

Desempenho em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta de futuros professores do ensino básico¹

José António Fernandes
CIEd da Universidade do Minho

Carmen Batanero
Universidade de Granada

Paulo Ferreira Correia
Escola Secundária/3 de Barcelos

María M. Gea
Universidade de Granada

Introdução

O recente reforço do ensino de Probabilidades e Estatística nas escolas de muitos países, entre os quais se encontra Portugal (Ministério da Educação, 2007), sobretudo a nível do ensino básico, relevam a importância de avaliar os conhecimentos dos professores e futuros professores nesta temática.

No caso dos professores do 1.º ciclo do ensino básico, trata-se de uma temática que passam agora a ter de ensinar às crianças, o que antes não acontecia. Ora essa exigência implica que estes estudantes, futuros professores do 1.º ciclo, recebam formação nesses conteúdos ao longo da sua formação inicial, tal como já vem acontecendo, bem como aqueles que se encontram no exercício da profissão. Esta é uma tendência internacional, como mostram Batanero e Díaz (2010) e o recente estudo organizado pela International Commission on Mathematics Education e a International Association for Statistics Education (Batanero, Burrill & Reading, 2011).

Para além deste aprofundamento, em Portugal alguns estudos têm mostrado que os professores do 1.º ciclo possuem uma formação deficiente em matemática e revelam, em consequência, alguma aversão ao seu ensino (Gomes & Ralha, 2005). Neste contexto, torna-se pertinente conhecer até que ponto a formação recebida ao longo da formação inicial se revela adequada para as necessidades de ensino, tendo sempre por fim último questionar essa formação e contribuir para a sua melhoria.

Assim, tendo por pressuposto que a formação dos futuros professores do 1.º ciclo não se deve confinar estritamente aos conteúdos que terão de explorar com as suas crianças, antes devem adquirir uma compreensão mais ampla desses conteúdos, no presente estu-

do avaliam-se os conhecimentos desses futuros educadores e professores em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta.

Ainda que estes futuros professores atualmente não tenham de ensinar às crianças estes conceitos, isso não invalida a importância de um estudo do tipo daquele que aqui é apresentado pois, pelo menos na forma como são abordados, eles são indissociáveis da cultura estatística do cidadão comum e, num futuro próximo, esses professores poderão ter de ensiná-los, sobretudo nos anos finais do 3.º ciclo do ensino básico.

Por outro lado, sendo os conceitos de probabilidade condicionada e de probabilidade conjunta centrais para a compreensão do pensamento probabilístico, a sua não abordagem na formação inicial destes futuros professores pode repercutir-se na consolidação de raciocínios limitados ou mesmo enviesados, tal como mostraram Fischbein e Schnarch (1997) ao concluírem que, sem ensino de probabilidades, algumas conceções erradas se reforçam com o avanço na escolarização.

Investigação prévia

Nesta secção analisa-se a investigação relativa às dificuldades de alunos e futuros professores no tema do presente estudo, que se resume a seguir.

Investigação com alunos

No presente estudo referimo-nos à probabilidade condicionada como restrição do espaço amostral, em que a probabilidade condicionada consiste na proporção do subconjunto implicado em relação ao conjunto total (Watson & Moritz, 2002). Assim, a probabilidade condicionada de um acontecimento A dado que ocorreu o acontecimento B , que se representa por $P(A|B)$, é a probabilidade de A considerando apenas os resultados possíveis da experiência aleatória que são elementos de B . Donde, a probabilidade do acontecimento A é avaliada num novo espaço amostral que resulta do condicionamento da ocorrência do acontecimento B (Tarr & Lannin, 2005).

Na probabilidade condicionada $P(A|B)$ quando a probabilidade acontecimento A não é influenciada pela ocorrência do acontecimento B , o que significa que $P(A|B) = P(A)$, diz-se que os acontecimentos A e B são independentes. Para Shaughnessy (1992) esta abordagem ao conceito de independência é mais intuitiva para os estudantes do que a abordagem efetuada a partir da probabilidade conjunta.

A probabilidade conjunta de dois acontecimentos é dada pelo produto da probabilidade de um deles pela probabilidade condicionada do outro dada a realização do primeiro. Assim, sendo A e B dois acontecimentos, a probabilidade conjunta, que se representa por $P(A \cap B)$, é dada por $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$, com $P(A) > 0$, ou $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$, com $P(B) > 0$. No caso de A e B serem acontecimentos independentes, aplicando a definição dada antes, conclui-se que probabilidade conjunta é dada por $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Esta fórmula pode ser usada para estudar a independência dos acontecimentos A e B em alternativa àquela que foi antes dada.

Observando a fórmula da probabilidade conjunta constata-se que a determinação desta probabilidade envolve, além da probabilidade simples, a probabilidade condicionada, o que nos leva a perspetivar o conceito de probabilidade conjunta como sendo mais elaborado do que o conceito de probabilidade condicionada, podendo também repercutir-se em maiores dificuldades dos alunos na primeira probabilidade em relação à segunda.

Em geral, a investigação realizada mostra que os alunos sentem muitas dificuldades quando lhes é requerida a determinação de probabilidades condicionadas e de probabilidades de acontecimentos compostos (e.g., Fernandes, 1999; Polaki, 2005; Watson & Moritz, 2002).

Fischbein e Gazit (1984), numa experiência de ensino sobre probabilidade condicionada em que participaram alunos do 5.º, 6.º e 7.º anos de escolaridade, concluíram que a percentagem de respostas corretas foi superior nas situações com reposição do que nas situações sem reposição, observando que os alunos não percebem que o espaço amostral é modificado nas situações sem reposição e calculam a probabilidade de um acontecimento em situações sem reposição comparando o número de casos favoráveis do acontecimento antes e depois da primeira tiragem, em vez de compararem com o número total de resultados.

Já Pollatsek, Well, Konold e Hardiman (1987) verificaram que os alunos confundem os significados das probabilidades condicional e conjunta, isto é, confundem $P(A|B)$ com $P(A \cap B)$. Esta dificuldade também foi observada na resolução de uma tarefa envolvendo frequências de dois acontecimentos numa tabela de dupla entrada, em alunos do 9.º ano de escolaridade (Correia, Fernandes & Contreras, 2011) e em estudantes de psicologia (Díaz & Batanero, 2009).

Por outro lado, Falk (1986) verificou que muitos alunos aderem à *falácia da inversão do eixo temporal*, em que os sujeitos consideram que a probabilidade de um acontecimento não é influenciada pela realização de outro acontecimento que ocorreu depois. Face à determinação de uma probabilidade condicionada $P(A|B)$, relativa à probabilidade de se obter uma bola branca na primeira extração dado ter-se obtido uma bola branca na segunda extração, sem reposição da primeira bola extraída, de uma urna contendo duas bolas brancas e duas bolas pretas, muitos alunos deram a resposta $P(A) = 1/2$ e outros não responderam à questão por a considerarem sem sentido. Também neste estudo, os alunos não discriminaram entre uma probabilidade condicionada e a sua transposta, isto é, entre as duas probabilidades $P(A|B)$ e $P(B|A)$, erro designado por *falácia da condicional transposta*. A origem destas dificuldades resulta, sobretudo, da prevalência de uma visão determinista do mundo, em que as causas precedem sempre os efeitos. Esta dificuldade também aparece nos estudos de Correia *et al.* (2011) com alunos do 9.º ano e de Díaz e Batanero (2009) com estudantes de psicologia.

No caso da probabilidade conjunta, Polaki (2005) concluiu no seu estudo que os alunos apresentam muitas dificuldades no estabelecimento do espaço amostral de experiências compostas, apresentando conjuntos de resultados incompletos com base em raciocínios subjetivos ou estratégias de tentativa-e-erro. Além disso, mesmo alguns alunos

que foram sucedidos na definição do espaço amostral cometeram muitos erros na determinação de probabilidades. As dificuldades dos alunos em estabelecer o espaço amostral de experiências compostas explicam-se pela exigência de integração de mais do que um aspeto da situação numa estrutura significativa. Neste processo, segundo Polaki (2005), está implícito o uso da regra do cardinal do produto cartesiano como forma de confirmação de que o espaço amostral está realmente completo.

Tversky e Kahneman (1983) estudaram o erro da *falácia da conjunção*, que consiste em avaliar a probabilidade da conjunção como sendo superior à probabilidade de um dos acontecimentos seus constituintes, isto é, $P(A \cap B) > P(A)$ ou $P(A \cap B) > P(B)$. Este fenómeno verifica-se, sobretudo, quando um dos acontecimentos é altamente representativo do outro, como é o caso do acontecimento “Um ser humano nasceu em África” é altamente representativo do acontecimento “Um ser humano é de cor negra”. Nesta situação, Fernandes (1990) verificou que muitos estudantes do 11.º ano (51%), sem ensino de probabilidades, e futuros professores de matemática (81%), com ensino de probabilidades, consideraram o acontecimento “Um ser humano é de cor negra e nasceu em África” como sendo mais provável do que o acontecimento “Um ser humano é de cor negra”.

Por outro lado, Watson e Moritz (2002) acrescentam às dificuldades antes referidas que os alunos confundem a probabilidade conjunta com a probabilidade da união, simplesmente adicionam as probabilidades dos acontecimentos que a constituem ou determinam a sua média.

No estudo de Fernandes (1999), em que foram incluídos vários itens de probabilidade em experiências compostas, verificou-se que alunos do 8.º e do 11.º ano (sem ensino de probabilidades) revelaram muitas dificuldades, as quais se deveram ao recurso a probabilidades das experiências simples implicadas na experiência composta, a uma descrição incompleta do espaço amostral, a fatores causais e ao enviesamento de equiprobabilidade. Neste último erro, os alunos tendem a admitir que acontecimentos de caráter aleatório são por natureza equiprováveis (Lecoutre & Durand, 1988).

Investigação com futuros professores

Ainda que escassos, alguns estudos analisam a compreensão da probabilidade condicionada e conjunta por parte de futuros professores.

Begg e Edwards (1999) verificaram que só cerca de dois terços dos professores em serviço e em formação do ensino primário, da sua amostra, considerava todos os acontecimentos como igualmente prováveis e muito poucos compreendiam o conceito de independência. Fernandes e Barros (2005), no seu estudo com 37 professores portugueses em formação, sugerem dificuldades dos futuros docentes em formular acontecimentos e compreender os acontecimentos compostos. Além disso, estes professores utilizaram com frequência um raciocínio aditivo para comparar probabilidades.

Estrada e Díaz (2006) propuseram o cálculo da probabilidade simples, composta e condicionada a partir de dados apresentados numa tabela de dupla entrada a uma amostra de 65 futuros professores de ensino primário. O estudo foi replicado por Contreras,

Estrada, Díaz e Batanero (2010) com outros 69 futuros professores do ensino primário, propondo uma versão mais simples da tarefa. Em ambos os casos, verificou-se uma grande dificuldade no cálculo da probabilidade condicionada e conjunta e alguns desses futuros professores aderiram à falácia da condicional transposta e à falácia da conjunção.

Estas dificuldades reproduzem-se nos professores do ensino secundário, como mostra o estudo de Carter (2008) em que, analisando as respostas de 210 futuros professores do ensino secundário a um questionário de probabilidades, se observou a adesão ao enviesamento de equiprobabilidade e a erros de cálculo da probabilidade conjunta. Também no trabalho de Contreras (2011), com 196 futuros professores do ensino secundário, se manifestaram erros de cálculo da probabilidade condicional, a falácia da condicional transposta e a falácia da inversão do eixo temporal. Aprofundando o estudo desta última falácia, Contreras, Batanero, Díaz e Arteaga (2013), nesta mesma amostra, concluíram que mais de metade aderiu a esta falácia em algum dos problemas propostos. Enquanto foram capazes de resolver corretamente um problema com reposição quando o acontecimento condicionante é o resultado da primeira extração, não o resolveram quando esse acontecimento é o resultado da segunda extração, coincidindo com os resultados de Falk (1986). Os resultados indicam também que esta falácia afeta a resolução de problemas em que se tem de aplicar o teorema de Bayes.

As investigações anteriores descrevem os raciocínios dos professores ou futuros professores ao resolverem problemas de probabilidade condicionada, sem todavia se centrarem com detalhe nesses raciocínios. Com o presente estudo procura-se contribuir nesse aspeto, variando também o tipo de tarefa em relação às que foram propostas nos estudos anteriores.

Metodologia

Participaram no estudo 46 alunos do 3.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica de uma universidade do norte de Portugal, último ano do curso que dá acesso a cursos de mestrado em Educação Pré-Escolar, em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e em Ensino do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico; tratando-se portanto de possíveis futuros professores. As suas idades estavam compreendidas entre os 20 e os 40 anos (média de 22,5 anos e desvio padrão de 4,2 anos) e, como é habitual neste curso, quase todos os alunos (93,5%) eram do sexo feminino.

A formação matemática dos alunos à entrada na universidade era muito variada, tendo estudado pela última vez matemática em cursos muito distintos, de que se salientam: Matemática A (15,2%), disciplina do ensino secundário dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas; Matemática Aplicada às Ciências Sociais (37,0%), disciplina do ensino secundário dos Cursos de Científico-Humanístico de Ciências Sociais e Humanas e Tecnológico de Ordenamento do Território e Ambiente; e Matemática do 9.º ano do ensino básico (23,9%). Em geral, os alunos percecionaram dificuldades na aprendizagem das disciplinas do âmbito da matemática

na universidade, afirmando a maioria ter muita dificuldade (30,4%) ou ter dificuldade (47,8%), enquanto poucos afirmaram ter pouca dificuldade (21,7%).

Quase todos os alunos (91,3%) tinham frequentado a Unidade Curricular (UC) Números e Probabilidades, no 2.º ano, embora 32,6 % deles sem sucesso. Nessa UC abordavam-se conteúdos sobre números e probabilidades, incluindo os conceitos de probabilidade conjunta e probabilidade condicionada aqui tratados.

A recolha de dados foi efetuada através da aplicação de um questionário composto por duas questões envolvendo, cada uma delas, dois itens de probabilidade condicionada e outros dois de probabilidade conjunta, num total de oito itens (Figura 1).

Questão 1. Num saco há 3 bolas brancas e 2 bolas pretas, conforme se mostra na figura seguinte. As bolas são todas iguais exceto na cor. Sem ver, tiram-se sucessivamente duas bolas do saco.



Considera que a 1ª bola extraída é colocada de novo no saco antes de se extrair a 2ª bola.

- 1a. Sabe-se que a 1ª bola extraída é branca. Qual a probabilidade de a 2ª bola ser branca?
- 1b. Qual a probabilidade de obter duas bolas brancas?

Considera que a 1ª bola extraída não é colocada de novo no saco antes de se extrair a 2ª bola.

- 1c. Sabe-se que a 1ª bola extraída é branca. Qual a probabilidade de a 2ª bola ser preta?
- 1d. Qual a probabilidade de obter uma bola branca e uma bola preta (por qualquer ordem)?

Questão 2. Num grupo de 25 pessoas, 10 são homens e 15 são mulheres.

Escolhem-se, ao acaso, duas pessoas do grupo das 25 pessoas.

- 2a. Sabendo-se que a primeira pessoa escolhida é mulher, qual a probabilidade de a segunda pessoa ser homem?
- 2b. Sabendo-se que a segunda pessoa escolhida é mulher, qual a probabilidade de a primeira pessoa ser homem?
- 2c. Qual a probabilidade de obter duas mulheres?
- 2d. Qual a probabilidade de obter um homem e uma mulher (por qualquer ordem)?

Figura 1. Questionário proposto.

A primeira questão insere-se no contexto de extração de bolas de um saco, contendo bolas brancas e pretas, e contempla a reposição e não reposição da primeira bola extraída, enquanto a segunda questão se insere no contexto da seleção de pessoas de um grupo, estando implícito sempre a não reposição da primeira pessoa escolhida. Nesta segunda questão inclui-se um item para avaliar a falácia da inversão do eixo temporal (item 2b) e cada questão contém um item de cálculo da probabilidade de um acontecimento composto (itens 1d e 2d).

Finalmente, em termos de análise de dados, classificaram-se as respostas dos participantes em corretas e incorretas, caracterizando-se, seguidamente, os raciocínios desenvolvidos em cada um dos dois tipos de resposta. Em ambos os casos, determinaram-se frequências dos tipos de respostas e as categorias de raciocínios foram estabelecidas aquando da análise das respostas, pelo que são apresentadas na secção seguinte.

Resoluções dos participantes

Seguidamente apresenta-se uma análise global das respostas dadas pelos participantes neste estudo, apreciando as corretas e as erradas, e analisam-se os raciocínios em que eles basearam essas respostas nos vários itens das duas questões, distinguindo para os itens de probabilidade condicionada e os itens de probabilidade conjunta.

Tipos de respostas

Na Tabela 1 apresentam-se as percentagens de respostas corretas, erradas e de não respostas nos itens de probabilidade condicionada e de probabilidade conjunta nos contextos de extração de bolas de um saco (questão 1) e de seleção de pessoas de um grupo (questão 2).

Tabela 1 — Percentagem de respostas corretas, erradas e não respostas nos itens de probabilidade condicionada e conjunta segundo o contexto

Tipo de resposta	Probabilidade condicionada				Probabilidade conjunta			
	Saco de bolas		Grupo de pessoas		Saco de bolas		Grupo de pessoas	
	1a	1c	2a	2b	1b	1d	2c	2d
Correta	81	76	63	4	37	17	30	20
Errada	17	20	30	83	52	72	59	63
Não resposta	2	4	7	13	11	11	11	17

Globalmente, no conjunto de todos os itens, constata-se que os participantes revelaram um claro melhor desempenho nos itens de probabilidade condicionada (1a, 1c, 2a, 2b) do que nos itens de probabilidade conjunta (1b, 1d, 2c e 2d), sendo a média de respostas corretas no primeiro caso de 56% e, no segundo caso, de 26%. Estes resultados estão de

acordo com os de Contreras (2011), que obteve 43,7% de respostas corretas na probabilidade condicionada e 41,1% na conjunta, e de Estrada e Díaz (2006), que obtiveram 56% e 52%, respetivamente, num grupo de futuros professores que tinham realizado previamente um curso de estatística. Já Contreras *et al.* (2010) obtiveram 23% e 21,7%, respetivamente, noutro grupo que não tinha realizado o curso. Em todos estes estudos, os dados eram fornecidos numa tabela de contingência.

Comparativamente com a probabilidade condicionada, a maior dificuldade dos participantes na probabilidade conjunta no nosso estudo pode explicar-se por se tratar de um conceito mais elaborado, na medida em que a probabilidade condicionada, tal como foi abordada aqui, a partir da restrição do espaço amostral, pode ser determinada sem requerer a combinação das probabilidades dos acontecimentos e/ou questões de ordem, ao contrário do que acontece na determinação da probabilidade conjunta. Diferentemente, o problema colocado nos estudos citados antes pode resolver-se com uma leitura adequada dos dados da tabela, não requerendo efetuar contagens, combinações, nem ordenações de configurações como acontece com os quatro itens tratados neste estudo.

Ainda no caso da probabilidade conjunta verifica-se um desempenho dos alunos ligeiramente melhor nos itens 1b e 2c do que nos itens 1d e 2d. Também neste caso, em nossa opinião, as maiores dificuldades dos alunos devem estar relacionadas com a necessidade de calcular a probabilidade de um acontecimento composto e reconhecer que a ordem das configurações conduz a possibilidades distintas, o que não é relevante nos outros dois itens.

Em geral, entre os contextos de formulação dos itens, extração de bolas de um saco e seleção de pessoas de um grupo, excetuando o caso do item 2b, não se verificaram grandes discrepâncias no desempenho dos alunos no presente estudo, quer no caso da probabilidade condicionada, quer no caso da probabilidade conjunta.

No caso do item 2b, que apesar de ser de probabilidade condicionada teve apenas duas respostas corretas, pensamos que as grandes dificuldades dos alunos resultam da sua estrutura. Nesta situação, o facto de se ter invertido o eixo temporal na sequencialização dos acontecimentos tornou muito mais difícil a questão para os alunos pois eles tendem a assumir que um acontecimento que ocorre depois não pode afetar um acontecimento que ocorre antes, não retirando consequências do conhecimento da probabilidade do acontecimento posterior para o cálculo da probabilidade do acontecimento anterior. Este resultado é semelhante aos obtidos por Contreras (2011) e Contreras *et al.* (2013), em que apenas aproximadamente 25% dos futuros professores apresentou a resposta correta num item de estrutura similar ao proposto neste trabalho.

Uma análise mais detalhada dos itens estruturalmente equivalentes em cada um dos dois contextos considerados permite também concluir que não se obtiveram percentagens de respostas corretas muito díspares nos dois contextos contemplados no estudo, o de extração de bolas de um saco e o de seleção de pessoas de um grupo. Especificamente, na probabilidade condicionada envolvendo a extração/seleção sem reposição obtiveram-se as percentagens 76% e 63% (em 1c e 2a, respetivamente), na probabilidade conjunta envolvendo a extração com reposição e a seleção sem reposição, em que a ordem é

irrelevante, obtiveram-se as percentagens 37% e 30% (em 1b e 2c, respetivamente) e na probabilidade conjunta envolvendo a extração/seleção sem reposição, em que a ordem é relevante, obtiveram-se as percentagens 17% e 20% (1d e 2d, respetivamente).

De acordo com os resultados anteriores, verifica-se que um menor desempenho dos alunos na probabilidade conjunta quando a ordem é irrelevante e, menor ainda, quando a ordem é relevante se manteve quando considerámos separadamente cada um dos contextos. Este resultado, também observado por Fernandes (1999), indicia a maior complexidade do conceito de probabilidade conjunta relativamente ao conceito de probabilidade condicionada, pelo menos em relação ao modo como esta última foi abordada neste estudo.

Também nos itens envolvendo a reposição se observa uma tendência de melhor desempenho dos alunos em relação aos que não envolvem a reposição, tendo sido no item 1a, relativo à probabilidade condicionada envolvendo a reposição, que se obteve a maior percentagem de respostas corretas (81%). Este resultado vai de encontro ao postulado por Fischbein e Gazit (1984), quando referem que os alunos não atendem ao facto de que o espaço amostral se modifica nas situações sem reposição.

A seguir apresentam-se os raciocínios desenvolvidos pelos alunos na resolução dos diferentes itens de modo a aprofundar-se a evidência antes apresentada, considerando separadamente a probabilidade condicionada e a probabilidade conjunta.

Raciocínios desenvolvidos pelos alunos em probabilidade condicionada

Na Tabela 2 apresentam-se os raciocínios desenvolvidos pelos alunos ao responderem aos quatro itens de probabilidade condicionada.

Tabela 2 — Número de alunos que adotaram cada um dos raciocínios nos quatro itens de probabilidade condicionada

Tipo de raciocínio	Itens				Total
	1a	1c	2a	2b	
Determinar o valor da probabilidade	36	33	27	2	98
Referir o número de casos favoráveis e casos possíveis	1	2	2	—	5
Considerar indevidamente a reposição ou não reposição	3	2	—	—	5
Ignorar o acontecimento condicionante	1	1	9	30	41
Confundir probabilidade condicionada com probabilidade conjunta	1	4	3	2	10
Condicional transposta	—	—	—	2	2
Atender apenas aos atributos sem considerar as quantidades	—	—	1	1	2
Apresentar um valor de que não se percebe a sua origem	3	2	1	3	9

Nota: na presente análise não foram incluídas as não respostas.

De entre os vários raciocínios destacam-se, pela frequência com que foram exibidos pelos alunos, *determinar o valor da probabilidade* e *ignorar o acontecimento condicionante*. No primeiro caso, o raciocínio consistiu na determinação do valor de probabilidade pedida e conduziu às respostas corretas nos vários itens (Figura 2).

1^a bola é branca $P(\text{branca}) = \frac{3}{5}$	$10+14 = 24 = \text{total de pessoas que restaram.}$ Probabilidade de sair homem na 2ª vez = $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$
---	--

Figura 2. Respostas dos alunos A_2 e A_{15} aos itens 1a e 2a, respetivamente.

Além deste raciocínio, a resposta correta também se baseou na alusão implícita ao valor dessa probabilidade, a partir de *referir o número de casos favoráveis e casos possíveis*, sem contudo a formularem sob a forma de fração (Figura 3). Este raciocínio, alicerçado no conceito de razão, foi referido por um número muito reduzido de alunos (cinco no conjunto dos quatro itens), enquanto a determinação do valor da probabilidade foi o raciocínio quase sempre adotado para obter a resposta correta. O recurso sistemático dos alunos à determinação da razão entre o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis para obterem o valor da probabilidade indicia uma possível sobrevalorização nas aulas da definição de probabilidade segundo a regra de Laplace.

2 em 4	10 em 24
--------	----------

Figura 3. Respostas dos alunos A_7 e A_{23} aos itens 1c e 2a, respetivamente.

No item 2b a resposta correta é referida por apenas dois alunos, que apresentam apenas o valor da probabilidade pedida, talvez recorrendo à analogia entre os itens 2a e 2b. Neste caso, em que se verifica a inversão do eixo temporal, não é possível determinar a probabilidade condicionada a partir da restrição do espaço amostral, coincidindo com o exposto por Contreras (2011) e Contreras *et al.* (2013).

A maioria das respostas erradas resultou do raciocínio *ignorar o acontecimento condicionante*, significando que o aluno determinou a probabilidade do acontecimento condicionado ignorando a influência do acontecimento condicionante (Figura 4). Contreras (2011) refere que alguns futuros professores dão esta resposta, sugerindo que isso é devido à confusão entre probabilidade simples e condicionada, o que também pode ter ocorrido com alguns dos participantes neste estudo.

$P(1^a \text{ ser homem}) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$
--

Figura 4. Resposta do aluno A_{12} ao item 2b.

Este raciocínio foi muito referido no item 2b, em cuja formulação se inverte o eixo temporal. Assim, conforme foi referido, estas respostas terão sido muito influenciadas pela inversão do eixo temporal, em que os alunos afirmam que a probabilidade de um acontecimento não pode ser influenciada pelo conhecimento de um acontecimento que ocorre depois, tal como também verificaram Falk (1986), Díaz e Batanero (2009) e os trabalhos citados de Contreras.

O raciocínio *confundir probabilidade condicionada com probabilidade conjunta* significa que o aluno determinou uma probabilidade conjunta quando era pedida uma probabilidade condicionada (Figura 5), também observado por Pollatsek *et al.* (1987), Díaz e Batanero (2009) e Correia *et al.* (2011). Já o raciocínio *considerar indevidamente a reposição ou não reposição* observou-se apenas nos itens 1a e 1c, que são aqueles que envolvem a reposição e a não reposição (Figura 5).

Figura 5. Respostas dos alunos A_{33} e A_{46} aos itens 2a e 1a, respetivamente.

No raciocínio condicional transposta a probabilidade determinada corresponde à troca do acontecimento condicionado com o acontecimento condicionante. Este raciocínio, adotado apenas no item 2b, significa calcular em vez de (Figura 6). Este tipo de raciocínio, embora adotado apenas por dois alunos, foi também observado nos estudos de Falk (1986), Díaz e Batanero (2009), Contreras (2011) e Correia *et al.* (2011).

Figura 6. Resposta do aluno A_{28} ao item 2b.

Finalmente, dois alunos atenderam apenas aos atributos sem considerar as quantidades. No caso do item 2a, o aluno considerou os atributos ser homem e ser mulher sem considerar as respetivas frequências (Figura 7).

Figura 7. Resposta do aluno A_{35} ao item 2a.

Por fim, em todos os itens (1a, 1c, 2a e 2 b), nove alunos responderam *apresentando um valor de que não se percebe a sua origem*.

Raciocínios desenvolvidos pelos alunos em probabilidade conjunta

Comparativamente com a probabilidade condicionada, na probabilidade conjunta as respostas dos alunos basearam-se num leque mais variado de raciocínios, conforme se pode observar na Tabela 3.

Tabela 3 — Número de alunos que adotaram cada um dos raciocínios nos quatro itens de probabilidade conjunta

Tipo de raciocínio	Itens				Total
	1b	1d	2c	2d	
Determinar o valor da probabilidade	17	8	14	9	48
Combinar erradamente os valores de probabilidades	12	6	15	3	36
Determinar valores de probabilidades sem os combinar	—	14	3	6	23
Referir casos favoráveis e casos possíveis sem os combinar	1	—	2	—	3
Considerar a probabilidade de uma das ordens	—	4	—	11	15
Considerar probabilidades de uma das ordens sem as combinar	—	—	—	7	7
Determinar o valor de probabilidade de um acontecimento	9	5	3	—	17
Referir casos favoráveis e casos possíveis de um acontecimento	—	1	1	—	2
Identificar probabilidade com uma vantagem	2	1	—	—	3
Atender apenas aos atributos sem considerar as quantidades	—	1	1	1	3
Apresentar um valor de que não se percebe a sua origem	—	1	2	1	4

Nota: na presente análise não foram incluídas as não respostas.

No raciocínio *determinar o valor da probabilidade* os alunos determinaram o valor da probabilidade pedida e responderam corretamente aos diferentes itens (Figuras 8 e 9), tendo alguns destes alunos (cinco alunos) construído um diagrama de árvore como suporte ao cálculo das respetivas probabilidades (Figura 9).

$$P(\text{obter duas mulheres}) = \frac{15}{25} \times \frac{14}{24} = \frac{210}{600} = \frac{21}{60}$$

Figura 8. Resposta do aluno A_{12} ao item 2c.

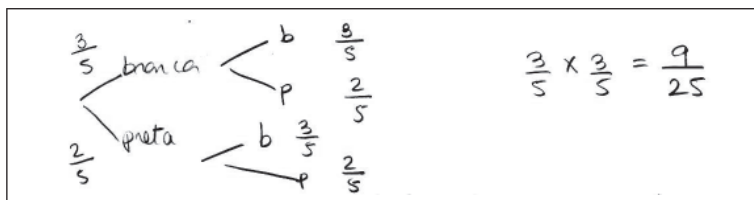


Figura 9. Resposta do aluno A_{36} ao item 1b.

Tal como no caso da probabilidade condicionada, também na probabilidade conjunta as respostas corretas dos alunos se basearam na determinação de probabilidades enquanto razões entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis em cada experiência simples, portanto segundo a regra de Laplace, e combinando-as para obterem a probabilidade na experiência composta.

Em todos os outros raciocínios, que analisaremos a seguir, os alunos apresentaram respostas erradas em todos os itens. No caso do raciocínio *combinar erradamente os valores de probabilidades*, os alunos determinaram os valores das probabilidades dos acontecimentos envolvidos e combinaram-nos através das operações de multiplicação (8 alunos) e adição (28 alunos). No caso da multiplicação, a resposta errada dos alunos resultou de erros de considerarem ou não a reposição (Figura 10) e, no caso da adição, trata-se de um erro do raciocínio probabilístico elementar (Figura 10), este último também observado por Fernandes (1999).

$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$	$P(B \cup P) + P(P \cup B) = \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right)$
--	---

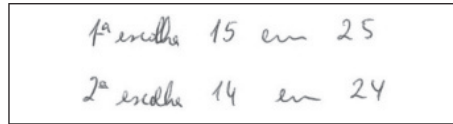
Figura 10. Respostas dos alunos A_{46} e A_{34} aos itens 1b e 1d, respetivamente.

O raciocínio *determinar valores de probabilidades sem os combinar* significa que os alunos determinaram os valores das probabilidades dos acontecimentos implicados mas não os combinaram, total ou parcialmente, para obterem a probabilidade pedida (Figura 11).

$\begin{array}{l} \textcircled{19} \text{ P. obter bola branca} = \frac{3}{5} \\ \text{P. obter bola preta} = \frac{2}{4} \\ \hline \textcircled{25} \text{ P. obter bola preta} = \frac{2}{5} \\ \text{P. obter bola branca} = \frac{3}{4} \end{array}$	$P = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$ $P = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$
--	---

Figura 11. Respostas dos alunos A_{15} e A_{41} ao item 1d.

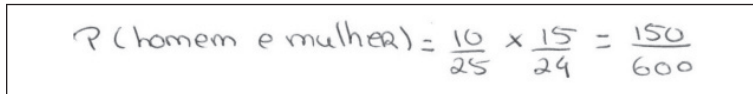
Já no raciocínio *referir casos favoráveis e casos possíveis sem os combinar*, os alunos referiram-se implicitamente às razões de probabilidade sem escreverem a respetiva fração. Além disso, tal como no raciocínio anterior, os alunos falharam a combinação dos respetivos valores (Figura 12).



$$\begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ escolha } 15 \text{ em } 25 \\ 2^{\text{a}} \text{ escolha } 14 \text{ em } 24 \end{array}$$

Figura 12. Resposta do aluno A₇ ao item 2c.

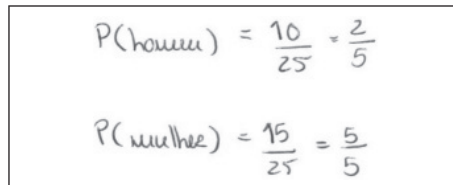
No raciocínio *considerar a probabilidade de uma das ordens* os alunos combinaram as probabilidades dos acontecimentos envolvidos apenas em relação a uma das duas ordens possíveis, não reconhecendo que a ordem dos acontecimentos conduz a duas possibilidades distintas de realização do acontecimento global (Figura 13).



$$P(\text{homem e mulher}) = \frac{10}{25} \times \frac{15}{24} = \frac{150}{600}$$

Figura 13. Resposta do aluno A₄₅ ao item 2d.

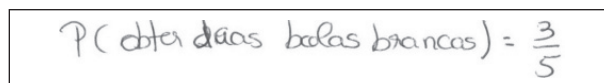
Tal como no caso anterior, também no caso do raciocínio *considerar probabilidades de uma das ordens sem as combinar*, os alunos determinaram as probabilidades dos acontecimentos segundo apenas uma das duas ordens possíveis, mas neste caso também não as combinaram para obterem apenas um valor de probabilidade. Além disso, alguns destes alunos não tiveram em consideração a questão da não reposição (Figura 14).



$$\begin{array}{l} P(\text{homem}) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \\ P(\text{mulher}) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \end{array}$$

Figura 14. Resposta do aluno A₈ ao item 2d.

No raciocínio *determinar o valor de probabilidade de um acontecimento* os alunos determinaram apenas a probabilidade de um dos dois acontecimentos envolvidos na probabilidade conjunta (Figura 15), o que também foi observado por Fernandes (1999).



$$P(\text{obter duas bolas brancas}) = \frac{3}{5}$$

Figura 15. Resposta do aluno A₂₉ ao item 1b.

Relativamente ao caso anterior, tal como já foi exemplificado em outros itens, no raciocínio *referir casos favoráveis e casos possíveis de um acontecimento* os alunos não indicaram explicitamente a razão relativa à probabilidade do respetivo acontecimento, comparando o número de casos favoráveis com o número de casos possíveis.

Já no caso de *identificar probabilidade com uma vantagem*, raciocínio adotado por apenas três alunos, eles elegeram apenas um dos dois acontecimentos implicados na conjunção e consideraram a razão entre o número de casos favoráveis e desfavoráveis a esse acontecimento (Figura 16). Segundo Tarr e Lannin (2005), esta estratégia, que envolve uma relação parte-parte, foi muito adotada pelos alunos, sobretudo antes de terem recebido ensino de probabilidades.

$$\frac{2}{3} = 0, (6)$$

Figura 16. Resposta do aluno A₂₅ ao item 1d.

Tal como foi referido a propósito da probabilidade condicionada, no raciocínio *atender apenas aos atributos sem considerar as quantidades* os alunos descreveram os respetivos atributos sem considerarem a suas quantidades (Figura 17).

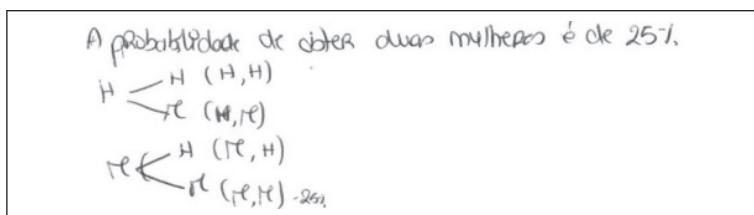


Figura 17. Resposta do aluno A₃₅ ao item 2c.

Finalmente, nos três últimos itens (1d, 2c e 2d), quatro alunos responderam *apresentando um valor de que não se percebe a sua origem*.

Conclusão

Entre os dois tipos de probabilidade estudados no presente estudo, concluiu-se que os participantes foram melhor sucedidos nas respostas às questões de probabilidade condicionada, estudada a partir da restrição do espaço amostral, do que nas respostas às questões de probabilidade conjunta, confirmando estudos prévios (Estrada & Díaz, 2006; Contreras *et al.*, 2010; Contreras, 2011). No nosso estudo, a diferença dos desempenhos nos dois tipos de probabilidade é mais acentuada que nos estudos referidos pois, no primeiro tipo, cerca de um em cada dois alunos respondeu corretamente, enquanto no segundo tipo apenas um em cada quatro alunos apresentou a resposta correta.

A maior dificuldade na probabilidade conjunta do que na probabilidade condicionada foi também observada em alunos do 9.º ano por Fernandes, Correia e Contreras (2013), o que se poderá explicar pelo facto da probabilidade conjunta poder ser vista como um conceito mais elaborado do que o conceito de probabilidade condicionada

quando se trabalha no contexto de amostragem com ou sem reposição, como acontece nas questões que foram aqui exploradas, enquanto pode ser mais similar quando se calcula diretamente da leitura de uma tabela de dupla entrada, como acontece nos estudos referidos anteriormente.

Já entre os dois contextos em que a probabilidade condicionada e a probabilidade conjunta foram exploradas no nosso trabalho, o contexto de extração de bolas de um saco e de seleção de pessoas de um grupo, não se observaram grandes discrepâncias no sucesso dos alunos. No caso do item 2b, que contrasta com os restantes três itens de probabilidade condicionada, atribuímos a grande dificuldade dos alunos à inversão do eixo temporal (Falk, 1986), que terá levado os alunos a determinarem a probabilidade do acontecimento condicionado independentemente do acontecimento condicionante de acordo com os resultados de Contreras *et al.* (2013).

Além da dificuldade referida, embora em menor percentagem, nos itens de probabilidade condicionada, alguns alunos determinaram a probabilidade conjunta em vez da probabilidade condicionada (Pollatsek *et al.*, 1987), consideraram indevidamente a reposição ou não reposição, determinaram a condicional transposta (Falk, 1986) e atenderam apenas aos atributos sem considerar as quantidades.

No caso dos itens de probabilidade conjunta, a maior dificuldade experimentada pelos alunos consistiu em combinar erradamente os valores de probabilidades, em que se destaca a aplicação da operação de adição em vez da de multiplicação, o que também foi constatado por Watson e Moritz (2002). Também um número considerável de alunos considerou apenas a probabilidade de uma das duas ordens possíveis (nos itens 1d e 2d) ou determinaram o valor de probabilidade de um acontecimento. Este último erro foi também observado no estudo de Fernandes (1999).

Watson e Moritz (2002) sugerem que as questões lógicas e de linguagem associadas à conjunção de acontecimentos, formulados em contextos sociais, são difíceis para os alunos do 3.º ciclo do ensino básico, antecipando dificuldades dos alunos quando é requerida a transferência do que aprenderam em pequenos espaços amostrais para contextos sociais mais complexos.

Tanto no caso da probabilidade condicionada como no caso da probabilidade conjunta verifica-se que, quase sempre, as respostas corretas dos alunos foram obtidas através da aplicação da regra de Laplace, portanto enfatizando relações do tipo parte-todo, o que poderá dever-se à ênfase desta abordagem no cálculo de probabilidades durante as aulas.

Por outro lado, a elevada adesão dos alunos ao raciocínio envolvendo relações do tipo parte-parte, em que a probabilidade é identificada com uma vantagem, observada no estudo de Tarr e Lannin (2005), sobretudo antes de terem recebido ensino de probabilidades, praticamente esteve ausente das respostas dos alunos do presente estudo. A quase não existência de respostas baseadas neste raciocínio, mais intuitivo e de validade mais restrita (limita o reconhecimento de que a probabilidade de todos os acontecimentos se altera nas situações em que não há reposição), não contradiz os resultados obtidos por Tarr e Lannin (2005) uma vez que os alunos do presente estudo tinham tido ensino de probabilidades, podendo mesmo colocar-se a hipótese de que esse ensino terá tido um grande impacto sobre este tipo de raciocínio.

Face ao facto de que estes futuros educadores e professores do ensino básico terão de ensinar probabilidades às crianças, globalmente, os resultados do presente estudo não são muito otimistas. Por outro lado, o facto de a maioria dos alunos percecionarem dificuldades na aprendizagem das unidades curriculares de matemática, o que configura um autoconceito negativo acerca das suas capacidades matemáticas, agrava ainda mais a situação.

Assim, o sucesso na introdução de conteúdos de probabilidades às crianças aconselha um reforço de formação dos educadores e professores implicados no seu ensino, como advogam Batanero e Díaz (2010), e, eventualmente, um tipo de formação distinto daquele que receberam, valorizando mais as ideias e menos os cálculos.

Nota

- 1 Este trabalho contou com o apoio de Fundos Nacionais através da FCT — Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projecto PEst-OE/CED/UI1661/2014 do CIED-UM.

Referências bibliográficas

- Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (Eds.) (2011). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study*. New York: Springer.
- Batanero, C., & Díaz, C. (2010). Training teachers to teach statistics: what can we learn from research? *Statistique et Enseignement*, 1(1), 5–20.
- Begg, A., & Edwards, R. (1999). Teachers' ideas about teaching statistics. Paper presented at the *Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education*. Melbourne, Australia.
- Carter, T. A. (2008). Preservice teacher knowledge and understanding of probability and statistics. In G. Kulm (Ed.), *Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics* (pp. 19–43). Rotterdam: Sense Publishers.
- Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.
- Contreras, J. M., Batanero, C., Díaz, C., & Arteaga, P. (2013). Evaluación de la falacia del eje temporal en futuros profesores de educación secundaria. *Acta Scientiae*, 14(3), 346–362.
- Contreras, J. M., Estrada, A., Díaz, C., & Batanero, C. (2010). Dificultades de futuros profesores en la lectura y cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada. In *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 271–280). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Correia, P. F., Fernandes, J. A., & Contreras, J. M. (2011). Intuições de alunos do 9º ano de escolaridade sobre probabilidade condicionada. In C. Nunes, A. Henriques, A. Caseiro, A. Silvestre, H. Pinto, H. Jacinto & J. Ponte (Orgs.), *Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Díaz, C., & Batanero, C. (2009). University students' knowledge and biases in conditional probability reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), 131–162.
- Estrada, A., & Díaz, C. (2006). Computing probabilities from two way tables: an exploratory study with future teachers. In A. Rossman, & B. Chance (Eds.), *Proceedings of Seventh International Conference on Teaching of Statistics*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education.

- Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.
- Fernandes, J. A. (1999). *Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º ano de escolaridade*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga, Portugal.
- Fernandes, J. A., & Barros, P. M. (2005). Dificuldades de futuros professores do 1º e 2º ciclos em estocástica. In *Actas do V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática* (CIBEM), Porto (Portugal): Faculdade de Ciências.
- Fernandes, J. A., Correia, P. F., & Contreras, J. M. (2013). Ideias intuitivas de alunos do 9º ano em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 4, 5–26.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: Insights and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292–297). Victoria, BC: University of Victoria.
- Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15, 1–24.
- Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1), 96–105.
- Gomes, A. & Ralha, E. (2005). Sobre o ensino superior da matemática: a geometria e os professores do 1º Ciclo. Novos desafios velhas deficiências. *Boletim da SPM*, 54, 1–25.
- Lecoutre, M., & Durand, J. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: Etude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19(3), 357–368.
- Ministério da Educação (2007). *Programa Ajustado de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.
- Polaki, M. V. (2005). Dealing with compound events. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 191–214). New York, NY: Springer.
- Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C., & Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255–269.
- Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465–494). New York: Macmillan.
- Tarr, J. E., & Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 215–238). New York, NY: Springer.
- Tversky, A. & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, 90(4), 293–315.
- Watson, J. M. & Moritz, J. B. (2002). School students' reasoning about conjunction and conditional events. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 33(1), 59–84.

Resumo. Neste artigo estuda-se o desempenho de 46 alunos do 3.º ano da Licenciatura em Educação Básica de uma universidade portuguesa na resolução de questões que envolvem probabilidade condicionada e probabilidade conjunta. A estes alunos foi aplicado um questionário com quatro itens de probabilidade condicionada e outros quatro de probabilidade conjunta. Em termos de resultados, globalmente, os alunos revelaram pior desempenho nos itens relativos a probabilidade conjunta do que nos de probabilidade condicionada, destacando-se nas respostas corretas o cálculo explícito ou implícito da probabilidade em questão. Nas respostas erradas, na probabilidade condicionada salientou-se o facto de os alunos ignorarem o acontecimento condicionante e a confusão da probabilidade condicionada com a probabilidade conjunta. Na probabilidade conjunta adicionaram probabilidades em vez de as multipli-

carem, não combinaram, total ou parcialmente, as probabilidades determinadas de forma explícita ou implícita para obterem a probabilidade pedida, consideraram a probabilidade de apenas uma das ordens possíveis e determinaram o valor de probabilidade de apenas um dos acontecimentos.

Palavras-chave: probabilidade condicionada; probabilidade conjunta; futuros professores do ensino básico.

Performance on conditional probability and joint probability of prospective elementary school teachers

Abstract. In this paper we study the performance of prospective elementary school teachers in conditional probability and joint probability. Participants in the study included 46 students in the 3rd year of Bachelor in Elementary Education, who received a questionnaire with four items of conditional probability and four items of joint probability. The global results suggest that participants found more difficulty in joint probability than that in conditional probability, highlighting in the correct answers the explicit or implicit calculation of the probability in question. In the wrong answers related to conditional probability, participants ignored the conditioning event and confused the conditional probability with the joint probability; while in the joint probability they added instead of multiplying probabilities, not combined the probabilities determined explicitly or implicitly to obtain the probability requested, considered the probability of only one possible order and determined the probability value of only one event.

Keywords: conditional probability; joint probability; prospective elementary school teachers.

■■■

JOSÉ ANTÓNIO FERNANDES
CIED da Universidade do Minho
jfernandes@ie.uminho.pt

CARMEN BATANERO
Universidad de Granada
batanero@ugr.es

PAULO FERREIRA CORREIA
Escola Secundária/3 de Barcelos
ferreiracorreiapaulo@gmail.com

MARÍA M. GEA
Universidad de Granada
mmgea@ugr.es

(Recebido em agosto de 2013, aceite para publicação em abril de 2014)