8. Ações do professor na construção coletiva de um argumento genérico numa turma do 9.º ano

Cláudia Domingues
Escola Secundária Carlos Amarante, Braga
cmadom@gmail.com

Maria Helena Martinho
Centro de Investigação em Educação,
Universidade do Minho
mhm@ie.uminho.pt

• **Resumo:** O professor enfrenta um exigente desafio quando procura desenvolver o raciocínio matemático dos alunos em aulas exploratórias. A partir das resoluções dos alunos, após explorarem a tarefa em grupo, o professor tem a oportunidade de desenvolver o pensamento matemático dos alunos na fase de discussão coletiva. Neste capítulo são analisadas as ações de uma professora no desenvolvimento de uma aula exploratória cujo objetivo era o de construir coletivamente um argumento genérico. Os dados, utilizados nesta análise, foram recolhidos numa aula de 90 minutos, no ano letivo de 2009/2010, e fazem parte de uma investigação sobre o desenvolvimento do raciocínio matemático de alunos de uma turma de nono ano. As ações da professora de *incitar* a que os alunos exponham as suas ideias, de os *apoiar* no desenvolvimento dessas mesmas ideias, e de *ampliar* o seu pensamento matemático revelaram-se importantes na construção coletiva de um argumento genérico. Conclui-se que as ações da professora de *ampliar* surgiram, apenas, quando estabeleceu conexões entre os diferentes raciocínios matemáticos dos alunos na fase de discussão coletiva e que as ações de *apoiar* e de *incitar* foram fundamentais, durante toda a aula, para ampliar o pensamento dos alunos.

• **Palavras-Chave:** Raciocínio matemático, Argumento genérico, Ações do professor.

Introdução

A importância atribuída ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos prende-se com a preocupação de que compreendam a Matemática e desenvolvam a autonomia na resolução de situações-problema. Cabe ao professor propor tarefas desafiantes aos alunos e orientar os seus raciocínios de modo a fazê-los progredir para ideias matemáticas mais avançadas do que aquelas que têm à partida. Com o desafio, a orientação e o apoio do professor, os alunos podem ter oportunidade de formular conjeturas e de as discutir apresentando justificações matemáticas adequadas ao seu nível etário (Mason, Burton & Stacey, 1985). No entanto, as investigações realizadas sugerem que orquestrar a discussão coletiva com base nas resoluções dos alunos e de modo a que toda a turma progrida na sua aprendizagem é uma tarefa difícil para o professor (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008).

Este capítulo, a partir dos dados recolhidos da aplicação de uma tarefa exploratória designada “A área de um retângulo especial” com uma turma do 9.º ano, identifica as ações de uma professora/investigadora, primeira autora deste capítulo, que contribuíram para construir um argumento genérico com toda a turma. Estes dados são parte integrante de uma experiência de ensino realizada pela professora/investigadora com o objetivo de desenvolver o raciocínio matemático dos seus alunos e que teve a duração de um ano letivo. Apresenta-se de seguida o quadro teórico que suporta este estudo, dividido em duas subsecções: “O raciocínio e a produção de argumentos genéricos na aula de matemática” e “As ações do professor que promovem o desenvolvimento do raciocínio matemático”. Segue-se metodologia deste estudo, a apresentação dos resultados e as respetivas conclusões.

O raciocínio e a produção de argumentos genéricos na aula de matemática

A preocupação em desenvolver o raciocínio matemático dos alunos prende-se com a importância dada à autonomia matemática e ao desenvolvimento do espírito crítico, dotando-os de ferramentas essenciais para lidar com situações-problema. As propostas feitas pelo professor para a realização de tarefas exploratórias e investigativas desafiam os alunos a pensar matematicamente dando-lhes oportunidade de descobrir autonomamente a resposta ao desafio. Para chegar a essa resposta, os alunos terão de identificar a estrutura matemática envolvida na situação e de produzir uma conclusão geral matematicamente justificada, isto é, um argumento genérico (Balacheff, 1987; Mason et al., 1985). Esse argumento, para ser matematicamente válido, usa raciocínio dedutivo e pode ser apresentado nas seguintes formas: linguagem pictórica, linguagem verbal e linguagem algébrica (Stylianides & Stylianides, 2008). Lannin, Ellis e Elliot (2011) apontam, como componentes importantes de argumentos matemáticos válidos, duas caraterísticas: "(1) linguagem que estabeleça relações gerais e especifique um domínio; e (2) raciocínio que suporte a relação geral e mostre que se mantém para todas as instâncias do domínio" (p. 36).

Através da aplicação de tarefas desafiantes em que os alunos são levados a conjeturar, o professor tem a oportunidade de promover a aprendizagem de métodos de justificação matemática adequados à faixa etária dos alunos. No entanto, para orientar os alunos durante esse processo, o professor necessita de compreender os seus raciocínios para os fazer progredir ao nível da justificação. Como o tipo de raciocínio aplicado na fase de exploração condiciona o processo de justificação e consequentemente a produção do argumento genérico, descrevem-se de seguida os processos de exploração de acordo com o tipo de raciocínio utilizado. Contudo, só aqui são considerados os raciocínios indutivos e dedutivos por serem aqueles que, segundo Reid e Knipping (2010), ocorrem com maior frequência na aula de Matemática.

Quando o raciocínio é *indutivo* os alunos envolvem-se num processo complexo e não linear de formulação de conjeturas e tentativas de generalização das regularidades encontradas nos dados. As afirmações são conjeturas enquanto não estiverem matematicamente justificadas, sendo por isso necessário orientar os alunos para a compreensão de que as suas afirmações têm de ser testadas e que é necessário procurar argumentos que as justifiquem (Mason, 1998). Quando a justificação sobressai durante o processo de formulação de conjeturas a produção de um argumento genérico fica facilitada por ser mais fácil interligar os argumentos produzidos de forma coerente numa cadeia lógica (Mariotti, 2006). Quando tal não acontece, é necessário formular conjeturas sobre o "porquê" sendo que essa formulação, como referem Mason et al. (1985) segue, geralmente, o processo normal de conjeturar. Para estes autores, durante este processo, assumem particular importância a exteriorização das razões pelas quais se está convencido, a revisão de todo o processo e o questionamento das afirmações. Estes autores reforçam, ainda, relativamente ao processo de revisão, que este obriga a tomar consciência de todo o processo de exploração e que, caso seja acompanhado de reflexão, torna possível generalizar os métodos usados chegando à compreensão da questão. Assim, o ato de justificar está relacionado com o aumento progressivo de confiança na conjetura e com a identificação de uma estrutura ou relação subjacente que liga o que se sabe ao que se quer saber através do argumento (De Villiers, 1999; Mason et al., 1985; Pólya, 1968). Na senda de produzir um argumento genérico partindo de generalizações proferidas com base em raciocínio indutivo e uma vez que casos particulares não justificam afirmações gerais (a não ser que sejam testados todos os casos, o que só é possível num conjunto finito), o argumento deve ter por base um exemplo genérico, isto é, um exemplo que seja representativo de todos os casos (Stylianides & Ball, 2008; Stylianides & Stylianides, 2009). No entanto, os alunos podem revelar dificuldades nesta passagem do particular para o geral, pois esta passagem requer a capacidade de distanciamento do objeto matemático (Balacheff, 1987).

Quando na exploração da tarefa o raciocínio é *dedutivo*, raciocínio que vai do geral para o geral ou do geral para o particular, é natural que daí resulte diretamente uma conclusão geral válida produzida pelo processo de transformação de conhecimento implícito em explícito, através da sua exposição (De Villiers, 1999; Reid & Knipping, 2010). O processo dedutivo exige percorrer diferentes etapas: seleção da informação relevante, identificação das propriedades matemáticas conhecidas e que podem ser aplicadas na situação, identificação das propriedades que têm de ser deduzidas, e organização das transformações matemáticas necessárias para inferir um segundo conjunto de propriedades a partir do primeiro numa sequência completa e coerente (Healy & Hoyles, 1998). Segundo De Villiers (2012), durante o processo dedutivo os alunos podem encontrar justificações matemáticas e descobrir outros casos onde a conclusão é válida, generalizando os resultados. Este autor designa por *generalização dedutiva* a generalização da essência de um argumento dedutivo e a sua aplicação a casos mais gerais ou análogos.

Avaliar a validade dos argumentos proferidos pelos alunos, como alertam Lannin et al. (2011), não é uma tarefa fácil. Os alunos, por vezes, identificam a conjetura como verdadeira, mas só a justificam para um subconjunto de valores identificados no domínio. Os autores referem que, nestes casos, é necessário ampliar a justificação, para que englobe todos os aspetos ou para que sejam tomados em linha de conta todos os elementos do domínio. Outro aspeto importante é a identificação do uso de linguagem geral por poder revelar que a justificação se aplica a mais do que alguns casos particulares. Também se revela importante o cuidado a ter na avaliação dos exemplos utilizados, dado que, por vezes, são usados para mostrar a existência de uma relação geral – são exemplos genéricos.

Os níveis de justificação de Balacheff (1987) podem auxiliar o professor a compreender a natureza das justificações dos alunos, permitindo-lhe orientar a ação para promover níveis de justificação de desenvolvimento cognitivo mais elevado. O autor clarifica que o nível de justificação em que se encontra um aluno não pode ser identificado sem conhecer o processo de produção desta justificação e alerta para o facto das caraterísticas da linguagem não serem suficientes para fazer essa identificação. Balacheff (1987) sugere a existência de quatro níveis hierárquicos de desenvolvimento cognitivo da justificação, de acordo com a forma como os alunos se convencem da validade de uma afirmação ou solução que produzem: empirismo naïf, experiência crucial, exemplo genérico e experiência conceptual. O nível de *empirismo naïf* consiste em validar a veracidade de uma afirmação através da observação de um pequeno número de casos. O nível de *experiência crucial* é um procedimento de validação na qual o indivíduo coloca explicitamente o problema da generalização para todos os casos e conclui através de um caso que considera especial. Assim, a experiência crucial consiste em provocar um acontecimento que, se resultar para aquele caso, resulta para todos. Este procedimento é fundamentalmente empírico e distingue-se do empirismo *naïf* por nele se colocar o problema da generalização e por se ter definido outro modo de decidir. O nível de *exemplo genérico* torna explícitas as razões da sua validade através da realização de operações ou transformações sobre um objeto tomado como representante característico de uma classe de indivíduos. O nível de *experiência conceptual* invoca a ação por interiorização da mesma e distancia-se de qualquer representante particular. Requer que a justificação, a base de validação da afirmação, esteja incluída na análise das propriedades dos objetos em questão. Essas propriedades não são evidenciadas por casos particulares, mas de forma genérica.

Existem conexões, segundo Balacheff (1987), entre o nível de *empirismo naïf* e o nível de *experiência crucial* assim como entre o nível de *exemplo genérico* e a *experiência conceptual*. O autor concluiu que a *experiência crucial* é muitas vezes alcançada pela necessidade de assegurar a generalidade da conjetura validada por *empirismo naïf* e, também, que o nível de *experiência crucial* pode manter-se mesmo após a passagem para a *experiência conceptual*, sobretudo no caso de a justificação ter por base o exemplo genérico. Realça ainda que a passagem do *exemplo genérico* para a *experiência conceptual* exige uma construção cognitiva em que é necessário decidir qual o caráter genérico do exemplo utilizado.

Ações do professor que promovem o desenvolvimento do raciocínio matemático

Os alunos, ao interagirem uns com os outros na exploração de uma tarefa matemática, encontram-se num meio envolvente potencialmente mais confortável para falar e pensar em voz alta. Nesse processo de interação desenvolvem uma maior confiança em si próprios e estão mais aptos a acompanhar e a participar ativamente nas discussões que ocorrem em grande grupo. A aceitação de normas que propiciem a elaboração e refutação de conjeturas, designada por Mason (2010) como *atmosfera de conjetura*, proporciona o desenvolvimento do raciocínio nos alunos. Numa aula com essas caraterísticas, alunos e professor, sem necessitar de rotular de certo ou errado as diferentes afirmações formuladas, encaram-nas como pontos de partida para a discussão, questionando, duvidando e reformulando. Está aqui pressuposta uma visão de trabalho exploratório na aula de matemática, em que professor e alunos representam papéis ativos e mutuamente desafiantes (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012). A procura de uma construção coletiva do conhecimento é assumida por todos os intervenientes.

Stein et al. (2008) salientam a importância do papel do professor na orientação da discussão coletiva que se inicia a partir do trabalho desenvolvido pelos alunos e se desenvolve limando as ideias que produziram e fazendo-as avançar para um pensamento matemático mais poderoso, eficiente e rigoroso. No desempenho desse papel, os autores referem alguns dos desafios que se colocam ao professor: apoiar os alunos no desenvolvimento do discurso matemático, incentivar os alunos a expor publicamente os seus raciocínios e a construir e a avaliar as suas ideias matemáticas e as dos outros. O modelo de preparação e realização de discussões matemáticas apresentado por Stein et al. (2008) consiste em cinco práticas fundamentais: *antecipar* as respostas dos alunos às tarefas matemáticas de exigência cognitiva elevada; *monitorizar* o pensamento matemático dos alunos durante a fase de exploração das tarefas; *selecionar* os alunos que podem apresentar as suas respostas matemáticas durante as fases discussão e de síntese; sequenciar as respostas dos alunos a apresentar; e conectar entre as respostas dos alunos sendo para isso fundamental encadear as ideias matemáticas ao longo das apresentações de modo a desenvolvê-las.

Durante a fase de discussão, os professores necessitam de, simultaneamente, incitar os alunos a que explicitem os seus pensamentos e de assegurar o desenvolvimento das ideias matemáticas. Cengiz, Kline, e Grant (2011) identificaram três tipos de ações do professor presentes nos episódios de discussão coletiva em que há ampliação do pensamento matemático: apoiar (*supporting*), incitar (*eliciting*) e ampliar (*extending*). Esses episódios foram designados pelos autores por episódios de "ampliação", são caracterizados por envolverem reflexão ou raciocínio ou por ultrapassarem os métodos de resolução iniciais. As ações de *apoiar* visam apoiar os alunos a relembrar o que já sabiam ou a considerar nova informação. As ações de *incitar* permitem ao professor aceder ao pensamento matemático dos alunos e torná-lo público. As ações de *ampliar* encorajam os alunos a ir além dos métodos usados na atividade matemática inicial e foram identificadas em situações de convidar os alunos a: avaliar uma afirmação ou observação, sustentar uma afirmação, comparar métodos diferentes, usar os mesmos métodos para novos problemas ou contra argumentar uma afirmação.

Metodologia

Este capítulo baseia-se em dados empíricos recolhidos na investigação de um estudo de caso centrado no desenvolvimento do raciocínio matemático de alunos de uma turma de 9.º ano, durante o ano letivo de 2009/2010 (Domingues, 2011). A turma era constituída por dezanove alunos, quinze raparigas e quatro rapazes, com idade média de 14 anos. A professora/investigadora encontrava-se a lecionar pela primeira vez na escola onde decorreu o estudo, embora já contasse com treze anos de experiência no 3.º ciclo.

Os dados analisados neste capítulo dizem respeito a uma das tarefas aplicada na investigação acima referida, designada por "A área de um retângulo especial" e trabalhada numa aula de 90 minutos com duas fases: a fase exploratória em que os alunos trabalharam em pequenos grupos e a discussão coletiva. A atividade matemática dos alunos foi registada em áudio através de um gravador colocado em cada grupo. Paralelamente, foi colocada uma câmara de vídeo fixa no fundo da sala permitindo um registo mais completo da fase de discussão da tarefa. Foram ainda recolhidos os registos efetuados pelos alunos ao longo da realização da tarefa. Posteriormente os alunos entregaram relatórios individuais sobre a atividade realizada em grupo.

As autoras deste capítulo analisaram esses dados, procurando identificar, em primeiro lugar, os episódios da aula em que a ação da professora foi importante para que os alunos avançassem na exploração da tarefa e procurando, em segundo lugar, identificar nesses episódios as ações da professora de apoiar, de incitar e de ampliar que contribuíram para a construção coletiva de um argumento genérico (Cengiz et al., 2011).

A experiência de ensino e a aula exploratória

Os alunos tinham iniciado, naquele ano, a prática de explorações matemáticas na sala de aula. Ao longo de todo o ano letivo em que decorreu a experiência, a professora procurou promover normas de sala de aula coerentes com o objetivo de desenvolver o raciocínio dos alunos. Para isso, a professora discutiu e negociou com os alunos os aspetos essenciais a melhorar para garantir a partilha e a colaboração entre todos os elementos quer durante o trabalho de grupo quer durante a discussão coletiva. Um desses aspetos foi a necessidade de discutir previamente os objetivos da tarefa, em pequeno grupo, de modo a clarificar o respetivo entendimento antes de iniciarem a exploração. Um outro aspeto muito importante foi a responsabilização de cada aluno em colaborar e em pedir esclarecimentos sempre que não esteja de acordo ou não compreenda, quer no trabalho em pequeno grupo quer na fase de discussão.

A tarefa proposta (figura 1), "A área de um retângulo especial", traduz geometricamente o "caso notável" da diferença de quadrados e inclui a representação geométrica com as medidas representadas por letras. A tarefa tinha como objetivo de conteúdo a compreensão do *caso notável* da diferença de quadrados. Relativamente ao raciocínio tinha como objetivo promover a justificação chegando a um argumento genérico. As características da tarefa foram pensadas para facilitar um processo de conjetura acompanhado de justificação.

A inclusão do esquema pretendeu dar um suporte visual aos alunos, uma vez que estes tinham mostrado, em tarefas anteriores, relutância em fazer representações dos seus esquemas mentais prejudicando desse modo o processo de conjetura. Através do esquema podiam atribuir significado geométrico às suas conjeturas, testando-as mais facilmente e encontrando razões que as refutassem ou validassem. A representação das medidas por letras pretendia auxiliar os alunos na compreensão do enunciado e verificar se os alunos trabalhavam a esse nível de abstração ou se sentiam necessidade de as concretizar.

A área de um retângulo especial

Um quadrado transforma-se num rectângulo não quadrado quando o seu comprimento cresce e a sua largura decresce o mesmo número de unidades de medida.

Investiga qual é a relação entre a área desse novo rectângulo e a área do quadrado inicial.

Prova essa relação para qualquer quadrado que se transforme em rectângulo nas condições indicadas.

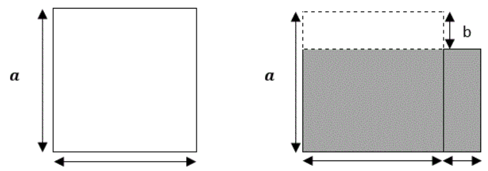


Figura 1 – Enunciado da tarefa.

As duas palavras a negrito no enunciado da tarefa dizem respeito às ações relativas a investigar e a provar. *Investigar* tinha para os alunos, devido às explorações recentes, uma conotação de explorar para descobrir, mas *provar* era uma ação ainda desconhecida. A introdução desta palavra foi escolhida para reforçar a necessidade de justificar matematicamente, tendo em conta que a ação de justificar era encarada pelos alunos de modo superficial. O objetivo era promover a prática da justificação, levando os alunos a estabelecerem a ligação entre as suas conjeturas e a estrutura matemática envolvida até produzirem um argumento genérico.

A professora programou a aula para que, na fase exploratória, os alunos trabalhassem em grupos de três ou quatro elementos. Na constituição dos grupos juntou alunos com nível aproximado de conhecimento e teve em consideração experiências anteriores. A professora pretendia que a fase de introdução fosse breve, pois os alunos já tinham sido confrontados com outras tarefas, e queria avaliar se tinham progredido relativamente à autonomia na exploração em grupo. Assim, após a entrega do enunciado, circulou entre os alunos para verificar se todos os grupos conseguiam iniciar o trabalho.

A fase de realização da tarefa estava prevista para cerca de meia hora, estando a professora atenta ao trabalho de cada grupo. A decisão sobre quando terminar o trabalho de grupo e iniciar a discussão não estava rigidamente definida, tendo ficado na planificação dependente dos acontecimentos da aula. No entanto, os indicadores de referência para a professora considerar que era o momento de passar à fase seguinte estavam previamente pensados: a existência de grupos com o trabalho terminado e a existência de outros grupos que não conseguiam avançar mais de forma autónoma.

A fase de trabalho seguinte, a discussão coletiva, consistia na comunicação à turma das descobertas realizadas com explicitação dos respetivos raciocínios dos grupos de acordo com os critérios da professora. Esta sabia ser fundamental valorizar a contribuição de todos numa partilha frutífera, pelo que estabeleceu uma ordem de possível solicitação da exposição de diferentes grupos de acordo com o grau crescente de nível de justificação dos resultados obtidos. De seguida apresentam-se os resultados relativos à análise da ação da professora na aula exploratória.

As ações da professora promotoras da construção de um argumento genérico

Nesta secção os resultados foram organizados de acordo com as cinco práticas de Stein et al. (2008): antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e conectar. As práticas de antecipar e de selecionar não estão intrinsecamente ligadas a contextos de interação, razão pela qual apenas surgem episódios de aula na descrição das restantes práticas. Durante a apresentação desses episódios identificaram-se as ações da professora de *apoiar*, *incitar* e *ampliar* (Cengiz et al., 2011). Optou-se por apresentar as práticas de sequenciar e de conectar em conjunto para facilitar a compreensão do leitor.

Antecipar

Como o objetivo desta aula era construir um argumento genérico com toda a turma, a principal preocupação da professora era compreender os raciocínios dos diferentes grupos para depois, a partir deles, orientar a discussão coletiva de modo a que todos os grupos participassem na construção do argumento genérico. A professora tinha ainda pouca experiência relativamente à orientação de uma aula exploratória e encontrava-se, ela própria, num processo de descoberta sobre o seu próprio papel no desenvolvimento do raciocínio dos seus alunos. A bibliografia que consultou referia a importância de questionar os alunos, no sentido de não condicionar as respostas fomentando a justificação no seio dos grupos. Por exemplo, Mason et al. (1985) descrevem alguns obstáculos que podem surgir durante o processo de raciocinar e dão sugestões para os ultrapassar. A professora sabia, então, ser importante: ouvir os alunos; questioná-los sem indicar o caminho a seguir; ajudá-los a prosseguir para que não desistissem; orientá-los para testarem as suas conjeturas e para as justificarem. Se conseguisse agir dessa forma teria, no final da fase exploratória, elementos suficientes para tomar decisões para orientar a discussão coletiva. Podia, então, aproveitar as contribuições dos grupos para, progressivamente, chegar a uma generalização aceite por toda a turma e em que as dificuldades sentidas relativamente quer ao conteúdo quer aos processos de raciocínio fossem ultrapassadas.

Relativamente à introdução da tarefa a professora esperava que a dificuldade, anteriormente sentida, de iniciar uma exploração estivesse já ultrapassada e que os alunos fossem capazes de discutir o enunciado e colocar hipóteses para se irem apercebendo das condicionantes da situação. Quanto à exploração da tarefa, não previa que os seus alunos calculassem as áreas usando as medidas genéricas porque em aulas anteriores revelaram dificuldades algébricas e porque o processo de exploração realizado numa tarefa anterior tinha sido indutivo podendo-lhes sugerir processo semelhante. Parecia-lhe mais provável que os alunos atribuíssem valores a a e a b estabelecendo uma comparação entre as áreas concretas do quadrado inicial e do retângulo. Dessa comparação estabeleceriam conjeturas que podiam ser testadas por cálculos e com o apoio da representação geométrica. Desse processo de conjetura poderia surgir uma generalização da relação entre as duas áreas justificada com base na representação geométrica. Este percurso teria na base um raciocínio indutivo e seria, então, necessário estender o domínio da generalização passando dos casos concretos para o caso geral chegando a um argumento genérico apresentado em linguagem natural ou algébrica. No entanto, a professora não previa que os alunos chegassem a um argumento genérico na fase de exploração devido à sua falta de experiência matemática.

Monitorizar

Ao longo da fase de exploração, a professora tentou compreender o raciocínio dos alunos recolhendo elementos para tomar decisões sobre o modo como ia orquestrar posteriormente a discussão coletiva. Observou o trabalho dos grupos e interagiu com os alunos ajudando-os a avançar na exploração e incentivando-os a justificar as suas conjeturas. Sempre que um grupo bloqueava, isto é, não conseguia avançar, a professora ajudava-o, reduzindo assim o risco de desistirem e, ao mesmo tempo, aumentando a probabilidade de haver ideias para partilhar posteriormente com toda a turma.

São apresentados, primeiro, dois exemplos que ilustram situações de bloqueio que ocorreram no seio de dois grupos diferentes: um em que os alunos do grupo não confrontaram duas conjeturas contraditórias, o que implicava fazer uma revisão cuidadosa de cada uma delas; e outro em que os alunos tiveram dificuldades em decidir como proceder para provar matematicamente, optando por um tipo de raciocínio. Depois, é apresentada uma situação ilustrativa de convicção sem compreensão em que a professora incentiva a justificação da conjetura por saber que se as conjeturas a testar não estivessem compreendidas ao ponto de os alunos serem capazes de as sustentar, a discussão posterior ficaria empobrecida dificultando a possibilidade de chegar a um argumento genérico.

Situação de bloqueio 1. Num dos grupos, os alunos formularam a conjetura de as áreas das duas figuras (quadrado inicial e retângulo final) serem iguais baseando-se na sua perceção visual.

> Como diz aqui que o que cresce e o que decresce aqui é o mesmo número de unidades, podemos dizer que este bocado que está aqui passa para o lado direito, por isso dá a mesma área. (Manuel)

Os alunos testaram a conjetura calculando as áreas das duas figuras, atribuindo o valor 2 a *a* e 1 a *b* e o resultado deu diferente. Chamaram a professora e logo que esta chegou ao grupo, Manuel começou a explicar como chegaram à conjetura de as áreas serem iguais. Com base na informação fornecida a professora incentivou-os a testarem a conjetura. Nesse momento a professora apoia o grupo fornecendo a informação de que precisam de testar a conjetura. Paulo responde que já o haviam feito tendo obtido uma conclusão contraditória com a conjetura inicial e Miguel refere como o fizeram atribuindo valores a *a* e a *b*. Pelo facto de o grupo já ter testado a conjetura a ação de apoio da professora teve o efeito de os levar a expor o seu trabalho permitindo à professora compreender o processo de raciocínio do grupo:

> **Manuel:** Stora, nós estávamos a pensar assim... Achamos que este bocadinho que tirou aqui e meteu aqui é a mesma área.
> **Miguel:** Porque tirou aqui a unidade e meteu-a aqui e é a mesma unidade.
> **Prof:** E como é que vocês podem ver se é igual ou não?
> **Paulo:** Já estivemos a fazer mas não dá.

Miguel: Estivemos a dar medidas.

Prof: Então, experimentaram e não dá?

Paulo: Daqui [até] aqui é 3. Aqui pusemos 1. Vai ser 3-1. Depois (3-1)x(3+1). 2x4=8 e aqui dá 9.

Prof: Então, não é igual? Pensem melhor.

...

Prof: Vocês estão a achar que isto [branco] é igualzinho a isto [preto]? (Apontando para os retângulos correspondentes aos retângulos branco e preto da figura 2).

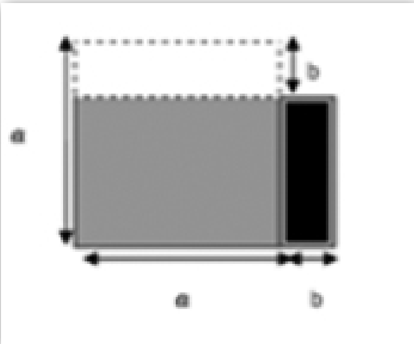


Figura 2 – Retângulo decomposto.

Na segunda fala do diálogo, a professora incita os alunos a fazerem uma revisão ao teste da conjetura no intuito de que prestem maior atenção às razões que possam justificar os valores diferentes das áreas. A ação da professora é simultaneamente de incitar e apoiar, uma vez que os orienta no processo de conjeturar nomeadamente na importância de rever e refletir sobre o que estão a fazer. Na terceira fala do diálogo, a professora repetiu o que os alunos disseram e pediu que refletissem no assunto. A ação da professora é de apoio pois está a orientá-los para que revejam a conjetura.

De seguida, há um tempo breve de espera que serve para os alunos pensarem e para a professora decidir como agir. Como os alunos já estavam naquele empasse há algum tempo decidiu dar uma pista (quarta fala) que lhes permitisse optar por uma das conjeturas. Esta ação da professora é uma ação de *apoiar*, uma vez que os incentivou a observar as dimensões dos retângulos. Ao apontar para os dois retângulos, levou os alunos a observar melhor e a rever os raciocínios. Estes concluíram, então, que os retângulos tinham dimensões diferentes:

Miguel: Não pode ser.

Manuel: Não, mas olha, mas esta largura daqui [até] aqui vai ser a mesma que daqui [até] aqui.

Paulo: Mas o comprimento aqui é que não é o mesmo.

Manuel: Pois não, o comprimento, mas a largura vai ser a mesma.

Paulo: Aqui é o comprimento e aqui é a altura.

Manuel: Pois não. Porque nós vamos tirar este daqui e era o mesmo que este daqui até aqui ao fundo, por isso a este vamos tirar 1. Acho que já estou a perceber.

Paulo: Não. Vamos ter que tirar este lado. Temos que tirar este quadrado.

Manuel: Não. Vamos tirar 1 unidade... ou o quadrado.

Paulo: É 1 porque 1x1 é 1.

...

Manuel: Daqui [até] aqui é 1. 3-1vai dar 2 e 3+1 vai dar 4 e 4x2 é 8, mas nós não vamos querer esta parte aqui, esta área. Vamos tirar 1. (figura 3)

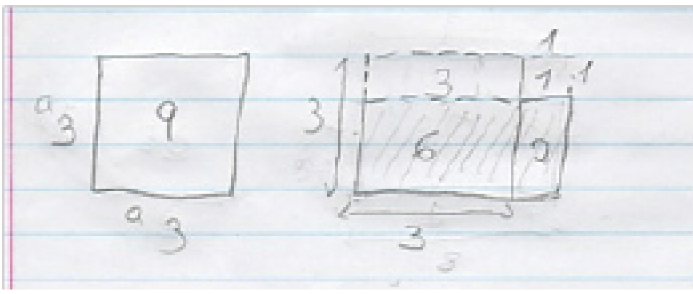


Figura 3 – Concretização do grupo.

Esta discussão sobre as medidas dos dois retângulos permitiu aos alunos iniciar o processo de justificação da conjetura abrindo caminho à generalização.

Situação de bloqueio 2. Uma outra situação de bloqueio aconteceu num outro grupo quando os alunos se mostraram confusos por desconhecer o significado da palavra “prova” escrita no enunciado. Rita leu o enunciado e ao ver a expressão “prova essa relação para qualquer quadrado” assumiu que se tratava de “uma coisa geral”:

Rita: E agora prova essa relação para qualquer quadrado... Agora é uma coisa geral. Temos se calhar que pensar noutros quadrados e ver que vai ser sempre assim.
Maria: Podemos fazer alguns e depois escrever uma conjetura. Então?

As alunas questionaram a professora sobre o processo de raciocínio que deviam escolher mostrando que a palavra prova lhes estava a causar alguma perturbação e que não sabiam se o caminho indutivo as levava à dita prova. A questão colocada por este grupo foi muito pertinente e colocou a professora numa situação difícil. Se por um lado a resposta era "Sim, podem seguir um raciocínio indutivo", por outro lado a professora teve receio de transmitir a ideia de que esse era o único caminho:

Maria: Stora? É para provarmos, como assim? Ou substituir os valores?
Prof: Substituir os valores como? Por números? Isso é concretizar. Provar é mostrar que a conclusão a que chegaram dá para todos [os casos].
...
Prof: Têm que explicar e conseguir provar que dá para todos [os casos]. Quando a gente usa valores estamos a dizer que dá para aquele caso. Isso é concretizar.

Na primeira fala da professora encontra-se de novo uma frase interrogativa de repetição das ideias dos alunos seguida de um esclarecimento. Mais uma vez, a professora (primeira e segunda falas) continua a exercer a ação de apoiar, fornecendo nova informação aos alunos para poderem tomar decisões. A professora reagiu afastando as alunas da concretização referindo as limitações do uso de casos particulares em contraste com o uso do caso genérico. Teve, no entanto, a consciência de que o modo como o fez poderia transmitir a ideia errada de que o raciocínio indutivo não permitia generalizar. Após este esclarecimento, as alunas continuaram a realizar a tarefa, abandonando a ideia de particularizar como se pode constatar no diálogo seguinte:

Maria: Se desenharmos esta parte acrescentada fica até aqui e esta largura é *b* e aqui é *b* também.

Rita: Esta vai ser igual a esta daqui até ao fim.

Maria: Pronto. O outro quadrado é igual a este, mas não é este [todo]. Ele é até aqui (Maria aponta para o quadrado não preenchido): b^2 . a^2 – b^2 é a área dele todo.

...

Rita: A área o retângulo feito a partir do quadrado é igual à área do quadrado inicial menos uma porção.

Beatriz: Menos uma parte.

...

Maria: Isto foi a 1ª parte: esta parte deslocámos para aqui, a tentar construir o quadrado, e faltou um bocadinho então vimos que $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

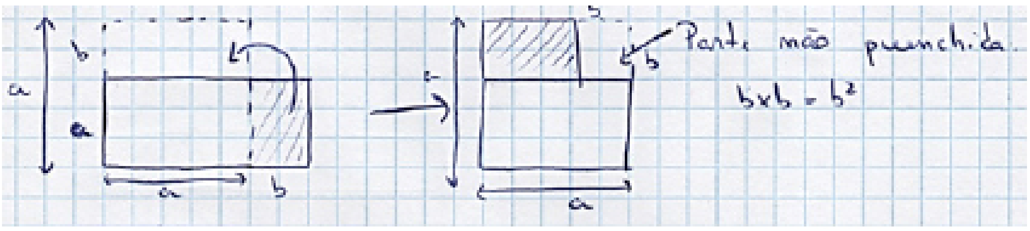


Figura 4 – Relação entre as áreas.

Os raciocínios desenvolvidos foram dedutivos e como argumento genérico foi apresentado um esquema dinâmico (figura 4), em que, partindo do retângulo se mostrou o que faltava no quadrado, acompanhado de um argumento algébrico que traduziu a relação entre as áreas por $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Estes dois exemplos mostram que as ações da professora de *incitar* e, sobretudo, de *apoiar* conduziram os grupos mais além no seu raciocínio, ou seja, levaram os alunos a *ampliar* o pensamento matemático, nomeadamente desenvolvendo raciocínios de outra natureza. No primeiro exemplo, depois de a professora orientar o grupo para perceber que estava a assumir, erradamente, duas figuras como tendo dimensões iguais, os alunos foram capazes de rever a sua conjetura aprofundando a compreensão da situação. No segundo exemplo, a informação fornecida permitiu às alunas chegar a um nível de justificação cognitivamente superior, o nível da experiência conceptual.

Situação de convicção sem compreensão. As conjeturas formuladas durante o trabalho em grupo foram, por vezes, aceites sem serem matematicamente justificadas. Nessas situações, a professora questionou os alunos tentando provocar a procura de justificações. Por exemplo, quando os alunos de um grupo, após verificarem que a área do quadrado e do retângulo eram diferentes, apresentaram uma conclusão pouco clara com base numa única concretização, a professora mostrou-se reticente em aceitá-la. A atitude de dúvida da professora fez com que os alunos testassem outro caso proporcionando uma melhor compreensão da situação:

> **Manuel:** Eu acho que este quadrado tem a mesma área que este só que nós a este vamos tirar a área do b. Não é Stora?
> **Prof:** Estão convencidos? Só experimentaram num caso, não foi?
> **Manuel:** Foi.
> **Paulo:** Vamos experimentar outros.

Quando a professora pergunta aos alunos se estão convencidos, pretende realçar o seu fácil convencimento e dá-lhes indicação de que um só caso concreto é pouco para se convencerem. Nestas ações de *apoiar*, foi transmitida informação importante sobre métodos para se convencerem matematicamente de uma afirmação. Os alunos concretizaram mais uma vez e chamaram a professora para lhe mostrar que a conclusão se mantinha:

> **Manuel:** Oh Stora fizemos aqui outro quadrado e deu 25 e 24. (Bate uma palma). É outra vez menos 1.
> **Prof:** Fixaram o *b* como 1? Experimentem com outro *b*. Não devem ficar presos num caso, porque pode dar para um caso e não dar para outro.
> **Paulo:** Agora já não vai dar.
> **Manuel:** Vai vai.
> **Paulo:** Se fizeres com 2 vai ser menos 2. Não, vai ser 4. Vai ser 2x2, vai dar 4.
> **Manuel:** E prontos. É o mesmo raciocínio, ouve lá. Vamos estar sempre a tirar a área deste. Vamos tirar 4. Se for 2 vamos tirar 4.

Manuel: A área é a mesma mas só que vamos ter de tirar este quadrado.

Paulo: A área daquele quadradinho.

Neste episódio a professora apercebeu-se que o valor atribuído a *b* era novamente 1 o que podia levar à conclusão de que a diferença entre a área das duas figuras era sempre de 1 unidade. A atitude de insatisfação da professora e a sugestão dada aos alunos de atribuírem outros valores a *b* fez com que atribuíssem a *b* o valor 2 (figura 5). No entanto, Paulo mostra receio de que a conjetura não passasse no novo teste ao afirmar "Agora já não vai dar". Após esse teste os alunos foram capazes de generalizar de forma mais clara mostrando compreender que à área do quadrado inicial é retirada a área do quadrado de lado *b* obtendo-se a área do retângulo final.

As ações da professora consistiram em *apoiar* os alunos em etapas essenciais da exploração matemática de uma situação informando-os, nomeadamente, de que é preciso variar um parâmetro, quando os outros estão fixos, para compreender as implicações na situação. A ação de *apoiar* foi fundamental para que os alunos avançassem para além da sua resolução inicial, ampliando assim o seu pensamento matemático. Através do novo teste à sua conjetura os alunos exploraram mais a situação e, desse modo, compreenderam melhor a relação entre as áreas das duas figuras.

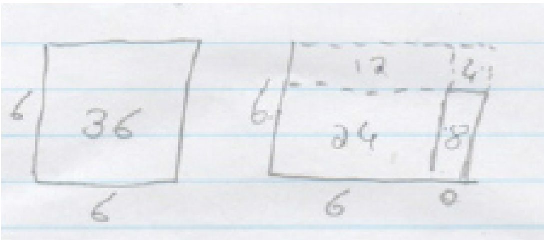


Figura 5 – Concretização com b=2.

Selecionar

Antes de dar por terminada a exploração em grupo, a professora aproveitou para, num curto espaço de tempo, ordenar os grupos por nível de justificação de Balacheff. A atribuição do nível de justificação teve por base o trabalho de cada grupo e a conclusão a que chegaram no momento imediatamente antes de dar por terminada a exploração. No quadro 1 apresentam-se as conclusões finais dos cinco grupos ordenados por ordem crescente de nível de justificação. Não foi atribuído um nível de justificação ao grupo A, pelo facto dos alunos não terem chegado a uma expressão algébrica que traduzisse a situação. Os grupos B e C raciocinaram de modo indutivo, mas enquanto o grupo B não generalizou, o grupo C fez uma afirmação geral e aceitou-a com nível de justificação de *empirismo naïf*. O grupo D usou medidas genéricas concretizando-as para verificar a relação o que corresponde ao nível de justificação de *experiência crucial*. O grupo E congregou um argumento genérico geométrico e algébrico: nível de justificação de *experiência conceptual*.

A seleção dos grupos para apresentar as resoluções da tarefa foi pensada para seguir a ordem que consta no quadro 1, visando encadear os raciocínios de todos os grupos envolvendo-os na construção de um argumento genérico. A ordem de seleção seria, então, a seguinte: (a) começar por convidar o grupo A que teve mais dificuldades e esclarecer as suas dúvidas permitia envolver os alunos com mais dificuldades na partilha de ideias; (b) depois chamar os grupos que raciocinaram de modo indutivo provocando-os a justificarem as suas afirmações de modo a que fossem explicitados os métodos de justificação matemática; (c) finalizar com os grupos que raciocinaram de modo dedutivo.

Sequenciar e conectar

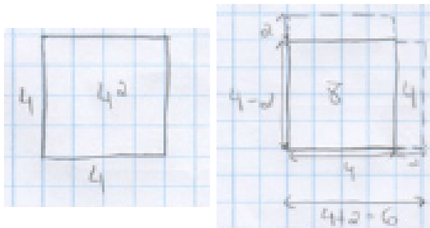
A sequência de apresentações dos grupos estava previamente pensada, mas essa ordem não era rígida podendo ser alterada a qualquer momento de modo a estabelecer as conexões necessárias entre os raciocínios dos alunos. Para iniciar a discussão, a professora convidou o grupo A a apresentar as suas conclusões. Como este grupo era constituído por alunas um pouco inseguras, procurou pô-las à vontade para explicarem os seus raciocínios, dizendo-lhes para apresentarem da forma que quisessem. As alunas desenharam um quadrado de lado a e o retângulo com dimensões $(a - b)(a + b)$ e escreveram, por baixo, a conclusão a que chegaram: $(a - b)(a + b) = a^2 - 2ab + b^2$. Registaram, ainda, ao lado as expressões das áreas parciais, do retângulo que designaram por x e do retângulo que designaram por y. A figura 6 é uma reconstituição do que estava no quadro preto, feita a partir dos relatórios escritos de Isa e de Antónia. Após esse registo no quadro, a professora interagiu com as alunas.

Quadro 1 – Nível de justificação e conclusões finais dos grupos

Grupo A:

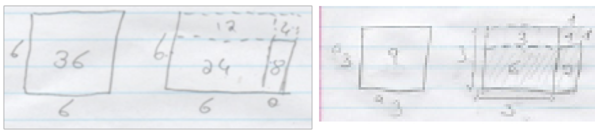
$(a - b)(a + b) = a^2 - 2ab + b^2$

Grupo B:



Empirismo naïf

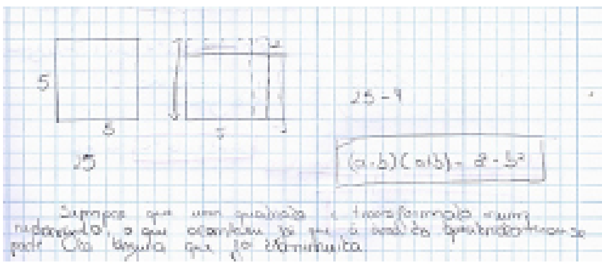
Grupo C:



A área é a mesma mas só que vamos ter de tirar a área daquele quadradinho.

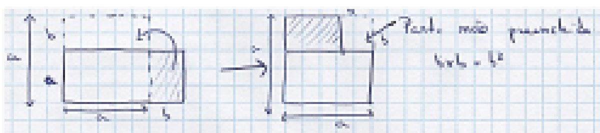
Experiência crucial

Grupo D:



Experiência conceptual

Grupo E:



$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

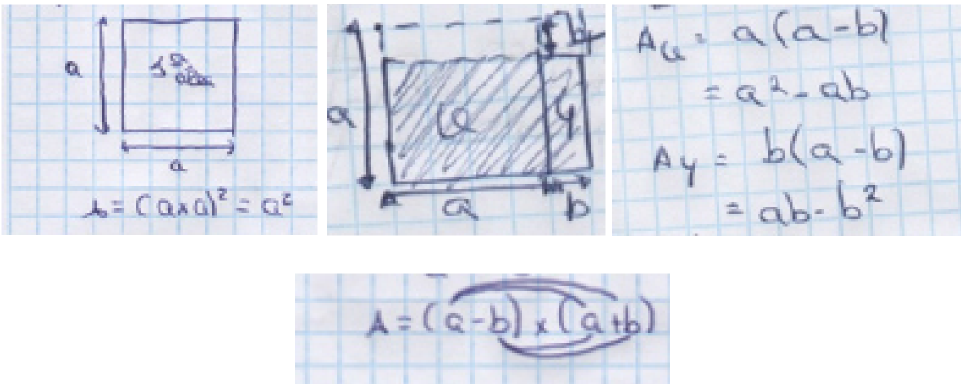


Figura 6 – Extratos dos relatórios de Isa e de Antónia (grupo A).

Prof: Qual foi a vossa maneira de pensar? … Pensaram com números, letras, desenhos, …?

Antónia: Começamos por calcular a área do primeiro quadrado.

Isa: Estivemos a calcular a área de cada um… deles.

Prof: De cada um quê?

Isa: …da divisão do quadrado. E vimos que a área deste era igual a esta.

Professora: Qual?

Isa: A área desta era igual a esta (aponta para os retângulos que estão ao lado e acima do retângulo designado por *x* na figura 6 desenhada no quadro).

Prof: É?

Paulo: Posso interferir?

Prof: Podes.

Paulo: Nós também tínhamos pensado nessa ideia, só que esta medida [aponta para a base do retângulo 1] é maior do que esta [aponta para a altura do retângulo 2].

Isa: Também nós. Até aí já chegámos.

(troca de ideias pouco claras entre as alunas e o Paulo).

Prof: Afinal são iguais ou não?

Antónia: São iguais se juntar este quadrado [de lado b] a esta [área retângulo *y*].

As intervenções da professora foram ações de *incitar* as alunas a exporem e explicarem os seus raciocínios à turma. Por exemplo, a questão colocada pela professora na segunda fala incitou as alunas a designar os objetos a que se referiam para tornar o discurso mais claro. Paulo, aluno do grupo C, pediu para intervir e a professora deixou, uma vez que o confronto de ideias é uma componente importante da discussão para promover o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. No entanto, o diálogo que se estabeleceu não foi claro e a professora provocou as alunas a clarificarem a sua afirmação. Essa provocação levou-as a explicitar quais os retângulos que tinham áreas iguais e, ao fazê-lo, ficou mais claro que os dois retângulos, desenhados ao lado e acima do retângulo *x*, tinham dimensões diferentes.

Ainda durante a discussão dos raciocínios deste grupo a professora necessitava de compreender como é que as alunas chegaram à conclusão $(a - b)(a + b) = a^2 - 2ab + b^2$. Pediu-lhes para explicarem como obtiveram essa expressão que estava escrita no quadro por baixo do desenho na figura 6:

> **Prof:** E esses cálculos que aí estão? Importam-se de nos explicar o que aí está?
> **Isa:** Este é a área do quadrado que é $a \times a$. Este é $a - b$ que é: o *a*, nós só queremos esta parte. Se daqui [até] aqui mede *a* e daqui [até] aqui mede *b* é $a - b$ e $a + b$ que é este *a* mais este *b*, daqui [até] aqui que é $a + b$.

A explicação dada mostrou que a expressão $(a - b)(a + b)$ significava para elas a área do retângulo sombreado da figura 6. No entanto, a explicação não justificava a presença do monómio $-2ab$, sem significado naquela situação, pelo que a professora lhes perguntou como chegaram àquele monómio.

> **Prof:** Então de onde vem o $-2ab$? Como chegaram a essa expressão? Foi pelo desenho ou pelo desenvolvimento dessa expressão?
> **Isa:** Pelo desenvolvimento.

Estava então esclarecido que o monómio $-2ab$ tinha sido obtido pelo desenvolvimento algébrico do produto do comprimento pela largura sem atender ao seu significado geométrico de áreas de partes da figura. A professora fez, então, com toda a turma o desenvolvimento algébrico da expressão da área do retângulo corrigindo, assim, o erro cometido: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Naquele momento sentiu-se tentada a continuar a explorar o trabalho das alunas, pois bastava interpretar geometricamente aquela expressão para se estabelecer uma relação. Optou, porém, por chamar o grupo B, respeitando assim a ordem prevista por considerar mais vantajosa a construção de um argumento genérico envolvendo todos os grupos.

A transição para a comunicação seguinte foi feita questionando as alunas sobre os objetivos da tarefa para tornar claro que o objetivo de relacionar a área das duas figuras ainda não tinha sido alcançado. As ações da professora através deste questionamento serviram para *apoiar* os alunos fazendo-os assumir publicamente que ainda não tinham respondido à questão colocada:

> **Prof:** Pronto. E ficaram aí?
>
> **Isa:** Sim.
>
> **Prof:** E o que pedia a investigação? Para relacionar o quê?
>
> **Isa:** As áreas.
>
> **Prof:** Entre o quê?
>
> **Isa:** Do quadrado com este.
>
> **Prof:** Chegaram lá?
>
> **Isa:** Não. Ainda estávamos a pensar.

Este episódio permitiu a transição espontânea para a comunicação do grupo C, pois Daniela, elemento do grupo B, pediu para ir ao quadro: "Podemos ir nós explicar?" As alunas foram ao quadro e desenharam os esquemas da figura 7 em silêncio e a professora pediu-lhes para explicarem: "Ide explicando. A que chegaram?"

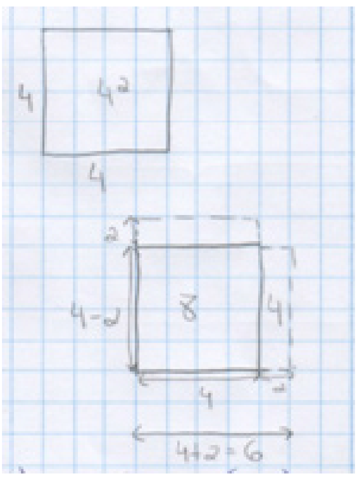


Figura 7 – Extrato do relatório de Francisca (grupo B).

Estas alunas iniciaram então a sua intervenção explicitando a semelhança dos seus raciocínios com os apresentados pelo grupo anterior no que dizia respeito às tentativas mal sucedidas de trabalhar com medidas genéricas:

> **Daniela:** Nós só tínhamos chegado mais ou menos aquela conclusão só que não conseguimos fazer mais nada. Então estabelecemos números para as letras. Por exemplo $a = 4$ e $b = 2$. A área daquele é 16. Concluímos que diminuiu 4.
> **Paulo:** E só puseste esses resultados?
> **Daniela:** Se fizéssemos outros números provavelmente…
> **Paulo e Miguel:** Provavelmente!? Devias ter feito.
> **Manuel:** Nós fizemos.
> **Daniela:** Conclusão a medida diminuiu.

Após a discussão as alunas concluiram que "a medida diminuiu". A professora optou por não chamar o grupo C ao quadro, uma vez que o seu raciocínio também foi indutivo e Paulo e Miguel, alunos desse grupo, já tinham contribuído para a discussão, informando da importância de verificar a conjetura para mais casos.

Os próximos grupos a apresentar os seus raciocínios, grupos D e E, tinham trabalhado com as medidas genéricas pelo que a professora achou necessário promover a transição do raciocínio indutivo para o dedutivo fazendo a conexão entre os raciocínios apresentados e os que se seguiriam. Assim, antes de chamar outro grupo iniciou um questionamento com enfoque na passagem dos casos concretos para o exemplo genérico como forma de promover a generalização:

> **Prof:** Quanto diminuiu, genericamente?
> **Daniela:** 4.
> **Prof:** Nesse caso 4 – apontando para o caso registado no quadro.
> **Paulo:** Depende, pode diminuir 2 ou 3 ou 5.
> **Prof:** Se quisermos falar genericamente quanto diminuiu?
> **Isabel:** Metade.
> **Paulo:** b.
> **Miguel:** Não, não sabes.
> **Prof:** Daquele para aquele Beatriz quanto diminui? (apontando para o caso geral representado no quadro).

Beatriz: b^2.

Prof: Nesse diminuiu 4, esse é um caso concreto. Mas no exemplo genérico quando temos um quadrado e aumentamos o comprimento *b* [unidades] e diminuímos a largura *b* [unidades] quanto diminui a área?

Beatriz: b^2.

Prof: E onde está?

Beatriz: É o quadrado que está por cima... Posso ir lá? (foi e apontou para o quadrado de lado *b*).

Em todo o questionamento presente neste episódio a ação da professora é de *ampliar* o pensamento dos alunos do concreto para o geral. A sua reformulação da questão de forma mais completa, na penúltima fala do episódio anterior, pretendeu realçar os aspetos genéricos da situação. O incentivo à identificação da representação geométrica da expressão algébrica b^2 tinha em vista levar os alunos a compreenderem o seu significado. No entanto, isso não garantia que os diferentes grupos tivessem compreendido a relação pelo que a professora aproveitou para dar voz ao grupo D: "Um grupo que queira mostrar genericamente quanto é que a área diminui! ... Liliana?" Entretanto esclareceu, falando para a Daniela, do grupo B, que apresentara antes: "Vocês só fizeram um caso. Um caso ... não chega para provar." Esta ação visou apoiar os alunos fornecendo-lhes informações sobre os processos de raciocínio. Continuou a dar suporte informativo aos alunos, como se pode ver nas falas que se seguiram, salientando a importância de usar letras como representação de valores arbitrários.

Prof: Como é que falamos de todos? O que tenho de usar para falar de todos os casos?

Vários: Letras.

Prof: Porque as letras podem tomar qualquer valor.

O grupo D (representado pelas alunas Liliana e Sofia) mostrou a área que faltava ao retângulo para formar o quadrado inicial rodando o retângulo acrescentado ao quadrado inicial de dimensões $a - b$ e b para a zona retirada do quadrado (figura 8). Liliana, na sua explicação, falou de medidas designando-as por letras como se fossem números concretos o que provocou confusão ao grupo C e gerou uma discussão em torno das inferências feitas com letras:

Liliana: Nós calculámos esta área que dava *a* ao quadrado e depois para vermos a diferença fizemos por letras: colocámos esta parte ali em cima e sobrava *b* [refere-se a quadrado lado *b*].

Miguel: Como sabias que sobrava aquele quadrado? Não tinhas medidas!

Liliana: Porque sabemos que aqui tem $a - b$.

Sofia: Porque nós basicamente passámos este para aqui (fez o mesmo esquema). Tirámos esta parte e passámos para aqui e ao desenhar vê-se que sobra este quadrado.

Manuel: Não percebo.

Prof: É que eles só conseguiram ver com casos concretos para verem a diferença.

Maria: Seria melhor... (apontando para o quadro sugerindo ir lá).

Prof: Ide lá [ao quadro].

Maria: Nós fizemos esquemas destes.

Prof: O vosso esquema tem mais fases...Tu [Liliana] estás a explicar bem mas eles não estão a perceber...

Quando Manuel, do grupo C, afirmou não compreender, a professora interveio tentando explicar a dúvida de Manuel e Maria (do grupo E) mostrou vontade de ajudar. A professora deixou Maria ir ao quadro mas teve o cuidado de dizer a Liliana por que interrompera a comunicação do seu grupo. Passou-se assim para o grupo E que, contrariamente ao grupo D, havia partido do retângulo para mostrar o que faltava no quadrado de modo a que as áreas fossem iguais (figura 8):

Maria: Este retângulo aqui, é o mesmo que este. Já toda a gente percebeu porque é que sobra esta parte, não já?

Paulo: Sim, porque é o *b*.

Manuel: Como é que sabes que é o *b*?

Prof: Acho que o Manuel não está a perceber porque é que dizes que os retângulos são iguais. O que é que vos convenceu que são iguais?

Isa: As medidas.

Rita: Lê o enunciado. Então cresceu *b* decresceu *b* e por isso o que tem para o lado é o mesmo.

Maria: Isto é *a*, isto é *b* e isto aqui é o quê? ... *a* – *b*. Se aqui é *a* – *b* aqui é? Quanto é?... *b*. Se pusermos isto aqui (girando) quanto é que vai ocupar? ... *a* – *b*. E isto é quanto? É *b*. Pronto.
O que vocês fizeram com números nós fizemos com letras. Conclusão o que podemos dizer? Conclusão final: A área do retângulo é igual a a^2-b^2.

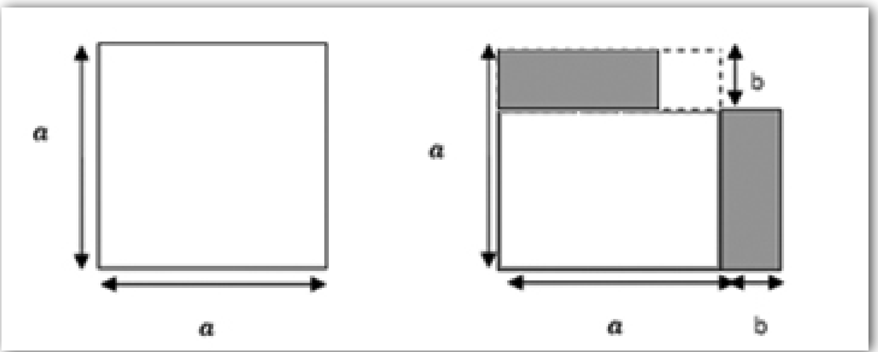


Figura 8 – Esquema do grupo de Liliana

A professora compreendeu que Manuel não estava a relacionar as medidas do retângulo rodado com as medidas da figura. Preocupada em que os raciocínios dedutivos fossem compreendidos por todos, questionou as alunas: “O que é que vos convenceu que são iguais?”. Desse modo, orientou-as para focarem a sua explicação nas dimensões do retângulo, levando-as a justificarem a afirmação: “Os retângulos são iguais.”

Maria explicou a transformação do retângulo no quadrado mostrando que compondo o quadrado com a parte acrescentada da área do retângulo faltava a área correspondente ao quadrado de lado *b*. A partir do diálogo que ocorreu no grupo C, enquanto Maria explicou, tornou-se claro que Manuel tinha dificuldades em aceitar a letra como uma representação de um número qualquer, isto é, uma variável:

Manuel: Como é que ela sabe que é aquilo e não mais um bocadinho?
Paulo: Foi por olho.
Manuel: Podia ser mais aqui.
Miguel: Ela não sabe as medidas. Como é que ela...
Paulo: Ela sabe que daqui [até] aqui é *a* – *b*...

Quando Maria terminou, Manuel pediu-lhe uma explicação particular. A professora apoiou esta iniciativa de Manuel na esperança de que houvesse um desenvolvimento do seu raciocínio, pois as dificuldades em trabalhar com medidas genéricas constituem um obstáculo à realização de raciocínios dedutivos:

> **Maria:** Sabes que isto é *a* e sabes que isto é *b*. Se deslocares isto para aqui, não é? Isto vai ser *b*.
> **Manuel:** Como é que sabes que é aí?
> **Maria:** Estou a fazer supostamente, se medisses, medias aqui e era *b*. Ok? Então aqui em cima vai ser *b* também. E isto aqui vai ser o quê?
> **Manuel:** *a* – *b*.
> **Maria:** Que é a medida desta, por isso é que é ali.
> **Manuel:** Ah OK.
> **Maria:** Queres que explique outra vez? Nós não medimos.
> **Manuel:** Pois, não tinhas medidas. Tipo: conseguimos perceber mais ou menos. Chegavas aqui com a régua e medias *b* medias até ali *b* então ali era *a* – *b*.

Na sua explicação a Manuel, Maria fez a adaptação do seu discurso, falando de medições concretas, em que obtinha o *b*, para ajudar o colega a compreender que essa medição podia ser um número qualquer, e depois mostrou-lhe como estabelecer relações entre as diferentes medidas. A discussão culminou com a apresentação do raciocínio dedutivo do grupo E completando-se, assim, a construção de um argumento genérico.

A sequenciação das intervenções em toda a discussão baseou-se na ordem pré-estabelecida, mas com a preocupação de fazer um encadeamento dos raciocínios dos grupos com grau de generalização crescente até construir um argumento genérico. Essa construção gradual foi feita pela partilha e compreensão dos raciocínios dos grupos o que permitiu que as transições entre as diferentes intervenções ocorresse de forma natural.

Durante a discussão a professora incitou os alunos a apresentarem os seus raciocínios, o que foi importante para a compreensão de todos e, também, para ela própria decidir no momento a sua ação, como se evidencia nos episódios da apresentação do grupo A. O apoio dado aos grupos e as tentativas de ampliação do pensamento dos alunos dependeu dessa mesma compreensão. A professora tentou manter os alunos motivados através da oportunidade de partilharem os seus raciocínios e de refletirem sobre eles o que lhe permitiu promover níveis de justificação mais avançados. Pode-se concluir que nas práticas de sequenciar e conectar, para além de ações de *apoiar* e *incitar*, houve ações de *ampliar* o pensamento matemático dos alunos.

Conclusão

A oportunidade criada pela professora foi relevante para a construção coletiva de um argumento genérico conseguido através de uma partilha de raciocínios em que os alunos se mostraram preocupados com a compreensão matemática dos colegas. O facto de os alunos explorarem a tarefa em grupo promoveu um maior envolvimento na discussão, motivados pela apresentação do que haviam pensado nos respetivos grupos.

A ação da professora foi fundamental em todo o desenvolvimento da aula e teve na base um trabalho prévio de planificação. Nessa planificação a professora preparou a tarefa a aplicar de acordo com os objetivos definidos e tendo em conta as caraterísticas da turma. As normas de sala de aula vinham a ser estabelecidas desde o início do ano letivo, condição importante para que os alunos trabalhassem efetivamente em grupo ouvindo os outros e aceitando as suas opiniões (Mason, 2010). A professora revelou-se mais cuidadosa em antecipar os processos de raciocínio do que as próprias resoluções dos alunos. Este aspeto foi ultrapassado devido à preocupação em compreender as resoluções trabalhadas ao longo da aula e integrar esse conhecimento na sua ação imediata. A professora sabia ser importante observar os alunos e ouvir as suas explicações e justificações para compreender como estavam a raciocinar. Estava também consciente da importância de orientar os alunos de modo a ultrapassarem os obstáculos encontrados (Mason et al., 1985).

Durante a prática de *monitorizar*, fase de exploração da tarefa em grupo, as ações de *incitar* e *apoiar* da professora foram fundamentais para fazer os alunos avançar no seu trabalho. No caso da exploração indutiva os alunos revelaram dificuldades em testar as conjeturas, tirar conclusões sobre os resultados do teste, rever os resultados, rever as conjeturas e reformulá-las quando necessário. Este processo é complexo e, como referem Mason et al. (1985), é a revisão acompanhada de reflexão que possibilita generalizar e ao mesmo tempo compreender. A ação da professora consistiu em *incitar* e, sobretudo, em *apoiar* os alunos nas diferentes fases do processo de conjetura conseguindo que eles prosseguissem a exploração. Pode-se, então, afirmar que estas ações ajudaram os alunos a compreender melhor o próprio processo de conjetura e a estrutura matemática da situação. Também a oportunidade, que a professora aproveitou, para promover o raciocínio dedutivo permitiu ampliar o pensamento dos alunos. Pode-se concluir, então, que, na fase de monitorização, as ações da professora foram de apoiar e de *incitar* e que ambas se revelaram fundamentais para que os alunos ampliassem o seu pensamento matemático.

Na discussão coletiva, a professora queria desenvolver, com todos os alunos, uma exploração em que a justificação emergisse, isso é, em que a estrutura matemática fosse bem compreendida, para facilitar a construção de um argumento genérico (Mariotti, 2006). Para além disso, necessitava de fazer um encadeamento do raciocínio dos alunos estabelecendo conexões entre eles. O conhecimento teórico dos níveis de justificação de Balacheff (1987) tornou possível graduar os níveis de justificação, o que foi crucial para encadear os raciocínios dos alunos. As ações da professora de *incitar* e *apoiar* foram importantes para promover a compreensão e a partilha dos raciocínios dos diferentes grupos assim como para incentivar a que continuassem a participar e a desenvolver os seus raciocínios para além do que tinham feito no grupo. As ações de ampliar foram identificadas, apenas, nas práticas de sequenciar/conectar, pois foi nessa fase que a professora usou todo o conhecimento adquirido até ali sobre os raciocínios dos alunos, para encadear as ideias matemáticas até produzir um argumento genérico.

Ao longo de toda a aula exploratória identificaram-se, então, ações de *incitar*, *apoiar* e *ampliar* verificando-se que todas contribuíram para, na fase de discussão coletiva, se chegar a um argumento genérico. As ações de *incitar* e *apoiar* permitiram compreender e ajudaram os alunos a continuar o seu trabalho, condição essencial para se manterem motivados e terem ideias para discutir com os outros. As ações de *ampliar* o pensamento matemático dos alunos surgiram pela necessidade de promover o raciocínio dedutivo.

Todos os episódios apresentados neste capítulo podem ser considerados *de ampliação* (Cengiz et al., 2011) por envolverem raciocínio e reflexão e ultrapassarem os métodos de resolução iniciais. No entanto, só foi possível *ampliar* o pensamento matemático por terem sido desenvolvidas muitas ações de *incitar* a explicitação dos raciocínios e de *apoiar* os raciocínios durante toda a aula. Pode-se concluir que as três ações referidas por Cengiz et al. (2011) são essenciais para ampliar o pensamento matemático dos alunos.

A preocupação com o desenvolvimento do raciocínio matemático parece ser uma condição favorável para que o professor promova a *ampliação* do pensamento matemático dos alunos e a preocupação específica com a produção de argumentos genéricos parece favorecer a ação, do professor, de *ampliar* o pensamento matemático dos alunos. A dificuldade referida por Balacheff (1987) na passagem do particular para o geral foi aqui ilustrada através do caso de Manuel. Segundo o autor essa passagem exige a capacidade de distanciamento do objeto matemático e levanta a questão de como pode o professor desenvolver essa capacidade nos alunos, problema que será interessante retomar em investigações futuras.

Referências

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da Matemática: O caso da Célia. In: L. Santos, A. P. Canavarro, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Eds.), *Investigação em educação matemática 2012: Práticas de ensino da matemática* (pp. 255-266). Portalegre: SPIEM.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 355-374.

De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with Sketchpad. In D. Villiers, (Ed.), *Rethinking proof with Sketchpad* (pp. 1-16). San Rafael, CA: Key Curriculum Press.

De Villiers, M. (2012). An illustration of the explanatory and discovery functions of proof. *Pythagoras, 33(3), Art. #193, 8 pages.* (Acedido em 21 de abril de 2013 de http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v33i3.193)

Domingues, C. (2011). *Desenvolvimento do Raciocínio Matemático: Uma experiência com uma turma de 9.º ano* (Dissertação de mestrado, Universidade do Minho).

Healy, L., & Hoyles, C. (1998). *Justifying and Proving in school mathematics. Summary of the results from a survey of the proof conceptions of students in the UK* (research report) (pp.601-613). London: London Institute of Education.

Lannin, J., Ellis, A., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre_K_Grade 8.* Reston, VA: NCTM.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and prooving in mathematics education. In A. G. (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense

Mason, J. (1998). Resolução de problemas no Reino Unido: Problemas abertos, fechados e exploratórios. Em P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática: Textos seleccionados* (pp. 107-115). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Mason, J. (2010). *Effective questioning and responding in the mathematics classroom*. (Acedido em 21 de abril de 2013 de http://mcs.open.ac.uk/jhm3/Selected%20Publications/Effective%20Questioning%20&%20Responding.pdf)

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1985). *Thinking mathematically*. London: Addison-Wesley.

Pólya, G. (1968). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics* (Vol. I). Princeton, NJ: University Press.

Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: Research, learning and teaching*. Rotterdam: Sense.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five pratices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10,* 313-340.

Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal Mathematics Teacher Education, 11,* 307-332.

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematics Thinking and Learning, 10*(2), 103-133.

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal of Research in Mathematics Education, 40*(3), 314-352.