

# Resolução de problemas geotécnicos usando elementos finitos e infinitos<sup>1</sup> Resolution of geotechnical problems using finite and infinite elements

Francisco F. Martins<sup>2</sup> e J. Barreiros Martins<sup>3</sup>

*Dep.º de Eng.ª Civil da Universidade do Minho, Guimarães, Portugal*

## Resumo

São apresentados alguns resultados obtidos com um programa de cálculo automático usando elementos finitos e infinitos. Os resultados contemplam quatro casos. Um caso diz respeito à análise de uma cavidade cilíndrica sob pressão interior uniforme (problema axissimétrico). Dois outros casos contemplam o estudo do processo de consolidação acoplada, um num estrato de espessura finita carregado uniformemente numa faixa infinita e outro num meio semi-infinito carregado uniformemente numa faixa infinita. Nestes três primeiros casos o solo é considerado elástico linear e isotrópico. O último caso diz respeito a um problema de escoamento em regime permanente sob uma barragem.

São usados vários tipos de elementos finitos e infinitos e é analisado o seu desempenho sendo também contabilizados os tempos de CPU.

## Abstract

Some results obtained with a finite and infinite element computer program are presented. Four examples are analysed. The first one deals with a cylindrical cavity under internal pressure (axisymmetric problem). The following two examples refer to the coupled consolidation process, one in a finite stratum loaded uniformly in a strip area and other in a semi-infinite space loaded uniformly in a strip area. In this three first cases the soil is considered elastic linear and isotropic. The last example is about a problem of steady state seepage under a dam.

Several types of finite and infinite elements are used and their performance is analysed. The CPU times spent are also presented.

---

<sup>1</sup> Comunicação apresentada no 5.º Congresso Nacional de Geotecnia, Coimbra, Abril de 1995.

<sup>2</sup> Professor Auxiliar

<sup>3</sup> Professor Catedrático

## 1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho são apresentados alguns resultados obtidos com um programa de cálculo automático usando elementos finitos e infinitos na resolução de problemas geotécnicos.

Tal como acontece com a generalidade dos problemas geotécnicos os exemplos apresentados envolvem meios não finitos. A modelação tradicional de tais meios passa pela sua truncagem a uma distância considerada suficientemente afastada da zona a analisar. Por isso, para evitar tal truncagem, recorreu-se ao uso de elementos infinitos colocando-os nas extremidades das malhas de elementos finitos simulando assim a sua continuação para infinito.

Os elementos infinitos usados são os apresentados por Marques [4] sendo usados dois tipos de funções de interpolação. Num desses tipos as funções são usadas para modelar a geometria permitindo simular a continuação do meio em estudo para infinito e são usualmente designadas por funções de "mapping". No outro tipo as funções servem para interpolar a variável de campo constituindo, portanto, as funções de forma habituais.

São usados vários tipos de elementos finitos e infinitos, a saber:

- Elementos "padrão" de 8 nós com uma interpolação quadrática quer para os deslocamentos quer para as pressões neutras (elementos do tipo 8-8);
- Elementos "híbridos" com uma interpolação quadrática para os deslocamentos e uma interpolação linear para as pressões neutras (elementos do tipo 8-4);
- Elementos infinitos usando 5 nós quer para as pressões neutras quer para os deslocamentos (elementos do tipo 5-5);
- Elementos infinitos usando 5 nós para os deslocamentos e 2 nós para as pressões neutras (elementos do tipo 5-2).

## 2. FORMULAÇÃO

O programa de cálculo automático desenvolvido [6] permite a resolução de problemas elasto-plásticos quer considerando só o estado de tensão e deformação do meio em análise quer considerando o problema da consolidação acoplada em que são analisados simultaneamente o processo de deformação e a dissipação da pressão de água dos poros e ainda permite o estudo de escoamentos em regime permanente.

Nos casos analisados considerou-se o meio como sendo elástico linear e isotrópico.

A formulação para os problemas de consolidação baseou-se na apresentada por Ding e Naylor [1] que deduziram o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & -\mathbf{H}\alpha\Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_u(t + \Delta t) \\ \mathbf{r}_p(t + \Delta t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{H}(1-\alpha)\Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_u(t) \\ \mathbf{r}_p(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_u \\ \mathbf{R}_p \end{Bmatrix} \quad (1)$$

sendo

- $\mathbf{K}$  = matriz de rigidez da fase sólida,
- $\mathbf{C}$  = matriz de acoplamento,
- $\mathbf{H}$  = matriz de fluxo,
- $\Delta t$  = incremento de tempo
- $\mathbf{r}_u$  = vector dos deslocamentos nodais,
- $\mathbf{r}_p$  = vector das pressões neutras nodais,
- $\mathbf{R}_u$  = vector das forças nodais equivalentes,

$R_p$  = vector dos fluxos nodais aplicados e  
 $\alpha$  = parâmetro de interpolação na integração em ordem ao tempo.

Nos casos envolvendo só o estudo do estado de tensão e deformação a equação (1) toma a forma da equação usada nos cálculos de análise estrutural:

$$K r_u = R_u \quad (2)$$

Já nos problemas de escoamento em regime permanente a equação é idêntica à equação (2) só que agora as incógnitas, em vez dos deslocamentos, passam a ser as cargas hidráulicas e as matrizes de "rigidez" elementares,  $k^e$ , que contribuem para a formação da matriz de "rigidez" global,  $K$ , e os vectores das "forças nodais equivalentes elementares",  $R^e$ , que contribuem para a formação do vector global das "forças nodais equivalentes" são dados por:

$$k^e = \int_{V^e} B^T P B dV \quad (3)$$

$$R^e = \int_{V^e} N^T Q dV - \int_{S_B^e} N^T q dS \quad (4)$$

sendo  $Q$  o caudal produzido em fontes interiores por unidade de volume (se existirem),  $q$  o caudal injectado ou extraído por unidade de área na fronteira  $B$  do elemento e

$$B = [B_1, B_2, \dots, B_i, \dots, B_n] \quad (5)$$

a matriz equivalente à matriz de deformação do elemento onde

$$B_i = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

e  $n$  é o número de nós do elemento,  $P$  é a matriz das permeabilidades  $k_{ij}$  ( $i, j = x, y$ ) equivalente à matriz constitutiva do material,  $D$  e é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (7)$$

e  $N$  é a matriz das funções de interpolação.

### 3. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

São analisados quatro exemplos sendo o primeiro respeitante a uma cavidade cilíndrica sob pressão interior uniforme. Dois outros casos dizem respeito ao estudo do processo de consolidação incluindo a interacção entre o processo de deformação da fase sólida e a pressão da água nos poros. Esse estudo contempla um estrato de espessura finita e um meio semi-infinito sendo ambos carregados uniformemente numa faixa infinita. Foi considerado para ambos os casos um valor de  $\alpha = 1$ .

No quarto caso é estudado o escoamento em regime permanente sob a base da barragem de Crestuma-Lever.

#### 3.1 Cavidade cilíndrica com pressão interior (Fig. 1)

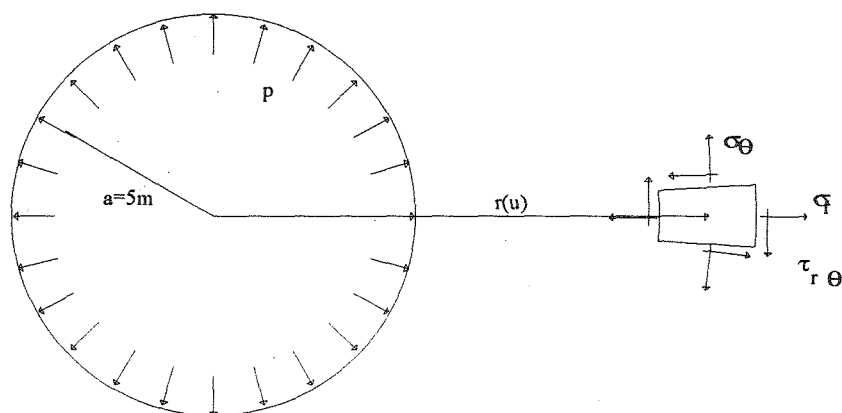


Fig. 1 - Cavidade cilíndrica sob pressão interior

Para estudar este problema foi usada uma malha com três elementos finitos isoparamétricos "Serendipity" de 8 nós e um elemento infinito "Serendipity" de 5 nós - malha 3FII (Fig.2).

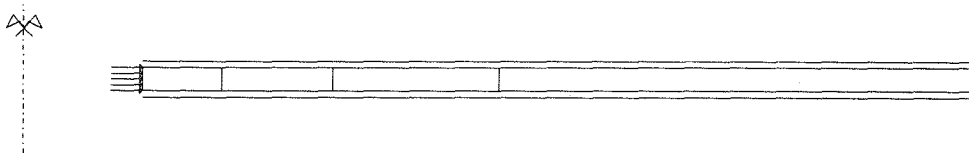


Fig. 2 - Malha 3FII usada no caso da cavidade cilíndrica sob pressão.

Considerou-se o meio com um módulo de elasticidade de  $100000 \text{ kN/m}^2$  e um coeficiente de Poisson de 0,3.

Nas figuras 3 e 4 estão representadas as variações dos deslocamentos radiais,  $u$ , e das tensões radiais,  $\sigma_r$ , em pontos colineares a uma distância crescente da cavidade cilíndrica (Fig. 1).

Apesar do número reduzido de elementos usados constata-se que os valores obtidos são praticamente coincidentes com os valores analíticos [10].

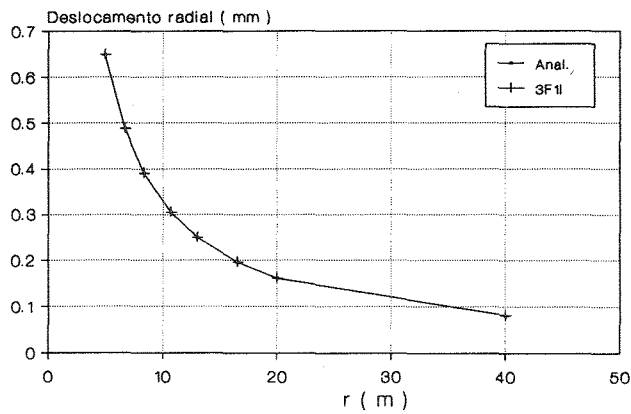


Fig. 3 - Curvas do deslocamento radial para o caso da cavidade cilíndrica sob pressão.

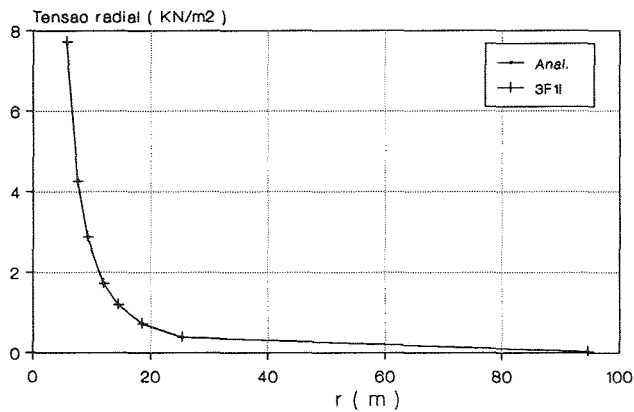


Fig. 4 - Curvas da tensão radial para o caso da cavidade cilíndrica sob pressão.

### 3.2 Estrato de espessura finita carregado uniformemente numa faixa infinita

Neste caso foram usadas duas malhas (Fig. 5). Uma de 44 elementos finitos e outra de 16 elementos finitos e 4 elementos infinitos. Na malha composta só por elementos finitos foram ainda consideradas duas situações: uma usando elementos do tipo 8-8 (44F88) e outra usando elementos do tipo 8-4 (44F84). Na outra malha foram usados quer elementos do tipo 8-8 e 5-5 (16F4I(88)) quer elementos do tipo 8-4 e 5-2 (16F4I(84)).

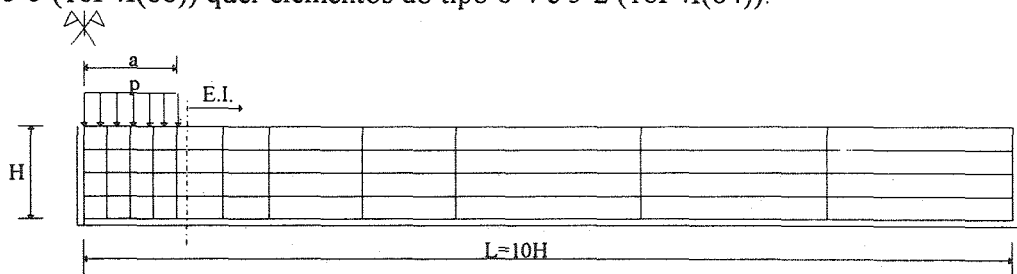


Fig. 5 - Malha de 44 elementos finitos - 44F e 16 elementos finitos e 4 infinitos - 16F4I.

A superfície do estrato argiloso foi considerada de permeabilidade infinita e o fundo impermeável.

A carga  $p$  foi aplicada instantaneamente no instante  $t=0$ .

Foi usado um módulo de elasticidade de  $15000 \text{ kN/m}^2$ , um coeficiente de Poisson igual a 0, um coeficiente de permeabilidade igual a  $2 \times 10^{-7} \text{ m/s}$  e foi aplicada à superfície uma pressão de  $1 \text{ kN/m}^2$ .

A semi-largura da faixa carregada bem como a possança do estrato foram tomados iguais a 1,6 m.

O factor  $T'$  é dado por:

$$T' = \frac{2Gk}{\gamma_w H^2} t \quad (8)$$

sendo  $G$  o módulo de distorção,  $k$  o coeficiente de permeabilidade,  $\gamma_w$  o peso específico da água e  $t$  o tempo.

Os deslocamentos  $w$  do ponto situado sob o centro de aplicação da carga em função do factor tempo estão representados na Fig. 6. Embora os resultados obtidos com as duas malhas usando diferentes tipos de elementos não difiram muito os resultados que estão mais próximos da solução analítica [2] foram obtidos usando a malha 16F4I(84). É exactamente com esta malha que se gasta menor tempo de CPU (Quadro 1) o que não constitui surpresa já que é a que apresenta menor número de graus de liberdade.

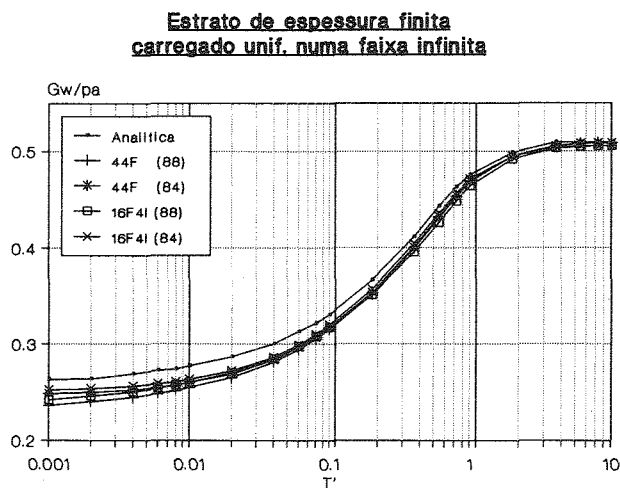


Fig. 6 - Deslocamentos em função do factor tempo.

Quadro 1 - Tempos de CPU gastos com as diferentes malhas usadas.

Malha	Tempo de CPU(s)
44F(88)	602
44F(84)	295
16F4I(88)	210
16F4I(84)	107

### 3.3 Meio semi-infinito carregado uniformemente numa faixa infinita

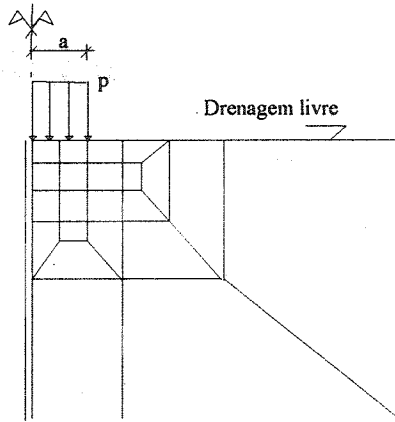


Fig. 7 - Malha de elementos finitos e infinitos usada - 19F3I.

Para este caso é usada uma malha contendo 19 elementos finitos e 3 elementos infinitos (Fig. 7).

São analisados dois casos. Num são usados elementos do tipo 8-8 e 5-5 (19F3I(8-8)) e noutro são usados elementos do tipo 8-4 e 5-2 (19F3I(8-4)).

Os parâmetros usados para caracterizar o meio são as seguintes:

Módulo de elasticidade  $E = 15000 \text{ kN/m}^2$

Coefficiente de Poisson  $\nu = 0,0$

Coefficiente de permeabilidade  $k = 0,7 \times 10^{-3} \text{ m/h}$

As condições iniciais são iguais às do problema anterior: a carga  $p$  é aplicada instantaneamente no instante  $t=0$ .

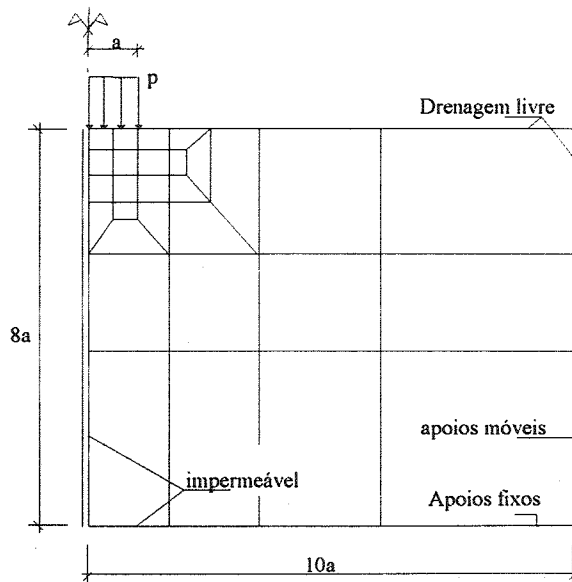


Fig. 8 - Malha de elementos finitos usada - 29F

Com o objectivo de comparar resultados foi também usada uma malha de 29 elementos finitos usando quer elementos do tipo 8-8 quer do tipo 8-4 (Fig. 8).

Nas figuras 9 e 10 são apresentados gráficos dos valores das pressões neutras numa linha correspondente a  $z/a = 0,5$  num tempo correspondente ao factor tempo  $T'$  de 0,214 e 0,857.

A análise dos dois gráficos permite-nos concluir que, exceptuando os valores obtidos com a malha 19F3I(8-4) na figura 10 todos os demais valores se aproximam bastante da solução analítica [3]. Contudo nota-se que os resultados obtidos com a malha 19F3I(8-8) são ligeiramente melhores que os restantes.

Na figura 11 representa-se a evolução da pressão neutra com o factor tempo  $T'$  num ponto situado no eixo de simetria a uma profundidade correspondente a  $z/a = 1$ .

Os resultados que mais se aproximam da solução analítica são os obtidos com a malha 19F3I(8-8) e aqueles que mais se afastam dela são os obtidos com a malha 19F3I(8-4).

No quadro 2 são apresentados os tempos de CPU para este exemplo.

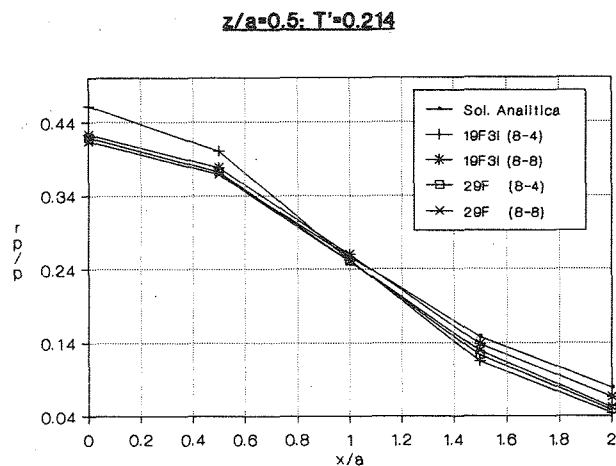


Fig. 9 - Pressões neutras a uma profundidade  $z/a = 0,5$  para  $T'=0,214$ .

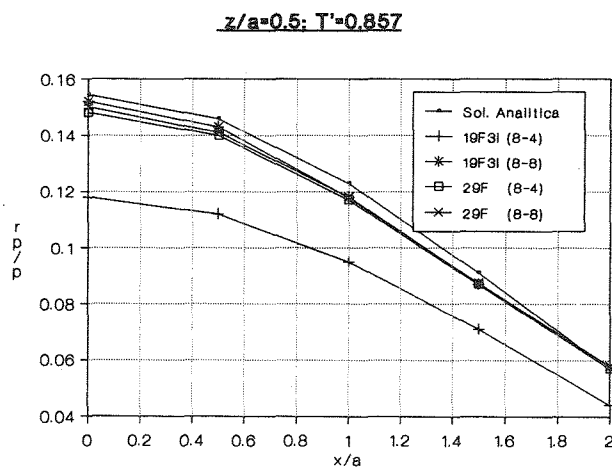


Fig. 10 - Pressões neutras a uma profundidade  $z/a = 0,5$  para  $T'=0,857$ .



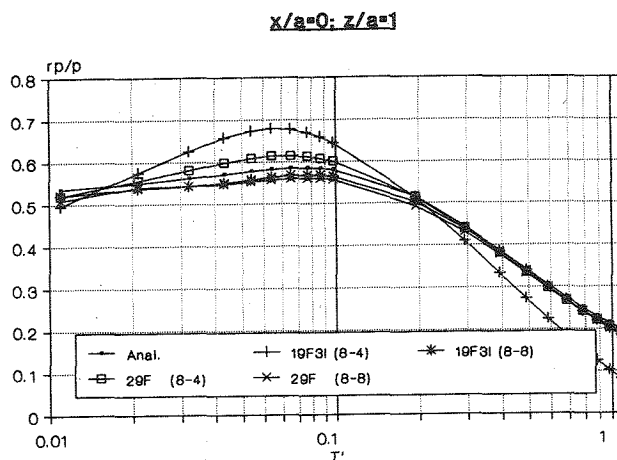


Fig. 11 - Variação da pressão neutra com o factor tempo num ponto do eixo de simetria com  $z/a = 1$ .

Quadro 2 - Tempos de CPU obtidos com as diferentes malhas.

Malha	Tempo de CPU(s)
19F3I(8-4)	424
19F3I(8-8)	874
29F(8-4)	694
29F(8-8)	1443

### 3.4 Escoamento em regime permanente

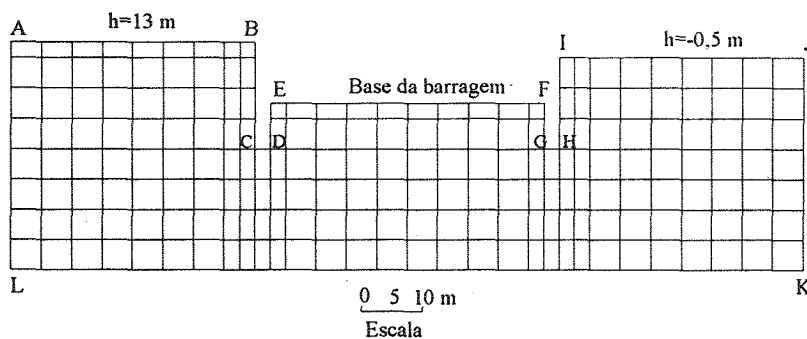


Fig. 12 - Malha de elementos finitos usada para o estudo do escoamento em regime permanente sob a base da barragem de Crestuma-Lever.

Este exemplo diz respeito ao escoamento em regime permanente sob a base da barragem de Crestuma-Lever.

Foi efectuada uma análise envolvendo só elementos finitos e outra análise considerando elementos finitos e infinitos.

Na figura 12 estão representados os contornos da base da barragem definidos por BCDEFGHI, a malha de elementos finitos usada contendo 203 elementos isoparamétricos de 8 nós e as cargas hidráulicas a montante e a jusante da barragem que constituem condições de fronteira do problema.

Nos dois estudos são consideradas impermeáveis as fronteiras LK, BC, CD, DE, EF, FG, GH e HI. No caso da análise só por elementos finitos a truncagem do meio foi feita nas fronteiras AL e JK tendo estas sido consideradas impermeáveis. Já no caso da análise por elementos finitos e infinitos nessas fronteiras foram colocados elementos infinitos de 5 nós formando assim uma malha de 203 elementos finitos isoparamétricos de 8 nós e 15 elementos infinitos de 5 nós.

Nas figuras 13 e 14 estão traçadas as linhas equipotenciais correspondentes às quebras de carga hidráulica entre montante e jusante da barragem.

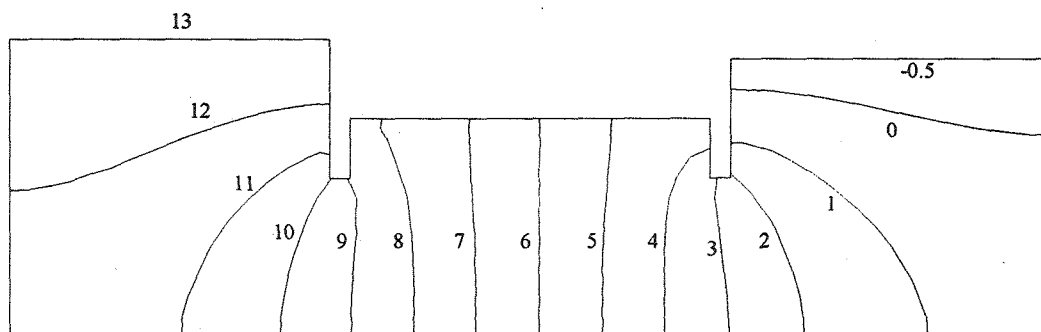


Fig. 13 - Linhas equipotenciais usando só elementos finitos

Quando se usam só elementos finitos, devido à consideração de fronteiras impermeáveis em AL e JK originada pela truncagem do meio, as linhas equipotenciais são perpendiculares a essas fronteiras garantindo assim a perpendicularidade entre linhas equipotenciais e linhas de corrente como seria de esperar.

A perpendicularidade irrealista acima mencionada não é verificada quando se usam elementos finitos e infinitos. As equipotenciais correspondentes às cargas hidráulicas 0 e 12 são agora perpendiculares à fronteira LK (Fig. 13).

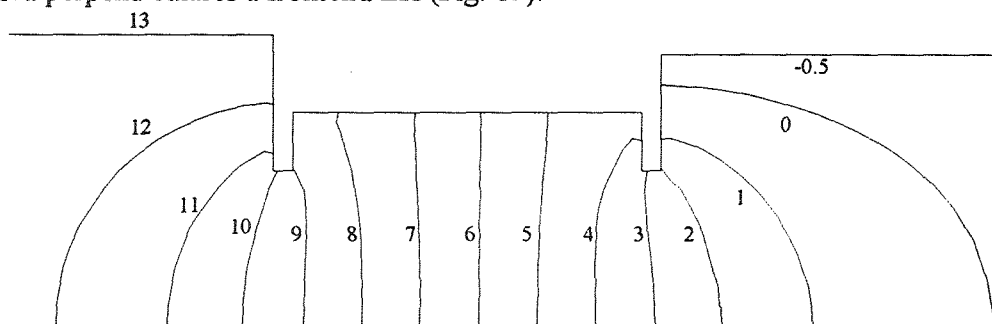


Fig. 14 - Linhas equipotenciais usando elementos finitos e infinitos

#### 4. CONCLUSÕES

Os quatro exemplos apresentados permitem evidenciar o bom desempenho do uso conjunto dos elementos finitos e infinitos para estudar variados tipos de problemas geotécnicos.

O uso conjunto de elementos finitos e infinitos permite usar malhas com menor número de elementos em relação a malhas formadas só por elementos finitos, o que se traduz em

economia de memória, menor tempo de CPU, e menor trabalho na preparação e introdução de dados. Para além disso os resultados numéricos obtidos mostram, em geral, melhores soluções para os problemas em estudo.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Ding, D.; Naylor, D.J. - A virtual work derivation of the Biot consolidation finite element formulation, *Eng. comput.*, vol.6, 1989, p. 158-162.
- [2] Gibson, R.E.; Schiffman, R.L.; PU, S.L. - Plane strain and axially symmetric consolidation of a clay layer on a smooth impervious base, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, XXIII, Pt. 4, 1970, p. 505-520.
- [3] MacNamee, J.; Gibson, R. E. - Plane strain and axially symmetric problems of the consolidation of a semi-infinite clay stratum, *Quart. J. App. Mechs.*, vol. 13, 1960, p.210-227.
- [4] Marques, J. M. M. C. - *Finite and Infinite Element in Static and Dynamic Structural Analysis*, Ph. D. thesis, University of Wales, Swansea, 1984.
- [5] Marques, J. M. M. C.; Martins, F. F. - Elementos infinitos em problemas geotécnicos, 3.º Encontro Nacional de Geotécnia, Porto, vol.3, Março, 1989, p.T103-T113.
- [6] Martins, F. F. - *Cálculo Elasto-Plástico de Maciços Terrosos em Consolidação. Programa e Aplicações*. Tese de Doutoramento em Engenharia Civil submetida à Universidade do Minho, Braga, 1993.
- [7] Martins, F. F.; Martins, J. B.; Marques, J.M.M.C. - Alguns resultados obtidos com um programa de elementos finitos para o cálculo de consolidação de solos, 4.º Congresso Nacional de Geotecnia, Lisboa, vol.1, 1991, p.439-446.
- [8] Martins, F. F.; Martins, J. B.; Marques J.M.M.C. - Bidimensional consolidation. Some results of the coupled problem. Second European Specialty Conference on Numerical Methods in Geotechnical Engineering, Santander, Spain, Setembro, 1990, p.271-279.
- [9] Martins, F. F.; Martins, J. B.; Marques, J.M.M.C. - Some results of the coupled consolidation problem obtained with a programme using finite and infinite elements, XIII ICSMFE, New Delhi, India, 1994, p.1393-1395.
- [10] Timoshenko, S.P.; Goodier, J.N. - *Theory of Elasticity* - third edition, New York, McGraw-Hill, 1970.