcionar aos alunos um contacto com as ideias e métodos fundamentais da Matemática que lhes permita apreciar o seu valor e a sua natureza"
> " ...desenvolver a capacidade de confiança pessoal no uso da Matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar"
>
> (DEB, 2001, p.58)

Define competência matemática através de uma combinação de atitudes gerais a desenvolver com a aquisição de certas capacidades matemáticas específicas:

> "...o modo como a competência está caracterizada (...) procura evidenciar que se trata de promover o desenvolvimento integrado de conhecimentos, capacidades e atitudes e não de adicionar capacidades de resolução de problemas, raciocínio e comunicação e atitudes favoráveis à actividade matemática a um currículo baseado em conhecimentos isolados e técnicas de cálculo"
>
> (DEB, 2001, p.58)

Em junho de 2006, o ME define um *Plano de Ação para a Matemática* (PAM), uma resposta urgente, após reflexão dos resultados dos Exames Nacionais (atualmente designadas Provas Finais) de Matemática do 9.º ano de 2005 e do diagnóstico efetuado pelos professores de Matemática a esse propósito. A melhoria do ensino da Matemática constituiu-se a prioridade deste plano integrando seis ações fundamentais (Figura 5).

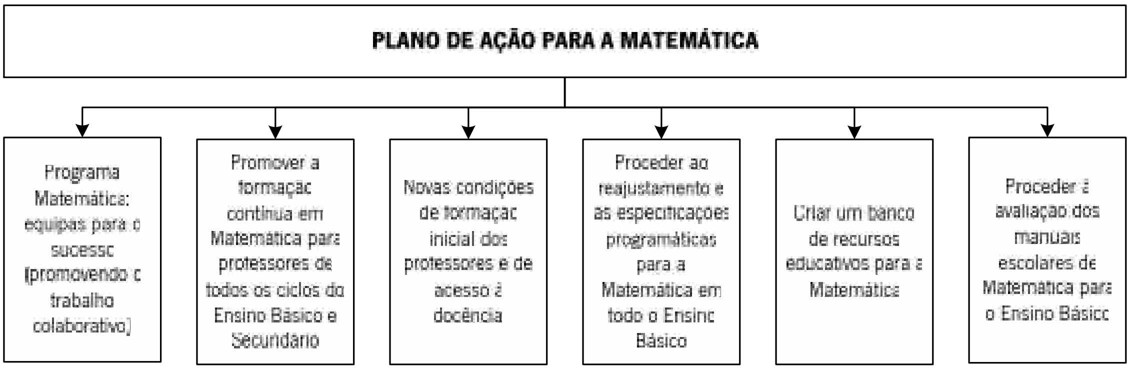


Figura 5: Prioridades do Plano de Ação para a Matemática de 2006

No âmbito do PAM, muitas escolas optaram por dedicar o tempo da área de *Estudo Acompanhado* para o estudo da disciplina de Matemática, criando assim um espaço de apoio mais individualizado aos alunos na implementação de atividades e planeamento do estudo da disciplina.

O Programa da Matemática do Ensino Básico (PMEB) de 2007 surge integrado neste PAM (4.ª ação) que, tentando parecer um reajustamento do programa anterior, acabou por configurar-se como um novo programa, conforme se pode inferir no extrato "*O novo Programa de Matemática para o ensino básico (ME-DGIDC, 2007) constitui uma oportunidade de mudança curricular em Portugal no ensino desta disciplina*" (Ponte & Serrazina, 2009, p.2).

Este novo programa apresenta percursos temáticos de aprendizagem com diferentes sequências de tópicos e subtópicos matemáticos, distribuídos por anos de escolaridade em cada ciclo, definindo "*as balizas temáticas do trabalho a realizar*" (DGIDC, 2008). Caberia à escola a decisão sobre a escolha dos percursos apresentados A ou B (Anexo A1), deixando em aberto a possibilidade de se introduzir as alterações convenientes ou conceber novos percursos, respeitando as características dos alunos no seu contexto social e os recursos da escola. Promove a valorização de três capacidades transversais: a *resolução de problemas*, o *pensamento matemático* e a *comunicação*. Sublinham-se alterações de fundo ao nível do 1.° e 2.° ciclos, notando-se no 3.° ciclo, mudanças ao nível da Geometria, com o contacto com situações de raciocínio hipotético-dedutivo.

Na base deste reajustamento estiveram as orientações do documento original *Principles and Standards for School Mathematics* de 2000 da NCTM, traduzido pela APM em 2007. Nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) a visão para a educação matemática revela-se ambiciosa numa altura em que compreender e usar a Matemática na vida quotidiana é uma exigência.

> "...*aqueles que compreendem e são capazes de fazer matemática terão oportunidades e opções significativamente maiores para construir os seus futuros.*".
>
> (NCTM, 2007, p.5).

Neste cenário as mesmas *Normas* referem a necessidade de compreender a Matemática sob quatro dimensões: (1) a Matemática para a vida; (2) a Matemática enquanto parte de herança cultural; (3) a Matemática para o local de trabalho; (4) a Matemática para a comunidade científica e tecnológica.

Apontam ainda seis Princípios para a Matemática Escolar - *Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação, Tecnologia* – que, no seu todo e com as suas interações, devem servir de guias e importantes ferramentas para o trabalho do professor influenciando a tomada de decisões na sua prática docente. Para cada princípio integram-se definições, orientações e esclarecimentos.

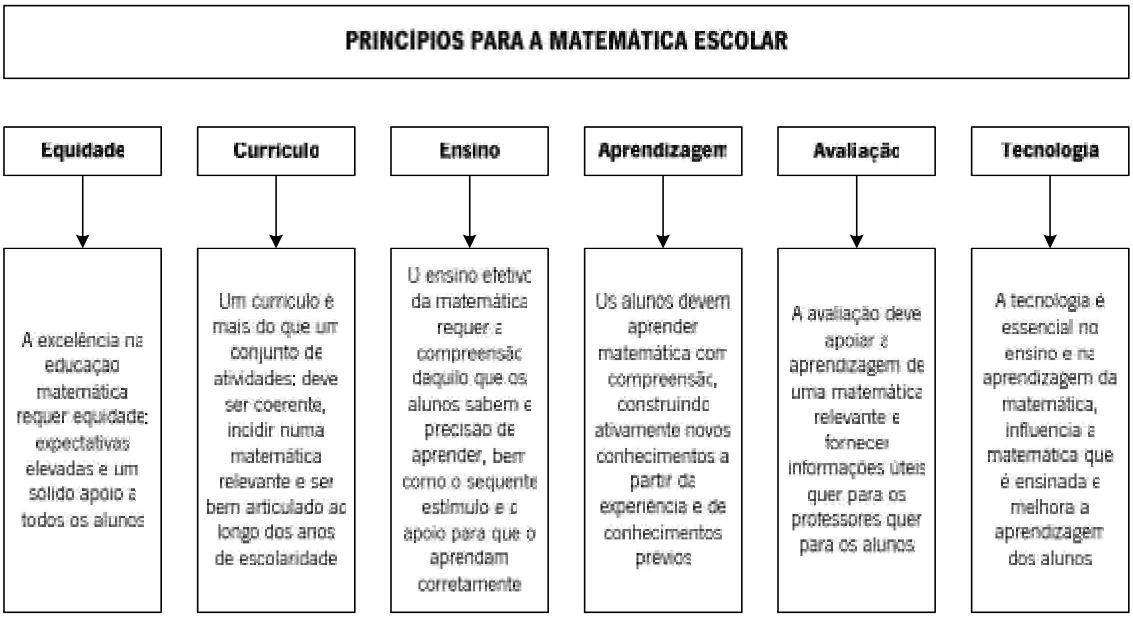


Figura 6: Esquema dos Princípios para a Matemática Escolar, adaptado do NTCM 2007

Após aprovação da Lei n.º 85/2009 com o alargamento da escolaridade obrigatória para doze anos, o ME apoia o Projeto "*Metas de Aprendizagem*" inserido na Estratégia Global de Desenvolvimento do Currículo Nacional. As Metas de Aprendizagem para o currículo do ensino básico pretendem ser instrumentos de apoio à gestão do currículo e ao trabalho dos professores, portanto, "*evidências de desempenho das competências que deverão ser manifestadas pelos alunos, sustentadas na aquisição dos conhecimentos e capacidades inscritos no currículo formal, constituindo por isso resultados de aprendizagem esperados*." (Afonso, 2010).

Em 2012, pelo Despacho n.º 5306/2012, são criadas as *Metas Curriculares* que substituem as "Metas de Aprendizagem".

> "(...) o novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, que agora se homologa, concluído que se encontra o período de discussão pública, agregou as Metas Curriculares, complementando-as, com o objetivo de se constituir como documento único perfeitamente coerente".
>
> (Despacho n.º 5306/2012)

A introdução destas novas metas justifica-se, segundo Ministério de Educação e Ciência (MEC), pela necessária revisão do currículo nacional seguindo as tendências curriculares e políticas educativas internacionais. Especificam os conhecimentos e capacidades que os alunos devem desenvolver no âmbito da disciplina e os processos envolvidos nessas aprendizagens. No final do ano letivo 2012/2013 é homologado o novo Programa de Matemática para o ensino básico que agrega as respetivas metas curriculares.

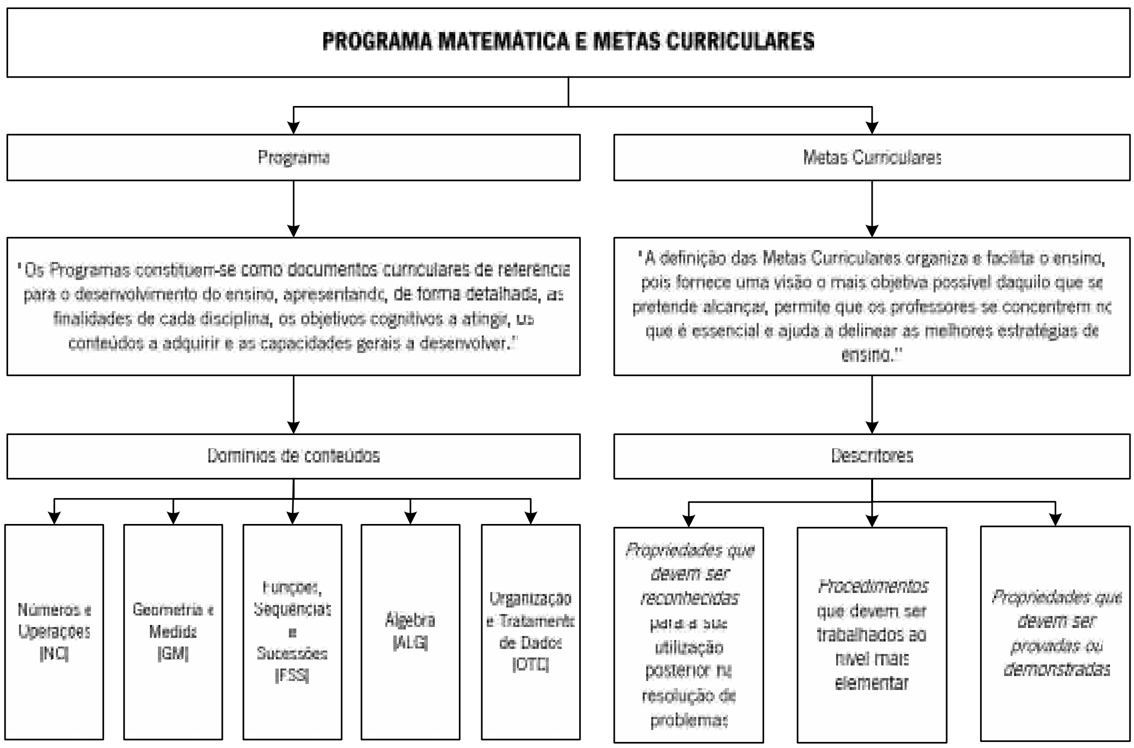


Figura 7: Linhas orientadoras do novo PMMC de 2013

No novo PMMC há uma preocupação em deixar clara a distinção entre "Programa" e "Metas". Define metas a alcançar em cada subdomínio, dos quatros grandes domínios, apoiadas num conjunto de descritores de referência (Figura 7) para o professor, contemplando diferentes níveis de desempenho dos alunos. Passa a integrar cinco domínios de conteúdos (mais um do que o programa de 2007) a estudar no 3.º ciclo: Números e Operações (NO); Geometria e Medida (GM), Funções, Sequências e Sucessões (FSS); Álgebra (ALG); Organização e Tratamento de Dados (OTD). Para cada domínio regista-se o seu enquadramento e conteúdos a privilegiar, destacando-se no domínio da Geometria e Medida, do 7.º ano, as noções de comensurabilidade, o Teorema de Tales e diversas demonstrações geométricas apelando ao raciocínio hipotético-dedutivo. Acrescenta-se que

> "*não são exigíveis* [demonstrações] *à generalidade dos alunos, devendo (…) conhecer o enunciado das propriedades e estar aptos a utilizá-las quando necessário.*"
>
> (PMMC, 2013)

O acesso aos cadernos de apoio às metas curriculares permite ao professor escolher, para os vários descritores, os exercícios e problemas a propor aos alunos, prevendo diferentes níveis de desempenho, não esquecendo o cumprimento da meta prevista.

2.1.5. Avaliação dos sistemas de ensino

Atualmente, a avaliação do sistema educativo português comporta a avaliação externa nacional (Provas Finais, para ensino básico e Exames Nacionais, para o ensino secundário) e a externa internacional, com a participação em estudos (Figura 8) – SIAEP, TIMSS, PISA e TIMSS & PIRLS.

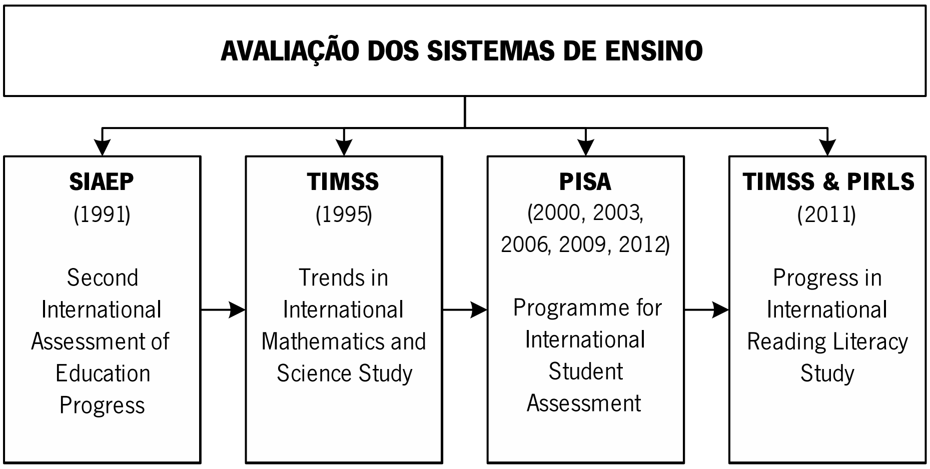


Figura 8: Participação de Portugal em estudos internacionais de avaliação dos sistemas educativos

A investigação sobre os problemas do ensino-aprendizagem da Matemática tornou-se numa atividade dinâmica e regular no final da década de 90. As primeiras avaliações internacionais dos desempenhos dos alunos ocorreram em 1991 e 1995, nos estudos SIAEP e TIMSS respetivamente. No primeiro, procurou-se caraterizar o sistema educativo e o envolvimento cultural potenciador do sucesso dos alunos, do 2.º ciclo (9 a 13 anos), nos domínios da Matemática e Ciências. No segundo estudo, avaliou-se o desempenho dos alunos do 4.º e 8.º anos e as práticas pedagógicas dos professores de Matemática e Ciências.

Portugal participou pela primeira vez no estudo PISA, em 2000, como país membro da OCDE, seguindo-se outras participações em ciclos trienais. Em cada ciclo a avaliação das aprendizagens recaiu, predominantemente, num dos domínios - leitura, matemática e ciências, tendo decorrido a última aplicação em 2012.

Em 2011, Portugal regressa à participação no estudo internacional TIMSS & PIRLS, depois de uma ausência prolongada, onde se avaliaram as tendências dos alunos do 4.º ano de escolaridade no estudo da Matemática e das Ciências.

Serrão (2013) refere que existem diferenças entre estes estudos internacionais. O estudo PISA é mais centrado na avaliação da literacia daquilo que os alunos, de 15 anos (independentemente do seu ano de escolaridade), aprenderam ao longo da vida – dentro e fora da escola, enquanto os outros estudos avaliam domínios de conhecimentos específicos, competências e conceitos, com forte ligação à avaliação das estruturas curriculares.

Todas as avaliações externas referidas visam, portanto, monitorizar os sistemas educativos dos países, evidenciando alguns dos problemas que afetam o domínio das aprendizagens e, essencialmente, o "*desenvolvimento de competências superiores de pensamento*" (Fernandes,2007). Com base na análise dos resultados destes estudos (Figura 9) procuram-se evidenciar os sucessos das políticas educacionais no que respeita ao ensino e à aprendizagem nas áreas em avaliação.

	DOMÍNIO PRINCIPAL DO ESTUDO	**PÚBLICO ALVO**	**RESULTADOS[16] DE PORTUGAL**
SIAEP (1991)	Matemática e Ciências	Alunos 13-15 anos	14ª posição em 20 países
TIMSS (1995)	Aprendizagens em ciências e matemática	Alunos do 3.º, 4.º, 7.º e 8.ºanos	37º lugar em 41 países
PISA (2000)	Literacia de leitura	Alunos com 15 anos (independentemente do nível de escolaridade)	25ª posição em 27 países da OCDE
PISA (2003)	Literacia matemática		30ª posição em 40 países/economias
PISA (2006)	Literacia científica		27ª posição em 30 países da OCDE
PISA (2009)	Literacia de leitura		17.ª posição em 33 países membros da OCDE
TIMSS & PIRLS (2011)	Aprendizagens em matemática, ciências e leitura	Alunos do 4.º ano	15.º lugar em 27 países (em matemática) 19.º lugar em 27 países (em ciências e leitura)
PISA (2012)	Literacia matemática	Alunos com 15 anos (independentemente do nível de escolaridade)	23.ª posição em 34 países membros da OCDE

Figura 9: Resultados dos alunos portugueses nos diferentes estudos internacionais

Ao nível das avaliações nacionais, realizaram-se as provas de aferição, em 2000 para ao 4.º ano, em 2001, para o 6.º ano e, em 2002, para o 9.º ano, avaliando-se os conhecimentos dos

[16] Fonte: ME (2010); Ramalho (2004); Serrão (2010); Ferreira (2007); MEC (2013).

alunos nas disciplinas de Matemática e Língua Portuguesa, não tendo as mesmas avaliações qualquer efeito na progressão ou certificação dos alunos. É de notar que as primeiras avaliações externas começaram por ser criadas em 1992 para o ensino básico (Despacho Normativo n.º 98-A/92 de 19 de junho) acontecendo, no entanto, oito anos depois a sua primeira aplicação aos alunos do 4.º ano (Fernandes, 2007). Apenas em 2004/2005 se realizou a primeira avaliação externa das aprendizagens com impacto na progressão e certificação, nas disciplinas de Matemática e Língua Portuguesa, no final da escolaridade obrigatória – 9.º ano. Mais tarde, no ano letivo 2012/2013, todos os alunos de todos os ciclos de ensino (1.º, 2.º, 3.º ciclos e secundário) passaram a realizar Provas Finais (ensino básico) e Exames Nacionais (ensino secundário) com efeitos na progressão.

Apesar de Portugal participar em avaliações internacionais das aprendizagens há mais de 20 anos, os estudos revelam consistentemente que os alunos portugueses apresentam "*um desempenho modesto ou mesmo fraco*" (Fernandes, 2007) na resolução de problemas, na aplicação e utilização de conhecimentos a situações novas ou na análise e interpretação da informação. Denotam-se evidentes dificuldades nas questões que exigem mobilização, integração e aplicação de conhecimentos. Os últimos estudos internacionais (por exemplo, TIMSS 2011), com avaliações menos negativas, revelam que o trabalho realizado nas escolas nos últimos anos, com os professores e pelos professores, contribuíram significativamente para a melhoria de um trabalho na sala de aula e consequentes aprendizagens dos alunos (APM, 2012).

2.2. A *Competência Matemática* através dos tempos

" Ser matematicamente competente envolve hoje, de forma integrada, um conjunto de atitudes, de capacidades e de conhecimentos relativos à matemática."
(CNEB, 2001)

As mudanças nas sociedades contemporâneas influenciadas pelos progressos da ciência e da tecnologia, tiveram efeitos diretos nas questões educativas, interferindo no currículo escolar e no seu desenvolvimento. As exigências de uma educação para todos e a valorização de uma aprendizagem ao longo da vida "*trazem à escola uma responsabilidade onde já não basta acumular o saber, é preciso ser capaz de o utilizar, transferir e mobilizar no sentido de sustentar tomadas de decisão informadas e esclarecidas*" (Serrazina, 2005 p.36).

A noção de competência matemática, em cada uma das quatro fases a que reporta a minha atividade profissional – Programa de Matemática de 1991, novo Currículo Nacional do Ensino Básico de 2001, reajustamento do programa de 1991, em 2007 e Programa e Metas Curriculares de Matemática para Ensino Básico em 2013, conheceu terminologias e abordagens diferentes embora remetam, claramente, para um conjunto de desempenhos que se espera que os alunos alcancem no final do ciclo de estudos. Nesta secção pretende-se evidenciar o *conjunto de desempenhos esperados* nos alunos em cada uma destas fases procurando definir em primeira instância o significado de *competência matemática* tendo em consideração as diferentes finalidades do ensino da Matemática (Anexo A2).

Em 1991, o documento curricular - *Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem* - remete para um conjunto de objetivos gerais a desenvolver no aluno, divididos em três áreas de formação: Valores/Atitudes, Capacidade/Aptidões e Conhecimentos. Apresentava uma noção implícita de competência matemática, esperando-se desenvolver nos alunos:

- a confiança em si próprio, a curiosidade e gosto de aprender, os hábitos de trabalho e persistência e o espírito de tolerância e cooperação;
- a capacidade de resolver problemas, o raciocínio, a capacidade de comunicação, a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

- conhecimentos relativos ao conceito de número, ao desenvolvimento do cálculo, aos processos e técnicas de tratamento de informação e ao estudo do *Espaço*.

(adaptado de ME, 1991)

Com o CNEB de 2001, a competência em matemática passa a evidenciar um caráter mais aglutinador do conceito esperando "*promover o desenvolvimento integrado de conhecimentos, capacidades e atitudes e não de adicionar capacidades de resolução de problemas, raciocínio e comunicação e atitudes favoráveis à atividade matemática a um currículo baseado em conhecimentos isolados e técnicas de cálculo*" (DEB, 2001, p.58). Para caraterizar a competência matemática usam-se termos tais como "*predisposição*" (para procurar regularidades ou para fazer e testar conjeturas), "*aptidão*" (para comunicar ideias matemáticas ou para analisar erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas) ou "*tendência*" (para procurar a estrutura abstrata subjacente a uma situação) (DEB, 2001). Neste documento procura-se, com rigor, ainda definir competência matemática em oito pontos que no seu todo contribuem para os alicerces de uma cultura matemática básica (Anexo A3).

Em 2007, o reajustamento do Programa de Matemática para o Ensino Básico, define os objetivos gerais para o ensino da disciplina descrevendo as principais metas, por ciclos, evidenciando o desenvolvimento paralelo de capacidades transversais.

> "Os objetivos gerais (...) contemplam, no seu conjunto, o desenvolvimento de conhecimentos, capacidades e atitudes, mas diferentemente dos programas de 1991, não são apresentadas em categorias separadas, (...) deste modo favorece uma visão integradora destes três domínios."
>
> (PMEB, 2007, p.4)
>
> "(...) o programa destaca três grandes capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática: a Resolução de problemas, o Raciocínio matemático e a Comunicação Matemática."
>
> (PMEB, 2007, p.7)

A noção de competência matemática passa a direcionar-se para as duas grandes finalidades do ensino da Matemática:

> **a)** Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados.
>
> **b)** Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência.
>
> (PMEB, 2007)

Atualmente o PMMC para ensino básico define sete desempenhos fundamentais, de uma forma muito detalhada, que se desejam promover no aluno:

Identificar/designar	Utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente.
Reconhecer	Apresentar uma argumentação coerente ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor.
	Saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação.
Reconhecer, dado...	Justificar o enunciado em casos concretos, sem que se exija que o prove com toda a generalidade.
Saber	Conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.
Provar/Demonstrar	Apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível.
Estender	(a) Estender a um conjunto mais vasto uma definição já conhecida (definir o conceito como se indica, ou de forma equivalente, reconhecendo que se trata de uma generalização).
	(b) Estender uma propriedade a um universo mais alargado (reconhecer uma propriedade, podendo por vezes esse reconhecimento ser restrito a casos concretos).
Justificar	Justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida.

(adaptado do PMMC, 2013)

Aliadas a estas competências encontram-se as três grandes finalidades (em vez das duas do programa anterior de 2007) do ensino da Matemática: (1) a estruturação do pensamento; (2) a análise do mundo natural; (3) a interpretação da sociedade.

Como consideração final, a competência matemática pretende ser uma alfabetização não pela aquisição de conhecimentos mas pela sua mobilização em diferentes contextos da vida das pessoas. Não interessam as aprendizagens básicas que se adquirem na escola (ao longo da escolaridade obrigatória) pelo treino mecanizado de procedimentos sem os compreender. Impõe-se desenvolver a capacidade de pôr em prática o que se aprende, sobretudo quando o objetivo é procurar soluções para situações que surgem na vivência diária e integrada, tendo em conta a exigência de uma sociedade do século XXI.

O conceito aqui retratado é, sem dúvida, muito abrangente e complexo, no entanto, realça a ideia de supor "(...) *que para aprender Matemática é preciso compreendê-la no contexto em que está a ser utilizada.*" (Serrazina, 2005, p.58).

2.3. O ensino da Geometria no 3.º ciclo

“A geometria proporciona um contexto rico para o desenvolvimento do raciocínio matemático,
incluindo o raciocínio indutivo e dedutivo, através da formulação e validação de conjeturas,
e da classificação e definição de objetos geométricos.”
(NCTM, 2007, p.275)

O estudo da Geometria permite criar um contexto natural para a descrição de relações e conexões conduzindo ao desenvolvimento das capacidades de raciocínio e de argumentação dos alunos. Mais do que um conjunto de definições, pretende ajudar os alunos a aprender a raciocinar, recorrendo à lógica para justificar relações no próprio sistema geométrico permitindo, desta forma, perceber a estrutura axiomática da matemática.

Nesta secção apresenta-se uma retrospetiva da evolução das tendências do ensino da Geometria no 3.º ciclo, procurando integrá-las nos seus objetivos e conceitos essenciais, enquadradas no período da minha atividade profissional.

Com o novo programa da Matemática pelo Decreto n.º 139/ME/90 de 16 de agosto, assiste-se ao regresso da Geometria com mais tempo letivo reservado ao seu estudo.

Um dos documentos orientadores - as *Normas para o currículo e avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1991) – procurava promover um ensino da Geometria baseado na exploração de tarefas que proporcionassem a possibilidade de observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas e de operar com elas. O estudo da Geometria é considerado um tópico privilegiado pelo poder de encaixe de vários recursos educativos, que despertam o interesse dos alunos, tais como materiais manipuláveis e programas de geometria dinâmica para computadores.

Em 1991 o estudo da Geometria no 3.º ciclo tinha por base as construções geométricas, onde o aluno conhecia e aplicava propriedades das relações geométricas, sendo este tema privilegiado para o desenvolvimento paralelo de inúmeras capacidades transversais. No documento *Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem* (volume II) – 1991, os conteúdos temáticos apresentam-se por anos de escolaridade, onde cada tema divide-se em unidades didáticas, permitindo uma visão global da alternância e interligação desses temas ao longo dos três anos do ciclo (Figura 10). Para cada unidade são definidos objetivos específicos, observações/sugestões metodológicas ficando mais ou menos claro o nível de profundidade a atingir em cada tema, bem como exemplos de contextos a explorar em contexto de sala de aula.

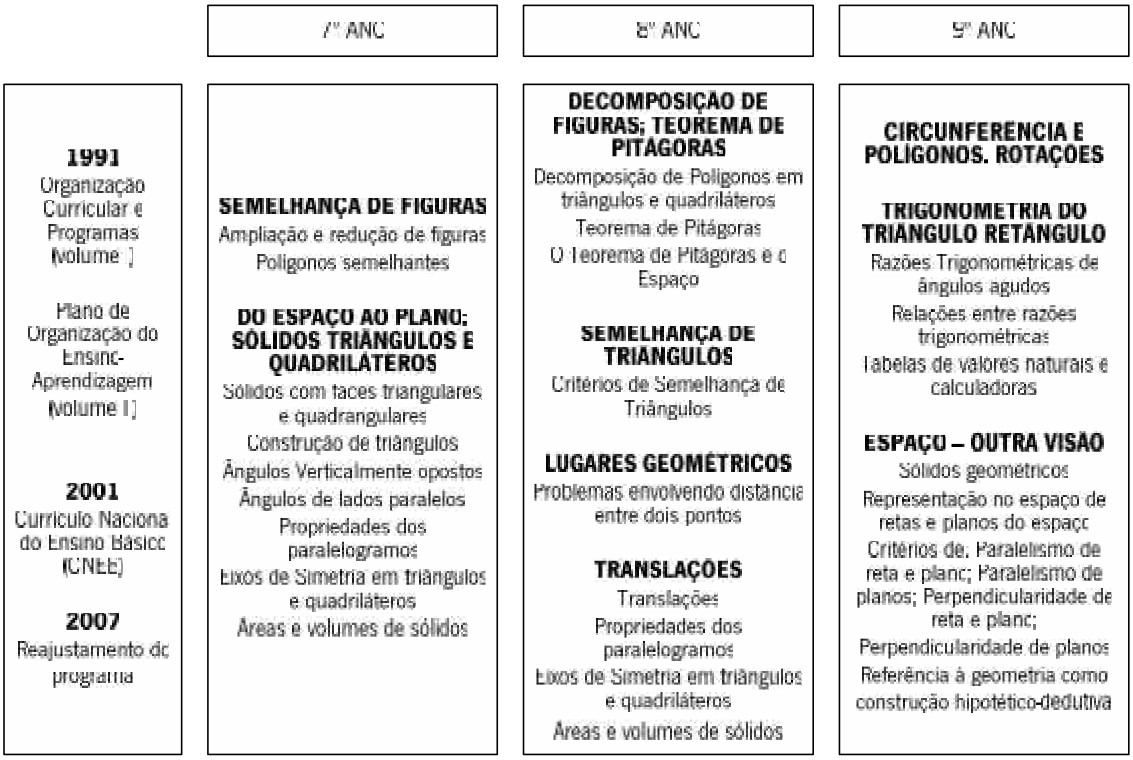


Figura 10: Temas de Geometria do programa de Matemática de 1991, 2001 e 2007

Apesar de todas as diretrizes e intenções, a falta de formação de professores que não acompanhou as necessidades do ensino da Geometria, o esquecimento das condições nas escolas para a utilização dos computadores no ensino da Matemática (ignorando a experiência do Projeto MINERVA), bem como a divisão dos temas por anos no 3.º ciclo (transparecendo falta de visão de conjunto), revelaram-se fatores decisivos para que a tentativa de valorização da Geometria, durante a década de 90, acabasse, em termos práticos, por ser inócua.

Em 2001 e em 2007, apesar de esperadas mudanças, permaneceram em vigor, na sua generalidade, os mesmos conteúdos de 1991. No entanto, as linhas de orientação curricular apresentam-se mais globais e menos prescritivas, valorizando a lógica de ciclo (em oposição à prática de programas por ano de escolaridade), procurando mudar hábitos de pensamento matemático, onde as competências essenciais a adquirir pelos alunos não se pretendiam estanques mas antes serem "*um processo gradual e contínuo ao longo do ensino básico.*" (DEB, 2011). As competências a desenvolver passam pela "*aptidão*" para visualizar e descrever propriedades, para realizar construções geométricas e ainda para resolver problemas geométricos. Paralelamente, o aluno deve "*compreender*" conceitos, "*reconhecer*" relações geométricas e o significado de fórmulas para o cálculo de áreas e volumes. Numa outra fase, valoriza-se a "*tendência*" para procurar invariantes em figuras geométricas e utilizar modelos geométricos na resolução de problemas.

Em 2007, procurou-se dar um novo propósito ao ensino da Geometria, assente num conjunto de objetivos gerais, que procuraria evidenciar o desenvolvimento de capacidades de visualização e raciocínio, conduzindo à compreensão da noção de demonstração e ao treino de raciocínios dedutivos.

Nas *Normas para a Geometria* (NCTM, 2007) sublinha-se que nos temas de Geometria o ensino do pré-escolar ao 12.° ano deve "habilitar" os alunos para:

- Analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas;
- Especificar posições e descrever relações espaciais recorrendo à geometria de coordenadas e a outros sistemas de representação;
- Aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas;
- Usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas.

(NCTM, 2007)

O PMEB (ME, 2007) recomenda ainda que se deve partir de situações do quotidiano para o estudo das grandezas geométricas tendo como referência azulejos, tapeçarias, pinturas e o próprio corpo humano. Entende-se que a visualização é um conceito amplo que engloba diversas capacidades: a forma como os alunos percecionam o mundo que os rodeia; a observação, manipulação e transformação de objetos e suas representações; a interpretação de relações entre os objetos e entre estes e as suas representações. O sentido espacial passa a ser mais abrangente e envolve ainda noções de orientação e movimento, desempenhando um papel importante na perceção das relações espaciais. No 3.° ciclo recomenda-se a introdução de pequenas cadeias dedutivas na exploração de problemas geométricos que se enquadram nos temas *Paralelismo*, *Semelhança de Triângulos*, *Teorema de Pitágoras* e *Transformações Geométricas* (Breda, A., 2011).

O novo PMMC (2013) considera que o 3.° ciclo constitui uma importante etapa na formação matemática dos alunos, tratando-se de um período de consolidação dos conhecimentos e de capacidades ainda a desenvolver.

> "Um objetivo geral dedicado à axiomática da geometria permite enquadrar historicamente toda esta progressão e constitui um terreno propício ao desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo dos alunos."
>
> (PMMC, 2013)

A nova abordagem do ensino da Geometria para o 3.° ciclo baseia-se em dois grandes documentos orientadores (Figura 11) - *Princípios e Normas para a Matemática Escolar e Programa da Matemática e Metas Curriculares* - que constituem instrumentos de suporte ao trabalho do professor.

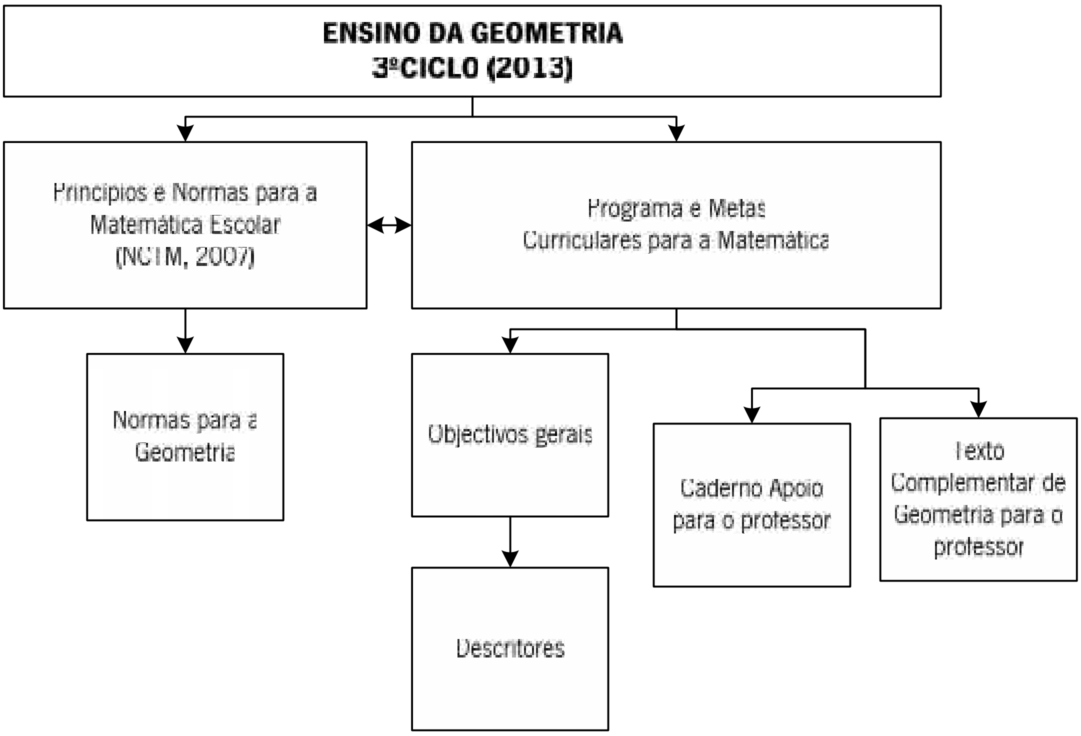


Figura 11: Orientações para o ensino da Geometria a partir de 2013

Registam-se mudanças significativas dos temas a estudar ao longo dos três anos do ciclo, altera-se a sua ordem e releva-se o desenvolvimento da capacidade demonstrativa dos teoremas desde o 7.° ano. Neste sentido alerta para um maior cuidado na utilização correta dos termos (definição, propriedade, teorema, etc.) e dos procedimentos demonstrativos próprios da matemática.

As preocupações parecem ser mais ambiciosas procurando ir ao encontro das *Normas de Geometria*, previstas nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, destacando-se uma nova abordagem da introdução do conjunto dos números reais, usando a incomensurabilidade de segmentos do tema Geometria e Medida. Neste domínio espera-se que o aluno, para além de conhecer o alfabeto grego e o vocabulário próprio do método axiomático, seja capaz de caracterizar a Geometria Euclidiana, destacando o axioma das paralelas. Ao longo do 3.º ciclo, no estudo das semelhanças e congruências, os alunos iniciam o desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo e técnicas de demonstração mais formais para validar conjeturas e ajudar na resolução de problemas.

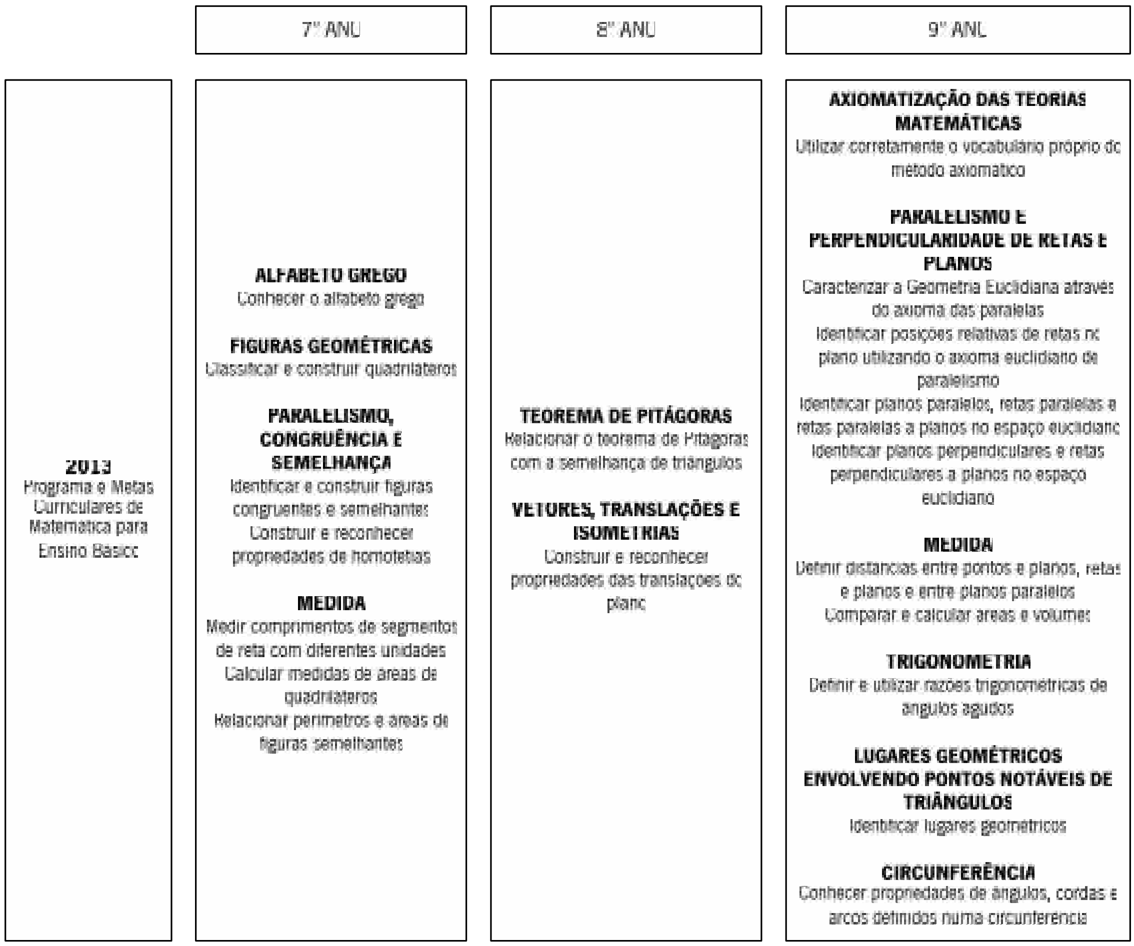


Figura 12: Temas de Geometria previstos no PMMC de 2013

Destacam-se outras alterações, como por exemplo, o facto do estudo dos *Lugares Geométricos* surgir conectado com estudo da *Circunferência* no 9.º ano, depois de uma breve caracterização da Geometria Euclidiana. Antecipa-se o estudo da *Semelhança de Triângulos* no 7.ºano (anteriormente estudado no 8.º ano), associando *paralelismo, congruência e semelhança*. O estudo das *Isometrias* concentra-se no 8.º ano, ganhando maior consistência a sua articulação e propriedades. O tema *Medida* é iniciado no 7.º ano com a relação de comensurabilidade entre segmentos de figuras semelhantes, abrindo portas ao caso da incomensurabilidade e à necessidade da introdução do conjunto dos números reais.

> "A necessidade de introdução (...) deste conjunto mais geral de números [números reais] (...) resulta da existência de segmentos incomensuráveis."
>
> "(...) são apresentados alguns teoremas fundamentais, como o teorema de Tales ou de Pitágoras(...)"
>
> "O Teorema de Tales permite (...) tratar (...) os critérios de semelhança de triângulos, que estão na base de numerosas demonstrações geométricas propostas."
>
> "(...) desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo."
>
> (PMMC, GM7, 2013)

O teorema de Tales e suas aplicações quer em problemas de modelação matemática quer na demonstração dos critérios de semelhança de triângulos é uma das novidades. São evidentes, já no 7.º ano, as muitas demonstrações de resultados que se pretendem que os alunos desenvolvam não só por uma via geométrica (recorrendo a recortes em papel), mas também por uma via mais analítica. Aliado a este teorema surge uma nova abordagem do tema *Teorema de Pitágoras* (8.º ano) que é visto como uma consequência do teorema de Tales (7.º ano), fugindo-se à tradicional demonstração geométrica com recurso a áreas, resultantes da decomposição de figuras.

2.4. O papel do professor e a gestão curricular

“A seleção e a utilização de materiais de ensino adequados, de ferramentas e técnicas didácticas, a vivência de uma prática reflexiva um contínuo enriquecimento pessoal constituem acções que os bons professores levam a cabo todos os dias.”
(NCTM, 2007, p.19)

Todo o trabalho do professor nas suas diferentes fases – planificação, execução e avaliação - implica a gestão curricular e a indissociável reconstrução do currículo pela sua reinterpretação e transformação. Ponte (2005) define gestão curricular como o “*modo que o professor interpreta e (re)constrói o currículo, tendo em conta as características dos seus alunos e as suas condições de trabalho*” (p.11), referindo-se a dois níveis de gestão – o “*macro*”, relacionado com o planeamento da prática letiva numa perspetiva mais global de ano letivo, período letivo ou unidade temática e o “*micro*”, correspondendo à concretização dessa prática num segmento de “*aula*”.

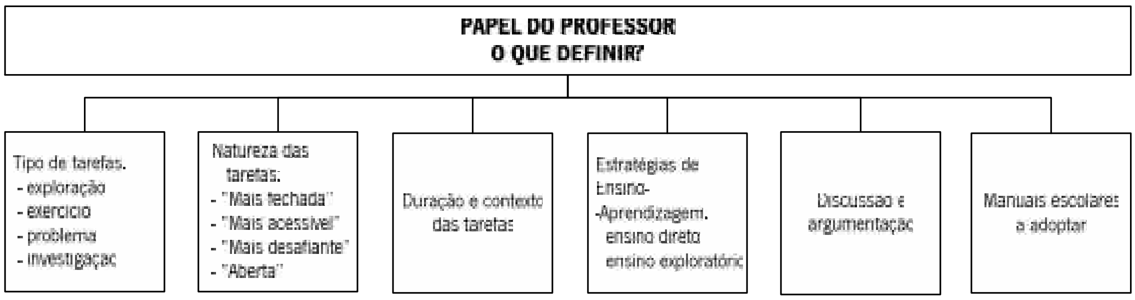


Figura 13: Destaque do papel do professor, baseado em Ponte (2005).

O papel do professor é determinante pois decide a combinação de tarefas mais adequadas ao processo de desenvolvimento do ensino-aprendizagem. Importa referir as duas dimensões fundamentais das tarefas a propor – o grau de desafio matemático (“*reduzido*” ou “*elevado*”) e o grau de estrutura (“*aberto*” ou “*fechado*”). Ainda segundo Ponte (2005), dividem-se em quatro quadrantes o tipo de tarefas que o professor pode propor aos alunos: exploração (1.º quadrante); exercício (2.º quadrante); problema (3.º quadrante); e de investigação (4.º quadrante). Acrescenta o mesmo autor que, a atribuição de cada tipo de tarefa depende dos conhecimentos prévios dos alunos e do grau de desafio que se propõe. As tarefas devem estar ajustadas na duração e no contexto em que são aplicados, não esquecendo a importância dos momentos de discussão onde o professor aproveita para procurar clarificar conceitos e procedimentos, valorizando argumentos, validando conjeturas e conclusões, por forma, a permitir estabelecer conexões dentro e fora da Matemática.

Referem as *Normas Profissionais para Ensino da Matemática* (NCTM, 1994) que o papel do professor é o de "*provocar o raciocínio dos alunos em Matemática*" (p.37), "*pedindo aos alunos para escrever explicações para as suas ideias e justificações*" (idem), não esquecendo o "*controlo e organização da participação dos alunos*" (p.38).

Já nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007),– *o Princípio do Ensino* remete para o papel do professor na "*compreensão daquilo que os alunos sabem e precisam de aprender, bem como o subsequente estímulo e apoio para que o aprendam corretamente.*"(p.17). A ação mais encorajadora de um professor leva o aluno a pensar, a questionar e argumentar estratégias e soluções encontradas, conduz a ambientes de trabalho capazes de desenvolver uma efetiva aprendizagem. A seleção de tarefas matemáticas, mais ou menos desafiantes, desperta a curiosidade e a envolvência dos alunos na sua concretização.

A escolha de materiais (por exemplo, livro adotado, fichas de trabalho, calculadoras, computadores e software matemático, instrumentos de medição e desenho, modelos geométricos) utilizados numa aula pode tornar-se fator decisivo (ou condicionante) a um certo tipo de aprendizagem que se pretenda alcançar.

As tarefas definidas pelo professor devem ter em consideração a construção de conceitos fundamentais que conduzam à compreensão dos procedimentos e domínio de notações, por forma a ser possível estabelecer conexões dentro e fora da Matemática. Segundo Ponte (2005) as tarefas definidas pelo professor devem, no seu conjunto, proporcionar um percurso de aprendizagem coerente.

Figura 14: Esquema das tarefas a definir pelo professor, baseado em Ponte (2005)

Em todos os documentos oficiais de orientação ao ensino da Matemática são apresentadas indicações metodológicas relativamente ao papel do aluno e do professor. O aluno é visto como agente ativo na sua aprendizagem e o professor como seu dinamizador e regulador na gestão do currículo.

1991 **PMEB**	Ao professor cabe a criação de situações de aprendizagem e simultaneamente a dinamização e regulação do processo "*adaptando estratégias que envolvam o aluno de uma forma cada vez mais independente e pessoal*". (ME, 1991a, p.166; 1991c, p.196)
2001 **CNEB**	As orientações para o trabalho do professor são operacionalidades em cada uma das competências gerais e têm por base "*apoiar o aluno na descoberta das diversas formas de organizar a sua aprendizagem e na construção da sua autonomia para aprender*". (CNEB, 2001, p.24)
2007 **PMEB**	O professor deve "*propor aos alunos a realização de diferentes tipos de tarefas, dando-lhes uma indicação clara das suas expectativas em relação ao que espera do seu trabalho, e apoiando-os na sua realização*". Para além disso deve "*prever momentos para confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações matemáticas*". (PMEB, 2007, p.8)
2013 **PMMC**	"(...) *as condições em que são abordados os níveis de desempenho mais avançados ficam ao critério do professor, em função das circunstâncias (tempo, características dos alunos ou outros fatores) em que decorre a sua prática letiva*". (PMMC, 2013, p.27)

Capítulo 3. O Teorema de Tales e a Semelhança de Triângulos

O estudo do teorema de Tales e suas aplicações enquadra-se no subdomínio *Paralelismo, Congruência e Semelhança* integrado no domínio *Geometria e Medida* (GM7), do 7.º ano de escolaridade, no novo Programa de Matemática e Metas Curriculares para Ensino Básico de 2013 (Anexo B1). A aplicação do teorema de Tales é transversal aos três anos do 3.º ciclo e relaciona-se com outros dois grandes subdomínios: no 8.º ano de escolaridade, com o estudo do *teorema de Pitágoras* e, no 9.º ano escolaridade, com o estudo da *Trigonometria de um triângulo retângulo*. (Anexo B2)

O tema escolhido para este relatório - *O Teorema de Tales e a Semelhança de Triângulos* - é muito abrangente e privilegia as três grandes finalidades do ensino da Matemática para 3.º ciclo - *estruturação de pensamento, análise do mundo natural e a interpretação da sociedade* (PMMC, 2013).

A aplicação do teorema de Tales e critérios de Semelhança de Triângulos assumem grande importância na resolução de problemas de geometria que envolvam modelação matemática. Grande parte das resoluções desses problemas passa pela comparação de dois ou mais triângulos pelo que, a aplicação deste teorema e critérios de semelhança, revelam-se estratégias adequadas e determinantes. No âmbito do domínio GM7, prevê-se ainda o estudo das propriedades dos triângulos e paralelogramos destacando a noção de paralelismo e suas propriedades.

Numa nova abordagem do estudo da Geometria na escola, espera-se que os alunos, no 7.º ano, sejam capazes de demonstrar alguns resultados geométricos elementares, enfatizando um raciocínio mais dedutivo e não apenas intuitivo, apoiando-se numa vertente mais analítica tendo por base a interpretação geométrica. Com isto, assiste-se a uma visão mais profunda das propriedades geométricas que vai muito além da concretização das "demonstrações" com recurso a recortes em papel e ao conhecimento de uma lista de resultados aceites sem serem demonstrados formalmente. Pretende-se que estas concretizações mais práticas sejam um complemento às demonstrações analíticas, que valorizam o encadeamento de etapas e revelam um efetivo raciocínio dedutivo, assentes numa linguagem escrita mais rigorosa e com notações adequadas.

Como forma de sintetizar as partes constituintes deste capítulo, apresenta-se em esquema os temas a focar e a sua interligação.

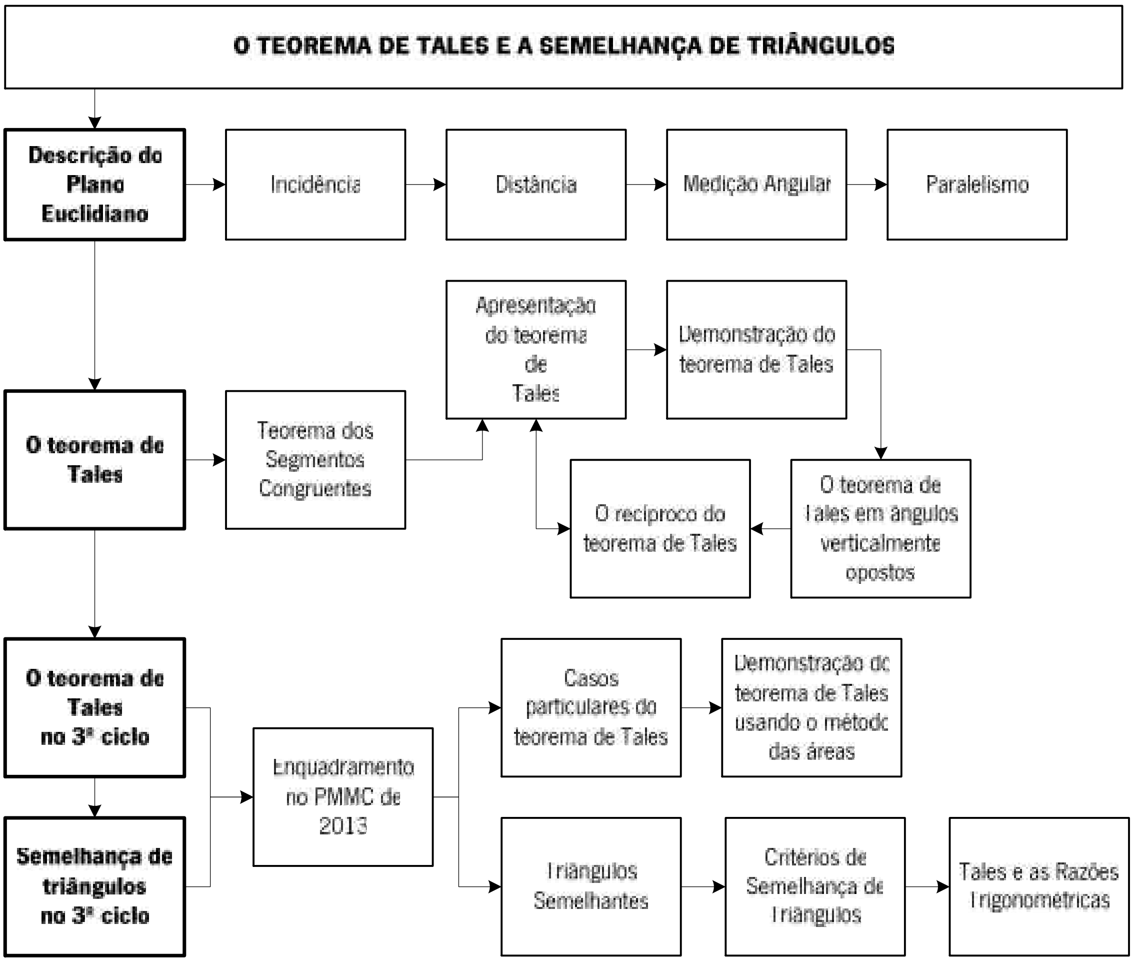


Figura 15: Esquema do capítulo "*O teorema de Tales e a Semelhança de Triângulos*"

A organização deste capítulo tem por base a descrição do Plano Euclidiano, com a apresentação de doze axiomas que estabelecem relações entre pontos e permitem definir distância, ângulo e paralelismo. A apresentação do axioma das paralelas será sucessivamente adiada ao longo do capítulo permitindo, com isso, mostrar um conjunto de resultados válidos na geometria neutra, considerados de grande interesse histórico e matemático. O teorema dos segmentos congruentes e as muitas propriedades de paralelismo e congruência a ele associado, permitem reconhecer importantes relações que ajudam na exploração do teorema de Tales aqui apresentado. A demonstração do teorema de Tales, bem como a análise de casos particulares permitem retratar um trabalho a realizar pelo professor na planificação do tema. A questão da incomensurabilidade surge no contexto da demonstração do teorema e é feito o seu enquadramento. A "demonstração" de casos particulares do teorema de Tales tem por base os conteúdos previstos no PMMC para o 7.º ano de escolaridade pelo que, a abordagem, privilegia conhecimentos adquiridos ao nível do 2.º ciclo (5.º e 6.º anos) e os até ao momento estudados no 3.ºciclo.

Numa última fase cria-se a ponte entre este teorema e as suas diversas aplicações, nomeadamente na demonstração dos critérios de semelhança de triângulos e na definição das razões trigonométricas.

De notar ainda que a apresentação da axiomática do Plano Euclidiano não acontece em ambiente de sala de aula, ao nível do 7.º, 8.º ou 9.º anos de escolaridade, muito embora se apliquem os teoremas que dela advêm, enquadrados numa perspetiva de modelação matemática ou simplesmente sob a forma de exercícios.

Em relação à notação matemática utilizada ao longo do capítulo ela será, sempre que necessário, adaptada ao contexto, em benefício da legibilidade do texto, sem que com isso se perca o rigor da mesma.

3.1. Descrição do Plano Euclidiano

Apresentam-se os axiomas da Geometria Euclidiana, segundo Paulo Araújo (1998) e Franco Oliveira (1995), iniciando-se com os axiomas de incidência (**A_1 – A_3**), passando pela convexidade e separação (**A_4 – A_6**), medição de ângulos e congruência de triângulos (**A_7 – A_{11}**), culminado com o paralelismo (**A_{12}**).

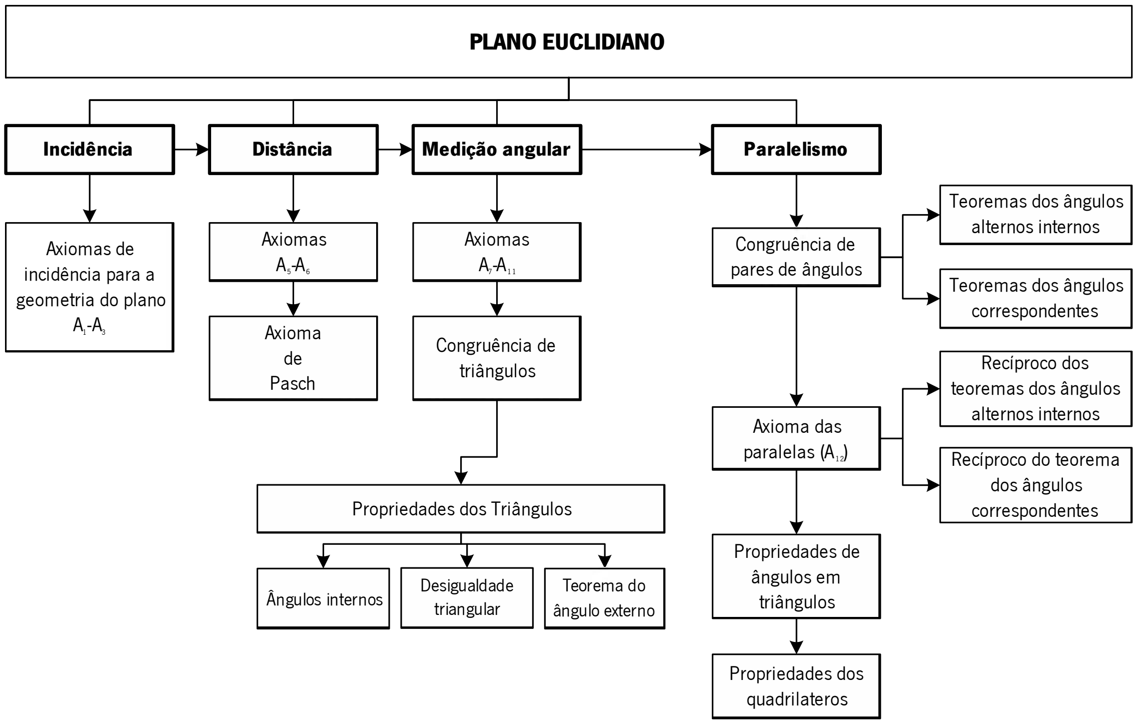


Figura 16: Esquema síntese da descrição do Plano Euclidiano

3.1.1. Incidência

O plano euclidiano, representando por ε é um conjunto formado por pontos, sendo as retas subconjuntos desse plano. Apresenta-se um conjunto de axiomas válidos em ε denominados de axiomas de incidência (**A_1 – A_3**) .

A_1: Por cada par de pontos distintos passa uma e uma só reta.

A_2: Cada reta contém pelo menos dois pontos.

A_3: Existem pelo menos três pontos não colineares[17].

---

[17] Três pontos, A, B e C dizem-se colineares (ou alinhados) se pertencem a uma mesma reta.

Apresentam-se algumas proposições simples, possíveis de demonstrar usando apenas os axiomas (**A₁** – **A₃**):

I. Para cada reta r existe pelo menos um ponto de ε exterior a r (isto é, um ponto que não pertence a r).

II. Para cada ponto P existe pelo menos uma reta de ε que não passa por P.

III. Por cada ponto passam pelo menos duas retas distintas.

IV. Existem pelo menos três retas não concorrentes (isto é, tais que não há nenhum ponto comum a todas elas).

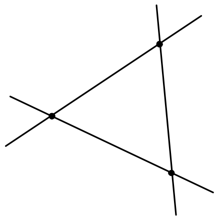


Figura 17: Três retas não concorrentes

3.1.2. Distância

Para garantir que ε tenha um número infinito de pontos considera-se a noção de medida de um comprimento de um segmento pela atribuição de um número real, não negativo, que satisfaça algumas propriedades, definidas nos axiomas seguintes:

A_4: A cada par de pontos distintos, P e M do plano ε, associa-se um número real $|PM|$ que se designa por distância de P a M, e satisfaz as seguintes propriedades:

i. $|PM|$ é não negativa (positividade);

ii. $|PM| = 0$ se e só se $P = M$ (não degenerescência);

iii. $|PM| = |MP|$ (simetria).

A desigualdade triangular $|PM| \leq |PR| + |RM|$ não faz parte dos requisitos de distância, trata-se de um teorema cuja demonstração será apresentada *a posteriori* ainda neste capítulo.

No estudo do cálculo infinitesimal, a expressão *reta real* leva a imaginar os números reais dispostos numa reta. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ seria uma régua graduada infinita que se ajusta a qualquer reta $s \subseteq £$ para medir distâncias em ε. O axioma **A$_5$** permite formalizar essa ideia intuitiva dos números reais, estabelecendo-se a correspondência de cada ponto da reta s a um número real – a coordenada desse ponto.

> **A$_5$:** Cada reta s do plano ε possui um sistema de coordenadas, isto é, uma função bijetiva $f : s \to \mathbb{R}$ tal que:
>
> $$|PM| = |f(P) - f(M)| \text{ para todos } P, M \in s.$$

Por **A$_5$**, cada reta tem o mesmo cardinal de $\mathbb{R}$, pelo que ε terá uma infinidade (não numerável) de pontos. A existência de um sistema de coordenadas, permite definir certos subconjuntos de uma reta, fazendo corresponder a intervalos de $\mathbb{R}$. O ponto P de coordenada zero (isto é, $f(P) = 0$) designa-se origem do sistema de coordenadas.

Dado um sistema de coordenadas f em s, pode induzir-se uma orientação em s, sendo que P está à direita de M se $f(P) > f(M)$. Em cada reta podem definir-se duas orientações distintas. Sendo c uma constante real, os sistemas de coordenadas da forma $h(P) = f(P) + c$, induzem a mesma orientação que f e os sistemas de coordenadas na forma $h(P) = c - f(P)$ induzem a direção oposta.

Sendo P e M pontos de ε tais que $P \neq M$ o segmento de reta de extremos P e M é o conjunto $\{Q \in s : f(P) \leq f(Q) \leq f(M)\}$, supondo que s é a reta que passa em P e M. Os pontos P e M designam-se extremos e representa-se tal segmento por $[PM]$. Um ponto E está entre P e M se e só se $E \in [PM]$. O comprimento do segmento $[PM]$ é, por definição, a distância $|PM|$ entre as suas extremidades, podendo também representar-se por $\overline{PM}$. Dois segmentos dizem-se congruentes se tiverem igual comprimento.

Cada ponto $Q \in s$ divide a reta em dois subconjuntos, estando uns pontos de s à direita de Q e outros à esquerda de Q. Designa-se que cada um destes subconjuntos de s por uma semirreta de origem Q. Dado um sistema de coordenadas f em s, as duas semirretas de origem Q são os conjuntos $\{Q \in s : f(Q) \leq f(P)\}$ e $\{Q \in s : f(Q) \geq f(P)\}$.

Quando os pontos Q e P são pontos distintos, considera-se a semirreta QP como tendo origem em Q e contém o ponto P. A semirreta de QP é um subconjunto da reta QP e é diferente da semirreta PQ.

Definição

Conjunto convexo — Um conjunto diz-se convexo quando qualquer segmento de reta que une dois pontos do conjunto está nele contido.

O conjunto A é convexo e o conjunto B é não convexo.

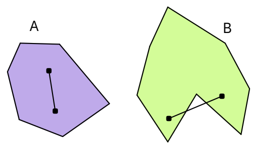


Figura 18: Conjunto convexo e conjunto não convexo

O axioma da separação (**A$_6$**) relaciona a convexidade e a separação permitindo a construção de exemplos de conjuntos convexos.

A$_6$ (axioma da separação)

Para toda a reta s de ε, existem conjuntos convexos (disjuntos) H_1 e H_2 tais que:

(i) para todo o ponto P, tem-se $P \notin s$ se e só se $P \in H_1 \cup H_2$

(ii) para quaisquer dois pontos distintos P e M, se $P \in H_1$ e $M \in H_2$ então $[PM]$ interseta *s.*

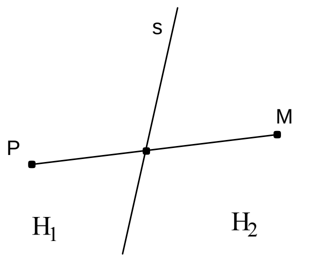


Figura 19: Dois conjuntos convexos H_1 e H_2

Os conjuntos convexos H_1 e H_2 definidos em A$_6$ dizem-se semiplanos e cada um dos semiplanos H_1 e H_2 em que s divide ε diz-se limitado por s. Dois pontos que pertençam ao mesmo semiplano dizem-se do mesmo lado de s. Por consequência se dois pontos distintos, M e L, estiverem do mesmo lado de s então todos os pontos de $[ML]$ estão ainda desse lado, uma vez que os semiplanos são convexos e, em particular, $[ML]$ não interseta s.

Definições

Ângulo Vértice do ângulo	A reunião de duas semirretas distintas (lados do ângulo), não colineares e com a mesma origem, diz-se ângulo. A origem comum das semirretas designa-se por vértice do ângulo. O ângulo MAR (figura 20**Erro! A origem da referência não foi encontrada.**) é um constituído pelas semirretas AR e AM e escreve-se $\sphericalangle MAR$, sendo A o vértice do ângulo.
Interior a um ângulo	O interior a um ângulo resulta da intersecção dos semiplanos H_1 e H_2, onde H_1 é um semiplano limitado pela reta AR e H_2 é um semiplano limitado pela reta AM.
Ponto Interior a um ângulo	O ponto D é um ponto interior ao ângulo MAR se não pertence às semirretas que definem o ângulo e $D \in H_1 \cap H_2$.
Triângulo	Um triângulo é uma figura formada pela reunião de três segmentos $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$, lados do triângulo, sendo que A, B, C pontos não colineares.
Interior a um triângulo	Sejam A, B e C vértices de um triângulo. O vértice A pertence a um dos semiplanos limitados por BC (H_1); o vértice B pertence a outro semiplano limitado por AC (H_2); o vértice C pertence a outro semiplano limitado por AB (H_3). Diz-se interior de um triângulo $[ABC]$ é a interseção de três semiplanos, $H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

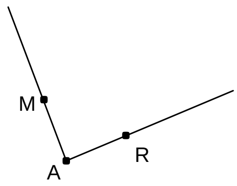


Figura 20: Ângulo MAR

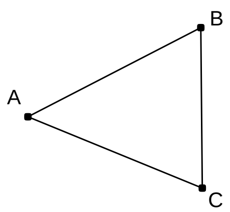


Figura 21: Triângulo [ABC]

Do axioma A_6 demonstra-se o classicamente conhecido axioma de *Pasch,* embora se trate efetivamente de um teorema nesta geometria.

Axioma de *Pasch*

Qualquer reta que intersete um triângulo, num ponto distinto dos vértices, interseta exatamente dois dos seus lados.

Demonstração: Considera-se o triângulo $[MAR]$ e a reta s que interseta o lado $[AR]$ num ponto distinto dos extremos.

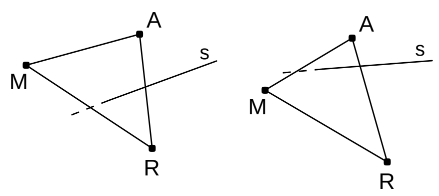


Figura 22: Reta s secante a dois lados do triângulo [MAR]

Os pontos A e R encontram-se, portanto, em lados opostos de s. Surgem duas situações: ou M está do lado que contém A, caso em que a reta s interseta $[MR]$, por A_6; ou, M está do lado que contém R, caso em que a reta s interseta o lado $[MA]$, também por A_6. Em ambos as situações, s interseta dois dos lados do triângulo $[MAR]$. □

A axiomática da geometria euclidiana, até ao momento apresentada, está assente no conceito de medição de segmentos regulada pelo axioma da mediação linear - $\mathbf{A_5}$.

3.1.3. Medição Angular

Depois da medição de segmentos torna-se importante determinar a amplitude de ângulos, sendo que a escala não é única embora, tradicionalmente, sejam mais utilizadas as escalas em graus ou em radianos. Considerando $\mathbf{A_1}$ - $\mathbf{A_6}$, apresentam-se mais três axiomas:

$\mathbf{A_7}$**:** A cada $\sphericalangle ABC$ está associado um único número real $\angle ABC$, que se designa amplitude do ângulo ABC e pertence ao intervalo $\left]0, 180^0\right[$.

$\mathbf{A_8}$**:** Sejam A e B dois pontos distintos e H um dos seus semiplanos limitados pela reta AB. Então, dado $\sim \in \left]0, 180^0\right[$, existe uma única semirreta AP, com $P \in H$ tal que $\angle PAB = \sim$.

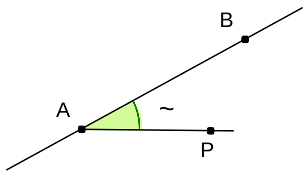


Figura 23: Ângulo BAP

A₉: Se D for um ponto interior ao $\sphericalangle BAC$, então

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC$$

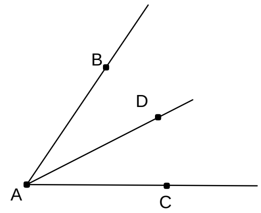


Figura 24: Ponto D interior ao ângulo BAC

Considere-se a reta s de ε. Através dos axiomas **A₇** e **A₉** é possível fixar uma semirreta $s^+ \subseteq s$ e imaginar uma outra semirreta móvel s_1^+ com a mesma origem articulada com s^+ a descrever ângulos. O ângulo entre s^+ e s_1^+ vai crescendo e a cada posição de s_1^+ corresponde uma e uma só amplitude $\sim \in \left]0, 180^0\right[$

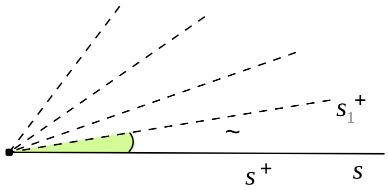


Figura 25: Semirretas s^+ e s_1^+

Definições

Ângulos congruentes

Dois ângulos ABC e DEF dizem-se congruentes se tiverem as mesmas amplitudes, isto é, $\angle ABC = \angle DEF$.

Ângulos verticalmente opostos

Sejam duas retas AE e DC concorrentes em B.

O ângulo ABC formado pelas semirretas BC e BA e o ângulo DBE formado pelas semirretas BD e BE dizem-se verticalmente opostos.

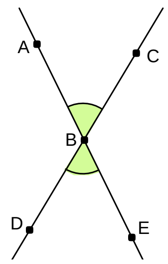


Figura 26: Ângulos ABC e DBE verticalmente opostos

Ângulo reto

Um ângulo diz-se reto se a sua amplitude é de 90°.

Ângulos suplementares adjacentes

Os ângulos ABC e ABD dizem-se ângulos adjacentes se B, C e D são colineares e B está entre C e D.

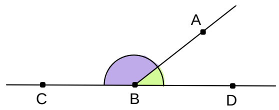


Figura 27:Ângulos suplementares adjacentes

O axioma seguinte refere-se à soma das amplitudes de ângulos suplementares adjacentes.

A_{10}: Se os ângulos ABC e ABD forem suplementares adjacentes então $\angle ABC + \angle ABD = 180°$

De **A_{10}** resultam propriedades importantes de pares de ângulos:

Proposição: Se dois ângulos suplementares adjacentes forem congruentes um ao outro, cada um deles é um ângulo reto.

Demonstração: Sejam $\sphericalangle\ ABC$ e $\sphericalangle\ ABD$ ângulos suplementares adjacentes, tais que $\angle ABC = \angle ABD$. Por **A_{10}**, $\angle ABC + \angle ABD = 180°$, tem-se que $2 \times \angle ABC = 180°$ donde resulta $\angle ABC = 90°$. Por consequência $\angle ABC = \angle ABD = 90°$, pelo que os ângulos são retos. □

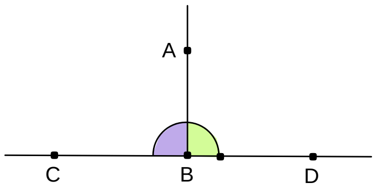


Figura 28: Ângulos suplementares congruentes

Proposição: Quaisquer dois ângulos verticalmente opostos são congruentes**.**

Demonstração: Seja o $\sphericalangle\ ABC$ e o $\sphericalangle\ DBE$ verticalmente opostos. Por **A_{10}**, $\angle ABC + \angle EBC = 180°$, mas também $\angle EBC + \angle EBD = 180°$, pois tratam-se de pares de ângulos suplementares. Resulta então que $\angle ABC = 180° - \angle EBC = \angle DBE$, logo $\angle ABC = \angle DBC$ De forma análoga mostra-se que $\angle EBC = \angle ABD$.□

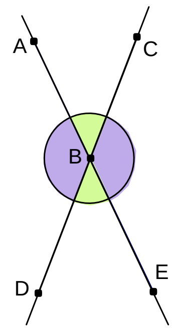


Figura 29: Pares de ângulos verticalmente opostos

Recorde-se que duas retas se dizem perpendiculares se e só se um dos quatro ângulos por elas formada é reto. Pela proposição anterior resulta que se um ângulo formado pelas retas é reto então os restantes três ângulos também são retos.

3.1.3.1. Congruência de Triângulos

A comparação de dois ou mais triângulos permite resolver um grande número os problemas em geometria elementar, sobretudo os estudados no 3.º ciclo, pelo que se torna importante estabelecer uma ordem na correspondência entre os elementos do triângulo para se verificar uma relação de congruência entre eles. Em qualquer triângulo há seis medidas fundamentais – os comprimentos dos três lados e as medidas das amplitudes dos três ângulos internos. Dois triângulos são congruentes quando essas medidas coincidem.

Definição

Triângulos congruentes

Dois triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são congruentes se existir uma correspondência entre os vértices de um e de outro ($A \mapsto D$; $B \mapsto E$ e $C \mapsto F$) de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes, isto é,

$$[AB]=[DE];\ [BC]=[EF];\ [CA]=[FD]$$

$$\angle A = \angle D\ ;\ \angle B = \angle E\ ; \angle C = \angle F$$

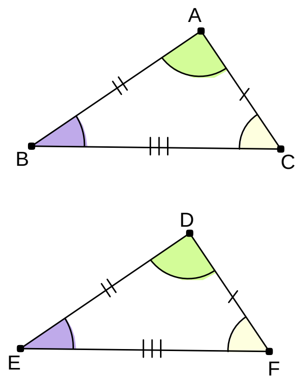


Figura 30: Triângulos [ABC] e [DEF] congruentes

Os critérios de congruência que se estudam nesta secção estabelecem que, em certos casos, basta que três partes (de ângulos ou lados) de um triângulo sejam congruentes às correspondentes partes do outro para que essa correspondência seja uma congruência. O primeiro critério de congruência de triângulos que se apresenta – critério LAL – é introduzido como axioma, sendo que todos os restantes – critério LLL, critério ALA, critério AAL – se deduzem do critério LAL e dos axiomas $\mathbf{A_1}$ - $\mathbf{A_{10}}$.

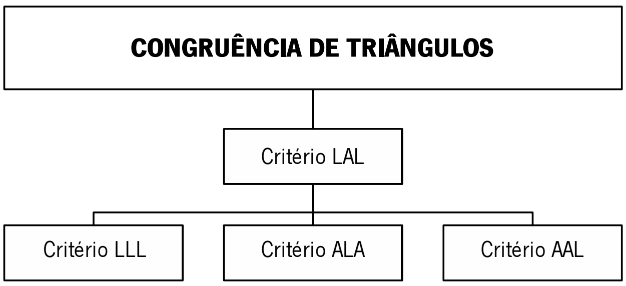


Figura 31: Esquema da apresentação dos critérios de congruência de triângulos.

O axioma seguinte $\mathbf{A_{11}}$ estabelece a congruência de triângulos conhecendo os lados correspondentes e um ângulo por eles formado.

$\mathbf{A_{11}}$**:** Se numa correspondência entre dois triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ se tem que $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ e $\angle A = \angle D$ então essa correspondência é uma congruência.

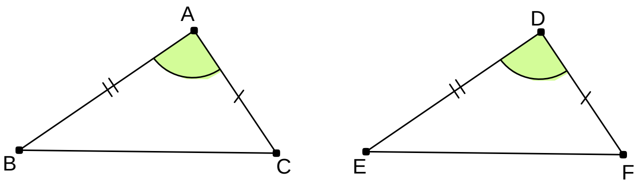


Figura 32: Triângulos congruentes - critério LAL

O axioma $\mathbf{A_{11}}$ trata-se do critério LAL (Lado - Ângulo - Lado) de congruência de triângulos, sendo o único axioma que estabelece uma relação entre distâncias medidas em retas diferentes. Este axioma veio permitir "*legitimar a ideia de movimento*" (Araújo.1998), através da replicação de um dado triângulo num outro lugar. Como consequências de $\mathbf{A_{11}}$ apresentam-se os outros três critérios de congruência de triângulos ao longo da secção.

Teorema (Critério ALA): Dois triângulos são congruentes se um dos lados e os ângulos adjacentes a esse lado forem congruentes às partes correspondentes do outro.

Demonstração:

Considerem-se os dois triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$, suponha-se que $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ e $\overline{AB} = \overline{DE}$. Pretende-se mostrar que $\overline{BC} = \overline{EF}$. Por redução ao absurdo, supõe-se que $\overline{BC} \neq \overline{EF}$ e assume-se que $\overline{BC} > \overline{EF}$ (o outro caso é similar). Existe um ponto $C' \in [BC]$ e $\overline{BC'} = \overline{EF}$ (Figura 33).

Isto implica que os triângulos $[ABC']$ e $[DEF]$, pelo critério LAL (A_{11}), sejam congruentes, logo que $\angle BAC' = \angle EDF$. Mas repare-se que C' é ponto interior ao ângulo BAC, pelo que $\angle BAC' < \angle BAC$ e $\angle EDF < \angle BAC$ o que contradiz uma das hipóteses ao considerar-se que $\angle D = \angle A$.□

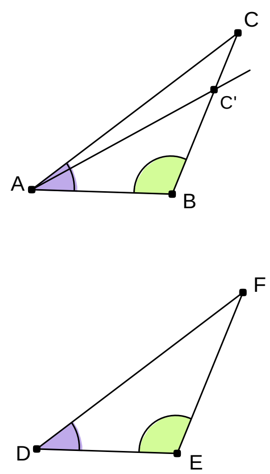


Figura 33: Triângulos [ABC] e [DEF] congruentes – critério ALA

Teorema: Num triângulo a lados iguais opõem-se ângulos iguais e reciprocamente.

Demonstração: Considerem-se os triângulos $[ABC]$ e $[BAC]$, tais que $\overline{AC} = \overline{BC}$. A correspondência $C \mapsto C$; $A \mapsto B$ e $B \mapsto A$ entre o triângulo $[ABC]$ e ele mesmo $[BAC]$ obedece às condições do critério LAL, pelo que os triângulos $[ABC]$ e $[BAC]$ são congruentes; isto significa, em particular, que $\angle B = \angle A$.

O reciproco obtém-se de forma análoga usando o critério ALA.□

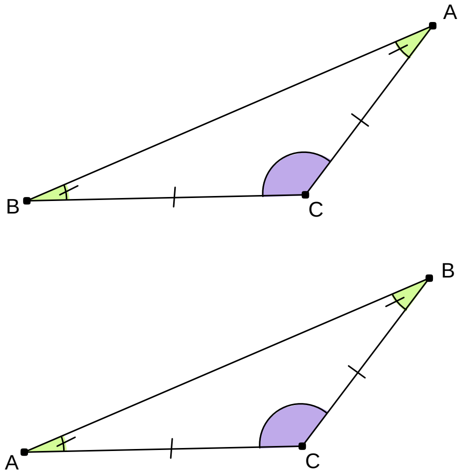


Figura 34: Ângulos opostos a lados iguais num triângulo

Teorema (Critério LLL): Dois triângulos são congruentes se os três lados de um deles forem congruentes aos correspondentes lados do outro.

Demonstração:

Sejam $[ABC]$ e $[DEF]$ dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$ e $\overline{AC} = \overline{DF}$ prova-se que a correspondência entre os triângulos é uma congruência. Pelo axioma **A**$_{11}$ (critério LAL) é suficiente mostrar que $\angle BAC = \angle EDF$. Supondo as igualdades dos lados correspondentes tem-se que $E \equiv B$, $F \equiv C$ (sobrepondo os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$) e A e D estão em lados opostos da reta BC, por construção,

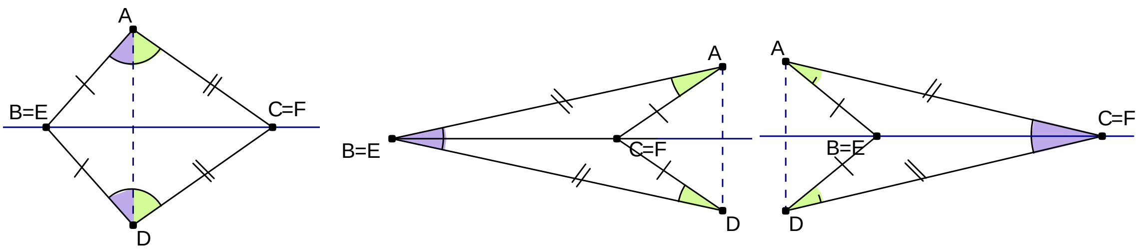


Figura 35: Triângulos [ABC] e [CDE] com base comum

Surgem três casos possíveis (Figura 35):

Caso 1: $[AD]$ intersecta a reta BC num ponto entre B e C;

Caso 2: $[AD]$ intersecta a reta BC num ponto que não pertença ao segmento $[BC]$ e pertença à semirreta BC;

Caso 3: $[AD]$ intersecta a reta BC num ponto que não pertença ao segmento $[BC]$ e pertença à semirreta CB.

No caso 1 como o triângulo $[ABD]$ de base $[AD]$ é isósceles (visto ter dois lados iguais), verifica-se que $\angle BAD = \angle EDA$. Pelo facto do triângulo $[ACD]$ com a mesma base $[AD]$ também ser isósceles resulta $\angle CAD = \angle FDA$, logo $\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD$ que, por sua vez, conduz a $\angle EDA + \angle FDA = \angle EDF$. Fica provado que $\angle BAC = \angle EDF$.

O caso 2 é análogo ao caso 1 para os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ considerando apenas o facto de $\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD$. O caso 3 é perfeitamente análogo ao caso 2. □

Para demonstrar o critério AAL é necessário introduzir algumas definições e conhecer alguns teoremas que resultam do estudo até ao momento apresentado.

Definições

Seja o triângulo $[ABC]$ e um ponto D pertence à reta AC tal que C se situa entre A e D.

Ângulo externo do triângulo	Um ângulo externo de um triângulo é um ângulo que tem por lados a semirreta que contém um dos lados do triângulo e a semirreta obtida pelo prolongamento do outro lado do triângulo. Na Figura 36, o ângulo BCD é um dos seis ângulos externos do triângulo $[ABC]$.
Ângulo interno do triângulo	Um ângulo interno de um triângulo é um ângulo que tem por lados duas semirretas, que contêm dois lados do triângulo, sendo a origem das mesmas um vértice do triângulo. Na Figura 37, o ângulo ABC é um dos três ângulos internos do triângulo $[ABC]$.

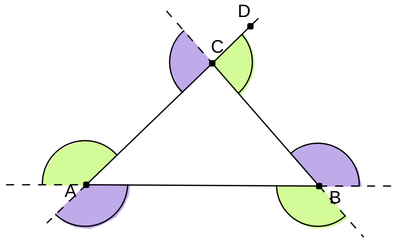


Figura 36: Ângulo externo de um triângulo [ABC]

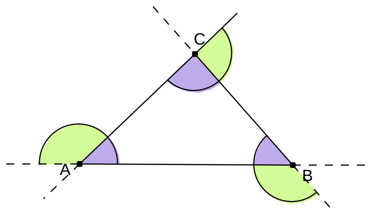


Figura 37: Ângulos internos não adjacentes ao ângulo externo

Partindo do axioma $\mathbf{A}_{11}$ demonstram-se alguns teoremas importantes de relações entre ângulos e lados de triângulos.

Teorema (do ângulo externo): Em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é maior do que a medida de qualquer um dos ângulos internos não adjacentes a esse ângulo.

Demonstração: Seja o triângulo [ABC], D um ponto da reta AB tal que $B \in [AD]$ e o ângulo externo DBC. Considere-se M o ponto médio de [BC] e E o ponto da semirreta AM tal que $\overline{AM} = \overline{ME}$. Uma vez que $\overline{AM} = \overline{ME}$, $\overline{BM} = \overline{CM}$ e $\angle AMC = \angle BME$ (ângulos verticalmente opostos), pelo critério LAL resulta que os triângulos [ACM] e [EBM] são congruentes. Consequentemente, $\angle ACB = \angle EBC$. Como E pertence ao interior do ângulo DBC tem-se que $\angle DBC = \angle DBE + \angle EBC$. Donde se conclui que $\angle DBC > \angle ACB$.

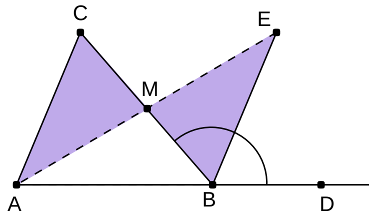


Figura 38: Ângulo DBC externo ao triângulo [ABC]

De um modo semelhante mostra-se que $\angle DBC > \angle EBC$.□

Com os axiomas até ao momento introduzidos $\mathbf{A_1}$ até $\mathbf{A_{11}}$ é ainda possível demonstrar o critério LAA.

Teorema (Critério LAA): Dados dois triângulos [ABC] e [MNL] tais que $\overline{AC} = \overline{ML}$, $\angle ABC = \angle MNL$ e $\angle BCA = \angle NLM$ então os triângulos [MNL] e [ABC] são congruentes.

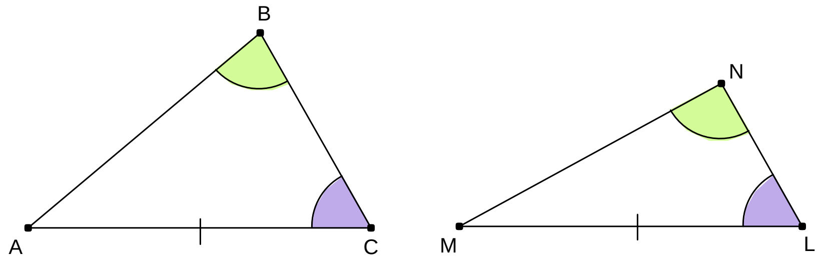


Figura 39: Triângulos [ABC] e [MNL]

Demonstração: Sejam [ABC] e [MNL] dois triângulos tais que $\overline{AC} = \overline{ML}$, $\angle ABC = \angle MNL$ e $\angle BCA = \angle NLM$. Supõe-se, por redução ao absurdo, que $\overline{BC} \neq \overline{NL}$ e, sem perda de generalidade, que $[BC] > [NL]$. Marca-se o ponto N’ no segmento [BC] tal que $\overline{N'C} = \overline{NL}$ (Figura 40).

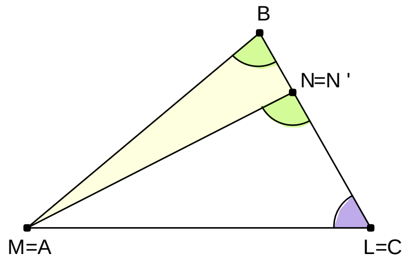


Figura 40: Triângulos com bases iguais

Como $\overline{AC} = \overline{ML}$, $\angle ABC = \angle NLM$ e $\overline{N'C} = \overline{NL}$, pelo critério LAL resulta a congruência dos triângulos [*ACN'*] e [*MLN*]. Em particular, $\angle AN'C = \angle MNL = \angle ABC$.

Note-se que o $\sphericalangle AN'C$ é um ângulo externo ao triângulo [*ABN'*] que é congruente com o $\sphericalangle ABN'$ que é um ângulo interno não adjacente, o que contraria o teorema do ângulo externo, resultando o absurdo do facto de se ter considerado $\overline{BC} \neq \overline{NL}$. Logo, tem-se que $\overline{BC} = \overline{NL}$ e pelo critério LAL resulta que os triângulos [*MNL*] e [*ABC*] são congruentes.□

3.1.3.2. Propriedades dos triângulos

Antes de introduzir o axioma das paralelas **A_{12}** apresentam-se mais propriedades importantes dos triângulos – a relação entre as amplitudes dos ângulos internos e a desigualdade geométrica relacionando os seus lados.

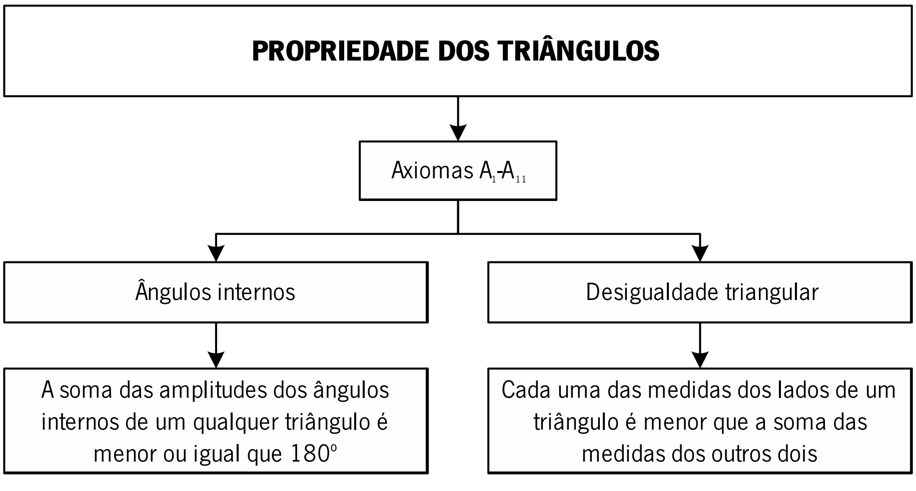


Figura 41: Propriedades dos triângulos sem considerar A_{12}

Teorema: A soma das amplitudes dos ângulos internos de um qualquer triangulo é menor ou igual que 180°.

Demonstração:

Seja o triângulo $[ABC]$ tal que:

(i) $\sphericalangle\, DAB$ é um ângulo externo ao triângulo $[ABC]$;

(ii) M é o ponto médio de $[AB]$.

Considere-se o segmento $[CG]$ sendo que $\overline{CM} = \overline{MG}$.

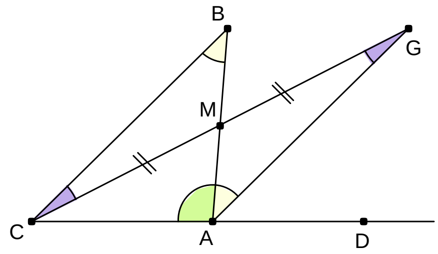


Figura 42: Triângulos [ABC] e M ponto médio de [AB]

De (ii) resulta que $\overline{AM} = \overline{MB}$ e os ângulos BMC e AMG são verticalmente opostos, logo congruentes. Pelo critério LAL, os triângulos $[BMC]$ e $[AMG]$ são congruentes pelo que $\angle GAM = \angle MBC$. Como B é interior ao $\sphericalangle\, CAG$ temos $\angle CAG = \angle CAB + \angle BAG$ o que é equivalente a $\angle CAG = \angle CAB + \angle CBA$ implicando que $\angle CAB + \angle CBA < 180^o$. Conclui-se que, em qualquer triângulo, a soma das amplitudes de dois quaisquer dos seus ângulos internos é menor que 180°. Por outro lado, a soma das amplitudes dos ângulos internos dos triângulos $[ABC]$ e $[AGC]$ são iguais, uma vez que $\angle CAG = \angle CAB + \angle GAB$ e $\angle AGC + \angle ACG = \angle BCG + \angle ACG$, resultando $\angle AGC + \angle ACG = \angle BCA$. Assim tem-se que $\angle AGC \leq \dfrac{\angle BCA}{2}$ ou $\angle ACG \leq \dfrac{\angle BCA}{2}$.

Mantendo a soma das amplitudes dos ângulos internos e supondo que o $\sphericalangle\, BCA$ é o menor pode-se substituir um dado triângulo por um outro cujo menor ângulo é menor ou igual a metade do menor ângulo do triângulo inicial. Iterando a construção as vezes necessárias, é possível obter um triângulo com a mesma soma de ângulos que o triângulo $[ABC]$ e com um dos ângulos tão pequenos quanto se queira.

Suponha-se que a soma dos ângulos do triângulo $[ABC]$ é de $180^o + k$, sendo $k > 0$. Seja um triângulo com igual soma de ângulos tal que o menor ângulo seja não superior a k ($\leq k$), então, nesse triângulo, a soma das amplitudes dos outros dois ângulos será de pelo menos 180°, o que contradiz a conclusão anterior. Assim, a soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$ não excede 180°. □

Teorema (Desigualdade Triangular): Num triângulo cada uma das medidas dos seus lados é menor que a soma das medidas dos outros dois.

Demonstração: Sejam A, B e C três pontos não colineares (Figura 43), que formam o triângulo [ABC] (Figura 44).

Figura 43: Três pontos não colineares

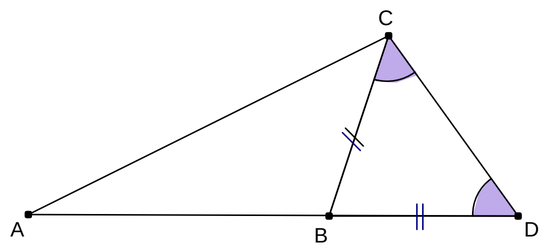


Figura 44: Triângulo [ABC] e triângulo [BCD]

Pretende-se mostrar a desigualdade $|AC|<|AB|+|BC|$.

Considere-se um ponto $D \in AB$ tal que B esteja entre A e D e que os segmentos [BD] e [BC] sejam congruentes (figura 44).

Como o triângulo [DCB] é isósceles, tem-se que

$$\angle ADC = \angle BDC = \angle BCD < \angle ACD .$$

Sabendo que no triângulo [ADC], à medida do lado maior opõe-se o maior ângulo, resulta que $|AC|<|AD|=|AB|+|BD|=|AB|+|BC|$. Logo $|AC|<|AB|+|BC|$.

De forma análoga mostram-se as restantes relações

$$|AB|<|AC|+|CB| \text{ e } |BC|<|BA|+|AC| \square$$

Observação: Sendo A, B e C quaisquer três pontos do plano ε tais que $C \in [AB]$ ou os três pontos coincidem é válida a igualdade $|AB|=|AC|+|CB|$. Assim, para quaisquer três pontos P, T e R que formam um triângulo é válida a desigualdade

$$|PT| \leq |PR|+|RT|$$

Todos os resultados apresentados até ao momento evitaram usar a noção de retas paralelas nas demonstrações, pelo que a validação dos mesmos recorreu apenas à axiomatização de Euclides conhecendo $\mathbf{A_1}$ - $\mathbf{A_{11}}$. O conhecimento e uso de $\mathbf{A_{12}}$, o axioma das paralelas, facilitaria, com certeza, algumas das demonstrações anteriores (por exemplo, o critério LAA). Como não foi usado $\mathbf{A_{12}}$, todos os resultados até agora estudados são comuns à geometria absoluta (ou geometria neutra), portanto, também válidos na geometria hiperbólica.

3.1.4. Paralelismo

Até à introdução do axioma $\mathbf{A_{12}}$ fica em aberto a questão da unicidade de uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto exterior. Importa apresentar, mais uma vez, definições preliminares antes de estudar a questão do paralelismo entre retas.

Definições

Sejam r, s duas retas que se intersetam no ponto S e t uma outra reta que interseta r e s em pontos distintos P e R. Diz-se que t é uma reta transversal a r e s.

Sejam ainda:

- A, B pontos da reta r tais que $P \in [AB]$;
- C, D pontos das reta s tais que $R \in s$ e $R \in [CD]$;
- B, D pontos do mesmo lado de t;
- F, E pontos da reta t tais que $R \in [FP]$ e $P \in [RE]$;
- A, C pontos do mesmo lado de t.

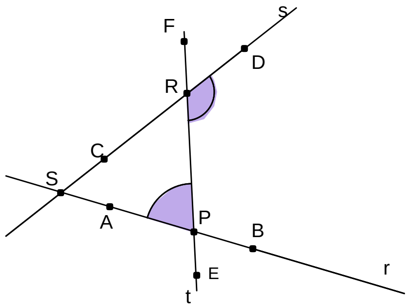


Figura 45: Pares de ângulos num sistema de retas

Relativamente ao sistema de retas r, s e t, os pares de ângulos dizem-se:

Ângulos alternos internos

(i) alternos internos, por exemplo, $\sphericalangle APR$ e $\sphericalangle DRP$;

(ii) alternos internos do mesmo lado de t, por exemplo, $\sphericalangle APR$ e $\sphericalangle CRP$;

Ângulos alternos externos

(iii) alternos externos se são verticalmente opostos de um par de ângulos internos, por exemplo $\sphericalangle EPB$ e $\sphericalangle CRF$ (não necessariamente congruentes);

(iv) alternos externos do mesmo lado de t se são verticalmente opostos de um par de ângulos internos do mesmo lado de t, por exemplo $\sphericalangle EPB$ e $\sphericalangle DRF$;

Ângulos correspondentes

(v) ângulos correspondentes são formados por um ângulo de um par de ângulos alternos internos e o verticalmente oposto do outro ângulo do par, por exemplo $\sphericalangle APR$ e $\sphericalangle CRF$.

Definições

Retas paralelas — Duas retas r e s dizem-se paralelas se $r \cap s = \emptyset$ e representa-se por r//s.

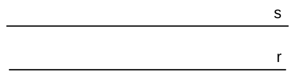


Figura 46: Retas paralelas

Feixe de retas paralelas — Um feixe de retas paralelas é um conjunto de retas paralelas entre si.

Reta secante a um feixe de retas paralelas — Dado um feixe de retas paralelas s_1, s_2, s_3,... s_n com $n \in \mathbb{N}$, diz-se que uma reta t é transversal (ou secante) ao feixe se para $i \in 1,2,...,n$, com $n \in \mathbb{N}$, $s_i \cap t \neq \emptyset$.

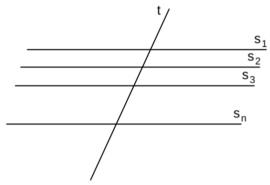


Figura 47: Reta secante a um feixe de retas paralelas

Pontos correspondentes — Dado um feixe de retas paralelas s_1, s_2, s_3 e as retas transversais t_1 e t_2, e dois pontos das retas transversais, diz-se que esses pontos (por exemplo, A e B) são pontos correspondentes se pertencem a uma mesma reta do feixe.

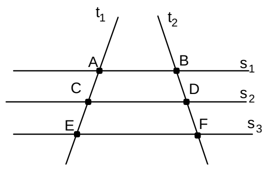


Figura 48: Pontos correspondentes e segmentos correspondentes num feixe de retas paralelas

Segmentos correspondentes — Dois segmentos $[AC]$ e $[BD]$ dizem-se correspondentes se estão contidos nas retas transversais, tais que as respetivas extremidades são pontos correspondentes.

Embora a unicidade não esteja estabelecida é possível demonstrar a existência de retas paralelas com recurso a dois teoremas – o teorema dos ângulos alternos internos e o teorema dos ângulos correspondentes.

Teorema (dos Ângulos Alternos Internos)

Num sistema de retas, se uma reta t fizer com duas retas s e r ângulos alternos internos congruentes, então s e r são paralelas.

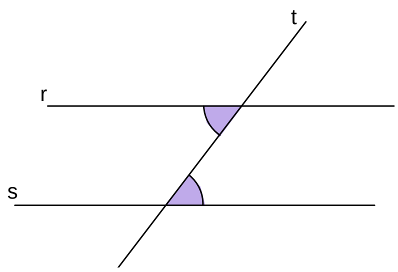


Figura 49: Ângulos alternos internos num sistema de retas

Demonstração: Sejam r e s retas que intersetadas por uma reta transversal t nos pontos R e S (Figura 49). Consideram-se ainda os pontos R' e S' pertencentes às retas r e s respetivamente, em lados opostos de t. Os ângulos alternos internos formados são congruentes, isto é, $\angle R'RS = \angle S'SR$.

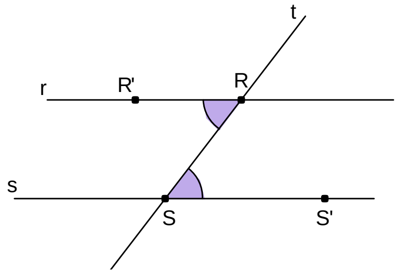


Figura 50: Retas intersetadas por uma secante formando ângulos alternos internos congruentes

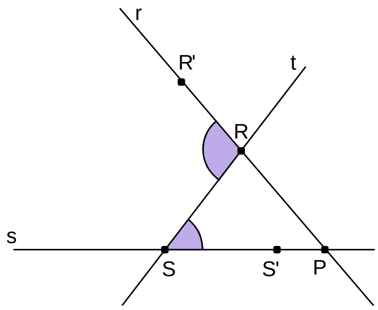


Figura 51: Triângulo [RSP] num sistema de retas

Por redução ao absurdo, sejam r e s retas concorrentes num ponto – ponto P (Figura 51), formando-se assim o triângulo [PRS]. Resultaria que $\angle R'RS > \angle S'SR$ pelo teorema do ângulo externo de um triângulo. O que contradiz o facto de $\angle R'RS = \angle RSS'$ definido por hipótese. Logo, as retas r e s são paralelas. □

Teorema (dos Ângulos Correspondentes)

Num sistema de retas, se uma reta t definir com duas retas s e r ângulos correspondentes congruentes, então s e r são paralelas.

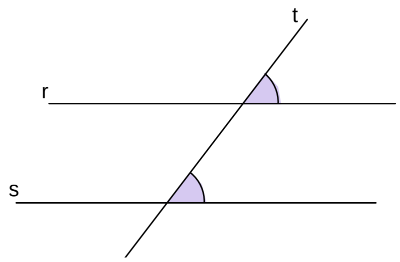


Figura 52: Retas intersetadas por uma secante formando ângulos correspondentes congruentes do mesmo lado de t.

Demonstração: Sejam as retas r e s intersetadas por uma transversal t nos pontos R s S, respetivamente, e os ângulos correspondentes congruentes α e γ (Figura 53). Considerando que β e γ são ângulos verticalmente opostos, logo congruentes e que por consequência β e α também são congruentes, pelo teorema dos ângulos alternos internos, as retas r e s são paralelas. □

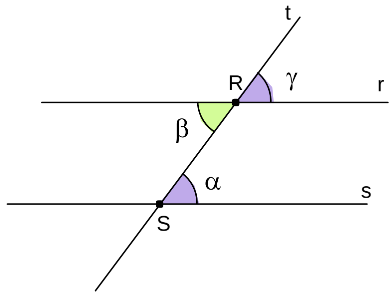


Figura 53: Ângulos congruentes num sistema de retas

A demonstração do recíproco dos teoremas anteriores só será conseguida depois de assumir a existência do axioma **A_{12}** (axioma das paralelas) para a geometria euclidiana.

> **A_{12} (axioma das paralelas):** Por qualquer ponto exterior a uma reta passa uma e uma só reta paralela à primeira.

Teorema (recíproco do teorema dos Ângulos Alternos Internos)

Se duas retas paralelas são intersetadas por uma reta secante então os ângulos alternos internos formados por estas retas são congruentes.

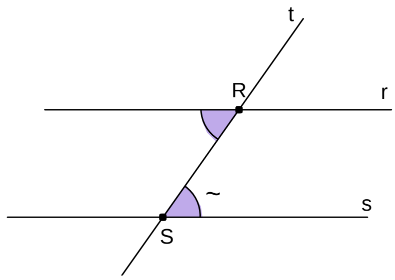


Figura 54: Retas paralelas s e r intersetadas por uma secante t

Demonstração: Considerem-se duas retas paralelas r e s intersetadas pela secante t nos pontos R e S respetivamente (figura 54).

Com vista a um absurdo, considere-se que os ângulos alternos internos (α e β) definidos no sistema de retas não são congruentes.

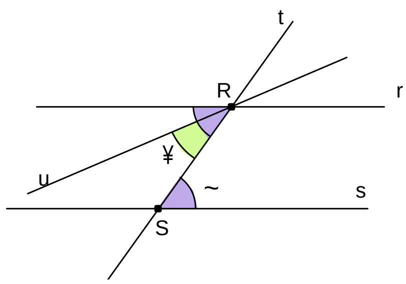


Figura 55: Retas paralelas r e s intersetadas por duas secantes t e u.

Neste caso, seja u a reta que contém R de tal modo que os ângulos alternos internos α e γ, entretanto formados (Figura 55), são congruentes. Pelo teorema dos ângulos alternos internos, as retas u e s são paralelas. Mas, por hipótese, r também contêm o ponto R e é paralela a s, o que é absurdo por **A_{12}**, contrariando o paralelismo das retas r e s. Então os ângulos alternos internos (α e β) são congruentes. □

Teorema (recíproco do teorema dos Ângulos Correspondentes)

Se duas retas paralelas são intersetadas por uma secante então os ângulos correspondentes formados por estas retas são congruentes.

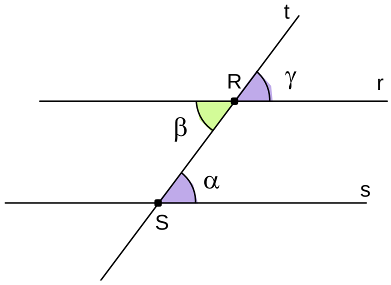


Figura 56: Ângulos verticalmente opostos (α e β) num sistema de retas.

A demonstração deste resultado é análoga à do teorema dos Ângulos Alternos Internos.

Depois de introduzidos os axiomas $\mathbf{A_1}$ **-** $\mathbf{A_{12}}$ provam-se importantes resultados e estabelecem-se propriedades dos triângulos que são a base do estudo do domínio *Geometria e Medida* do 3.º ciclo do ensino básico. A "demonstração" geométrica dos mesmos, em contexto de sala de aula, recorre essencialmente a materiais manipuláveis, a construções geométricas com recortes e decomposições em papel, bem como a *software* dinâmico de geometria, conduzindo os alunos a conjeturas de propriedades. De acordo com a nova perspetiva do ensino da Geometria, no PMMC, paralelamente à demonstração geométrica procura-se investir mais no processo demonstrativo de carácter analítico.

O estudo do teorema de Tales e sua demonstração tem por base conhecimentos sobre quadriláteros e suas propriedades. Uma vez que a demonstração para casos particulares apresentada neste relatório, bem como o tipo de exercícios explorados nas aulas pressupõem conhecimentos prévios de triângulos e quadriláteros (Anexo B1), julga-se pertinente fazer uma breve referência a algumas propriedades dos ângulos em triângulos e outras relacionadas com quadriláteros que serão utilizadas mais à frente.

3.1.4.1. Propriedades de ângulos em triângulos

Com o axioma $\mathbf{A_{12}}$ importantes relações se estabelecem entre as amplitudes dos ângulos internos e externos num triângulo.

Os teoremas que a seguir se apresentam poderão ser demonstrados nas aulas do 7.º ano de escolaridade, recorrendo aos conhecimentos de geometria já adquiridos ao longo do percurso escolar.

Teorema: A soma das amplitudes dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°.

Demonstração: Considera-se o triângulo $[ABC]$ e a reta r paralela à reta que contém o lado $[BC]$ que passa em A. Sejam E e F pontos da reta r tais que $A \in [FE]$.

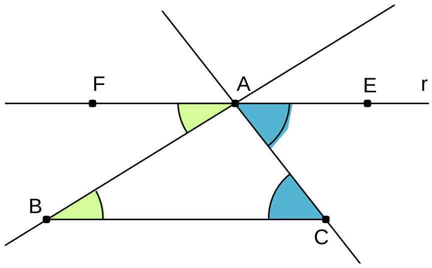


Figura 57: Ângulos alternos internos congruentes

Assim, $\angle FAB + \angle BAC + \angle CAE = 180^o$. A reta AB é secante a r e a reta BC que contém $[BC]$. Então, como r é paralela a BC os ângulos alternos internos são congruentes, ou seja, $\angle FAB = \angle ABC$. Analogamente, atendendo a que a reta AC também é secante a r e a BC, outros ângulos alternos internos são congruentes, isto é, $\angle CAE = \angle ACB$. Considerando que $\angle FAB + \angle BAC + \angle CAE = 180^o$, resulta que a soma dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$ é de 180°. □

Teorema: A amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.

Demonstração: Considere-se o triângulo $[ABC]$ e seja D um ponto da reta BC tal que $C \in [BD]$.

Sabe-se que:

(i) $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^o$ (pelo teorema anterior)

(ii) $\angle BCA + \angle ACD = 180^o$ (ângulos suplementares adjacentes)

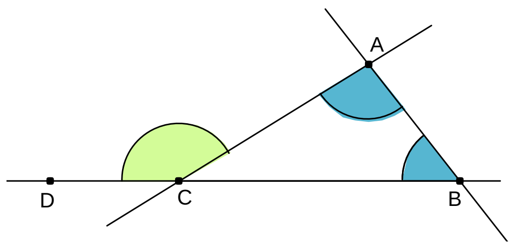


Figura 58: Ângulo externo e ângulos internos não adjacentes

De (i) e (ii) vem a igualdade

$$\angle ABC + (180^o - \angle ACD) + \angle CAB = 180^o .$$

Por simplificação resulta $\angle ABC + \angle CAB = \angle ACD$.□

Recorda-se que antes de considerar o axioma $\mathbf{A_{12}}$ é demonstrável que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é menor ou igual a 180°. Por outro lado, considerando $\mathbf{A_{12}}$, o critério AAL deixa de ser relevante por ser consequência direta do critério ALA.

3.1.4.2. Propriedades dos quadriláteros

Apresentam-se algumas definições importantes de quadriláteros as quais serão importantes para a compreensão de alguns resultados apresentados na secção 3.2..

Definições

Quadrilátero — Dados dois pontos A, B, C, D tais que nenhuns três pontos são colineares e os interiores dos segmentos $[AB]$, $[BC]$, $[DE]$ e $[EA]$ são disjuntos dois a dois, diz-se que $[ABCD]$ é um quadrilátero de vértice A, B, C, D, de lados $[AB]$, $[BC]$, $[DE]$, $[EA]$ e diagonais $[AC]$ e $[BD]$ se resulta da reunião dos segmentos $[AB]$, $[BC]$, $[DE]$ e $[EA]$.

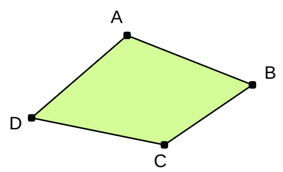


Figura 59: Quadrilátero [ABCD]

Quadrilátero convexo — Um quadrilátero $[ABCD]$ diz-se convexo se é um quadrilátero tal que para cada par de vértices consecutivos (por exemplo A e B) os outros dois vértices se encontram do mesmo lado da reta (neste caso AB), que contém esses vértices

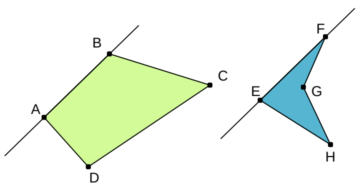


Figura 60: Quadrilátero convexo [ABCD] e quadrilátero não convexo [EFGH]

Paralelogramo — Um quadrilátero diz-se um paralelogramo se quaisquer dois lados opostos são paralelos.

Retângulo — Um quadrilátero diz-se retângulo se é um paralelogramo em que os quatro ângulos internos são retos.

Teorema: Seja $[ABCD]$ um quadrilátero convexo.

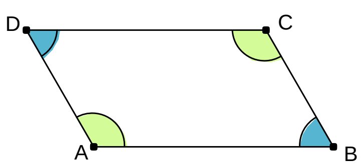


Figura 61: Quadrilátero convexo [ABCD]

As seguintes condições são equivalentes entre si:

(i) Os lados opostos de $[ABCD]$ são paralelos (isto é, $[AB]//[CD]$ e $[BC]//[DA]$).

(ii) Os lados opostos de $[ABCD]$ são congruentes (isto é, $[AB] \cong [CD]$ e $[BC] \cong [DA]$).

(iii) Os ângulos opostos de $[ABCD]$ são congruentes (isto é, $\angle DAB = \angle BCD$ e $\angle ADC = \angle ABC$).

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ **(ii)**

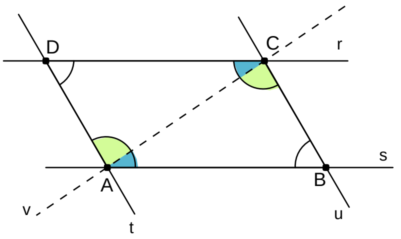


Figura 62: Triângulos [ABC] e [ACD] no quadrilátero [ABCD]

Seja $[ABCD]$ um quadrilátero determinado pelas retas r, s, t e u onde $r//s$ e $t//u$, logo $[AB]//[DC]$ e $[BC]//[AD]$. Traça-se uma reta v que contém os pontos A e C, de suporte à diagonal $[AC]$ do quadrilátero.

Pretende-se mostrar que $[AB]\cong[DC]$ e $[BC]\cong[AD]$. Como $s//r$, pelo recíproco do teorema dos ângulos alternos internos tem-se que $\angle CAB = \angle ACD$ e como $t//u$ resulta que $\angle BCA = \angle CAD$. Comparando os triângulos $[ABC]$ e $[CDA]$, onde $[AC]$ é um lado comum a ambos, pelo critério ALA concluímos a congruência destes triângulos. Logo $[AB]\cong[DC]$ e $[BC]\cong[AD]$.

(ii) $\Rightarrow$ **(iii)**

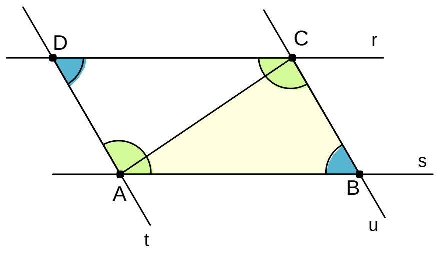


Figura 63: Quadrilátero [ABCD]

Supõe-se agora que o quadrilátero $[ABCD]$ determinado pelas retas r, s, t e u é tal que $[AB]\cong[DC]$ e $[BC]\cong[AD]$.

Considere-se a diagonal *[AC]*. Pelo critério LLL, resulta a congruência dos triângulos $[ABC]$ e $[CDA]$, pelo que $\angle ADC = \angle ABC$ e também $\angle CAB = \angle ACD$ e $\angle ACB = \angle DAC$.

Portanto, $\angle DAC + \angle CAB = \angle ACB + \angle ACD$, ou seja, $\angle DAB = \angle DCB$.

(iii) $\Rightarrow$ **(i)**

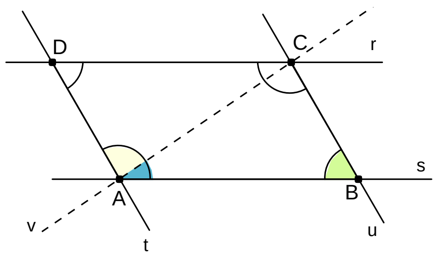


Figura 64: Ângulos BAD e ABC suplementares no quadrilátero [ABCD]

Seja o quadrilátero $[ABCD]$ determinado pelas retas r, s, t e u tal que $\angle ADC = \angle ABC$ e $\angle DAB = \angle DCB$.

Considere-se uma vez mais a reta v suporte à diagonal *[AC]*, que divide o quadrilátero em dois triângulos. É fácil concluir que $\angle ADC + \angle DCB + \angle CBA + \angle BAD = 360^{\circ}$.

Ora, como os ângulos opostos são congruentes resulta que $\angle ABC + \angle BAD = 180^{\circ}$.

Assim $\angle ABC + \angle BAC + \angle CAD = 180^{\circ}$ (pois, $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$). Usando a soma dos ângulos internos do triângulo *[ABC]*, obtém-se $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^{\circ}$. Logo $\angle ACB = \angle CAD$. Pelo teorema dos ângulos internos, vem $[AB]//[CD]$. Analogamente se mostra que $[BC]//[DA]$. □

3.2. O Teorema de Tales

Um dos teoremas centrais do estudo do domínio *Geometria e Medida* do 7.º ano prende-se com o teorema de Tales que encontra a sua aplicação na resolução de problemas práticos, tendo por base noções de paralelismo e proporcionalidade, sobressaindo a estreita ligação entre o geométrico e o numérico. O teorema de Tales estabelece a existência de proporcionalidade entre os comprimentos de segmentos de reta definidos por duas retas secantes e um feixe de retas paralelas no plano. A disposição das retas secantes poderá ser útil para trabalhar com triângulos e suas propriedades.

O teorema dos segmentos congruentes estabelece propriedades que relacionam a congruência e o paralelismo num sistema de retas. Apresenta-se, por fim, a demonstração do teorema de Tales.

3.2.1. Teorema dos segmentos congruentes

Pretende-se definir segmentos congruentes sobre uma reta secante (ou reta transversal) num sistema de retas e inferir propriedades desses segmentos para outras retas secantes do mesmo sistema de retas.

Definições

Segmento sobre secante — Se uma secante t interseta duas retas r e s nos pontos R e S, diz-se que r e s determinam o segmento $[RS]$ sobre a secante.

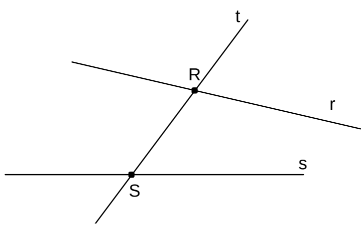


Figura 65: Segmento $[RS]$ na reta secante t

Segmentos congruentes — Se uma secante t interseta três retas r, s e u em três pontos R, S e U, respetivamente, e $\overline{RS} = \overline{SU}$ diz-se que as retas r, s e u determinam segmentos congruentes sobre a secante.

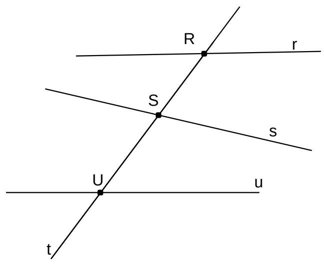


Figura 66: Segmentos $[RS]$ e $[SU]$ congruentes numa reta secante t

Definições

Segmentos proporcionais Dados os segmentos $[AB]$, $[CD]$, $[EF]$ e $[GH]$ diz-se que o par de segmentos $[AB]$, $[CD]$ é proporcional ao par de segmentos $[EF]$, $[GH]$ se

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$$

Note-se que o facto de três (ou mais) retas determinarem segmentos congruentes sobre uma secante, não implica que determinem segmentos congruentes sobre outra qualquer secante. Na verdade, apesar das retas r, s e t determinarem os segmentos congruentes $[RS]$ e $[SU]$ na secante t não garante a congruência dos segmentos de reta $[R'S']$ e $[S'U']$ na secante t'.

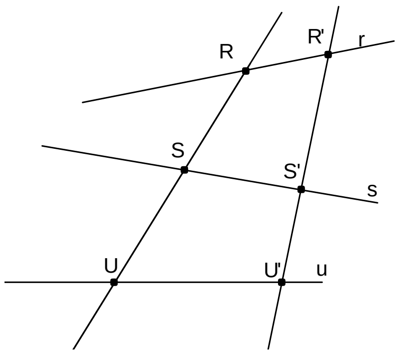


Figura 67: Congruência de segmentos em retas secantes

Teorema (dos Segmentos Congruentes)

Se três (ou mais) retas que determinam segmentos congruentes sobre uma secante forem paralelas, então determinam segmentos congruentes sobre qualquer outra secante.

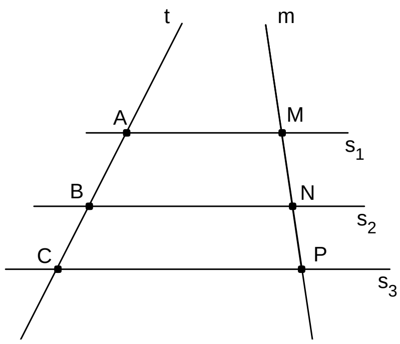


Figura 68:Retas *t* e *m* secantes às retas paralelas

Demonstração: Segue a demonstração para três retas paralelas e duas retas secantes, seguindo o caso geral (para mais retas paralelas) uma demonstração análoga.

Sejam s_1, s_2 e s_3 três retas paralelas e t e m duas retas secantes (ou transversais). Os pontos A, B, C são pontos de intersecção da reta t com as retas paralelas e M, N e P resultam da intersecção da reta m com as retas paralelas (figura 68). Por hipótese, sabe-se que as retas paralelas determinam segmentos congruentes sobre uma reta secante t, logo $\overline{AB} = \overline{BC}$.

Pretendemos provar que $\overline{MN} = \overline{NP}$.

Traçando por M e N retas paralelas à reta secante t, conforme a Figura 69, resultam os pontos R e S e os paralelogramos $[ABRM]$ e $[BCSN]$. Como $MR//t$ e $NS//t$ resulta que $MR//NS$ e por consequência $\overline{AB} = \overline{MR}$ e $\overline{BC} = \overline{NS}$.

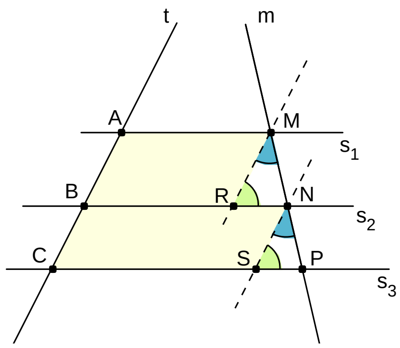


Figura 69: Paralelogramos [ABRM] e [BCSN] e triângulos [MRN] e [NSP]

Como $\overline{AB} = \overline{BC}$ então $\overline{MR} = \overline{NS}$. Repare-se que $\angle MRN = \angle NSP$ e que $\angle NMR = \angle PNS$, pelo teorema dos ângulos alternos internos. Pelo critério ALA, os triângulos $[MRN]$ e $[NSP]$ São congruentes, logo $\overline{MN} = \overline{NP}$.□

3.2.2. O Teorema de Tales e sua demonstração

Para a demonstração do teorema de Tales importa referir ainda a densidade do conjunto dos números racionais em $\mathbb{R}$, relembrando que entre quaisquer dois números reais há, pelo menos, um número racional.

Como corolário deste resultado apresenta-se a propriedade da comparação.

Propriedade da Comparação: Se x e y são números reais tais que:

(i) todo o racional menor do que x é menor do que y:

(ii) todo o racional menor do que y é menor do que x,

então $x = y$.

Demonstração: Se fosse $x < y$ existiria um racional $\frac{m}{n}$ tal que $x < \frac{m}{n} < y$ (pelo resultado referido anteriormente) contradizendo (ii), e analogamente, a desigualdade $y < x$ contrairia (i) logo $x = y$.□

Teorema (de Tales): Se duas retas são secantes a um feixe de retas paralelas, então a razão entre os comprimentos de dois segmentos de uma delas é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes da outra. Ou seja, considerando as retas secantes t_1 e t_2 a um conjunto de três retas paralelas s_1, s_2 e s_3 tem-se que:

(i) $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}}$,

(ii) $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{MN}}$

(iii) $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{NP}}$.

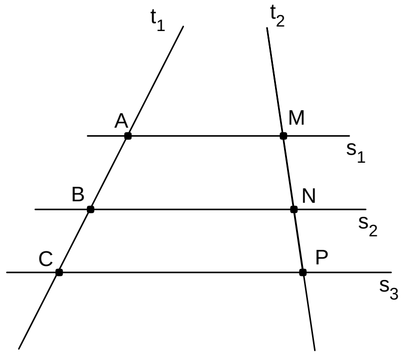


Figura 70: Retas secantes t_1 e t_2 às retas paralelas s_1, s_2 e s_3

Demonstração[18]**:**

Consideram-se três retas paralelas s_1, s_2, s_3 e duas retas a elas secantes t_1 e t_2 (Figura 70).

(i) Seja $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} =$ ª , pretende-se provar que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \text{ª} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}}$$

Surgem dois casos: ou λ é um número racional ou λ é um número irracional.

Caso I (λ é um número racional)

Sejam $[AB]$ e $[BC]$ segmentos comensuráveis, isto é, a razão das medidas destes segmentos, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ é um número racional.

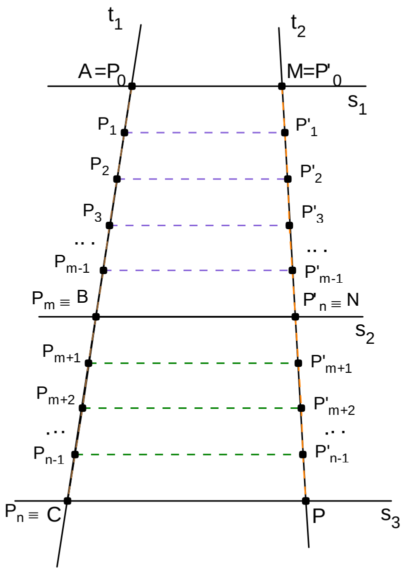


Figura 71: Esquema geométrico para segmentos comensuráveis

Como $[AB]$ e $[BC]$ são comensuráveis existe um segmento de comprimento k que divide o comprimento do segmento $[AB]$ em m partes (segmentos congruentes) e o segmento $[BC]$ em n partes (segmentos congruentes), resultando que $\overline{AB} = mk$ e $\overline{BC} = nk$. Nesta situação, existem m, n números naturais tais que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n} =$ ª e m.d.c.(m,n) =1.

[18] Demonstração adaptada de Franco Oliveira (1995)

Como $\overline{BC} < \overline{AB}$, tem-se que $n < m$. Considere-se no segmento $[AC]$ os $n+1$ pontos P_0, P_1, P_2, ..., P_m,... P_{n-1}, P_n (Figura 71) de tal modo que:

i) $\overline{P_j P_{j+1}} = k$, $j = 0,1,2,...,n-1$

ii) $P_0 \equiv A$

iii) $P_m \equiv B$

iv) $P_n \equiv C$

Traçando retas paralelas a $[AM]$ que passam pelos pontos P_1, P_2, ..., P_m,... P_{n-1}, P_n estas retas intersectam o lado $[MN]$ em $n+1$ pontos, que se definem por P'_1, P'_2, ..., P'_m,... P'_{n-1}., P'_n, tais que:

i) $\overline{P'_j P'_{j+1}} = w$, $j = 0,1,2,...,n-1$, sendo w um número real positivo

ii) $P'_0 \equiv M$

iii) $P'_m \equiv N$

iv) $P'_n \equiv P$

Pelo teorema dos segmentos congruentes estas retas paralelas determinam segmentos congruentes sobre a reta secante t_2, logo $\overline{MN} = mw$ e $\overline{NP} = nw$, o que resulta

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} = \frac{mw}{nw} = \frac{m}{n} = \lambda .$$

Conclusão: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}}$.□

Caso II (λ é um número irracional)

Consideram-se os segmentos incomensuráveis $[AB]$ e $[BC]$ sendo, por isso, a razão das medidas dos segmentos um número irracional ($\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Pretende-se mostrar que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \lambda = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}}$, sendo λ um número irracional.

Seja $x = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, $y = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}}$ e m, n dois números inteiros positivos.

- Dividindo o segmento $[AB]$ em m segmentos congruentes (Figura 72), traçando segmentos paralelos à reta s_3 a passar por cada ponto

$$A = A_0, A_1, A_2, \ldots A_0 = B = B_0,$$

por esta ordem sobre o segmento $[AB]$, o comprimento de cada um dos m segmentos é

$$\frac{\overline{AB}}{m}.$$

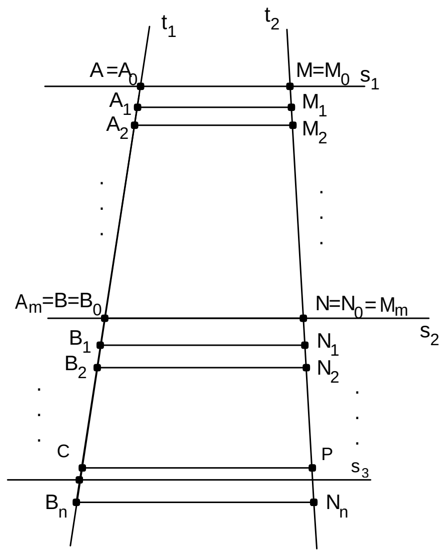


Figura 72: Esquema geométrico para segmentos incomensuráveis

- Sobre o segmento $[BC]$ marcam-se n segmentos congruentes, todos com o mesmo comprimento $\frac{\overline{AB}}{m}$ considerando os pontos (por esta ordem)

$$B = B_0, B_1, B_2, \ldots B_n.$$

Assim,

$$\overline{BB_1} = \overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3} = \ldots = \overline{B_{n-1}B_n} = \frac{\overline{AB}}{m}$$

e traçam-se segmentos paralelos à reta s_3 a passar por cada ponto.

- Pelo teorema dos segmentos congruentes, sobre a outra reta secante t_2 obtém-se os segmentos congruentes aos marcados sobre a reta t_1 pelo que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BB_n}} = \frac{\overline{AB}}{n \times \frac{\overline{AB}}{m}} = \frac{m}{n}$$

e, de modo análogo

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{NN_n}} = \frac{\overline{MN}}{n \times \frac{\overline{MN}}{m}} = \frac{m}{n}.$$

- Por redução ao absurdo, suponhamos que $\frac{m}{n} < x = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, donde resulta que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BB_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

portanto $\overline{BB_n} > \overline{BC}$ o que implicaria que $C \in [BB_n]$.

- Pelo teorema dos segmentos congruentes resultam outras condições para os segmentos da reta secante t_2 , sendo $\overline{NN_n} > \overline{NP}$ e

$$\frac{m}{n} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NN_n}} < \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} = y$$
.

- De forma análoga se mostra que se $\frac{m}{n} < y$ então $\frac{m}{n} < x$.

- Pela propriedade da comparação $x = y$ logo

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} .$$

Segue a demonstração das restantes proporções (ii) e (iii)

(ii) Partindo de $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}}$ pretende-se mostrar que $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{MN}}$.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC} - \overline{AB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{MP} - \overline{MN}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MP} - \overline{MN}}{\overline{MN}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{MN}} - \frac{\overline{MN}}{\overline{MN}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} - 1 = \frac{\overline{MP}}{\overline{MN}} - 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{MN}}$$

(iii) Sabendo que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}}$ mostra-se que $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{NP}}$.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + 1 = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} + 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} + \frac{\overline{NP}}{\overline{NP}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{NP}}. \square$$

3.2.3. O Teorema de Tales em triângulos e ângulos verticalmente opostos

No caso das retas secantes num feixe de retas paralelas serem concorrentes entre si, obtêm--se triângulos semelhantes cujas proporções dos seus lados são mais intuitivas para alunos do 7.º ano de escolaridade, nos contextos apresentados no PMMC (2013). Uma nova visualização do teorema de Tales pode passar por fazer uma transformação simples traçando, por exemplo, a partir de um ponto (ponto O) de uma das retas secantes t_1 uma reta paralela (t_3) à reta t_2.

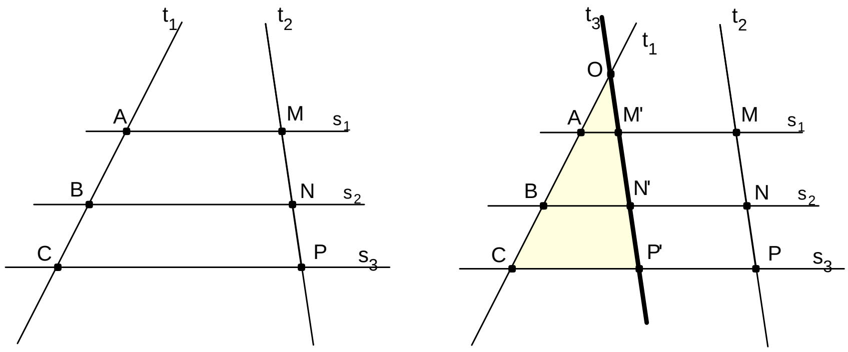


Figura 73: Reta t_3 paralela à reta t_2 no sistema de retas paralelas com segmentos congruentes

Pelas propriedades dos paralelogramos $\overline{AB}=\overline{MN}$ então $\overline{AB}=\overline{M'N'}$ sendo as situações equivalentes. De notar que no 7.º ano, ainda não são conhecidos os números reais, só mais tarde, no 9.º ano, será sempre possível, exprimir a medida do comprimento de um segmento, fixada uma qualquer unidade, recorrendo a aproximações por racionais, e definir as proporções anteriores, para o caso dos segmentos [OA] e [OB] serem incomensuráveis.

Ao nível do 3.º ciclo, o teorema de Tales é estudado tendo por base o caso de duas retas paralelas AB e CD a intersetarem ambos os dois lados do mesmo ângulo determinado pelas retas secantes s e r (concorrentes no ponto O) sobressaindo dois triângulos com vértice comum e lados proporcionais (Figura 74).

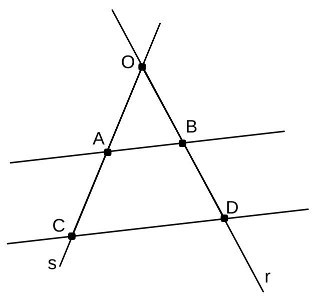


Figura 74: Retas paralelas que intersetam o mesmo lado do ângulo formado pelas retas secantes

Pode ainda ocorrer o caso das retas paralelas intersetarem-se por duas retas secantes concorrentes entre si (num ponto O), que formem ângulos verticalmente opostos, (figura 75). A situação pode-se reduzir também ao caso anterior (figura 76), usando uma nova reta (t') paralela a uma das retas paralelas (por exemplo, t) por uma simetria central[19] de centro O dos pontos A' e B'.

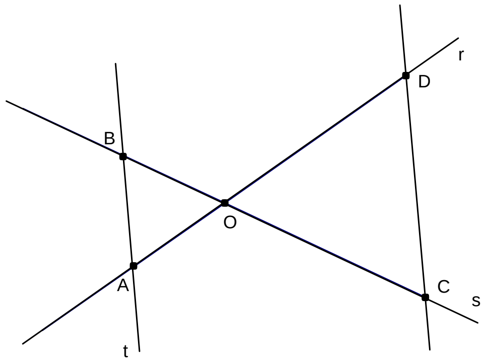


Figura 75: Retas paralelas que intersetam ângulos verticalmente opostos.

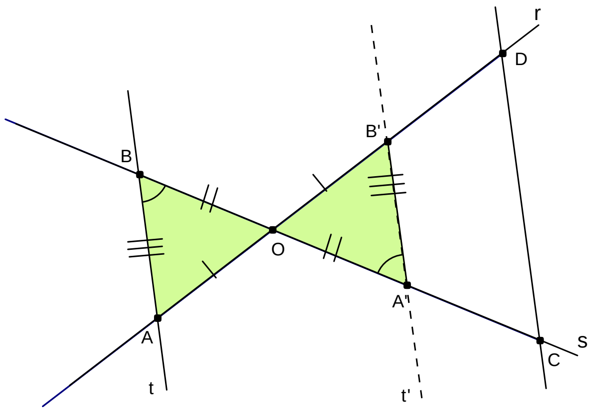


Figura 76: Reta t' após simetria central de centro O da reta t

Pela simetria central de centro O, os pontos obtidos da interseção da reta AB com as retas r e s, determinam uma reta $A'B'$. Visto tratar-se de uma isometria[20] preserva os comprimentos dos lados ($\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\overline{OA} = \overline{OB'}$) e amplitudes dos ângulos ($\angle ABO = \angle OA'B'$).

Sendo os ângulos ABA' e $BA'B'$ alternos internos determinados pelo par de retas AB e $A'B'$ pela secante s, constata-se que retas t e t' são paralelas. Desta forma, os resultados que se estudaram são válidos tendo em conta que, para os demonstrar bastava considerar as retas r, s e t' em vez das retas r, s e t.

[19] Diz-se que um ponto P' se obtém de um ponto P por uma simetria central de centro O se P', O e P são pontos colineares e, (se $P \neq O$) O é o ponto médio do segmento [PP']. A imagem do centro de simetria O é o próprio ponto O, que é o único ponto fixo desta transformação.

[20] Uma isometria é uma transformação geométrica em que são conservadas as medidas de comprimento dos segmentos de reta.

3.2.4. O recíproco do Teorema de Tales

O Teorema de Tales assume o paralelismo entre retas para garantir a proporcionalidade dos segmentos, o recíproco assume a proporcionalidade de *certos* segmentos para garantir o paralelismo entre retas.

Teorema (recíproco do Teorema de Tales)

Dadas duas retas AB e CD que intersetam duas retas secantes s e r, admitindo a proporção $\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$ verifica-se o paralelismo entre as retas AB e CD.

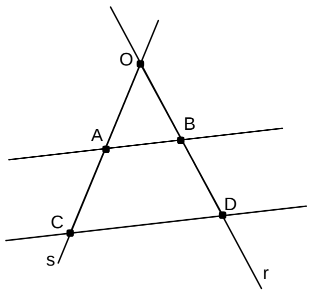


Figura 77: Retas paralelas que intersetam o mesmo lado do ângulo formado pelas retas secantes

Demonstração:

Por redução ao absurdo, suponha-se que AB e CD são retas não paralelas e as duas retas r e s secantes às primeiras e concorrentes em O. Considere-se $B' \in [BD]$ sendo $AB' // CD$.

Pelo teorema de Tales estabelece-se a proporção

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OD}}{\overline{OB'}}$$

Utilizando a proporção da hipótese resulta que $\overline{OB'}=\overline{OB}$ pelo que os segmentos [OB] e [OB'] são congruentes.

Conclui-se que B coincide com B' (axioma de Pasch) donde resulta o paralelismo entre as retas AB e CD. □

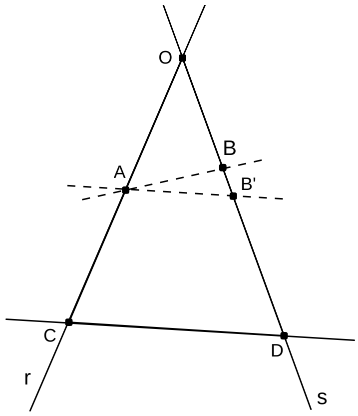


Figura 78: Retas AB e AB' concorrentes em A

No caso de se tratar de uma situação em que o teorema de Tales se aplica a ângulos verticalmente opostos (Figura 75) o enunciado e a demonstração são análogas.

3.2.5. Demonstração do teorema de Tales usando o método das áreas

Partindo novamente das condições do teorema de Tales apresenta-se a seguir a demonstração usando o método das áreas. Esta demonstração não é a preferencialmente escolhida a aplicar, em contexto de aula, pelo PMMC para o 7.º ano de escolaridade.

> "(...) admitindo propriedades intuitivas da noção de área, incluindo a fórmula para o cálculo da área de um triângulo, é possível demonstrar o Teorema de Tales de maneira mais expedita, embora, (...) a justificação rigorosa dessas propriedades da medida de área seja de natureza bastante complexa."
>
> (PMMC, 2013, Texto Complementar de Geometria 7.º ano, p.165)

Cada etapa da demonstração a seguir apresentada poderá constituir um exercício a propor a alunos do 7.º ano.

Teorema de Tales

Se duas retas são secantes AB e AC a um conjunto de retas paralelas MN e BC, então a razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes da outra, isto é,

(i) $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$ **(ii)** $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BM}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CN}}$ **(iii)** $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \dfrac{\overline{AN}}{\overline{CN}}$

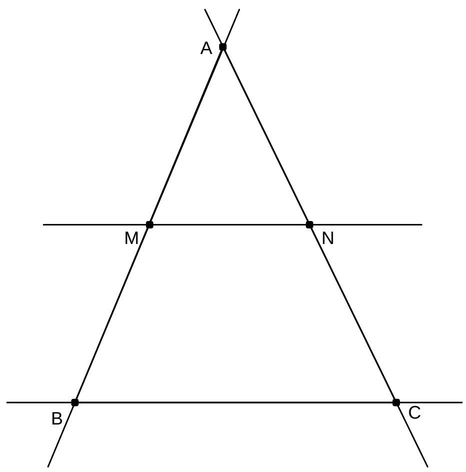


Figura 79: Retas paralelas secantes a retas concorrentes

Demonstração (usando o método das áreas):

Etapa 1: Mostrar que os triângulos $[MBN]$ e $[MNC]$ são equivalentes, isto é, têm a mesma área:

Como $MN \parallel BC$ então os triângulos $[MBN]$ e $[MNC]$ têm a mesma base $[MN]$ e alturas relativas a essa base também iguais (Figura 80). Por consequência as áreas dos triângulos $[MBN]$ e $[MNC]$ são iguais.

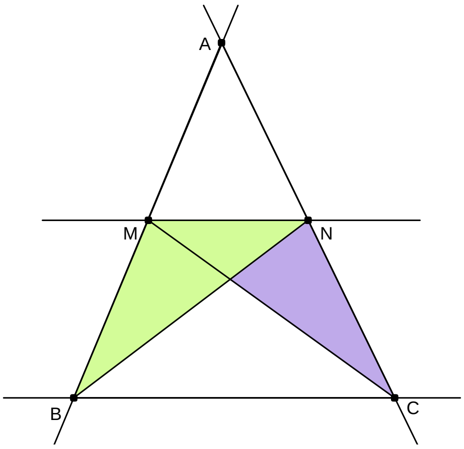


Figura 80: Triângulo [MNB] e triângulo [MNC]

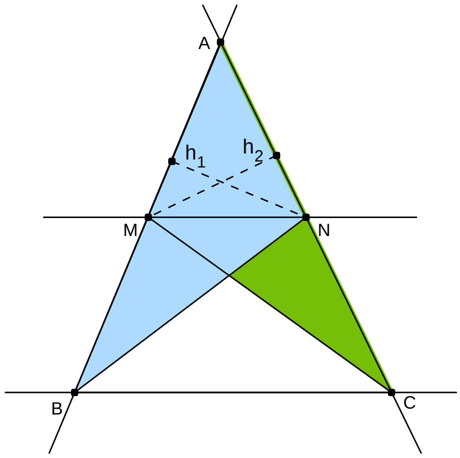


Figura 81: Triângulo [ABN] e triângulo [ACM]

Etapa 2: Mostrar que a razão entre as áreas dos triângulos $[AMC]$ e $[ABN]$ é igual à razão entre as suas bases.

Surgem outros dois triângulos com a mesma área - o triângulo $[ABN]$ e o triângulo $[ACM]$ (Figura 81), uma vez que

$$A_{[ABN]} = A_{[AMN]} + A_{[BMN]} \text{ e } A_{[ACM]} = A_{[AMN]} + A_{[CMN]}$$

Seja h_1 a altura do triângulo $[AMN]$ relativamente à base $[AM]$ e ainda do triângulo $[ABN]$ relativamente à base $[AB]$. Seja h_2 a altura do triângulo $[AMN]$ relativamente à base $[AN]$ e do triângulo $[AMC]$ relativamente à base $[AC]$. Pela definição de área de um triângulo, resulta:

$$A_{[ABN]} = \frac{\overline{AB} \times h_1}{2} \text{ e, por outro lado, } A_{[AMN]} = \frac{\overline{AM} \times h_1}{2}$$

$$A_{[AMC]} = \frac{\overline{AC} \times h_2}{2} \text{ e, por outro lado, } A_{[ACN]} = \frac{\overline{AN} \times h_2}{2}$$

A razão entre as áreas dos triângulos $[AMN]$ e $[ABN]$ é igual à razão entre as suas bases:

$$\frac{A_{[AMN]}}{A_{[ABN]}} = \frac{\frac{\overline{AM} \times h_1}{2}}{\frac{\overline{AB} \times h_1}{2}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$$

Etapa 3: Mostrar que a razão entre as áreas dos triângulos $[AMC]$ e $[AMN]$ é igual à razão entre as suas bases.

$$\frac{A_{[AMN]}}{A_{[ABN]}}=\frac{\frac{\overline{AM}\times h_2}{2}}{\frac{\overline{AC}\times h_2}{2}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$$

Etapa 4: Mostrar que $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$.

Partindo do resultado alcançado na etapa anterior e estabelecendo uma igualdade entre as áreas dos triângulos [AMN], [ABN] e [AMC] mostra-se a proporção pretendida:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{A_{[AMN]}}{A_{[ABN]}}=\frac{\frac{\overline{AN}\times h_2}{2}}{A_{[AMC]}}=\frac{\frac{\overline{AN}\times h_2}{2}}{\frac{\overline{AC}\times h_2}{2}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$$

Etapa 5: Mostrar que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CN}}$ e $\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{CN}}$.

A resolução desta etapa é análoga à apresentada na secção 3.2.2 na demonstração do teorema de Tales.□

3.3. O teorema de Tales no 3.º ciclo

O teorema de Tales estuda-se, pela primeira vez, no 7.º ano, onde o conhecimento do plano euclidiano é muito elementar, sendo o reconhecimento de algumas das suas características feito ainda de uma forma intuitiva. A sua aplicação envolve, na maioria dos casos, triângulos pelo que a apresentação mais usada das retas paralelas e das retas secantes é supondo que estas últimas sejam concorrentes entre si evidenciando o ponto de interseção (Figura 74 ou Figura 75). Raramente se apresenta mais do que um par de retas paralelas não elevando assim o grau de complexidade de alguns exercícios mais demonstrativos, sobretudo naqueles que apelem a um maior grau de abstração.

Nesta secção, para além de um enquadramento deste tema no PMMC de 2013, apresenta-se a "demonstração" do teorema de Tales para casos particulares, sublinhando a importância de a mesma ser faseada e orientada, partindo de situações mais simples até se conjeturar outras situações menos elementares. Nas demonstrações apresentadas a seguir, cada etapa sugerida, por si só, e com as devidas adaptações, poderia constituir um exercício a propor aos alunos. Algumas das fases apresentadas, ainda que do ponto de vista das demonstrações da geometria euclidiana sejam elementares, tornam-se algo complexas para alunos deste grau de escolaridade.

3.3.1. Enquadramento no PMMC

De acordo com o PMMC (2013), para o 3.º ciclo, o estudo do teorema de Tales integra-se no domínio *Geometria e Medida* do 7.º ano (GM7), no subdomínio *Paralelismo, congruência e semelhança*, inserido na meta - *Identificar e construir figuras congruentes e semelhantes*. (PMMC,2013) – tendo como descritor a alcançar:

> **7.** Enunciar o Teorema de Tales e demonstrar as condições de proporcionalidade nele envolvidas por argumentos geométricos em exemplos com constantes de proporcionalidade racionais.
>
> (PMMC, 2013, p.51).

A demonstração do teorema sugerida no PMMC (2013) tem por base conhecimentos que os alunos já adquiriram no 3.º ciclo e outros do 2.º ciclo, relacionados com o estudo das *Figuras*

Geométricas, prevendo noções ao nível da *classificação e construção de quadriláteros*, bem como de *identificação e construção de figuras congruentes*. Neste sentido, para o estudo do teorema de Tales, já devem ter sido trabalhados outros descritores no âmbito da mesma meta:

> **4.** Saber que dois polígonos convexos são semelhantes quando (e apenas quando) se pode estabelecer uma correspondência entre os vértices de um e de outro de tal modo que os comprimentos dos lados e das diagonais do segundo se obtêm multiplicando os comprimentos dos correspondentes lados e das diagonais do primeiro por um mesmo número.
>
> **5.** Decompor um dado triângulo em dois triângulos e um paralelogramo traçando as duas retas que passam pelo ponto médio de um dos lados e são respetivamente paralelas a cada um dos dois outros, justificar que os dois triângulos da decomposição são iguais e concluir que todos os lados do triângulo ficam assim bissetados.
>
> **6.** Reconhecer, dado um triângulo $[ABC]$, que se uma reta r intersetar o segmento $[AB]$ no ponto médio M e o segmento $[AC]$ no ponto D, que $\overline{AD}=\overline{DC}$ quando (e apenas quando) r é paralela a BC e que, nesse caso, $\overline{BC}=2\overline{MD}$.
>
> (PMMC, 2013, p.51)

No 7.º ano, se as distâncias entre pares de pontos correspondentes num polígono são diretamente proporcionais, a respetiva constante de proporcionalidade é identificada por razão de semelhança e normalmente representa-se por *r* ou *k*. A "demonstração" do teorema de Tales apresentada nesta secção recai em casos particulares de acordo a relação de proporcionalidade dos lados correspondentes dos triângulos, isto é, diferentes razões de semelhança. Ressalve-se ainda que as demonstrações seguem as orientações previstas no PMMC (2013) respeitando os descritores específicos.

Questiona-se a comensurabilidade dos segmentos ao procurar-se saber se efetivamente dados dois segmentos é sempre possível encontrar uma unidade de comprimento que permita exprimir a medida do comprimento dos dois segmentos como um número inteiro ou um número racional. Ao nível do 7.º ano há um cuidado em apresentar aplicações do teorema de Tales com segmentos comensuráveis dado que, até aquele momento, apenas são conhecidos os números racionais.

3.3.2. Casos particulares do teorema de Tales no 7.º ano

Os enunciados que a seguir se apresentam embora diferentes no seu texto apelam, na maioria das vezes, a resoluções similares, constituindo momentos de treino de raciocínio hipotético-dedutivo para os alunos do 7.º ano. Algumas etapas parecem ser redundantes pois resultam diretamente de etapas anteriores, mas são individualmente apresentadas, como pequenos exercícios a propor aos alunos, cuja resolução procura enfatizar as propriedades dos paralelogramos e critérios de congruência de triângulos recentemente estudadas no tema *Geometria e Medida*.

Exercício 1[21]
Teorema de Tales
para k=2

Seja o triângulo $[ABC]$ e uma reta r que intersecta o segmento [AB] no ponto médio M e o segmento $[AC]$ no ponto D.

Verifica a proporcionalidade dos segmentos construídos sobre as secantes e retas paralelas, nas seguintes situações:

I. $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = 2 = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{MD}}$

II. $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = 1$

III. $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = 2$

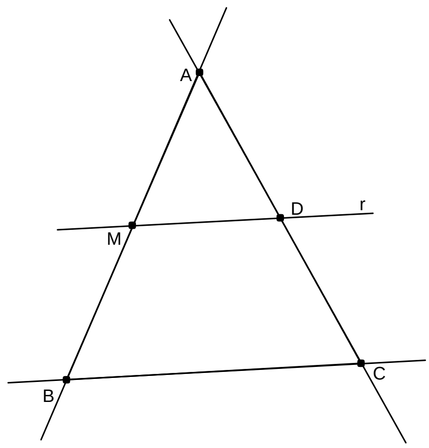


Figura 82: Teorema de Tales (caso k=2)

Segue as seguintes etapas:

Etapa 1: Mostra que existe a relação de paralelismo entre retas e a congruência dos segmentos sobre as retas secantes:

(i) se r for paralela a $[BC]$ então $\overline{AD} = \overline{DC}$;

(ii) se $\overline{AD} = \overline{DC}$ então r é paralela a $[BC]$;

Etapa 2: Mostra que, se algumas das propriedades equivalentes anteriores (i) ou (ii) se verificar, $\overline{BC} = 2\overline{MD}$

[21] Adaptado do PMMC de 2013, Caderno Apoio – GM7, página 13.

Proposta de resolução (seguindo as etapas):

Começando pela *Etapa 1, ponto* I., considera-se a reta s paralela a $[AC]$ que passa em M sendo M' o ponto de intersecção de s com $[BC]$. Nestas condições importa mostrar que M' é o ponto médio de $[BC]$ e que D é também ponto médio de $[AC]$, ou seja, a reta r bisseta o lado $[AC]$ e por consequência $\overline{AD} = \overline{DC}$.

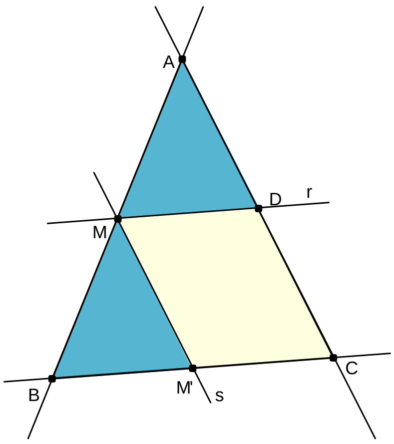


Figura 83: Retas intersetadas por uma secante formam triângulos congruentes e um paralelogramo

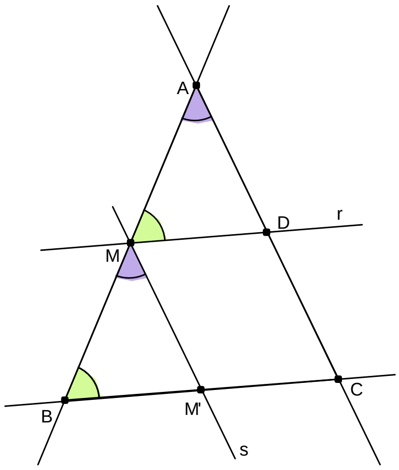


Figura 84: Triângulos [AMD] e [MBM'] congruentes

O quadrilátero $[MDCM']$ resultante é um paralelogramo já que tem lados opostos paralelos, $[MD]//[M'C]$ e $[MM']//[DC]$ daí que $\overline{MD} = \overline{M'C}$ e $\overline{MM'} = \overline{DC}$. Pela construção feita (figura 83) pretende-se justificar a congruência dos triângulos $[AMD]$ e $[MBM']$. Como a reta s é paralela ao lado $[AC]$ então $\angle BMM' = \angle MAD$, pelo teorema dos ângulos alternos internos. Pelo mesmo motivo, como a reta r é paralela a $[BC]$ então $\angle AMD = \angle MBM'$. Como $\overline{AM} = \overline{MB}$, uma vez que M é o ponto médio de $[AB]$ resulta a congruência pretendida aplicando o critério ALA.

Facilmente se mostra agora que, de facto, M' é o ponto médio de $[BC]$ e que D é o ponto médio de $[AC]$. Se $\overline{MD} = \overline{M'C}$ dado que o quadrilátero $[MDCM']$ é um paralelogramo então $\overline{BM'} = \overline{M'C}$ logo M' é o ponto médio de $[BC]$.De um modo análogo ao anterior, com as devidas adaptações, prova-se que D é o ponto médio de $[AC]$.

Relativamente à demonstração do *ponto* (II.) considera-se a reta r' que passa por M e não paralela a $[BC]$.

Por (I.), r' interseta $[AC]$ no ponto D' tal que aconteceria $\overline{AD'} = \overline{D'C}$, o que é absurdo já que $D' \in [BC]$. Coincidindo D' e D conclui-se que $r // [BC]$.

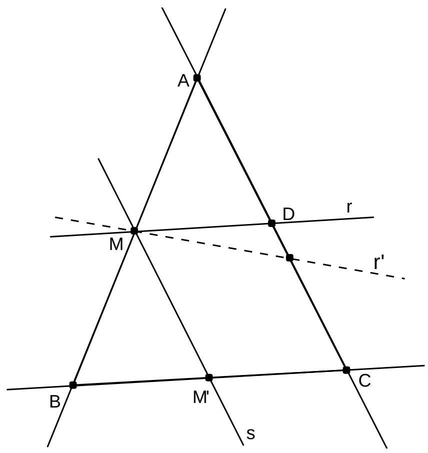


Figura 85: Reta secante r' não paralela a BC que contém M

Na etapa 2, verificando-se (I.) ou (II.) pretende-se mostrar que $\overline{BC} = 2\overline{MD}$. Seja $r // [BC]$ e tendo por hipótese que:

- $s // [AC]$;
- s passa por M;
- M' é o ponto de interseção de s com [BC].

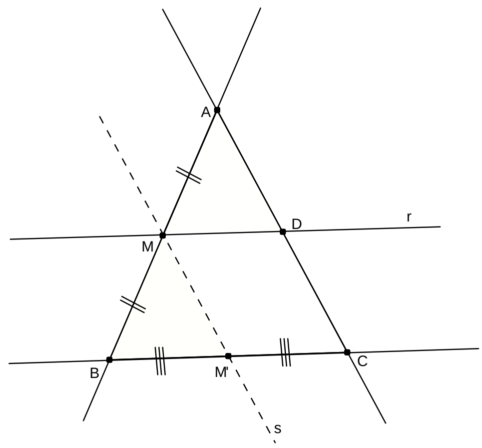


Figura 86: Segmentos [AM] e [BM] congruentes nas retas secantes

Se M' é ponto médio de $[BC]$ tem-se que $\overline{BM'} = \overline{M'C}$. Como o quadrilátero [MM'DC] é um paralelogramo $\overline{MD} = \overline{M'C}$ então $\overline{BC} = \overline{BM'} + \overline{M'C}$ resultando que $\overline{BC} = 2\overline{MD}$.

O paralelismo das retas r e BC permite concluir as outras proporções, respeitando as condições impostas.

Em relação à demonstração das restantes situações (II. e III.) propõe-se usar a mesma estratégia da Secção 3.2.2 para demonstrar o teorema de Tales, resultando as proporções indicadas. □

Exercício 2
Teorema de Tales para $k = \frac{3}{2}$

Considera duas retas r e s que se intersetam num ponto O e outras duas retas t e u, paralelas entre si, que intersetam r em A e B e s em C e D, respetivamente, tais que $\overline{OA} = 2\overline{AB}$. Seja ainda M o ponto médio de $[OA]$.

Mostra que:

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{3}{2}$$

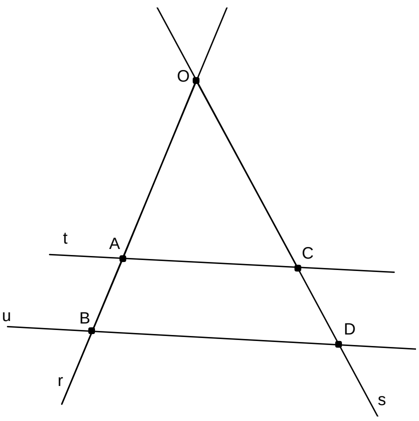


Figura 87: Retas paralelas e segmentos proporcionais sobre as retas secantes

Etapas[22] a sugerir ao aluno

1) Traça uma reta paralela a t que passa no ponto M e que interseta $[OC]$ no ponto N. Atendendo ao resultado obtido no exercício 1 (k =2) completa as seguintes proporções:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OC}}{\ldots} = \frac{\ldots}{\overline{MN}} = 2$$

2) Traça uma reta paralela a s que passe por A e intersete $[BD]$ num ponto, designado por Q:

2.1) justifica que os triângulos $[ABQ]$ e $[OMN]$ são congruentes;

2.2) deduz que $\overline{BQ} = \overline{MN}$ e $\overline{AQ} = \overline{ON}$.

3) Justifica que o quadrilátero $[ACDQ]$ é um paralelogramo e deduz que $\overline{QD} = \overline{AC}$ e $\overline{CD} = \overline{AQ} = \overline{ON}$;

4) Mostra que $\overline{BD} = 3\overline{MN}$ e que $\overline{OD} = 3\overline{ON}$;

5) Prova que $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{3}{2} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}$.

Proposta de resolução

1. Traça-se uma reta paralela a t que passa no ponto M (ponto médio de $[AO]$) e que interseta [OC] no ponto N. Sabendo que $MN \parallel t$ e atendendo ao caso particular anterior (k=2) tem-se que:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = 2 = \frac{\overline{OC}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MN}}.$$

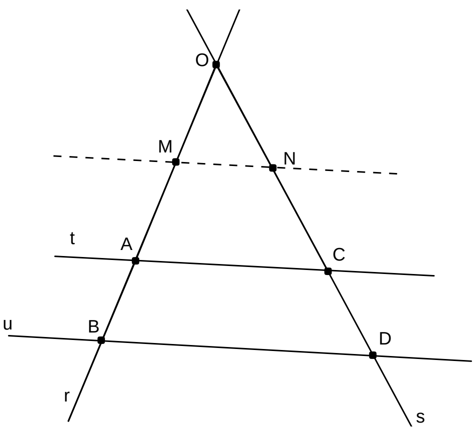


Figura 88: Reta MN paralela à reta AC contendo ponto médio

[22] Adaptado do PMMC de 2013, Caderno Apoio – GM7, página 14.

2. Por construção (figura 89) $\overline{OM} = \overline{AB}$ (já que $\overline{OA} = 2\overline{AB}$ e M é o ponto médio de [OA]). Como $MN \,//\, u$ então $\angle OMN = \angle ABQ$. Por outro lado, $s \,//\, QA$ então $\angle BAQ = \angle MON$. Utilizando o critério ALA conclui-se a congruência de triângulos $[ABQ]$ e $[OMN]$. A justificação da congruência dos outros segmentos ($\overline{BQ} = \overline{MN}$ e $\overline{AQ} = \overline{ON}$) resulta, imediatamente, da definição de congruência de triângulos.

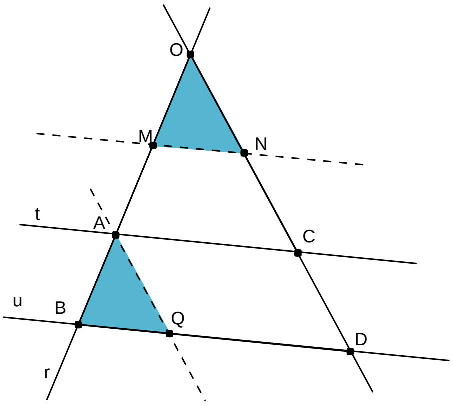


Figura 89: AQ// OD e triângulos [OMN] e [ABQ]

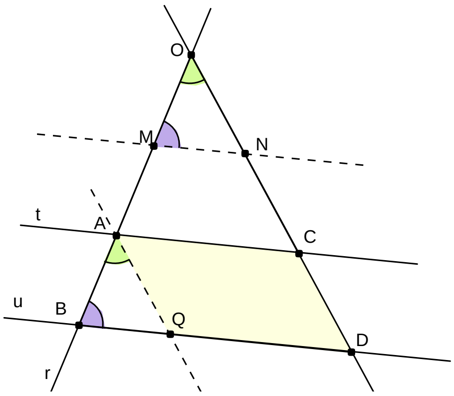


Figura 90: Triângulos congruentes e paralelogramo

3. O quadrilátero $[ACDQ]$ da figura 90 é um paralelogramo porque os pares de lados opostos são paralelos, isto é, $[QD]//[AC]$ bem como $[CD]//[AQ]$, resultando do teorema dos ângulos correspondentes. Do ponto anterior considera-se que $\overline{AQ} = \overline{ON}$ então $\overline{CD} = \overline{ON}$.

4. Justifica-se que $\overline{BD} = 3\overline{MN}$ pois resulta de $\overline{BD} = \overline{BQ} + \overline{QD}$ fazendo as sucessivas substituições das condições consideradas por hipótese e anteriormente demonstradas, tem-se:

$$\overline{BD} = \overline{MN} + \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{BD} = \overline{MN} + 2\overline{MN} \Leftrightarrow \overline{BD} = 3\overline{MN}$$

De forma análoga, justifica-se que $\overline{OD} = 3\overline{ON}$ pois $\overline{OD} = \overline{OC} + \overline{CD}$, resultando $\overline{OD} = 2\overline{ON} + \overline{ON}$ e por fim $\overline{OD} = 3\overline{ON}$.

5. Resta justificar a igualdade entre as proporções

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}.$$

Traçando outra reta paralela a OD passando em M, formam-se três triângulos congruentes e paralelogramos.

Uma vez que se verifica

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{3\overline{OM}}{2\overline{OM}} = \frac{3}{2};$$

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{3\overline{ON}}{2\overline{ON}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{3\overline{MN}}{2\overline{MN}} = \frac{3}{2}$$

resulta a igualdade pretendida

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}.\square$$

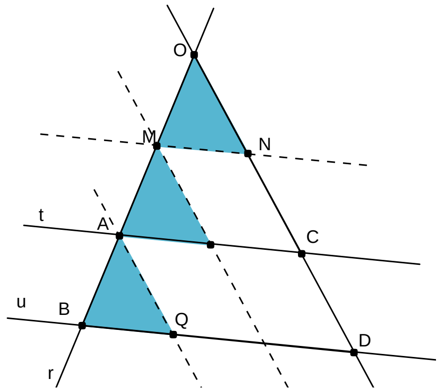


Figura 91: Triângulos congruentes e paralelogramos

Na sequência das etapas descritas nos casos particulares do Teorema de Tales para k=2 e depois para $k = \frac{3}{2}$ o procedimento utilizado poderá ser prolongado, acrescentando-se passo a passo, retas paralelas de modo a ir formando triângulos e paralelogramos que são respetivamente congruentes aos anteriores. Pode ser considerado outro tipo de exercício sem ser referido o valor de k no enunciado.

Exercício 3[23] **–** Aplicação do Teorema de Tales

Na figura estão representadas as retas r, s, t e v paralelas e intersetadas por duas retas concorrentes em O.

a) Utilizando as igualdades entre comprimentos de segmentos indicados na figura 92 mostra que:

a₁) $\frac{\overline{OQ_3}}{\overline{OQ_1}} = \frac{\overline{OP_3}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{P_3Q_3}}{\overline{P_1Q_1}}$

a₂) $\frac{\overline{OP_4}}{\overline{OP_3}} = \frac{\overline{OQ_4}}{\overline{OQ_3}} = \frac{\overline{P_4Q_4}}{\overline{P_3Q_3}}$

b) Completa as proporções utilizando medidas de comprimento de segmentos da figura.

$$\frac{\overline{OP_5}}{\ldots} = \frac{\ldots}{\overline{OQ_2}} = \frac{\overline{P_5Q_5}}{\ldots}$$

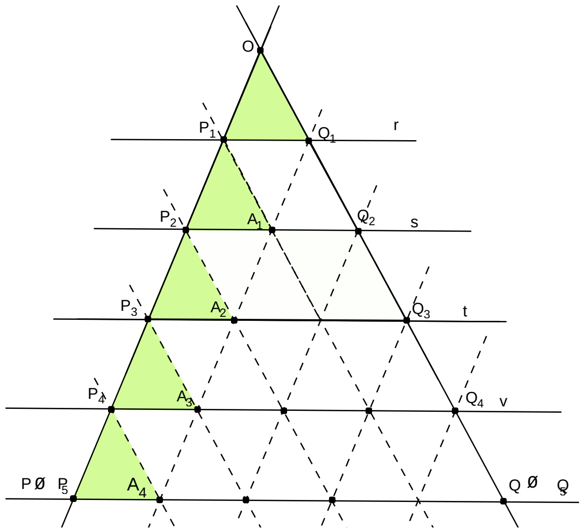


Figura 92: Divisão do segmento $[OP_5]$ em segmentos congruentes

[23] Adaptado do PMMC de 2013, Caderno Apoio – GM7, página 15.

Proposta de Resolução:

Tendo por base a Figura 92, supondo agora cinco pontos colineares sobre a reta OP e utilizando os triângulos assinalados resulta que:

$$\overline{P_1Q_1} = \overline{P_2A_1} = \overline{P_3A_2} = \overline{P_4A_3} = \overline{P_5A_4}$$

$$\overline{OQ_1} = \overline{P_1A_1} = \overline{P_2A_2} = \overline{P_3A_3} = \overline{P_4A_4}$$

Utilizando os paralelogramos sucessivamente construídos e as igualdades anteriores estabelecem-se relações entre diferentes comprimentos:

$$\overline{OQ_1} = \overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3} = \overline{Q_3Q_4} = \overline{Q_4Q_5}$$

$$\overline{P_2Q_2} = 2\overline{P_1Q_1}\ ;\ \overline{P_3Q_3} = 3\overline{P_1Q_1}\ ;\ \overline{P_4Q_4} = 4\overline{P_1Q_1}\ ;\ \overline{P_5Q_5} = 5\overline{P_1Q_1}$$

Assim, é possível estabelecer proporções envolvendo o ponto O e os pontos P e Q com quaisquer dois índices, por exemplo:

a₁) $\dfrac{\overline{OQ_3}}{\overline{OQ_1}} = 3 = \dfrac{\overline{OP_3}}{\overline{OP_1}} = \dfrac{\overline{P_3Q_3}}{\overline{P_1Q_1}}$ **a₂)** $\dfrac{\overline{OP_4}}{\overline{OP_3}} = \dfrac{4}{3} = \dfrac{\overline{OQ_4}}{\overline{OQ_3}} = \dfrac{\overline{P_4Q_4}}{\overline{P_3Q_3}}$ **b)** $\dfrac{\overline{OP_5}}{\overline{OP_2}} = \dfrac{5}{2} = \dfrac{\overline{OQ_5}}{\overline{OQ_2}} = \dfrac{\overline{P_5Q_5}}{\overline{P_2Q_2}}$ □

Na sequência do procedimento utilizado de se acrescentar, passo a passo, retas paralelas evidenciando os triângulos congruentes construídos fica claro que as distâncias dos pontos de interseção de um dos lados do ângulo ao vértice têm que ser múltiplos de um mesmo comprimento. No PMMC (2013) considera-se a unidade m e n $(m > n)$ respetivamente para cada lado do triângulo e obtém-se mais genericamente

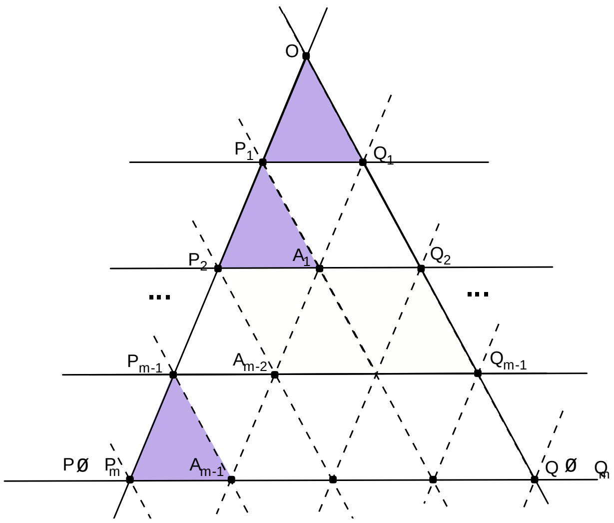


Figura 93: Divisão do segmento [OP] em m segmentos congruentes

a construção e as seguintes proporções, considerando no segmento $[OP]$, P_i pontos tais que $i = 1,\ldots,m$.

$$\frac{\overline{OP_{m-1}}}{\overline{OP_{n-1}}} = \frac{m-1}{n-1} = \frac{\overline{OQ_{m-1}}}{\overline{OQ_{n-1}}} = \frac{\overline{P_{m-1}Q_{.m-1}}}{\overline{P_{n-1}Q_{n-1}}} \qquad \text{e} \qquad \frac{\overline{OP_m}}{\overline{OP_n}} = \frac{m}{n} = \frac{\overline{OQ_m}}{\overline{OQ_n}} = \frac{\overline{P_mQ_{.m}}}{\overline{P_nQ_n}}\ \square$$

3.4. Semelhança de Triângulos no 3.ºciclo

Ao nível do 7.º ano de escolaridade, depois de estudada a definição de triângulos congruentes segue a definição de triângulos semelhantes. Tal como na congruência de triângulos facilmente se percebe que provar a semelhança entre pares de triângulos, usando a definição, não é um procedimento eficaz. Estudam-se os critérios que envolvam menos condições em termos de lados ou ângulos desses triângulos sem prejuízo de garantia da semelhança.

O teorema de Tales permite tratar com rigor os critérios de semelhança de triângulos e considera-se a base das suas demonstrações. A semelhança de triângulos e a aplicação do teorema de Tales constituem, pois, estratégias simples para a determinação de distâncias inacessíveis (por exemplo, altura de árvores, largura de um rio, altura de postes ou edifícios,...).

As demonstrações dos critérios de semelhança de triângulos seguem as orientações do PMMC (2013), no *Texto Complementar de Geometria – 3.ºciclo* (Bivar, A. et al, 2013) e as orientações da DGIDC na proposta de documento orientador *Geometria e Medida no Ensino Básico* (Breda, A. et al, 2011).

3.4.1. Enquadramento no PMMC

O estudo da *Semelhança de Triângulos* enquadra-se no domínio *Geometria e Medida do 7.º ano* (GM7), no subtema *Paralelismo, congruência e semelhança*. Partindo da noção de *polígonos semelhantes* em articulação com o estudo das *isometrias* e *proporcionalidade direta*, estudam-se os critérios de semelhança de triângulos - critério LLL, critério LAL, critério AA - e a semelhança entre polígonos, tendo por base a aplicação do teorema de Tales.

.

Nas diretrizes do PMMC a aplicação deste teorema é a base da demonstração dos critérios de semelhança de triângulos. A meta curricular subjacente a este tema - *Identificar e construir figuras congruentes e semelhantes*, (PMMC, 2013) - tem o como descritores a alcançar:

> 8. Reconhecer que dois triângulos são semelhantes quando os comprimentos dos lados de um são diretamente proporcionais aos comprimentos dos lados correspondentes do outro e designar esta propriedade por «critério LLL de semelhança de triângulos»

9. Reconhecer, utilizando o teorema de Tales, que dois triângulos são semelhantes quando os comprimentos de dois lados de um são diretamente proporcionais aos comprimentos de dois dos lados do outro e os ângulos por eles formados em cada triângulo são iguais e designar esta propriedade por «critério LAL de semelhança de triângulos».

10. Reconhecer, utilizando o teorema de Tales, que dois triângulos são semelhantes quando dois ângulos internos de um são iguais a dois dos ângulos internos do outro e designar esta propriedade por «critério AA de semelhança de triângulos».

11. Reconhecer, utilizando o teorema de Tales, que dois triângulos semelhantes têm os ângulos correspondentes iguais.

(PMMC, 2013, p.51)

3.4.2. Triângulos Semelhantes

Numa correspondência biunívoca entre os vértices de dois triângulos, se for verificada a congruência dos três ângulos e a proporcionalidade entre lados correspondentes diz-se que essa correspondência é uma semelhança.

Definição

Triângulos Semelhantes

Dois triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ são semelhantes, se existir uma correspondência entre os vértices de um e de outro de modo que a razão entre as medidas dos lados correspondentes do triângulo seja comum e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Nos triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$:

$$A \mapsto A' ;\ B \mapsto B' \text{ e } C \mapsto C'$$

$$\angle A = \angle A' ;\ \angle B = \angle B' ; \angle C = \angle C'$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$$

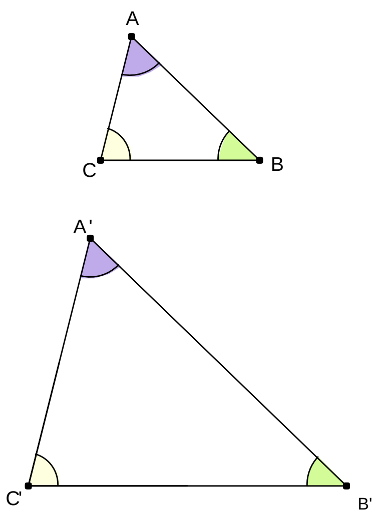


Figura 94: Triângulos [ABC] e [A'B'C'] semelhantes

3.4.3. Critérios de semelhança de triângulos

A semelhança de triângulos pode ser estabelecida recorrendo a menos condições (lados/ângulos) desses triângulos, sem que seja necessário garantir todas as condições da definição – congruência de três ângulos (correspondentes dois a dois) e a proporcionalidade de três pares de segmentos de reta (correspondentes dois a dois). Neste sentido definem-se os três critérios de semelhança de triângulos.

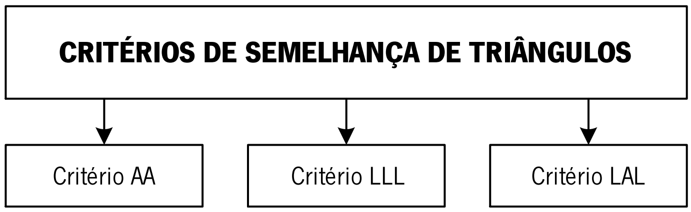


Figura 95: Esquema dos critérios de semelhança de triângulos

Critério de Semelhança Ângulo-Ângulo (critério AA): Dois triângulos são semelhantes quando dois ângulos internos de um são geometricamente iguais a dois dos ângulos internos do outro.

Demonstração: Sejam dois triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ tal que $\angle BAC = \angle B'A'C'$ e $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

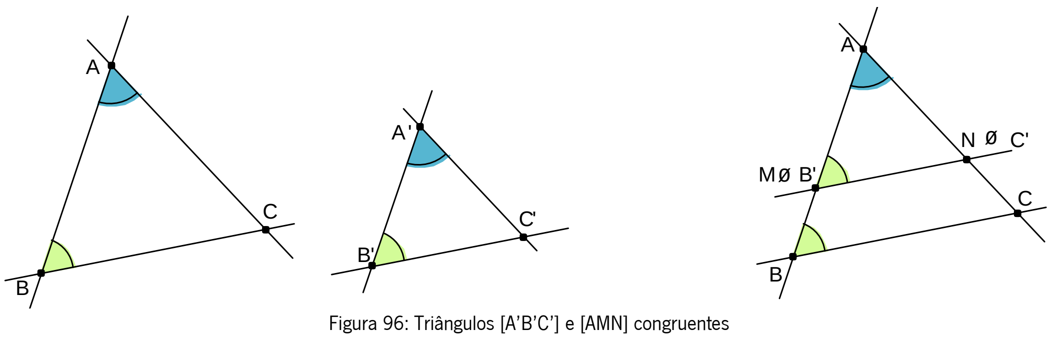


Figura 96: Triângulos [A'B'C'] e [AMN] congruentes

Admitindo sem perda de generalidade que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$ e considerando os pontos M e N nos lados $[AB]$ e $[AC]$, respetivamente, do triângulo $[ABC]$ respeitam-se as condições:

(i) $\overline{AM} = \overline{A'B'}$;

(ii) $\overline{AN} = \overline{A'C'}$.

Os triângulos $[AMN]$ e $[A'B'C']$ são congruentes, pelo critério LAL (Figura 96). Por hipótese, $\angle BAC = \angle B'A'C'$ resultando pois que $\angle AMN = \angle A'B'C'$ logo $\angle AMN = \angle ACB$. Por conseguinte, os segmentos $[BC]$ e $[MN]$ são estritamente paralelos ou coincidentes (pelo teorema dos ângulos correspondentes). Se $[BC]//[MN]$ (estritamente paralelos) então pelo Teorema de Tales estabelece-se a proporção $\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AN}}$. Mas atendendo a (i) e (ii) obtém-se

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

Analogamente mostra-se a proporção $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$. No casos de $[BC]$ e $[MN]$ serem coincidentes, os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ são congruentes por aplicação do critério ALA, logo semelhantes. □

Critério de Semelhança Lado-Lado-Lado (critério LLL): Dois triângulos são semelhantes quando os comprimentos dos lados de um são diretamente proporcionais aos comprimentos dos lados correspondentes do outro.

Demonstração:

Sejam os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ tais que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

Marcam-se os pontos M e N nos lados $[AB]$ e $[AC]$, respetivamente, do triângulo $[ABC]$ de tal modo que $\overline{AM} = \overline{A'B'}$ e $\overline{AN} = \overline{A'C'}$.

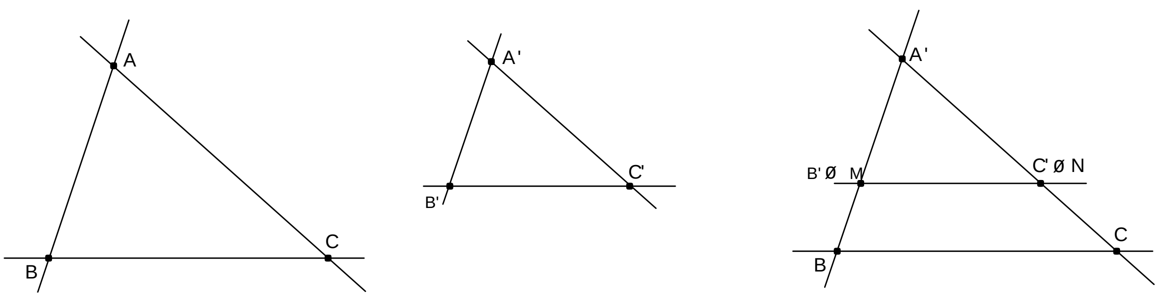


Figura 97: Triângulos [A'B'C'] e [AMN] congruentes

Por hipótese $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$, logo pelo recíproco do teorema de Tales os segmentos $[MN]$ e $[BC]$ são paralelos. Assim, as retas paralelas MN e BC intersetadas por uma secante (AB para um caso e AC para outro caso) formam pares de ângulos correspondentes congruentes (teorema dos ângulos correspondentes), logo $\angle AMN \cong \angle ABC$ e $\angle ANM \cong \angle ACB$. Pelo critério AA resulta a semelhança dos triângulos $[ABC]$ e $[AMN]$. Por consequência tem-se que $\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$, donde $\overline{MN} = \overline{BC} \times \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$.

Por hipótese resulta,

$$\overline{MN} = \overline{BC} \times \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \quad (1)$$

Por outro lado, por hipótese tem-se que $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$, ou seja,

$$\overline{B'C'} = \overline{BC} \times \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \quad (2).$$

De (1) e (2) resulta que $\overline{MN} = \overline{B'C'}$, donde pelo critério de congruência LLL, os triângulos $[A'B'C']$ e $[AMN]$ são congruentes. Pelo critério de semelhança AA, os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ são semelhantes. □

Critério de Semelhança Lado-Ângulo-Lado (critério LAL): Dois triângulos são semelhantes quando os comprimentos de dois lados de um são diretamente proporcionais aos comprimentos de dois dos lados do outro e os ângulos por eles formados em cada triângulo são geometricamente iguais.

Demonstração:

Sejam os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ tendo por hipótese proporção $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ e a relação entre as amplitudes $\angle CAB = \angle C'A'B'$.

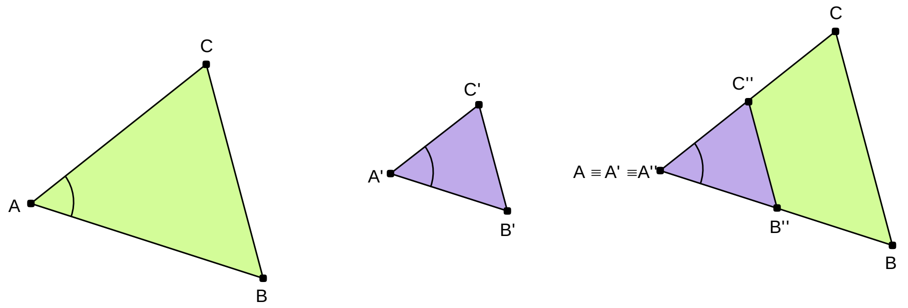


Figura 98: Triângulos congruentes [A'B'C'] e [A''B''C'']

Marcam-se os pontos B'' e C'' no triângulo $[ABC]$ de modo que $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ e que $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$ (figura 98). Pelo critério LAL de congruência de triângulos, os triângulos $[A'B'C']$ e $[A'B''C'']$são necessariamente congruentes, donde se conclui também a igualdade dos lados opostos aos ângulos CAB e $C'A'B'$, resultando, pois, $[B'C'] = [B''C'']$.Substituindo na condição definida por hipótese, surge a proporção $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}}$.

Pelo recíproco do teorema de Tales $B''C'' // BC$ e, em seguida, pelo teorema de Tales conclui-se que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B''C''}} \text{ e } \frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B''C''}}. \quad (1)$$

Como se verifica $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ e $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$ resultam as proporções

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \text{ e } \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}. \quad (2)$$

Com base nas proporções descritas em (1) e (2) aplica-se o critério LLL de semelhança de triângulos donde resulta que os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ são semelhantes. □

Observação: Depois de estudados os critérios de semelhança de triângulos e pensando no teorema de Tales aplicado a triângulos, impõe-se sublinhar que não há garantia do paralelismo entre retas, supondo uma certa proporção inicial e julgando que se aplica o recíproco do teorema de Tales.

Relembrando o par retas paralelas AB e CD a intersetarem ambos os lados do mesmo ângulo determinado pelas retas secantes s e r (concorrentes no ponto O), não é suficiente para garantir o paralelismo de AB e CD, partindo da proporção $\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$.

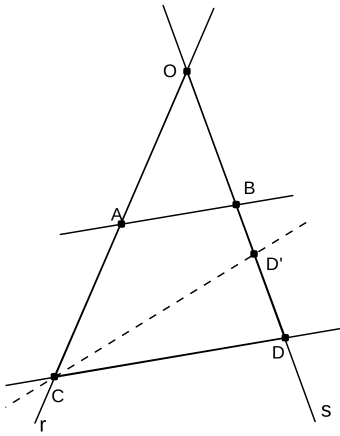


Figura 99: AB//CD e [CD']=[CD]

Supondo, por exemplo, que o segmento [CD'] foi construído de modo que $\overline{CD}=\overline{CD'}$, os segmentos [$CD$] e [$CD'$] são congruentes. D' não terá que coincidir necessariamente com D.

3.4.4. Tales e a razões trigonométricas

O teorema de Tales está diretamente relacionado com a resolução de problemas práticos que envolvam paralelismo e proporcionalidade. Para além da sua importância na teoria da semelhança, também na Trigonometria, ajuda a definir as razões trigonométricas de um ângulo agudo: seno, cosseno e tangente.

O PMMC(2013) no domínio *Geometria e Medida* do 9.º ano (GM9), aponta na meta "*Definir e utilizar razões trigonométricas de ângulos agudos*" como descritores a alcançar (onde a aplicação do Teorema de Tales pode ser útil):

> 1. Construir, dado um ângulo θ, triângulos retângulos dos quais θ é um dos ângulos internos, traçando perpendiculares de um ponto qualquer, distinto do vértice, de um dos lados de θ para o outro lado, provar que todos os triângulos que assim se podem construir são semelhantes e também semelhantes a qualquer triângulo retângulo que tenha um ângulo interno igual a θ.
>
> 7. Justificar que o valor de cada uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo θ (e da respetiva amplitude) é independente da unidade de comprimento fixada.
>
> (PMMB, 2013, p.79)

A trigonometria é um ramo da Matemática que estuda as relações entre as amplitudes dos ângulos e as medidas dos comprimentos dos segmentos que os determinam. Considerando o ângulo θ, de vértice O fixa-se, num dos lados de θ, arbitrariamente, os pontos P_1, P_2, P_3. (Figura 100)

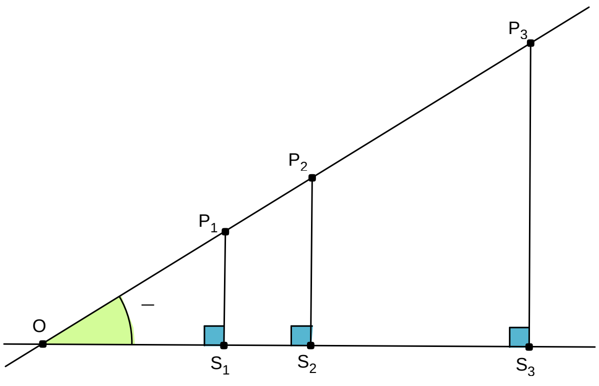


Figura 100: Triângulos retângulos semelhantes

Traçando por P_1 uma perpendicular ao outro lado do ângulo θ determina-se os pés das perpendiculares S_1, S_2, S_3. Os triângulos $[P_1OS_1]$, $[P_2OS_2]$ e $[P_3OS_3]$ são semelhantes, por aplicação do critério AA. Pelo Teorema de Tales surgem as relações entre os segmentos:

$$\frac{\overline{P_1S_1}}{\overline{OP_1}}=\frac{\overline{P_2S_2}}{\overline{OP_2}}=\frac{\overline{P_3S_3}}{\overline{OP_3}}$$

$$\frac{\overline{OS_1}}{\overline{OP_1}}=\frac{\overline{OS_2}}{\overline{OP_2}}=\frac{\overline{OS_3}}{\overline{OP_3}}$$

$$\frac{\overline{P_1S_1}}{\overline{OS_1}}=\frac{\overline{P_2S_2}}{\overline{OS_2}}=\frac{\overline{P_3S_3}}{\overline{OS_3}}$$

Estas relações definem as razões trigonométricas do mesmo ângulo agudo, senθ, cosθ, tgθ respetivamente:

$$sen\,\theta=\frac{\overline{P_1S_1}}{\overline{OP_1}}=\frac{\overline{P_2S_2}}{\overline{OP_2}}=\frac{\overline{P_3S_3}}{\overline{OP_3}}$$

$$\cos\theta=\frac{\overline{OS_1}}{\overline{OP_1}}=\frac{\overline{OS_2}}{\overline{OP_2}}=\frac{\overline{OS_3}}{\overline{OP_3}}$$

$$tg\,\theta=\frac{\overline{P_1S_1}}{\overline{OS_1}}=\frac{\overline{P_2S_2}}{\overline{OS_2}}=\frac{\overline{P_3S_3}}{\overline{OS_3}}$$

Verifica-se pois que as definições são independentes dos pontos P_i e S_i, i=1,2,3 escolhidos. O valor de cada razão trigonométrica de um ângulo agudo θ (e da respetiva amplitude) não depende da unidade de comprimento fixada pois, o quociente entre as medidas de comprimento de dois segmentos de reta mantém-se quando se altera a unidade de comprimento.

Capítulo 4. Atividades desenvolvidas no 3.º ciclo

"*Os professores eficazes são aqueles que conseguem estimular os seus alunos a aprender matemática*."
(NCTM, 1989, p.2)

Apresentam-se algumas das atividades dinamizadas que se consideram ter contribuído para uma melhor compreensão e integração dos conhecimentos, especialmente os de Geometria previstos no Programa da Matemática para o 3.º ciclo. Através destas, promoveram-se conexões entre ideias matemáticas, levando a uma compreensão mais profunda e duradoura dos conceitos em estudo. Muitas das atividades foram ambiciosas e arrojadas para a faixa etária a que são dirigidas, no entanto, consideram-se desafios superados com sucesso, nos diferentes contextos educativos ao longo da atividade docente. Com o amadurecimento da experiência profissional, estas foram sendo melhoradas e ajustadas às exigências das orientações curriculares que se desenharam e perspetivaram. Todos os materiais fornecidos aos alunos encontram-se em anexo a este relatório, não tendo sido alteradas as datas e identificação das escolas, mantendo o acordo ortográfico em vigor à data da sua elaboração. Muitos dos materiais resultaram de um trabalho colaborativo entre docentes, em particular no Agrupamento de Escolas Padre Benjamim Salgado, o qual prima por uma cultura de escola diferente, no trabalho de pares, a qual marcou o meu percurso profissional.

As atividades de exterior revelaram-se experiências matemáticas inovadoras para os alunos promovendo a resolução de problemas em contextos exteriores à própria Matemática. A divulgação dos projetos desenvolvidos e a participação em concursos, ao longo da atividade docente, pretende revelar uma aprendizagem que vai muito além de uma aula, de uma sala, de um horário escolar, portanto, de uma presença física num espaço físico. O envolvimento nalguns dos projetos exigiu uma vontade dos alunos que se sobrepõe aos conceitos, aos algoritmos, às técnicas e estratégias associados a exercícios ou desafios mais rotineiros.

4.1. Atividades de sala de aula

"*Formular conjeturas e tentar justificá-las é uma parte integrante da atividade matemática dos alunos.*"
(NCTM, 2008, p.223)

As atividades de sala de aula distribuem-se por três grupos: as mais direcionadas para as demonstrações geométricas com recortes em papel; as de construção com orientação de um guião; e as desenvolvidas em ambientes de tecnologia, quer com recurso a software de geometria dinâmica quer a calculadora gráfica. Note-se que, o uso da calculadora gráfica, no 3.º ciclo, é considerado um desafio de grau elevado e depende do acesso às calculadoras disponibilizadas pela escola.

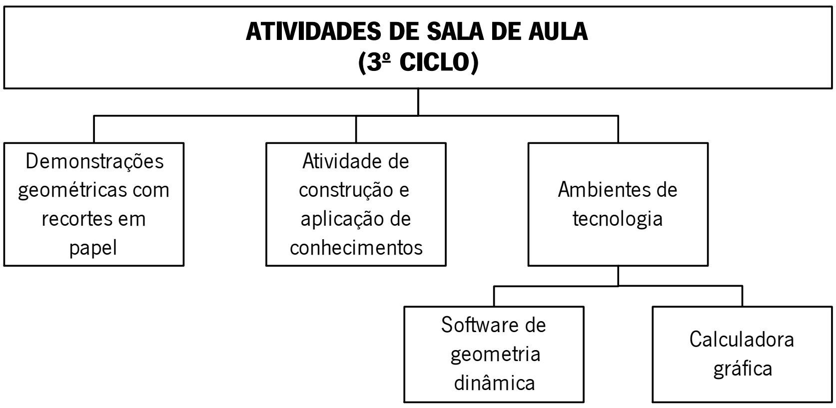


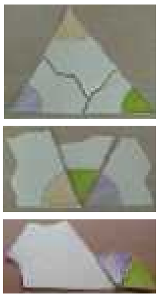
Figura 101: Tipos de atividades desenvolvidas no 3.º ciclo

4.1.1. Demonstrações geométricas com recortes em papel

As atividades de demonstração geométrica pretendem reconhecer propriedades elementares da Geometria envolvendo triângulos e circunferências. Enquadram-se nos temas de Geometria do 7.º, 8.º e 9.º anos, de acordo com o programa da matemática da altura. Com a definição de etapas a seguir, os alunos são conduzidos a elaborar conjeturas argumentando-as, percebendo a demonstração geométrica. A estratégia empreendida recorre a recortes em cartolinas e à utilização de instrumentos de medição e desenho.

Apresentam-se alguns exemplos das atividades implementadas em sala de aula.

PROPRIEDADES DE ÂNGULOS NUM TRIÂNGULO



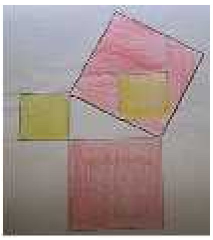
[Anexo C1]

A atividade - *Propriedades de ângulos num triângulo* é proposta a alunos do 7.º ano, no estudo do tema *Triângulos e Quadriláteros*.

Com auxílio de recortes em cartolina os alunos conjeturam e demonstram geometricamente duas propriedade dos triângulos:

- soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo;
- relação entre a amplitude de um ângulo externo e as amplitudes dos ângulos internos não adjacentes de um triângulo.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

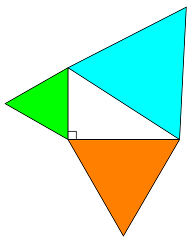


[Anexo C2]

A atividade *Demonstração do Teorema de Pitágoras* é proposta a alunos do 8.º ano, no estudo do tema *Teorema de Pitágoras*.

Efetua-se a demonstração geométrica deste teorema, por decomposição em triângulos e quadriláteros, dos quadrados construídos sobre os catetos. Por sobreposição das partes resultantes no quadrado maior, construído sobre a hipotenusa, prova-se a importante relação entre as áreas dos três quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo.

TRIÂNGULOS RETÂNGULOS E PITÁGORAS

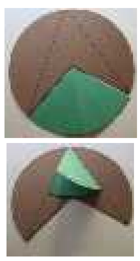


[Anexo C2]

A atividade *Triângulos Retângulos e Pitágoras* é proposta a alunos do 8.º ano, no estudo do tema *Teorema de Pitágoras* e valida a relação do teorema de Pitágoras para outros polígonos construídos sobre os seus lados.

Esta atividade apresenta vários triângulos retângulos em que sobre os seus lados foram construídos quadrados, triângulos isósceles e semicírculos. Com auxílio da régua graduada e compasso (para tirar a altura de cada triângulo) calculam-se áreas das figuras construídas e procura-se uma conjetura para a relação entre as áreas.

ÂNGULOS AO CENTRO E ÂNGULOS INSCRITOS NUMA CIRCUNFERÊNCIA. PROPRIEDADES.



[Anexo C3]

A atividade *Ângulos ao centro e ângulos inscritos numa circunferência* destina-se a alunos do 9.º ano no estudo do tema *Circunferência*.

Tem como objetivo descobrir duas importantes propriedades das amplitudes de ângulos ao centro e ângulos inscritos numa circunferência tendo em conta a relação entre arcos e cordas correspondentes. Acrescentam-se na mesma atividade outras propriedades de ângulos inscritos, procurando-se orientar os alunos em demonstrações também analíticas destas propriedades.

SOMA DAS AMPLITUDES DOS ÂNGULOS INTERNOS E ÂNGULOS EXTERNOS DE UM POLÍGONO

[Anexo C4]

A atividade *Soma das amplitudes dos ângulos internos e ângulos externos de um polígono* enquadra-se no tema *Circunferência* do 9.°ano.

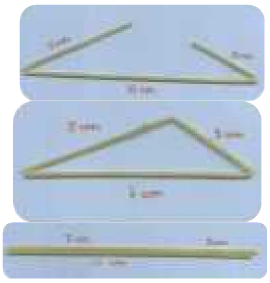
Propõe-se a construção de vários exemplos de polígonos convexos e respetiva decomposição por diagonais partindo de um dos vértices escolhido ao acaso. A contagem do número de triângulos obtidos pela decomposição e a sua relação com o número de lados do polígono original conduz a uma expressão geradora da soma dos ângulos internos de um qualquer polígono convexo.

Com auxílio de régua e cartolina, e de todos os ângulos externos recortados de um polígono convexo, conjetura-se outra propriedade para a soma das amplitudes dos ângulos externos.

4.1.2. Construção e aplicação de conhecimentos

As atividades de construção e aplicação de conhecimentos foram realizadas sob a orientação de um guião (ficha) fornecido ao aluno, procurando que, de uma forma autónoma, se desenvolvessem construções geométricas com recurso a instrumentos auxiliares. Partindo de conjeturas chega-se à definição de propriedades com base em exemplos construídos.

O ESPARGUETE E A DESIGUALDADE TRIANGULAR



[Anexo C5]

A atividade - *O esparguete e a Desigualdade Triangular* - é proposta a alunos do 7.° ano, no estudo do tema *Triângulos e Quadriláteros*.

Usando massa esparguete, os alunos cortam massinhas com diferentes comprimentos, de acordo com o sugerido e, em seguida, tentam construir triângulos (o que nem sempre será possível) e conjeturam a propriedade da desigualdade triangular.

Em algumas turmas, na implementação desta atividade, a massa esparguete foi substituída por palhinhas de beber sumos.

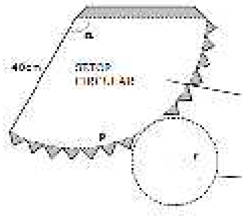
CONSTRUÇÃO DE TRIÂNGULOS

[Anexo C6]

A atividade - *Construção de Triângulos* - sugere-se a alunos do 7.° ano, no estudo do tema *Triângulos e Quadriláteros*.

Esta atividade de construção de triângulos procura desenvolver a autonomia do aluno na interpretação das etapas (reconhecendo vocabulário específico da Geometria) para a construção de triângulos de acordo com diferentes dados fornecidos – a medida de três lados, a medida de dois lados e a amplitude do ângulo formado por esses lados ou a medida de um lado e a amplitude dos ângulos adjacentes a esse lado.

CONSTRUÇÃO DE UM CHAPÉU DE BRUXA PARA O HALLOWEEN

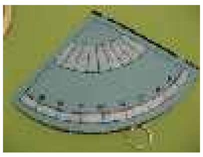


[Anexo C7]

A atividade - *Construção de um chapéu de bruxa* - desenvolvida com alunos do 7.º ano, enquadra-se nas atividades de comemoração do dia do Halloween e participação no concurso de chapéus de bruxa.

Os alunos constroem o seu próprio chapéu e respetiva aba, partindo das dimensões reais da cabeça. Articula-se a noção de perímetro de uma circunferência e a regra de três simples. Salienta-se que estes alunos tinham ainda poucos conhecimentos das matérias implicadas nesta construção (1.º período), pelo que a tarefa tem elevado grau de dificuldade.

CONSTRUÇÃO DE UM QUADRANTE



[Anexo C8]

A atividade - *Construção de um Quadrante* - é dirigida a alunos do 9.º ano, no estudo do tema *Trigonometria* em articulação com o tema da *Semelhança de Triângulos* do 8.º ano.

Integrando uma breve referência histórica à importância da utilização do quadrante no tempo dos descobrimentos, apresenta as etapas para a construção de um quadrante recorrendo a instrumentos de medição (transferidor, esquadro, régua), de desenho (compasso e lápis de cor) e outros (cartolina, tesoura, palhinha, cola, fio, peso e agulha).

O rigor da construção do quadrante influencia a sua operacionalidade e os resultados das atividades de exterior que se realizaram *à posteriori*.

A MATEMÁTICA ENLATADA

[Anexo C9]

A atividade - *A Matemática enlatada* - surgiu no 3.º período, dirigida a alunos do 9.º ano, servindo de revisão de vários conteúdos estudados ao longo do 7.º, 8.º e 9.º anos no âmbito do domínio *Geometria*. Aproveitando uma simples lata de salsichas vazia, com auxílio de uma régua graduada, colocam-se desafios aos alunos - determinar: o diâmetro da base da lata (por exemplo, desenhar os contornos da base numa folha, identificar o centro da circunferência desenhada, partindo de retas perpendiculares a duas cordas); descobrir a quantidade de papel para forrar a lata transformando-a num copo para lápis; calcular o espaço desperdiçado para armazenamento de velas esféricas no seu interior; determinar a capacidade de água para uma reutilização decorativa.

4.1.3. Ambientes de tecnologia

A integração das novas tecnologias, numa sociedade da informação e do conhecimento, tem marcado o contexto educativo conduzindo a mudanças nas metodologias e pedagogias da sala de aula. Sublinha-se a mais-valia na aprendizagem dos alunos através da utilização de recursos audiovisuais na disciplina de Matemática. Ajudam a uma compreensão mais profunda dos conceitos, destacando-se a forma de visualização dos conteúdos e a capacidade de simular situações reais.

A utilização diária do Quadro Interativo e a rentabilização das suas inúmeras funcionalidades no âmbito da geometria, para além da facilidade de associar recursos multimédia, motivou os alunos. A atenção e concentração em ambientes de tecnologia conduz a empenhos diferentes influenciando positivamente o resultado das tarefas realizadas.

Realçam-se algumas atividades implementadas com recurso a *software* específico de geometria - *Geogebra* e *Geometer's Sketchpad.* Constituem extensões de atividades de manuseamento com recortes em papel ou substituição das mesmas, quando foi possível o acesso aos computadores pelos alunos no laboratório de matemática das escolas.

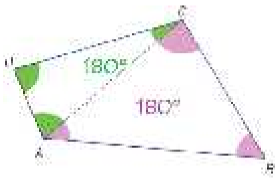
O MÉTODO DA HOMOTETIA EM GEOMETER'S SKETCHPAD

[Anexo C10]

A atividade - *O Método da Homotetia* - insere-se no estudo do tema *Semelhanças de Polígonos*, do 7.° ano, sendo um dos métodos para ampliar e reduzir figuras semelhantes.

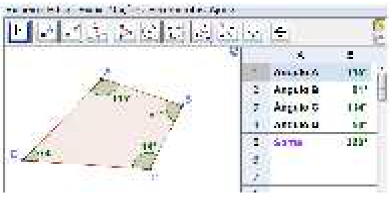
Em ambiente dinâmico de geometria *Geometer's Sketchpad*, os alunos construíram uma ampliação de um triângulo usando as regras do método da homotetia.

PROPRIEDADES DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM QUADRILÁTERO



A atividade - *Propriedades dos ângulos internos de um quadrilátero* – enquadra-se no tema *Triângulos e Quadriláteros* do 7.°ano.

Integra dois processos diferentes para demonstrar, geometricamente, que o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de um quadrilátero é de 360°. Conjetura-se e demonstra-se a propriedade, ora usando a diagonal do quadrilátero, ora usando a noção de ângulo giro.



[Anexo C11]

A extensão desta atividade para o *Geogebra* ajuda na visualização de outros exemplos de quadriláteros (movendo um dos quatro vértices) não trapézios e a conjeturar a mesma propriedade.

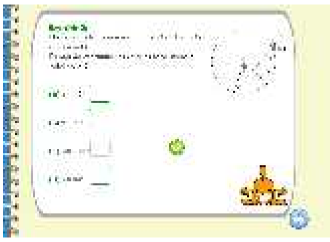
PROPORCIONALIDADE DIRETA NUMA CALCULADORA GRÁFICA

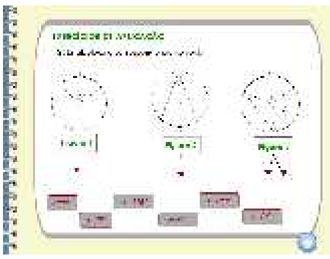
[Anexo C12]

A atividade - *Proporcionalidade direta numa calculadora gráfica* - integra-se no estudo do tema *Funções*, do 7.º ano. Propõe resolver quatro problemas começando por identificar as situações de proporcionalidade direta. Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, constroem-se gráficos (funções lineares ou afins) de acordo com um contexto. Transcrevendo as representações gráficas para papel inferem-se as características das funções que traduzem situações de proporcionalidade direta.

É uma atividade que exige a disponibilidade de calculadoras e tempo, já que se trata de um primeiro contacto dos alunos com esta ferramenta.

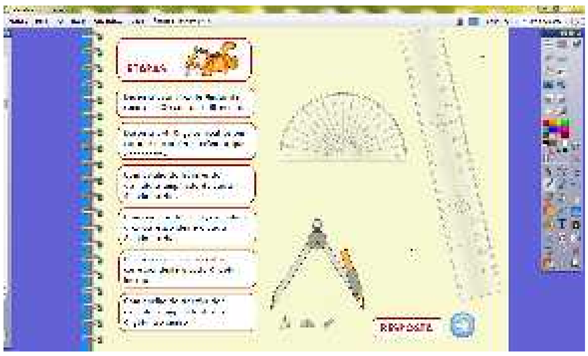
PROPRIEDADES DOS ÂNGULOS AO CENTRO E ÂNGULOS EXCÊNTRICOS NUMA CIRCUNFERÊNCIA EM QUADRO INTERATIVO





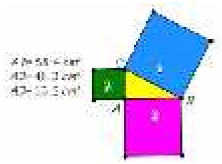
Esta atividade[24] propõe o estudo das propriedades dos ângulos numa circunferência em quadro interativo, para o 9.º ano.

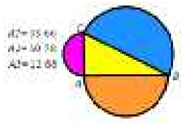
Usando as potencialidades do quadro interativo (compasso, régua, transferidor,...) e seguindo as etapas sugeridas ao longo do *Flipchart*, os alunos estabelecem conexões e propriedades. Neste *Flipchart* encontram-se enunciados e resolução de exercícios de exames nacionais, com o recurso a pequenos vídeos anexados e com construções feitas em *Geogebra*.



[24] Esta atividade integra um *flipchart* construído na ação de formação "*A utilização do quadro interativo no ensino/aprendizagem da Matemática*" referenciada no capítulo 5.

DEMONSTRAÇÃO GEOMÉTRICA DO TEOREMA DE PITÁGORAS COM A CALCULADORA GRÁFICA TI-NSPIRE CX[25]





[Anexo C13]

Esta atividade é uma extensão da atividade *Triângulos Retângulos e Pitágoras* para um ambiente de calculadora gráfica.

A atividade é apoiada numa ficha orientada onde se pretende que o aluno do 8.° ano, com acesso à calculadora gráfica *TI- Nspire CX*, efetue construções das imagens num ambiente de geometria em articulação com uma folha de Excel.

Com base em vários exemplos de triângulos retângulos, conjetura-se a propriedade que relaciona as áreas das figuras construídas sobre os seus lados – quadrados, triângulos e semicírculos.

Esta atividade esteve condicionada ao número de calculadoras gráficas disponíveis, pelo que realizou-se com um grupo restrito de alunos, em grupos de trabalho.

RESOLUÇÃO GRÁFICA DE SISTEMAS NO GSP[26]**. CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS.**

[Anexo C14]

Atividade de resolução gráfica de sistemas em ambiente de geometria dinâmico, para alunos do 9.° ano integra-se no estudo do tema *Sistemas de Equações.*

Partindo da resolução de problemas envolvendo sistemas, resolve-se por via analítica e gráfica (em papel), seguindo-se uma exploração da resolução gráfica de sistemas com recurso ao *Geometer's Sketchpad* disponível dos computadores do laboratório de Matemática.

[25] Atividade construída no curso de formação *Matemática em Ambiente TI-Nspire CX* referenciada no capítulo 5.

[26] Atividade construída na oficina de formação *A utilização das TIC nos processos de ensino aprendizagem - o Portefólio Digital* para a utilização da plataforma ELGG e MOODLE, referenciada no capítulo 5.

4.2. Aplicações do Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos

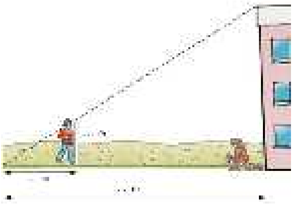
Em Geometria, os triângulos consideram-se figuras básicas mas a sua importância e utilização na resolução de problemas de geometria elementar é indiscutível. A resolução desses problemas passa, em muitos casos, pela noção de congruência ou semelhança de triângulos e o reconhecimento de propriedades importantes capazes de encontrar uma resposta adequada a cada contexto. As atividades de exterior foram implementadas com alunos do 3.º ciclo implementaram-se em diferentes contextos, diferentes turmas, diferentes anos letivos e em diferentes escolas. No entanto, sempre que possível, foram aplicadas ao mesmo grupo de alunos ao longo dos três anos do 3.ºciclo, quando a permanência da atividade docente numa escola assim o permitiu. Assim, sempre que possível, no 7.º ano, o grupo de trabalho realiza a atividade de "Tales", no 8.º ano a de "Euclides" e no 9.º ano a do "Quadrante".

No caso de não ser possível a realização faseada destas atividades, realizam-se todas no 9.º ano como forma de pôr à prova os conhecimentos do ciclo. Com o objetivo de calcularem alturas inacessíveis, com ajuda de espelhos e instrumentos de medição (fitas métricas e quadrantes), determina-se a altura de edifícios ou objetos usando diferentes matérias de cada ano letivo, articulando a *Semelhança de Triângulos* e a *Trigonometria*.

Para além das conexões matemáticas que este tipo de atividades proporciona, constitui um desafio para os alunos na abstração das tecnologias em jeito de regresso ao passado, pondo em prática métodos mais antigos para determinar alturas inacessíveis. As atividades desenvolveram-se em quatro fases: a primeira, leitura prévia, pelo grupo de trabalho, do guião até à aula da implementação; a segunda, a realização da atividade do exterior da sala de aula, de acordo com as orientações fornecidas; a terceira, elaboração do relatório orientado; e, a última, a quarta fase, a apresentação de resultados e conclusões do trabalho.

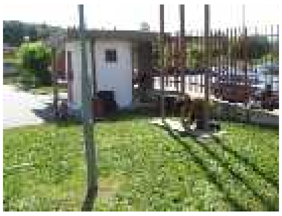
ATIVIDADE PRÁTICA I[27]

MÉTODO DE TALES



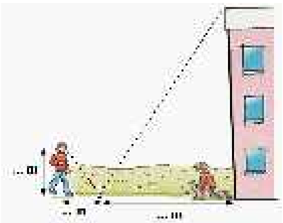
[Anexo C15]

Atividade realizada no 7.º ano ou 9.º ano, no tema *Semelhança de Triângulos*, articulando com os temas da *Proporcionalidade Direta* e *Medidas de tendência central* (média). Faz uma breve referência histórica a Tales de Mileto e ao seu método para determinar a altura da grande pirâmide. Pretende ser a aplicação do método de Tales, usando sombras e estacas, para determinação de alturas inacessíveis, partindo dos dados recolhidos da repetição da experiência pelos elementos do grupo. Elaborou-se o relatório da atividade e fez-se a comunicação oral dos resultados.

ATIVIDADE PRÁTICA II

MÉTODO DE EUCLIDES



[Anexo C16]

Atividade realizada no 8.º ou 9.º ano, no tema *Semelhança de Triângulos* em articulação com os temas *Proporcionalidade direta* e *Medidas de tendência central* (média).

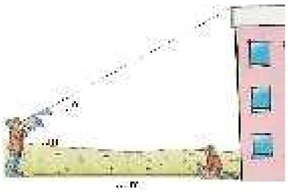
Apresenta uma descrição do método de Euclides para determinação de alturas inacessíveis, usando espelhos e fitas métricas. Aplicam-se noções da disciplina de Físico-Química - *num espelho a amplitude do ângulo de incidência é geometricamente igual à amplitude do ângulo de reflexão*. Fez-se a repetição da experiência pelos elementos do grupo e cálculo de uma média de resultados, com análise dos erros associados à experiência. Compararam-se valores conseguidos pelos dois métodos – Tales e Euclides, elaborou-se um relatório da atividade e fez-se a comunicação oral dos resultados.

[27] As atividades práticas foram implementadas no período do antigo programa da Matemática, no entanto, o seu enquadramento no novo PMMC seria exequível no domínio *Geometria e Medida* do 7.º ano, no subdomínio *Paralelismo, Congruência de Semelhança*, articulando a aplicação do teorema de Tales e a semelhança de triângulos.

ATIVIDADE PRÁTICA III

UTILIZAÇÃO DO QUADRANTE



[Anexo C17]

Atividade realizada no 9.º ano, no tema *Trigonometria do triângulo retângulo* em articulação com os temas *Semelhança de triângulos* e *Medidas de tendência central* (média).

Apresenta breve referência à utilidade dos instrumentos óticos modernos – *teodolito* e a utilização do quadrante pelos navegadores. Explica o funcionamento do quadrante. Sugere a repetição de medições pelos elementos do grupo para a determinação de alturas inacessíveis e propõe o cálculo da média de resultados.

Compararam-se os valores conseguidos pelos três métodos – Tales, Euclides e Quadrante, elaborando-se um relatório da atividade e a respetiva comunicação oral dos resultados.



4.3. Projetos e Concursos

A motivação dos alunos, em contexto escolar, está relacionada com o grau de envolvimento nas tarefas da aula e com o investimento na superação de desafios individuais ou de grupo. Muitas vezes os alunos surpreendem com a participação em projetos, atividades e/ou concursos que não passam, exclusivamente, por um trabalho de sala de aula. Nos *Princípios e Normas para Matemática Escolar* (2008) refere-se que "*o ensino e a aprendizagem da matemática deverão ter lugar em contextos abrangentes, que adoptem e suportem um ensino de matemática de elevada qualidade.*" (p.430).

É neste sentido que se pautou uma prática docente muito para além de portas e com espírito de abertura a novas ideias, perspetivando mentes mais abertas e questionáveis. Destacam-se alguns dos projetos e concursos que marcaram o percurso profissional.

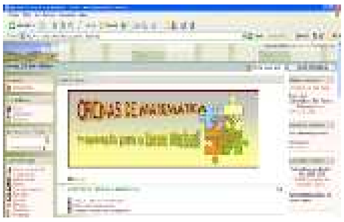
CLUBE DO EURO

Criei e dinamizei o *Clube do Euro* onde as atividades procuraram conhecer os costumes e tradições dos países da União Europeia e preparar a entrada da moeda única. Criaram-se ambientes de simulação da utilização do euro em contextos do dia-a-dia, criando na escola um dia do "euro", onde todas as transações monetárias foram efetuadas em moedas e notas simuladas.

Promovi uma ação de formação "*O euro*" no Centro Cultural de Vila do Bispo (Anexo D). No culminar deste projeto realizou-se uma visita ao Parlamento Europeu em Estrasburgo.

[Escola Básica 2,3 de Vila do Bispo, em 2001/2002]

OFICINAS DA MATEMÁTICA



[Anexo C18]

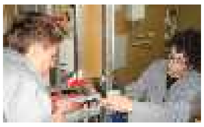
O Projeto *Oficinas da Matemática* destinou-se à preparação dos alunos do 9.º ano para o Exame Nacional de Matemática, integrando um espaço físico e um espaço virtual, numa plataforma *MOODLE*, do qual fui promotora em colaboração com outros docentes.

Este projeto procurou dar a conhecer informações úteis sobre o exame, esclarecer dúvidas, auxiliar no planeamento e organização do estudo e promover a resolução de problemas. Este projeto abarcou sessões presenciais de revisão de conteúdos e resolução de exercícios/problemas do projeto "1000 itens", do projeto PISA e de Exames Nacionais/Provas de Aferição.

No acompanhamento à distância a plataforma *MOODLE,* integrou um espaço de "*Ajuda para me preparar para o Exame Nacional de Matemática*", "*Problema da semana*", "*Plano de Estudo*" semanais, disponibilizou o material fornecido nas "*Sessões Práticas*" e ainda sugeriu um endereço eletrónico para envio de dúvidas a esclarecer pelos professores.

[Escola Secundária Padre Benjamim Salgado, em 2007/2008]

Cursos de Educação e Formação[28]



Projetos interdisciplinares

Enquanto professora da disciplina de Matemática Aplicada, do Curso de Educação e Formação – Tipo 3, *Eletricistas de Instalações*, do 9.º ano, promovi e coordenei projetos interdisciplinares, durante três anos letivos, 2008/2009 a 2010/2011, tendo em conta os objetivos do Projeto Educativo da escola. A implementação destes projetos, em parceria com outras disciplinas do curso, refletiu uma maior motivação e sucesso destes alunos, evitando a sua saída precoce do ensino.

Realçam-se alguns destes projetos:

- *Como elaborar um orçamento?* Estudo sobre a instalação elétrica numa vivenda familiar, partindo da análise de plantas reais. Integrou determinação de áreas e perímetros para a elaboração de orçamentos considerando o IVA e os possíveis descontos.

- *Iluminação de um arco natalício*. Mediante um conjunto de condições impostas pela câmara municipal, fez-se um estudo do número de metros de cabo elétrico necessário para eletrificar os arcos natalícios (com formas circulares), a quantidade de metal para construir os arcos de suporte e despesas com outra decoração.

- *A velocidade da Matemática numa aula de Educação Física*. Integrou o tratamento de dados recolhidos nas aulas de Educação Física, na prática das modalidades de Atletismo, Lançamento do Peso, Basquetebol e Futebol.

- *Faturas e tarifários da EDP*. Interpretação de tarifários e faturas da EDP e simulação de gastos de energia de alguns eletrodomésticos, tendo em consideração a sua potência, tempo de funcionamento e custo da energia mediante tarifários apresentados.

- *As embalagens de bolas de ténis, de pingue-pongue, de golfe e de bilhar*. Projetos de estudo de modelação matemática, integrados no módulo de *Geometria*, onde os alunos deveriam dar resposta a um problema de otimização para a criação de caixas para embalar bolas de ténis, de pingue-pongue, de golfe ou de bilhar, em grupos de 3, 4 ou 6 elementos. A decisão sobre o fabrico da caixa em forma de cilindro, de prisma quadrangular ou paralelepípedo, teve em consideração os custos associados com a quantidade de cartão (ou madeira) gasto na construção de cada modelo e o espaço desperdiçado com o armazenamento.

[Escola Secundária Padre Benjamim Salgado, de 2008/2009 a 2010/2011]

[28] Os Cursos de Educação e Formação são percursos formativos organizados numa sequência de etapas de formação (Tipo 3 - duração de um ano), integrando quatro componentes de formação: Sociocultural; Científica; Tecnológica; Prática. As componentes de formação tecnológica e prática têm grande carga horária semanal, diferente da proposta no ensino regular. Permite a obtenção de certificação escolar e profissional na área do curso.

PROJETO FUNDAÇÃO ÍLIDIO PINHO

[Anexo C20]

No ano letivo 2008/2009, pela primeira vez centrado na área da Matemática, decorreu a 7ª edição do Prémio Fundação Ilídio Pinho "*Ciência na Escola*", em parceria com dois grandes projetos nacionais do ME, o Plano da Matemática e o Plano Tecnológico da Educação.

Coordenei o projeto - *A utilização das TIC no ensino da Matemática - Uma janela para a Matemática* - que integrou 50 alunos do 7.º ano e vários docentes. Consistiu na construção de um DVD interativo com propostas de atividades práticas de aplicação da Matemática em contextos reais. Foi produzida uma aplicação - *Uma janela para a Matemática*, que teve como principal finalidade conseguir junto dos alunos um "olhar" a Matemática de forma diferente e direcionada para uma vertente mais prática e de modelação matemática.

O projeto integrou um livro digital (Figura 102) com uma cronologia de matemáticos que estivessem relacionados com a matéria do 7.º ano.

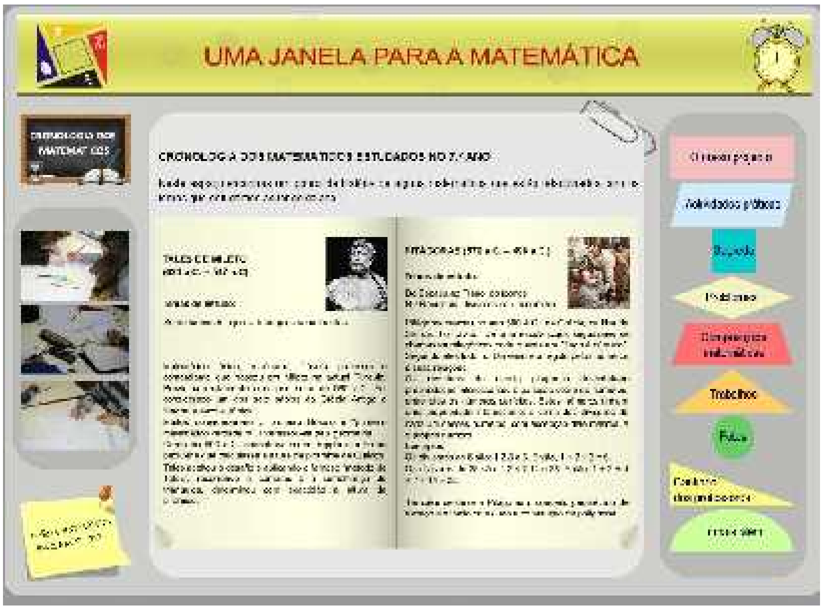


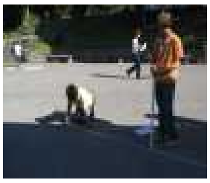
Figura 102: Página Web – "Uma janela para a Matemática"

Integrou ainda os trabalhos realizados pelos alunos, distribuídos por 13 atividades práticas. Integrou a redação de composições matemáticas, a divulgação do "*Segredo para resolver problemas*" invocando o método de *Pólya* e um espaço para "*Ir mais além*" com outras abordagens e curiosidades. No "*cantinho dos professores*" deu-se a conhecer o trabalho de pesquisa feito de apoio aos alunos e reservou-se o espaço para os trabalhos produzidos pelos alunos (Anexo C19).

PROJETO FUNDAÇÃO ÍLIDIO PINHO

(Continuação)

Figura 103: Ideias do projeto "Uma Janela para a Matemática"



Todas as Atividades Práticas foram realizadas nas aulas de Matemática e Estudo Acompanhado, recorrendo a instrumentos de medição, desenho e estética. Algumas recorreram a *software* informático e outras foram ainda desenvolvidas no exterior da sala de aula. Para todas essas atividades foram criados grupos de trabalho que se organizaram no sentido de divulgarem as suas propostas de resolução, com a criação de diapositivos ou pequenos filmes demonstrativos que integraram a página Web e o DVD.

O projeto teve uma utilidade futura, não só em contexto de sala de aula, com também na ajuda ao estudo autónomo da disciplina em casa e na biblioteca da escola. Serviu de orientação para trabalho dos alunos em aulas de apoio educativo e, para alunos com necessidades educativas especiais, tornou-se efetivamente uma janela diferente para a realização de tarefas específicas.

Este projeto passou a 1.ª fase do concurso, sendo um dos 125 projetos que recebeu financiamento para o seu desenvolvimento, muito embora não fosse o vencedor da edição. A fase final do projeto culminou com a apresentação de um painel na mostra de projetos de *Ciência e Tecnologia Nacional na Escola ComCiência - Encontros e Desafios*, realizada nos dias 29 e 30 de junho de 2009, no Europarque, em Santa Maria da Feira (Anexo C19).

[Escola Secundária Padre Benjamim Salgado, em 2008/2009]

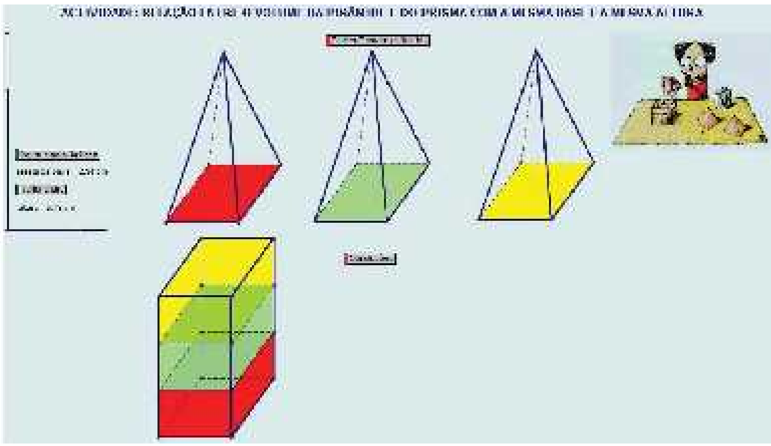
MODELO DINÂMICO EM GEOMETER'S SKETCHPAD

Relação entre o volume de uma pirâmide e um prisma com a mesma base e a mesma altura

[Anexo C21]

No âmbito de uma oficina de formação contínua de professores, desenvolvi e construi um modelo dinâmico para mostrar a relação entre volumes de pirâmides e prismas com a mesma base.

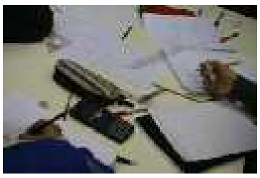
Este modelo foi construído com ajuda do software dinâmico *Geometer's Sketchpad*, sendo um modelo útil para as aulas do 7.º ano no estudo dos sólidos geométricos e determinação intuitiva das expressões dos volumes.



[Escola Secundária Padre Benjamim Salgado, em 2006/2007]

PROJETO PSEM

"Promoção do Sucesso Escolar na Matemática"

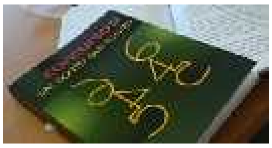


Este projeto surgiu da necessidade de melhorar os resultados escolares dos alunos da escola, procurando um desenvolvimento mais profundo das competências matemáticas. A sua dinamização passou pela planificação, produção, seleção de materiais e construção de instrumentos de avaliação em trabalho colaborativo. A cultura de trabalho de equipa esteve sempre presente, sendo esse o segredo para o sucesso deste projeto que envolveu alunos do 7.º ao 12.º anos.

Integrou um espaço de ajuda direta aos alunos no estudo da disciplina de Matemática, procurando por diferentes estratégias contribuir para o sucesso escolar. Decorreram aulas de apoio pedagógico específico para os alunos com mais dificuldades, sessões abertas a todos os alunos para esclarecimento de dúvidas e concretizaram-se momentos de preparação para as avaliações externas após o término das aulas, para alunos do 9.º, 11.º e 12.º anos.

[Escola Secundária Padre Benjamim Salgado, em 2011/2012]

CONCURSO
"UM CONTO QUE CONTAS 2013/2014"



[Anexo C23]

Conquista do 2.° lugar no concurso nacional "*Um conto que contas – 2013/14*", promovido pela Sociedade Portuguesa de Matemática em parceria com a Universidade de Évora e Universidade dos Açores, em cuja participação fui professora responsável pela escola.

O concurso desafiava à escrita e ilustração de um conto que envolvesse conteúdos matemáticos tendo como principais objetivos fomentar hábitos de leitura e de escrita nos alunos, provendo uma articulação de áreas do saber, estimulando a imaginação. Os temas propostos tiveram como pano de fundo as grandes questões relacionadas com o projeto mundial Matemática do Planeta Terra 2013.

A equipa de alunos do 9.° ano, na Escola Básica e Secundária de Infias, criou e ilustrou o conto *Distúrbios em Ecomat* [29] que mereceu a sua publicação em livro.

[Escola Básica e Secundária de Infias - Vizela, 2013/2014]

PROJETO
SUDOKUMANIA

A criação e dinamização deste projeto surgiu da necessidade de dar resposta a um absentismo de alguns alunos do 9.° ano (que integravam as minhas turmas), pelo estudo da disciplina de Matemática e pela escola em geral. Reconhecidos os percursos de insucesso contínuo, os registos de indisciplina frequentes e a aproximação dos 18 anos de idade, permitiu a este projeto fomentar uma nova atitude e postura face à escola e à disciplina de Matemática.

O projeto passou por diferentes fases: a construção de tabuleiros de sudoku (geométricos e numéricos); a aplicação dos conhecimentos práticos da Geometria, no estudo da circunferência; a construção de polígonos regulares inscritos em circunferências. A aprendizagem das regras do jogo e a sua divulgação junto dos mais jovens foram metas alcançadas.

[Escola Básica e Secundária de Infias - Vizela, 2013/2014]

[29] A história relata a disputa territorial de *Ecomat* entre dois irmãos (Número 1 e Octógono I), onde se realça as incompatibilidades entre o poder político e económico face à urgente preservação dos recursos naturais. O enredo da história conta ainda com as cenas mais divertidas dos planos de fuga do *Número de Ouro* e a preparação de uma revolução capaz de enaltecer o lema de *Ecomat* – "*a natureza oferece o básico para viver pelo preço de a preservarmos*".

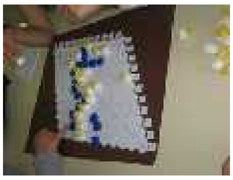
PROJETO
TARDES DA MATEMÁTICA

A dinamização do projeto *Tardes da Matemática*, consistiu num espaço semanal de orientação e preparação dos alunos para o estudo da disciplina de Matemática e Provas Finais do 9.° ano.

Os alunos trabalharam em pequenos grupos tendo tido acesso a materiais específicos para revisão de conteúdos e a resolução de Exames Nacionais, Provas de Aferição e Provas Finais de anos anteriores.

[Escola Básica e Secundária de Infias - Vizela, 2013/2014]

PROJETO
HEX



A criação e coordenação do *Projeto HEX*, com alunos do 9.° ano, visou a aprendizagem de um novo jogo de estratégia, promovendo um espaço de convívio e partilha de estratégias. Depois de conhecidas as regras do jogo, implementou-se a fase de construção dos tabuleiros, usando material reciclado no âmbito do *projeto Eco-Escolas*. Integrou mais de uma centena de alunos do 9.° ano e procurou ser também um espaço de treino e aprendizagem aberto a toda a comunidade.

[Escola Básica e Secundária de Infias - Vizela, 2013/2014]

4.4. Competições Matemáticas

FASE DISTRITAL
DO JOGO DO 24

Participação na mesa do Júri na final distrital da *5.ª Edição do Campeonato Jogo do 24*, que decorreu a 26 de Março de 2002, em Rio Maior. Estiveram presentes 76 escolas do distrito, 38 do 2.° ciclo e 38 do 3.° ciclo. Este jogo põe à prova a capacidade de cálculo mental dos alunos e as habilidades na definição de estratégias de manipulação dos números e operações, de forma a atingir um total igual a 24. Este concurso foi promovido pela marca "*Cheetos*" com o apoio do Departamento da Educação Básica do Ministério da Educação, tendo como propósito elevar a motivação e incentivar à aprendizagem da Matemática.

[Escola EB Fernando Casimiro da Silva, em Rio Maior, 2001/2002]

OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

Integrei as equipas de preparação dos alunos e correção das provas da *XX Olimpíadas Portuguesas de Matemática* para o 3.º ciclo e da *XXIV Olimpíadas Portuguesas de Matemática*, promovidas pelas SPM. Na XXIV Olimpíadas preparei alunos para as Pré-Olimpíadas e categoria A. A participação nesta competição matemática foi uma experiência marcante tanto para alunos como para professores, traduzindo um trabalho de pares exigente e desafiante, onde os resultados trazem benefícios a longo prazo, enaltecendo os valores da competência matemática.

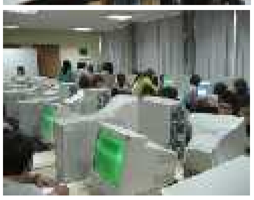
[Escola EB Fernando Casimiro da Silva, em Rio Maior 2001/2002 e Escola Secundária Padre Benjamim Salgado 2006/2007]

CANGURU MATEMÁTICO SEM FRONTEIRAS 2013

Promovi a participação da escola na competição *Canguru Matemático Sem Fronteiras 2013*, com a preparação dos alunos a integrar as categorias Benjamim (7.º e 8.º anos de escolaridade) e Cadete (9.º ano de escolaridade). O concurso consistiu numa única prova, um questionário de escolha múltipla, com questões de grau dificuldade crescente, colocando à prova, mais do que os conteúdos adquiridos, as competências e destrezas dos alunos na determinação de estratégias eficazes para os desafios apresentados.

[Escola Secundária Padre Benjamim Salgado, em 2012/2013]

CONCURSO EQUAMAT



[Anexo C24]

No âmbito deste concurso integrei a equipa de seleção e treino dos alunos para o concurso *EquaMat* promovido pela Universidade de Aveiro, dinamizando várias sessões de preparação para esta competição matemática. A seleção fez-se por turma, por escalões e por escola, apurando-se as melhores equipas de entre alunos do 3.º ciclo para a competição nacional realizada na Universidade de Aveiro.

[Escola Secundária Padre Benjamim Salgado, de 2005/2006 a 2012/2013]

CAMPEONATO NACIONAL DE JOGOS MATEMÁTICOS

[Anexo C24]

Integrei a equipa de treinos de preparação dos alunos para os jogos de estratégia - *Ouri, Hex e Rastros* – que integram o Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, para alunos do 3.º ciclo.

Os tabuleiros do jogo do Ouri foram construídos, em cartolina, nas aulas de Matemática (Anexo C22) pelos alunos do 8.º ano, tendo sido usados na fase de seleção, a nível de escola. Os alunos conheceram as regras destes jogos e efetuaram treinos nas aulas de Matemática e em aulas de parceria com outra docente presente na sala, no âmbito da área de Estudo Acompanhado.

[Escola Secundária Padre Benjamim Salgado 2009/2010]

4.5. Outras Atividades

Consciente da ideia de que a matemática "*é um campo de estudo integrado*" (NCTM, 2008), divulgam-se ainda algumas das atividades mais relevantes que integraram o Plano Anual de Atividades de algumas escolas do meu percurso escolar e que contaram com o meu envolvimento de mais docentes do grupo disciplinar de Matemática.

Exposição de Matemática

A dinamização desta atividade passou pela montagem de uma mega exposição, repartida por quatro salas, tratando-se de um espaço de descoberta de matemáticos, de enigmas, de desafios estratégicos, de aprendizagem de jogos de tabuleiro e descoberta de algumas conexões matemáticas através de experiências práticas e simulações em computador.

[Escola Básica 2,3 de Peniche, em 2000/2001]

Concurso NATALMAT

Esta atividade teve como principal objetivo a construção de árvores de natal com enfeites geométricos, em especial sólidos geométricos. Os alunos do 7.º ano, em grupos de trabalho, nas aulas de Matemática, planificaram e construíram sólidos geométricos que, depois de combinados com a criatividade e originalidade, resultaram em mais de 20 árvores de natal originais.

[Escola Secundária Padre Benjamim Salgado, em 2005/2006]

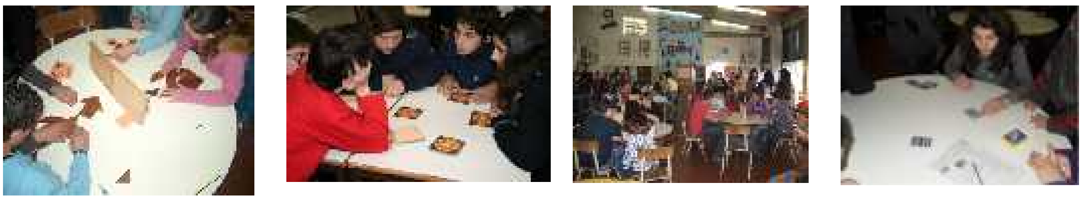
Concurso FOTOMAT

O concurso FOTOMAT, subordinado ao tema "*A Matemática e a arte*", realizou-se em três anos letivos, onde assumi a sua coordenação. Iniciou com recolha e seleção de fotos em formato digital, culminando numa exposição das melhores fotos impressas em papel fotografia. As dezenas de fotos a concurso revelaram originalidade, sentido de estética e reconhecimento da Matemática no quotidiano, sobressaindo iniciativa e a criatividade dos alunos das camadas mais jovens.

[Escola Secundária Padre Benjamim Salgado, de 2008/2009 a 2010/2011]

Escalada da Matemática

A dinamização desta atividade passou pela realização de um conjunto de jogos e atividades matemáticas, destacando-se os jogos de estratégia (*Tangram*, *Polydrons*) e de cálculo mental (*Jogo 24*, *SuperTmatik*, *Sudoku*). Englobou todos os anos letivos, contando com mais de 200 alunos participantes, distribuídos por equipas do 7.º ao 9.ºanos e desenvolve-se por eliminatórias em dois dias. A adesão dos alunos a esta atividade superou sempre as expetativas da equipa organizadora. Constitui um espaço de competição matemática saudável, promovendo o espírito de equipa e a criatividade das estratégias para vencer as diferentes fases.



[Escola Secundária Padre Benjamim Salgado, de 2009/2010 a 2012/2013 - Anexo C24]

Capítulo 5. Formação e Aprendizagem

A formação contínua de professores encontra-se consagrada na Lei de Bases do Sistema Educativo (Lei n.º46/86), reconhecendo-a como um direito e um dever dos profissionais da educação, para além de ser um requisito necessário à progressão na carreira.

Apontam-se como principais objetivos da formação contínua de professores:

> a) A melhoria da qualidade do ensino, através da permanente actualização e aprofundamento de conhecimentos, nas vertentes teórica e prática;
>
> b) O aperfeiçoamento da competência profissional e pedagógica dos docentes nos vários domínios da sua actividade;
>
> c) O incentivo à autoformação, à prática de investigação e à inovação educacional;
>
> d) A viabilização da reconversão profissional, permitindo uma maior mobilidade entre os diversos níveis e graus de ensino e grupos de docência.
>
> (Decreto-Lei n.º 249/92, Cap.I, artigo 3.º de 9 de novembro)

Numa sociedade marcada pela constante evolução tecnológica, exige-se ao professor um acompanhamento atento e cuidado, para dar resposta aos desafios que esta nova era impõe.

É reconhecido o impacto da utilização de ferramentas TIC no ensino da Matemática, favorecendo atitudes mais positivas da disciplina, criando uma visão mais completa e real do poder interventivo da Matemática na sociedade. Ponte (1995) defende que o uso das calculadoras e computadores permitem deixar para segundo plano o cálculo, manipulação simbólica e simples compreensão de conceitos, colocando em destaque o desenvolvimento de capacidades de ordem superior. A evolução tecnológica põe à disposição do professor novas ferramentas cujos programas oficiais fazem algumas referências, cabendo ao professor tirar ou não partido delas nas aulas de Matemática. Nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* enumera-se o *Princípio da Tecnologia*, como sendo um de seis princípios que "*descrevem características de uma educação matemática de elevada qualidade*" (in prefácio, p. vii). Este documento deixa claro, que as potencialidades das tecnologias eletrónicas, com o seu impacto gráfico e facilidade em criar exemplos sob múltiplas perspetivas, influencia "*o modo como a matemática é ensinada e aprendida.*" (NCTM, 2008, p. 28)

Paralelamente às mudanças dos currículos, à definição de novos programas para a Matemática e à nova dinâmica de uma sociedade de informação, assiste-se, nos últimos anos, à implementação do plano tecnológico nas nossas escolas e criação do Portal das Escolas[30], sendo alguns dos investimentos do ME.

Neste cenário e enquanto docente da disciplina de Matemática, procurei investir na formação na área da Matemática e das Tecnologias de Informação e Comunicação.

Elencam-se as ações de formação e eventos frequentados realçando o contributo direto na prática letiva e na aprendizagem da atividade docente (Anexo D).

AVALIAÇÃO DAS APRENDIZAGENS – FORMAÇÃO À DISTÂNCIA
[50 horas, 31 de maio a 15 de julho de 2004]

Nesta oficina de formação desenvolvi competências no âmbito da correção de Provas de Aferição de Matemática (de 2003), através da análise do tipo de respostas, aplicando os critérios gerais e específicos de correção e orientações do GAVE.

REORGANIZAÇÃO CURRICULAR DO ENSINO BÁSICO: que desafios para a mudança da escola?
[27 de novembro de 2003]

Nesta formação procurou-se conhecer legislação e documentação de referência no âmbito da reorganização curricular do ensino básico. Conheceram-se as principais diretrizes e prioridades, debateram estratégias e ponderaram-se caminhos a seguir, numa perspetiva de mudança.

PROJETO CURRICULAR DE TURMA
[15 horas, 27 de janeiro a 25 de maio de 2004]

Conhecer legislação e orientações sobre o Projeto Curricular de Turma (PCT) permitiu, enquanto diretora de turma, aprender a construir um PCT, tendo em vista as especificidades dos elementos que integram uma turma, bem como os objetivos gerais e específicos a alcançar não esquecendo as orientações do Projeto Educativo de uma escola. Entende-se que um PCT é um projeto em constante atualização e reformulação.

[30] Portal das escolas em www.portaldasescolas.pt. é um sítio de referência das escolas sendo a maior rede colaborativa *online* de educação em Portugal, com acesso a recursos educativos digitais de todas as áreas curriculares.

A UTILIZAÇÃO DAS TIC NOS PROCESSOS DE ENSINO/APRENDIZAGEM: O PORTEFÓLIO DIGITAL
[50 horas, 3 de setembro a 3 de novembro de 2007]

A participação nesta Oficina de Formação permitiu conhecer a Plataforma ELGG e pensar no portefólio digital como outra “ferramenta” de trabalho, apostando na sua aplicabilidade nas aulas de Estudo Acompanhado e Matemática do 9.ºano, numa perspetiva de reformulação/continuidade do trabalho já iniciado com os alunos no 8.º ano, na constituição de um portefólio – até à altura em suporte papel.

Esta formação aconteceu numa fase de implementação do Plano de Ação da Matemática, onde se impunha uma mudança de metodologias na sala de aula e um trabalho colaborativo entre professores. Trabalhar com a Plataforma ELGG, proporcionou grande facilidade de comunicação e partilha de materiais, acessíveis a todos, dentro e fora da sala de aula, em tempo contínuo, contribuindo para uma nova forma de aprendizagem. Conhecendo as características desta plataforma, alargou-se a curiosidade pessoal para conhecer outras, por exemplo, a plataforma *MOODLE* que entretanto veio a ser utilizada na criação do projeto *Oficinas da Matemática* já referido neste relatório.

CERTIFICAÇÃO EM COMPETÊNCIAS DIGITAIS
[2011]

Certificação por reconhecimento de percurso formativo.
Obtenção da Certificação em Competências Digitais no âmbito do Sistema de Formação e de Certificação em Competências TIC para docentes.

> “certifica os conhecimentos adquiridos pelo docente que lhe permitem uma utilização instrumental das TIC como ferramentas funcionais no contexto profissional.”
>
> (Portaria n.º 731/2009)

GEOMETER´S SKETCHPAD – A GEOMETRIA EM MOVIMENTO
[50 horas, 11 de setembro a 28 de outubro de 2006]

Nesta Oficina de Formação foram exploradas as potencialidades de um software de geometria dinâmica. Para além de auxiliar na preparação de materiais para as aulas, contribuiu para clarificar ideias matemáticas no âmbito da geometria, colocando à prova o poder gráfico desta tecnologia, proporcionando imagens visuais, aos alunos, de inúmeros contextos matemáticos. Esta formação permitiu rentabilizar um conjunto de novos recursos que a Escola Secundária Padre Benjamim Salgado disponibilizava e foi uma mais-valia para o estudo do tema *Geometria* em vários níveis de escolaridade.

ESCOLA VIRTUAL NA SALA DE AULA
[24 de fevereiro e 17 de novembro de 2010]

Esta formação serviu para dar a conhecer as potencialidades desta ferramenta educativa - plataforma da Escola Virtual da Porto Editora. Esta plataforma dispõe de um conjunto de materiais de apoio ao professor e ao estudo individual do aluno em casa. A elaboração de avaliações diagnósticas *on-line*, o acesso a manuais digitais, a visualização de pequenos filmes informativos e demonstrativos, o acesso a vídeos com recurso a software dinâmico e mesmo fichas modelo de avaliação formativa, permitiram pensar em planificações de aulas diferentes, sobressaindo a modelação matemática valorizando a discussão e argumentação na resolução de problemas ou tarefas apresentadas.

A UTILIZAÇÃO DO QUADRO INTERATIVO NO ENSINO/APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA
[25 horas, de 2 de dezembro de 2009 a 27 de fevereiro de 2010]

O contributo desta ação de formação para o desenvolvimento da prática letiva foi marcante, já que a sua utilização diária nas aulas passou a ser uma realidade privilegiada na ESPBS. A rentabilização das ferramentas matemáticas disponibilizadas no quadro interativo no estudo da Geometria, com recurso paralelo ao software específico estudado na formação - *Geogebra*, contribuiu para uma melhor visualização do contexto das diversas situações em estudo neste tema e auxiliou nas construções geométricas e suas conjeturas e propriedades.

DA GESTÃO DO CURRÍCULO ÀS APRENDIZAGENS COLABORATIVAS

[15 horas, de 20 de abril a 10 de setembro de 2012]

Esta formação permitiu a reflexão, partilha e conhecimento de novas metodologias num crescente entendimento do verdadeiro significado da "Aprendizagem Colaborativa". O trabalho apresentado em plenário resultou de uma exploração de Métodos Informais de Aprendizagem Cooperativa - Senhas para Falar, Mesa Redonda entre outros - onde se procurou evidenciar um conjunto de recursos a utilizar para favorecer uma aprendizagem colaborativa, tendo por base a análise de cenários possíveis em situação de sala de aula.

A FOLHA DE CÁLCULO AO SERVIÇO DA ATIVIDADE DOCENTE

[50 horas, de 25 de janeiro a 6 de novembro de 2012]

Esta oficina de formação proporcionou um conhecimento mais avançado da ferramenta de folha de cálculo – *Microsoft Excel*, desenvolvendo competências a vários níveis: utilização de fórmulas e funções para organizar a informação recolhida; tratamento estético dos dados recolhidos; construção de gráficos; formatações condicionais, filtros e validação de dados. Esta formação contribuiu para melhorar as grelhas de avaliação utilizadas durante o ano letivo e a facilitou o tratamento de dados mais automatizado. Foi possível ainda evoluir na aplicação de algumas potencialidades do Excel a conteúdos lecionados na disciplina de Matemática.

MATEMÁTICA EM AMBIENTE TI-NSPIRE I

[25 horas, de 14 de dezembro de 2013 a 15 de fevereiro de 2014]

Com a frequência deste curso de formação foi possível uma atualização no âmbito das tecnologias, nomeadamente na utilização de tecnologia gráfica *TI-Nspire*, pelas suas inúmeras potencialidades, em especial na área da geometria e funções. Esta formação conheceu duas fases distintas mas complementares: a primeira, a aquisição de conhecimentos mais básicos da calculadora gráfica TI-Nspire, explorando as novas potencialidades e suas aplicações em contextos de modelação matemática; a segunda, a estruturação de uma atividade prática a ser implementada em contexto de sala de aula com alunos. A tarefa desenvolvida dirigiu-se a alunos do 8.º ano, onde a utilização da calculadora gráfica foi uma estreia, por isso, motivante e desafiante (Anexo C13).

METAS CURRICULARES DO ENSINO BÁSICO MATEMÁTICA 3.º CICLO
[17 de setembro de 2014]

A participação na sessão de replicação da formação das Metas Curriculares do Ensino Básico - Matemática 3.º ciclo, na Escola Básica e Secundária de Infias, permitiu conhecer as novas exigências do ensino da matemática, tendo em conta domínios, descritores e níveis de desempenho por áreas de conhecimento. O novo programa da matemática e metas curriculares exige uma maior preparação do professor e o conhecimento mais profundo da nova abordagem do estudo da geometria no 3.º ciclo.

Outros eventos se destacam pela influência que exerceram nas mudanças e reflexões da prática pedagógica ao longo dos anos da atividade docente:

ENCONTROS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA
(PROFMAT)
[1998, 1999, 2002, 2003]

A participação no ProfMat98, em Guimarães, no ProfMat99, em Portimão, no ProfMat2002, em Viseu, e no ProfMat2003, em Santarém, acumulou um conjunto de experiências positivas aliando a investigação à prática letiva. A presença nas sessões práticas, nos plenários, nos seminários e nas demais atividades promoveu a reflexão e o debate de ideias e experiências, procurando ultrapassar dificuldades e dúvidas comuns a muitos docentes da disciplina.

O *GEOMETER´S SKETCHPAD* NA SALA DE AULA
[1999]

Nesta sessão prática, promovida pelo Núcleo da Associação de Professores de Matemática de Braga, no âmbito dos "*Fins de tarde no laboratório*", realizou-se o primeiro contacto com uma ferramenta tecnológica de geometria que só se veio a refletir na prática letiva anos mais tarde.

ESTRATÉGIAS DIVERSIFICADAS NA SALA DE AULA
[2000]

Ação de formação realizada na Escola Básica 2,3 D. Luís de Ataíde, em Peniche, procurou ser um espaço de partilha e reflexão na tomada de decisões em contextos de sala de aula.

1.º INTER-ESCOLAS
[2000]

Nesta ação de formação, promovida pela Coordenação Regional do Algarve, no âmbito da formação prevista para a Rede Nacional de Escolas Promotoras de Saúde – RNEPS, no Centro Cultural de Lagos, levantaram-se importantes questões no âmbito da saúde escolar e na sua abordagem transversal nas disciplinas curriculares.

ENCONTRO DE TERRITÓRIOS EDUCATIVOS DE INTERVENÇÃO PRIORITÁRIA (TEIP) – ARTICULAÇÃO CURRICULAR
[2000]

A participação nesta sessão de formação, na Escola Básica do 2.º e 3.º ciclos D. Luís de Ataíde, em Peniche, serviu para conhecer experiências de outras escolas no âmbito das escolas pertencentes a TEIP[31], promovendo a discussão de estratégias de articulação curricular a implementar, bem como o debate e reflexão de questões relacionadas com a indisciplina na sala de aula.

REORGANIZAÇÃO CURRICULAR DO ENSINO BÁSICO «GESTÃO FLEXÍVEL DO CURRÍCULO»
[2001]

A participação nesta sessão de trabalhos, realizada no Centro Cultural de Vila do Bispo, questionou aspetos a considerar na gestão flexível do currículo. A exposição de diferentes experiências no âmbito da temática conduziram a exemplos de relevo a refletir em futuras práticas pedagógicas.

MANUAIS ESCOLARES E NOVOS PROJETOS DE EDUCAÇÃO ESCOLAR
[ao longo da atividade docente]

No âmbito da escolha dos novos manuais registaram-se várias participações em encontros promovidos pelas editoras, ao longo da atividade docente, permitindo conhecer as várias estratégias de implementação de metodologias e orientações curriculares, os Novos Programas de Matemática e outros projetos, para além de se conhecer as novas tendências da ação do professor na sala de aula.

[31] TEIP (Territórios Educativos de Intervenção Prioritária) - escolas com programas escolares específicos como uma medida de promoção do sucesso educativo, de combate da indisciplina e do abandono escolar.

Capítulo 6. Reflexão e conclusão

Um ensino efetivo da Matemática pressupõe observar os alunos, escutar atentamente as suas ideias e argumentos, definir objetivos matemáticos e perante a informação registada, tomar decisões. Uma visão da Matemática escolar requer, sem dúvida, reflexões sobre as práticas pedagógicas e aperfeiçoamentos constantes. A memorização de factos, procedimentos e algoritmos, por si só, não traz conhecimentos duradouros. É importante que a Matemática se aprenda com compreensão para desenvolver a autonomia e espírito crítico sobre as nossas intenções.

Ao longo dos anos assistiu-se à introdução da tecnologia no ensino da Matemática, primeiro com as calculadoras, depois os computadores, em seguida, o apelo à utilização de software específico, a utilização de calculadoras gráficas, a familiarização com o quadro interativo, para além de outros materiais didáticos. São inquestionáveis as mais-valias destas ferramentas numa aprendizagem matemática (provas deste facto são dadas neste relatório), no entanto, sob a influência de um certo facilitismo, vê-se a tecnologia, em muitos alunos, a substituir a compreensão e a intuição elementar o que, a longo prazo, pode trazer graves consequências numa aprendizagem matemática.

O significado de competência matemática é entendido de diferentes maneiras, tendo em consideração as finalidades do ensino da Matemática que se evidenciaram nas sociedades contemporâneas, influenciadas pelos progressos da ciência e da tecnologia. O ensino da Matemática mudou profundamente. Uma nova visão da Matemática próxima da vida quotidiana e mais tecnológica deixou de parte a ideia da Matemática como um conjunto infindável de exercícios para resolver, onde a mecanização de procedimentos que conduziam, com alguma satisfação, aos resultados a esperar.

No combate ao insucesso da disciplina há ainda muito para fazer. As dificuldades dos alunos em vencer obstáculos e os "becos sem saída" na resolução de inúmeras situações matemáticas são evidentes, sobressaindo a facilidade com que se assiste à sua desistência, mesmo com planos de trabalho motivadores, úteis e práticos. A falta de uma verdadeira coragem de tentar soluções alternativas constitui, por si só, um obstáculo pessoal ao alcance da verdadeira competência matemática. A motivação escolar continua a ser um ponto fundamental para sucesso na disciplina de Matemática.

Apontam-se diversos desafios que marcaram positivamente este percurso e servem de referência à projeção de outros. Todos os projetos em que me envolvi foram momentos de dedicação que, como já referi neste relatório, vão para além do que um espaço físico e um horário escolar.

Julga-se, numa opinião pessoal, importante um trabalho mais reflexivo dos resultados alcançados com cada reformulação dos programas da disciplina, cuja divulgação não parece chegar às escolas. É de louvar o esforço e resultados conseguidos com a implementação do Plano da Ação para Matemática que, muitas escolas, souberam tirar proveito das suas mais-valias, transparecendo um ensino mais próximo do aluno, menos apressado no cumprimento do programa, mais colaborativo entre docentes e, consequentemente, com melhores resultados na aprendizagem dos alunos.

A instabilidade dos professores nos quadros das escolas, nem sempre cria trabalho de continuidade. A permanência na mesma escola durante oito anos consecutivos trouxe-me a força de crescer profissionalmente e um envolvimento em atividades e projetos que foram amadurecendo ao longo dos anos.

À margem de alguns constrangimentos inerentes à profissão, faço um balanço positivo da minha atividade profissional, consciente de que contribui para a valorização e dignificação da escola pública, promovendo ambientes de trabalho exigentes e de grande compromisso com sucesso educativo dos alunos. Hoje, de facto, espera-se muito do professor.

Este relatório permitiu uma atualização de conceitos científicos para o ensino de um tema de Geometria, o que reverterá num contributo importante num futuro próximo. A necessidade da utilização do rigor científico na escrita deste documento contribuiu para a formação enquanto profissional do ensino. As construções geométricas apresentadas nos softwares *Geogebra* e *Geometer's Sketchpad*, colocaram à prova os conhecimentos na área da Geometria e no domínio destas ferramentas matemáticas.

TRABALHO FUTURO

A escrita deste relatório conduziu a reflexões sobre um trabalho de dezassete anos que, no seu todo, ainda é uma pequena parte de um longo caminho a percorrer. Vejo a Matemática como resolução de problemas, a Matemática como comunicação, a Matemática como raciocínio, a Matemática como experiencia e conexões, a Matemática em ambientes de tecnologias. Por isso, como docente, procurarei estar atenta a todas as facetas desta ciência.

Neste momento, inicio uma nova fase numa nova escola, mais pequena mas que ainda terá muito para crescer. A criação de um clube de preparação dos alunos para as diversas competições matemáticas, que decorrem anualmente no país, é um dos projetos em estudo e que já está a dar os primeiros passos, com um grupo de alunos. O incentivo à criação de uma cultura de escola inovadora e empreendedora, na participação em concursos e projetos, já foi iniciado no ano letivo anterior e com bons resultados.

Numa perspetiva da formação contínua de professores, pensando na preparação ao nível dos conhecimentos científicos, seria de equacionar um trabalho mais próximo entre universidades e escolas do ensino básico e secundário.

Referências

CAPÍTULO 2

Abrantes, P., Ponte, J. P., Fonseca, H., e Brunheira, L. (Eds.). (1999). *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM e Projeto MPT.

Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I., (1999). *A Matemática na Educação Básica*, Coleção Reflexão Participada sobre os currículos do Ensino Básico, Ministério da Educação, Departamento na Educação Básica, Lisboa.

Afonso, N., et al (coord) (2010) *Projeto "Metas de Aprendizagem".* Lisboa: Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

Albergaria, I. S., e Ponte, J. P. (2008). *Cálculo mental e calculadora*. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Eds.), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 98-109). Lisboa: SEM-SPCE.

APM – Associação de Professores de Matemática, *Grupo de Trabalho sobre Investigação em Educação Matemática*. http://www.apm.pt/apm/gip.htm, consultado em 02.07.2014.

APM – Associação de Professores de Matemática (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. (1ª ed.). Lisboa: APM.

APM – Associação de Professores de Matemática (1998). *Matemática 2001, diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.

APM– Associação de Professores de Matemática (2012). *Posição da Associação de Professores de Matemática sobre os resultados do estudo TIMSS 2011.* http://www.apm.pt/files/_Parecer_APM_TIMSS_20Dez2012_50d2f715f09d2.pdf consultado 22.06.2014.

Assude, T. (1990) *As Calculadoras no Ensino da Matemática: Alguns elementos de reflexão*. Folha Informativa do Projeto "Computação no Ensino da Matemática", Nónius n.º25, Junho 1990.

Boyer, C. B. (1996). *História da Matemática*, (2ª edição), Editora Edgard Blucher Ltda, Brasil.

Breda, A., Serrazina, L. et al (2011) *Geometria e Medida no Ensino Básico*, DGIDC - Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, Mistério da Educação.

Campos, L. (1994). *O Computador na Escola*. Lisboa: Editorial Presença.

Carvalho, R. de, (1986). *História do Ensino em Portugal*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

DGE – Direção Geral da Educação (2014). *Programa e Metas Curriculares*, http://dge.mec.pt/metascurriculares/?s=directorio&pid=1, consultada em 17.07.2014.

DGEBS-ME – Direção Geral do Ensino Básico e Secundário do Ministério da Educação (1991a, b). *Organização curricular e programas — Ensino Básico, 2º ciclo, 3ºciclo*. (Vol. I). Lisboa: ME.

DGEBS-ME - Direção Geral do Ensino Básico e Secundário do Ministério da Educação (1991d, e). *Programa de Matemática — Ensino Básico, 2º ciclo: plano de organização do ensino-aprendizagem* (Vol. II). Lisboa: ME.

DGIDC – Direção Geral de Inovação e do Desenvolvimento Curricular, *Apresentação - As Metas no Ensino Básico*. http://metasdeaprendizagem.dge.mec.pt/ensino-basico/apresentacao/ consultado 17 de julho 2014.

DGIDC – Direção Geral de Inovação e do Desenvolvimento Curricular (2008) *Novo Programa de Matemática - 1.º, 2.º e 3.º Ciclos. Percursos temáticos de aprendizagem.* Lisboa. http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_npmeb/Percursos_actualizado.pdf consultado em 22.06.2014.

DGIDC – Direção Geral de Inovação e do Desenvolvimento Curricular (2007) *Programa de Matemática do ensino básico.* Lisboa. http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinobasico/index.php?s=directorio&pid=71 consultado em 22.05.2014.

Ferreira, Carlos Pinto (coord.) (2007), *PISA 2006 – Competências Científicas dos Alunos Portugueses*, Lisboa: GAVE.

Gomes, A., e Ralha, E. (2005). *O conceito de ângulo: experiências e reflexões sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1.º ciclo*. Quadrante, 14(1), 109-131.

Gordo, M. F. (1994). *A visualização espacial e aprendizagem da Matemática: Um estudo no 1.º ciclo do Ensino Básico.* Quadrante, 3(1) 157-184.

Guita, Cláudia. (2013). Tese de Mestrado em Supervisão pedagógica: *Implementação do Novo Programa de Matemática: Um estudo numa turma do 6.º ano do ensino básico*. Universidade Aberta: Departamento de Educação e Ensino à Distância.

Leite, C., Gomes, L. e Fernandes, P. (2001). *Projetos Curriculares de escola e de uma turma – conceber, gerir e avaliar*. Porto: Edições Asa.

Loureiro, C. (2004). *Que formação matemática para os professores do 1.º ciclo e para os educadores de infância*. In A. Borralho, C. Monteiro, & R. Espadeiro (Org.), *A matemática na formação do professor* (pp. 273-275). Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Loureiro, C. (2009). *Geometria no novo programa de matemática no ensino básico*. Educação e Matemática, 105, 61-66.

Matos, J. M., (1989). *Cronologia recente do ensino da Matemática*, Lisboa, APM.

ME – Ministério da Educação (1991). *Organização Curricular e Programas – Vol. I – Ensino Básico – 3º Ciclo.* Lisboa: Direção Geral dos Ensinos Básico e Secundário.

ME – Ministério da Educação (2010). *Resultados dos alunos portugueses melhoram no PISA 2009*. Gabinete de Comunicação. Lisboa. http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=346&fileName=nota_de_imprensa_PISA2009.pdf consultado em 22.07.2014.

ME – Ministério da Educação, (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais, DEB*, Lisboa.

MEC – Ministério da Educação e Ciência (2013) *Portugal Primeiros Resultados PISA 2012*. Lisboa: PROJAVI.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (1985). *Agenda para a acção: recomendações para o ensino da Matemática nos anos 1980*. Lisboa: APM.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM & IIE.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (1991). Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar. Lisboa: APM/IIE.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática (1.ª edição).*Lisboa: APM.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Papert, Seymour. (1991). *Ensinarem crianças a serem matemáticos versus ensinar Matemática*. J. P. Ponte (org.). O computador na educação Matemática. Lisboa: APM.

Pereira, M. & Brazão, P. (2013). *Evolução curricular em Portugal: relações e tensões*. In A. Mendonça. (Org.). *O futuro da escola pública* (pp. 164-276). Funchal: CIE-UMa.

Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2009). *O Novo Programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança*. Lisboa: Educação e Matemática, nº105. Revista da Associação de Professores de Matemática, (p. 2-6).

Ponte, J. P.(2005). *Gestão Curricular em Matemática*. In GTI (Ed.), O Professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). *Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico*. In GTI (Org.), O professor e o programa de Matemática do ensino básico (pp. 11-41). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J.P. (1987). *A Matemática não é só cálculo e mal vão as reformas curriculares que a vêem como simples disciplina de serviço,* in Educação Matemática n.º 4 (Outubro) Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Ponte, J.P. (2003). *O Ensino da Matemática em Portugal: Uma Prioridade Educativa?* Texto de conferência realizada no seminário "O Ensino da Matemática: Situação e Perspetivas". Lisboa, 2003. http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Ponte(CNE).pdf consultado em 20.05.2014.

Ramalho, Glória (coord.) (2004). *Resultados do Estudo Internacional PISA 2003*. Lisboa. GAVE.

Santos, L., Canavarro, A.P., Machado, S. (2006) - *Orientações curriculares actuais para a Matemática em Portugal*, in Actas do XV EIEM - Encontro de Investigação em Educação Matemática, Montegordo: Secção de Educação Matemática, Sociedade Portuguesa de Ciência das Educação.

Serrão et al (2010) *PISA 2006 – Competências científicas dos alunos portugueses.* Lisboa. GAVE.

Serrão, A. (2013). *O PISA e a participação de Portugal*. Centro de Investigação e Estudos de Sociologia – Instituto da Universidade de Lisboa. http://www.cies.iscte.pt/np4/?newsId=453&fileName=WP_CIES162_Serrao.pdf consultado em 23.07.2014.

Serrazina, L. (2002). *Competência matemática e competências de cálculo no 1º ciclo*. in Educação e Matemática, n.º 69. Lisboa: APM.

Serrazina, L; Oliveira, Isolina. 2005. *O currículo de Matemática do ensino básico sob o olhar da competência matemática*. In *O professor e o desenvolvimento curricular*, ed. Grupo de Trabalho de Investigação-GTI, 35 - 62. ISBN: 972-8768-16-8. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Silva, J.C. (1995) *A História da Matemática e o Ensino da Matemática*. Departamento de Matemática. Universidade de Coimbra. http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/histmatprogr1.html consultado em 03.09.2014.

Silva, J. C. (2012). *Metas Curriculares-Ensino Básico Matemática*, Parecer técnico científico. Departamento de Matemática. Universidade de Coimbra. http://www.apm.pt/files/205600__Metas_Curriculares-parecerJCS_5192c70042133.pdf consultado em 30.06.2014.

Silva, J.C. (2013).*Parecer sobre a proposta de Programa de Matemática do Ensino Básico.* Associação de Professores de Matemática. http://www.apm.pt/files/205600_parecer-jaimecs_5254396920b0c.pdf consultado em 19.05.2014.

Sousa, M. V., & Fernandes, J. A. (2004). *Dificuldades de professores estagiários de Matemática e sua relação com a formação inicial*. Quadrante, 12(1), 91-113.

CAPÍTULO 3

Araújo, P.V. (1998) *Curso de Geometria*, Gradiva, Lisboa.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F.e Timóteo, M.C. (2013) *Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática, Caderno de Apoio – 2.º ciclo*, Ministério da Educação e Ciência: Direção Geral da Educação.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F.e Timóteo, M.C. (2013) *Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática, Caderno de Apoio – 3.º ciclo*, Ministério da Educação e Ciência: Direção Geral da Educação.

Breda, A., Serrazina, L. et al (2011) *Geometria e Medida no Ensino Básico*, DGIDC - Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, Mistério da Educação.

Fenn, Roger (2001) *Geometry*, Springer (pp.63 – 89), Berlim.

Lang, S. & Murrow, G.(1988) *Geometry* – second edition, Springer, New Haven.

Oliveira, A. J. Franco (1995) *Geometria Euclidiana*, Universidade Aberta, Lisboa.

Veloso, E. (1998), *Geometria. Temas Actuais. Materiais para Professores*. 1ª Edição. Instituto de Inovação Educacional.

CAPÍTULO 5

Ponte, J. P. (1995). *Novas tecnologias na aula de Matemática*. Educação e Matemática*, 34*, 2-7.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (1998). *As novas tecnologias na formação inicial de professores*. Lisboa: Departamento de Avaliação, Prospetiva e Planeamento do Ministério da Educação.

Anexos

Anexo A.

Anexo A1. PERCURSOS TEMÁTICOS DO PROGRAMA DE MATEMÁTICA DE 2007

Percurso A

7.º ano	8.º ano	9.º ano
Tratamento de dados • Organização, análise e interpretação de dados — histograma • Medidas de localização e dispersão • Discussão de resultados **Números inteiros** • Multiplicação e divisão, propriedades • Raiz quadrada e raiz cúbica • Potências de base inteira e expoente natural **Triângulos e quadriláteros** • Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo • Congruência de triângulos • Propriedades, classificação e construção de quadriláteros **Sequências e regularidades** • Termo geral de uma sequência numérica • Representação **Funções** • Conceito de função e de gráfico de uma função (domínio racionais não negativos) • Proporcionalidade directa como função **Equações** • Equações do 1.º grau a uma incógnita (com parêntesis mas sem denominadores) **Semelhança** • Noção de semelhança • Ampliação e redução de um polígono • Polígonos semelhantes • Semelhança de triângulos	**Números racionais** • Representação, comparação e ordenação • Operações, propriedades e regras operatórias • Potências de base e expoente inteiro (incluindo a regra de potência da potência) **Isometrias** • Translação associada a um vector • Propriedades das isometrias **Funções** • Funções linear e afim **Equações** • Equações do 1.º grau a uma incógnita (com denominadores) • Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas **Planeamento estatístico** • Especificação do problema • Recolha de dados • População e amostra **Sequências e regularidades** • Expressões algébricas **Equações** • Equações literais • Operações com polinómios • Equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita **Teorema de Pitágoras** • Demonstração e utilização **Sólidos geométricos** • Área da superfície e volume • Critérios de paralelismo e perpendicularidade entre planos, e entre rectas e planos	**Funções** • Proporcionalidade inversa como função • Funções do tipo $y = ax^2$ **Equações** • Equações (completas) do 2.º grau a uma incógnita **Circunferência** • Ângulo ao centro, ângulo inscrito e ângulo excêntrico • Lugares geométricos • Circunferência inscrita e circunferência circunscrita a um triângulo • Polígono regular inscrito numa circunferência **Probabilidade** • Noção de fenómeno aleatório e de experiência aleatória • Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento. **Números reais** • Noção de número real e recta real • Relações $<$ e $>$ em R • Intervalos **Inequações** • Inequações do 1.º grau a uma incógnita **Trigonometria no triângulo rectângulo** • Razões trigonométricas de ângulos agudos • Relações entre razões trigonométricas

Percurso B

7.º ano	8.º ano	9.º ano
Números inteiros • Multiplicação e divisão, propriedades • Raiz quadrada e raiz cúbica • Potências de base inteira e expoente natural **Sequências e regularidades** • Termo geral de uma sequência numérica • Representação **Funções** • Conceito de função e de gráfico de uma função (domínio racionais não negativos) • Proporcionalidade directa como função **Triângulos e quadriláteros** • Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo • Congruência de triângulos • Propriedades, classificação e construção de quadriláteros **Tratamento de dados** • Organização, análise e interpretação de dados — histograma • Medidas de localização e dispersão • Discussão de resultados **Equações** • Equações do 1.º grau a uma incógnita (com parênteses mas sem denominadores) **Semelhança** • Noção de semelhança • Ampliação e redução de um polígono • Polígonos semelhantes • Semelhança de triângulos	**Isometrias** • Translação associada a um vector • Propriedades das isometrias **Números racionais** • Representação, comparação e ordenação • Operações, propriedades e regras operatórias • Potências de base e expoente inteiro (incluindo a regra de potência da potência) **Planeamento estatístico** • Especificação do problema • Recolha de dados • População e amostra **Funções** • Funções linear e afim **Equações** • Equações do 1.º grau a uma incógnita (com denominadores) • Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas **Sólidos geométricos** • Área da superfície e volume • Critérios de paralelismo e perpendicularidade entre planos, e entre rectas e planos **Sequências e regularidades** • Expressões algébricas **Equações** • Equações literais • Operações com polinómios • Equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita **Teorema de Pitágoras** • Demonstração e utilização	**Probabilidade** • Noção de fenómeno aleatório e de experiência aleatória • Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento. **Funções** • Proporcionalidade inversa como função • Funções do tipo $y = ax^2$ **Equações** • Equações (completas) do 2.º grau a uma incógnita **Circunferência** • Ângulo ao centro, ângulo inscrito e ângulo excêntrico • Lugares geométricos • Circunferência inscrita e circunferência circunscrita a um triângulo • Polígono regular inscrito numa circunferência **Números reais** • Noção de número real e recta real • Relações < e > em R • Intervalos **Inequações** • Inequações do 1.º grau a uma incógnita **Trigonometria no triângulo rectângulo** • Razões trigonométricas de ângulos agudos • Relações entre razões trigonométricas

Anexo A2. FINALIDADES DO ENSINO DA MATEMÁTICA

1991 Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem (vol.II)	No programa do 3.º ciclo (ME, 1991b) apresentam-se as principais finalidades, que não são específicas da Matemática, mas de todo o ensino básico, baseadas em artigos da Lei de Bases do Sistema Educativo (Lei n.º 46/86 de 14 de outubro), especialmente no artigo n.º7 (objetivos).
2001 Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais.	**1.** Proporcionar aos alunos um contacto com as ideias e métodos fundamentais da Matemática que lhes permita apreciar o seu valor e a sua natureza (p. 58) **2.** Desenvolver a capacidade e confiança pessoal no uso da Matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar (idem)
2007 Reajustamento do Programa de Matemática para o ensino básico de 1991	1. Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados. Esta finalidade deve ser entendida como incluindo o desenvolvimento nos alunos da: → compreensão de conceitos, relações, métodos e procedimentos matemáticos e da capacidade de os utilizar na análise, interpretação e resolução de situações em contexto matemático e não matemático; → capacidade de analisar informação e de resolver e formular problemas, incluindo os que envolvem processos de modelação matemática; → capacidade de abstração e generalização e de compreender e elaborar argumentações matemáticas e raciocínios lógicos; → capacidade de comunicar em Matemática, oralmente e por escrito, descrevendo, explicando e justificando as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões a que chega. 2. Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência. Esta finalidade deve ser entendida como incluindo o desenvolvimento nos alunos de: → autoconfiança nos seus conhecimentos e capacidades matemáticas, e autonomia e desembaraço na sua utilização; → à-vontade e segurança em lidar com situações que envolvam Matemática na vida escolar, corrente, ou profissional; → interesse pela Matemática e em partilhar aspetos da sua experiência nesta ciência;
2013 Programa Matemática e Metas Curriculares	1. A estruturação do pensamento - A apreensão e hierarquização de conceitos matemáticos, o estudo sistemático das suas propriedades e a argumentação clara e precisa, própria desta disciplina, têm um papel primordial na organização do pensamento, constituindo-se como uma gramática basilar do raciocínio hipotético-dedutivo. O trabalho desta gramática contribui para alicerçar a capacidade de elaborar análises objetivas, coerentes e comunicáveis. Contribui ainda para melhorar a capacidade de argumentar, de justificar adequadamente uma dada posição e de detetar falácias e raciocínios falsos em geral. 2. A análise do mundo natural - A Matemática é indispensável a uma compreensão adequada de grande parte dos fenómenos do mundo que nos rodeia, isto é, a uma modelação dos sistemas naturais que permita prever o seu comportamento e evolução. Em particular, o domínio de certos instrumentos matemáticos revela-se essencial ao estudo de fenómenos que constituem objeto de atenção em outras disciplinas do currículo do Ensino Básico (Física, Química, Ciências da Terra e da Vida, Ciências Naturais, Geografia...). 3. A interpretação da sociedade - Ainda que a aplicabilidade da Matemática ao quotidiano dos alunos se concentre, em larga medida, em utilizações simples das quatro operações, da proporcionalidade e, esporadicamente, no cálculo de algumas medidas de grandezas (comprimento, área, volume, capacidade,...) associadas em geral a figuras geométricas elementares, o método matemático constitui-se como um instrumento de eleição para a análise e compreensão do funcionamento da sociedade. É indispensável ao estudo de diversas áreas da atividade humana, como sejam os mecanismos da economia global ou da evolução demográfica, os sistemas eleitorais que presidem à Democracia, ou mesmo campanhas de venda e promoção de produtos de consumo. O Ensino da Matemática contribui assim para o exercício de uma cidadania plena, informada e responsável.

Anexo A3. COMPETÊNCIA MATEMÁTICA (2001)

No CNEB define-se competência matemática em oito pontos que no seu todo contribuem para os alicerces de uma cultura matemática básica:

- A Predisposição para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjeturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica;
- O gosto e a confiança pessoal em realizar atividades intelectuais que envolvam raciocínio matemático e a conceção de que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação lógica, e não com alguma autoridade exterior;
- A aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação;
- A compreensão das noções de conjetura, teorema e demonstração, assim como das consequências do uso de diferentes definições;
- A predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e a aptidão para desenvolver processos de resolução, assim como para analisar erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas;
- A aptidão para decidir sobre a razoabilidade de um resultado e de usar, consoante os casos, o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis ou os instrumentos tecnológicos;
- A tendência para procurar ver e apreciar a estrutura abstrata que está presente numa situação, seja ela relativa a problemas do dia-a-dia, à natureza ou à arte, envolva ela elementos numéricos, geométricos ou ambos;
- A tendência para usar a matemática, em combinação com outros saberes na compreensão de situações da realidade, bem como o sentido crítico relativamente à utilização de procedimentos e resultados matemáticos.

(DEB, 2001)

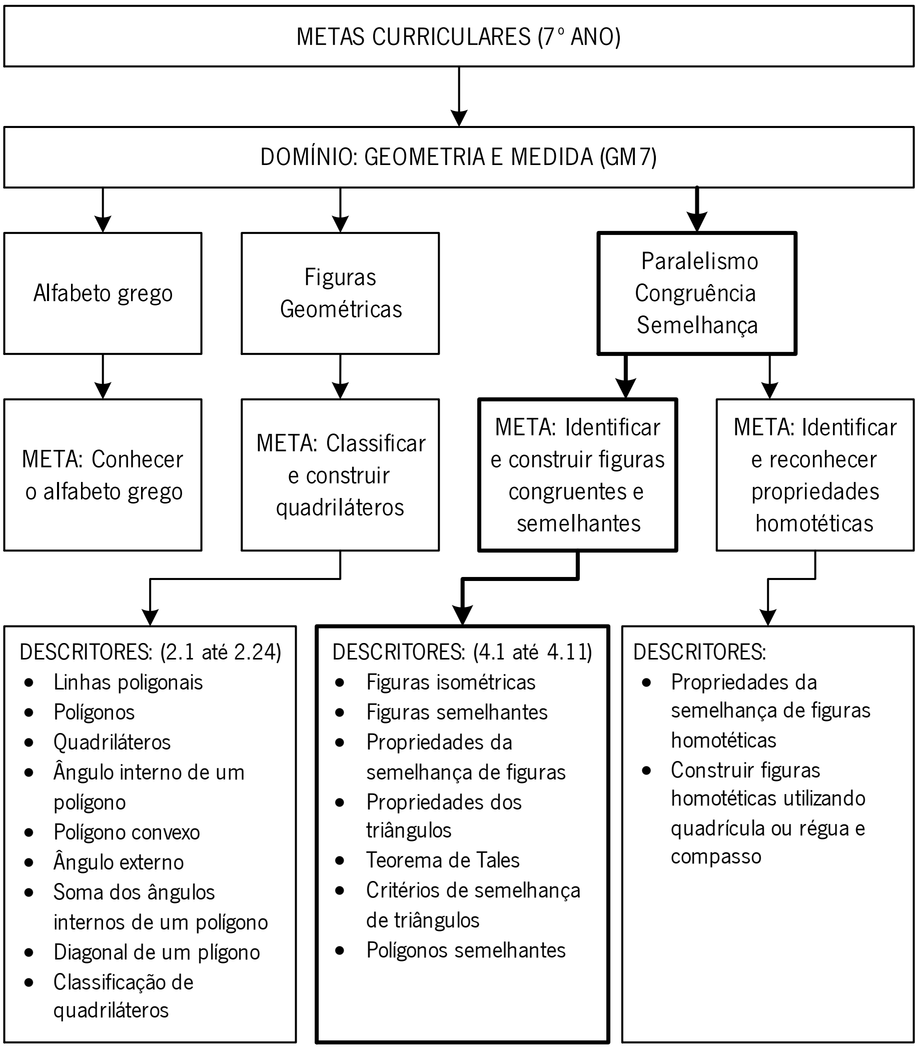
Anexo A4. Objetivos no ensino da Geometria

QUADRO: OBJETIVOS NO ENSINO DA GEOMETRIA – 3.º CICLO

1991 Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem (vol.II)	**2001** Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais.	**2007** - Reorganização curricular	**2013** - Programa Matemática e Metas Curriculares
CAPACIDADES TRANSVERSAIS Desenvolver a capacidade de resolver problemas, o raciocínio, de comunicação e de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real **DESENVOLVER O CONHECIMENTO DO ESPAÇO** • Identificar, descrever e comparar figuras geométricas. • Conhecer e aplicar propriedades e relações geométricas, nomeadamente a igualdade e a semelhança na análise de figuras e na resolução de problemas. • Realizar construções geométricas usando instrumentos adequados. • Efetuar medições em situações reais com a precisão requerida ou estimando a margem de erro. • Aplicar conhecimentos sobre perímetros, áreas e volumes na resolução de problemas. • Reconhecer e aplicar simetrias, traslações e rotações a um estudo dinâmico do plano.	**COMPETÊNCIAS ESSENCIAIS - GEOMETRIA** • A aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação de figuras, para fazer conjeturas e justificar os seus raciocínios; • A aptidão para realizar construções geométricas, nomeadamente quadriláteros, outros polígonos e lugares geométricos; • A compreensão do conceito de forma de uma figura geométrica e o reconhecimento das relações entre elementos de figuras semelhantes; • A aptidão para resolver problemas geométricos através de construções, nomeadamente envolvendo lugares geométricos, igualdade e semelhança de triângulos, assim como para justificar os processos utilizados; • O reconhecimento do significado de fórmulas e a sua utilização no cálculo de áreas e volumes de sólidos e de objetos do mundo real, em situações diversificadas; • A predisposição para identificar transformações geométricas e a sensibilidade para relacionar a geometria com a arte e com a técnica; • A tendência para procurar invariantes em figuras geométricas e para utilizar modelos geométricos na resolução de problemas reais.	**PROPÓSITO PRINCIPAL DO ENSINO DA GEOMETRIA** Desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço, a noção de grandeza e respetivos processos de medida, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas geométricos e de medida em contextos diversos. **OBJETIVOS GERAIS DE APRENDIZAGEM** Com a aprendizagem do tema Geometria os alunos devem: • desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capazes de os usar; • compreender e ser capazes de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano e no espaço; • compreender e ser capazes de usar as relações de congruência e semelhança de triângulos; • desenvolver a compreensão das isometrias e semelhanças; • compreender a noção de demonstração e ser capazes de fazer raciocínios dedutivos; • ser capazes de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos e trigonométricos.	**METAS DO DOMÍNIO GEOMETRIA E MEDIDA – OBJETIVOS GERAIS** **GM7** • Conhecer o alfabeto grego • Classificar e construir quadriláteros • Identificar e construir figuras congruentes e semelhantes • Construir e reconhecer propriedades de homotetias • Medir comprimentos de segmentos de reta com diferentes unidades • Calcular medidas de áreas de quadriláteros • Relacionar perímetros e áreas de figuras semelhantes • Resolver problemas **GM8** • Relacionar o teorema de Pitágoras com a semelhança de triângulos • Construir e reconhecer propriedades das translações do plano • Resolver problemas **GM9** • Utilizar corretamente o vocabulário próprio do método axiomático • Caracterizar a Geometria Euclidiana através do axioma das paralelas. • Identificar posições relativas de retas no plano utilizando o axioma euclidiano de paralelismo • Identificar planos paralelos, retas paralelas e retas paralelas a planos no espaço euclidiano • Identificar planos perpendiculares e retas perpendiculares a planos no espaço euclidiano • Definir distâncias entre pontos e planos, retas e planos e entre planos paralelos • Comparar e calcular áreas e volumes • Definir e utilizar razões trigonométricas de ângulos agudos • Identificar lugares geométricos • Conhecer propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência

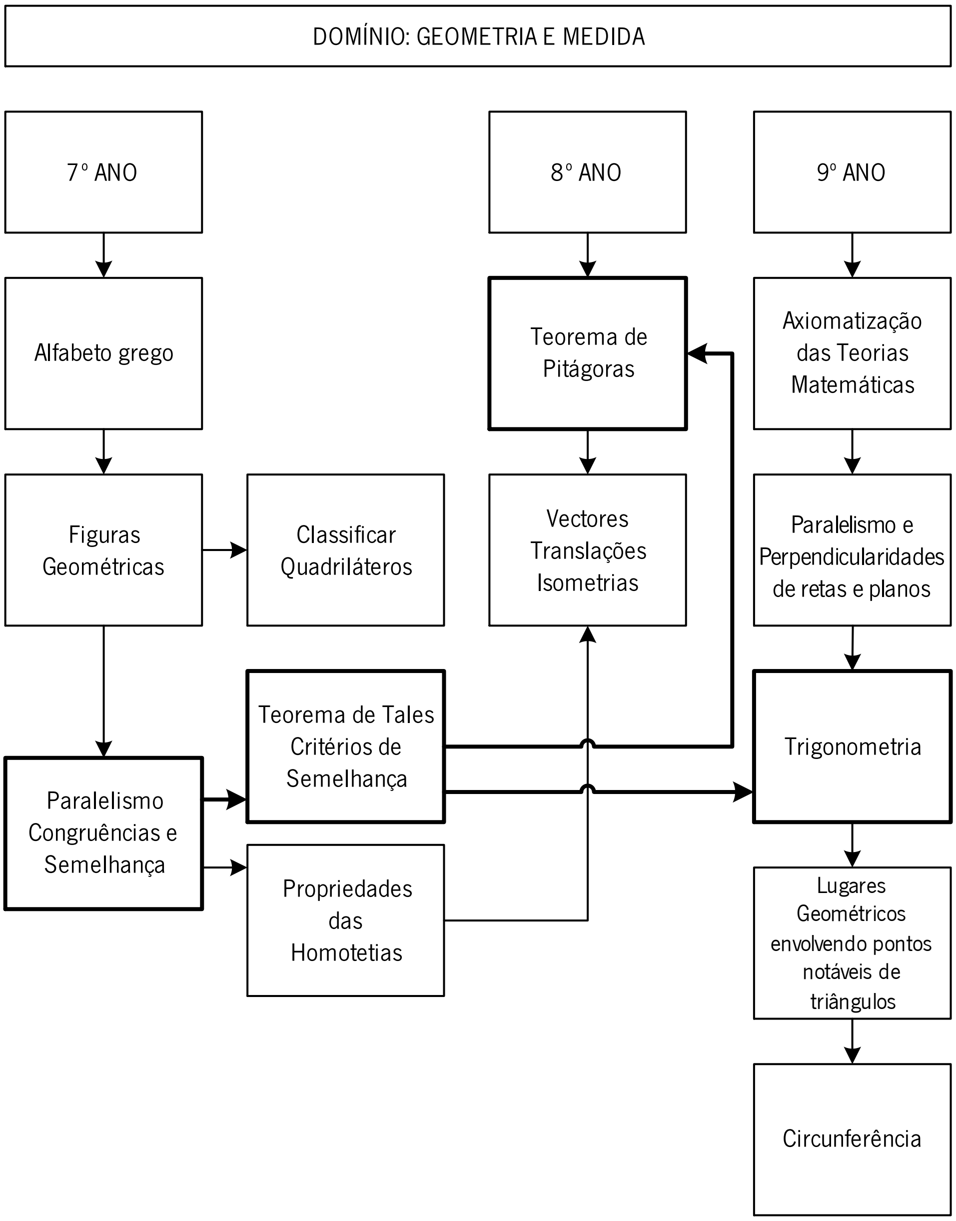
Anexo B.

Anexo B1. METAS CURRICULARES – GM7



Baseado no **PMMC 2013**

Anexo B2. GEOMETRIA E MEDIDA NO 3.º CICLO



Baseado no **PMMC 2013**

Anexo C.

Anexo C1. PROPRIEDADES DE ÂNGULOS EM TRIÂNGULOS

Escola Secundária Padre Benjamim Salgado

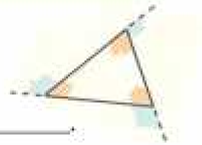
Matemática 7.º ano **Turma __** **Ano lectivo 2008/2009**

ACTIVIDADE PRÁTICA N.º3 – Propriedades de ângulos em triângulos.

Nome: ______________________ N.º ____ Data: __/__/ 2008

1- ÂNGULOS NUM TRIÂNGULO

Num triângulo podem considerar-se dois tipos de ângulos: internos e externos.
Um **ângulo interno** de um triângulo é um ângulo interior ao triângulo.
Um **ângulo externo** de um triângulo é formado por um lado do triângulo e pelo prolongamento de outro lado.



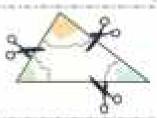
Num triângulo, um ângulo externo e um ângulo interno que lhe seja adjacente são ______________________.

Tarefa 1: Desenha, no teu caderno diário, um triângulo escaleno e assinala com cores diferentes os ângulos internos e os ângulos externos.

Tarefa 2: Qual é a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo?

Etapas:

1. Desenha dois triângulos geometricamente iguais em cartolina.
2. Utilizando o compasso, e com a mesma abertura, marca os três ângulos internos de cada um dos triângulos.
3. Pinta os ângulos internos de cada um dos triângulos com uma cor diferente.
4. Com uma tesoura, recorta os dois triângulos.
5. Cola um desses triângulos no espaço que se segue.



6. Recorta os ângulos internos do outro triângulo, como mostra a figura.
7. Reagrupa os ângulos internos de modo a ficarem com o mesmo vértice e cola-os no espaço que se segue.

8. O que concluis?

9. Responde à questão inicial completando a seguinte propriedade e regista-a no teu caderno diário.

A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a ____°.

1

Tarefa 3: Que relação existe entre as amplitudes de um ângulo externo e dos ângulos internos de um triângulo?

Etapas:

1. Na cartolina desenha dois triângulos geometricamente iguais.
2. Utilizando o compasso, e com a mesma abertura, marca em cada um dos triângulos os três ângulos internos e um dos ângulos externos.
3. Pinta os ângulos que assinalaste nos dois triângulos com cores diferentes.
4. Com uma tesoura, recorta as figuras que obtiveste (triângulos+ângulos externos).
5. Cola uma dessas figuras no espaço que se segue.

6. Na outra figura, recorta os dois ângulos internos do triângulo não adjacentes ao ângulo externo.
7. Sobrepõe esses ângulos ao ângulo externo e cola-os. O que concluis?

8. Cola a figura que obtiveste no espaço que se segue.

9. Responde à questão inicial completando a seguintes propriedade e regista-a no teu caderno diário.

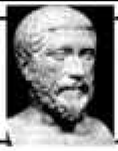
A amplitude de um ângulo ___________ de um triângulo é igual à __________ das amplitudes dos ângulos ___________ não __________________.

2

Anexo C2. DEMONSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Matemática 8.º ano Ano letivo 2011/2012

ATIVIDADE PRÁTICA N.º 8: O TEOREMA DE PITÁGORAS



A DEMONSTRAÇÃO GEOMÉTRICA...

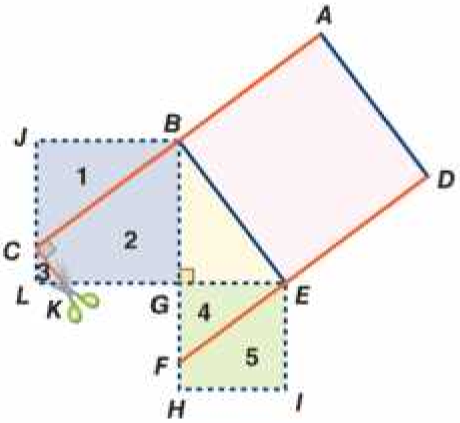
Uma das possíveis demonstrações geométricas do Teorema de Pitágoras é a proposta a seguir. Precisas do seguinte material: Folha A4de Cartolina de cor clara; Folha A4 branca, compasso, régua, esquadro, tesoura, lápis de cor, cola.

Deves ser rigoroso(a) nas construções que efetuares para obteres conclusões mais precisas.

ETAPAS

1. Desenha um triângulo retângulo BGE na folha branca e outro na cartolina, com base 5cm e altura 7cm.

(**Nota:** usa o esquadro e a régua para efetuares a perpendicularidade)



2. Sobre cada um dos lados do triângulo (da folha branca e da cartolina), constrói um quadrado;

3. Sobre os quadrados menores desenha os segmentos de reta BC, CK e EF conforme a figura ao lado.

4. Com auxílio de uma tesoura recorta as peças 1, 2, 3, 4 e 5, conforme a sugestão da figura.

5. Com as 5 peças obtidas verifica que, tal como num puzzle, podes formar o quadrado construído sobre a hipotenusa.

6. Determina a área de cada um dos quadrados construídos, usando para isso a régua graduada. Apresenta o resultado com uma casa decimal.

7. Compara a área do quadrado construído sobre a hipotenusa com a soma das áreas dos outros dois quadrados. Faz uma conjetura para a relação encontrada e regista-a.

8. Repara nas conclusões dos teus colegas da sala que construíram triângulos retângulos com outras dimensões. O que descobriste?

Isabel Ferreira

ESCOLA SECUNDÁRIA PADRE BENJAMIM SALGADO

___/___/2009

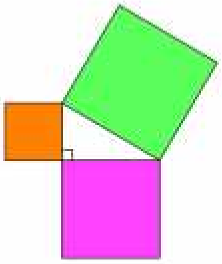
Matemática 8.º ano

Ano lectivo 2009/2010

ACTIVIDADE PRÁTICA N.º 1 – Triângulos Retângulos e Pitágoras

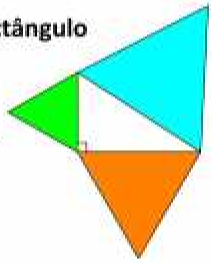
Nome: ______________________ Ano/Turma: _____ N.º ____

TAREFA 1: Quadrados construídos sobre os lados de um triângulo rectângulo



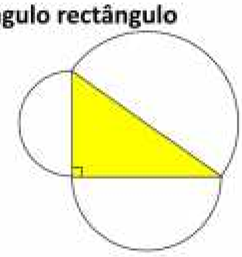
1. Numa folha branca, desenha um triângulo rectângulo à tua escolha.
2. Constrói quadrados sobre cada um dos lados do triângulo, como mostra a figura.
3. Determina a área de cada um desses quadrados.

TAREFA 2: Triângulos equiláteros construídos sobre os lados de um triângulo rectângulo



1. Numa folha branca, desenha um triângulo rectângulo à tua escolha.
2. Constrói triângulos equiláteros sobre cada um dos lados do triângulo, como mostra a figura.
3. Determina a área de cada um desses triângulos equiláteros.

TAREFA 3: Triângulos equiláteros construídos sobre os lados de um triângulo rectângulo



1. Numa folha branca, desenha um triângulo rectângulo à tua escolha.
2. Constrói semicírculos sobre cada um dos lados do triângulo, como mostra a figura.
3. Determina a área de cada um desses semicírculos.

TAREFA 4: Completa a seguinte tabela.

	Área da figura construída sobre um dos catetos	Área da figura construída sobre o outro cateto	Área da figura construída sobre a hipotenusa
Tarefa 1			
Tarefa 2			
Tarefa 3			

TAREFA 5: Regista as tuas observações.

Anexo C3. ÂNGULOS AO CENTRO E ÂNGULOS INSCRITOS NUMA CIRCUNFERÊNCIA. PROPRIEDADES.

Escola Secundária Padre Benjamim Salgado

Matemática 9.º ano **Turma __** **Ano lectivo 2007/2008**

ACTIVIDADE PRÁTICA N.º 5

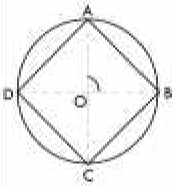
Ângulos ao centro e ângulos inscritos numa circunferência. Propriedades.

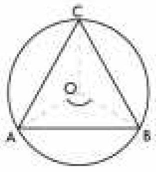
Nome: ______________________ N.º ____ Data: __ / __ / ____

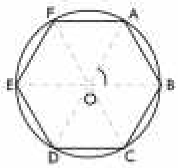
1- ÂNGULOS AO CENTRO

Tarefa 1: Relação entre ângulos ao centro e arcos correspondentes

Nas figuras que se seguem estão representados um quadrado, um triângulo equilátero e um hexágono regular, cada um deles inscrito numa circunferência de centro O.







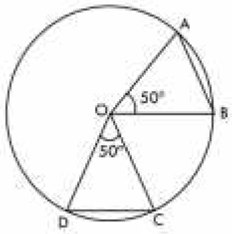
a) Completa a tabela:

Polígono	$A\hat{O}B$	$\overset{\frown}{AB}$
Quadrado		
Triângulo		
Hexágono		

b) Que relação existe entre a amplitude de um ângulo ao centro e a amplitude do arco correspondente?

Tarefa 2: Ângulos ao centro, arcos e cordas correspondentes

Na figura estão representados dois ângulos ao centro com a mesma amplitude.



a) Que relação existe entre o arco AB e o arco CD? Justifica.

b) Justifica que os triângulos [AOB] e [COD] são geometricamente iguais e, portanto, $\overline{AB} = \overline{CD}$.

c) Completa a propriedade:

Numa circunferência, a ângulos ao centro iguais correspondem __________ **e** __________ __________.

1

2. ÂNGULOS INSCRITOS

Tarefa 1: Ângulos inscritos e arcos correspondentes

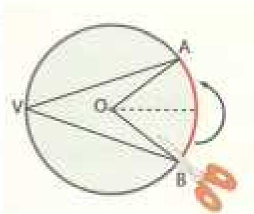
a) Numa folha de papel desenha uma circunferência de centro O e nela um ângulo inscrito qualquer.

b) Assinala com uma cor diferente o arco compreendido entre os seus lados.

c) Desenha o ângulo ao centro correspondente a esse arco.

d) Recorta o ângulo ao centro.

e) Cola o que restou da circunferência no espaço que se segue.



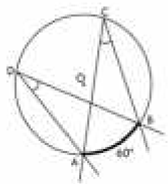
f) Dobra o ângulo ao centro a meio.

g) Sobrepõe essa dobragem ao ângulo inscrito e cola-o.

h) O que concluis sobre a relação entre a amplitude do ângulo inscrito e a amplitude do arco compreendido entre os seus lados?

Tarefa 2: Ângulos inscritos no mesmo arco

Na figura estão representados dois ângulos inscritos no mesmo arco.



a) Determina $A\hat{D}B$ e $A\hat{C}B$. O que concluis?

b) Completa a propriedade:

Ângulos inscritos no mesmo arco têm ____________________.

2

Tarefa 3: Ângulo inscrito numa semicircunferência

a) No espaço ao lado desenha uma circunferência de centro O.

b) Assinala na circunferência um diâmetro [AB].

c) Qual é a amplitude do arco AB?

d) Marca outro ponto C na circunferência.

e) Constrói o ângulo inscrito ACB.

f) Determina $A\hat{C}B$. O que concluis?

g) Completa a propriedade:

Um ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo ________.

Tarefa 4: Ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência

a) Desenha uma circunferência de centro O.

b) Desenha um quadrilátero inscrito na circunferência, ou seja, um quadrilátero cujos vértices estejam sobre a circunferência.

c) Assinala com uma letra os vértices A, B, C e D do quadrilátero de modo que os vértices A e C sejam opostos.

d) Assinala com cores diferentes o ângulo BAD e o ângulo BCD.

e) Assinala com as mesmas cores os arcos compreendidos entre cada um desses ângulos.

f) Completa, relacionando os ângulos e os arcos anteriores:

$$B\hat{A}D = \frac{\cdots\cdots}{2} \quad e \quad B\hat{C}D = \frac{\cdots\cdots}{2}$$

g) Completa:

$$B\hat{A}D + B\hat{C}D = \frac{\cdots\cdots}{2} + \frac{\cdots\cdots}{2} = \frac{\cdots\cdots + \cdots\cdots}{2} = \frac{\cdots\cdots}{2} = \cdots\cdots$$

h) Completa a propriedade:

Os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência são __________________, ou seja, a sua soma é ______.

3

Anexo C4. SOMA DAS AMPLITUDES DOS ÂNGULOS INTERNOS E EXTERNOS DE UM POLÍGONO

Escola Secundária Padre Benjamim Salgado

Matemática 9.º ano **Turma __** **Ano lectivo 2007/2008**

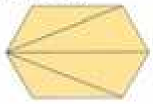
ACTIVIDADE PRÁTICA N.º 7

Soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de um polígono

Nome: ______________________ N.º ____ Data: __ / __ / ____

ACTIVIDADE 1: Soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo

Diagonal de um polígono é qualquer segmento de recta cujos extremos são vértices não consecutivos do polígono.



Tarefa 1: Desenha todos os polígonos indicados na tabela abaixo e, em cada um deles, traça as diagonais a partir de um único vértice, como mostra a figura.

Tarefa 2: Completa a seguinte tabela.

Polígono	**N.º de lados**	**N.º de triângulos formados**	**Soma dos ângulos internos**
Triângulo	3	1	$1 \times 180 = 180°$
Quadrilátero	4	2	$\ldots \times 180 = \ldots\ldots°$
Pentágono			
Hexágono			
Heptágono			
Decágono			
Polígono de 13 lados			
Polígono de n lados			

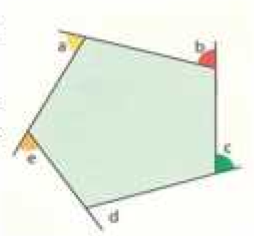
Tarefa 3: Completa a conclusão:

A soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono de n lados é igual a

____

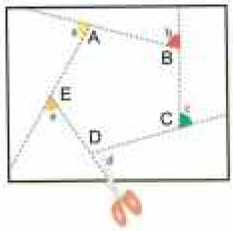
1

<u>ACTIVIDADE 2</u>: Soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono convexo



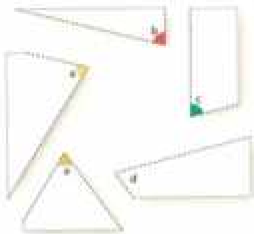
Um **ângulo externo de um polígono** é um ângulo formado por um lado do polígono com o prolongamento de outro lado consecutivo.

Tarefa 1: Numa pequena folha de papel desenha um polígono com, no mínimo, **6** lados. Coloca, no interior do polígono, as letras correspondentes aos seus vértices.



Tarefa 2: Desenha os ângulos externos do polígono. Pinta-os com diferentes cores e atribui a cada um deles a letra minúscula correspondente à letra maiúscula do respectivo vértice.

Tarefa 3: Com uma tesoura, recorta cada um dos ângulos externos, como sugere a figura.



Tarefa 4: Junta os ângulos externos pelos seus vértices e cola-os a seguir, juntame com o teu polígono.

Tarefa 5: O que concluis relativamente à soma dos ângulos internos de um polígono?

2

Anexo C5. O ESPARGUETE E A DESIGUALDADE TRIÂNGULAR

ESCOLA SECUNDÁRIA PADRE BENJAMIM SALGADO

Matemática 7.º ano Ano lectivo 2010/2011

ACTIVIDADE PRÁTICA N.º 3 – O Esparguete e a desigualdade triangular

Nome: ______________________ Ano/Turma: _____ N.º ____ __/__ /2011

Questão: Será sempre possível construir um triângulo, dados três comprimentos ao acaso?

Etapas	Construção
1.ª etapa: Corta bocados de esparguete com os seguintes comprimentos: 3cm, 5cm, 7cm e 10 cm (três bocados de cada)	
2.º etapa: Tenta construir triângulo com comprimentos dos seus lados: 3cm, 5cm e 7cm	
3.º etapa: Tenta construir triângulo com comprimentos dos seus lados: 3cm, 7cm e 10cm	
4.ºetapa: Tenta construir triângulo com comprimentos dos seus lados: 5cm, 7cm e 10cm	
5.ºetapa: Estudo dos triângulos – classificação quanto aos lados e quanto aos ângulos	
6.ºetapa: Conclusões	**Só é possível construir um triângulo quando qualquer lado é ________ que a ________ dos outros dois lados.**

1 Isabel Ferreira

Anexo C6. CONSTRUÇÃO DE TRIÂNGULOS DADOS ALGUNS DOS SEUS ELEMENTOS

Escola Secundária Padre Benjamim Salgado

Matemática 7.º ano **Turma** __ **Ano lectivo 2008/2009**

___/___/2008

ACTIVIDADE PRÁTICA N.º 4 – Construção de triângulos.

Nome: ______________________ N.º ____ Avaliação: ______________________

Enc. Educação: ______________________ Professora: ______________________

Tarefa 1: Construir um triângulo dados os comprimentos dos três lados

No espaço ao lado desenha um triângulo [ABC] sendo $\overline{AB} = 5cm$, $\overline{AC} = 3cm$ e $\overline{BC} = 4cm$.

Etapas:

1. Desenha o lado [AB] do triângulo.
2. Com o compasso centrado em A e com uma abertura igual a $\overline{AC}$, traça um arco.
3. Com o compasso centrado em B e com uma abertura igual a $\overline{BC}$, traça outro arco.
4. O ponto C é o ponto de intersecção dos dois arcos.
5. Constrói o triângulo unindo o ponto C aos pontos A e B.
6. Assinala no triângulo os vértices e as medidas dos lados.
7. Pinta o triângulo a teu gosto.
8. Como classificas o triângulo quanto aos lados?
9. Como classificas o triângulo quanto aos ângulos?

Tarefa 2: Construir um triângulo dados os comprimentos de dois lados e a amplitude do ângulo formado por esses lados

No espaço ao lado desenha um triângulo [ABC] sendo $\overline{AB} = 7cm$, $\overline{AC} = 4cm$ e $B\hat{A}C = 40^\circ$.

Etapas:

1. Desenha o lado [AB] do triângulo.
2. Com o transferidor centrado em A, traça a semi-recta de origem em A que faz com o lado [AB] um ângulo 40º.
3. Sobre essa semi-recta, marca o ponto C tal que $\overline{AC} = 4cm$.
4. Constrói o triângulo unindo o ponto C ao ponto B.
5. Assinala no triângulo os vértices e as medidas dos lados e do ângulo.
6. Pinta o triângulo a teu gosto.
7. Como classificas o triângulo quanto aos lados?
8. Como classificas o triângulo quanto aos ângulos?

1

Tarefa 3: Construir um triângulo dado o comprimento de um lado e a amplitude dos ângulos adjacentes a esse lado

No espaço que se segue desenha um triângulo [ABC] sendo $\overline{AB} = 6cm$, $B\hat{A}C = 120°$ e $A\hat{B}C = 30°$.

Etapas:

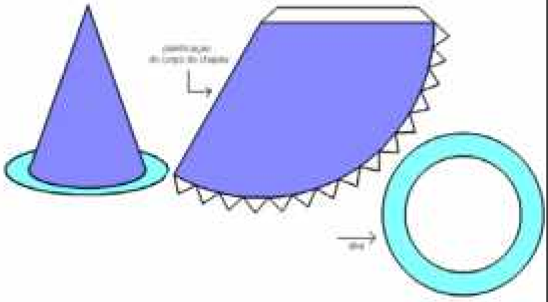
1. Desenha o lado [AB] do triângulo.
2. Com o transferidor centrado em A, traça a semi-recta de origem em A que faz com o lado [AB] um ângulo de 120°.
3. Com o transferidor centrado em B, traça a semi-recta de origem em B que faz com o lado [AB] um ângulo de 30°.
4. O ponto de intersecção das duas semi-rectas é o ponto C.
5. Assinala no triângulo os vértices e as medidas dos ângulos e do lado [AB].
6. Pinta o triângulo a teu gosto.
7. Como classificas o triângulo quanto aos lados?
8. Como classificas o triângulo quanto aos ângulos?

Anexo C7. A MATEMÁTICA DO HALLOWEEN

Matemática 7.º ano — Ano letivo 2011/2012

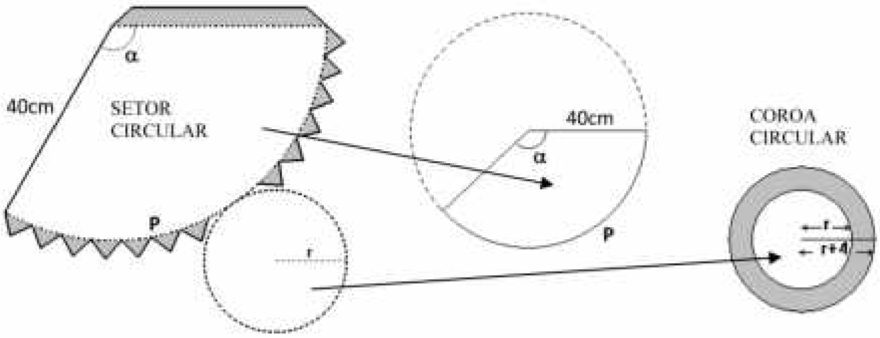
ATIVIDADE PRÁTICA N.º 2: A Matemática do Halloween

CONSTRUÇÃO DE UM CHAPÉU DE BRUXA



TAREFA 1: DETERMINAÇÃO DAS MEDIDAS DO MEU CHAPÉU DE BRUXA

Para construir um chapéu de bruxa, precisas de fazer uma planificação em cartolina. O nosso chapéu é constituído pelo corpo (cone) e a aba (coroa circular)
Que medidas terá o meu chapéu?



MEDIDAS PARA CONSTRUIR O CHAPÉU

O corpo do chapéu é um cone, que é construído a partir de um setor circular (parte de um círculo)

1.ª ETAPA: Começa por medir o perímetro **P** da tua cabeça com a ajuda de uma fita métrica.

P = …… cm

2.ª ETAPA: Para construir esse setor circular, que terá 40cm de raio, precisamos de saber o perímetro da tua cabeça.
Calcula agora a amplitude do ângulo α que corresponde a esse comprimento, completando a regra de três simples:

Ângulo	*Comprimento*	
360	$2\pi\times40$	→ *Perímetro da circunferência ($P=2\pi\times r$)*
α	....	→ *Perímetro da tua cabeça*

$$\alpha = \frac{360\times\text{..........}}{2\pi\times40} \approx \text{..........}$$

MEDIDAS PARA CONSTRUIR A ABA DO CHAPÉU

3.ª ETAPA: Para determinar o raio **r** da circunferência menor da coroa circular que constitui a aba do chapéu completa:

$2\pi\times r =$ …….. → *Perímetro da tua cabeça*

$r =$ ………. : 2π

$r \approx$ ……

Isabel Ferreira e Patrícia Couto

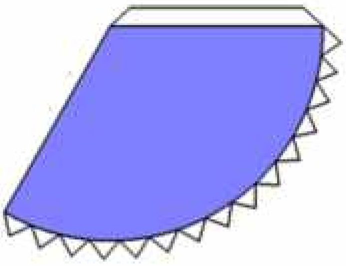
TAREFA 2: DETERMINAÇÃO DAS MEDIDAS DO MEU CHAPÉU DE BRUXA

CONSTRUÇÃO DO CHAPÉU

ETAPAS:

1. Com a ajuda da régua mede, a partir de um canto da cartolina, um segmento de 40cm de comprimento.

2. Ata um fio ao lápis de modo que fique também com 40cm comprimento e desenha um arco de circunferência, como mostra a figura (ou utiliza o compasso do quadro)



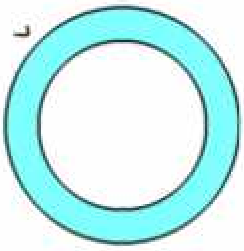
3. No mesmo canto da cartolina, e com a ajuda de um transferidor, marca um ângulo com a amplitude α que determinaste.

4. Desenha os "dentes" necessários no setor circular para depois fazeres as colagens.

5. Recorta e na aula de Educação Visual irás decorá-lo.

CONSTRUÇÃO DA ABA DO CHAPÉU

ETAPAS:



1. Desenha uma circunferência com o raio r que determinaste anteriormente.

2. Desenha outra circunferência com o mesmo centro e cujo raio seja mais 4cm do que o da circunferência anterior.

3. Recorta a coroa circular. Para facilitar, recorta um quadrado maior do que a coroa circular e o dobra-o em 4 a partir do centro. Recorte o papel por dentro e por fora.

4. Guarda a aba para decorar na aula de Educação Visual.

BOM CONCURSO!

Isabel Ferreira e Patrícia Couto

Anexo C8. CONSTRUÇÃO DE UM QUADRANTE

Matemática 9.º ano   Agrupamento de Escolas de Infias - Vizela

ATIVIDADE PRÁTICA: Construção de um quadrante

Nome: ____________________ N.º____ Turma: _____ Ano letivo

INTRODUÇÃO...

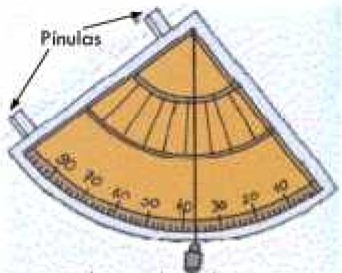
Para resolver problemas reais de medições indiretas é necessário medir ângulos. É preciso portanto dispor de instrumentos adequados.

Um dos primeiros instrumentos usados na navegação com essa finalidade foi o **QUADRANTE**, que foi largamente usado pelos nossos navegadores na época dos Descobrimentos. A partir do século XIV os navegadores portugueses eram detentores de conhecimentos teóricos de cálculos matemáticos de grande complexidade e de técnicas de navegação que lhes permitiam a medição da "altura" dos astros, possibilitando a determinação da latitude a que se encontrava um navio. A navegação deixou de estar sujeita aos "sabores" do vento, podendo aventurar-se mais ao largo.

TAREFA: Constrói o teu próprio quadrante.

MATERIAL NECESSÁRIO: Cartão; Lápis e borracha; Cartolina; Régua e esquadro; Cola; Compasso; Fio; Transferidor; um Peso; Tesoura e/ou x-ato; Palhinha; Agulha.

ETAPAS DA CONSTRUÇÃO



1. Na cartolina desenha um quarto de circunferência cujo raio meça entre 15cm e 20cm.
2. Desenha uma margem de 1cm nos lados perpendiculares.
3. Traça um quarto de circunferência de centro em O e cujo raio meça menos 2cm do que o anteriormente desenhado.
4. Desenha as pínulas (dois retângulos com 1cm por 2cm).
5. Com um transferidor, gradua o teu quadrante (marca ângulos com intervalos de 1º e traça linhas para marcar os ângulos).
6. Recorta a figura que obtiveste e cola-a no cartão. **Atenção**: Não coles as pínulas.
7. Para dar um melhor aspeto ao conjunto, corta outro quarto de círculo igual ao primeiro e cola-o na superfície oposta.
8. Corta a palhinha que servirá de mira com o mesmo comprimento do primeiro quarto de circunferência. Cola-a ao longo do lado onde estão as pínulas, segurando-a com as mesmas.
9. Faz um pequeno furo no local marcado com o ponto O.
10. Passa um fio pelo furo e prende-o com um nó ou outro processo para impedir que se solte.
11. Ata um peso à outra ponta do fio de modo que este fique esticado. O comprimento total do fio deve ser maior do que o raio do quarto de circunferência inicial.
12. O teu quadrante está construído.

DATA DE ENTREGA PARA AVALIAÇÃO

Até 30 de Abril de 2014

Atividade Prática   Isabel Ferreira

Anexo C9. A MATEMÁTICA ENLATADA

Matemática 9.º ano

ACTIVIDADE PRÁTICA N.º 19: "A Matemática enlatada"

__/__/2011 Nome: ____________________ N.º ____ Turma: ___

Ao longo desta actividade será possível analisar a quantidade de Matemática que podemos ter à volta de uma simples lata de salsichas, quando queremos reaproveitá-la para outros fins domésticos.
A Matilde gosta de bricolages e reaproveita muito do lixo reciclável antes de o levar para o Ecoponto.
A seguir serás desafiado(a) a resolver um conjunto de tarefas para dar resposta às situações colocadas pela Matilde.

PARTE I

TAREFA 1
A LATA PARA OS LÁPIS DE COR

A Matilde quer forrar o exterior da lata com papel decorativo autocolante para colocar lápis e marcadores na sua secretária.

1. Começa por fazer um esboço da planificação da lata (não precisa de ser à escala) e assinala as principais dimensões, utilizando para isso os instrumentos de medição e desenho.

2. Determina a quantidade de papel autocolante necessário para forrar a lata.

3. A Matilde colocou lápis e marcadores na lata.

3.1 Calcula a comprimento máximo de um lápis que possa caber totalmente dentro da lata. Que posição deve ocupar? Apresenta o resultado com aproximação às décimas.

3.2 Que ângulo terá que fazer o lápis com a base da lata? Apresenta o resultado aproximado às unidades.

TAREFA 2
AS VELAS ESFÉRICAS

A Matilde pegou noutra lata de salsichas vazia igual à anterior e pensou em guardar velas esféricas de modo a ficar "à justa" no seu interior.

1. Que volume ocupará uma vela?
Apresenta o resultado com aproximação às centésimas.

2. Caberia dentro da lata, mais do que uma vela "à justa"?

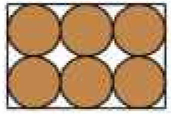
3. Que espaço ficaria "desperdiçado" dentro da lata com a(s) vela(s)?
Apresenta o resultado aproximado às unidades.

Isabel Ferreira

PARTE II (Trabalho para Casa)

TAREFA 3
A ARRUMAÇÃO DAS LATAS

A Matilde juntou 6 latas e pretendia arrumá-las numa caixa com a forma de um paralelepípedo, cuja vista de cima se encontra na figura.



Que dimensões terá que ter a caixa?

TAREFA 4
A JARRA PARA FLORES

Como não cabiam muitas velas na lata, a Matilde, resolveu reaproveitá-la para colocar flores.

1. Que quantidade de água, em cl, pode levar a lata (sem as flores)?
2. Para colocar as flores quer que **o nível da água** fique a um terço da altura total da lata, para não transbordar água. Que espaço da lata ficou sem água?
3. Ao colocar as flores no nível da água subiu 1,3cm. Qual a percentagem de espaço que ainda está vazio dentro da lata.

Isabel Ferreira

Anexo C10. O MÉTODO DA HOMOTETIA E O GEOMETER'S SKETCHPAD

ESCOLA SECUNDÁRIA PADRE BENJAMIM SALGADO

Matemática 7.º ano **Turma __** **Ano lectivo 2008/2009**

ACTIVIDADE PRÁTICA N.º 9 – O Método da Homotetia e o *Geometer's Sketchpad*

Nome: ______________________ N.º ____ Data: __/__/ 2009

GEOMETER'S SKETCHPAD (GSP) – Os primeiros passos

Abre o GSP. No lado esquerdo da área de trabalho do *Geometer's Sketchpad*, encontra-se uma **caixa de ferramentas** que pode ser usado para desenhar figuras geométricas.

GSP 4.06

Seta de selecção: usada para seleccionar, transportar e alterar um objecto.

Ponto

Circunferência

Recta: cria rectas, semi-rectas e segmentos de recta.

Texto: Cria caixas de texto ou permite etiquetar pontos e linhas.

Ferramentas personalizadas: permite definir, usar e gerir ferramentas criadas pelo utilizador.

ATENÇÃO: A ferramenta **seta de selecção** é a mais importante. Por isso, se nada for dito, ela deve estar seleccionada. Sempre que usares uma das outras ferramentas, no final não te esqueças de voltar a seleccionar a seta de selecção.

CONSTRUÇÃO DE UMA HOMOTETIA NO GSP

Com esta actividade pretende-se construir uma figura semelhante a uma figura desenhada por ti, mas com o dobro do tamanho da figura original.

<u>ETAPA 1</u> – **Identificação da actividade**

Começa por escrever o título. Para isso, selecciona a ferramenta **Texto** e abre uma caixa de texto, onde deves escrever o título – "*O Método da Homotetia*" .

Podes alterar a cor, o estilo e o tamanho do texto. Para isso, com a ferramenta **seta de selecção**, selecciona a caixa de texto e faz as alterações usando a palete de texto que se encontra na parte inferior do ecrã.

Se esta palete não aparecer basta seleccionares a opção **Show Text Palette** no menu **Display**.

<u>ETAPA 2</u> – **Construção da figura original**

1. Selecciona a ferramenta **Ponto** e marca os pontos correspondentes aos vértices da figura original que queres ampliar.
2. Muda para a ferramenta **Texto** e clica sobre cada um desses pontos para os identificares (A, B, C, …). Podes mudar os "nomes" dos pontos. Para isso, selecciona a ferramenta **seta de selecção**, selecciona o ponto, clica no botão direito do rato e selecciona a opção **Label Point**, mudando a letra.

1 Isabel Ferreira e Patrícia Couto

3. Selecciona os pontos por ordem (A, B, C, …) para os unires e assim construíres a tua figura. Para isso, no menu **Construct**, selecciona a opção **Segments**.

4. Pinta a tua figura: selecciona os seus vértices por ordem e, no menu **Construct**, selecciona a opção **…Interior**. Podes mudar a cor da figura clicando no botão direito do rato e seleccionando a opção **Color**.

<u>ETAPA 3</u> – Marcação do centro da homotetia e construção das linhas auxiliares

1. Define o centro da homotetia marcando um ponto O exterior à figura original. (Não te esqueças de identificar o ponto).

2. Desenha a semi-recta com origem em O e que passa pelo ponto A, seguindo as etapas que se seguem:

- Selecciona o ponto O e o ponto A (por esta ordem);
- No menu **Construct** selecciona a opção **Ray;**
- Coloca a semi-recta a tracejado: selecciona-a, clica no botão direito do rato e selecciona a opção **Dashed**.

3. Repete os procedimentos anteriores para desenhares as restantes semi-rectas com origem em O e que passam por cada um dos outros vértices da figura.

<u>ETAPA 4</u> – Construção da figura transformada

1. Vamos marcar o ponto A', transformado de A pela homotetia de cento O, seguindo as seguintes etapas:

- Selecciona o ponto O e o ponto A (por esta ordem);
- No menu **Transform** selecciona a opção **Mark Vector.**
- Selecciona o ponto A e, no menu **Transform** selecciona a opção **Translate.**
- Aparece uma caixa de diálogo idêntica à da figura ao lado. Clica em **Translate.**
- Aparece o transformado do ponto A. Identifica-o como A'.

2. Repete os procedimentos anteriores para desenhares os restantes vértices da figura transformada.

3. Constrói a tua figura, seleccionando os vértices A', B', … por ordem e, no menu **Construct**, seleccionando a opção **Segments**. Os segmentos de recta não devem ficar a tracejado – selecciona-os e, no menu **Display**, selecciona a opção **Line Width** e, de seguida, a opção **Thin.**

4. Pinta a figura transformada a teu gosto (Ver etapa 2, ponto 4).

<u>ETAPA 5</u> – Criação de uma animação do centro da homotetia

1. Selecciona o ponto O.

2. No menu **Edit**, selecciona a opção **Action Buttons** e, em seguida, a opção **Animation.**

3. Aparece uma caixa de diálogo. Clica em **Ok.**

4. Aparece um botão como o da figura ao lado. Clica nesse botão e vê o que acontece.

5. Para parares a animação basta clicares novamente nesse botão.

6. Podes também criar uma animação nos vértices da tua figura. Experimenta!!

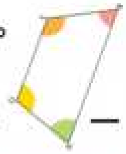
Anexo C11. PROPRIEDADES DOS ÂNGULOS DE UM QUADRILÁTERO

ESCOLA SECUNDÁRIA PADRE BENJAMIM SALGADO

Matemática 7.º ano

Ano lectivo 2010/2011

ACTIVIDADE PRÁTICA N.º 4 – Propriedades dos ângulos de um quadrilátero



Nome: ______________________________ Ano/Turma: ______ N.º _____ __/__ /2011

A questão em estudo hoje na aula de Matemática é a seguinte:

Qual é a soma das amplitudes dos ângulos internos de um quadrilátero?

No grupo do Tomás e da Beatriz depois de uma pesquisa, não se entendia!

O Tomás e a Beatriz seguiram diferentes etapas e descobriram que ambas poderiam dar resposta à questão em análise. Será isso possível?

Etapas/Construção da Beatriz	Etapas/Construção do Tomás
1.ª etapa: Desenha um quadrilátero ABCD **não trapézio** no espaço seguinte:	**1.ª etapa:** Com a ajuda do compasso, desenha dois quadriláteros **não trapézios** congruentes em cartolina
	2.ª etapa: Pinta os ângulos internos de cada um dos quadriláteros com uma cor diferente
	3.ª etapa: Com uma tesoura, recorta os dois quadriláteros
	4.ª etapa: Cola um desses quadriláteros no espaço seguinte:
2.ª etapa: No quadrilátero anterior traça a diagonal AC	**5.ª etapa:** Recorta o outro quadrilátero em quatro partes de modo que cada uma contenha um dos ângulos internos
3.ª etapa: Pinta os ângulos internos de um dos triângulos com a mesma cor.	**6.ª etapa:** Reagrupa os ângulos internos de modo a ficarem com o mesmo vértice e cola-os no espaço seguinte:
4.ª etapa: Pinta os ângulos internos do outro do triângulo com outra cor.	
5.ªetapa: Tira conclusões e responde à questão inicial	**7.ºetapa:** Tira conclusões e responde à questão inicial

1 Isabel Ferreira

Anexo C12. A PROPORCIONALIDADE DIRETA NUMA CALCULADORA GRÁFICA

Matemática 7.º ano **Turma __** **Ano lectivo 2008/2009**

ACTIVIDADE PRÁTICA N.º 11 – A proporcionalidade directa numa calculadora gráfica

Nome: ______________________ N.º ____ Data: __/05/ 2009

GRÁFICOS E PROPORCIONALIDADE DIRECTA

Analisa com atenção cada uma das quatro situações apresentadas e resolve cada uma das tarefas propostas.

I – Um depósito estava vazio quando foi aberta uma torneira para o encher.
Em vários instantes foi registada a altura da água no depósito.

Tempo (minutos)	0	1	2	3	4
Altura da água (cm)	0	2	4	6	8

II – Construíram-se vários quadrados com diferentes medidas e calculou-se a área de cada um desses quadrados.

Medida do lado (cm)	0	1	2	2,5	3
Área (cm^2)	0	1	4	6,25	9

III – Num clube de ténis paga-se uma mensalidade de €3 e mais €1 por cada ida ao clube para jogar ténis.

N.º de idas ao clube	0	1	2	3	4
Total a pagar (€)	3	4	5	6	7

IV – Num parque de diversões, um dos carrosséis descreve uma trajectória circular.
Em vários instantes foi registado o número de voltas que o carrossel deu.

Tempo (minutos)	0	1	2	3	4
Número de voltas	0	3	6	9	12

Tarefa 1: Verifica se cada uma das tabelas traduz uma situação de proporcionalidade directa

Tarefa 2: Introduz na **calculadora gráfica** os dados de cada uma das tabelas (uma de cada vez), constrói o gráfico correspondente a esses dados e faz um esboço do gráfico obtido.
(ver instruções no verso da folha)

Tarefa 3: O que têm em comum os gráficos que traduzem situações de proporcionalidade directa?

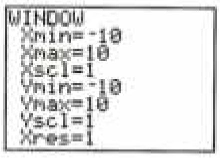
Tarefa 4: Completa a seguinte propriedade e regista-a no teu caderno diário.

O gráfico que representa uma situação de proporcionalidade directa é uma __________ que passa pela ______________________.

Isabel Ferreira e Patrícia Couto 1

CALCULADORA GRÁFICA: TEXAS TI – 84 Plus

1. **Definir a janela de visualização dos gráficos**
   - Prime a tecla **WINDOW** para definires os limites da janela de visualização dos gráficos.



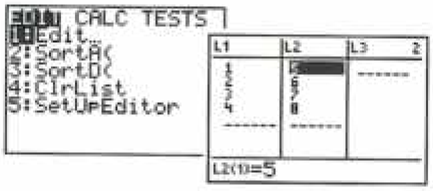
   - Altera os valores de modo que fiquem os seguintes:

     Xmin = 0　　　Ymin = 0

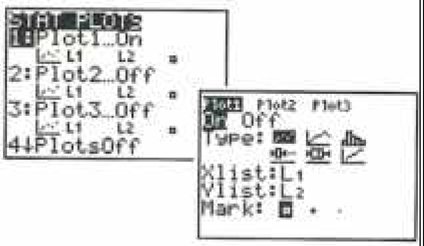
     Xmax = 5　　　Ymax = 12

   - Depois de fazeres as alterações, prime as teclas **2ND** e **MODE** (QUIT) para fechares o editor de janelas.

2. **Introduzir dos dados das tabelas**
   - Prime a tecla **STAT** e selecciona a opção **1: Edit…**
   - Introduz na coluna **L1** os valores da primeira linha da tabela e na coluna **L2** os valores da segunda linha (sempre que introduzires um valor deves premir a tecla **ENTER**).



3. **Construir do gráfico**
   - Prime as teclas **2ND** e **Y=** (STAT PLOT) e selecciona a opção 1.
   - Liga o gráfico (On); escolhe o <u>segundo</u> tipo de gráfico; verifica se XList é L1 e YList é L2 e, se quiseres, altera a marca para os pontos.
   - Prime a tecla **GRAPH** para desenhares o teu gráfico.
   - Se quiseres verificar as coordenadas dos teus pontos basta premires a tecla **TRACE** e percorrê-los com as setas.



Anexo C13. Demonstração do Teorema de Pitágoras em ambiente TI-Nspire

Apresentação da parte da Atividade Prática a desenvolver com os alunos do 8.º ano.

APM Centro Formação

Matemática em Ambiente TI-Nspire
ATIVIDADE PRÁTICA
Demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras

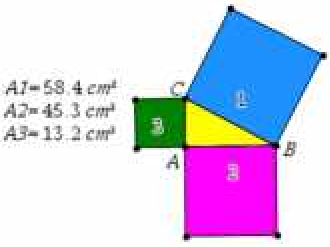
Para resolveres esta atividade vais utilizar a calculadora gráfica TI- Nspire CX e tirar partido das suas potencialidades. No menu principal acede ao documento *Pitagoras_quadrados* e inicia as tarefas a seguir propostas.

PARTE I – QUADRADOS CONSTRUÍDOS SOBRE OS LADOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

Relembra a demonstração do Teorema de Pitágoras para diferentes medidas dos lados de um triângulo retângulo.

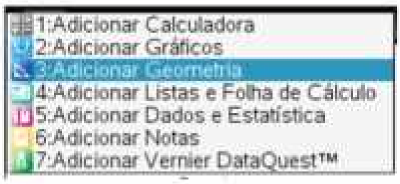
- Movendo os vértices do triângulo retângulo e analisando as áreas dos quadrados construídos sobre os seus lados, recorda a relação estabelecida no Teorema de Pitágoras:

  A área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.



PARTE II – TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS CONSTRUÍDOS SOBRE OS LADOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

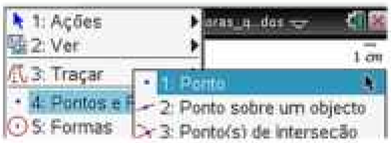
No menu principal abre um novo documento de Geometria (**1:** Novo → **3:** *Adicionar Geometria*)



TAREFA 1 – Construção do triângulo retângulo

Etapas a seguir:

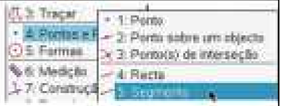
1. Marca dois pontos (menu → **4:** *Pontos e retas* → **1:** *Ponto*)



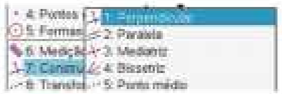
2. Identifica os dois pontos A e B (colocar o cursor sobre o ponto até surgir a forma de mão → ctrl menu → **2:** *Etiqueta* → shift A → enter → esc)

Demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras
Isabel Ferreira e Patrícia Couto 1

3. Constrói o segmento de reta AB (menu → **4:** *Pontos e retas* → **5:** *Segmento* → selecionar os pontos, clicando sucessivamente sobre cada um deles → enter → esc)



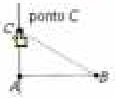
4. Traça a reta perpendicular ao segmento de reta AB, no ponto A (menu → **7:** *Construção* → **1:** *Perpendicular* → selecionar o ponto A e, de seguida, o segmento de reta AB → enter → esc)
Nota: Para prolongar a reta, prender a ponta da reta premindo + e arrastar.



5. Marca um ponto C na reta perpendicular (menu → **4:** *Pontos e retas* → **1:** *Ponto* → posicionar sobre a reta → enter → esc)

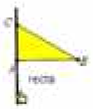
6. Atribui ao ponto marcado a letra C (ver etapa **2.**)

7. Constrói o triângulo ABC (menu → **5:** *Formas* → **2:** *Triângulo* → selecionar sucessivamente os pontos A, B e C → enter → esc)



8. Sombreia o triângulo ABC (Colocar cursor sobre o triângulo ABC → → menu → **B:** *Cor* → **2:** *Cor de preenchimento* → selecionar a cor → enter)

9. Oculta a reta AC (Posicionar o cursor sobre a reta → → menu → **4:** *Ocultar*)



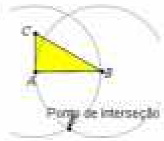
2

TAREFA 2 – Construção do triângulo equiláteros sobre os lados do triângulo retângulo

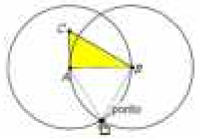
Etapas a seguir:

1. Determina o terceiro vértice do triângulo equilátero de lado [AB]
   1.1. Traça as circunferências de centro A e B e raio [AB] (menu → **5:** *Formas* → **1:** *Circunferência* → Selecionar sucessivamente os pontos A e B, para traçar a circunferência de centro A e raio [AB] → enter → Selecionar sucessivamente os pontos B e A, para traçar a circunferência de centro B e raio [AB] → enter → esc)

   1.2. Marca o ponto de interseção das duas circunferências (menu → **4:** *Pontos e retas* → **1:** *Ponto* → Sobrepor na interseção das circunferências → enter → esc)

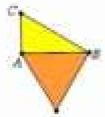


   1.3. Constrói o triângulo cujos vértices são os pontos A e B e o ponto de interseção assinalado (menu → **5:** *Formas* → **2:** *Triângulo* → selecionar sucessivamente os pontos → enter → esc)



   1.4. Sombreia o triângulo construído (ver etapa **8.** da tarefa 1)

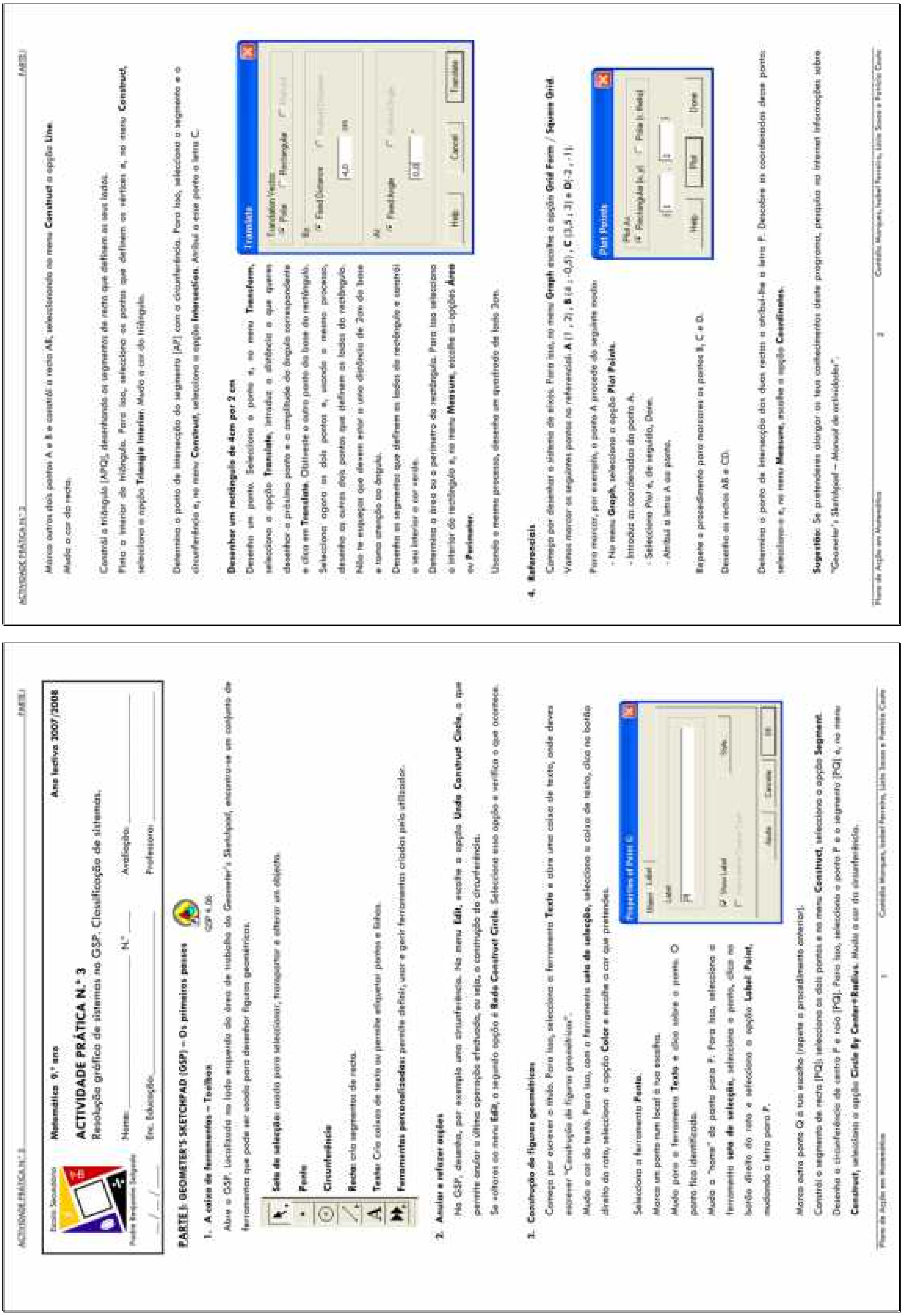
   1.5. Oculta as circunferências (ver etapa **9.** da tarefa 1)



2. Repete as etapas anteriores para determinar o terceiro vértice dos triângulos equiláteros construídos sobre os outros lados do triângulo retângulo.

1

Anexo C14. Resolução Gráfica de Sistemas no GSP. Classificação de Sistemas



ACTIVIDADE PRÁTICA N.º 3 PARTE I

Escola Secundária Padre Benjamim Salgado

Matemática 9.º ano Ano lectivo 2007/2008

ACTIVIDADE PRÁTICA N.º 3

Resolução gráfica de sistemas no GSP. Classificação de sistemas.

Nome: ______ N.º ___ Avaliação: ______

Enc. Educação: ______ Professora: ______

__/__/____

PARTE I: GEOMETER'S SKETCHPAD (GSP) – Os primeiros passos GSP 4.06

1. A caixa de ferramentas – Toolbox

Abre o GSP. Localizada no lado esquerdo da área de trabalho do Geometer's Sketchpad, encontra-se um conjunto de ferramentas que pode ser usado para desenhar figuras geométricas.

- **Seta de selecção:** usada para seleccionar, transportar e alterar um objecto.
- **Ponto**
- **Circunferência**
- **Recta:** cria segmentos de recta.
- **Texto:** Cria caixas de texto ou permite etiquetar pontos e linhas.
- **Ferramentas personalizadas:** permite definir, usar e gerir ferramentas criadas pelo utilizador.

2. Anular e refazer acções

No GSP, desenha, por exemplo uma circunferência. No menu **Edit**, escolhe a opção **Undo Construct Circle**, o que permite anular a última operação efectuada, ou seja, a construção da circunferência.

Se voltares ao menu **Edit**, a segunda opção é **Redo Construct Circle**. Selecciona essa opção e verifica o que acontece.

3. Construção de figuras geométricas

Começa por escrever o título. Para isso, selecciona a ferramenta **Texto** e abre uma caixa de texto, onde deves escrever "Construção de figuras geométricas".

Muda a cor do texto. Para isso, com a ferramenta **seta de selecção**, selecciona a caixa de texto, clica no botão direito do rato, selecciona a opção **Color** e escolhe a cor que pretendes.

Selecciona a ferramenta **Ponto**.

Marca um ponto num local à tua escolha.

Muda para a ferramenta **Texto** e clica sobre o ponto. O ponto fica identificado.

Muda o "nome" do ponto para P. Para isso, selecciona a ferramenta **seta de selecção**, selecciona o ponto, clica no botão direito do rato e selecciona a opção **Label Point**, mudando a letra para P.

Properties of Point G — Object | Label — Label: [P] — Show Label — Style... — Ajuda | Cancelar | OK

Marca outro ponto Q à tua escolha (repete o procedimento anterior).

Constrói o segmento de recta [PQ]: selecciona os dois pontos e no menu **Construct**, selecciona a opção **Segment**.

Desenha a circunferência de centro P e raio [PQ]. Para isso, selecciona o ponto P e o segmento [PQ] e, no menu **Construct**, selecciona a opção **Circle By Center+Radius**. Muda a cor da circunferência.

Plano de Acção em Matemática 1 Custódia Marques, Isabel Ferreira, Lúcia Sousa e Patrícia Couto

ACTIVIDADE PRÁTICA N.º 3 PARTE I

Marca outros dois pontos A e B e constrói a recta AB, seleccionando no menu **Construct** a opção **Line**.

Muda a cor da recta.

Constrói o triângulo [APQ], desenhando os segmentos de recta que definem os seus lados.

Pinta o interior do triângulo. Para isso, selecciona os pontos que definem os vértices e, no menu **Construct**, selecciona a opção **Triangle Interior**. Muda a cor do triângulo.

Determina o ponto de intersecção do segmento [AP] com a circunferência. Para isso, selecciona o segmento e a circunferência e, no menu **Construct**, selecciona a opção **Intersection**. Atribui a esse ponto a letra C.

Desenhar um rectângulo de 4cm por 2 cm

Desenha um ponto. Selecciona o ponto e, no menu **Transform**, selecciona a opção **Translate**, introduz a distância a que queres desenhar o próximo ponto e a amplitude do ângulo correspondente e clica em **Translate**. Obtiveste o outro ponto da base do rectângulo.

Selecciona agora os dois pontos e, usando o mesmo processo, desenha os outros dois pontos que definem os lados do rectângulo.

Não te esqueças que devem estar a uma distância de 2cm da base e toma atenção ao ângulo.

Desenha os segmentos que definem os lados do rectângulo e constrói o seu interior a cor verde.

Determina a área ou o perímetro do rectângulo. Para isso selecciona o interior do rectângulo e, no menu **Measure**, escolhe as opções **Área** ou **Perimeter**.

Translate — Translation Vector: Polar / Rectangular / Marked — By: Fixed Distance / Marked Distance — 4,0 cm — At: Fixed Angle / Marked Angle — 0,0 ° — Help | Cancel | Translate

Usando o mesmo processo, desenha um quadrado de lado 3cm.

4. Referenciais

Começa por desenhar o sistema de eixos. Para isso, no menu **Graph** escolhe a opção **Grid Form** / **Square Grid**.

Vamos marcar os seguintes pontos no referencial: **A** (1 , 2) , **B** (4 ; -0,5) , **C** (3,5 ; 3) e **D**(-2 , -1).

Para marcar, por exemplo, o ponto A procede do seguinte modo:

- No menu **Graph**, selecciona a opção **Plot Points**.
- Introduz as coordenadas do ponto A.
- Selecciona *Plot* e, de seguida, Done.
- Atribui a letra A ao ponto.

Plot Points — Plot As: Rectangular (x, y) / Polar (r, theta) — (1 , 2) — Help | Plot | Done

Repete o procedimento para marcares os pontos B, C e D.

Desenha as rectas AB e CD.

Determina o ponto de intersecção das duas rectas e atribui-lhe a letra F. Descobre as coordenadas desse ponto: selecciona-o e, no menu **Measure**, escolhe a opção **Coordinates**.

Sugestão: Se pretenderes alargar os teus conhecimentos deste programa, pesquisa na Internet informações sobre "Geometer's Sketchpad – *Manual de actividades*".

Plano de Acção em Matemática 2 Custódia Marques, Isabel Ferreira, Lúcia Sousa e Patrícia Couto

PARTE II: Resolução de problemas usando sistemas de equações

Resolve cada um dos seguintes problemas usando sistemas.

Problema	Dados do problema	Sistema que traduz o problema	Resolução do sistema e resposta ao problema
1. Dois números são tais que subtraindo 4 unidades ao primeiro obtém-se o segundo e adicionando 2 unidades ao segundo obtém-se o triplo do primeiro. Quais são os números?			
2. Um pai tem o triplo da idade do filho. A diferença entre a idade do pai e o triplo da idade do filho é 5 anos. Que idade tem cada um?			

Problema	Dados do problema	Sistema que traduz o problema	Resolução do sistema e resposta ao problema
3. A Joana e a Luísa compraram cadernos e canetas iguais. A Joana pagou 2,5€ por dois cadernos e uma caneta. A Luísa pagou 7,5€ por três canetas e seis cadernos. Quanto custou cada caneta e cada caderno?			

PARTE III: Resolução gráfica de sistemas no Geometer's Sketchpad

Pretende-se com esta tarefa resolver graficamente os sistemas referentes aos problemas propostos na Parte II.

1. **Resolve cada uma das equações dos sistemas em ordem a y.**

	Sistema	Resolução das equações em ordem a y
Problema 1		
Problema 2		
Problema 3		

2. **Completa as seguintes tabelas:**

Problema 1

	x	y = …………	
1.ª Equação	0		A (…… , ……)
	-1		B (…… , ……)
2.ª Equação	x	y = …………	
	0		C (…… , ……)
	1		D (…… , ……)

Problema 2

	x	y = …………	
1.ª Equação	0		E (…… , ……)
	-1		F (…… , ……)
2.ª Equação	x	y = …………	
	0		G (…… , ……)
	1		H (…… , ……)

Problema 3

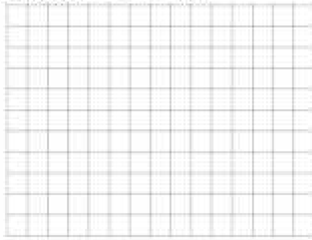
	x	y = …………	
1.ª Equação	0		I (…… , ……)
	-1		J (…… , ……)
2.ª Equação	x	y = …………	
	0		K (…… , ……)
	1		L (…… , ……)

3. **Resolução gráfica dos problemas no GSP**

A seguir estão os passos que deves seguir para resolver graficamente o problema 1. Deves seguir o mesmo procedimento para resolveres os problemas 2 e 3.

Problema 1

a) Abre o GSP.
b) Desenha um sistema de eixos.
c) Abre uma caixa de texto e escreve a primeira equação do sistema do problema 1.
d) Marca os pontos A e B no referencial.
e) Constrói a recta AB.
f) Coloca a mesma cor na equação e na recta.
g) Repete os passos de c) a f) para a segunda equação, desenhando assim recta CD.
h) Faz um esboço do gráfico que obtiveste.



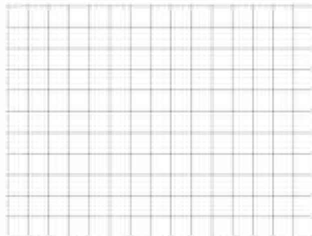
i) Indica a posição relativa das rectas representadas. ______________________
j) Indica o declive e a ordenada na origem de cada uma das rectas.

	Declive	Ordenada na origem
1.ª Equação		
2.ª Equação		

k) Quantos pontos de intersecção existem? ______________ Se possível, determina esse(s) ponto(s) e indica as suas coordenadas. ______________________
l) Compara as coordenadas desse(s) ponto(s) com a solução que encontraste quando resolveste o sistema analiticamente. ______________________

Problema 2

a) Adapta para o problema 2 as instruções do problema 1 de a) até g).
b) Faz um esboço do gráfico que obtiveste.



c) Indica a posição relativa das rectas representadas. ______________________

d) Indica o declive e a ordenada na origem de cada uma das rectas.

	Declive	Ordenada na origem
1.ª Equação		
2.ª Equação		

e) Quantos pontos de intersecção existem? ______________ Se possível, determina esse(s) ponto(s) e indica as suas coordenadas. ______________________

f) Compara as coordenadas desse(s) ponto(s) com a solução que encontraste quando resolveste o sistema analiticamente. ______________________

____

Problema 3

a) Adapta para o problema 3 as instruções do problema 1 de a) até g).

b) Faz um esboço do gráfico que obtiveste.

c) Indica a posição relativa das rectas representadas. ______________________

d) Indica o declive e a ordenada na origem de cada uma das rectas.

	Declive	Ordenada na origem
1.ª Equação		
2.ª Equação		

e) Quantos pontos de intersecção existem? ______________ Se possível, determina esse(s) ponto(s) e indica as suas coordenadas. ______________________

f) Compara as coordenadas desse(s) ponto(s) com a solução que encontraste quando resolveste o sistema analiticamente. ______________________

____

Anexo C15. **O MÉTODO DE TALES**

Matemática 9.º ano | Agrupamento de Escolas de Infias - Vizela

ATIVIDADE PRÁTICA: MÉTODO DE TALES

Nome: ______________________ N.º____ Turma: _____ Ano letivo 2013/2014

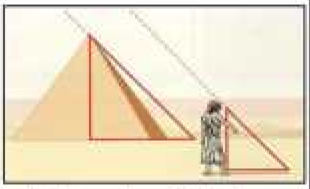
1. TALES DE MILETO

Tales (624–548 a.C.) nasceu na Grécia (Mileto) e é considerado um dos grandes sábios da Antiguidade. Foi matemático, físico, astrónomo, filósofo, professor e comerciante.

Entre outros feitos, previu corretamente o eclipse solar de 585 a.C. e espantou os egípcios ao calcular a altura da Grande Pirâmide (Quéops), espetando simplesmente uma estaca no chão e recorrendo às sombras e à semelhança de triângulos.

2. ESTRATÉGIA DE TALES

Quando Tales, cerca de 600 a.C., se encontrava no Egipto, foi-lhe pedido por um mensageiro do faraó, em nome do soberano, que calculasse a altura da pirâmide de Quéops – corria a voz de que o sábio sabia medir a altura de construções elevadas por arte geométrica, sem ter que as subir.



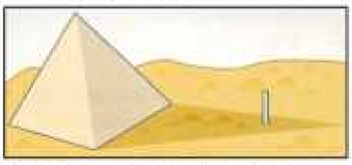
Tales espetou uma estaca no chão, na vertical, e esperou até ao momento em que o comprimento da sombra que a estaca projetava fosse igual ao comprimento da estaca. Quando tal aconteceu, Tales disse ao mensageiro: "**Mede depressa a sombra da pirâmide – o comprimento dessa sombra é igual à altura da pirâmide**".

Este processo era muito demorado e exigia muita paciência para esperar pelo momento certo!

Mas Tales teve outra ideia. Através dos seus conhecimentos de semelhança de triângulos, mostrou também como se podia medir a altura da pirâmide a qualquer hora do dia.

Utilizando uma estaca, procedeu da seguinte forma:

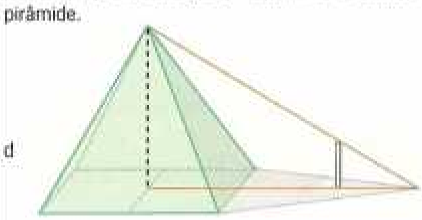
1. Na sombra da pirâmide colocou verticalmente uma estaca com 2 metros, de tal modo que a sombra da estaca terminava no mesmo ponto que acabava a sombra da pirâmide.



2. Mediu o lado da base da pirâmide: 228m.
3. Mediu a sombra projetada pela pirâmide: 131m.
4. Mediu a sombra projetada pela estaca: 3,5m.
5. Aplicou a semelhança aos triângulos relativos à pirâmide e à estaca.

3. DETERMINAÇÃO DA ALTURA DA GRANDE PIRÂMIDE

Completa o esquema que se segue, assinalando as dimensões determinadas por Tales, e, aplicando a semelhança de triângulos, determina a altura da pirâmide.



4. APLICAÇÃO DO MÉTODO DE TALES

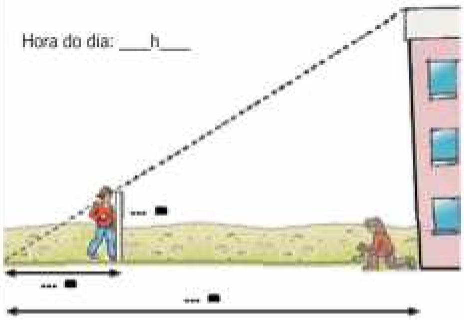
Vamos aplicar o Método de Tales para determinar a altura de um local da nossa escola?

5. MATERIAL NECESSÁRIO:

Uma estaca; fitas métricas; material de escrita e calculadora.

6. INSTRUÇÕES PARA AULA NO EXTERIOR

1. Um dos elementos do grupo segura verticalmente a estaca de modo a que os extremos da sombra da estaca e da sombra do local a medir coincidam.
2. Outro elemento do grupo estica a fita métrica desde o extremo das sombras até ao local a medir.
3. Outro elemento efetua as medições necessárias e regista-as no esquema que se segue, indicando também a hora do dia a que foram registadas essas medições.



Atividade Prática 9.º ano | Isabel Ferreira

Anexo C16. O MÉTODO DE EUCLIDES

Matemática 9.º ano | Agrupamento de Escolas de Infias - Vizela

ATIVIDADE PRÁTICA: Método de Euclides

Nome: ______________________ N.º____ Turma: _____ Ano letivo 2013/2014

1.MÉTODO DO ESPELHO

O Método de Tales é muito útil para determinar alturas inacessíveis, mas não se pode aplicar num dia nublado. Euclides, um matemático grego que viveu no século III a. C., criou outro método para determinar alturas usando a semelhança de triângulos – o **Método do Espelho**.

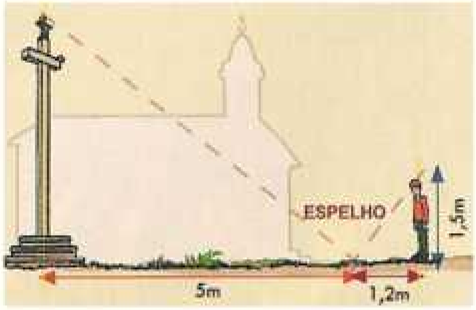
Recorrendo ao auxílio de um espelho, e com a ajuda de alguém, é possível determinar esse tipo de alturas:

1. Coloca-se um espelho no chão, afastado do local a medir.
2. Afastámo-nos do espelho, sempre em linha reta e no sentido contrário ao do local a medir, até se observar no espelho a imagem do extremo superior desse local.
3. Mede-se a distância que vai desde a nossa posição até ao espelho.
4. Mede-se a distância do edifício ao espelho.
5. Mede-se a altura a que se encontram os nossos olhos.
6. Aplica-se a semelhança de triângulos.

Nota: Num espelho, o ângulo de incidência é geometricamente igual ao ângulo de reflexão, logo os triângulos são semelhantes.

2. DETERMINAÇÃO DA ALTURA DE UM CRUZEIRO USANDO O MÉTODO DO ESPELHO

Para determinar a altura do cruzeiro que fica ao lado da igreja da sua aldeia, o Tomé utilizou o Método do Espelho.
No esquema que se segue está representado o esquema que traduz as medições efetuadas pelo Tomé.
De acordo com os dados da figura, determina a altura do cruzeiro.



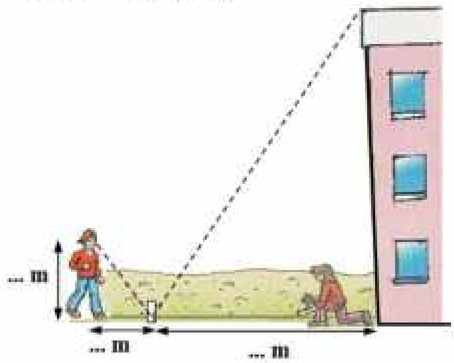
3. APLICAÇÃO DO MÉTODO DO ESPELHO

Vamos aplicar o Método do Espelho para determinar a altura de um local da nossa escola.

4.MATERIAL NECESSÁRIO: Um espelho; fitas métricas; material de escrita e calculadora.

5.INSTRUÇÕES PARA O EXTERIOR

1. Um dos elementos do grupo coloca o espelho no chão a afasta-se, em linha reta e no sentido contrário ao do local, até observar no espelho a imagem do extremo superior desse local.
2. Os outros elementos do grupo efetuam as medições necessárias e registam-nas no esquema que se segue.



7. RELATÓRIO FINAL

Elabora o relatório desta atividade prática de acordo com o modelo que segue junto a este guião.

Atividade Prática 9.º ano | Isabel Ferreira

Anexo C17. UTILIZAÇÃO DO QUADRANTE

Matemática 9.º ano | Agrupamento de Escolas de Infias - Vizela

ATIVIDADE PRÁTICA: UTILIZAÇÃO DO QUADRANTE

Nome: ______________________ N.º____ Turma: _____ Ano letivo 2013/2014

1.INTRODUÇÃO

Sobre o teodolito e o quadrante...

O teodolito é um instrumento de ótico de medida que se utiliza em várias áreas técnicas, em particular na topografia. Serve para determinar distâncias inacessíveis utilizando ângulos de elevação e ângulos de depressão.

O quadrante é um instrumento que também serve para medir ângulos ou a altura angular de um ponto. Este instrumento é usado há mais de 500 anos por astrónomos e navegantes.

O grupo de trabalho irá recuar no tempo e experimentar este instrumento construído nas aulas, para medir a altura de um edifício. Para tal, aponta-se a mira do quadrante para o ponto a medir e lê-se o ângulo assinalado pelo fio que pende na vertical.

Atenção: Nunca espreitar pela palhinha diretamente para o Sol. A observação pode provocar danos irreversíveis na visão!

2. OBJETIVO DA ATIVIDADE

Determinar um valor aproximado da altura de edifício da escola, utilizando um quadrante.

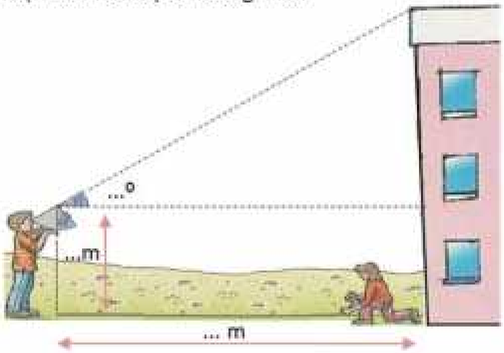
3. MATERIAIS E FERRAMENTAS

- Quadrantes construídos na aula;
- 1 fita métrica com 20m de comprimento;
- 1 fita métrica com 5m de comprimento;
- Calculadora científica;
- Material de escrita.

4. INSTRUÇÕES PARA O TRABALHO NO EXTERIOR

Os elementos do grupo devem organizar-se para efetuar as medições necessárias para determinar a altura do local indicado, utilizando os quadrantes construídos. Devem ser o mais rigorosos possível nas medições efetuadas.

Reparem no esquema seguinte:



Para cada uma dessas medições devem seguir os seguintes passos:

1. Um dos elementos do grupo segura a fita métrica de 20m junto à parede do local a medir. Outro elemento estica-a desde essa parede até ao local escolhido para efetuar as medições (situado **entre 5m e 20m**, à vossa escolha!).
2. O elemento que **utiliza o quadrante** posiciona-se nesse local e coloca o quadrante na posição correta, ou seja, de modo a que ao espreitar pela palhinha consiga ver a linha do topo do local a medir.
3. Outro elemento **efetua e regista na tabela** as medições necessárias: altura do chão a que se encontra o quadrante e ângulo de elevação do local em relação aos olhos do observador.

5. REGISTO DE OBSERVAÇÕES

Registar as medições efetuadas no exterior na grelha apresentada no modelo de relatório.

6. ANÁLISE DE RESULTADOS

Usando os conhecimentos de Trigonometria, determina-se as "alturas" do local, calcula-se a média dessas alturas e tiram-se as conclusões.

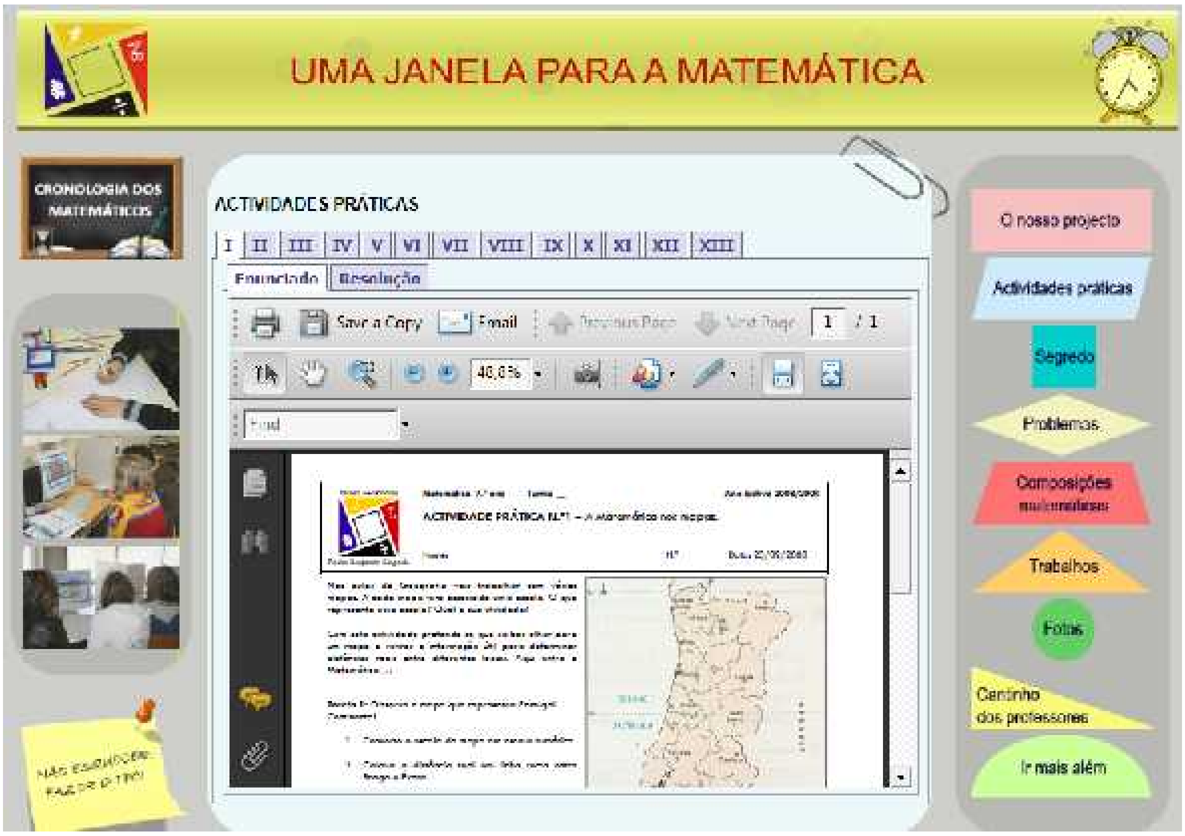
7. RELATÓRIO FINAL

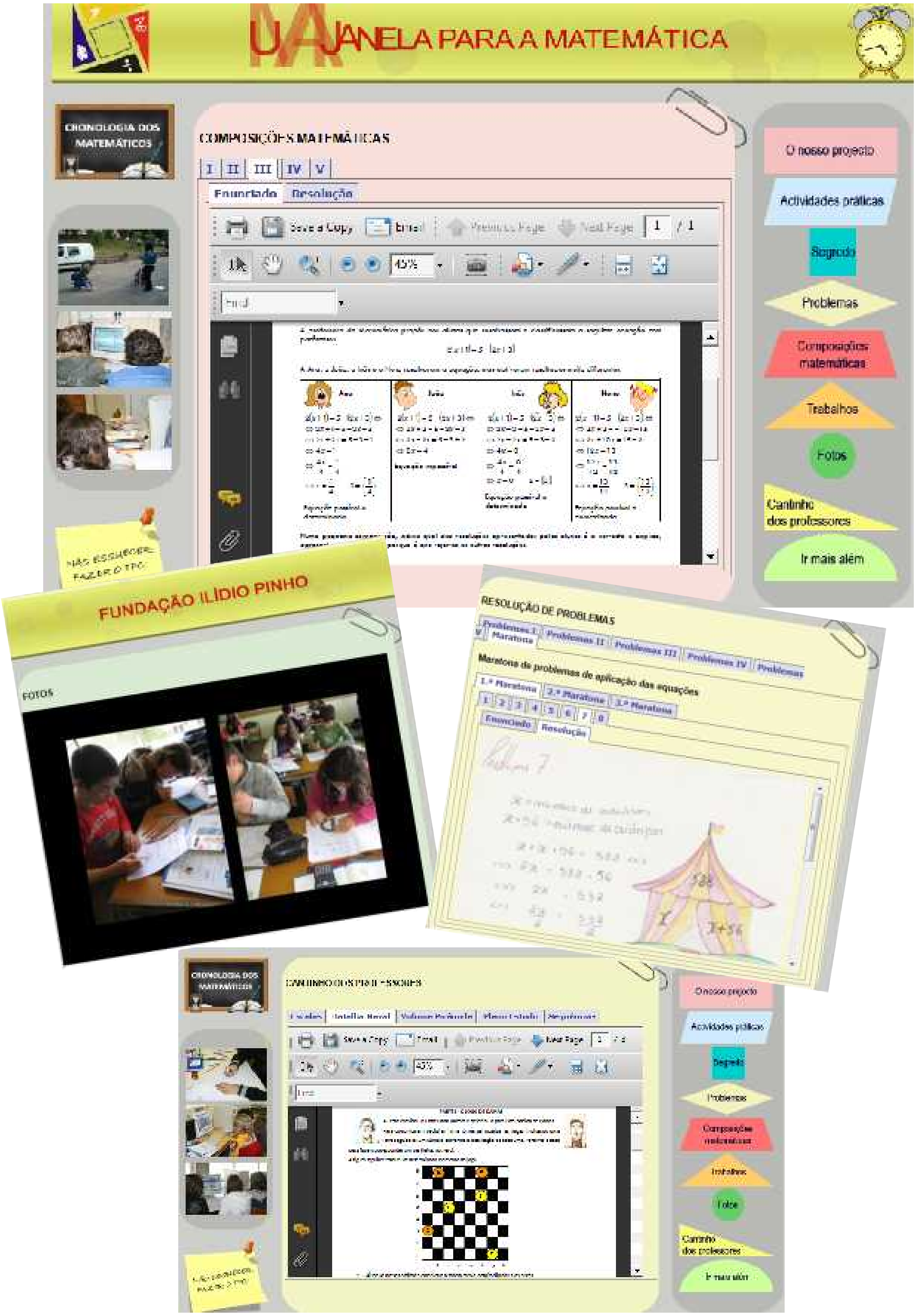
Elabora o relatório desta atividade prática de acordo com o modelo que segue junto a este guião.

Atividade Prática 9.º ano | Isabel Ferreira

Anexo C18. OFICINAS DE MATEMÁTICA NA PLATAFORMA *MOODLE*

Anexo C19. **O PROJETO - UMA JANELA PARA A MATEMÁTICA**




UMA JANELA PARA A MATEMÁTICA
CRONOLOGIA DOS MATEMÁTICOS
COMPOSIÇÕES MATEMÁTICAS
I II III IV V
Enunciado Resolução
Save a Copy
Email
Previous Page
Next Page
O nosso projecto
Actividades práticas
Segredo
Problemas
Composições matemáticas
Trabalhos
Fotos
Cantinho dos professores
Ir mais além
NÃO ESQUECER FAZER O TPC
FUNDAÇÃO ILÍDIO PINHO
FOTOS
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
Problemas I
Problemas II
Problemas III
Problemas IV
Maratona
Maratona de problemas de aplicação das equações
1.ª Maratona
2.ª Maratona
3.ª Maratona
1 2 3 4 5 6 7 8
Enunciado
Resolução
Problema 7
CANTINHO DOS PROFESSORES

Anexo C20. Notícias – Encontros e Desafios no Europarque

28 O POVO FAMALICENSE

Escola Secundária Padre Benjamim Salgado no ComCiência – St. Maria da Feira

A Escola Secundária Padre Benjamim Salgado (ESPBS), Joane, Vila Nova de Famalicão, participou, nos dias 29 e 30 de Junho, na maior mostra de projectos de Ciência e Tecnologia nacional Na Escola ComCiência – Encontros e Desafios no Europarque, em Santa Maria da Feira.

Os professores coordenadores levaram nove projectos das diversas áreas de ciências (Física, Química, Biologia, Geologia e Matemática) para essa mostra, que tinha como objectivo realçar e reforçar a importância do ensino experimental na aprendizagem. Todos os objectivos propostos, aquando do início dos projectos, foram atingidos em pleno. As expectativas projectadas foram largamente superadas, quer para os alunos, quer para os professores directamente envolvidos nos mesmos. O espírito de cooperação e respeito gerado entre todos os envolvidos possibilitou a excelência do desenvolvimento dos trabalhos e transpareceu uma segurança e um "querer melhor participar". Para isso, foi necessário um envolvimento emocional, acreditar no que se fazia e sentir prazer naquilo que se fazia! O elenco dos projectos escolhidos integrou alguns já premiados, nomeadamente, os projectos "Quimicando - A ciência e a Tecnologia na Alimentação" e "Demonstrare... A Física na escola" que foram vencedores do 1.º prémio na 2.ª e 3.ª edição do concurso Ciência na Escola, promovido pela Fundação Ilídio Pinho. Outro projecto " Biocombustíveis, Uma questão de sobrevivência..." que demonstra todas as potencialidades de combustíveis alternativos à utilização do petróleo e que obteve uma menção honrosa no 17º Concurso Jovens Cientistas e Investigadores.

Na sétima edição do concur-

Fonte: *O Povo Famalicense* (7 a 13 de julho de 2009, p.28)

Anexo C21. RELAÇÃO ENTRE VOLUMES DE PIRÂMIDES E PRISMAS EM GSP

Matemática 7.º ano **Turma** __ **Ano lectivo** ____/____

ESCOLA SECUNDÁRIA PADRE BENJAMIM SALGADO

ACTIVIDADE PRÁTICA

Relação entre o volume de uma pirâmide e um prisma com a mesma base e a mesma altura

GSP 4.06

Nome: ______________________ N.º ____ Data: __/__/ ____

PROBLEMA

A Cuca está em experiências. Pretende descobrir qual é o volume de uma pirâmide quadrangular mas só se lembra do volume de um prisma.

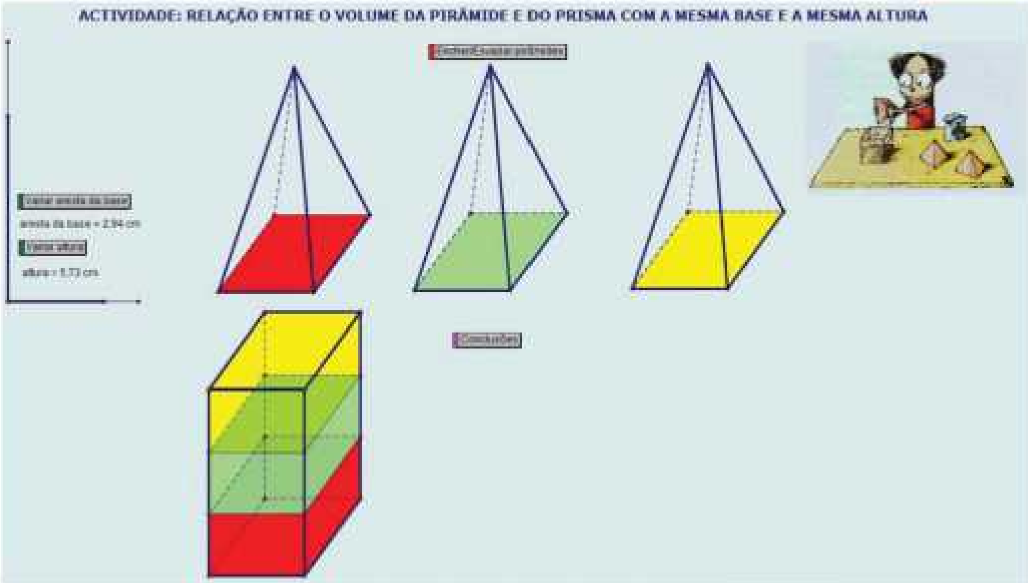
Construiu 3 pirâmides e um prisma com a mesma base e a mesma altura.

Para ajudares a Cuca, vais recorrer ao programa informático **Geometer's Sketchpad**.

Tarefa 1: Abre o documento de *Geometer's Sketchpad* que serve de suporte a esta actividade – **"Volume da pirâmide"**.

Volume da pirâmide

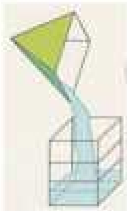
Depois de aberto, o documento tem o seguinte aspecto:



Tarefa 2: Escolhe uma altura para as tuas pirâmides. Para isso, carrega no botão Variar altura.

Tarefa 3: Escolhe uma medida para a aresta da base das pirâmides. Para isso, carrega no botão Variar aresta da base.

Tarefa 4: Ajuda a Cuca a determinar o volume do prisma, apresentando todos os cálculos.
(Nota: Apresenta o resultado arredondado para 2 casas decimais.)



Tarefa 5: A Cuca quer transferir o "líquido" de cada uma das pirâmides para o prisma.
Carrega no botão Encher/Esvaziar pirâmides e regista o que aconteceu.

Tarefa 6: Consegues descobrir qual é o volume de cada uma das pirâmides? Como?

Tarefa 7: Estabelece uma relação entre o volume de cada pirâmide e o volume do prisma com a mesma base e a mesma altura.

Tarefa 8: Escreve uma fórmula para calcular o volume de uma pirâmide, partindo do volume do prisma.

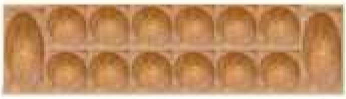
Tarefa 9: Verifica as tuas respostas e conclusões carregando no botão Conclusões .

Anexo C22. CONSTRUÇÃO DE TABULEIROS DO OURI

ESCOLA SECUNDÁRIA PADRE BENJAMIM SALGADO

Matemática 8.º ano

Ano lectivo 2009/2010



ACTIVIDADE PRÁTICA N.º 10 – Construção do Jogo do Ouri

__/__/2010

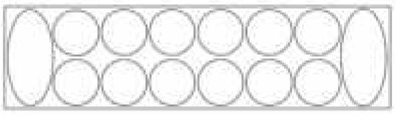
Nome: ______________________________ Ano/Turma: ______ N.º _____

Tarefa 1: *SOBRE O JOGO…*

O Ouri é um jogo de captura. O objectivo do jogo é capturar mais sementes que o adversário. Quando isso ocorre, o jogo pode terminar de imediato com a vitória do jogador que conseguiu este objectivo. Vence o jogador que obtiver 25 (ou mais) sementes.

Como o número de sementes iniciais é par, é possível que a partida termine num empate, mas entre jogadores que não sejam mestres, este resultado não é comum.

Tarefa 2: *Construção do Jogo*



Material

- 48 sementes (ou outros objectos pequenos, tais como avelãs ou pedras);
- 14 tampinhas de garrafões;
- 1 tabuleiro (caixa de sapatos, pacote de leite, …)
- Cola

Regras do Jogo

No tabuleiro existem duas filas, cada uma com seis buracos circulares, chamados casas, nos quais se encontram as sementes em jogo. Cada extremidade do tabuleiro é ocupada por um buraco maior, designado por depósito, destinado a guardar as sementes capturadas ao adversário ao longo do jogo.

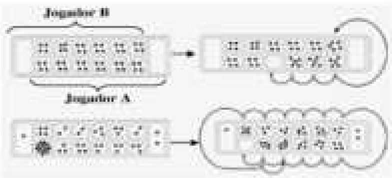
Participam no jogo dois jogadores e estes jogam alternadamente. O depósito de cada um é o que fica à sua direita.

- **Movimentos**

No início do jogo são colocadas 4 sementes em cada uma das doze casas.

O jogador que abre o jogo colhe todas as sementes de um dos seus buracos e distribui-as, uma a uma, nos buracos seguintes, no sentido anti-horário. Esta regra mantém-se para todas as jogadas.

Quando uma casa contiver 12 ou mais sementes, o jogador dá uma volta completa ao tabuleiro, saltando a casa donde partiu.



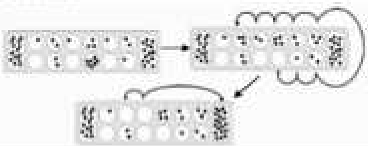
Não se pode tirar as sementes das casas que contenham apenas uma, enquanto houver casas com duas ou mais.

- **Capturas**

Os jogadores capturam sementes nas seguintes situações:

Quando, ao colocar a última semente numa casa do adversário, esta ficar com duas ou três sementes, o jogador retira-as e coloca-as no seu depósito.

Se a(s) casa(s) anterior(es) a essa também tiver(em) duas ou três sementes, o jogador captura-as e guarda-as no seu depósito. A captura é interrompida na primeira casa que não tenha esse número de sementes.



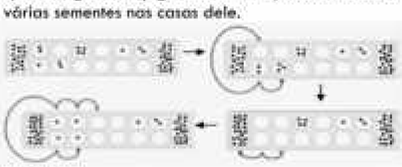
NOTA: Se, ao depositar a última semente na casa do adversário, esta ficar com quatro ou mais sementes, o jogador não as pode capturar. Se a casa estiver vazia e ficar com uma semente após a jogada, também não haverá captura.

- **Regras suplementares**

As regras suplementares aplicam-se quando um dos jogadores fica sem sementes:

Quando um jogador realiza um movimento e fica sem sementes, o adversário é obrigado a efectuar uma jogada em que introduza uma ou várias sementes do lado desse jogador.

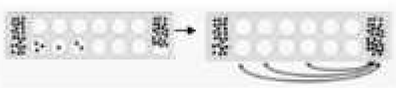
Se um jogador realiza uma captura e deixa o adversário sem sementes, é obrigado a jogar novamente, de forma a introduzir uma ou várias sementes nas casas dele.



- **Fim da partida**

Quando um jogador capturar a maioria das sementes – 25 ou mais – a partida finaliza e esse jogador ganha.

Quando um jogador fica sem sementes e o adversário não pode jogar de forma a introduzir algumas sementes nas casas desse jogador, a partida termina e o adversário recolhe as sementes que estão nas suas casas para o seu depósito. Ganha quem tiver um maior número de sementes.



Quando existem poucas sementes no tabuleiro e se cria uma situação que se repete ciclicamente, sem que os jogadores possam ou queiram evitá-lo, o jogo termina. Ganha o jogador com mais sementes (as sementes que sobraram no tabuleiro não são recolhidas). (*nota: esta nova regra para lidar com ciclos será implementada já a partir do 6ºCNJM*).

Anexo C23. JORNAL PAU DE GIZ (ESCOLA BÁSICA E SECUNDÁRIA DE INFIAS)

"Um conto que contas" no 2.º lugar no concurso nacional

O nosso agrupamento conquistou o 2.º lugar no concurso nacional "Um conto que contas – 2013/14", promovido pela Sociedade Portuguesa de Matemática em parceria com as Universidades de Évora e dos Açores. A Matemática, a Língua Portuguesa e os problemas do Planeta Terra 2013 de mãos dadas no conto "Distúrbios em Ecomat" que nos faz pensar sobre a preservação dos recursos naturais. O Eduardo Freitas e Sara Veiga do 9.º E aceitaram o desafio da professora de Matemática e arregaçaram as mangas conquistando um honroso 2º lugar numa corrida que contou com mais de uma centena de projetos.

Parabéns aos nossos pequenos grandes escritores.

Fonte: Jornal Pau de Giz – Junho 2014, número 11, p.3, ano letivo 2013/2014

Anexo C24. JORNAL PONTO DE ENCONTRO (AGRUPAMENTO DE ESCOLAS PADRE BENJAMIM SALGADO)

Concurso "2º Prémio Doutor Pedro Matos"

No concurso "2.º Prémio Doutor Pedro Matos" a ESPBS concorreu com quatro projectos: "Da terra à Lua numa folha de papel", dos alunos Eduardo Costa e André Gonçalves; "Cubix Houses: um problema uma solução", das alunas Andreia Vale e Susana Cunha; "Atomium", das alunas Bárbara Carneiro, Raquel Costa, Sara Amorim e "Kinetic Horse" dos alunos Armando Oliveira e Francisco Soares. Todos os projectos estão sob a orientação da professora Carla Dias, responsável pelo projecto Matemática ESPBS.

Ainda no âmbito deste projecto decorreu no dia 23 de Fevereiro na ESPS a fase de apuramento dos alunos para o 6.º Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos cuja final se realizou no dia 13 de Março em Santarém. Este campeonato integrou 4 jogos de estratégia: Ouri, Rastros, Hex e Avanço.

Para esta fase inscreveram-se 50 alunos do 3.º ciclo e 44 alunos do ensino secundário. Para a realização desta fase de apuramento, os alunos foram distribuídos pelos jogos e por ciclos. Para cada jogo foi nomeado um júri composto por dois professores de Matemática.

Os tabuleiros dos jogos do Ouri foram previamente construídos pelos alunos do oitavo ano, turmas A, B, C e D, nas aulas de Estudo Acompanhado, onde foram analisadas as regras e feitos treinos de preparação.

Foram seleccionados três alunos do 3.º ciclo (Ana Magalhães e Rui Oliveira do 8ºB, e Pedro Miguel Silva do 8ºA), e três alunos do Ensino Secundário (Tiago Barbosa, 10ºB, Francisco Soares 10º C, Eduardo Costa, 10ºF). Este grupo foi à final em Santarém ao 6.º Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos.

Pela primeira vez, a ESPBS participou nesta competição nacional, onde os nossos alunos se portaram exemplarmente e estiveram de parabéns pelos lugares alcançados.

PmatE

Os alunos da ESPBS também foram à Universidade de Aveiro nos dias 27 e 28 de Abril participando na competição PmatE, que reuniu cerca de 9000 alunos, ou seja 4500 equipas - 1073 equipas do 7.º ano, 1079 equipas do 8.º ano, 1035 equipas do 9.º ano, 428 equipas do 10º ano, 3[illegible] equipas do 11.º ano e 3[illegible] equipas do 12.º ano. Trata-se de Competições Nacionais de Ciência, onde o objectivo final é realizar, no menor tempo possível e com o máximo de respostas certas, as provas de Matemática, Português, Física, Biologia e Geologia. O PmatE promove o sucesso escolar e da cultura científica através do desenvolvimento e a aplicação de tecnologias.

No final da prova, alguns alunos estavam eufóricos por chegarem aos níveis mais altos. Outros mais cabisbaixos, porque não atingiram os objectivos pretendidos.

Dos mais velhos aos mais novos, o sentimento era geral. Independentemente dos resultados obtidos, o mais importante foi mesmo a participação, o empenho e dedicação de cada um nestas competições. Os professores confirmam este entusiasmo e esta vontade de "travar a batalha do conhecimento", sendo unânime a opinião de que as competições são já uma ferramenta auxiliar de ensino.

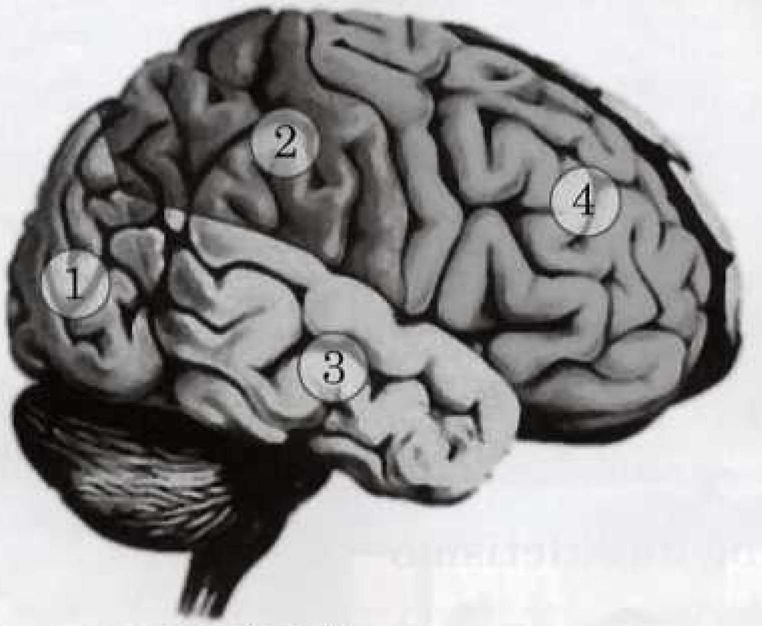
José Braga e João Vieira, alunos do 7º A, participaram nas competições e confirmaram que "gostaram da experiência e estavam felizes por terem conseguido a melhor dupla dos sétimos anos da escola" e ainda que "actividades como estas deveriam ser feitas mais do que uma vez por ano".

O aluno Rui Dias, do 10º B, representou a nossa escola nas provas de Matemática e Biologia e Geologia e referiu que "foi divertido acima de tudo. Pudemos mostrar o que valemos, pois, embora não tenhamos ganho nenhum prémio, ficámos muito bem classificados a nível geral" e acrescentou que "foi um dia de descontracção numa altura em que o cansaço, devido aos testes, já se fazia sentir em todos nós, sem termos de nos 'desligar' do bichinho do conhecimento".

Fonte: Jornal Ponto de Encontro, Junho de 2010, n.º51, p.21

Nós por cá... e a Matemática

Depois de um ano de trabalho é tempo de fazer um balanço. O grupo de professores de Matemática da ESPBS dá a conhecer o que de melhor se fez na nossa escola no âmbito dos números e cálculo mental... Nas actividades que decorreram durante o ano lectivo contámos com a participação de mais de 200 alunos inscritos em competições matemáticas extensivas a todos os anos de escolaridade.



ESCALADA DA MATEMÁTICA

De 23 a 26 de Fevereiro decorreram as actividades que integraram os Dias das Ciências em Movimento, que passaram por um conjunto de jogos – A Escalada da Matemática. Nesta escalada, os alunos foram desafiados para uma Escalada da Matemática distribuída por seis competições de jogos matemáticos que decorreram no polivalente, distribuídos por dois dias:

No 1.º dia (24 de Fevereiro) realizaram-se jogos relacionados com o cálculo mental: o Jogo do 24 (7.º e 8.ºanos); o Jogo do 24 Avançado (9.º ano); e, o Jogo SuperTmatik para todos os alunos do 3.º ciclo.

PROJECTO MATEMATICANDO.ESPBS

No âmbito deste projecto MATEMATICANDO.ESPBS, os alunos do ensino secundário participaram em vários concursos e projectos a nível nacional. Subordinado ao tema "A Matemática e os Têxteis", promovido pela Sociedade Portuguesa da Matemática e pela Universidade da Beira Interior, concorreu o projecto "A Têxtil no Vale do Ave: o que dizem os números?", das alunas Bárbara Carneiro (12ºC), Raquel Costa (12ºC), Sara Amorim (12ºC), Andreia Vale (12.ºD) e Susana Cunha (12.ºD), sob a orientação da professora Carla Dias. Concorreu ainda um outro projecto "Os grafos na obtenção de rotas de uma empresa têxtil" dos alunos Ana Oliveira (12º F), Benjamim Meyer (12º F) e Sara Duarte (12º F), sob a orientação da professora Irene Gonçalves.

A ESPBS também participa no Concurso "Prémio Estatístico Júnior 2010", organizado pela Sociedade Portuguesa da Estatística com o projecto "A importância de sermos saudáveis: um estudo com alunos do 7º e 12º anos", das alunas Raquel Costa (12ºC), Andreia Vale (12.ºD) e Susana Cunha (12.ºD). Também participámos no "18º Concurso Jovens Cientistas e Investigadores 2009/2010" com o projecto "SPABIPP – Conhece-te! Previne-te. Sexo, Peso, Altura, Batimentos Cardíacos, Índice de Massa Corporal, Perímetro da cintura e Pressão arterial", das alunas Bárbara Carneiro (12ºC) e Sara Amorim (12ºC).

Fonte: Jornal Ponto de Encontro, Junho de 2010, n.º51, p.22

Anexo D. Certificados

prodep III

Comunidade Europeia

Financiado pelo Fundo Social Europeu

ministério da educação

gave

gabinete de avaliação educacional

CERTIFICADO

Em cumprimento ao art.º 13º do Decreto - Lei nº 207/96 de 2 de Novembro, certifica-se que **Isabel Sofia da Silva Ferreira**, professor/a do Ensino Básico e/ou Secundário, do QZP, da EB 2,3 D. Afonso Henriques, frequentou com aproveitamento a Acção de Formação à Distância, a seguir descrita, promovida por este Centro e co-financiada pelo F.S.E. através do Programa FOCO, tendo obtido a menção de Satisfaz.

Designação: Avaliação da Aprendizagens – Formação à Distância
Modalidade: Oficina de Formação
Data: 31 de Maio a 15 de Julho de 2004
Registo de Acreditação: CCPFC / ACC—32944 / 03
Número de Horas: 50
Número de Créditos: 2,4

Entidade Formadora: GAVE
Formadores: Patrícia Cascais, Maria João Lagarto e Ana Maria Diogo

A Directora do Centro de Formação

(Glória Ramalho)

Ministério da Educação

CFfh Centro de Formação de Francisco de Holanda

Diploma

Jorge do Nascimento Pereira da Silva, director do Centro de Formação de Francisco de Holanda sediado na Escola Secundária de Francisco de Holanda, Alameda Dr. Alfredo Pimenta, em Guimarães, certifica que ISABEL SOFIA DA SILVA FERREIRA, residente em Rua S. Claudio, 62 – Antas, 4760052VILA NOVA DE FAMALICÃO, portadora do Bilhete de Identidade número 10611275 emitido pelo arquivo de identificação de Lisboa, 2003-06-17, participou na acção de formação subordinada ao tema PROJECTO CURRICULAR DE TURMA, organizada na modalidade de Oficina de Formação, com a duração de 15 horas e foi aprovada.

A Acção decorreu entre 2004-01-27 e 2004-05-25, nas instalações da Escola EB 2,3 D. Afonso Henriques, sob a orientação das formadoras Maria Luisa Garcia Alonso, Isabel Maria da Torre Carvalho Viana e Maria Isabel Tavares Candeias da Silva, a que, nos termos do Regime Jurídico da Formação Contínua de Professores, corresponde 1,2 (uma e duas décimas) unidades de crédito.

Mais se certifica que a acção foi acreditada pelo Conselho Científico-Pedagógico da Formação Contínua sob o número de registo CCPFC/ACC-33263/03 e que, para os efeitos previstos no artigo 5º, número 2, do Decreto-Lei n.º 207/96 de 2 de Novembro (Regime Jurídico da Formação Contínua de Professores), releva para efeitos de progressão na carreira de Educadores de Infância e Professores do Ensino Básico.

Guimarães, 2004-07-13

O DIRECTOR

Centro de Formação de Francisco de Holanda – Guimarães

prodep III

União Europeia

Fundo Social Europeu

ESCOLA EB 2,3 D. AFONSO HENRIQUES

CERTIFICADO

Certifica-se que Isabel Sofia da Silva Ferreira, esteve presente na Acção de Formação subordinada ao tema *"Reorganização Curricular do Ensino Básico: que desafios para a mudança da Escola?"* realizada no dia 27 de Novembro de 2003 na Escola EB 2,3 D. Afonso Henriques.

Escola EB 2,3 D. Afonso Henriques, 27 de Novembro de 2003

Os Coordenadores dos Directores de Turma,

A Presidente do Conselho Executivo,

Ministério da Educação

CENTRO DE FORMAÇÃO JÚLIO BRANDÃO

CERTIFICADO

Certifica-se que Isabel Sofia da Silva Ferreira, portadora do Bilhete de Identidade nº10611275, frequentou com aproveitamento a Acção de Formação A Utilização das TIC nos Processos de Ensino/Aprendizagem: O Portefólio Digital, com a duração de 25 Horas, na modalidade de Oficina de Formação, com o Registo de Acreditação NºCCPFC/ACC-44121/06, orientada pela Formadora Carla Manuela Navio Dias, de 03/09/2007 a 03/11/2007, e que, nos termos do Regime Jurídico da Formação Contínua e do nº2 do artigo 46º do ECD, lhe confere a atribuição de 2 (dois) créditos e a classificação de 9,6 (nove vírgula seis) valores, numa escala de 1 a 10, à qual corresponde a avaliação qualitativa de Excelente, e que, para efeitos de aplicação do despacho 16794/05, de 3 de Agosto, releva para a progressão da carreira de professores.

Vila Nova de Famalicão, 15 de Janeiro de 2008

A Directora do Centro

(Maria Cândida Borges Madureira)

Ministério da Educação

CENTRO DE FORMAÇÃO JÚLIO BRANDÃO

CERTIFICADO

Certifica-se que Isabel Sofia da Silva Ferreira, portadora do B. I. nº10611275, frequentou com aproveitamento a Acção de Formação Geometer's Sketchpad – A Geometria em Movimento, com a duração de 25 Horas, na modalidade de Oficina de Formação, com o Registo de Acreditação NºCCPFC/ACC-42271/05, orientada pela Formadora Carla Manuela Navio Dias, de 11/09/2006 a 28/10/2006, que nos termos do Regime Jurídico da Formação Contínua lhe confere a atribuição de 2 (dois) créditos, e que para efeitos de aplicação do despacho 16794/05, de 3 de Agosto, releva para a progressão da carreira de professores.

Vila Nova de Famalicão, 4 de Dezembro de 2006

A Directora do Centro

(Maria Cândida Borges Madureira)

escola virtual

Certificado de Participação

Certifica-se, para os devidos efeitos, que Isabel Sofia da Silva Ferreira

participou na acção subordinada ao tema ***Escola Virtual na Sala de Aula***

realizada a 24 de Fevereiro de 2010

Porto 02 de Março de 2010

PORTO EDITORA
Educational Solutions

FORMAÇÃO ESCOLA VIRTUAL
CERTIFICADO DE PARTICIPAÇÃO

Porto Editora

R. da Restauração, 365
4099-023 PORTO
PORTUGAL
TEL.: (+351) 22 608 83 28
FAX: (+351) 22 608 83 29

Certifica-se, para os devidos efeitos, que Isabel Sofia da Silva Ferreira

participou na acção subordinada ao tema ***Escola Virtual na Sala de Aula***

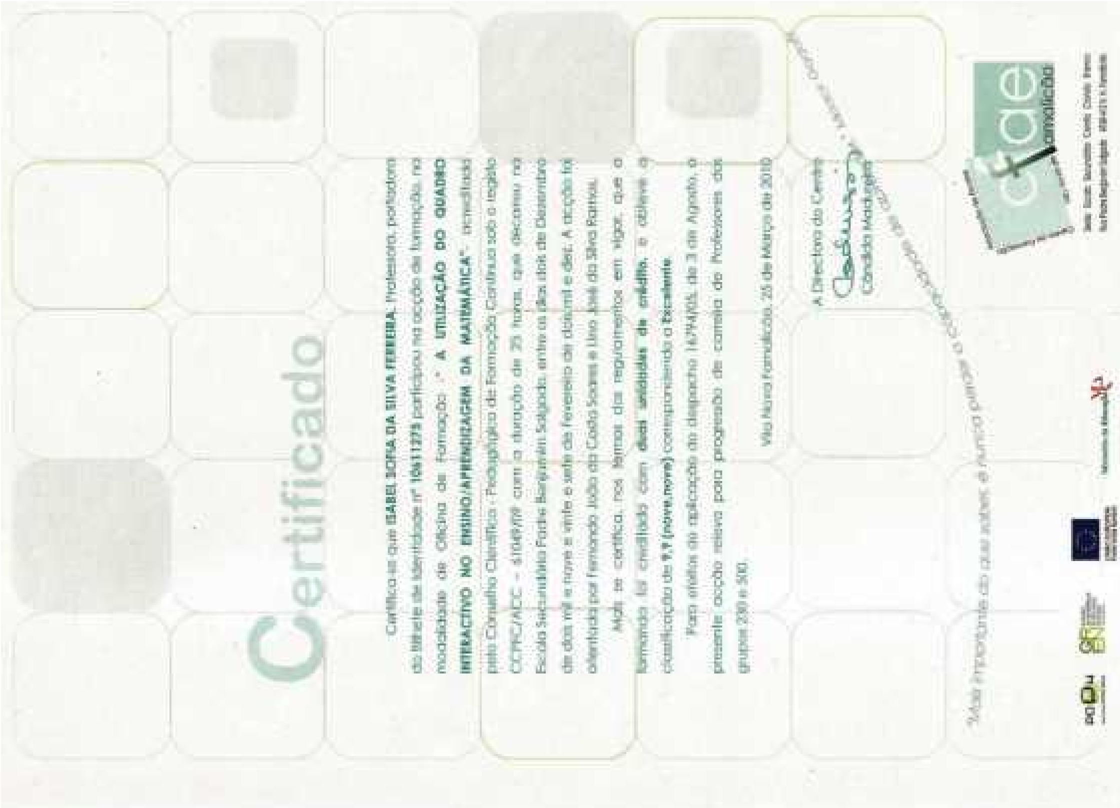
realizada a 17 de Novembro de 2010

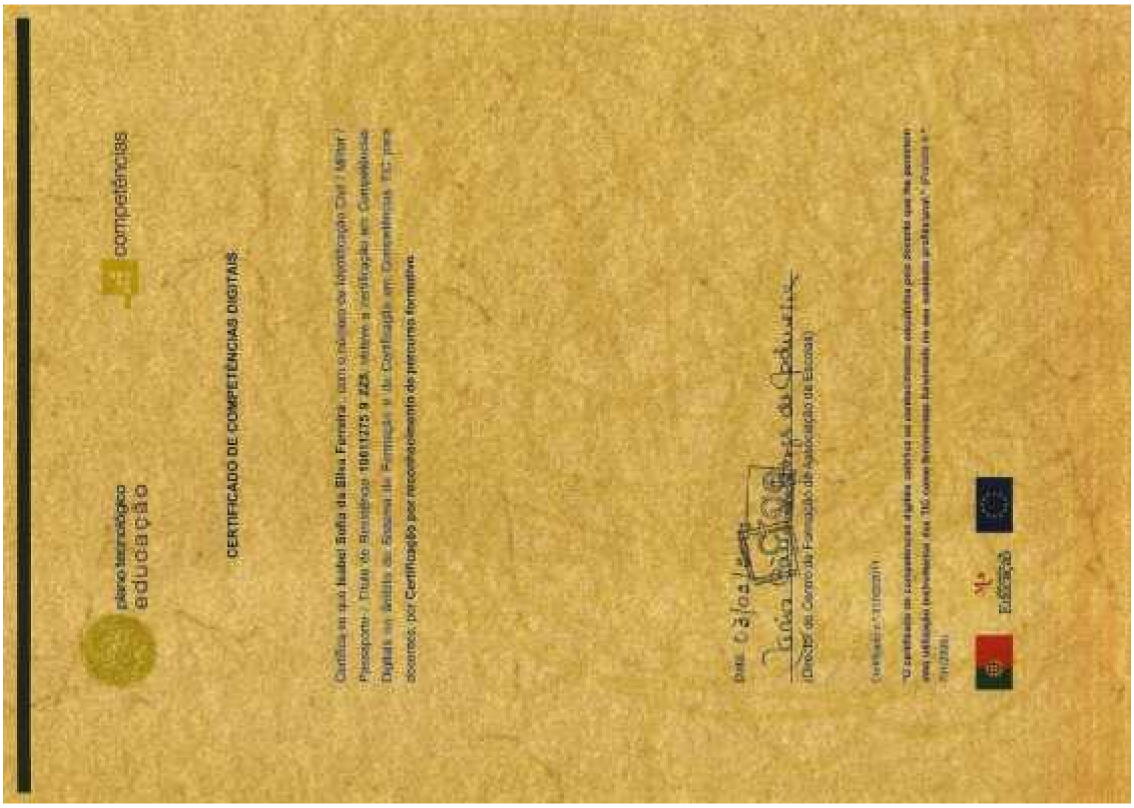
Porto, 17 de Novembro de 2010

escola virtual
um serviço Porto Editora

formacao@escolavirtual.pt
http://formacao.escolavirtual.pt

Porto Editora


Certificado
Certifica-se que ISABEL SOFIA DA SILVA FERREIRA, Professora, portadora do Bilhete de Identidade nº 10611275 participou na acção de formação, na modalidade de Oficina de Formação :" A UTILIZAÇÃO DO QUADRO INTERACTIVO NO ENSINO/APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA"- acreditada pelo Conselho Científico - Pedagógico de Formação Contínua sob o registo CCPFC/ACC – 61049/09 com a duração de 25 horas, que decorreu na Escola Secundária Padre Benjamim Salgado, entre os dias dois de Dezembro de dois mil e nove e vinte e sete de Fevereiro de dois mil e dez. A acção foi orientada por Fernando João da Costa Soares e Lino José da Silva Ramos.
Mais se certifica, nos termos dos regulamentos em vigor, que a formanda foi creditada com duas unidades de crédito, e obteve a classificação de 9,9 (nove,nove) correspondendo a Excelente.
Para efeitos da aplicação do despacho 16794/05, de 3 de Agosto, o presente acção releva para progressão da carreira de Professores dos grupos 230 e 500.
Vila Nova Famalicão, 25 de Março de 2010
A Directora do Centro
Cândida Madureira
"Mais importante do que saber, é nunca perder a capacidade de aprender"
cfae famalicão


plano tecnológico educação
competências
CERTIFICADO DE COMPETÊNCIAS DIGITAIS
Certifica-se que Isabel Sofia da Silva Ferreira, com o número de Identificação Civil / Militar / Passaporte / Título de Residência 10611275 9 ZZ5, obteve a certificação em Competências Digitais no âmbito do Sistema de Formação e de Certificação em Competências TIC para docentes, por Certificação por reconhecimento de percurso formativo.
Data 03/02/
(Director do Centro de Formação da Associação de Escolas)

Certificado

Certifica-se que **Isabel Sofia da Silva Ferreira**, professora, portadora do Bilhete de Identidade/Cartão de Cidadão nº **10611275** participou na acção de formação, na modalidade de Oficina de Formação -"**A folha de cálculo ao serviço da actividade docente**"- acreditada pelo Conselho Científico - Pedagógico de Formação Contínua sob o registo CCPFC/ACC – 66338/11, com a duração de 25 horas (25 presenciais e 25 não presenciais) que decorreu na Escola Secundária Padre Benjamim Salgado - Joane, entre os dias vinte e cinco de janeiro e seis de junho de dois mil e doze. A acção foi orientada por **Manuel Inácio Baltazar Silva**.

Mais se certifica, nos termos dos regulamentos em vigor, que a formanda foi creditada com **duas unidades de crédito**, e obteve a classificação de **10 (dez)**, correspondendo a **Excelente**.

Para os efeitos previstos no artigo 5º do Regime Jurídico da Formação Contínua de Professores, a presente acção releva para efeitos de progressão em carreira de Professores do 3º Ciclo do Ensinos Básico e do Ensino Secundário.

Vila Nova Famalicão, 04 de julho de 2012

A Directora do Centro

Cândida Madureira

"Mais importante do que saber, é nunca perder a capacidade de aprender" - Leonardo Boff

cfae famalicão

Certificado

Certifica-se que **ISABEL SOFIA DA SILVA FERREIRA**, Professora, portadora do Cartão de Cidadão/ Bilhete de Identidade nº **10611275 9ZZ2** participou na ação de formação, na modalidade de Curso de Formação - **Da gestão do currículo às aprendizagens colaborativas** - acreditada pelo Conselho Científico - Pedagógico de Formação Contínua sob o registo CCPFC/ACC – 70280/12, com a duração total de **15 horas**, que decorreu no Auditório da Escola Secundária Padre Benjamim Salgado - Joane, entre os dias vinte e quatro de abril e dez de setembro de dois mil e doze. A acção foi orientada por **Nuno José Carrola Ferreira**.

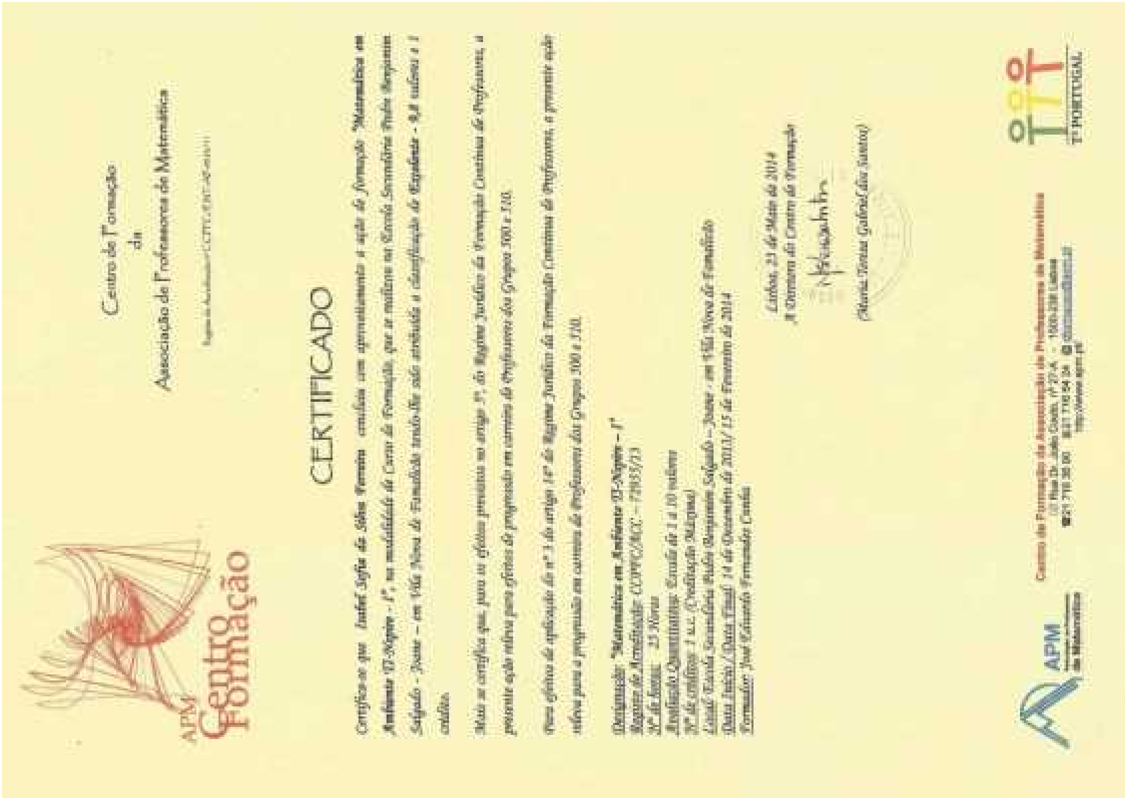
Mais se certifica, nos termos dos regulamentos em vigor, que a formanda foi creditada com **0,6 unidades de crédito**, e obteve a classificação de **8,8 (oito, oito)** correspondendo a **Muito Bom**.

Para os efeitos previstos no artigo 5º do Regime Jurídico da Formação Contínua de Professores, a presente ação releva para efeitos de progressão em carreira de Professores de todos os níveis de ensino.

Vila Nova Famalicão, 30 [illegible] 2012

"Mais importante do que saber, é nunca perder a capacidade de aprender"

cfae famalicão



APM Centro Formação

Centro de Formação
da
Associação de Professores de Matemática

CERTIFICADO

Certifica-se que Isabel Sofia da Silva Ferreira concluiu com aproveitamento a ação de formação "Matemática em Ambiente TI-Nspire - I", na modalidade de Curso de Formação, que se realizou na Escola Secundária Padre Benjamin Salgado - Joane – em Vila Nova de Famalicão tendo-lhe sido atribuída a classificação de Excelente - 9,8 valores e 1 crédito.

Mais se certifica que, para os efeitos previstos no artigo 5º, do Regime Jurídico da Formação Contínua de Professores, a presente ação releva para efeitos de progressão em carreira de Professores dos Grupos 500 e 510.

Para efeitos de aplicação do nº 3 do artigo 14º do Regime Jurídico da Formação Contínua de Professores, a presente ação releva para a progressão em carreira de Professores dos Grupos 500 e 510.

Designação: "Matemática em Ambiente TI-Nspire – I"
Registo de Acreditação: CCPFC/ACC – 73935/13
Nº de horas: 25 Horas
Avaliação Quantitativa: Escala de 1 a 10 valores
Nº de créditos: 1 u.c. (Creditação Máxima)
Local: Escola Secundária Padre Benjamin Salgado – Joane - em Vila Nova de Famalicão
Data Início / Data Final: 14 de Dezembro de 2013/ 15 de Fevereiro de 2014
Formador: José Eduardo Fernandes Cunha

Lisboa, 23 de Maio de 2014
A Diretora do Centro de Formação

(Maria Teresa Gabriel dos Santos)

Centro de Formação da Associação de Professores de Matemática

T³ PORTUGAL

XV Encontro Nacional de Professores de Matemática

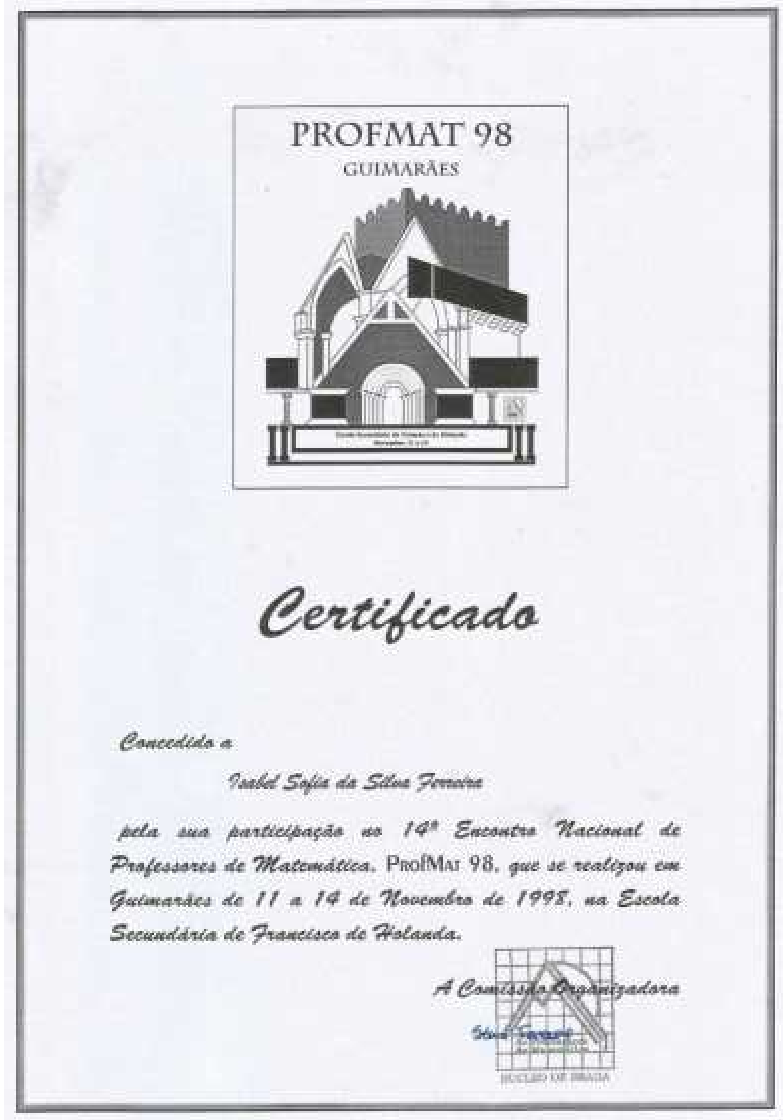
Certificado

Concedido a

ISABEL SOFIA DA SILVA FERREIRA

pela sua participação no PROFMAT99, promovido pela Associação de Professores de Matemática, que se realizou em Portimão na Escola Secundária Poeta António Aleixo entre 10 e 13 de Novembro de 1999.

A Comissão Organizadora



PROFMAT 98

GUIMARÃES

Certificado

Concedido a

Isabel Sofia da Silva Ferreira

pela sua participação no 14º Encontro Nacional de Professores de Matemática, ProfMat 98, que se realizou em Guimarães de 11 a 14 de Novembro de 1998, na Escola Secundária de Francisco de Holanda.

A Comissão Organizadora

ProfMAT SANTARÉM 2003

Certificado

Concedido a Isabel Sofia da Silva Ferreira

Pela sua participação no XIX Encontro Nacional de Professores de Matemática promovido pela Associação de Professores de Matemática, que se realizou em Santarém na Escola Superior de Educação nos dias 19, 20 e 21 de Novembro de 2003.

A Comissão Organizadora

ProfMAT VISEU 2002

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

CERTIFICADO

Concedido a ***ISABEL SOFIA DA SILVA FERREIRA***

pela sua participação no XVIII Encontro Nacional de Professores de Matemática - ProfMat2002 - promovido pela Associação de Professores de Matemática, realizado de 2 a 4 de Outubro de 2002, na Escola Superior de Tecnologia de Viseu, com a duração de 20 horas.

Viseu, 4 de Outubro de 2002

A Comissão Organizadora

CERTIFICADO

Isabel Sofia Silva Ferreira participou na sessão prática ***"O Geometer's Sketchpad na sala de aula"***, dinamizada pelos professores Célia Lobo e Mário Roque, que teve lugar na E.S. de Francisco de Holanda, em Guimarães, no dia 28 de Junho.

Esta sessão esteve inserida nos "Fins de tarde no Laboratório", organizados pelo Núcleo APM de Braga.

Guimarães, 28 de Junho de 1999

Pelos dinamizadores,

Pela Comissão Coordenadora do Núcleo

Escola Básica 2,3 D. Luís de Ataíde

CERTIFICADO

Certifica-se que Isabel Sofia da Silva Ferreira participou na Acção de Formação "***Estratégias Diversificadas na Sala de Aula***", realizada pela Dra. Ana Maria Maduro da Costa e Silva, em 01 /03/2000, na Escola Básica 2,3 D. Luís de Ataíde.

Peniche, 01/03/2000

A Presidente do Conselho Executivo,

MINISTÉRIO DA SAÚDE
ADMINISTRAÇÃO REGIONAL DE SAÚDE DO ALGARVE

CERTIFICADO

Certifica-se que Isabel Sofia da Silva Ferreira participou na Acção ***1ª INTER-ESCOLAS 200/2001***, organizada, no âmbito da formação prevista para a **Rede Nacional de Escolas** Promotoras de Saúde – **RNEPS**, pela Coordenação Regional do Algarve (**DREAlg** e **ARS Algarve**), num total de 7 horas e que se realizou no Centro Cultural de Lagos, no dia 25 de Outubro de 2000, entre as 9 horas e as 18 horas.

Lagos, 25 de Outubro de 2000

A Coordenação Regional do Algarve para a RNEPS

Pela DREAlg

(Conceição Bernardes)

Pela ARS Algarve

(Carlos André)

Certificado

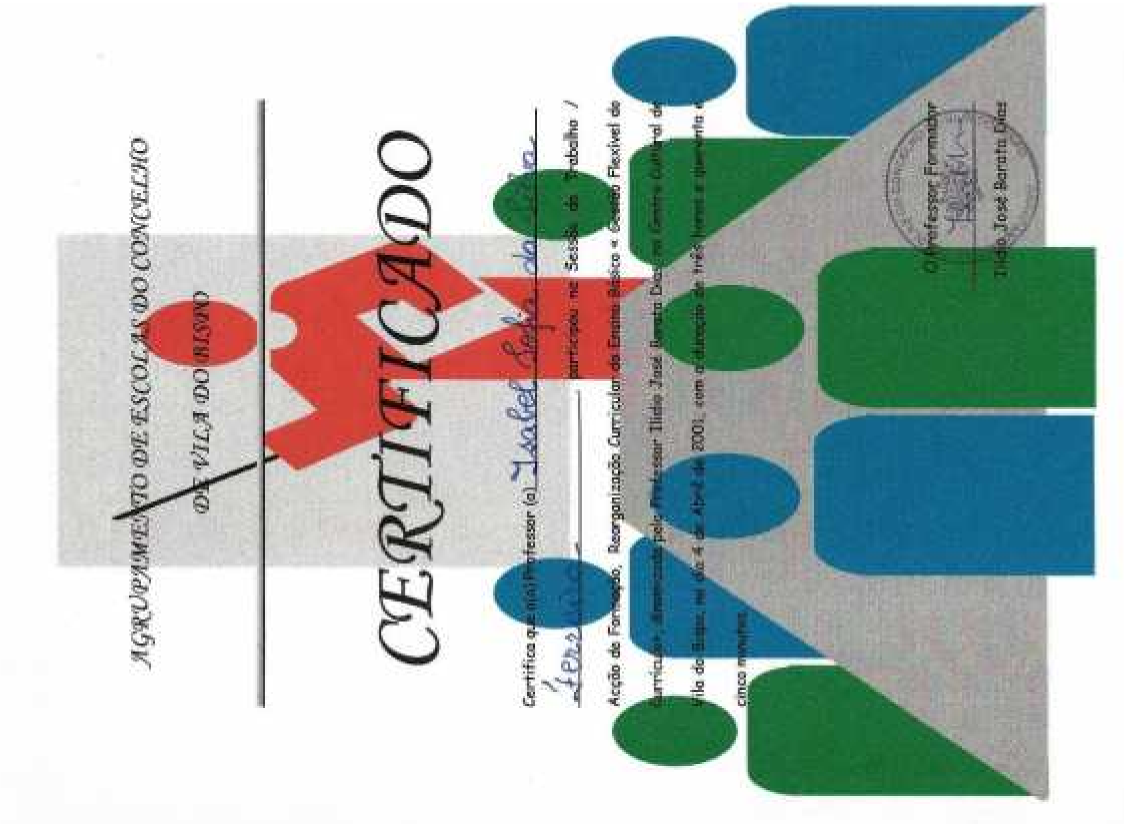
Certifica-se que Isabel Sofia da Silva Ferreira participou no "Encontro de Territórios Educativos de Intervenção Prioritária - Articulação Curricular" em Peniche, no dia 3 de Julho de 2000.

A Presidente do Conselho Executivo,

TEIP Almada Negreiros

T.E.I.P. Peniche

TEIP Monte de Caparica


AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DO CONCELHO

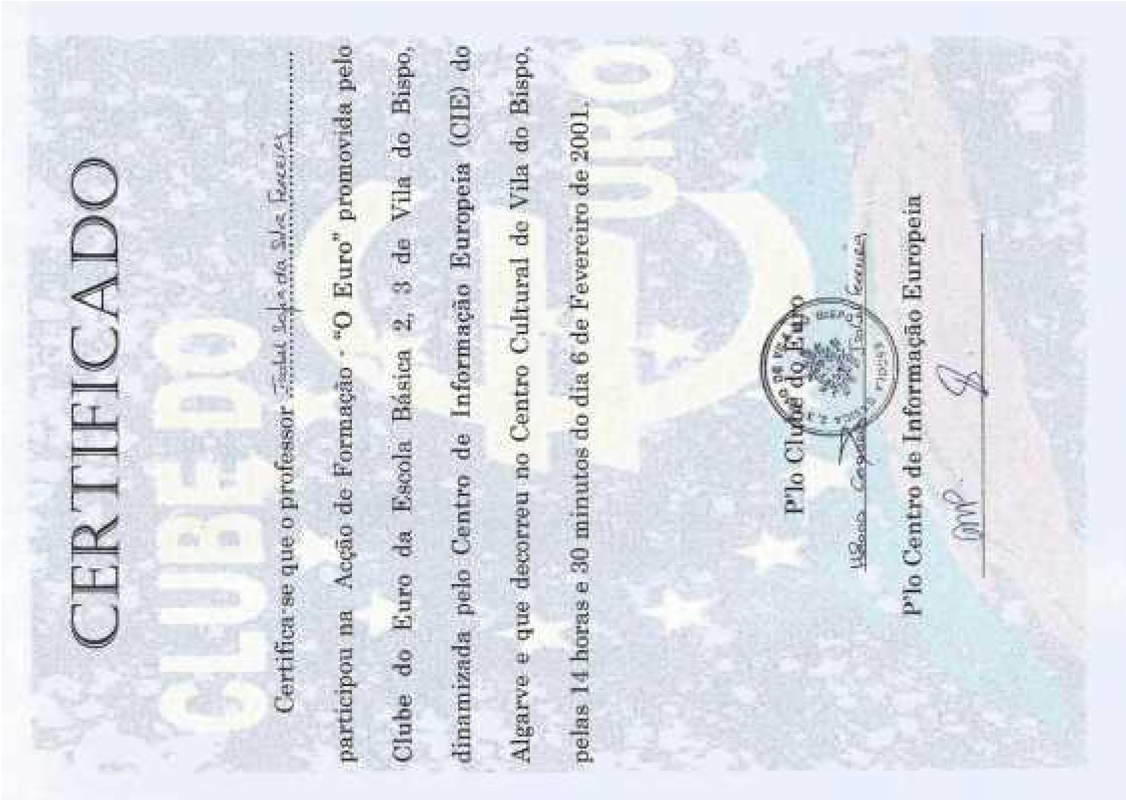
DE VILA DO BISPO

CERTIFICADO

Certifica que o(a) Professor (a) Isabel Sofia da Silva Ferreira participou na Sessão de Trabalho / Acção de Formação, Reorganização Curricular do Ensino Básico « Gestão Flexível do Currículo», dinamizada pelo Professor Ilídio José Barata Dias, no Centro Cultural de Vila do Bispo, no dia 4 de Abril de 2001, com a duração de três horas e quarenta e cinco minutos.

O Professor Formador

Ilídio José Barata Dias



CERTIFICADO

Certifica-se que o professor [illegible] participou na Acção de Formação - "O Euro" promovida pelo Clube do Euro da Escola Básica 2, 3 de Vila do Bispo, dinamizada pelo Centro de Informação Europeia (CIE) do Algarve e que decorreu no Centro Cultural do Vila do Bispo, pelas 14 horas e 30 minutos do dia 6 de Fevereiro de 2001.

P'lo Clube do Euro

P'lo Centro de Informação Europeia

AGRADECIMENTO

A marca Cheetos agradece a sua presença e colaboração na 5ª edição do campeonato do **"Jogo do 24"**.

Ano 2002

Escola Secundária Padre Benjamim Salgado

Está conforme o original
O Chefe de Serv. Administrativos

Ex.mo(a) Sr(a).

Isabel Sofia da Silva Ferreira

Sua referência | Sua comunicação de | Nossa referência Ofício N.º Processo N.º LZB | Joane, 04/11/2011

ASSUNTO: Avaliação de desempenho docente

Comunica-se ao docente mencionado em epígrafe, do grupo de recrutamento **500**, que a proposta final de avaliação de desempenho do ano letivo de 2010/2011 é de Muito Bom

Com os melhores cumprimentos

O Professor Relator

Rosa Celeste Fernandes da Costa Melo

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
ESCOLA SECUNDÁRIA PADRE BENJAMIM SALGADO (403400)

Escola Secundária Padre Benjamim Salgado

Exmo(a). Sr(a).

ISABEL SOFIA DA SILVA FERREIRA

Joane, 18 de Dezembro de 2009

Assunto: Comunicação da proposta de avaliação

No âmbito da Avaliação do Desempenho Docente e nos termos do número 2, do artigo 9º do Decreto Regulamentar n.º 1 – A/2009 de 5 de Janeiro, vimos comunicar a Vª. Exª. a proposta de classificação final de **MUITO BOM**.

Com os melhores cumprimentos

O Director

José Alfredo Rodrigues Mendes

HM

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
ESCOLA SECUNDÁRIA PADRE BENJAMIM SALGADO (403400)