UMinho | 2012

Ângela Raquel Pacheco Marques de Freitas Faria

Resolução de problemas com padrões numéricos.

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Ângela Raquel Pacheco Marques de Freitas Faria

Resolução de problemas com padrões numéricos.

Outubro de 2012

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Ângela Raquel Pacheco Marques de Freitas Faria

Resolução de problemas com padrões numéricos.

Dissertação de Mestrado
Estudos da Criança
Área de Especialização emEnsino e Aprendizagem da Matemática

Trabalho efectuado sob a orientação do
Professor Doutor Pedro Palhares

Outubro de 2012

AGRADECIMENTOS

A concretização deste trabalho só foi possível com o apoio de todos que, de diferentes formas contribuíram para que este trabalho fosse possível. Neste sentido não poderia deixar de agradecer:

- Ao Doutor Pedro Palhares, pela sua orientação, pelas suas sugestões e críticas, fundamentais ao desenvolvimento e concretização deste trabalho.
- Ao Rui à Rafaela e à Rita...
- À Alice pela presença e pelo apoio ao longo destes dois anos.
- Ao Diretor da Escola, pela amabilidade e disponibilidade demonstrada.
- Às professoras e alunos, que participaram no estudo, pela colaboração e disponibilidade demonstrada.
- À Sara e à Liliana pela disponibilidade e colaboração.
- À Marlene e à Paula pela companhia.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM PADRÕES NUMÉRICOS

Ângela Raquel Pacheco Marques de Freitas Faria

Mestrado em Estudos da Criança: Ensino e Aprendizagem da Matemática

Universidade do Minho, 2012

RESUMO

Este estudo procura compreender as estratégias de generalização utilizadas pelos alunos e as dificuldades que ocorrem aquando da resolução de problemas com padrões exclusivamente numéricos, bem como se existe alguma melhoria no seu desempenho. Nesse sentido, procurou-se responder às seguintes questões: (1) Que estratégias de generalização é possível identificar, na resolução de problemas com padrões exclusivamente numéricos, no trabalho escrito realizado pelos alunos? (2) Que dificuldades manifestam os alunos na resolução de problemas ao longo das tarefas? (3) Existe alguma melhoria no desempenho dos alunos após o trabalho com tarefas de resolução de problemas com padrões exclusivamente numéricos? Tendo em conta os objetivos enunciados e a sua natureza, nesta investigação adotou-se uma metodologia quantitativa, sendo que também se considerou pertinente fazer uma abordagem qualitativa. A proposta pedagógica foi concretizada no ano letivo de 2011/12, tendo a recolha de dados ocorrido entre os meses de janeiro e fevereiro numa turma de 6.º ano. Esta recolha teve como principais instrumentos um teste de avaliação de competências, gravações em áudio e os documentos produzidos pelos alunos no âmbito das tarefas propostas.

Os resultados mostram que os alunos evoluíram positivamente em alguns aspetos nomeadamente na capacidade de generalizar e na colaboração do trabalho em grupo. Na resolução de problemas, privilegiam as estratégias da diferença e a recursiva. Manifestam alguma dificuldade em usar a linguagem matemática para expressar as suas generalizações. A resolução de problemas com padrões numéricos contribuiu para aplicar processos matemáticos aprendidos anteriormente e fomentou o seu desenvolvimento na medida em que os desafiou a analisar, considerar, abstrair, conjeturar e refutar as suas próprias conceções bem como as dos seus colegas de grupo.

Palavras-chave: matemática, resolução de problemas, padrões, regularidades, tarefas.

SOLVING PROBLEMS WITH NUMERICAL PATTERNS

Ângela Raquel Pacheco Marques de Freitas Faria

Master in Child Studies: Mathematics Teaching and Learning

University of Minho, 2012

ABSTRACT

This study seeks to understand the strategies of generalization used by students and the difficulties that occur when solving problems with numerical patterns exclusively, and if there is any improvement in performance. Accordingly, it try to answer the following questions: (1) What generalization strategies can be identified, in problem solving with numerical patterns, on the written work done by students? (2) What difficulties are visible in students solving problems along the tasks? (3) Is there any improvement in students' performance after working with problem-solving tasks with only numeric patterns? Given the stated goals and its nature, this research adopted a quantitative methodology, and also found relevant to make a qualitative approach. The pedagogical proposal was implemented in academic year 2011/12, with data collection occurring between January and March in a 6th grade class. This collection had as main instruments a test of skills assessment, audio recordings and documents produced by students in the class as part of the proposed tasks.

The results show that students developed positively in some aspects especially in the ability to generalize and collaborative group work. In problem solving, main strategies were the difference and recursive. When expressing their generalizations, students experienced some difficulties in the use of mathematical language. Problem solving with numerical patterns contributed to apply mathematical processes previously learned and fostered the development in the extent that challenged them to examine, consider, abstracting, conjecturing and refuting their own conceptions as well as their peers.

Keywords: mathematics, problem solving, patterns, regularities, tasks.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS.. III

RESUMO.. IV

ABSTRACT.. V

ÍNDICE DE FIGURAS.. VIII

ÍNDICE DE TABELAS.. X

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO.. 1

1.1. Orientação para o Estudo.. 1

1.2. Problema e Questões da Investigação.. 4

1.3. Organização Geral.. 5

CAPÍTULO II

ENQUADRAMENTO TEÓRICO.. 7

2.1. Ensino e aprendizagem da matemática.. 7

2.2. Resolução de problemas.. 9

2.3. Padrões.. 16

2.4. A generalização na resolução de problemas com padrões.. 23

CAPÍTULO III

METODOLOGIA.. 27

3.1. Opções e procedimentos de carácter metodológico.. 27

3.1.1. Participantes e escolha dos casos.. 29

3.1.2. Recolha de dados.. 30

3.1.3. A escolha das tarefas.. 31

3.1.4. Teste de avaliação de desempenho.. 31

3.1.5. Fases do estudo e procedimentos.. 32

3.1.6. Análise de dados.. 34

CAPÍTULO IV

TAREFAS.. 35

4.1. Caraterização e exploração das tarefas.. 35

4.1.1. Tarefa 1 37
4.1.2. Tarefa 2 39
4.1.3. Tarefa 3 42
4.1.4. Tarefa 4 44
4.1.5. Tarefa 5 47
4.1.6. Tarefa 6 49
4.1.7. Tarefa 7 53
4.1.8. Tarefa 8 57
4.1.9. Tarefa 9 60
4.1.10. Tarefa 10 62
4.2. Síntese 65
4.2.1 Estratégias de resolução de problemas 65
4.2.2. Dificuldades manifestadas na resolução de problemas 67

CAPÍTULO V

TESTE DE AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO 70
5.1. Caraterização do teste de avaliação de desempenho 70
5.2. Análise comparativa das questões do pré-teste com o pós-teste 72
5.2.1. Sequências 72
5.2.2. A torre dos ímpares 73
5.2.3. Ziguezague dos números 74
5.3. Análise comparativa dos resultados do pré-teste com o pós-teste 77

CAPÍTULO VI

CONSIDERAÇÕES FINAIS 83
6.1. Conclusões do estudo 83
6.1.1. Reflexão final 89
6.2. Implicações para a prática profissional 90
6.3. Limitações 91
6.4. Recomendações para futuras investigações 92

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 93
ANEXOS 102

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.	Enunciado da tarefa 1	37
Figura 2.	Resolução da questão c) da tarefa 1 – Grupo 3	37
Figura 3.	Resolução da questão c) da tarefa 1 – Grupo 1	38
Figura 4.	Enunciado da tarefa 2	39
Figura 5.	Resolução da questão b) da tarefa 2 – Grupo 5	40
Figura 6.	Resolução da questão b) da tarefa 2 – Grupo 2	41
Figura 7.	Resolução da questão c) da tarefa 2 – Grupo 4	41
Figura 8.	Enunciado da tarefa 3	42
Figura 9.	Resolução da questão a) da tarefa 3 – Grupo 1	42
Figura 10.	Resolução da questão b) da tarefa 3 – Grupo 2	42
Figura 11.	Resolução da questão c) da tarefa 3 – Grupo 3	43
Figura 12.	Enunciado da tarefa 4	44
Figura 13.	Resolução da questão a) da tarefa 4 – Grupo 1	45
Figura 14.	Resolução da questão b) da tarefa 4 – Grupo 5	45
Figura 15.	Resolução da questão c) da tarefa 4 – Grupo 4	46
Figura 16.	Resolução da questão c) da tarefa 4 – Grupo 1	46
Figura 17.	Enunciado da tarefa 5	47
Figura 18.	Resolução da questão a) da tarefa 5 – Grupo 2	47
Figura 19.	Resolução da questão b) da tarefa 5 – Grupo 4	48
Figura 20.	Resolução da questão c) da tarefa 5 – Grupo 1	49
Figura 21.	Resolução da questão c) da tarefa 5 – Grupo 5	49
Figura 22.	Enunciado da tarefa 6	49
Figura 23.	Resolução da questão a) da tarefa 6 – Grupo 3	50
Figura 24.	Resolução da questão b) da tarefa 6 – Grupo 4	51
Figura 25.	Resolução da questão b) da tarefa 6 – Grupo 2	51
Figura 26.	Resolução da questão c) da tarefa 6 – Grupo 4	52
Figura 27.	Resolução da questão c) da tarefa 6 – Grupo 1	52
Figura 28.	Enunciado da tarefa 7	53
Figura 29.	Resolução da questão a) da tarefa 7 – Grupo 1	53
Figura 30.	Resolução da questão b) da tarefa 7 – Grupo 2	53

Figura 31.	Resolução da questão c) da tarefa 7 – Grupo 1	54
Figura 32.	Resolução da questão c) da tarefa 7 – Grupo 5	55
Figura 33.	Resolução da questão c) da tarefa 7 – Grupo 2	55
Figura 34.	Enunciado da tarefa 8	57
Figura 35.	Resolução da questão a) da tarefa 8 – Grupo 3	57
Figura 36.	Resolução da questão b) da tarefa 8 – Grupo 1	58
Figura 37.	Resolução da questão c) da tarefa 8 – Grupo 4	58
Figura 38.	Enunciado da tarefa 9	60
Figura 39.	Resolução da questão c) da tarefa 9 – Grupo 4	61
Figura 40.	Resolução da questão c) da tarefa 9 – Grupo 3	61
Figura 41.	Enunciado da tarefa 10	62
Figura 42.	Resolução da questão a) da tarefa 10 – Grupo 5	63
Figura 43.	Resolução da questão b) da tarefa 10 – Grupo 2	63
Figura 44.	Resolução da questão c) da tarefa 10 – Grupo 3	63
Figura 45.	Torre dos ímpares	73
Figura 46.	Ziguezague dos números	74
Figura 47.	Distribuições dos resultados do pré-teste	76
Figura 48.	Distribuições dos resultados do pós-teste	77

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela1.	Categorias de análise das estratégias de generalização..............................	26
Tabela 2.	Calendarização do estudo..	33
Tabela 3.	Estratégias utilizadas pelos grupos para responder às questões a) e b) das tarefas..	65
Tabela 4.	Média das classificações à questão 1. Sequências, da Turma experimental/Turma de controlo..	72
Tabela 5.	Média das classificações à questão 2. A torre dos ímpares, da Turma experimental/Turma de controlo...	73
Tabela 6.	Média das classificações à questão 3. Ziguezague dos números, da Turma experimental/Turma de controlo...	74
Tabela 7.	Medidas de localização relativas aos resultados do pré-teste e do pós-teste.	78
Tabela 8.	Testes de normalidade para a distribuição dos resultados dos testes...........	79
Tabela 9.	Teste da homogeneidade das variâncias para a variável pós-teste – Turma experimental e Turma de controlo..	80
Tabela 10.	Correlação entre pré-teste e pós-teste – Turma experimental......................	81
Tabela 11.	Homogeneidade das retas de regressão na interação grupo – pré-teste.......	82

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A resolução de problemas tornou-se um foco da matemática escolar tendo um papel bastante significativo na aprendizagem da matemática em Portugal. Hoje, numa sociedade do conhecimento, a literacia matemática é fundamental. Neste capítulo, identificam-se a pertinência do estudo, o problema, as questões de investigação e a sua organização.

1.1. Orientação do Estudo

O presente estudo surge na sequência de inquietações relativas às dificuldades evidenciadas pelos alunos relativamente à temática da resolução de problemas, tendo em conta a sua importância tanto a nível nacional como internacional. Uma outra razão para a escolha do tema prende-se com as dificuldades dos alunos em compreender os cálculos que efetuam, como os efetuam, porque os efetuam e avaliarem se estes são adequados ou não à situação. Contribuir para o sucesso do ensino-aprendizagem da matemática, disciplina constantemente visada em estudos e relatórios é um desafio pessoal e profissional. Considero ainda a Matemática uma ciência capaz de me incitar a acompanhar os estudos que se vão fazendo, tendo um gosto particular pelos que se inserem no domínio dos padrões numéricos que me permitem atualizar os meus conhecimentos e reformular as minhas conceções.

No início da década de setenta, tiveram início investigações sistemáticas sobre resolução de problemas e suas implicações curriculares. A importância dada à resolução de problemas é, portanto relativamente recente, e somente nessa década é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção.

Atualmente nos programas em vigor constam referências explícitas à importância da resolução de problemas no ensino e aprendizagem da matemática. De acordo com as mais recentes diretrizes curriculares de vários países, um dos principais fins da aprendizagem da matemática é o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas. Contudo apesar da relevância curricular dada a este tema, vários estudos internacionais como o Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) e o Programme for International Student

Assessment (PISA) têm mostrado que os estudantes portugueses têm um mau desempenho na resolução de problemas (Ramalho, 1994; Amaro, Cardoso & Reis, 1994; OCDE, 2004).

No relatório nacional da prova de aferição de matemática do 6.º ano de 2009 (GAVE, 2009) pode ler-se que de um modo global, o desempenho dos alunos nesta área temática é mais elevado nos itens que avaliam o conhecimento e a compreensão de conceitos e procedimentos, e vai decrescendo nos que avaliam o raciocínio, a comunicação e a resolução de problemas. O relatório de 2010 (GAVE, 2010) refere que de um modo global, os alunos apresentam um nível de desempenho mais elevado nos itens que avaliam o conhecimento e a compreensão de conceitos e procedimentos do que nos que avaliam o raciocínio e a resolução de problemas. No relatório de 2011 (GAVE, 2011) é feita a mesma referência, os itens de resolução de problemas continuaram a ter os níveis de desempenho mais baixos.

Nas metas atualmente definidas para o segundo ciclo, a resolução de problemas é transversal a todos os domínios, contudo a resolução de problemas é uma atividade extremamente complexa (Lester, 1993) e ainda persistem dificuldades em distinguir os processos utilizados na resolução de problemas.

Fernandes (2011) refere que importa proporcionar múltiplas oportunidades para que os alunos resolvam diferentes problemas numa diversidade de contextos, interpretem enunciados, analisem e reflitam sobre as estratégias de resolução, bem como sobre a adequação dos resultados obtidos. Também Teixeira (2011) salienta que grande parte das dificuldades reveladas pelos alunos dizem respeito ao estabelecimento de um plano e à execução do plano, principalmente no que concerne à forma como organizam a comunicação dos seus argumentos, sendo que muito poucos fazem a verificação dos resultados e ao não identificarem os seus erros não os corrigem.

Moreira e Fonseca (2009) sugerem que se deve fomentar a resolução de problemas envolvendo padrões, desenvolvendo a aptidão para a generalização. A riqueza dos padrões reside na sua transversalidade, tanto ao nível de conteúdos como das capacidades que promovem nos alunos de qualquer nível e também, na forte ligação que têm com a resolução de problemas (Barbosa *et al.*, 2008).

Muitos matemáticos compartilham uma visão entusiasmada sobre o papel dos padrões na matemática, alguns consideram mesmo que a matemática é a ciência dos padrões (Steen, 1988). Tarefas de exploração de padrões podem contribuir para o desenvolvimento de habilidades relacionadas com a resolução de problemas, através da ênfase na análise de casos particulares, organizando dados de uma forma sistemática, conjeturando e generalizando. Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007) reconhecem a importância de se trabalhar com dados numéricos. Este documento afirma que os programas de ensino de matemática devem permitir aos alunos, a partir de pré-escola e até ao final do ensino secundário, trabalhar atividades que envolvam a compreensão de padrões, relações e funções. Além disso, trabalhar com padrões pode ser útil na construção de uma imagem mais positiva e significativa da matemática e contribuir para o desenvolvimento de várias habilidades (Vale, *et al.*, 2006). Em Branco (2008, p. 189) podemos ler "penso que os alunos devem ser incentivados desde cedo a explorar padrões e a procurar regularidades, com o intuito de desenvolverem a sua capacidade de generalização."

O relatório europeu sobre a qualidade do ensino básico e secundário (CE - DGEC, 2000) refere que uma base sólida em matemática constitui um elemento crucial no currículo escolar. As competências no domínio da análise e da lógica, assim como o raciocínio, melhoram, todos eles, com o estudo da matemática. A formação obrigatória das crianças em matemática constitui um requisito importante para a participação na sociedade. A Declaração Mundial sobre a Educação para Todos da United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, (UNESCO, 1990) aponta a resolução de problemas como um dos meios de aprendizagem nucleares, paralelamente com a leitura, a escrita, o cálculo, entre outros. Numa perspetiva idêntica, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2007) sublinha a resolução de problemas como uma base fundamental para aprender ao longo da vida, para que os indivíduos participem e respondam de forma eficaz e positiva às exigências da vida quotidiana. Segundo o NCTM (2007), a resolução de problemas tende a criar condições para que os indivíduos: apliquem e explorem os seus conhecimentos, possibilitando o desenvolvimento de novos conhecimentos; desenvolvam as capacidades de pensamento e atitudes tais como a curiosidade, a persistência e a autoconfiança, as quais lhes poderão ser úteis em situações para além da sala de aula, ou seja, na sociedade com níveis de desenvolvimento cada vez mais elevados.

Considerando tudo isto, pensamos que a resolução de problemas deve incentivar a mais pesquisa sobre o desempenho dos alunos. Trabalhos recentes nesta área mostram que ainda não aprendemos o suficiente. Por fim gostaria de sublinhar que este trabalho reforça a minha convicção da importância da reflexão sistemática sobre a prática com vista ao seu contínuo aperfeiçoamento.

1.2 Problema e Questões da Investigação

Tendo em conta tudo o que foi referido, surge o problema: em que medida a resolução de problemas aliada aos padrões numéricos permite aos alunos desenvolver aptidões conducentes a elevados níveis de literacia matemática, tal como preconizam as Orientações Curriculares para o Ensino Básico.

Este estudo apoia a ideia de que o ensino deve ajudar os alunos a desenvolverem a flexibilidade e destreza de cálculo, discutirem a eficácia das diversas estratégias e procedimentos, nomeadamente a possibilidade de generalização (NCTM, 2007). Nesta linha de pensamento considerou-se pertinente proporcionar aos alunos este ambiente de aprendizagem tendo concretizado uma estratégia que inclui uma sequência de tarefas relativas ao estudo de padrões numéricos, com carácter problemático.

A busca de padrões é visto por alguns como uma forma de se aproximar de Álgebra, pois é um passo fundamental para o estabelecimento de generalização, que é a essência da matemática (Mason, Johnston-Wilder & Graham, 2005; Orton e Orton, 1999; Zazkis & Liljedahl, 2002). Procurar padrões em diferentes contextos, utilizar e compreender símbolos e variáveis que representam padrões e generalizantes são componentes importantes da matemática escolar em muitos países. No Programa do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007) é atribuída grande importância à resolução de problemas na aprendizagem da Matemática, que se constitui como uma das três capacidades transversais a todo o programa a par do raciocínio matemático e da comunicação matemática. O currículo português menciona a importância de habilidades em desenvolvimento, como procurar e explorar padrões numéricos e geométricos, bem como resolver problemas, procurar regularidades, conjeturar e generalizar. Segundo Barbosa (2009) a pertinência deste tipo de padrões na aprendizagem da álgebra (NCTM, 2007) justifica o estudo das categorias que daqui poderiam surgir.

O problema é decorrente especialmente do trabalho de Barbosa (2009) onde a componente visual é aliada à resolução de problemas com padrões. Os resultados obtidos demonstram que houve uma clara evolução no desempenho dos alunos, mas terá a componente visual sido o fator preponderante para a melhoria da capacidade de resolução de problemas? Se a componente visual for retirada dos problemas, isto é, com problemas com padrões exclusivamente numéricos, qual será o desempenho dos alunos?

Nesta investigação procura-se compreender as estratégias de generalização utilizadas pelos alunos e as dificuldades que ocorrem aquando da resolução de problemas com padrões exclusivamente numéricos, bem como se existe alguma melhoria no seu desempenho. Estas tarefas são um conjunto de propostas de trabalho em grupo, em que os alunos exploram uma situação, procuram regularidades, criam conjeturas, argumentam e comunicam oralmente e por escrito as suas conclusões.

Escolheram-se as seguintes três questões para esta investigação:

(i) Que estratégias de generalização é possível identificar, na resolução de problemas com padrões exclusivamente numéricos, no trabalho escrito realizado pelos alunos?

(ii) Que dificuldades manifestam os alunos na resolução de problemas ao longo das tarefas?

(iii) Existe alguma melhoria no desempenho dos alunos após o trabalho com tarefas de resolução de problemas com padrões exclusivamente numéricos?

1.3. Organização Geral

Esta dissertação encontra-se estruturada em seis capítulos. O capítulo I corresponde à *Introdução*, onde se expressa a motivação e se fundamenta a pertinência do estudo. Neste capítulo é ainda abordado o problema e as questões de investigação. Segue-se o capítulo II, *Enquadramento Teórico* sobre as temáticas associadas ao problema em estudo, na qual são apresentadas e discutidas referências teóricas referentes a áreas de investigação que enquadram este trabalho. O capítulo começa com a apresentação das perspetivas de alguns autores acerca do ensino e aprendizagem da matemática onde são abordados alguns aspetos, tendo por base documentos curriculares e estudos documentais e empíricos no âmbito da educação matemática. Uma vez que se pretende dar ênfase à resolução de problemas no ensino da matemática é pertinente definir o que se entende por problema e por resolução de problemas, já que este tema gera controvérsia entre professores e investigadores. São ainda exploradas algumas conceções acerca do que é um problema, estratégias de resolução de problemas, comunicação matemática e da capacidade de generalizar. O capítulo termina com uma análise da expressão curricular dos padrões, refletindo de forma mais aprofundada na sua relação com a resolução de problemas e com a álgebra dando especial atenção às atuais orientações curriculares. Por último é analisado o conceito de padrão, de forma a encontrar uma definição adequada ao contexto deste estudo e é feita uma pequena abordagem às estratégias de generalização.

O Capítulo III, *Metodologia*, tem início com um conjunto de considerações gerais sobre metodologias de investigação e em seguida, são apresentadas e fundamentadas as opções metodológicas adotadas neste estudo e descritos os instrumentos e procedimentos utilizados na recolha de informação.

No Capítulo IV, *As Tarefas*, procede-se à caracterização detalhada das tarefas utilizadas na investigação. É feita uma descrição do trabalho escrito desenvolvido por cada um dos grupos que participaram no estudo e analisadas as transcrições das gravações. Termina com uma síntese das estratégias utilizadas e das dificuldades dos alunos na resolução de problemas.

No Capítulo V, *Teste de Avaliação de Desempenho*, é feita uma carateriização do teste de desempenho e a análise e tratamento dos dados recolhidos no decorrer da investigação. Termina com a análise estatística com recurso ao SPSS.

A parte empírica termina com o Capítulo VI, *Considerações Finais*. Neste capítulo são apresentadas as conclusões decorrentes dos resultados desta investigação bem como as limitações. São ainda abordadas as implicações para a prática profissional e algumas recomendações para investigações futuras. Por fim, são apresentadas as referências consultadas ao longo do estudo, bem como os anexos.

CAPÍTULO II

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo serão abordados os temas que se entendem estar diretamente relacionados com este trabalho dando principal atenção ao ensino e à aprendizagem da matemática, à resolução de problemas e à generalização de padrões numéricos. É ainda abordada a comunicação matemática na resolução de problemas, as estratégias de resolução de problemas e alguns aspetos que geralmente propiciam o surgimento de dificuldades. De acordo com o objetivo, são abordadas algumas das investigações realizadas sobre o tema e as potencialidades do trabalho com padrões numéricos.

2.1. Ensino e a aprendizagem da matemática

A Matemática é uma das ciências mais antigas tendo ocupado ao longo dos tempos um lugar de relevo no currículo escolar. Uma disciplina para ser entendida como completa implica um desenvolvimento intelectual. Quando apenas há transmissão de conhecimentos este desenvolvimento é limitado, para tal a matemática deve levar os alunos a questionar-se naturalmente sobre o que os rodeia. No âmbito do PISA (ME, 2004b) a literacia matemática é definida como a aptidão para; identificar e compreender o papel que a matemática tem no mundo; poder raciocinar de forma fundamentada e usar de forma integrada a matemática com base nas necessidades de cada um, como um cidadão reflexivo e empenhado no seu desenvolvimento. A conceção de literacia assente no conhecimento leva à mobilização em diversas situações consideradas importantes na vida das pessoas, enquanto cidadãos ativos e intervenientes (GAVE, 2003). Para Serrazina e Oliveira (2005), no currículo nacional o conceito de literacia matemática é o que proporciona o desenvolvimento e formação de cidadãos competentes, capazes de se integrarem na sociedade com as ferramentas que a escola lhes proporcionou, de se apropriarem da informação disponível, saberem analisá-la, interpretarem-na e tomarem decisões consequentes. O aluno ao aprender a resolver problemas em matemática está a adquirir modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas, que certamente lhe serão úteis na vida futura, enquanto cidadão ativo (NCTM, 2007).

A matemática é uma linguagem que nos permite produzir uma compreensão e representação do mundo, é um instrumento que facilita formas de atuar para resolver problemas que se nos deparam, de prever e controlar os resultados da ação que realizarmos. Assim, o ensino da matemática, ao longo dos três ciclos da escolaridade básica, deve ser orientado por duas finalidades fundamentais; promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados (Ponte *et al.*, 2007).

Lopes (2010) refere que alguns alunos apesar de escolarizados têm muitas dificuldades em usarem as suas aprendizagens no dia-a-dia. As aprendizagens não são integradas como instrumentos nas suas ações. Durante muito tempo, e num paradigma positivista, partiu-se do pressuposto que os alunos com conhecimentos fragmentados conseguiriam usá-los na resolução de problemas ou em situações problemáticas. No entanto, no decorrer do tempo constatou-se que este pressuposto não é verdade. Saber aspetos fragmentados de um dado conceito não significa que o aluno se aproprie do conceito em toda a sua complexidade. O facto de saberem resolver exercícios de todos os tipos não significa que tenham competência para resolver problemas mesmo quando estes envolvem técnicas ou algoritmos já treinados.

Da análise do conteúdo das provas nacionais mais concretamente as provas de aferição e apesar de até ao ano letivo 2010/2011 não contarem para a avaliação dos alunos, desde 2005 que há uma tendência em incluir questões típicas deste tema. Segundo Barbosa *et al.*, (2008) a sua riqueza reside na sua transversalidade, tanto ao nível de conteúdos como das capacidades que promove nos alunos de qualquer nível e também na forte ligação que tem com a resolução de problemas, como uma estratégia riquíssima que é a procura de padrões.

Da análise do Programa do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007) podemos encontrar referências aos padrões nos quatro temas em que o programa está organizado, com especial relevo para o tema da Álgebra e Geometria. Das capacidades transversais a desenvolver o tópico da resolução de problemas recomenda a apresentação de problemas que possam ser resolvidos por diferentes estratégias, em particular a "identificação de regularidades". No tema números e operações são referidos termos relacionados com os padrões, regularidades e sequências numéricas. Estas referências surgem nas indicações metodológicas, onde se sustenta que o trabalho com sequências numéricas em que se pede ao aluno que continue ou invente sequências de números estabelece uma ponte concetual importante entre os três ciclos de ensino básico. No tópico "potências de base e expoente naturais" sugere-se o estudo de regularidades com potências, por exemplo, regularidades do algarismo das unidades de potências com a mesma base e expoentes diferentes. No tema "geometria" encontramos referências aos padrões, por exemplo, através dos termos padrões geométricos e frisos. A referência aos padrões geométricos surge pela primeira vez apesar de na articulação com o 1.º ciclo, se referir a este tipo de padrão como sendo um meio de desenvolver nos alunos o pensamento algébrico. Espera-se que este ciclo possa contribuir para que os alunos ampliem e aprofundem esse trabalho explorando padrões, determinando termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e uma lei de formação pelo estudo da relação entre os termos. No tema "álgebra" referem-se padrões geométricos, sequências, regularidades e lei de formação. Ao longo de todo o tema são feitas referências explícitas aos padrões, como se exemplifica no tópico "sequências e regularidades": identificar e dar exemplos de sequências e regularidades numéricas e não numéricas; determinar o termo seguinte, ou o anterior, a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação; determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação; analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando linguagem natural ou simbólica. No tema "organização e tratamento de dados" também são feitas referências aos padrões pela necessidade de explorar regularidades de diferentes fenómenos.

Em Portugal o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.,* 2007) com o propósito de reajustar os programas em vigor desde a década de 90 foi estruturado tendo por base a conjuntura social e as recentes tendências curriculares onde é dada ênfase a três capacidades consideradas transversais a toda a aprendizagem da Matemática: a Resolução de Problemas, o Raciocínio Matemático e a Comunicação Matemática.

2.2. Resolução de problemas

A resolução de problemas é uma das mais importantes finalidades do ensino da matemática, pois permite desenvolver nos alunos processos de pensamento, capacidades e competências. Constitui um contexto universal de aprendizagem e deve por isso, estar sempre presente, associada ao raciocínio e à comunicação e integrada naturalmente nas diversas atividades. Os problemas são situações não rotineiras que constituem desafios para os alunos onde frequentemente podem ser utilizadas várias estratégias e métodos de resolução. Os exercícios geralmente são de resolução mecânica e repetitiva, em que apenas se aplica um ou mais algoritmos que conduzem diretamente à solução. Existe, muitas vezes, alguma confusão em distinguir exercícios de problemas matemáticos. Segundo Ponte e Sousa (2010), uma dada questão constituirá um problema ou um exercício para um dado indivíduo, conforme ele disponha, ou não, de um processo que lhe permita resolver rapidamente essa questão. Por isso, num dado momento, uma certa questão pode constituir um problema para um certo indivíduo, mas, num outro momento, não passar de um simples exercício. Assim, uma vez que se pretende falar sobre a resolução de problemas é pertinente definir problema, pois para os matemáticos, a definição de problema constitui por si própria, um problema. Um problema é uma situação que difere de um exercício pelo facto de o aluno não dispor de um procedimento ou algoritmo que conduzirá com certeza a uma solução (Kantowski, citado por Abrantes, 1989, p.3). Problema matemático para Dante (1989) é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la. Para Polya (2003) ter um problema é procurar conscientemente alguma ação apropriada para atingir um objetivo claramente definido mas não imediatamente inatingível, acrescenta ainda que se não há dificuldade não há problema. Já Lester (1978) afirma que um problema é uma situação na qual um indivíduo ou grupo de indivíduos é chamado a executar uma tarefa para a qual não tem acesso a um algoritmo que determine completamente o método de resolução. Moreira (2008) acrescenta que um problema é o que se tem de fazer quando não se sabe o que se tem de fazer, ou por outras palavras, é quando conhecemos um estádio da situação, pretendemos atingir um outro e não encontramos forma de o fazer.

Os problemas podem ser classificados em várias tipologias. Segundo o NTCM (2007) um bom problema deve possuir três características: ser problemático, a partir de algo que faz sentido e onde o caminho para a solução não está completamente visível; ser desafiante e interessante numa perspetiva matemática e ser adequado, isto é, tem de permitir relacionar o conhecimento que os alunos já têm de modo que o novo conhecimento e as capacidades de cada aluno possam ser adaptadas para completar as tarefas.

Dante (1989) classifica os problemas matemáticos em: exercícios de reconhecimento; exercícios de algoritmos; problemas-padrão; problemas-processo ou heurísticos; problemas de aplicação e problemas de quebra-cabeça. Nos exercícios de reconhecimento o objetivo é fazer com que o aluno reconheça, identifique ou lembre um conceito, um fato específico, uma definição, uma propriedade, etc. Os exercícios de algoritmos são aqueles que podem ser resolvidos passo a passo. Geralmente, no nível elementar, são exercícios que pedem a execução dos algoritmos da adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais. Os problemas-padrão envolvem na sua resolução a aplicação direta de um ou mais algoritmos anteriormente aprendidos, e não exigem qualquer estratégia. A solução do problema já está contida no próprio enunciado, e a tarefa básica é transformar a linguagem usual em linguagem matemática, identificando as operações ou algoritmos necessários para os resolver. De um modo geral, eles não aguçam a curiosidade do aluno nem o desafiam. Os problemas-processo ou heurísticos são problemas cuja solução envolve operações que não estão contidas no enunciado. Em geral, não podem ser traduzidos diretamente para a linguagem matemática, nem resolvidos pela aplicação automática de algoritmos, pois exigem do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, uma estratégia que poderá levá-lo à solução. Este tipo de problemas desafia a curiosidade do aluno e permitem que ele desenvolva criatividade, iniciativa, espírito explorador e, principalmente, inicia o escolar no desenvolvimento de estratégias e procedimentos para resolver situações problema. Esse desenvolvimento, em muitos casos, é mais importante que encontrar a resposta correta. Os problemas de aplicação são aqueles que retratam situações reais do dia-a-dia e que exigem o uso da matemática para serem resolvidos. São também chamados de situações-problema. Através de conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos procura-se associar um modelo matemático a uma situação real, organizando os dados em tabelas, traçando gráficos, fazendo operações, etc. Em geral, são problemas em forma de projetos a serem desenvolvidos usando conhecimentos e princípios de outras áreas além da matemática, como por exemplo, relatório de uma pesquisa, construção de uma casa, de um brinquedo. Os problemas de quebra-cabeça são problemas que envolvem e desafiam grande parte dos alunos. Geralmente constituem a chamada matemática recreativa e sua solução depende, quase sempre, de um golpe de sorte ou da facilidade em perceber algum truque, que é a chave da solução.

Smole & Diniz (1998) classificam os problemas em três categorias: problemas-convencionais; problemas não convencionais e problemas de lógica. Os problemas convencionais são problemas que podem ser resolvidos pela aplicação direta de um ou mais algoritmos. Os problemas não-convencionais envolvem a busca de uma solução que não se resume à aplicação direta de uma ou mais técnicas operatórias, nem à utilização imediata de uma equação. Os problemas de lógica são problemas sem, necessariamente, dados numéricos, onde se exige, principalmente, o raciocínio dedutivo.

O programa do ensino básico (Ponte *et al.*, 2007) aponta nesta direção dedicando atenção à colocação de problemas e exploração de conjeturas. Os procedimentos permitem aos alunos experiências concretas, sendo que a resolução de problemas por si só implica uma maior atenção ao aprender. A resolução de problemas é uma atividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático. Neste processo devem compreender que um problema matemático pode ser resolvido através de diferentes estratégias, dar atenção à análise da sua resolução e fazerem uma apreciação das soluções que obtêm. Devem fazer matemática de forma autónoma, ser capazes de organizar informação, identificar questões e problemas em contextos variados explorar regularidades, formular e investigar conjeturas matemáticas.

Segundo Romberg (1994), para resolver um problema não rotineiro é necessário trabalhar a matemática com compreensão e habilidade para formular e resolver problemas, interpretar informação, explorar, fazer conjeturas. Os alunos devem ganhar confiança que lhes permitam decisões rotineiras facilitadoras de oportunidades como resposta às exigências da sociedade. Treinar e aprender conceitos também é importante, mas todos devem ter a oportunidade de resolver problemas, independentemente do nível de capacidades. Em matemática o desafio é resolver problemas menos triviais. As salas de aula devem dar a oportunidade a todos os alunos para aprender. É preciso alternar entre os "jogos" e a "prática" para desenvolverem o "poder matemático". Polya (2003) escreveu que resolver problemas é a realização específica da inteligência e que, se a educação não contribui para o desenvolvimento da inteligência, ela está obviamente incompleta. Na perspetiva de Polya não basta ao aluno dominar algoritmos, técnicas e conhecimentos factuais, é fundamental que contacte e se envolva na resolução de problemas desafiantes, de modo a ter uma experiência matemática genuína. Considera ainda que a resolução de problemas constitui uma atividade humana fundamental.

A compreensão dos conceitos e relações matemáticas, o estímulo e o desafio que tarefas com carácter problemático podem proporcionar, como o envolvimento na exploração de regularidades, formas e relações matemáticas, são elementos muito importantes para o desenvolvimento deste tipo de atitudes.

Em relação à resolução de problemas persistem também diferentes perspetivas. Resolução de exercícios e resolução de problemas são metodologias diferentes. Enquanto na resolução de exercícios os estudantes dispõem de mecanismos que os levam, de forma imediata à solução, na resolução de problemas isso não ocorre, pois, muitas vezes, é preciso levantar hipóteses e testá-las. A formulação de problemas também deve integrar a experiência matemática dos alunos. Assim tal como Schwartz (1992) também questionamos se podemos resolver o problema da resolução de problemas sem formular o problema da formulação de problemas?

Segundo Lester (1980) a resolução de problemas é um conjunto de ações levadas a cabo para desempenhar uma tarefa, já Mason (1992) afirma que é a tentativa de resolver ou reformular questões não estruturadas para as quais nenhuma técnica especifica ocorre prontamente à mente.

A resolução de problemas deve ocorrer tanto na introdução ao conteúdo a lecionar, como para a aplicação do mesmo conteúdo. Desta forma os alunos sentem necessidade de aumentar os conhecimentos de matemática e podem aplicar os que aprenderam. A aprendizagem em resolução de problemas implica lembrar factos além da coordenação e aplicação de procedimentos. Schoenfeld (1992) refere que algumas das conceções que os alunos manifestam podem dificultar o sucesso na resolução de problemas, como por exemplo que os problemas têm sempre solução, que esta é única e que têm de ser resolvidos rapidamente. Estes fatores fazem com que desistam ao fim de pouco tempo ou caso descubram uma solução. A atitude revelada pelos alunos na procura da resposta certa impede-os de prestarem atenção aos procedimentos que os levaram à resposta, não desenvolvendo assim, a atitude investigativa a que o ensino da Matemática atualmente se propõe. A atenção deve estar centrada unicamente em encontrar a resposta correta, mas sim em entender e compreender o que é pedido. Nesse sentido, concordamos com a firmação de Ponte que refere que,

> "quando trabalhamos num problema, o nosso objetivo é, naturalmente, resolvê-lo. No entanto, para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original. Outras vezes, não se conseguindo resolver o problema, o trabalho não deixa de valer a pena pelas descobertas imprevistas que proporciona" (Ponte, 2003, p.17).

Polya (2003) sugere um esquema de resolução de problemas, segundo o qual se podem utilizar 4 fases fundamentais: compreensão do problema, elaboração de um plano, execução do plano e verificação. A compreensão do problema está diretamente ligada à leitura e à interpretação, por isso é necessário que o aluno realmente deseje resolver o problema, ou seja, tenha interesse, esteja motivado para achar a solução. Nesta fase temos de procurar compreender o problema. A elaboração do plano de ação consiste em relacionar os dados do problema com a pergunta feita e procurar encontrar uma estratégia que leve à solução. A elaboração de um bom plano depende, também, de uma boa ideia.

A elaboração do plano consiste em definir os caminhos que se podem tomar para encontrar a solução, se é possível resolver o problema em partes, perceber se para resolver o problema se podem estabelecer planos diferentes que resultarão na mesma resposta. Na execução do plano executa-se passo a passo, o plano elaborado verificando se tudo está de acordo com o programado. Para que se atinja o objetivo, é importante que o próprio aluno tenha elaborado o plano. A verificação é a fase onde se verifica se o plano foi bem executado, se existe necessidade de ajustes, se a resposta está coerente, se há possibilidade de ir por outro caminho mais prático e seguro. A verificação da resposta pode determinar se a conclusão é correta ou não.

> "Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta." (POLYA, 2003, p. 11)

Charles, Lester e O´Daffer (1987) ao referirem que a resolução de problemas é uma atividade complexa, que envolve uma variedade de processos de pensamento, distinguem sete processos, que consideram particularmente importantes. Os três primeiros processos estão relacionados com a compreensão do problema, o quarto com a elaboração de um plano, o quinto e o sexto com a execução do plano e a obtenção da resposta. O último é para avaliar o trabalho realizado.

O primeiro é compreender/formular a questão do problema. Na resolução de um problema uma das principais tarefas é encontrar ou formular a questão e perceber-lhe o sentido, o que envolve a compreensão de palavras específicas do problema, bem como a relação entre a questão e afirmações nele expressa. Em segundo é necessário compreender as condições e as variáveis do problema. Durante este processo o resolvedor interioriza o problema, isto é, compreende como as condições e as variáveis se relacionam umas com as outras e clarifica o significado da informação. Muitas vezes este processo é facilitado pela elaboração de um esquema, de um diagrama ou de uma lista das ideias chave. Em terceiro é necessário encontrar os dados para resolver o problema, identificar os dados necessários, eliminando os supérfluos. Em quarto resolver/formular subproblemas ou seja selecionar estratégias de resolução, verificar se há subproblemas a resolver e quais as estratégias a utilizar. Em quinto implementar corretamente a/as estratégia/as para resolver os subproblemas. Efetuar cálculos, usar raciocínio lógico resolver equações, fazer uma tabela, elaborar uma lista, descobrir um padrão ou outro. Em sexto dar uma resposta relacionada com o contexto do problema e não apenas numérica. Por último avaliar a razoabilidade da resposta.

É referido no ME - DEB (2001) que este tipo de trabalho constitui, em matemática, um contexto universal de aprendizagem e deve, por isso, estar sempre presente, associada ao raciocínio e à comunicação e integrada naturalmente nas diversas atividades. Segundo Mamede (2002), os problemas não rotineiros constituem desafios para os alunos, na medida em que estes podem utilizar várias estratégias e métodos de resolução. A resolução de problemas proporciona aos alunos momentos enriquecedores na sala de aula, sendo privilegiadas a descoberta, a exploração e as interações. Deste modo, para esta autora, a comunicação e as interações revelam-se aspetos importantes no contexto de resolução de problemas.

Mamede (2002) refere a respeito da comunicação oral que, segundo Bassarear e Pimm, é absolutamente interessante a sensibilização dos alunos para a utilização de uma linguagem rigorosa e sucinta na transformação de informação. Uma das formas de o conseguir consiste na estimulação do aluno para efetuar descrições de atividades ou objetos, de modo a que estas possam ser compreendidas, de maneira correta, por alguém que esteve ausente. Relativamente à comunicação escrita, os autores citados afirmam que escrever sobre a matemática torna a aprendizagem dos alunos mais facilitada, na medida em que encoraja à reflexão e à clarificação de ideias, promove e fomenta nos alunos a compreensão do tema em estudo.

De acordo com Menezes (2000), a valorização da comunicação é um processo fundamental da atividade matemática, associada à valorização da resolução de problemas. Também Ponte e Serrazina (2000) se referem ao aspeto da comunicação como um importante processo matemático, transversal a todos os outros. Através de comunicação, num dado grupo é possível a partilha de ideias matemáticas, tornando-se acessível a sua alteração, consolidação e aprofundamento por cada indivíduo. Por outro lado, a comunicação permite perceber o conhecimento matemático, tendo em consideração as ideias dos outros e a interação que possa existir. A comunicação das nossas ideias permite que elas se tornem objetos de reflexão, discussão e refinamento. É um passo fundamental na organização e clarificação do pensamento. A compreensão das ideias e argumentos matemáticos torna-se mais facilitada, quando são articulados oralmente ou por escrito. Segundo os referidos autores, o programa de matemática, contemplado nas normas do NCTM (2007), deve usar a comunicação, de forma a promover a compreensão da Matemática, de modo a que todos os alunos: organizem e consolidem o seu pensamento matemático para comunicar com os outros; expressem as suas ideias matemáticas de modo coerente e claro para os colegas, professores e outras pessoas; alarguem o seu conhecimento matemático, considerando o pensamento e as estratégias dos outros; usem a linguagem matemática como um meio de expressão matemática precisa.

2.3. Padrões

Em matemática o termo padrões tem alguma diversidade de sentidos sendo um indício da riqueza do conceito, que deve ser explorado ao invés de ser esgotado através de definições restritivas. Os padrões são um poderoso conceito em matemática. (Goldberg, citado por Vale *et al.,* 2006, p.8). Das ideias expressas por vários autores podemos depreender que o conceito de padrão está associado a termos tais como: regularidade, sequência, regra e ordem. Orton (1999) refere que os investigadores não têm sido capazes de arranjar uma definição satisfatória para padrão. Genericamente, padrão é usado quando nos referimos a uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detetam regularidades. Devlin (2002) refere que só nos últimos vinte anos surgiu a definição que é hoje consensual entre a maioria dos matemáticos: a matemática é a ciência dos padrões.

Zazkis e Liljedahl (2002) identificam diferentes tipos de padrões: padrões numéricos; padrões geométricos; padrões em procedimentos computacionais; padrões lineares e quadráticos e padrões repetitivos. Neste trabalho apenas serão abordados os padrões numéricos, isto é, sequências matemáticas na qual os elementos são números (Frobisher *et al.*, 1999). Como qualquer padrão, o padrão numérico pode ser descrito relativamente à forma como pode ser repetido ou prolongado.

Nos padrões de crescimento a sequência de números prolonga-se de modo regular (Moyer-Packenham, 2005). Tradicionalmente a ponte entre a aritmética e a álgebra é feita a partir dos padrões de crescimento. A complexidade deste tipo de padrões, bem como o contexto em que são propostos, proporciona frequentemente a utilização de uma grande diversidade de estratégias de generalização, podendo em alguns casos conduzir à emergência de dificuldades na exploração feita pelos alunos. No padrão de repetição a sequência de números na qual se reconhece uma unidade repete-se ciclicamente (Frobisher *et al.*, 1999). O princípio subjacente aos padrões de repetição é a sua estrutura cíclica. Warren (2008) vê nos padrões de repetição potencialidades para promover a generalização. A identificação da unidade de repetição e a compreensão da estrutura global do padrão permitem ao aluno ir além do mero processo de continuação do padrão, possibilitam a abordagem à generalização distante através da descoberta imediata do termo que ocupa uma dada ordem na sequência, abrindo assim o caminho para a abstração. Segundo Threlfall (1999) num padrão repetido há uma unidade visível que se repete ciclicamente. Os alunos ao analisarem padrões repetidos têm oportunidade de continuar o padrão, de procurar regularidades e de fazer generalizações. Segundo este autor, o estudo de padrões repetidos constitui um veículo para o trabalho com símbolos, um caminho concetual para a Álgebra e um contexto para a generalização. A compreensão da unidade que se repete nos primeiros anos do ensino básico pode não ser facilmente conseguida, no entanto, é possível desenvolvê-la progressivamente. A perceção da unidade que se repete permite determinar a ordem de diversos elementos do padrão, através da generalização.

A importância dos padrões e regularidades na matemática tem sido salientada por vários autores sendo o Programa do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007) um ponto de viragem em relação aos programas que vigoraram até então em Portugal, no que se refere à expressão curricular dos padrões. Neste documento, o pensamento algébrico atravessa de forma clara, todos os ciclos de ensino, devendo dar-se especial atenção à investigação de padrões, à identificação de relações e à generalização. Para Vale *et al.*, (2006) o reconhecimento de padrões e de regularidades desempenha um papel importante no ensino da matemática, sendo considerado por alguns autores como a base do pensamento algébrico e até mesmo a essência do currículo e da própria matemática (Devlin, 2002). É consensual que os conhecimentos de álgebra são necessários quer para a vida académica quer para o dia a dia e muitos desses conceitos podem ser construídos partindo das experiências com números. Talvez por isso Vale *et al.*, (2006) refere que o tema dos padrões, a nível do ensino, deverá ser perspetivado como atividade de resolução de problemas e preferencialmente como tarefa de investigação acrescentam ainda, que a abordagem da álgebra através dos padrões irá permitir uma maior motivação dos alunos, retirando o negativismo que lhe é normalmente associado. Assim estes autores sugerem que os padrões podem contribuir para a construção de uma imagem mais positiva da matemática; permitem o estabelecimento de conexões matemáticas; atraem e motivam os alunos porque apelam fortemente ao seu sentido estético e criatividade; permitem a promoção e desenvolvimento das capacidades e competências; ajudam a desenvolver a capacidade de classificar e ordenar informação e permitem a compreensão da ligação entre a matemática e o mundo em que se vive.

Segundo Bamchoff (2008) os padrões quando introduzidos nos primeiros anos de escolaridade trazem bastantes benefícios aos alunos. É um meio para entender relações entre quantidades e as funções matemáticas subjacentes. É ainda uma forma concreta de os alunos se começarem a debater com as noções de abstração e generalização. O facto de começarem desde os primeiros anos de escolaridades a terem contacto com este tipo de problemas pressupõe que sejam mais tarde capazes de descrever padrões numéricos e geométricos, generalizarem e preverem o que acontece a seguir fornecendo justificações para as previsões. Nestas situações os alunos aprendem a fazer matemática, além disto este procedimento inclui usar linguagem matemática. Diversos autores defendem igualmente que o estudo de padrões e regularidades é um meio privilegiado para desenvolver o pensamento algébrico. Ponte (2005) partilha da mesma opinião, a procura de padrões e regularidades e a formulação de generalizações em diversas situações devem fomentar-se desde os primeiros anos do ensino básico e acrescenta que o estudo de padrões e regularidades pode constituir um meio privilegiado para promover o desenvolvimento do pensamento algébrico. Esta é uma questão importante uma vez que encontrar termos numa sequência é normalmente o primeiro passo para chegar à álgebra. Um outro autor, Kaput (1999), apresenta o exemplo de uma tarefa relativa à análise de padrões e regularidades que sugere a utilização de símbolos. Na sua perspetiva, este tipo de tarefas encoraja os alunos a trabalhar confortavelmente com símbolos sem que haja uma referência a números e permite que estes experimentem a matemática incentivando a compreensão. Os alunos devem então, desde cedo, desenvolver a capacidade de identificar e descrever padrões e regularidades, bem como, de continuar um determinado padrão ou criar novos padrões.

Ao longo de toda a escolaridade, o estudo de padrões pode assumir diferentes níveis. O estudo de padrões e regularidades é defendido pelo NCTM (1991) nas normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar. Este documento refere que o desenvolvimento de competências com padrões é relevante para a capacidade de: resolver problemas; compreender conceitos e relações importantes; investigar relações entre as variáveis num padrão; generalizar padrões através do uso de palavras ou variáveis; continuar e relacionar padrões e compreender o conceito de função. Assim, este documento recomenda que, nos primeiros níveis de ensino a sua aprendizagem se baseie no estudo de padrões e relações. Mais tarde, esse estudo deve ser alargado para a análise, representação e generalização de funções. Sugere ainda ser essencial que os alunos explorem conceitos algébricos de uma forma informal com vista à construção de uma base para o posterior estudo formal da álgebra. O estudo de padrões e regularidades é referido como um aspeto importante para o ensino da Álgebra.

Mason (1996) sugere que os padrões são um caminho para expressar generalizações. Para generalizar um padrão é necessário compreender a regularidade reconhecida em alguns casos particulares, para depois a generalizar a todos os termos. A descoberta de uma regra algébrica não é um processo trivial de generalização do particular para o geral, mas uma estreita ligação entre as duas. No estudo da Álgebra é essencial a capacidade de compreender uma relação e, de seguida, representá-la usando a linguagem algébrica. Esta capacidade desenvolve-se através da exploração e generalização de padrões MacGregor e Stacey (1993). Como observado por Orton e Orton (1999) na sua investigação, nas crianças as habilidades de padronização e a capacidade de continuar um padrão antecede a capacidade para descrever o termo geral.

Mason, Barton e Stacey (1985) referem que durante os últimos anos o uso de padrões numéricos tornou-se um meio popular para chegar à generalização nos currículos de matemática. O *Working Group on Approaches to Algebra (*APPA Group, 2004) mencionam que, de acordo com Mason e Sutherland expressar generalizações não é uma capacidade que é dominada e depois ultrapassada, é antes um processo progressivo de elevada sofisticação. Kaput (1999) refere-se à atividade dos alunos de generalizar sobre dados e relações matemáticas, estabelecendo essas generalizações através da conjetura e argumentação e expressá-los em formas cada vez mais formais. A importância da generalização na aprendizagem tem sido muito reconhecida. Davidov (1990) diz que desenvolver as generalizações em crianças é considerado como um dos propósitos principais da instrução escolar. Para os alunos a forma de expressão é o que mais importa e não usar o formulário apropriado, independentemente da substância do que foi produzido. Mason (1996) afirma que se os professores não têm por hábito fazer os alunos expressar as suas próprias generalizações, então o pensamento matemático não ocorre.

Vale, *et al.*, (2006) mencionam que será interessante recorrer aos padrões na abordagem da álgebra e saber até que ponto os alunos são capazes de compreender e generalizar a diversidade de padrões numéricos que lhes são propostos e qual o desempenho que apresentam neste tipo de tarefas. Outro aspeto importante ligado aos padrões é a resolução de problemas, uma vez que a descoberta de um padrão é uma poderosa estratégia de resolução de problemas. Podemos dizer que a resolução de problemas que recorra ao trabalho investigativo é um modo promissor de exploração da álgebra, sobretudo quando são utilizados problemas significativos para os alunos onde o uso da álgebra é relevante. Segundo Herbert e Brown (1997) a resolução de problemas com padrões é um processo investigativo que envolve três fases, a primeira é procura de padrões, a segunda o reconhecimento do padrão e a terceira a sua generalização. Na procura de padrões é extraída a informação relevante, no reconhecimento do padrão é feita a análise dos aspetos matemáticos e na última é feita a interpretação e aplicação do que se aprendeu. Relativamente à generalização, a dificuldade em usar problemas no ensino está relacionada com a sua grande carga cognitiva. Os alunos sentem dificuldade em passar da observação de um padrão para a elaboração de uma expressão que represente a generalização observada. Radford (2006) sugere que, no processo de generalização os alunos passam por uma experiência de decisão, de decidir sobre coisas como o que permanece na mesma e o que foi alterado, o que deve ser enfatizado e o que deve ser ignorado.

A generalização a par da demonstração é outra faceta do raciocínio matemático. Para Vale & Pimentel (2004), as investigações matemáticas proporcionam experiências de excecional riqueza para o pensamento, nomeadamente a descoberta de padrões, a elaboração, teste, refutação ou prova de conjeturas e o estabelecimento de generalizações. Estes autores apresentam três fases relativas às investigações matemáticas, indutiva, dedutiva e criativa. Na fase indutiva prevê-se uma exploração inicial, de modo a tomar contacto com a proposta e a ter uma ideia precisa sobre a questão central. De seguida é feita uma sistematização e organização dos dados com vista ao seu relacionamento, levando à procura de um padrão ou regularidade nesses dados. Por último é feita a testagem do padrão em mais dados e a formulação de uma conjetura. Na fase dedutiva prevê-se a argumentação com vista à justificação da conjetura feita e a demonstração dessa conjetura. Na fase criativa prevê-se a procura de extensões da questão em estudo.

Estudos recentemente realizados nesta área com alunos sem conhecimentos formais de álgebra no âmbito da resolução de problemas com generalização de padrões mostram que existem melhorias significativas no desempenho dos alunos.

Amit and Neria (2008) realizaram a sua investigação com alunos de idades compreendidas entre os onze e os treze anos, membros clube de matemática, “Kidumatica”, uma atividade extracurricular: *Rising to the challenge: using generalization in pattern problems to* *unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students*. Neste trabalho usaram a generalização de problemas com padrões para descobrir as habilidades algébricas do talento pré-álgebra dos alunos. As principais fontes de dados foram as soluções dos alunos a três tarefas que tinham de resolver e explicar as soluções. Este estudo mostrou que quando os alunos são confrontados com tarefas de padrões que evocam a generalização, eles exibem altas habilidades matemáticas. Eles parecem competentes na realização de generalizações de padrões complexos e em encontrar métodos recursivos para generalizações pontuais e métodos funcionais para generalizações globais. Os problemas com padrões lineares e particularmente não lineares incentivam a generalização e exigem que os alunos construam sobre o seu próprio conhecimento. Assim, eles são uma porta de entrada para novos conhecimentos, neste caso, o conhecimento algébrico. Os resultados deste estudo sugerem que a generalização via problemas com padrões pode ser um instrumento valioso, para o desenvolvimento dos alunos revelando as habilidades intuitivas algébricas de pré-álgebra dos alunos, antes de sua instrução formal sobre o tópico. As exigências cognitivas dos problemas com padrões levam os alunos a inventar ferramentas e estratégias necessárias para as resolver e comunicar as suas soluções aos outros. Em conclusão, este estudo confirma a ideia já existente que as generalizações têm potencial matemático e são eficazes na capacitação em matemática.

Branco (2008) no seu estudo com alunos do 7.º ano de escolaridade, no âmbito da unidade de ensino sobre "equações" inclui uma sequência de tarefas relativas ao estudo de padrões e regularidades e de equações, com carácter problemático, exploratório e investigativo. Com este estudo procurou compreender de que modo a unidade de ensino para o 7.º ano de escolaridade, baseada no estudo de padrões e regularidades, contribui para o desenvolvimento e a mobilização do pensamento algébrico e, em particular, para a compreensão das variáveis e equações. Neste sentido, identificou três questões: (i) Que estratégias adotam os alunos para descrever padrões e regularidades e para resolver problemas? (ii) Que compreensão da linguagem algébrica revelam neste ano de escolaridade? (iii) Que evolução revelam os alunos relativamente às estratégias de generalização e de resolução de problemas e à sua compreensão da linguagem algébrica, após a lecionação da unidade de ensino baseada no estudo de padrões e regularidades? Verificou que esta abordagem inicial promoveu a compreensão da letra em representação de um número e que os alunos. Tendo por base as propriedades das figuras, decompõem-nas assinalando o que é invariante e o que varia de acordo com a ordem, conseguindo, assim, elaborar expressões algébricas que traduzem essa generalização. Na resolução de problemas verificou duas situações. A primeira é que quando os alunos conseguiam resolver os problemas usando estratégias aritméticas, de seguida eram capazes de os representar por uma equação e resolvê-la, estabelecendo uma correspondência entre as operações aritméticas e as operações relativas à resolução formal dessa equação. A segunda é que quando as características do problema tornavam difícil a adoção de estratégias aritméticas de resolução, os alunos sentiram muitas dificuldades em representar o problema por meio de uma equação. Quando o faziam com sucesso, facilmente adotavam estratégias corretas para a sua resolução e encontravam a solução. Constatou ainda que estes demonstravam não só dificuldade mas também alguma resistência em usar equações na resolução de problemas por se tratar de um processo mais formal. Em suma, o estudo de padrões e regularidades contribuiu para a compreensão da linguagem algébrica pelos alunos, que se refletiu no trabalho com equações.

Santos (2008) também realizou um estudo sobre a generalização de padrões numa turma do 5.º ano de escolaridade baseando-se em dois estudos de caso. Este estudo teve como objetivo perceber como evoluem os alunos relativamente à capacidade de efetuarem generalizações e à seleção de estratégias adequadas à generalização de padrões, e ainda perceber o que contribuiu para o desenvolvimento de processos de generalização de padrões. Este trabalho incidiu num conjunto de tarefas de natureza exploratória e investigativa, que integram padrões de cunho numérico, geométrico ou pictórico envolvendo processos de raciocínio matemático.

Ao longo da proposta pedagógica os dois alunos estudados foram adquirindo uma maior flexibilidade ao nível do pensamento algébrico, uma vez que as relações estabelecidas adquiriram um caráter mais seletivo, isto é, conseguiam abandonar determinadas relações em favorecimento de outras que não os conduziam a uma generalização. Nas tarefas finais, apoiados na flexibilidade que desenvolveram, direcionaram a sua atenção para as características dos padrões que os ajudavam a generalizar. Gradualmente foram adotando estratégias próprias e conjugando diferentes estratégias para efetuarem generalizações. Efetuaram raciocínios inversos e identificaram sem dificuldades relações funcionais. Conseguiram generalizar padrões lineares descrevendo em termos gerais as propriedades das figuras, estabelecendo relações matemáticas, representando-as através de expressões algébricas com significado e expressaram as variáveis através de abreviaturas ou símbolos. No final da proposta pedagógica, independentemente de se tratar de uma generalização próxima ou distante, ambos os alunos adotaram estratégias explícitas, ou seja, procuravam estabelecer uma relação direta entre a variável dependente e independente. Surgiram estratégias próprias, intencionais, direcionadas e formais. Com este trabalho assistiu-se a um desenvolvimento na escolha de estratégias para se efetuarem generalizações.

Barbosa (2009) realizou um estudo com a finalidade de analisar as dificuldades e as estratégias apresentadas por duas turmas do 6.º ano de escolaridade, na resolução de problemas que envolvem a procura de padrões e, em simultâneo, o papel desempenhado pela visualização no seu raciocínio. As tarefas utilizadas no estudo requerem a generalização de padrões e como alunos desta faixa etária não têm acesso a um ensino formal da álgebra, foram ainda estudadas as estratégias de resolução por eles utilizadas bem como as formas de representação.

A intervenção centrou-se na exploração de tarefas, com enfoque na descoberta de padrões em contextos visuais, seguida de momentos de discussão em grande grupo, onde os alunos apresentavam as estratégias de generalização utilizadas e debatiam estratégias alternativas. Os resultados decorrentes deste trabalho indicam que contribuiu para uma melhoria do seu desempenho, ao nível da generalização. No âmbito do prolongamento de sequências, melhoraram o seu desempenho no que refere à continuação de padrões de crescimento, embora revelassem maior sucesso com os de repetição.

2.4. A generalização na resolução de problemas com padrões

O processo de generalizar está diretamente relacionado com o reconhecimento de padrões, tentando expressar de forma verbal ou simbólica as propriedades comuns a várias situações. O principal objetivo das tarefas de generalização nos primeiros anos de escolaridade é ajudar os alunos a desenvolver a capacidade de generalizar a partir de casos particulares, expressando a generalização por métodos que tenham significado para eles e que sejam válidos do ponto de vista matemático. Para Radford (2006) a generalização é um instrumento didático que não pode contornar a problemática da validação, sendo fundamental que os alunos formulem explicações que fundamentem a validade das suas generalizações.

Optou-se por neste trabalho fazer uma abordagem à temática da generalização ainda que breve uma vez que as categorias de análise utilizadas são adaptadas do trabalho de Barbosa (2009).

Stacey (1989) tendo por base a ordem de grandeza do termo da sequência e as estratégias que estão implicadas na sua descoberta, faz a distinção entre generalização próxima e distante. Quando é possível determinar, de forma rápida e eficaz, um termo da sequência recorrendo a desenhos ou ao método recursivo, a generalização diz-se próxima. Se, pelo contrário, dificilmente as abordagens descritas anteriormente permitem o cálculo de um dado termo da sequência, implicando a compreensão e descoberta de uma regra geral, a generalização em causa é distante.

Têm sido desenvolvidos vários estudos com o intuito de analisar e desenvolver as estratégias evidenciadas pelos alunos na resolução de problemas com padrões. Estes estudos variam nos tipos de padrão (numérico, visual, crescimento, entre outros) e envolvem participantes diferentes, desde alunos dos níveis mais elementares a professores em formação. Stacey (1989) focou a sua investigação na generalização de padrões lineares, em diferentes contextos, com alunos de idades compreendidas entre os nove e os treze anos, e classificou as abordagens por eles utilizadas, incluindo aquelas que conduziram a respostas incorretas. Analisando as estratégias aplicadas pelos alunos, organizou-as em quatro categorias: *contagem*, *diferença*, *termo unidade* e *linear*. Na *contagem*, os alunos totalizavam o número de elementos de um desenho correspondente ao termo da sequência solicitada. A estratégia *diferença* envolvia a utilização de múltiplos da diferença entre termos consecutivos. A estratégia *termo unidade* consistia na utilização de um novo valor, múltiplo de um valor conhecido da sequência, assumindo implicitamente que o problema representaria uma situação de proporcionalidade direta. Nesta abordagem os alunos fixavam uma dada figura da sequência e consideravam múltiplos do número total de elementos dessa figura. A estratégia *linear* correspondia à utilização de um modelo linear para encontrar a solução, ou seja, uma expressão polinomial do 1.º grau. Neste caso os alunos revelaram compreender a necessidade de utilizar as operações adição e multiplicação, bem como a ordem pela qual deveriam ser aplicadas. Este estudo de Stacey (1989), e em particular a categorização que dele surgiu, serviu de base a outras investigações cujo enfoque se situou no estudo das estratégias de generalização utilizadas pelos alunos. Lannin, Barker e Townsend (2006), tendo por base as estratégias aplicadas por alunos do 5.º ano de escolaridade, na generalização de problemas contextualizados também identificaram quatro categorias de estratégias: *recursiva*, *partição*, *termo unidade* e *explícita*. Sempre que o aluno descreve uma relação que ocorre entre valores consecutivos da variável independente, está a utilizar um raciocínio de tipo *recursivo*, estratégia muito frequente na resolução de problemas com padrões. Estes autores identificaram, no trabalho dos alunos, uma forma mais expedita de utilização do raciocínio recursivo, a estratégia partição. Neste caso, selecionam um termo conhecido da sequência e acrescentam múltiplos da diferença entre termos consecutivos até obter o elemento pretendido. À semelhança do que sucedeu no estudo desenvolvido por Stacey (1989), também foi identificada por estes investigadores a estratégia *termo unidade*. Os alunos utilizam um termo da sequência como unidade de forma a calcular um determinado elemento, considerando múltiplos dessa unidade. Acrescentam que, quando as unidades não são elementos disjuntos, os alunos devem proceder a um ajuste do resultado, já que não se trata de uma situação de proporcionalidade direta. Por último, a utilização da estratégia *explícita* implica a construção de uma regra que permite efetuar o cálculo imediato de qualquer valor da variável dependente, conhecida a variável independente. Destaca-se ainda, em alguns estudos a utilização da *tentativa e erro* no estabelecimento da generalização. Trata-se de uma abordagem muito encorajada na resolução de problemas, principalmente em contextos numéricos. No entanto, no campo da álgebra, propor uma regra sem saber a razão por que funciona, pode por vezes resultar em generalizações incorretas. (Becker & Rivera, 2005)

No que refere à frequência de utilização das estratégias de generalização, a literatura refere que os alunos apresentam uma tendência para generalizar recursivamente, em vez de procurarem estabelecer uma relação entre as variáveis dependente e independente (Orton e Orton, 1999). English e Warren (1995) reforçam que, uma vez tendo utilizado uma estratégia recursiva na tentativa de generalizar, os alunos apresentam geralmente relutância em descobrir uma relação funcional. Lannin, Barker e Townsend (2006) identificaram um conjunto de fatores que podem influenciar de forma significativa a utilização das estratégias de generalização. Propuseram três categorias alargadas que, na sua opinião, permitem prever a seleção de estratégias feita pelos alunos: fatores sociais, resultantes das interações do aluno com os seus pares e com o professor; fatores cognitivos, associados às estruturas mentais que o aluno desenvolveu e fatores associados à estrutura da tarefa. Um outro fator determinante é a tarefa proposta que inclui a sua estrutura matemática (por exemplo, padrão linear crescente ou padrão linear decrescente), os valores atribuídos à variável independente (por exemplo, valores próximos, distantes ou múltiplos de valores conhecidos) e a capacidade de visualizar. Em geral, Lannin, Barker e Townsend (2006) concluíram que, quando os valores de partida são próximos, os alunos tendem a utilizar regras recursivas, independentemente do tipo de padrão e da componente visual da tarefa. O raciocínio recursivo tem limitações, especialmente nas questões de generalização distante.

Assim, como categorias de análise das estratégias de generalização optou-se pelas que constam na tabela seguinte (*Tabela 1.)*.

Tabela 1. Categorias de análise das estratégias de generalização

Categorias de análise das estratégias de generalização
(Adaptado de Barbosa 2009)

Categorias de análise		Descrição
Estratégias de Generalização	Termo unidade	Considera um termo da sequência como unidade e usa múltiplos dessa unidade.
	Diferença	Continua a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.
	Explícita	Descobre uma regra, com base no contexto do problema, que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente correspondente.
	Tentativa e erro	Adivinha uma regra fazendo sucessivas tentativas com diferentes valores.
	Recursiva	Descreve uma relação que ocorre entre valores consecutivos da variável independente.
Tipo de generalização	Generalização próxima	Quando é possível determinar rapidamente um termo da sequência recursivamente ou usando desenhos.
	Generalização distante	Implica a descoberta de uma regra geral.

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

Neste capítulo são apresentadas as opções metodológicas efetuadas e a sua justificação. No intuito de alcançar o objetivo desta investigação procuramos descrever e justificar, a importância da abordagem de natureza qualitativa e quantitativa deste estudo. De seguida são descritas as opções metodológicas utilizadas: o contexto geral do estudo, os critérios de seleção dos casos que nele participaram, as fases da intervenção pedagógica, os instrumentos de recolha de dados e da sua análise bem como os critérios de qualidade.

3.1. Opções e procedimentos de carácter metodológico

O presente estudo procura compreender as estratégias de generalização utilizadas pelos alunos e as dificuldades que ocorrem aquando da resolução de problemas com padrões exclusivamente numéricos, bem como se existe alguma melhoria no seu desempenho. Mais especificamente pretende-se dar resposta às seguintes questões:

- Que estratégias de generalização é possível identificar, na resolução de problemas com padrões exclusivamente numéricos, no trabalho escrito realizado pelos alunos?

- Que dificuldades manifestam os alunos na resolução de problemas ao longo das tarefas?

- Existe alguma melhoria no desempenho dos alunos após o trabalho com tarefas de resolução de problemas com padrões exclusivamente numéricos?

Este estudo surgiu de uma preocupação em aprofundar os conhecimentos relativamente à problemática já identificada. A sua realização foi acompanhada de uma reflexão sobre a prática e como esta poderá ser melhorada. Para Oliveira e Serrazina (2002), a reflexão proporciona aos professores oportunidades para o seu desenvolvimento, tornando-os profissionais mais responsáveis, melhores e mais conscientes.

A metodologia é o conjunto dos procedimentos e instruções de trabalho, desde os procedimentos teóricos à implementação dos diagnósticos técnicos, que o investigador adota de modo a conhecer e dar a conhecer a realidade (Quivy & Campenhoudt, 2003). Num estudo a escolha da metodologia é regulada por vários aspetos. Para Creswell (2003) este processo abrange três questões centrais: (I) Que paradigma é seguido pelo investigador?; (II) Quais as estratégias de investigação mais adequadas?; e (III) Que procedimentos de recolha e análise de dados vão ser utilizados?

A integração de dados qualitativos e quantitativos no mesmo estudo podem enriquecer os resultados da investigação de uma forma que não seria praticável, utilizando apenas uma das metodologias (Tashakkori & Teddlie, 2003). Segundo Barbosa (2009) as abordagens quantitativa e qualitativa oferecem perspetivas e interpretações diferentes da realidade, dando assim resposta a questões de natureza distinta, o que permite a investigação de múltiplos fenómenos dentro do mesmo estudo. Tendo em conta os objetivos enunciados e a sua natureza, nesta investigação adotou-se uma abordagem do tipo quantitativa, sendo que também se considerou pertinente fazer uma abordagem qualitativa. Uma abordagem meramente quantitativa apresenta limitações, pelo facto de descurar características associadas a fenómenos humanos. A vertente qualitativa surge para uma melhor clarificação dos dados obtidos, utilizando métodos que permitam analisar os processos de pensamento e as dificuldades apresentadas pelos alunos.

Uma investigação desta natureza não procura generalizar dos resultados obtidos, mas sim apresentar um conjunto de informação que permita um conhecimento detalhado das estratégias usadas pelos alunos em estudo na generalização e na resolução de problemas, das dificuldades que manifestam com o intuito de melhorar o ensino e a aprendizagem deste tema.

Dado o detalhe pretendido nos estudos de natureza qualitativa, as amostras selecionadas são de pequena dimensão e a sua escolha assenta em critérios específicos, com o objetivo de obter informação aprofundada acerca do problema em estudo (Bogdan & Biklen, 1994). Assim, neste estudo os alunos foram observados pela investigadora no ambiente de sala de aula que lhe é habitual, tendo esta estado presente em todos os momentos, observando as ações no seu contexto natural.

A análise de dados é considerada um processo de busca e de organização sistemática de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, de modo que o investigador compreenda da melhor forma os materiais recolhidos e possa apresentar aos outros aquilo que encontrou (Bogdan & Biklen, 1994).

O estudo seguiu uma metodologia de investigação de natureza mais quantitativa tendo sido considerados dados provenientes de instrumentos quantitativos, como o pré-teste e o pós-teste. Foram ainda recolhidos dados qualitativos, nomeadamente, as transcrições das gravações e as respostas produzidas pelos alunos às tarefas propostas. Este tipo de dados permite que os resultados da investigação contenham os diálogos com os alunos, bem como as suas respostas escritas, de modo a serem interpretadas tal como foram produzidas. A investigadora procura conhecer não só os resultados mas também as dificuldades e as estratégias utilizadas pelos alunos.

3.1.1. Participantes e escolha dos casos

Participaram neste estudo durante dois meses, duas turmas do sexto ano de um Agrupamento de Escolas de Guimarães.

O estudo decorreu em três fases, sendo que na primeira foi administrado o pré- teste a duas turmas, a turma de controlo e a turma experimental; a segunda etapa prolongou-se por 5 semanas, envolveu a turma experimental, onde os alunos duas vezes por semana resolveram duas tarefas em grupo. Num terceiro momento os alunos de ambas as turmas realizaram o pós-teste, a fim de verificar se houve mudanças nos resultados.

As sessões de realização das tarefas tiveram um tempo de duração que variou entre os 10 e os 15 minutos, tendo um grupo sido gravado em áudio. Estas gravações foram transcritas para posterior análise.

O trabalho em pequenos grupos é uma metodologia consistente com os objetivos associados à resolução de problemas, suscetível de ajudar a criar um ambiente de aprendizagem que agrada aos alunos. Brocardo (2001) defende como adequada a opção de que a exploração de tarefas de investigação assenta principalmente numa organização de trabalho em pequenos grupos.

Criar atitudes e os hábitos necessários requer que se vivam essas situações, uma vez que apresentar, ouvir, criticar argumentos, explicar raciocínios e pedir explicações são aspetos fulcrais da aprendizagem da matemática.“Mais do que a trabalhar num grupo, aprende-se a trabalhar em grupo” (Abrantes, 1997).

Atendendo a tudo isto optou-se por dividir os alunos em grupos de trabalho formando 5 grupos, 3 grupos de cinco elementos e 2 de quatro. Atendendo à heterogeneidade existente para a realização deste estudo, houve a necessidade de se selecionar para cada grupo alunos com características diferentes, tendo em consideração os seguintes critérios: (a) um aluno com gosto pela matemática independentemente dos resultados obtidos à disciplina; (b) um bom aluno a matemática; (c) um aluno considerado como responsável, organizado e com métodos de trabalho; (d) um elemento que não goste de matemática; (e) os restantes três elementos escolheram o grupo que queriam integrar. Optou-se por gravar em áudio o grupo constituído pelo: Dinis, Mafalda, Pedro, Duarte e Afonso pela razoável capacidade de expressão oral e escrita, uma vez que se pretendia conhecer e compreender a forma como pensavam e as dificuldades que demonstraram ao longo da realização das tarefas. Além disso evidenciaram grande predisposição para participar no estudo. Neste trabalho por questões éticas garantiu-se o anonimato dos participantes, sendo-lhes atribuídos nomes fictícios.

3.1.2. Recolha de dados

Neste estudo existe uma vertente qualitativa e uma vertente de natureza quantitativa, associada à avaliação do impacto da experiência de ensino na capacidade dos alunos generalizarem. Estes dados foram recolhidos através da aplicação de um teste, construído especialmente para este estudo, e que incide na exploração de sequências e problemas subordinados à temática dos padrões numéricos.

Estudaram-se os processos de generalização utilizados pelos alunos em tarefas de resolução de problemas com padrões numéricos. Enquanto os alunos resolviam os problemas, foi-lhes pedido que pensassem em voz alta, uma vez que durante estas ocasiões foram feitas gravações áudio de um grupo de trabalho para detetar as dificuldades manifestadas.

Após a exploração de cada uma das tarefas propostas ao longo da experiência de ensino procedeu-se à recolha das respetivas folhas de resolução, assim como à transcrição da gravação. As gravações foram essenciais na identificação de alguns processos cognitivos dos participantes, permitindo analisar o tipo de estratégias e detetar algumas dificuldades. Igualmente importante para a recolha de dados foi a realização do pré-teste e do pós-teste. Estas duas implementações do teste permitiram reunir dados referentes ao desempenho dos alunos em situações de generalização de padrões.

Salienta-se que a investigadora acompanhou as turmas participantes ao longo do trabalho de investigação, tendo observado todas as aulas. Esta estratégia permitiu desenvolver um conhecimento mais detalhado das características do contexto e dos participantes.

As professoras das turmas cederam gentilmente registos e informações relacionados com o percurso escolar dos alunos.

3.1.3 A escolha das tarefas

Para Lester (1978) uma tarefa não pode ser considerada um problema se a sua resolução não for desejada pelo individuo ou pelo grupo. O mesmo problema pode requerer esforços significativos a alguns resolvedores, enquanto para outros pode limitar-se a ser um mero exercício de rotina, bastando para a sua resolução recordar factos já aprendidos. Assim na escolha das tarefas teve-se em atenção vários fatores: o público-alvo, o conteúdo matemático e a estrutura das tarefas.

O critério que ordenou a sequência das tarefas relacionou-se com os conteúdos matemáticos presentes em cada tarefa, para que os alunos tivessem adquirido os pré-requisitos necessários à sua resolução, assim como o grau de dificuldade que foi aumentando.

A realização das tarefas decorreu nas aulas de Matemática e de Estudo Acompanhado.

3.1.4. Teste de avaliação de desempenho

Procedeu-se à elaboração de um teste de avaliação de desempenho (Anexo I) com a finalidade de avaliar os alunos na exploração e generalização de padrões numéricos. Este teste é constituído por questões de natureza algébrica, nomeadamente um conjunto de sequências que devem ser continuadas por mais dois termos, seguidas de dois problemas que incluem fazer generalização próxima e distante.

Atendendo aos objetivos do estudo e ao nível de ensino dos alunos nele envolvidos optou-se por valorizar neste teste a identificação de padrões em situações de generalização próxima e distante, tanto por intermédio da continuação de sequências como da resolução de problemas.

O teste foi submetido a uma revisão efetuada por uma equipa constituída por três professores do 2.º Ciclo de Matemática e Ciências da Natureza e um professor de Matemática do Ensino Superior. Este painel analisou parâmetros como: a pertinência do conteúdo para os objetivos da avaliação; a adequação da linguagem e das propostas ao nível de ensino; e o tempo de resolução estipulado. Nesta fase procedeu-se a ajustes no teste tendo em consideração as sugestões apresentadas pelo painel consultado.

A pilotagem do teste foi efetuada com uma amostra de 24 alunos, de uma escola do Concelho de Famalicão, numa turma do 6.º ano de escolaridade.

A avaliação das respostas foi feita através de uma escala holística focada como alguns autores propõem, na qual se estabelecem níveis de qualidade de acordo com tipos genéricos de respostas (Ponte *et al.*, 2000). Essas escalas, mesmo quando recorrem a uma classificação numérica, têm um caráter claramente qualitativo. De qualquer modo, esse tipo de escala chama a atenção para a importância dos dados, a compreensão, a escolha e desenvolvimento de uma estratégia e a sua explicação, como se pretende neste trabalho de investigação. Procedeu-se à avaliação das respostas adaptada ao conteúdo deste teste (anexo II). Em cada questão a pontuação varia entre 0 e 3 pontos, dependendo do nível de desempenho dos alunos.

A fiabilidade do teste foi medida através do Alpha de Cronbach tendo sido obtido 0,782 daí que o teste tenha sido modificado através da eliminação das seis primeiras questões, sequências numéricas para obtenção de um coeficiente de Cronbach mais elevado, passando assim de 0,782 para 0,845. Este procedimento é, em geral, o mais adequado para estimar a consistência interna dos itens de um instrumento de avaliação, quando não se trata da obtenção de resposta certa ou errada (McMillan & Schumacher, 2001). A escala para o coeficiente de fiabilidade varia entre 0,00 e 0,99. Neste caso o valor obtido foi 0,845 o que representa um bom indicador de fiabilidade, tendo em conta que 0,70 é um nível aceitável (Fraenkel e Wallen, 1990). O tratamento estatístico que conduziu à obtenção deste valor foi efetuado com o programa *SPSS* (Statistical Package for the Social Sciences) para *Windows*, versão 19.0.

O teste de avaliação de desempenho foi depois aplicado à turma de controlo e à turma experimental nos dias 10 e 11 de janeiro de 2012 respetivamente. No final da experiência de ensino, em 28 e 29 de fevereiro voltou a ser implementado nas turmas, com o objetivo de analisar o impacto da experiência no desempenho dos alunos, ao nível da resolução de problemas com padrões.

3.1.5. Fases do estudo e procedimentos

O estudo decorreu entre outubro de 2011 e Setembro de 2012, tendo nele participado duas turmas do 6.º ano de escolaridade. O estudo decorreu em três fases, cuja calendarização se encontra sintetizada na *Tabela 2*. O acesso à escola e às turmas participantes no estudo foi também formalizado através dos pedidos de autorização (anexos IV e V). Antes de se passar à fase seguinte, a aplicação das tarefas foram definidas as datas mais adequadas para a sua implementação juntamente com as professoras de cada uma das turmas.

Tabela 2. Calendarização do Estudo

Calendarização do Estudo

Datas	Fases do Estudo	Procedimentos
outubro de 2011 a dezembro de 2011	Preparação do estudo	Revisão de literatura; Definição dos objetivos fundamentais;
	Escolha dos instrumentos	Elaboração do teste; Seleção das tarefas e discussão da ordem de aplicação; Pilotagem do teste
	Acesso à escolas e às turmas	Pedido de autorização ao órgão de gestão da Escola envolvida no estudo; Primeiro contacto com as turmas e apresentação do estudo aos alunos; Pedido de autorização aos Encarregados de Educação;
janeiro de 2012 a fevereiro de 2012	Primeira avaliação de desempenho	Aplicação do pré-teste;
	Escolha dos grupos de trabalho	Formação de grupos na turma experimental para realização das tarefas;
	Continuação da experiência de ensino	Aplicação das 10 tarefas e gravação de um grupo em áudio; Análise das respostas dos alunos nas tarefas; Transcrição e análise das gravações; Aplicação do pós-teste;
março de 2012 a abril de 2012	Estudo do impacto da experiência de ensino	Comparação dos resultados obtidos no pré-teste e no pós-teste;

3.1.6. Análise dos dados

A recolha de dados teve início com a implementação do teste, em 10 e 11 de janeiro de 2012, na turma de controlo e na turma experimental respetivamente.

A análise dos dados foi concretizada após a implementação do pós-teste, em março e abril de 2012. Os testes foram avaliados com base na escala construída e os resultados, relativos a cada um dos alunos das três turmas, foram submetidos e tratados no programa *SPSS*. Após a redução dos dados, procedeu-se a uma análise estatística que contemplou a construção de tabelas com as médias das classificações por questão, bem como os valores máximos e mínimos atingidos, na turma experimental e de controlo. Esta primeira abordagem deu lugar a um conjunto de dados de natureza quantitativa, baseados em indicadores de desempenho, relacionados com a resolução de problemas com padrões numéricos.

Através dos dados das tarefas foi possível analisar as estratégias utilizadas pelos alunos, tendo como fio condutor os objetivos do estudo e a necessidade de compreender o modo como os alunos estruturaram o seu raciocínio e relaciona-las com o tipo de estratégias de generalização utilizadas e a sua associação à generalização próxima e distante.

Com as gravações em áudio foi possível identificar algumas dificuldades. A informação recolhida nas tarefas deu lugar a um primeiro refinamento das categorias associadas às estratégias de generalização, que tinham surgido da revisão da literatura.

A recolha de dados terminou com a segunda implementação do teste, em 28 e 29 de fevereiro 2012 na turma de controlo e na turma experimental respetivamente.

CAPÍTULO IV

TAREFAS

Neste capítulo é feita uma apresentação das tarefas onde é descrita a estrutura, os objetivos e a forma como foram realizadas. De seguida procede-se a uma caracterização detalhada do trabalho desenvolvido pelos alunos ao longo da experiência de ensino. Para cada uma das tarefas é feita uma abordagem às estratégias utilizadas bem como das dificuldades demonstradas pelos alunos. Por último é feita uma síntese das estratégias utilizadas e das dificuldades manifestadas pelos alunos ao longo da resolução das tarefas.

4.1. Caraterização e exploração das tarefas

O estudo de padrões numéricos é recorrente em todas as tarefas. Envolvem padrões de tipo linear e não linear variando apenas a estrutura matemática, os conteúdos e os objetivos específicos. Associado a estes conteúdos e a todas as tarefas está o desenvolvimento do cálculo mental e do raciocínio e ainda a oportunidade de realização de trabalho de grupo. Ao valorizar tarefas de natureza investigativa, que admitam várias estratégias que conduzam à solução, estamos a desenvolver nos alunos autonomia de aprendizagem e de raciocínio. Reconhece-se que aquilo que os alunos aprendem relaciona-se diretamente com a forma como aprendem. É importante que cada aluno explique aos seus colegas o modo como resolveu o problema, que compare com outras formas de resolução e também reflita sobre semelhanças e diferenças entre os vários procedimentos. As práticas de sala de aula que contemplem estes aspetos podem ajudar os alunos a raciocinar matematicamente e consequentemente a progredir nos diferentes níveis de raciocínio matemático. Assim, é importante criar um ambiente onde os alunos tenham oportunidade para que se apropriem de estratégias e procedimentos de outros que foram considerados mais eficazes, de modo a permitir que o pensamento de um se possa transformar num modelo para pensar dos restantes (Fosnot & Dolk, 2001). Procuramos proporcionar experiências de aprendizagem significativas, dando ênfase ao desenvolvimento do pensamento algébrico, onde os alunos têm oportunidade de desenvolver as suas próprias estratégias e um conhecimento próprio. Esta perspetiva é igualmente defendida pelo NCTM (2007) ao considerar que os alunos nos primeiros anos devem ser encorajados a desenvolver, registar, explicar e criticar as estratégias e procedimentos de resolução de problemas dos seus colegas, contribuindo deste modo, para a discussão da eficácia de diversas estratégias e procedimentos e a possibilidade de generalização.

Todas as tarefas (anexo III) contemplavam um conjunto de três questões, designadas por a), b) e c), em que na questão a) era pedido o termo seguinte da sequência; na questão b) teriam de encontrar um termo mais distante; na questão c) era pedido que explicassem o raciocínio que lhes permitiu continuar a sequência. Com estas duas últimas questões pretendeu-se perceber qual era a capacidade dos alunos para generalizarem.

Antes da realização da primeira tarefa foi explicado à turma todos os procedimentos a seguir, tendo sido exemplificado com um padrão numérico. Foram ainda alertados que posteriormente teriam de trabalhar em grupo para resolverem as tarefas propostas sem qualquer apoio por parte da professora ou da investigadora.

Nas respostas dos alunos foram analisadas através dos registos escritos e das gravações em áudio, as estratégias e as dificuldades através dos procedimentos que utilizaram e da argumentação com os colegas do grupo. Na presente investigação foram gravadas em áudio e observadas dez aulas, correspondentes às dez tarefas propostas.

De seguida é feita uma análise das respostas às tarefas para averiguar as estratégias de generalização utilizadas pelos alunos ao longo da experiência de ensino, tendo como base Barbosa (2009). Através das transcrições feitas das gravações é possível identificar também as dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução dos problemas. Desta forma há um maior rigor na deteção dos aspetos que ocorrem na sala de aula e que nem sempre são visíveis numa investigação, como referem Lüdke e André (1986).

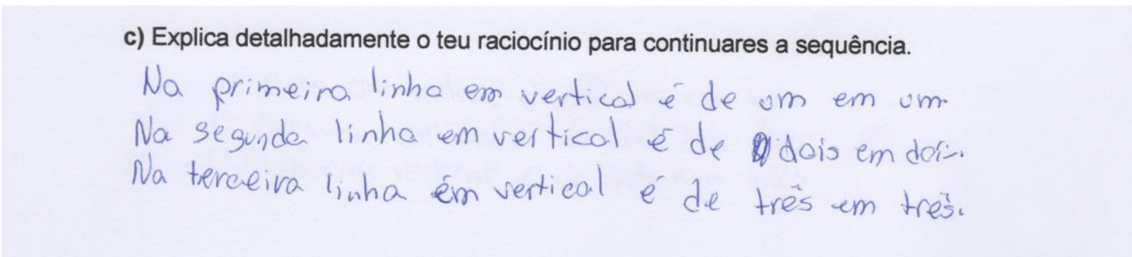
4.1.1. Tarefa 1

A *tarefa 1* (Figura *1.*) consistia em proporcionar aos alunos um primeiro contacto com a investigação de regularidades tendo subjacente um padrão linear crescente.

Figura 1. Enunciado da tarefa 1

Perante a tarefa todos os grupos optaram por continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos. Embora todos os grupos tenham descoberto rapidamente como continuar a sequência, o grupo 5 cometeu erros de cálculo tendo errado um dos termos.

Com exceção do grupo *5*, a linguagem matemática utilizada revela confusão, entre linha e coluna (figura *2.*), bem como onde devem continuar a sequência. Apesar de na figura *1.* ter reticências no local onde deveria ser continuada todos os grupos discutiram a hipótese de como seria.


c) Explica detalhadamente o teu raciocínio para continuares a sequência.

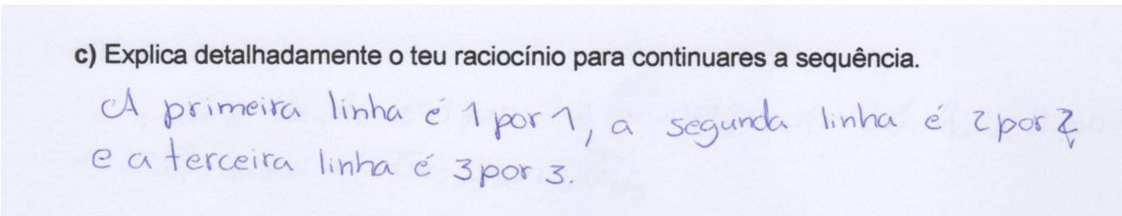
Na primeira linha em vertical é de um em um.
Na segunda linha em vertical é de dois em dois.
Na terceira linha ém vertical é de três em três.

Figura 2. Resolução da questão c) da tarefa 1 - Grupo 3

[...]
Duarte: Até à décima linha, prontos 6, 11 é 4...
Dinis: 5, 6, 7, 8, 9, 10... é sempre pra baixo decerto.
Pedro: Aqui é 10, aqui é 10.
Afonso: Pode ser sempre pra baixo, não sabemos como é!
Duarte: ou para o lado... não sabemos como é que é...
Dinis: Pois é...
Duarte: Ah! Já sei. Deve ser pra baixo.
Pedro: Deve ser pra baixo.
Dinis: 6, 7, 8... 6, 7, 8...
Duarte: É igual, é pra baixo.
Afonso: Escrevemos aqui ou na linha?
Dinis: Espera aí. Escrevemos pra baixo.
[...]

Todos os grupos utilizaram a estratégia da *diferença* para responder à questão a) e b). Esta estratégia foi eficaz para responder à primeira questão, na segunda tornou-se um processo passível de erros, nomeadamente erros de contagem na descoberta do próximo termo da sequência como aconteceu com o grupo 3.

Todos os grupos consideraram o problema fácil, tendo terminado muito antes do tempo previsto mas nenhum grupo fez a descoberta de uma regra explícita na exploração da questão b) apenas chegaram à generalização próxima (figura *3.*). Os alunos identificaram regularidades relativas a esta estrutura tendo assinalado a existência de padrões numéricos em cada coluna, não tendo no entanto relacionado o crescimento da linha com o da coluna.


c) Explica detalhadamente o teu raciocínio para continuares a sequência.

A primeira linha é 1 por 1, a segunda linha é 2 por 2 e a terceira linha é 3 por 3.

Figura 3. Resolução da questão c) da tarefa 1 - Grupo 1

[...]
Dinis: Chiu... Explica detalhadamente o teu raciocínio para continuares a sequência.
Pedro: Agora vamos à 2.
Afonso: Já sei, a primeira linha é 1, 1 por ...1 é 1, *a segunda linha é 2 por 2 e a terceira linha é 3 por 3.
Pedro: *A segunda linha é 2 por 2 e a terceira linha é 3 por 3. (*fala em simultâneo com o Afonso)
Afonso: Sim.
[...]

4.1.2. Tarefa 2

Na *tarefa 2* (figura *4.*) todos os grupos perceberam que analisando os termos consecutivos desta sequência teriam de retirar dois à diferença entre termos consecutivos.

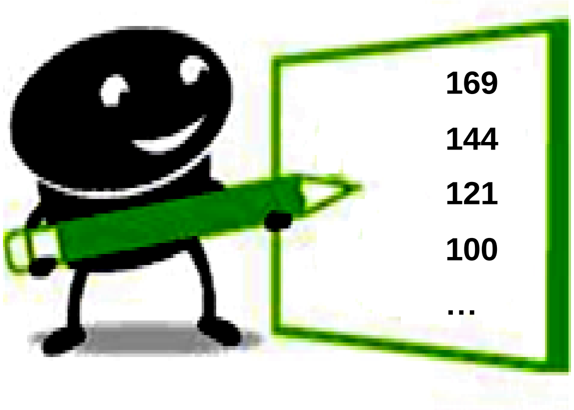


Figura 4. Enunciado da tarefa 2

Este tipo de abordagem implica que os alunos efetuem uma série de cálculos o que apesar de ser uma estratégia que se adequa à resolução de questões de natureza algébrica, constituiu um processo moroso e passivo de erros como aliás se verificou na resposta às questões a) e b) na primeira questão os grupos 1 e 2 cometeram erros de cálculo. Na segunda questão além destes também o grupo 4 obteve um resultado que não era o correto. Todos os grupos utilizaram a estratégia da *diferença* para a primeira e para a segunda questão.

Sendo a segunda tarefa continuaram as dúvidas sobre onde deveriam continuar a sequência. O grupo 1 aplicou mentalmente procedimentos de estimação tendo concluído que se continuassem para baixo encontrariam o zero e posteriormente números negativos o que no seu entender não fazia sentido. Por este motivo optou por continuar a sequência no sentido oposto ao pedido.

[...]
Dinis: - Escreve o décimo termo da sequência.
Afonso: - Eih! Que cena... o décimo...!? Eih...é fácil.
Dinis: É pra baixo?
[...]
Duarte: Dá 31...31 menos 25.
Pedro: Ei...vai dar zero!
Dinis: Claro...

Pedro: Ei! Vai dar zero.
Dinis: Dá menos 6…
Afonso: Então não é.
Duarte: Então está mal.
Afonso: Estamos a fazer mal…
Dinis: Também dá para fazer números negativos.
Afonso: Oh! Faz para cima.
Duarte: Mas não vai dar… só pode ser para cima.
Mafalda: Se pra baixo não dá tem de ser pra cima.
Duarte: Não dá números negativos… tem de ser pra cima, de certeza a sequência vai pra cima vai aumentando.
Dinis: Vai dar zero se fosse para baixo vai dar zero.
Afonso: É melhor, é isso.
[…]

Todos os outros grupos revelaram algumas dificuldades em encontrar o décimo termo. A maioria optou pelo cálculo mental o que se revelou nada fiável uma vez que apenas dois grupos encontraram o décimo termo corretamente. Destes apenas o grupo 5 efetuou os cálculos em coluna (figura *5.*).

A linguagem matemática bem como a capacidade de argumentação continuou a ser um problema. O Pedro não conseguiu argumentar de forma convincente com os colegas o seu raciocínio para continuar a sequência da forma que considerava correta.

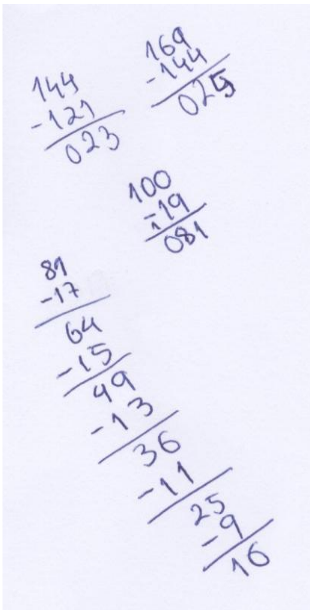


Figura 5. Resolução da questão b) da tarefa 2 - Grupo 5

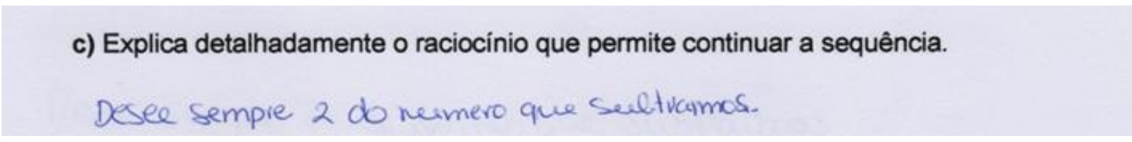
[…]
Afonso: Explica detalhadamente o raciocínio que permite continuar a sequência.
Mafalda: É 21 depois é 23, depois 25.
Duarte: Soma-se 21 depois 25, 23 a seguir 23 e depois 25.

Dinis: É isso.
Pedro: Estais a fazer mal...
Dinis: Soma-se 21 a seguir viiiinte a seguir 23 e depois 25. (Está a ditar para o grupo escrever)
[...]
Duarte: De 100 para 21 depois 21 para 44 é 23.
Pedro: Deve ser sempre a seguir 21, 23, 25, 28 depois sempre a seguir...
[...]
Dinis: Deve ser só como mostra ai.
Pedro: (...) depois 25, 28, depois 28, deve ser...
Dinis: Se não depois também...
[...]
Pedro: E se a sequência for sempre a seguir? É que ela anda de 3 em 3.
Duarte: De 2 em 2.
Dinis: Conferimos três vezes, a sequência vai para cima.
[...]

O Pedro não estava confiante na solução encontrada, revelava insegurança relativamente ao padrão de crescimento aceite pelo grupo mas não foi capaz de impor a sua ideia revelando dificuldades em exprimir e argumentar. O grupo mostrou-se bastante atento procedendo à avaliação da resposta, voltando a ler a questão para verificar que a resposta obedeça às condições iniciais tendo contudo rejeitado a sugestão e optado pela solução aceite pela maioria.

Nenhum grupo fez referência ao facto de que a diferença entre os termos serem números ímpares nem de uma regra que permita continuar a sequência, ficando-se por isso pela generalização próxima (figuras *6.* e *7.*).

Figura 6. Resolução da questão b) da tarefa 2 - Grupo 2


c) Explica detalhadamente o raciocínio que permite continuar a sequência.

Desee sempre 2 do numero que saltvamos.

Figura 7. Resolução da questão c) da tarefa 2 - Grupo 4

Não há ainda lugar a uma demonstração formal mas é possível, de acordo com os seus conhecimentos, generalizar pelo menos que a diferença entre os termos são números ímpares.

4.1.3. Tarefa 3

Na *tarefa 3* (figura *8.*) todos os grupos depreenderam que os números ímpares iam aumentando ao passo que os pares iam diminuindo. À semelhança das tarefas anteriores utilizaram a estratégia da *diferença* para dar resposta à primeira e à segunda questão (figuras *9.* e *10.*) nos minutos iniciais.

Figura 8. Enunciado da tarefa 3

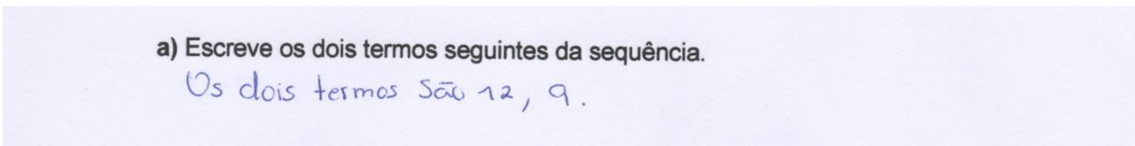

a) Escreve os dois termos seguintes da sequência.
Os dois termos São 12, 9.

Figura 9. Resolução da questão a) da tarefa 3 - Grupo 1

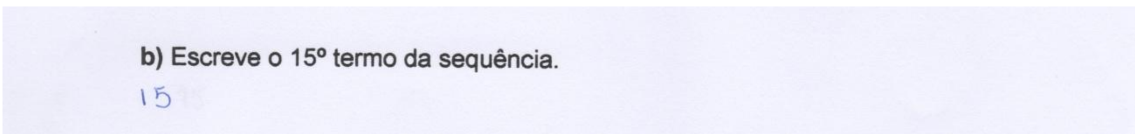

b) Escreve o 15º termo da sequência.
15

Figura 10. Resolução da questão b) da tarefa 3 - Grupo 2

A terceira questão (figura *11.*) pede para explicar o raciocínio que lhes permitiu continuar a sequência e aqui todos demonstraram bastantes dificuldades em explicar acabando por faze-lo de forma semelhante.

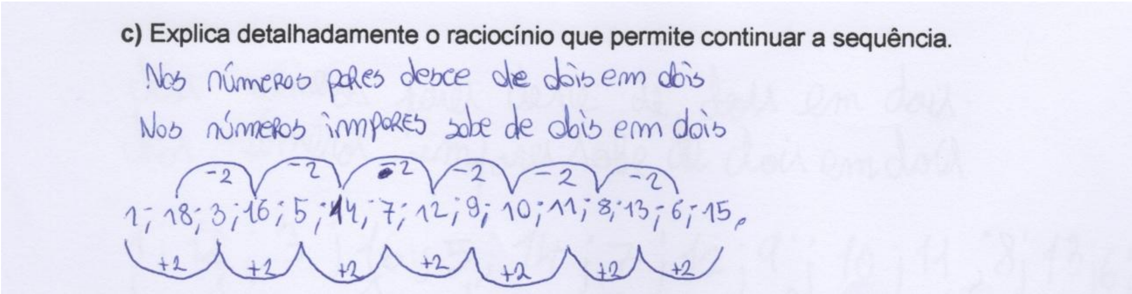


Figura 11. Resolução da questão c) da tarefa 3 - Grupo 3

[...]
Dinis: Mas aqui os números ímpares calham sempre no... seu...* no seu sítio.
Pedro: *No seu sítio (Termina a frase com o Dinis)
[...]
Dinis: Aos pares tiramos 2 aos ímpares acrescentamos dois.
Pedro: Não. Num é nada.
Dinis: Então?
[...]
Dinis: Eu acho que o melhor é escrever assim. Porque os números ímpares calham sempre... Não!
Afonso: No seu sítio.
[...]
Pedro: Aqui vai sempre a descer e aqui vai subindo, prontos.
Afonso: Porque... porque... Oh! Não consigo.
[...]
Dinis: Temos de explicar mas... fica assim um bocado esquisito.
Afonso: Acrescenta-se dois algarismos.
Dinis: Aos números ímpares acrescenta-se dois algarismos, aos números pares.
[...]
Mafalda: Explicamos da maneira mais lógica, mais prática.
[...]

Apesar de ser importante a resolução da tarefa em pequeno grupo, a sua discussão é um dos momentos com mais significado no processo de aprendizagem e nesta tarefa o elemento que até agora não participava na conversa já começou a intervir.

Os alunos mostraram hesitações na estruturação de respostas verbais sugerindo dificuldade no uso da linguagem escrita.

Continuam apenas a fazer generalização próxima mas já conseguiram generalizar algumas regularidades, nomeadamente, as relativas aos números pares que aumentam sempre de dois em dois e aos números ímpares que descem sempre de dois em dois.

4.1.4. Tarefa 4

O padrão inicial da *tarefa 4* (figura *12.*) é constituído por números de 1 a 5, que têm uma disposição bastante específica podendo prolongar-se indefinidamente. Esta tarefa permite aos alunos ter liberdade para explorar as várias regularidades e seguir caminhos bastante distintos.

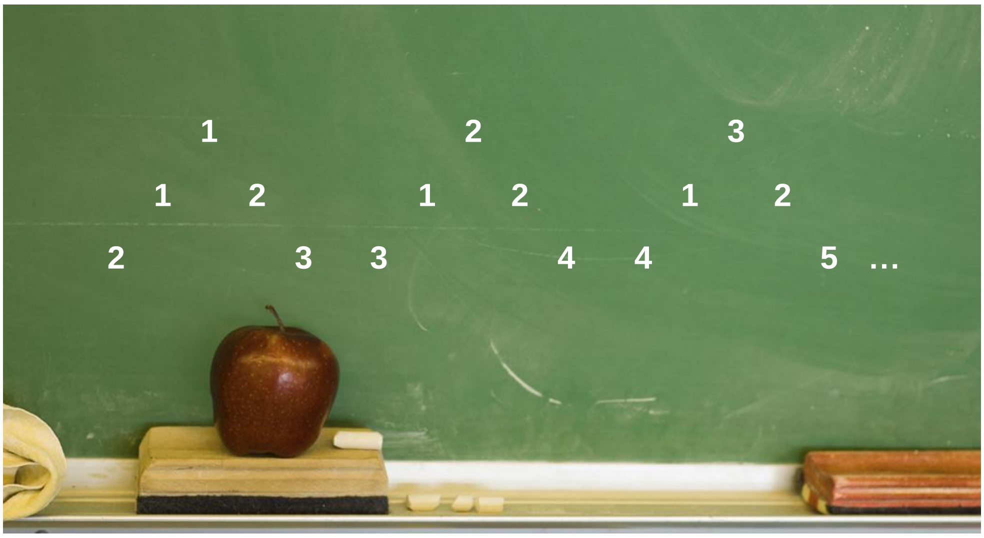


Figura 12. Enunciado da tarefa 4

Os alunos nesta tarefa demonstraram mais empenho, talvez porque todos conseguiram descobrir vários padrões subjacentes às pirâmides e terem a oportunidade de partilhar uma opinião com o grupo sobre como continuar a sequência.

> [...]
> Afonso: O 1 e o 2 no meio... o de cima vai ser 10 porque... aqui assim...
> Dinis: A diferença do de cima pro de baixo de todo é sempre de 1, por isso aqui é 1.
> Pedro: Aqui é 11. Aqui tem que ser 12.
> Mafalda: Sim, é 12 é 12... 12.
> Afonso: Ah! Já percebi qual é a fórmula... tipo o número de cima a contar pra cima aumenta sempre 1 (...)
> Dinis: 1 de diferença.
> Afonso: (...) pra direita.
> Pedro: Tem de ser dois de diferença.
> Afonso: Se reparares tem aqui o 1 é diferença de 1 tem aqui o 2 tem diferença de 2.
> Pedro: Olha aqui uma, 1 mais 1, 2, 4 mais 1, 5, vês?
> Mafalda: Há muitas coisas aqui nestes coisos que eles fazem.
> [...]

Os grupos 2, 3, 4 e 5 perceberam o tipo de crescimento de uma pirâmide para outra tendo utilizado a estratégia *recursiva* para descobrir os termos seguintes. Na primeira questão (figura *13.*) todos responderam corretamente ao responderem à segunda questão (figura *14.*) os grupos 2 e 3 cometeram erros devido a problemas de contagem. O grupo 1 utilizou uma estratégia explícita para ambas as questões tendo respondido corretamente.

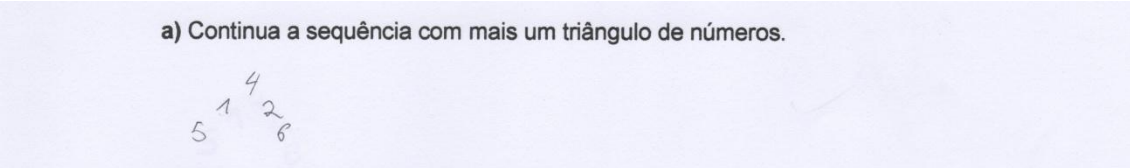


Figura 13. Resolução da questão a) da tarefa 4 - Grupo 1

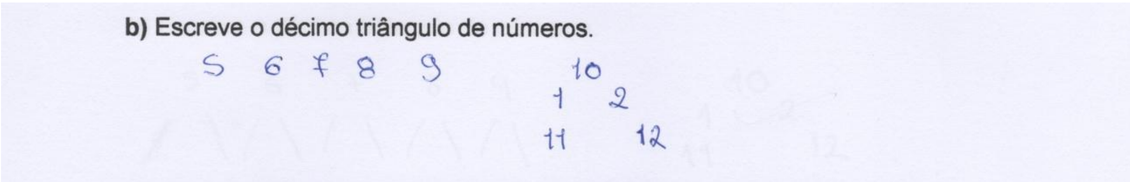
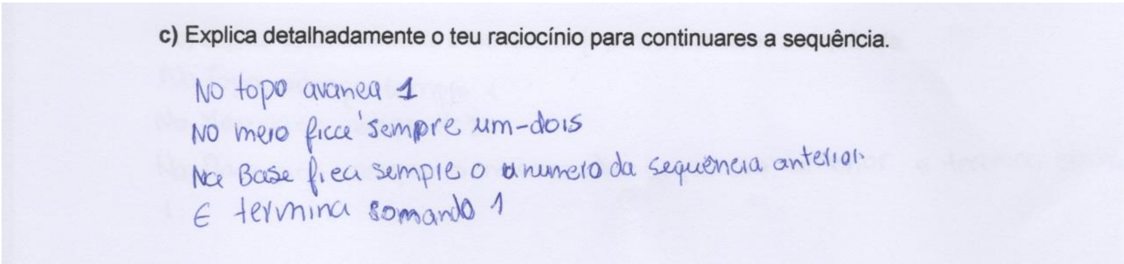


Figura 14. Resolução da questão b) da tarefa 4 - Grupo 5

Para explicarem o raciocínio que lhes permitiu continuar a sequência também não foi difícil. Todos tinham opinião foi só chegar a um acordo sobre a melhor forma de escrever.

> [...]
> Pedro: O 1 e o 2 vão os números do meio e os números de baixo vai-se fazer, vai-se fazer a diferença... se for pra esquerda é 1 que é o número que tá no meio, se for pra direita é 2 que é o número que tá no meio. (...)
> Dinis: Ou assim. O número do topo somando com o 2º da esquerda dá...
> Afonso: Isso é muita coisa.
> Mafalda: É nada.
> Pedro: (...) o número do topo somando com o 2º da esquerda dá sempre mais um e o número do topo somando com o segundo da direita dá sempre mais 2.
> [...]
> Mafalda: No meio... é sempre... 1, 2.
> Dinis: É sempre 1 por 2.
> [...]
> Mafalda: O do topo soma-se...
> Pedro: Somando com o do meio dá sempre o número de baixo.
> Dinis: O número do topo soma-se... com o do meio dá sempre o resultado que está em baixo... (está a ditar para os colegas)
> [...]
> Dinis: (...) somando com o do meio dá sempre o resultado que está em baixo.
> Mafalda: O resultado que está no final da pirâmide.
> Pedro: O que está no final do triângulo.
> [...]

Nesta tarefa todos os grupos com exceção do grupo 1 estão dependentes da realização de uma contagem tendo como referência a pirâmide anterior para descobrirem o termo seguinte (figura *15.*).


c) Explica detalhadamente o teu raciocínio para continuares a sequência.

No topo avanca 1
No meio ficca sempre um-dois
Na Base fica sempre o numero da sequencia anterior
E termina somando 1

Figura 15. Resolução da questão c) da tarefa 4 - Grupo 4

O grupo 1 fez generalização distante. Não há ainda lugar a uma demonstração formal mas de acordo com os seus comentários, e com base na resposta à questão c) (figura *16.*) conseguiram generalizar algumas regularidades, nomeadamente, as relativas às posições que os números ocupam na pirâmide. Que o número do topo corresponde ao número da pirâmide. Os números do meio mantem-se sempre nas mesmas posições e que o números da base são encontrados com base na diferença entre o numero do topo e o do meio. Esta última constatação apenas foi referida pelo grupo 1.

Pela primeira vez foi utilizada uma regra de generalização explícita para encontrar o termo próximo e um termo distante.

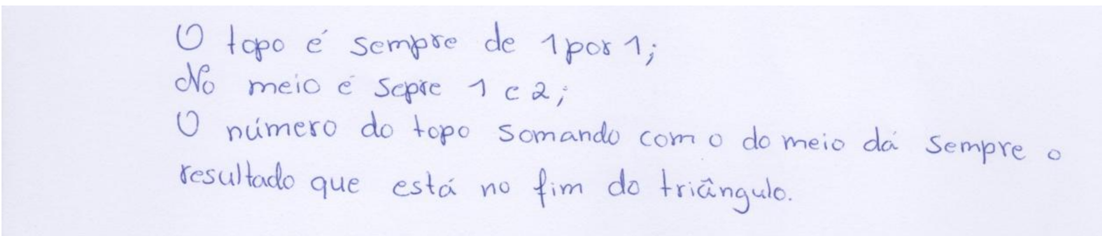

O topo é sempre de 1 por 1;
No meio é sepre 1 e 2;
O número do topo somando com o do meio dá sempre o resultado que está no fim do triângulo.

Figura 16. Resolução da questão c) da tarefa 4 - Grupo 1

4.1.5. Tarefa 5

Nesta quinta tarefa (figura *17.*) a sequência tem dois padrões crescentes em que na linha de cima são múltiplos de dois e na linha de baixo são múltiplos de quatro.

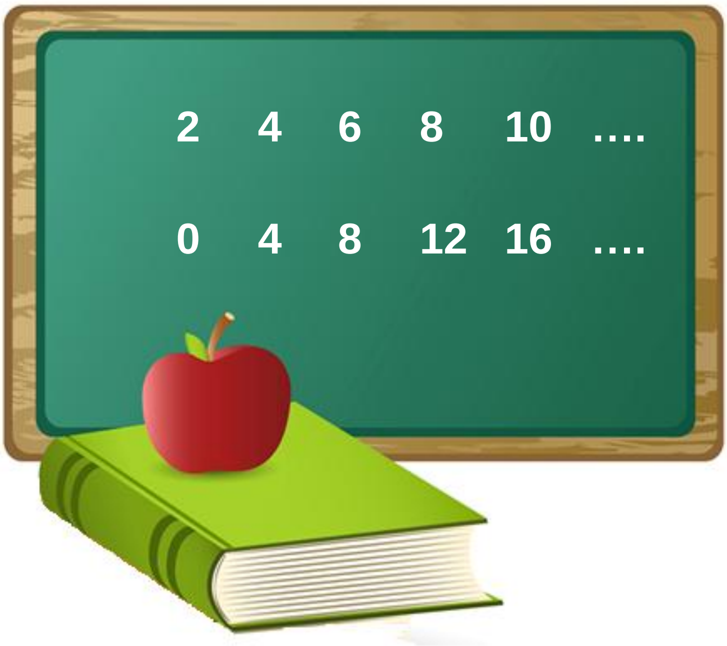


Figura 17. Enunciado da tarefa 5

Todos os grupos utilizaram a estratégia *recursiva* para responderem às duas primeiras questões. Na primeira questão (figura *18.*) todos os grupos identificaram de forma imediata os termos seguintes.

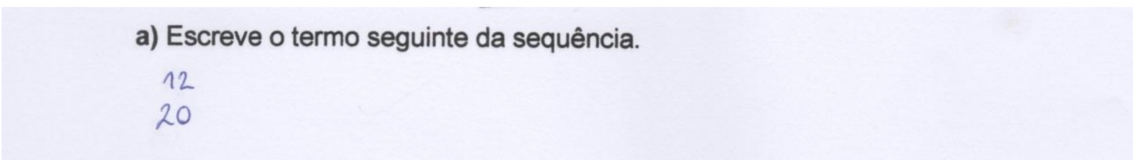
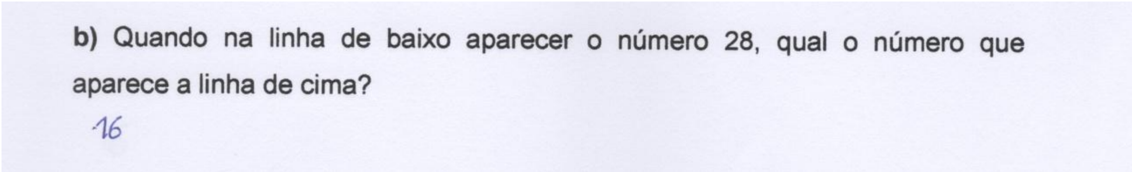

a) Escreve o termo seguinte da sequência.
12
20

Figura 18. Resolução da questão a) da tarefa 5 - Grupo 2

Na segunda questão (figura *19.*) apesar de ter motivado mais discussão também chegaram à resposta, sendo que os grupos 2, 3 e 4 optaram por escrever todos os termos até encontrarem o número 28 e os grupos 1 e 5 fizeram os cálculos mentalmente.


b) Quando na linha de baixo aparecer o número 28, qual o número que aparece a linha de cima?

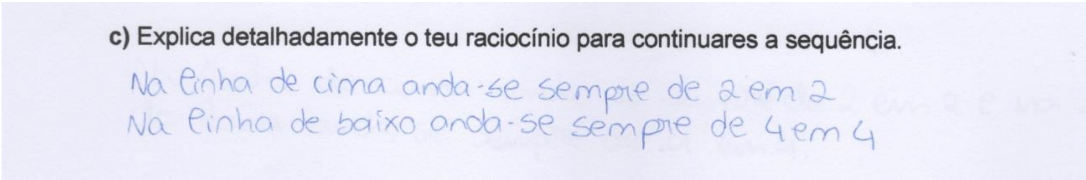
16

Figura 19. Resolução da questão b) da tarefa 1 - Grupo 4

[...]
Dinis: Quando na linha de baixo aparecer o número 28, qual o número que aparece na linha de cima? Ora bem, 28, 28...
Duarte: Na de cima é 16.
[...]
Dinis: ... espera ai, 27, 26, 25, 24, 23...
Duarte: Não é nada é 20.
[...]
Dinis: É 16.
Duarte: É nada, é 20.
[...]
Mafalda: Olha, tipo, aqui vai saltar de 4 em 4 por isso...
Dinis: 16.
Mafalda: Vai dar 2.
Duarte: Temos que tirar 8 a 28...
Dinis: É 16, olha aqui, 20, 24, 28, aqui é o quê? Aqui é 12, 14.
[...]
Duarte: É o 16. Escrevei, já está.
[...]

Depois da discussão que levou à resposta da segunda questão os grupos 2, 3 e 4 responderam à terceira questão com a constatação que tinham feito para responder às questões anteriores, ou seja, na linha de cima é de 2 em 2, na linha de baixo é de 4 em 4 (figuras *20.).* Os grupos 1 e 5 perceberam que também existia uma relação entre as duas linhas. A diferença entre os números da linha de baixo e os da linha de cima aumentava de dois em dois. Na resposta à terceira questão (figura *21.*) estes alunos não revelaram dificuldades em responder tendo o grupo 5 feito referência ao facto de existir uma relação de crescimento entre as duas linhas.

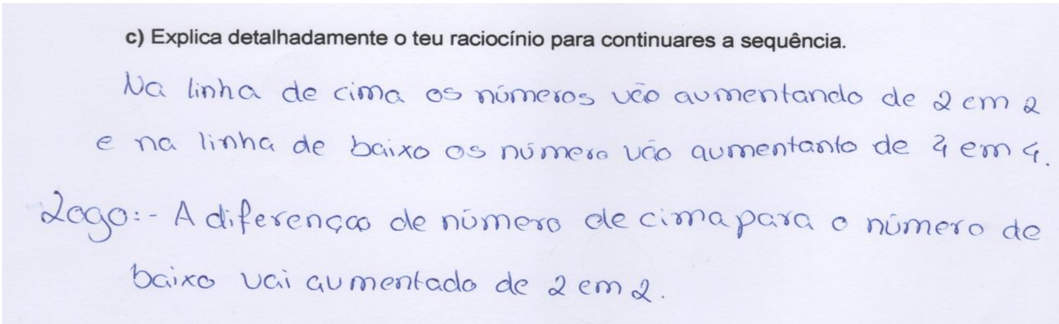
[...]
Mafalda e Afonso: Explica detalhadamente o teu raciocínio para continuares a sequência.
[...]
Pedro: É na linha de cima é pares 2...
Afonso: Na primeira sequência é de 2 em 2.
Duarte: Não é da sequência, a primeira sequência é isto.
Pedro: Na linha de cima anda sempre de 2 em 2, na linha de baixo anda sempre de 4 em 4.
[...]



c) Explica detalhadamente o teu raciocínio para continuares a sequência.

Na linha de cima anda-se sempre de 2 em 2
Na linha de baixo anda-se sempre de 4 em 4

Figura 20. Resolução da questão c) da tarefa 5 - Grupo 1



c) Explica detalhadamente o teu raciocínio para continuares a sequência.

Na linha de cima os números vão aumentando de 2 em 2
e na linha de baixo os número vão aumentando de 4 em 4.
Logo:- A diferença do número de cima para o número de
baixo vai aumentado de 2 em 2.

Figura 21. Resolução da questão c) da tarefa 5 - Grupo 5

4.1.6. Tarefa 6

O padrão numérico da *tarefa 6* (figura *22*.) é um padrão de repetição de quatro em quatro e pela primeira vez os grupos depararam-se com problemas sobre conhecimentos anteriormente adquiridos, a leitura e cálculo de potências.

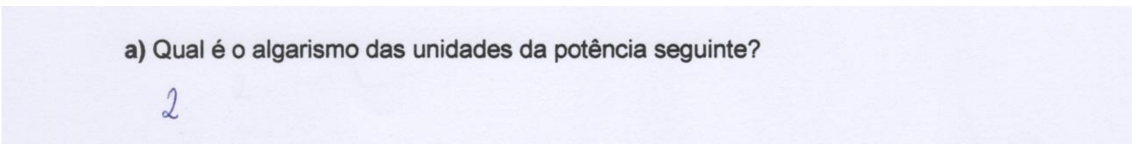
2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	___
2	4	8	16	32	64	128	256	___

Figura 22. Enunciado da tarefa 6

Na primeira questão os alunos revelaram algumas dificuldades em interpretar corretamente o que era pedido e começaram logo por calcular a potência. Tinham de indicar apenas o número das unidades e não o valor da potência.

[...]
Dinis e Duarte: Considera a sequência seguinte. Qual é o algarismo das unidades da potência seguinte?
Pedro: Que 2, 9?
Dinis: Oih... 2, 9... não.
Duarte: Não é assim que se diz.
Dinis: 9 elevado a 2.
Duarte: Ou 2 elevado a 9, 2 elevado a 9.
Dinis: Sim, neste caso é 2 elevado a 9.
Afonso: É?
Dinis: É.
[...]
Dinis: É 260.
Duarte: É 260...260? Vocês não perceberam. É o 9 o algarismo da potência.
[...]
Duarte: Qual é o algarismo das unidades da potência seguinte?
Pedro: Da potência...isto não é nenhuma potência.
Dinis: Sim, isto aqui não é nenhuma potência.
[...]
Duarte: Mas aqui diz...
Pedro: Não diz nada.
[...]
Mafalda: Das unidades, não é para meter o número inteiro.
Pedro: Ahh! Aqui é 2.
Duarte: É dois?
Mafalda: Aqui tem que ser um 2... o das unidades.
[...]
Dinis: Unidades, das unidades, portanto é só o 2.
[...]

Todos os grupos após alguma discussão chegaram à leitura correta e também conseguiram identificar o algarismo correspondente às unidades, tendo com exceção do grupo 2 respondido corretamente (figura *23.*). O grupo 2 indicou o valor da potência.


a) Qual é o algarismo das unidades da potência seguinte?

2

Figura 23. Resolução da questão a) da tarefa 6 - Grupo 3

Na segunda questão com exceção do grupo 1 todos fizeram os cálculos e apenas o grupo 4 errou o valor porque ao transformar a potência num produto de fatores faltou um. O grupo 4 depois de fazer os primeiros cálculos percebeu que os números das unidades eram a repetição dos primeiros quatro e já não continuou. O grupo 1 chegou a esta conclusão antes de responder à primeira questão tendo utilizado a estratégia *explícita* em ambas as questões.

Os outros grupos na primeira questão utilizaram a estratégia *termo unidade*, tendo o grupo 4 mudado de estratégia na segunda questão passando a utilizar a *explicita*. Os outros grupos utilizaram a estratégia de generalização *termo unidade* em ambas as questões (figuras *24.* e *25.*).

.

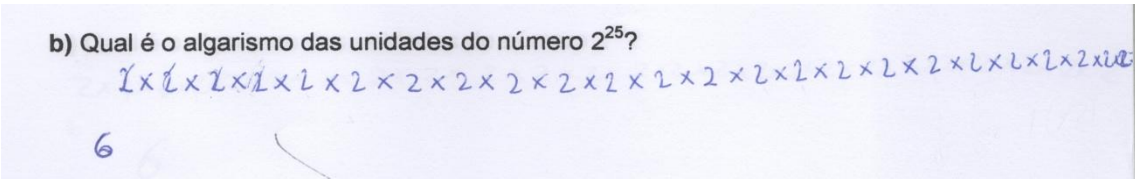


Figura 24. Resolução da questão b) da tarefa 6 - Grupo 4

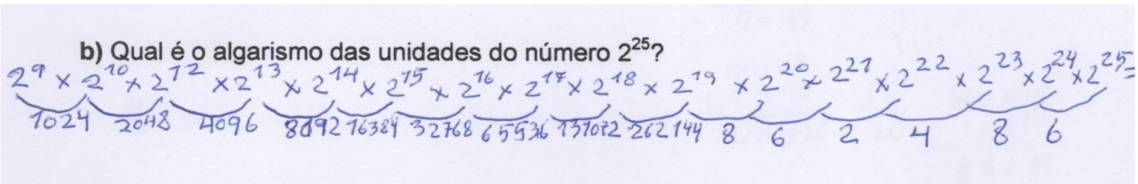
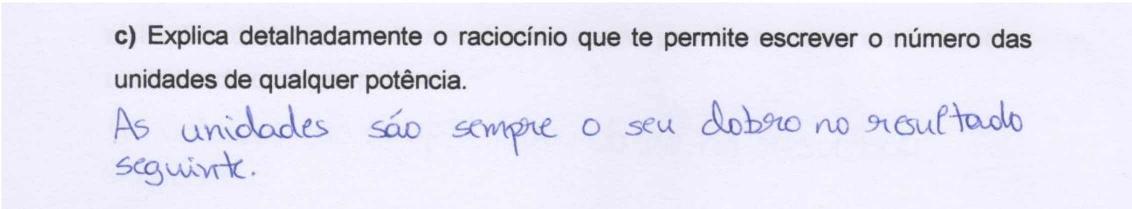


Figura 25. Resolução da questão b) da tarefa 6 - Grupo 2

[...]
Mafalda: Das unidades...
Afonso: Eu sei o que vai dar. Vai dar 512.
[...]
Dinis: Temos de fazer 2, temos de fazer sempre a sequência.
Duarte: Pois... vamos parar.
Dinis: Qual é o algarismo das unidades do número?
Mafalda: Espera aí... 25 vezes 2...
Pedro: Não é assim que se faz. É 2 vezes 2 vezes 2 vezes 2 vezes 2.
Afonso: Eihh...
[...]
Duarte: Num dá tem de se fazer 2 vezes 2 vinte e cinco vezes.
[...]
Pedro: Andar sempre em 2, 4, 8, 6.
Afonso: As unidades andam sempre entre e 4, 8 ou 6.
[...]
Pedro: As unidades são sempre a sua soma 2 mais 2, 4 são 4, mais 4, 8.
Dinis: Pois é.
Duarte: São sempre a sua soma, 2 mais 2, 4.
Afonso: Chega aqui, começa de novo.
Pedro: 8 mais 8, 16, 16 mais 16, 32...
Mafalda: As unidades somam-se sempre.
Dinis: Ah... as unidades são sempre o seu dobro...
[...]

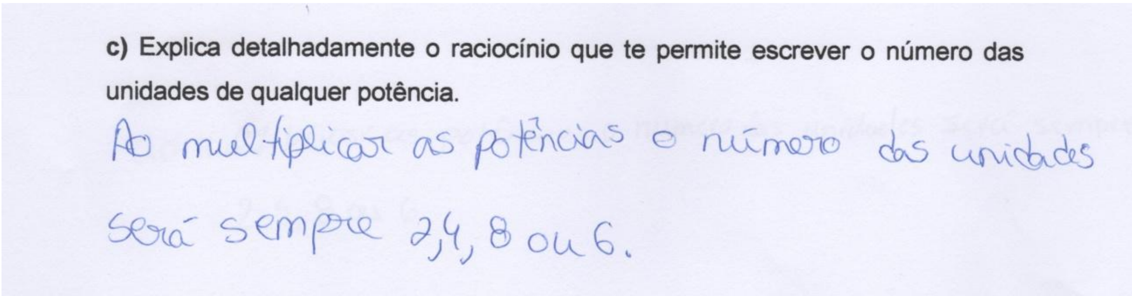
Na ultima questão ao explicaram o raciocínio o grupo 5 percebeu que existia um padrão de repetição de quatro em quatro e ao explicar o raciocínio explicou de forma semelhante à dos grupos 1 e 4 que perceberam isso nos momentos iniciais ao responderem à primeira questão (figura *26*.). O grupo 1 encontrou ainda uma regularidade nesta sequência de quatro números que se repete (figura *27*.), que o número das unidades é o dobro do número anterior.



c) Explica detalhadamente o raciocínio que te permite escrever o número das unidades de qualquer potência.

As unidades são sempre o seu dobro no resultado seguinte.

Figura 26. Resolução da questão c) da tarefa 6 - Grupo 1



c) Explica detalhadamente o raciocínio que te permite escrever o número das unidades de qualquer potência.

Ao multiplicar as potências o número das unidades será sempre 2, 4, 8 ou 6.

Figura 27. Resolução da questão c) da tarefa 6 - Grupo 4

4.1.7. Tarefa 7

Na *tarefa 7* (figura *28.*) temos um padrão linear complexo onde todos os grupos mais uma vez, conseguiram encontrar várias formas de crescimento.

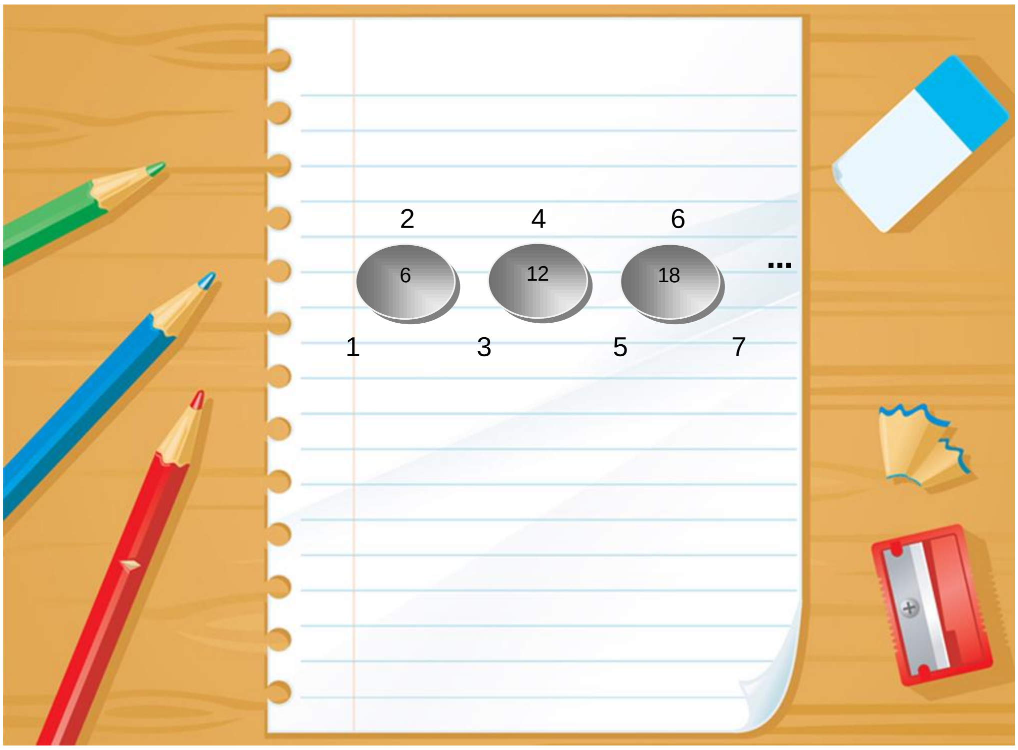
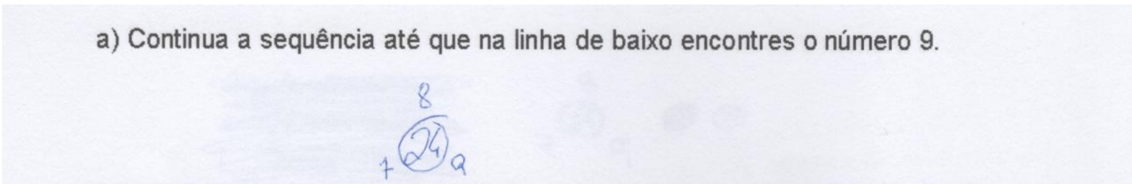


Figura 28. Enunciado da tarefa 7

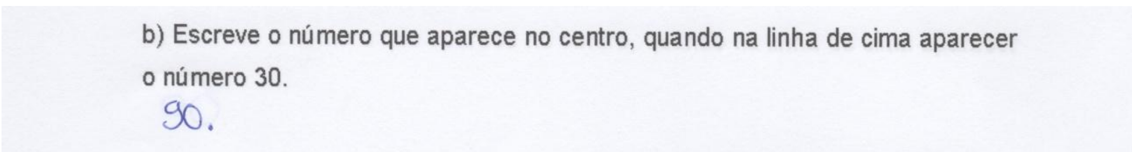
Os grupos 2 e 3 recorreram à estratégia *recursiva* para descobrir o número pretendido. Continuaram a sequência com base no termo anterior tendo respondido corretamente à primeira à segunda questão (figura *29.* e *30.*).


a) Continua a sequência até que na linha de baixo encontres o número 9.

8

7 24 9

Figura 30. Resolução da questão a) da tarefa 7 - Grupo 1


b) Escreve o número que aparece no centro, quando na linha de cima aparecer o número 30.

90.

Figura 29. Resolução da questão b) da tarefa 7 - Grupo 2

Os grupos 1, 4 e 5 constataram que o número do centro é o produto do número que está na linha de cima por três tendo usado a estratégia *explícita* na primeira e na segunda questão.

[...]
Afonso: Tens de meter 29 mais 31 dá 90.
Mafalda: É 29 mais...
Afonso: Ah! Já sei.
Pedro: Já reparaste olha 2 vezes 3, 6, 4 vezes 3, 12, 6 vezes 3, 18, 30 vezes 3, 90.
Mafalda: Pois é... pois é.
Pedro: Aqui isto vai de 6, é de 6 em...
Dinis: O número de cima multiplicado por 3 dá sempre o do centro.
[...]
Pedro: 3 vezes 2, 6, 3 vezes 4, 12, 3 vezes 6, 18.
Dinis: O número de cima multiplicado por 3 dá o do centro.
[...]
Pedro: 2 vezes 3, 6, 4 vezes 3, 12, 6 vezes 3, 18, 30 vezes 3, 90.
[...]

Na última questão três grupos responderam de forma diferente mas apenas na gravação é percetível a referência do grupo 1 ao facto de que o número do meio é a soma dos três números consecutivos.

[...]
Duarte: Este 7.
Afonso: Depois olha aqui se reparares vai 1, 2 em 2, 1, 3, 5, 7 (...)
Pedro: Aqui dá 9.
Afonso: (...) e portanto do 7 para o 9 é 2.
Dinis: E depois.... 24, 9.
[...]

Os grupos 1, 4 e 5 utilizaram a estratégia *explícita* para responderem às questões tendo os dois últimos encontrado algumas regularidades. O grupo 4 pela resposta que à questão c) (figura *31.*) reconheceu que na linha de baixo são números ímpares mas não referiu que na de cima são números pares. Também fazem referência que na linha de baixo, as dos números ímpares é sempre mais dois que o termo anterior mas não fazem essa constatação para a linha dos pares.

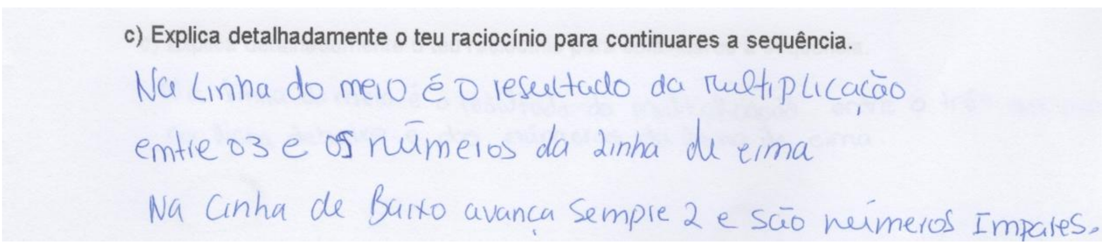
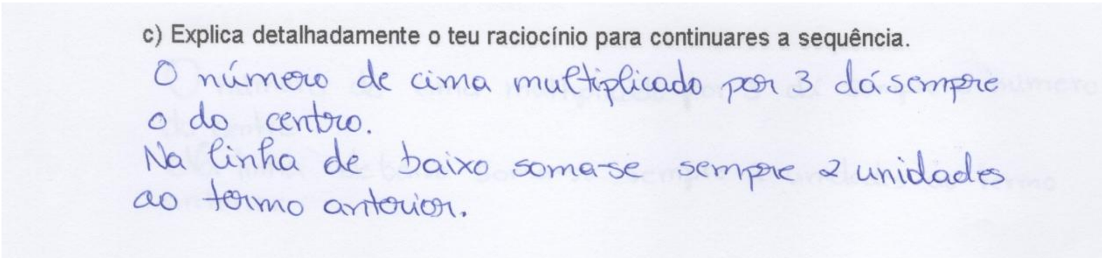

c) Explica detalhadamente o teu raciocínio para continuares a sequência.
Na Linha do meio é o resultado da multiplicação entre o 3 e os números da linha de cima
Na linha de baixo avança sempre 2 e são números impares.

Figura 31. Resolução da questão c) da tarefa 7 - Grupo 4

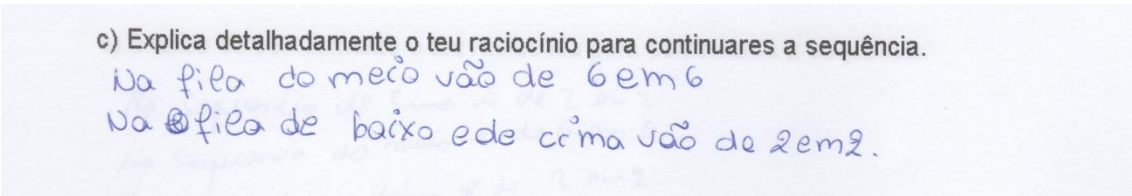
O grupo 5 também respondeu com base na regra que descobriu logo na primeira questão (figura *32*.) tendo também feito referência ao facto que na linha de baixo se soma sempre dois ao termo anterior, mas também não fazem qualquer referência ao facto de este processo também ocorrer na linha de cima.


c) Explica detalhadamente o teu raciocínio para continuares a sequência.

O número de cima multiplicado por 3 dá sempre o do centro.
Na linha de baixo soma-se sempre 2 unidades ao termo anterior.

Figura 32. Resolução da questão c) da tarefa 7 - Grupo 5

Os grupos 2 e 3 utilizaram a estratégia *recursiva*, continuaram a sequência com base em adições sucessivas (figura *33*.).


c) Explica detalhadamente o teu raciocínio para continuares a sequência.

Na fila do meio vão de 6em6
Na fila de baixo ede cima vão de 2em2.

Figura 33. Resolução da questão c) da tarefa 7 - Grupo 2

Os grupos têm vindo a demonstrar curiosidade em descobrir mais que uma forma para continuarem o padrão, apesar de nem sempre bem-sucedidos fazem várias tentativas para descobrirem uma forma que no seu entender é o caminho mais fácil para encontrar o termo pedido.

[...]
Afonso: Agora já não dá 6.
Pedro: Agora 3 mais 4.
[...]
Afonso: É 24.
[...]
Dinis: 5 mais 6, 11 mais 7, 18 depois 7 mais 8 mais 9.
Mafalda: Ahh!
Duarte: E depois 7 mais 8 mais 9.
[...]

Pelas respostas e pelo diálogo entre os alunos nota-se que a comunicação matemática está a evoluir, bem como a forma como o grupo trabalha. Todos os elementos dão agora o seu contributo para chegarem a uma resposta que considerem adequada e argumentam de forma mais confiante com o/os colega que não concorda/am. Utilizam termos adequados e corrigem os colegas quando estes não o fazem.

[...]
Duarte: Prontos e na linha de baixo vai sempre de 2 em 2.
Dinis: E na linha de baixo anda sempre 2 ao número anterior.
Ana: Ao termo.
Dinis: Ao termo anterior.
[...]
Dinis: Na linha de baixo... na linha de baixo dá sempre o número de cima. [está a ditar]
Duarte: Soma-se sempre 2 ao número anterior. [corrige o colega]
[...]
Afonso: Continuo a dizer que eu acho que isto não está bem.
Duarte: Tá bem.
Mafalda e Dinis: Tá bem.
Pedro: Tá bem, 29 mais 30 dá 59 mais 61 mais 31, 90.
[...]

4.1.8. Tarefa 8

Na *tarefa 8* (figura *34*.) temos o Triângulo de Pascal em que na soma dos números de uma diagonal podemos encontrar sempre um número de Fibonacci, sendo que a soma de duas diagonais consecutivas continua a ser um número de Fibonacci.

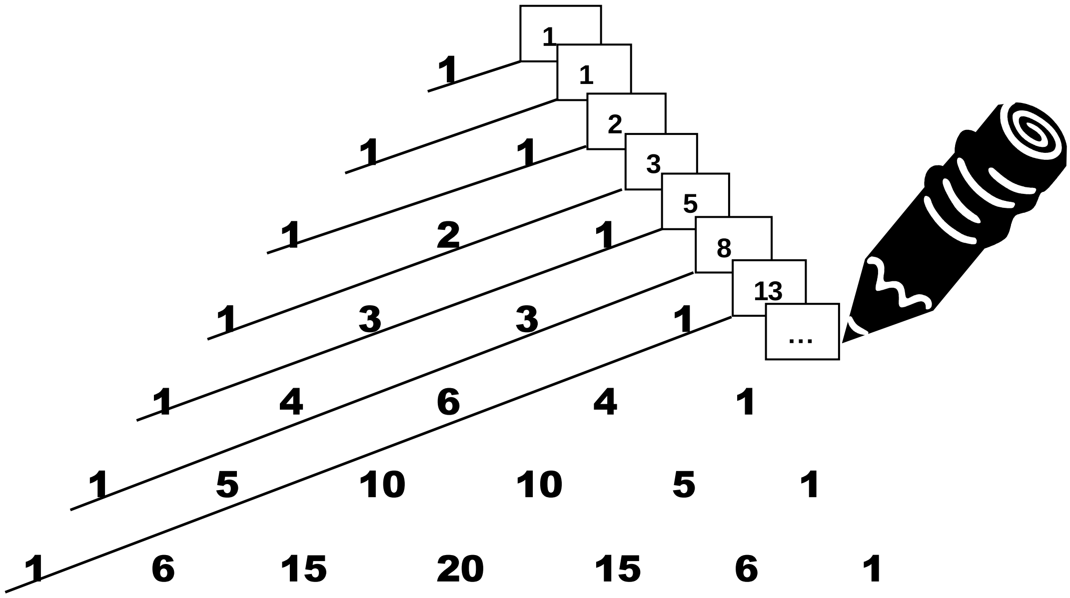


Figura 34. Enunciado da tarefa 8

Nesta sequência tinham de encontrar o termo seguinte e posteriormente o décimo quinto termo. Na primeira questão apenas o grupo 2 errou a resposta porque ao somar a diagonal não contabilizou o número um, correspondente à primeira diagonal, todos os outros encontraram o termo correto.

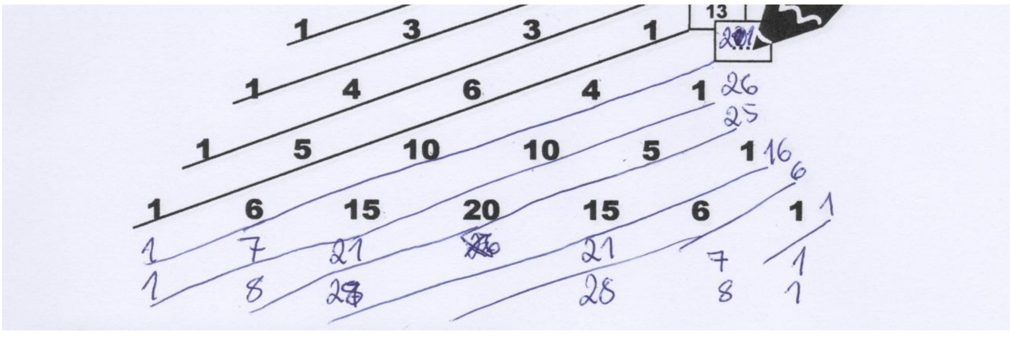
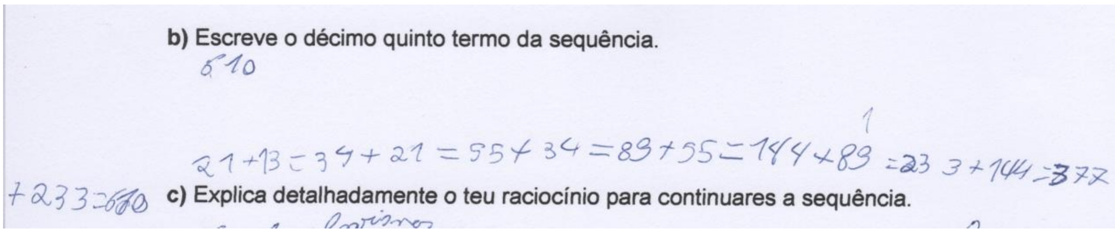


Figura 35. Resolução da questão a) da tarefa 8 - Grupo 3

Os grupos 1 e 4 conseguiram continuar a sequência sem recorrer à pirâmide, perceberam que cada número com exceção dos dois primeiros é originado pela soma dos dois antecessores. Os outros continuaram a pirâmide para descobrir o termo seguinte bem como o décimo quinto termo.

Na segunda questão dos dois grupos que descobriram como continuar a sequência de Fibonacci, o grupo 1 encontrou o décimo quinto termo (figura *36.*), o grupo 4 conseguiu com sucesso descobrir o décimo quarto tendo sido a questão do tempo a não permitir que chegassem à resposta.


b) Escreve o décimo quinto termo da sequência.

610

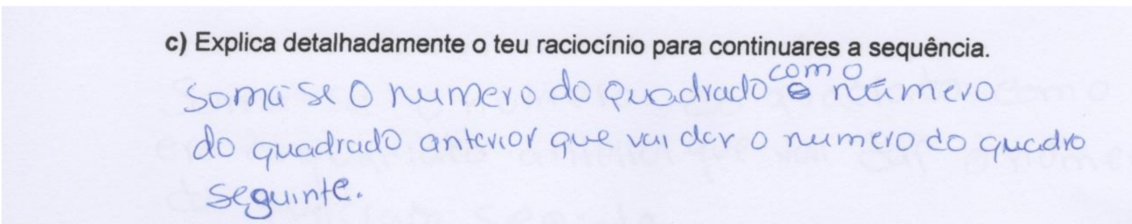
21+13=34+21=55+34=89+55=144+89=233 3+144=377 +233=610

c) Explica detalhadamente o teu raciocínio para continuares a sequência.

Figura 36. Resolução da questão b) da tarefa 8 - Grupo 1

Os grupos que continuaram a pirâmide tiveram bastantes dificuldades em descobrir os termos seguintes. O grupo 2 ao escrever os números não os colocarem na posição certa logo, ao somarem as diagonais o resultado não era o correto. Nenhum destes grupos descobriu que cada termo do triângulo de Pascal se obtém por recorrência, sendo as diagonais de fora formadas por 1´s os restantes a soma dos dois termos que tem acima de si. Como era um processo moroso o grupo 5 não foi além do décimo termo. Tentaram identificar o padrão subjacente a cada diagonal tendo conseguido com sucesso para a primeira, a segunda e a terceira, correspondente aos 1´s, aos números naturais e aos números triangulares respetivamente.

Na terceira questão os grupos 1 e 4 que continuaram a sequência apenas pelos números de Fibonacci responderam corretamente (figura *37.*). Os grupos 3 e 5 não responderam e o grupo 2 apesar de não ter encontrado o resultado correto respondeu com base na soma das diagonais tendo cometido um erro de linguagem, à diagonal chamou linha mas o raciocínio está correto.


c) Explica detalhadamente o teu raciocínio para continuares a sequência.

soma-se o numero do quadrado ~~e~~ como o numero do quadrado anterior que vai dar o numero do quadro seguinte.

Figura 37. Resolução da questão c) da tarefa 8 - Grupo 4

Nesta tarefa três grupos utilizaram a estratégia *recursiva* para responderem à primeira e à segunda questão e dois a *explicita* sendo evidente o empenho e a persistência na colaboração do trabalho em grupo para chegar ao resultado. Alguns elementos agora mais seguros das suas capacidades tentam chegar ao resultado à sua forma, havendo depois uma discussão para seguirem a melhor estratégia. A maior dificuldade continua a ser explicar o raciocínio.

[...]
Dinis: Acrescenta-se, adiciona-se sempre os dois números anteriores.
Pedro: Não soma-se aos números ... se somarmos os dois números anteriores dá o resultado que está à frente.
Duarte: Ou resultado a seguir.
Dinis: Somamos ao número o número... os números...
Duarte: Somamos ao número o algarismo anterior.
[...]
Pedro: Somamos ao algarismo o número anterior somamos ao número o algarismo anterior, somamos ao número o algarismo anterior.
[...]
Dinis: Soma-se, soma-se a unidade a unidade. (começa a ditar aos colegas)
Duarte: Não a unidade é só um número.
Pedro: É um.
Duarte: Um algarismo.
Dinis: Soma-se, soma-se soma-se o algarismo anterior.
Mafalda: Os algarismos.
Duarte: O algarismo.
Dinis: Soma-se o algarismo anterior ao algarismo seguinte. (continua a ditar aos colegas)
Mafalda: Não soma-se os dois algarismos.
Pedro: Não porque olha.
[...]
Dinis: Soma-se o algarismo anterior ao termo seguinte e que dá o resultado seguinte.
Mafalda: Exato.
Afonso: E dá pronto.
Duarte: Soma-se os dois algarismos de trás aos da frente.
Mafalda: "O" não é "a"...
Duarte: Assim vai.... Num dá tu estás a meter soma-se este com este.
[...]
Dinis: Soma-se o algarismo anterior com o seguinte.
Duarte: O número anterior com o número seguinte.
[...]

4.1.9. Tarefa 9

Na *tarefa 9* (figura *38*.) temos um padrão numérico de crescimento linear. Nesta tarefa os alunos demonstraram bastantes dificuldades em responder às questões.

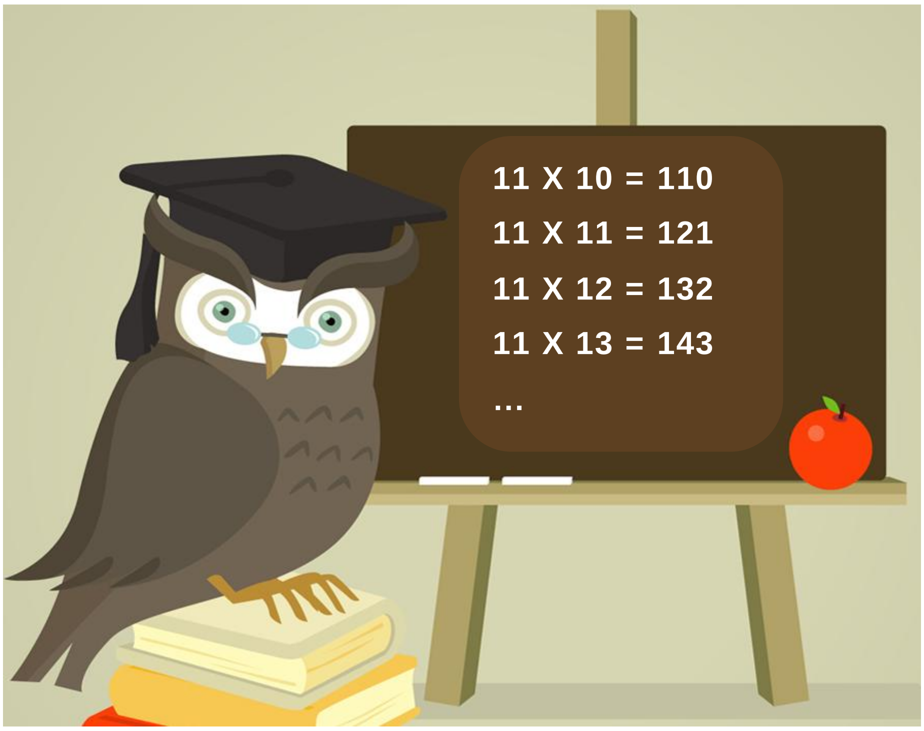


Figura 38. Enunciado da tarefa 9

Na primeira questão todos efetuaram a multiplicação para descobrir o termo seguinte. Na segunda questão o grupo 1 não se deu por satisfeito achando que não bastava multiplicar, que a resposta não seria assim tao linear e foram procurar outras regularidades subjacentes ao padrão.

> [...]
> Pedro: Qual é a resposta?
> Duarte: Vai sempre de 11 em 11.
> Afonso: Eu acho que isso não explica. Olha é a tabuada do 11 isso é que explica mesmo.
> [...]

Depois desta constatação utilizaram a estratégia *recursiva* para descobrir o oitavo termo da sequência.

> [...]
> Duarte: Ah!!! Tapas estes aqui.

Pedro: Olha uma coisa, olha uma coisa, já reparaste numa coisa, a unidade e a dezena anda sempre de um em um.
[...]
Duarte: O algarismo das unidades ... é sempre... o algarismo das unidades é sempre... (estão a escrever)
Afonso: É sempre quê?
Duarte: É sempre menos um do que o das (...)
Dinis: Mas o das centenas...
Duarte: (...) é sempre menos um que o das dezenas.
[...]

Os grupos 3 e 5 (figura *40.*) utilizaram a estratégia *termo unidade* na primeira questão tendo na segunda questão mudado de estratégia passando a utilizar a *recursiva*. Apenas o grupo 2 se deu por satisfeito achando que bastava multiplicar 11 pelo número seguinte, 12, 13, 14 e assim por diante tendo utilizado a estratégia *termo unidade* em ambas as questões.

Na última questão, ao tentar pôr por escrito o raciocínio que lhes permitiu continuar a sequência, o grupo 4 também encontrou uma regularidade no produto e explicou da seguinte forma (figura *39.*):

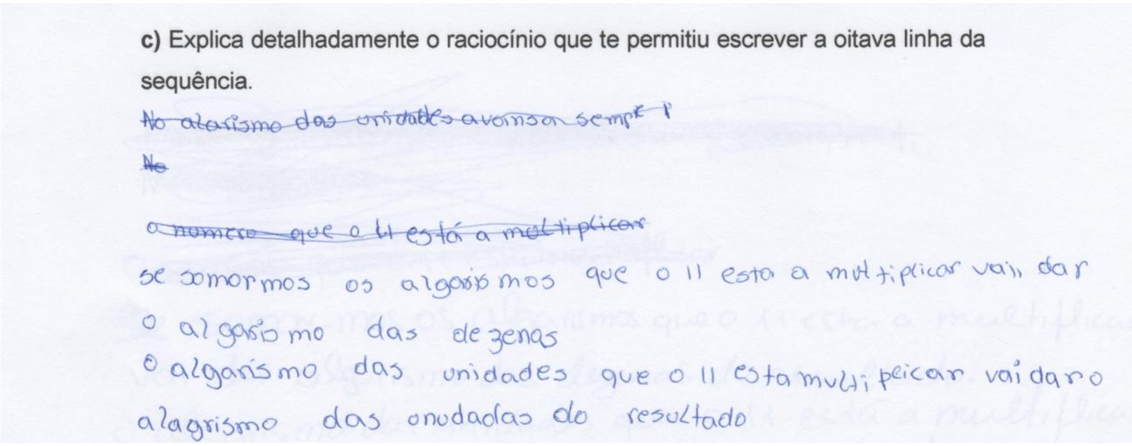

c) Explica detalhadamente o raciocínio que te permitiu escrever a oitava linha da sequência.
~~No alarismo das unidades avonsa sempre 1~~
~~No~~
~~o numero que o 11 está a multiplicar~~
se somormos os algorismos que o 11 esta a multipicar vai dar
o algarismo das dezenas
o algarismo das unidades que o 11 esta multipeicar vai dar o
alagrismo das onudadas do resultado

Figura 39. Resolução da questão c) da tarefa 9 - Grupo 4

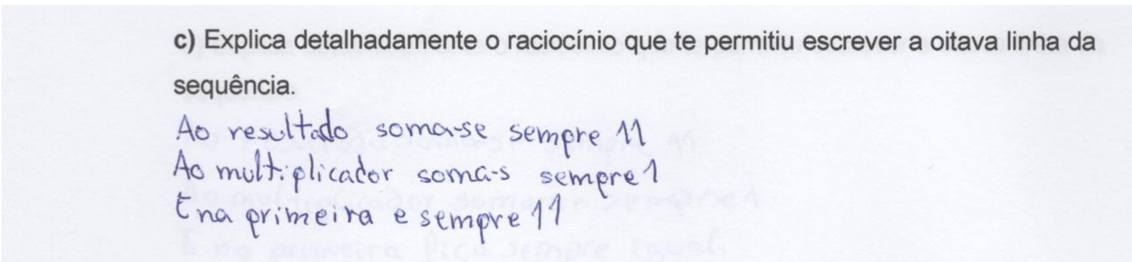

c) Explica detalhadamente o raciocínio que te permitiu escrever a oitava linha da sequência.
Ao resultado soma-se sempre 11
Ao multiplicador soma-s sempre 1
E na primeira e sempre 11

Figura 40. Resolução da questão c) da tarefa 9 - Grupo 3

Nesta tarefa, os alunos revelaram dificuldades em identificar corretamente o algarismo das unidades, das dezenas e das centenas o que gerou alguma confusão para identificarem corretamente o número a que se estavam a referir na argumentação com os colegas. Os conhecimentos matemáticos relativos à leitura de números foram um entrave quase geral que conseguiram resolver.

[...]
Mafalda: Olha eu vou pôr o algarismo das unidades.
Duarte: Das dez... das centenas.
Afonso: Ou das unidades.
Duarte: Das unidades.
(estão a pensar em silêncio)
Dinis: Como é que vais explicar a última?
Pedro: Olha...
Mafalda: Das unidades ou das centenas?
Duarte: Das centenas.
Mafalda: Isto é centenas?
[...]

4.1.10. Tarefa 10

Na última tarefa (figura *41.*) temos um padrão numérico de crescimento não linear tendo sido o que os alunos tiveram mais dificuldades, apenas um grupo conseguiu responder corretamente a todas as questões.

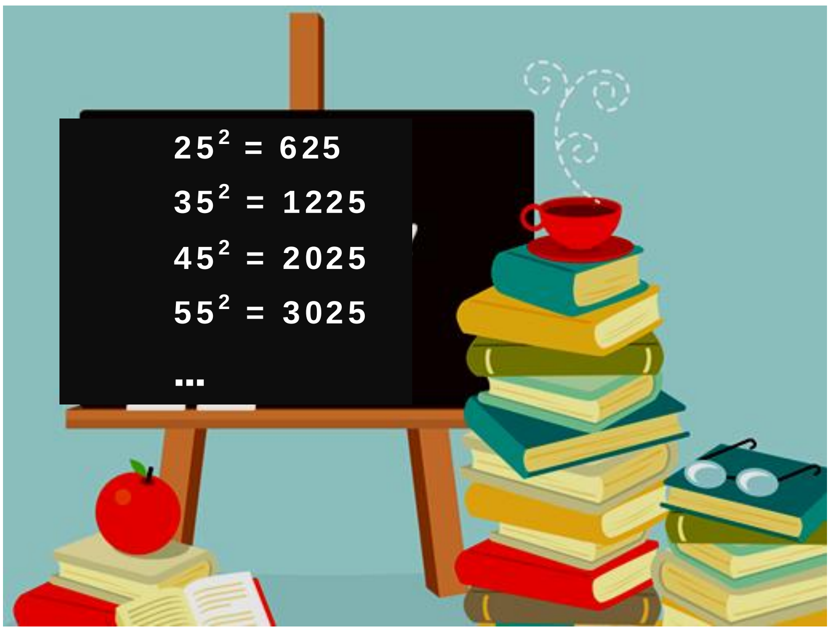


Figura 41. Enunciado da tarefa 10

Na primeira questão com exceção do grupo 1 que cometeu erros de cálculo todos os outros chegaram à solução correta. Utilizaram a operação da multiplicação para chegarem ao resultado, todos utilizaram a estratégia *termo unidade*. (figura *42.*)

a) Continua a sequência por mais uma linha.

$65^2 = 4225$

Figura 42. Resolução da questão a) da tarefa 10 - Grupo 5

Na questão *2.* o grupo 3 descobriu uma regra geral. Separando o 25 dos outros números encontraram a sequência +6, +8, +10... esta regra permitiu-lhes ficarem próximos do resultado correto, pois também cometeram um erro de cálculo tendo indicado o valor correspondente ao quadrado de cento e cinco em vez do quadrado de noventa e cinco. O grupo 3 utilizou uma estratégia *explícita*, todos os outros utilizaram a estratégia *termo unidade* para descobrir qual a potência correspondente à oitava linha. Nesta questão apenas o grupo 5 encontrou a solução correta. No cálculo das potências ao efetuarem a multiplicação os grupos 1 e 2 (figura *43.*) cometeram erros de cálculo que levou a resultados errados.

b) Escreve a oitava linha da sequência.

$95^2 = 9625$

Figura 43. Resolução da questão b) da tarefa 10 - Grupo 2

Na última questão o grupo 1 e o grupo 4 não responderam, o grupo 2 justificou com a regra que permite calcular as potências e o grupo 5 apenas fez a constatação de que aparece no enunciado, que as potências vão aumentando de dez em dez não tendo continuado a explicação. O grupo *3* apresentou a explicação seguinte (figura *44.*):

Nas potências a base aumenta-se sempre mais dez e mantem-se o espoente
No resultado os últimos dois nº são sempre 25 e nos primeire
são multiplos de 2 como por exemplo:

$\boxed{6}25$
6+ $\boxed{12}25$
8+ $\boxed{20}25$

Figura 44. Resolução da questão c) da tarefa 10 - Grupo 3

Nesta tarefa o grupo 1 fez várias tentativas para casos isolados tendo depois ao tentar generalizar encontrado sempre um obstáculo. Nenhum dos outros grupos fez referência que as potencias são múltiplos de cinco nem considerou outras formas de resolver o problema que não envolvessem o cálculo das potências.

Ao explicarem o raciocínio o grupo 1 também tentou várias abordagens mas não chegaram a consenso não tendo por isso apresentado nenhuma resposta por escrito. O grupo demonstrou no entanto ter facilidade em conjeturar baseando-se em alguns casos específicos e sempre que verificam que não está correto reformulam as conjeturas.

> [...]
> Pedro: Mas isto também dá, ó 20 mais 25, 45.
> [...]
> Duarte: Não aqui não resulta.
> Afonso: Olha ó repara numa coisa soma, tipo soma-se sempre mais 6 se tirares os 25 fora dá 6, 12, 20... ai não dá.
> Pedro: Não dá 20 mais 25, 45, 30 mais 25, 55.
> Afonso: Ah!!!
> Duarte: Aqui é 40 mais 25.
> [...]
> Afonso: Mas ó Pedro só dá nesse.
> Dinis: Esta é a tabuada do seis.
> Duarte: É.
> Pedro: Mas na primeira dá 62.
> Dinis: Ui, ó espera, não dá.
> Duarte: Pensava que era.
> Dinis: Espera.
> Pedro: Ele fez 6 e 6, 12.
> Duarte: Mas já não dá para 20.
> [...]
> Pedro: Agora aqui vai dar sempre o zero se fizermos 55 para dar este número, 3 mais 2, 5, 2 mais 2, 4.
> Dinis: 3 mais 2, 5, 2 mais 2, 4, 1 mais 2, 3.
> Afonso: Sim, sim... sim, sim.
> Mafalda: Pois é.
> Pedro: É é, olha... 3 mais 2, 5, 5 mais 10, 5, 2 mais 2, 4, 5 mais zero zero, zero mas aqui não dá.
> Dinis: Ah! Não.... 5, 2 mais 2, 4, 1 mais 2, 3.
> Duarte: E agora a partir deste não dá como estamos a fazer.
> [...]
> Dinis: Ah! Já sei. Ah! Aqui ó 6, 1, 2, 3. Só vai até 6 só pode ir até 6 de certeza.
> Afonso: Não num é ....
> [...]

A linguagem matemática para alguns alunos continua a ser um problema, no entanto o facto de estarem a trabalhar em grupo permite que os colegas façam a correção.

[...]
Pedro: É 65 a primeira.
Afonso: É 65 sobre 2.
Pedro: Já sei como é que é.
Duarte: 65 elevado a 2. (corrige o colega)
[...]

4.2. Síntese

4.2.1. Estratégias de resolução do problema

As tarefas propostas tinham como propósito levar os alunos a aplicar conhecimentos previamente apreendidos na resolução de problemas com padrões numéricos. Tinham de formular estratégias próprias ao mesmo tempo que mobilizavam saberes entre os vários elementos do grupo.

Em todas as tarefas que foram trabalhados pelos alunos, eles compreenderam as questões colocadas selecionaram e implementaram uma estratégia considerada adequada. Da *tabela 3.* constam as estratégias utilizadas em cada tarefa por cada grupo.

Tabela 3. Estratégias utilizadas pelos grupos nas questões a) e b) das tarefas

N.º do grupo	Questão	Estratégia utilizada para descobrir o próximo termo da sequência / Estratégia utilizada para descobrir um termo distante da sequência									
		T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10
1	a)	D	D	D	E	R	E	E	E	TU	TU
	b)	D	D	D	E	R	E	E	E	R	TU
2	a)	D	D	D	R	R	TU	R	R	TU	TU
	b)	D	D	D	R	R	TU	R	R	TU	TU
3	a)	D	D	D	R	R	TU	R	R	TU	E
	b)	D	D	D	R	R	E	R	n/r	R	E
4	a)	D	D	D	R	R	TU	E	E	E	TU
	b)	D	D	D	R	R	E	E	n/r	E	TU
5	a)	D	D	D	R	R	TU	E	R	TU	TU
	b)	D	D	D	R	R	TU	E	n/r	R	TU

(D – Estratégia da diferença; R – Estratégia recursiva; TU – estratégia termo unidade; E – Estratégia explicita; n/r – Não respondeu)

Fazendo agora uma análise às estratégias utilizadas pelos alunos, na primeira, segunda e terceira tarefa a estratégia utilizada foi sempre a *diferença* quer para encontrar um termo próximo quer para encontrar um termo distante.

Na quarta tarefa um grupo utiliza pela primeira vez uma estratégia *explícita* e os restantes grupos respondem a ambas as questões com a estratégia *recursiva*. Na quinta tarefa a estratégia *recursiva* volta a ser utilizada para responder a ambas as questões.

Na sexta tarefa pela primeira vez começam a utilizar estratégias diferentes para encontrar um termo próximo e um termo distante. Quatro grupos utilizam a estratégia *termo unidade* na questão a) mas para encontrar o termo mais distante mudam de estratégia e passam a utilizar a *explicita*. Um dos grupos utilizou a estratégia *explícita* para ambas as questões.

Na *tarefa 7* já são três grupos a utilizarem a estratégia *explicita* para responder às duas questões tendo os outros dois optado pela *recursiva*. Na oitava tarefa apesar do grau de dificuldade ter aumentado as tentativas para encontrar uma estratégia adequada não esmoreceram e apesar de apenas dois dos grupos terem encontrado uma estratégia *explícita* que os levaria ao resultado, os outros grupos utilizaram a estratégia *recursiva* e apesar de perceberem que seria um trabalho moroso não desistiram até o tempo ter terminado.

Na *tarefa 9* para responder à primeira questão quatro grupos utilizaram a estratégia *termo unidade*, considerada adequada para este tipo de questões. Na segunda questão apenas um grupo manteve esta estratégia todos os outros mudaram de estratégia. Um dos grupos utilizou a estratégia *explícita* e os outros três a *recursiva*.

A *tarefa 10* foi a que mais dificuldade levantou aos grupos. Um grupo utilizou a estratégia *explícita* tendo chegado ao resultado pedido, os outros utilizaram a *termo unidade* e não responderam corretamente.

Este conjunto de tarefas foi um meio para que os alunos melhorassem as suas estratégias de resolução de problemas. Por vezes implementaram uma estratégia que os levou a um resultado que entenderam ser a solução correta, o que nem sempre aconteceu mas foram fazendo a retrospeção do seu trabalho, desde a resolução dos primeiros problemas. Na *tarefa 2* por exemplo o grupo 1 continuou a sequência no sentido oposto ao pedido sendo claro na gravação que verificaram várias vezes se estavam a obedecer às condições iniciais. Com o desenrolar da atividade foram melhorando a sua forma de proceder na medida em que iam tendo mais prática de resolução de problemas com padrões.

Os grupos tentaram sempre descobrir uma estratégia de generalização, mesmo quando por tentativa erro ou estimativa verificavam que não era uma estratégia adequada fizeram sempre tentativas para chegar à resposta. É de salientar que a estratégia *tentativa erro* apenas foi utilizada na fase de conjeturas. Na *tarefa 9* o facto de o grupo 1 não se dar por satisfeito com a forma como continuariam a sequência, realizar a operação da multiplicação para eles não era uma estratégia demonstra que houve uma clara evolução no seu desempenho na busca de uma estratégia considerada adequada. A abordagem *recursiva* foi bastante utilizada o que impede alunos de mudar a sua atenção para a estrutura geral, pode ter sido este o facto que determinou que por vezes não conseguissem generalizar.

4.2.2. Dificuldades manifestadas na resolução do problema

Da análise das gravações e das tarefas percebe-se que houve uma melhoria a vários níveis, desde a forma como trabalham em grupo, como argumentam com os colegas, a verificação que fazem para avaliar a razoabilidade da resposta e até as estratégias que utilizam.

Numa fase inicial trabalhar em grupo constituiu uma dificuldade generalizada. Alguns membros não participavam, principalmente os alunos considerados mais fracos nas aulas de matemática. Os bons alunos eram muito individualistas, não gostavam de partilhar as suas ideias, nem confrontar as suas opiniões com os seus colegas passando a resposta da sua cabeça para o papel, os outros membros do grupo copiavam a resposta. À medida que as tarefas foram sendo realizadas todos os alunos começaram a participar de forma mais ativa. Apesar das dificuldades exibidas ao nível da argumentação por parte dos alunos menos bons o facto de conseguirem encontrar características relevantes da sequência permitiu-lhes aumentar a confiança nas suas capacidades e envolver-se mais ativamente no processo de encontrar uma estratégia para responderem às questões. Normalmente eram os bons alunos a verificarem as ideias sugeridas e quando as consideravam corretas punham-nas em prática e por escrito.

Houve também inicialmente dificuldades sobre onde deveriam continuar a sequência, tendo um dos grupos continuado na direção oposta ao pedido. A estranheza e as dúvidas surgidas inicialmente, são devidas provavelmente, ao facto de não estarem habituados a este tipo de tarefas.

Nos procedimentos utilizados também foram identificadas dificuldades ao nível do cálculo mental. Em algumas questões recorreram ao cálculo mental para chegar à resposta o que levou a erros. Em contrapartida na maioria das vezes que utilizaram o algoritmo conseguiram chegar à resposta correta.

Ao longo de todas as tarefas a maior dificuldade que todos os grupos evidenciaram foi sempre explicar por escrito o raciocínio utilizado para continuar a sequência. A falta de hábitos de comunicação matemática e de explicação dos raciocínios poderão ter constituído aspetos limitadores na expansão das ideias. Em alguns casos a questão c) foi deixada em branco ou respondida de forma incorreta. A dificuldade em fazer generalizações a partir de casos particulares é natural para o seu nível de escolaridade mas pode indiciar algumas dificuldades em pensar matematicamente, à falta de hábito em refletir e avaliar o trabalho desenvolvido.

Por último também manifestaram muita insegurança na seleção da estratégia mais adequada quando surgiam várias propostas sobre a forma de continuar a sequência. À medida que se foram desenrolando as sessões, esta situação foi tomando outro rumo. Os alunos foram-se tornando mais sociáveis, passando a conferir maior relevância ao trabalho em conjunto, passando a ouvir as sugestões os colegas e a unir esforços. No final da realização da tarefa e de forma informal gostavam de confrontar as respostas com os outros grupos, para se certificarem que tinham chegado ao resultado correto.

Durante a resolução das tarefas a destreza com que lidavam com problemas melhorou consideravelmente. O Duarte e o Dinis mostraram-se bastante atentos avaliando a resposta dos colegas voltando a ler a questão para contra-argumentar e certificar-se de que a resposta obedece às condições iniciais. Talvez por serem bons alunos a matemática dominam melhor quer a linguagem quer os procedimentos dai que avaliem as soluções apresentadas pelos colegas.

O Afonso apesar de ter um excelente raciocínio revela grandes lacunas ao nível da linguagem escrita e dos procedimentos matemáticos contudo sempre que necessário interpela o grupo para esclarecer as suas dúvidas, ou para saber se o que fez está correto. Faz perguntas e tem muita atenção ao que se passa à sua volta, conseguindo seguir o raciocínio dos colegas com facilidade e explicar o que faz. É um aluno que não desmotiva, que participa, apesar de nem sempre ter a certeza se a sua resposta está correta. Facilmente se convencia de que estava no caminho certo, o que nem sempre era verdade. No entanto após a confrontação dos colegas percebe o erro e envereda por outro caminho.

O Pedro demonstrou um excelente raciocínio, facilidade em conjeturar e mudar radicalmente a abordagem se acha que não é a correta ou se os outros membros do grupo não a considerarem válida. Facilmente desistia da sua opinião e isso impediu-o por vezes de resolver o problema. Fazia várias tentativas para chegar a um resultado alheando-se do grupo contudo revela dificuldade em argumentar em favor das suas opções.

No grupo 1 pelas transcrições é percetível o empenho dos alunos. A Mafalda foi o elemento que de inico apenas escrevia as respostas que o resto do grupo encontrava não demonstrando interesse pela resolução dos problemas, sendo notória a falta de motivação. Na terceira tarefa começa a participar e a contribuir para o trabalho em grupo, demonstrando que tem alguns conhecimentos matemáticos tendo posteriormente participado de forma bastante ativa em várias discussões.

Nos problemas que exigiam a utilização de conceitos matemáticos, apesar de alguns elementos terem algumas dificuldades como por exemplo nos padrões que envolviam potências, o facto de estarem a trabalhar em grupo fez com que ultrapassassem estas lacunas.

Para finalizar podemos afirmar que algumas das dificuldades foram ultrapassadas no decurso deste estudo. As dificuldades mais significativas prendem-se essencialmente, com a generalização de padrões e em explicar por escrito o raciocínio utilizado. Os alunos sentem dificuldade em passar da verbalização para a elaboração de uma resposta que represente a generalização observada.

CAPÍTULO V

TESTE DE AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO

Neste capítulo é descrita a estrutura, os objetivos e a forma como foi realizado o teste de avaliação de desempenho. De seguida é feita uma análise comparativa das questões do pré-teste com o pós-teste entre a turma experimental e a turma de controlo. Por último á feita uma análise estatística comparativa com recurso ao SPSS para estabelecer um paralelismo entre os resultados do pré-teste e do pós-teste de ambas as turmas.

5.1. Caraterização do teste de avaliação de desempenho

O teste de avaliação de desempenho (anexo I) foi construído para a identificação das competências desenvolvidas em resolução de problemas com padrões numéricos, tendo sido implementado nos dias 10 e 11 de janeiro de 2012 à turma de controlo e à turma experimental respetivamente, antes da realização das tarefas.

Para a realização deste teste, os alunos dispunham de 30 minutos e apenas utilizaram material de escrita. As questões apresentadas estavam organizadas em três unidades e incluíam itens onde se pretendia que continuassem as sequências e dois problemas com padrões numéricos de generalização próxima e distante, que requeriam por parte dos alunos a produção de respostas. A avaliação das respostas foi feita através de uma escala holística focada sendo que em cada questão a pontuação varia entre 0 e 3 pontos, dependendo do nível de desempenho dos alunos (anexo II).

Outro aspeto a que foi dada atenção na elaboração dos problemas prende-se com os números neles envolvidos. Estes foram pensados de modo a influenciar as estratégias e os procedimentos utilizados pelos alunos aquando da sua resolução. Assim, foram pensados números que possibilitassem o recurso a múltiplas combinações, uma vez que é a sua estrutura que possibilita ir além do nível do cálculo efetuado por contagem.

Os problemas propostos incluem com maior incidência a adição. Esta decisão teve em atenção o referido na literatura consultada, que refere que a realização de problemas de subtração é mais complexa e cria mais dificuldades aos alunos do que os de adição e que uma melhor compreensão da adição influencia positivamente a resolução de problemas de subtração (Kamii, Lewis & Kirkland, 2001).

No final da experiência de ensino em 28 e 29 de fevereiro voltou a ser implementado o teste. Nesta fase foram utilizados os mesmos procedimentos de análise (anexo II) que tinham já sido aplicados aos resultados do pré-teste, contemplando dados de natureza quantitativa e qualitativa, usando como base a escala de avaliação proposta neste estudo. Posteriormente procedeu-se ao cálculo das classificações médias por questão, para estabelecer uma comparação entre os resultados obtidos no pré-teste e no pós-teste.

5.2. Análise comparativa das questões do pré-teste com o pós-teste

5.2.1. Sequências

Neste primeiro grupo de questões pretendia-se que os alunos continuassem as sequências numéricas indicando os dois termos seguintes. As médias das classificações encontram-se sintetizadas na tabela seguinte (*Tabela 4.*).

Tabela 4. Média das classificações à questão 1. Sequências, da Turma experimental/Turma de controlo

Questão	Pré-teste Turma experimental	Pré-teste Turma de controlo	Pós-teste Turma experimental	Pós-teste Turma de controlo
1.1.	0,87	1,42	1,91	2,00
1.2.	2,52	2,32	3,00	2,84
1.3.	2,57	2,37	2,87	2,95
1.4.	2,57	2,79	2,83	2,79
1.5.	3,00	3,00	3,00	3,00
1.6.	0,87	1,53	1,39	1,63

Na turma experimental, em média as classificações dos alunos melhoraram, tendo-se registado uma subida em todas as questões, com exceção da *1.5.* onde se mantiveram os resultados, uma vez que todos acertaram na resposta a esta questão em ambos os testes. Houve uma melhoria mais acentuada nas questões *1.1* e *1.6.* Estas questões no pré-teste foram aquelas em que menos alunos responderam, talvez por serem sequências numéricas de crescimento não linear. É de salientar que os alunos no pré-teste deixaram em branco as questões às quais não sabiam responder e no pós-teste, apesar de nem sempre bem-sucedidos, fizeram tentativas para chegar à resposta.

Na turma de controlo, nas questões *1.4*. e *1.5.* as classificações mantiveram-se iguais do pré-teste para o pós-teste. À semelhança da turma experimental também todos os alunos encontraram os dois termos corretamente em ambos os testes. Nas restantes questões houve melhorias, apesar de não serem tão significativas como na turma experimental.

5.2.2. A torre dos ímpares

Neste primeiro problema *(figura 45.)* era pedido aos alunos, numa primeira questão, que continuassem a sequência por mais uma linha, a sétima. Na segunda teriam de indicar a soma da oitava linha do triângulo sem a escrever e na terceira era pedido que encontrassem um processo que indicasse a soma dos números de uma determinada linha do triângulo, dependendo do número da linha e que explicassem o raciocínio.

1						
1	**3**					
1	**3**	**5**				
1	**3**	**5**	**7**			
1	**3**	**5**	**7**	**9**		
1	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	
___	___	___	___	___	___	___

Figura 45. Torre dos ímpares

As médias das classificações relativas à questão *2.* encontram-se sintetizadas na tabela seguinte. (Tabela *5.*)

Tabela 5. Média das classificações à questão 2. *A torre dos ímpares*, da Turma experimental/Turma de controlo

Questão	**Pré-teste Turma experimental**	**Pré-teste Turma de controlo**	**Pós-teste Turma experimental**	**Pós-teste Turma de controlo**
2.1	1,96	2,32	2,43	2,53
2.2	0,35	0,53	0,61	0,95
2.3	0,00	0,26	0,30	0,16

Na turma experimental em todas as questões houve uma melhoria do pré-teste para o pós-teste, sendo que na primeira questão houve um maior número de alunos a responder corretamente. Nesta questão os resultados do pós-teste mostram que apenas um aluno não respondeu e alguns apenas escreveram o último termo da sequência. Na segunda questão, apesar de existirem melhorias, os resultados mostram que os alunos tiveram bastantes dificuldades em perceber o que lhes era pedido. Interpretaram que não podiam escrever a soma, quando o que se pretendia era que não escrevessem a oitava linha do triângulo. Na última questão, apesar da melhoria pouco significativa, é de referir que no pré-teste nenhum aluno respondeu a esta questão. No pós-teste dois alunos descobriram uma estratégia explícita e responderam corretamente. Quase todos fizeram tentativas para chegar ao resultado, contudo, poucos foram bem-sucedidos.

Na turma de controlo os resultados mostram que na primeira e na segunda questão existiram melhorias, na terceira os resultados pioraram do pré-teste para o pós-teste. Em todas as questões no pré-teste os resultados tinham sido superiores aos da turma experimental, tendo-se verificado que na questão *2.1.* as melhorias foram menores que na turma experimental, ao passo que na questão *2.2.* foram mais significativas.

5.2.3. Ziguezague dos números

Neste problema (*figura 46.)* era pedido aos alunos, numa primeira questão, que continuassem a sequência por mais uma linha, a quinta. Na segunda questão era pedido que indicassem em que linha apareceria o número 50, tendo que explicar detalhadamente e, por último, deveriam indicar a soma dos números da décima quinta linha sem a escrever e explicar o raciocínio.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
10	**9**	**8**	**7**	**6**	
	11	**12**	**13**	**14**	**15**
20	**19**	**18**	**17**	**16**	
	___	___	___	___	___

Figura 46. Ziguezague dos números

As médias das classificações relativas à questão *3.* encontram-se sintetizadas na tabela seguinte. (*Tabela 6.*)

Tabela 6. Média das classificações à questão 3. *Ziguezague dos números*, da Turma experimental/Turma de controlo

Questão	Pré-teste Turma experimental	Pré-teste Turma de controlo	Pós-teste Turma experimental	Pós-teste Turma de controlo
3.1.	2,48	2,53	2,74	2,53
3.2.	0,87	2,05	1,70	2,42
3.3.	0,52	0,63	0,70	0,95

À semelhança das questões anteriores, na turma experimental em todas as questões registaram-se melhorias do pré-teste para o pós-teste, sendo na segunda questão, onde houve um maior aumento do número de alunos a responder corretamente. Na questão *3.1.* os resultados do pós-teste mostram que apenas dois alunos não responderam corretamente. Na questão *3.2.* apesar de haver melhorias os resultados mostram que os alunos têm bastantes dificuldades em explicar os procedimentos utilizados. Na última questão apenas uma aluna descobriu uma estratégia explícita e respondeu corretamente. Todos os outros que responderam escreveram a décima quinta linha para depois indicar a soma. À semelhança da questão *2.2.* do primeiro problema, alguns alunos entenderam que não podiam escrever a soma. Alguns alunos optaram pela estratégia da contagem apesar de ser um processo moroso quando se está perante a descoberta de um termo distante. No pré-teste esta questão foi deixada em branco pela maioria dos alunos, tendo no pós-teste existido já algum trabalho, embora não tenham conseguido chegar a um resultado final.

Na turma de controlo os resultados do pré-teste foram melhores que os da turma experimental. No pós-teste na primeira questão os resultados pioraram do pré-teste para o pós-teste, na segunda e na terceira questão melhoraram. Na segunda questão a melhoria não foi tão significativa como a da turma experimental.

Os resultados mostram que na turma experimental houve uma evolução em todas as questões do pré-teste para o pós-teste, mais significativa, quando se trata de encontrar um termo próximo. Na turma de controlo, apesar de os resultados no pré-teste serem superiores aos da turma experimental, no pós-teste na questão *2.2.* e *3.3.* houve melhorias mais significativas que na turma experimental, mas nas restantes as melhorias não são tão significativas. Nas questões *1.2.*, *1.4.*, *2.3.* e *3.1.* as classificações desceram da primeira para a segunda aplicação do teste, facto que não se verificou em nenhuma questão na turma experimental.

Através dos resultados é visível que os alunos continuam a demonstrar bastantes dificuldades na generalização distante, comparativamente com a generalização próxima. Utilizaram com mais frequência as estratégias *recursiva* e da *diferença* para resolver questões de generalização próxima, ambas adequadas a questões desta natureza.

Os resultados revelam ainda que os alunos apresentam dificuldades na linguagem natural. Este facto influencia determinantemente a passagem da linguagem natural para a linguagem matemática. Se os alunos não conseguem perceber o enunciado de um problema como vão conseguir responder? As questões relativas à soma das linhas são exemplo disso mesmo.

5.3. Análise comparativa dos resultados do pré-teste com o pós-teste

Os dados estatísticos para serem interpretados com rigor e qualidade é fundamental o recurso a uma ferramenta de estatística. Assim o pré-teste e o pós-teste foram analisados com recurso ao SPSS. Desta forma é possível estudar o impacto da experiência de ensino na evolução dos alunos de uma forma mais objetiva.

As figuras *47.* e *48.* apresentam a distribuição das classificações dos alunos da turma experimental e da turma de controlo no pré-teste e no pós-teste respetivamente. O diagrama de extremos e quartis permite fazer um estudo exploratório, sintetizando os dados, mas também analisar frequências e identificar valores isolados (*outliers*) que tendem a distorcer a média e o desvio padrão. Os diagramas apresentados foram construídos com base nas classificações globais dos alunos, em cada um dos testes, numa cotação máxima de 36 pontos.

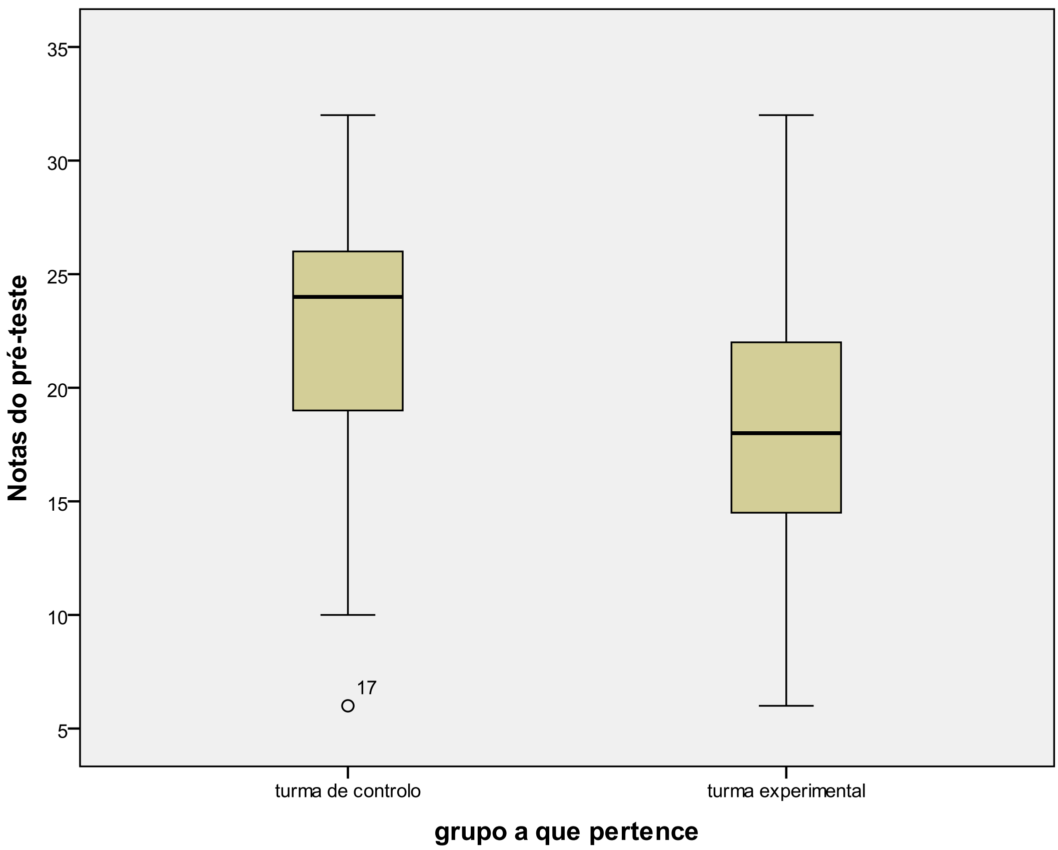


Figura 47. Distribuições dos resultados do pré-teste

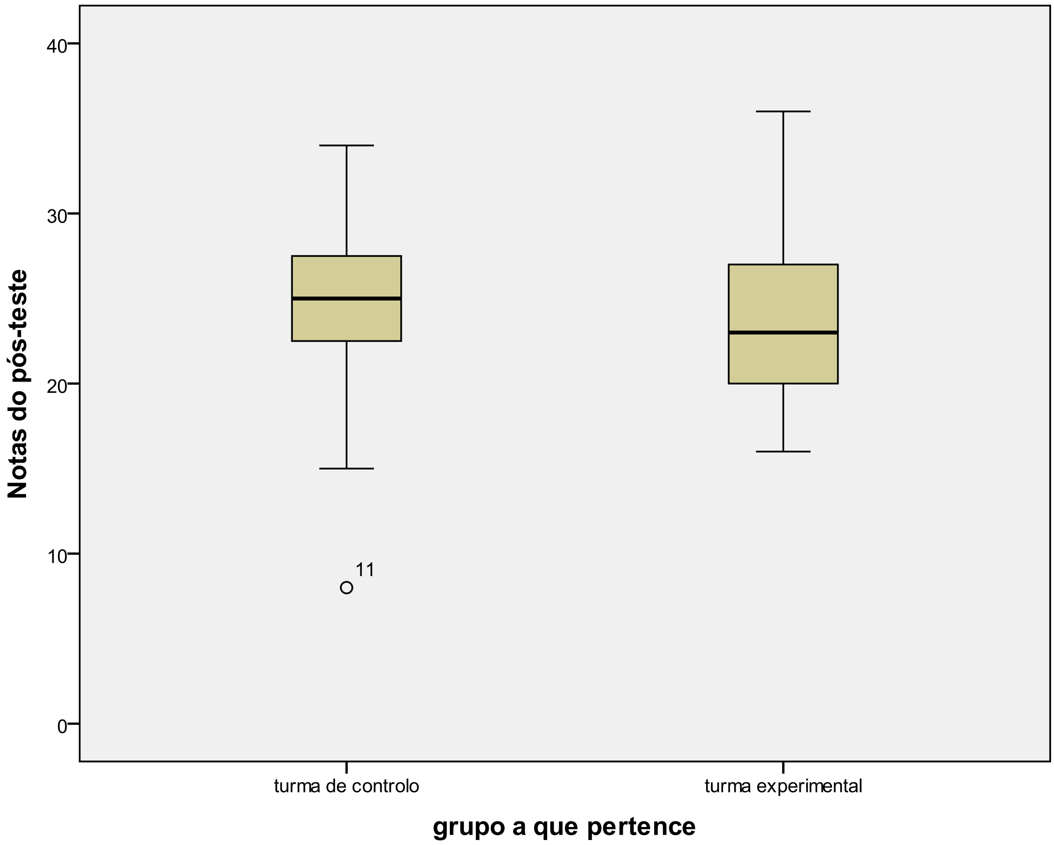


Figura 48. Distribuições dos resultados do pós-teste

Analisando os diagramas apresentados, relativos aos resultados do pré-teste e do pós-teste, conclui-se que a turma experimental melhorou bastante o seu desempenho da primeira para a segunda aplicação. Os resultados do pré-teste mostram que a turma de controlo obteve melhores resultados que a turma experimental. No pós-teste ambas as turmas melhoraram tendo resultados muito próximos, contudo, as melhorias foram mais significativas na turma experimental que na turma de controlo. Conjugando esta informação com os valores relativos às medidas de localização (*Tabela 7.*), verifica-se que no pré-teste há uma maior amplitude amostral e uma maior dispersão dos dados em ambas as turmas sendo mais acentuado na turma experimental.

Tabela 7. Medidas de localização relativas aos resultados do pré-teste e do pós-teste

	Turma de Controlo		**Turma Experimental**	
	Pré-teste	**Pós-teste**	**Pré-teste**	**Pós-teste**
Média	21,74	24,74	18,57	23,48
Mínimo	6	8	6	16
1º Quartil (Q1)	19	22	14	20
Mediana	24	25	18	23
3º Quartil (Q3)	26	28	22	27,5
Máximo	32	34	32	36

No pré-teste a observação mínima é de 6 pontos e a observação máxima de 32 em ambas as turmas. Na turma de controlo, o mínimo de 6 pontos corresponde a um *outlier*, elemento que se entendeu manter na amostra.

No pós-teste, a turma experimental regista um mínimo de 16 pontos e um máximo de 36, resultado mais elevado do que na aplicação anterior do teste. Na turma de controlo a observação mínima é de 8 pontos e a máxima de 34.

A análise da distância inter-quartil permite verificar que na turma experimental no pré-teste 50% dos alunos obtiveram classificações situadas entre 14 e 22 pontos, enquanto no pós-teste esses limites passaram a ser de 20 e 27,5 pontos. Na turma de controlo no pré-teste 50% dos alunos obtiveram classificações situadas entre 19 e 26 pontos, enquanto no pós-teste esses limites passaram a ser de 22,5 e 27,5 pontos. Estes dados revelam a existência de diferenças no desempenho dos alunos da turma experimental do pré-teste para o pós-teste. Para analisar se estas diferenças são significativas e compreender os efeitos da experiência de ensino no desempenho dos alunos, procedeu-se à comparação deste grupo de alunos com o grupo de controlo. Foi então efetuada uma análise de covariância (ANCOVA), estipulando como fator o grupo (2=Turma experimental, 1=Grupo de controlo), como variável dependente os resultados do pós-teste e como covariante os resultados do pré-teste. A variável pré-teste foi introduzida como variável independente de modo a controlar, pelo menos parcialmente, a sua influência no desempenho dos alunos no pós-teste, permitindo, desse modo, a análise da relação direta entre a variável dependente (pós-teste) e o fator (grupo). Antes de aplicar a ANCOVA é fundamental verificar os pressupostos que lhe estão subjacentes, nomeadamente: normalidade das distribuições; homogeneidade das variâncias; relação linear entre a covariante e a variável dependente; homogeneidade das retas de regressão; e a fiabilidade da medição da covariante.

A tabela *8.* refere-se aos valores obtidos a partir dos testes de normalidade, para as distribuições dos resultados da turma experimental e do grupo de controlo, no pré-teste e no pós-teste, respetivamente.

Tabela 8. Testes de normalidade para a distribuição dos resultados dos testes

Tests of Normality

		Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Grupo a que pertence	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Notas do pré-teste	Turma de Controlo	,199	19	,046	,919	19	,107
	Turma Experimental	,142	23	,200*	,952	23	,326
Notas do pós-teste	Turma de Controlo	,201	19	,042	,917	19	,100
	Turma Experimental	,120	23	,200*	,959	23	,438

a. Lilliefors Significance Correction

*. This is a lower bound of the true significance.

Dado que, tanto na turma A como no grupo de controlo, $p > 0,05$, conclui-se que as distribuições analisadas não são significativamente diferentes da distribuição normal, quer no pré-teste quer no pós-teste.

Para testar a hipótese nula de que as duas turmas têm a mesma variância utilizou-se o teste de Levene. Na tabela *9.* podem ser observados os valores relativos à aplicação do referido teste.

Tabela 9. Teste da homogeneidade das variâncias para a variável pós-teste – Turma experimental e Turma de controlo

Levene's Test of Equality of Error Variances[a]
Dependent Variable: Notas do pós-teste

F	df1	df2	Sig.
,032	1	40	,859

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

a. Design: Intercept + pré-teste + grupo

Como neste caso $p > 0,05$, pode concluir-se que a varável dependente pós-teste, não apresenta variâncias diferentes para os dois grupos em estudo, neste caso a turma experimental e o grupo de controlo. Para estudar a linearidade entre a covariante (pré-teste) e a variável dependente (pós-teste) procedeu-se ao cálculo do coeficiente de correlação de Pearson (*r*), para a turma experimental e para o grupo de controlo (tabela *10.*), de forma a medir a intensidade da associação linear existente entre as duas variáveis.

Tabela 10. Correlação entre pré-teste e pós-teste – Turma experimental

Correlations

		Notas do pós-teste	Notas do pré-teste
Notas do pós-teste	Pearson Correlation	1	,652**
	Sig. (2-tailed)		,000
	N	42	42
Notas do pré-teste	Pearson Correlation	,652**	1
	Sig. (2-tailed)	,000	
	N	42	42

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Analisando a informação apresentada na tabela *10*, conclui-se que o coeficiente de correlação no pré e no pós-teste é positivo (r=1 e r=0,652), existindo uma relação linear estatisticamente significativa (p<0,05) entre as duas variáveis.

O estudo da homogeneidade das retas de regressão permite verificar se a interação entre a covariavel (pós-teste) e o fator (grupo) é significativa.

Consultando a tabela *11.*, verifica-se que F(1,39)=0,096 e p>0,05, o que indica que não existe uma interação significativa entre os resultados do pré-teste e o grupo. Estes resultados permitem concluir que o pressuposto de homogeneidade das retas de regressão não é violado, abrindo a possibilidade de analisar o impacto do fator (grupo) na variável dependente (pós-teste).

A fiabilidade da covariante (pré-teste) foi medida antes do início da experiência de ensino, usando o alpha de cronbach, instrumento útil para demonstrar a fiabilidade da medida do instrumento utilizado na investigação. O valor obtido através desta análise estatística foi 0,802 podendo considerar-se um índice de fiabilidade bom tendo em conta que a escala para o coeficiente de fiabilidade varia entre 0,00 e 0,99. De um modo geral, um instrumento é classificado como tendo fiabilidade apropriada quando o alpha é pelo menos 0.70 (Nunnally, 1978).

Tabela 11. Homogeneidade das retas de regressão na interação grupo – pré-teste

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: Notas do pós-teste

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	561,239[a]	2	280,620	14,502	,000
Intercept	756,295	1	756,295	39,084	,000
Pré-teste	544,758	1	544,758	28,152	,000
Grupo	1,849	1	1,849	,096	,759
Error	754,666	39	19,350		
Total	25604,000	42			
Corrected Total	1315,905	41			

a. R Squared = ,427 (Adjusted R Squared = ,397)

Esta análise estatística pretendeu avaliar o alcance das diferenças nos resultados dos alunos, após a exploração das tarefas. Foram construídos os diagramas de extremos e quartis, associados aos resultados do pré-teste e do pós-teste nas duas turmas. Esta representação gráfica permitiu analisar a distribuição dos dados e identificar a existência de possíveis *outliers* (valores isolados). Comprovada a existência de uma melhoria mais significativa na turma experimental do pré-teste para o pós-teste, era importante avaliar se essa diferença era estatisticamente significativa. Assim, a turma experimental foi comparada com a turma de controlo, tendo para isso sido usada a análise de covariância (ANCOVA). Antes de executar a ANCOVA, foram verificados os pressupostos para a sua aplicação, nomeadamente: a normalidade das distribuições; a homogeneidade das variâncias; a existência de uma relação linear entre a covariante (pré-teste) e a variável dependente (pós-teste); a homogeneidade das retas de regressão; e a fiabilidade da medição da covariante. Este procedimento permitiu assim analisar o efeito do fator grupo na variável dependente, pós-teste, controlando os efeitos da variável pré-teste (covariante).

Dos resultados é possível concluir que apesar de não ser estatisticamente significativo, a turma experimental do pré-teste para o pós-teste melhorou mais que a turma de controlo.

CAPÍTULO VI

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo é constituído por quatro partes. Na primeira são salientados os objetivos que orientaram este trabalho e apresentadas as conclusões organizadas de acordo com as questões de investigação propostas inicialmente, terminando com uma reflexão final sobre o trabalho desenvolvido. Na segunda parte é feita uma reflexão sobre as implicações para a prática profissional e por último são apresentadas as limitações e algumas recomendações para futuras investigações.

6.1. Conclusões do estudo

O presente estudo surge na sequência das dificuldades evidenciadas pelos alunos relativamente à temática da resolução de problemas aliada ao gosto particular relativo aos padrões numéricos. Outra razão para a escolha do tema prende-se com as dificuldades dos alunos em compreender os cálculos que efetuam, como os efetuam, porque os efetuam em avaliarem se estes são adequados ou não à situação.

No trabalho desenvolvido por Barbosa (2009) a componente visual aliada à resolução de problemas com padrões demonstrou que houve uma clara evolução no desempenho dos alunos. Com recurso a problemas com padrões exclusivamente numéricos, qual será o desempenho dos alunos?

Assim, nesta investigação procura-se compreender as estratégias de generalização utilizadas pelos alunos e as dificuldades que ocorrem aquando da resolução de problemas com padrões exclusivamente numéricos, bem como se existe alguma melhoria no seu desempenho.

Pretendeu-se então dar resposta às seguintes questões de investigação:

(i) Que estratégias de generalização é possível identificar, na resolução de problemas com padrões exclusivamente numéricos, no trabalho escrito realizado pelos alunos?

(ii) Que dificuldades manifestam os alunos na resolução de problemas ao longo das tarefas?

(iii) Existe alguma melhoria no desempenho dos alunos após o trabalho com tarefas de resolução de problemas com padrões exclusivamente numéricos?

Na recolha de dados participaram durante dois meses, duas turmas do sexto ano de um Agrupamento de Escolas de Guimarães onde foram utilizadas gravações áudio e vários tipos de documentos. Optou-se por uma metodologia mista, predominantemente qualitativa, que incluiu um pré-teste, um pós-teste e dez tarefas de resolução de problemas com padrões exclusivamente numéricos.

Assim, procurou-se conhecer as estratégias e as dificuldades dos alunos para resolver problemas com padrões numéricos e identificar a evolução que os alunos evidenciam relativamente às estratégias de generalização após a realização das tarefas.

(i) Que estratégias de generalização é possível identificar, na resolução de problemas com padrões exclusivamente numéricos, no trabalho escrito realizado pelos alunos?

Durante a fase de exploração das tarefas os alunos utilizaram várias estratégias de generalização, no entanto algumas dessas estratégias foram utilizadas de forma mais frequente que outras. A análise das resoluções apresentadas pelos grupos permitiu concluir que, as estratégias aplicadas com maior frequência foram a diferença e a recursiva seguida pela explícita e termo unidade em igual número de vezes.

Amit and Neria (2008) referem que os estudantes, assim como são expostos a vários estratégias de resolução de problemas, eles também devem ser expostos às estratégias de generalização e devem ganhar experiência na resolução de problemas que promovam a generalização. Neste estudo, a análise de estratégias de generalização passa pela exploração de padrões repetitivos (Threlfall, 1999) e padrões lineares (Zazkis & Liljedahl, 2002) sendo que nesta primeira questão pretendemos averiguar o tipo de estratégias que os alunos utilizam. Ponte e Serrazina (2000) definem estratégia como uma abordagem que pode ser usada em diversos problemas.

Das estratégias tratadas na revisão de literatura a tentativa e erro apenas foi utilizada em situações de conjetura e teste. Segundo Mason (1996), para garantir uma generalização bem-sucedida, este é o contexto ideal de aplicação da tentativa e erro, tendo em consideração todas as condições do problema e compreendendo a relação entre as variáveis apresentadas.

A estratégia explícita surge a partir da tarefa 4 de forma muito frequente no trabalho dos grupos e maioritariamente na resolução de questões de generalização distante.

Nas três primeiras tarefas todos os grupos utilizaram a estratégia da diferença para responder à questão a) e b). Nas tarefas seguintes esta estratégia nunca mais voltou a ser utilizada. Os grupos, na sexta tarefa e nas posteriores a esta, várias vezes optaram por utilizar uma estratégia para encontrarem um termo próximo e mudaram de estratégia ao responderem à questão b), optando por outra que permitisse uma resolução mais rápida.

Na resolução dos problemas propostos, alguns grupos, relacionando os seus conhecimentos, selecionaram a estratégia apropriada a cada problema, outros optaram por uma estratégia e apesar de reconhecerem que não seria a mais adequada não tentavam encontrar outra. É fundamental que os alunos sejam capazes de aplicar e adaptar uma grande diversidade de estratégias na resolução de problemas (NCTM, 2007). De acordo com Polya (2003) o indivíduo deve decidir sobre o caminho a seguir para descobrir a solução do problema, o que envolve a tomada de decisão sobre a estratégia a implementar, bem como saber quando a usar.

Ao longo da resolução dos problemas, alguns alunos revelaram capacidades, como sugere Polya (2003), para delinear novas estratégias na resolução de problemas conducentes a relações corretas. Ao optaram por fazer uso de estratégias diferentes demonstraram não só a capacidade de definir e implementar uma estratégia, bem como a capacidade de a saber usar. Na fase de verificação sempre que verificavam que o pressuposto não estava correto mudavam a abordagem e tentavam uma nova estratégia. De acordo com este autor, quando um indivíduo decide resolver um problema, envolve-se no seu pensamento e na tarefa de compreender esse problema.

As estratégias utilizadas, principalmente a recursiva, são bastante úteis quando se trata da descoberta de termo seguinte na sequência, no entanto podem revelar-se difícil de aplicar a termos distantes e dificultar a generalização. Os alunos por vezes reconheceram que se tratava de um processo exaustivo e que demoraria bastante tempo, contudo não mudaram de estratégia. A partilha de estratégias e de conclusões durante a discussão da tarefa ajuda a reconhecer a regularidade existente e a tirar conclusões.

Do trabalho realizado pelos alunos verificamos que através da resolução de problemas onde a procura de padrões é a estratégia fundamental, os alunos desenvolvem os seus conhecimentos e experimentam a utilidade da matemática. Estas tarefas levaram os alunos a propor e testar conjeturas, conduzindo-os posteriormente à formulação de regras e à sua formalização (Vale *et al.*, 2006).

(ii) Que dificuldades manifestam os alunos na resolução de problemas ao longo das tarefas?

A investigadora observou grandes dificuldades iniciais por parte de alguns alunos pelo facto de estarem a trabalhar em grupo. Inicialmente alguns alunos não colaboravam com o grupo e outros manifestavam grandes dificuldades em lidar com o facto de terem de chegar a consenso para escreverem a resposta aceite por todos. Todos os grupos evidenciaram diversas dificuldades, nomeadamente no estabelecimento do significado de algumas palavras como números, algarismos, unidades e potências; na comunicação escrita, ao nível da explicação dos raciocínios usados na resolução das tarefas. Provavelmente, tais dificuldades são devidas ao facto de não estarem habituados a tarefas exigentes mais a nível cognitivo e não tanto a nível de procedimentos.

Também foram identificadas dificuldades ao nível do cálculo mental. Em algumas questões recorreram ao cálculo mental para chegar à resposta, o que levou a erros. A aquisição de destrezas de cálculo mental promove o desenvolvimento da compreensão numérica ao encorajar a procura de operações mais fáceis (Matos & Serrazina, 1996). Por outro lado em alguns casos a importância que atribuíram ao algoritmo eliminou os esforços para inventarem as suas próprias estratégias, acreditando que aquele era o único processo de resolução. Serrazina & Ferreira (2006) afirmam que muitas vezes este processo é tão mecânico, que mesmo em situações de subtração cujo resultado é um número superior ao aditivo a criança não tem a perceção de que aquele resultado é necessariamente inválido.

Foi também relativamente difícil para a maioria dos grupos, durante as primeiras tarefas, avaliarem o trabalho efetuado no que se refere à tomada de decisões, o que corrobora a perspetiva de Charles, Lester e O`Draffer (1987) que referem que muitos indivíduos iniciam a resolução de um problema, escolhem e implementam uma estratégia sem fazerem a avaliação das suas decisões, sem refletirem sobre o que estão a tentar fazer, o que já fizeram e o que ainda pretendem fazer.

Mason, *et al.*, (1985) consideram que os diferentes passos dos argumentos que se constroem devem ser cuidadosamente verificados pois é fácil convencermo-nos das nossas ideias mas devemos desenvolver a capacidade de argumentar. Explicar o que para nós é óbvio nem sempre é tarefa fácil e menos ainda é convencer com os nossos argumentos. O trabalho em grupo para a resolução das tarefas contribui para um aumento da capacidade de argumentar. Estes autores defendem ainda que o pensamento matemático é provocado pelo desafio, pela contradição, pela surpresa e pela deteção de falhas na compreensão; é favorecido num ambiente de desafio, de reflexão e é aperfeiçoado através da prática reflexiva. A intervenção leva a que os alunos aumentem a capacidade de refletir sobre o seu próprio pensamento tendo a falta de hábitos de comunicação matemática e de explicação dos raciocínios ter constituído aspetos limitadores na expansão das ideias dos grupos ao nível da escrita. A comunicação é simultaneamente um indicador da natureza do processo de ensino-aprendizagem e uma condição necessária para o seu desenvolvimento (Ponte, Matos & Abrantes 1998).

(iii) Existe alguma melhoria no desempenho dos alunos após o trabalho com tarefas de resolução de problemas com padrões exclusivamente numéricos?

Para verificar se existiu uma melhoria no desempenho dos alunos recorreu-se à análise estatística comparativa do pré-teste com o pós-teste onde podemos comprovar que existiram melhorias quer da turma experimental quer da turma de controlo.

Do estudo dos diagramas de extremos e quartis, associados aos resultados do pré-teste, a turma experimental além de obter piores resultados que a turma de controlo também detinha uma maior amplitude amostral e uma maior dispersão dos dados. No pós-teste esta situação alterou-se tendo existido uma evolução que apesar se não ser estatisticamente significativa mostra que ambas as turmas ficaram bastante próximas tendo ocorrido melhorias mais significativas na turma experimental.

No que respeita às classificações médias apuradas, a turma experimental melhorou em todas as questões com exceção da questão *1.5.* em que manteve os resultados. A turma de controlo demonstrou mais oscilações, tendo mantido as médias nas questões *1.4.*, *1.5.* e *3.1.* e piorado na questão *2.3*. Observa-se ainda que as melhorias são mais significativas na turma experimental que na turma de controlo. Os melhores resultados registaram-se maioritariamente no prolongamento de sequências com padrões de repetição ou lineares e os piores nas questões *2.3.* e *3.3.* onde tinham de explicar o raciocínio. É de referir que na questão *2.3.* dois alunos da turma experimental no pós-teste responderam corretamente. Comparando os resultados obtidos nas questões *2.2.* e *3.2.*, verifica-se que a média das classificações aumenta, tendo também aumentado o número de abordagens para chegarem ao resultado apesar de nem sempre bem-sucedidas.

A turma experimental apresentou melhores resultados no pós-teste, tanto ao nível da generalização próxima como da generalização distante, embora as diferenças mais significativas se tenham registado na generalização próxima, nas questões *2.2.* e *3.2.*.

A comparação dos resultados do pré-teste e do pós-teste permitiu concluir que houve evolução no desempenho dos alunos ao nível da generalização. Tal como Ponte e Serrazina (2000) afirmam, aprende-se matemática resolvendo problemas.

Os alunos identificaram facilmente diversas regularidades relativas a um padrão, encontrando com bastante facilidade o termo seguinte. Com mais dificuldade, de acordo com essas regularidades preveem a localização de números que não estão representados e menos frequentemente ainda o generalizam e explicam o seu raciocínio. Os resultados deste estudo refletem que não basta aprender os procedimentos; é necessário transformá-los em instrumentos de pensamento (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999).

Qualquer que fosse a estratégia escolhida pelos alunos, o processo foi sempre o mesmo, procurar padrões e generalizar, o que nem sempre conseguiram. A incapacidade para generalizar traduz uma certa incapacidade de pensar matematicamente, uma vez que a generalização é a essência do pensamento matemático. (Mason *et al.*,1985). Como processos subjacentes ao pensamento matemático consideram o particularizar, generalizar e argumentar (Abrantes *et al.*, 1999).

No final desta unidade, verificou-se que esta abordagem teve um impacto positivo nas capacidades dos alunos para generalizarem uma regra partindo de situações concretas, o que não é mais do que pensar algebricamente, além de terem ganho confiança nas suas capacidades para descobrir uma forma de chegar ao resultado. No entanto a frequência de utilização das estratégias de generalização sugere que os alunos apresentam uma tendência para generalizar recursivamente, em vez de procurarem estabelecer uma relação entre as variáveis dependente e independente (Orton e Orton, 1999).

6.1.1. Reflexão final

Para finalizar é importante referir que foi possível observar uma evolução significativa da atitude e da forma de encarar a resolução de problemas, em grupo e individualmente. No decorrer da experiência, principalmente a partir da segunda tarefa, percebe-se uma crescente abertura, vontade e facilidade em trabalhar em grupo, permitindo a partilha de conhecimentos matemáticos e linguísticos. Todos os alunos se mostraram progressivamente mais motivados e empenhados na realização das tarefas, inclusive os menos bons e os que afirmaram no início não gostar de matemática.

A metodologia agradou a todos os alunos, sendo consensual que é mais fácil ultrapassar as dificuldades quando há vários alunos a pensar, quando ideias diferentes se podem complementar para atingir o objetivo, neste caso adotar uma estratégia que permita chegar à resposta correta. Consideramos também importante, que os alunos tivessem um papel ativo na construção do seu conhecimento, dado que as tarefas propostas têm um carácter problemático. Este tipo de tarefas proporcionou um ambiente de sala de aula que os envolveu na atividade matemática, na partilha de ideias e descobertas.

A resolução de problemas em grupo favoreceu em muito a persistência dos alunos na procura de estratégias que lhes permitissem responder à questão. Segundo Polya (p. 26, 2003), "ao tentar resolver problemas, temos de observar e imitar o que outras pessoas fazem quando resolvem problemas". Alguns alunos que nas primeiras duas tarefas estavam completamente alheios ao trabalho do grupo mudaram a atitude sendo que a certa altura já opinavam e davam sugestões. A cooperação foi surgindo gradualmente ao longo das semanas, tendo favorecido os alunos mais fracos. Podemos dizer que todos os alunos se envolveram de forma crescente na resolução de problemas, revelaram uma atitude ativa, planeando e decidindo o que fazer e como fazer, testando a sua validação com o intuito de chegar à resposta.

Os alunos compreenderam os enunciados, analisaram os casos particulares e interiorizaram que sempre que verificavam que as conjeturas não estavam corretas tinham de as reformular. Em tarefas desta natureza é bastante importante o momento da discussão geral uma vez que, dadas as explorações que se fazem do padrão, os alunos partilham entre si as suas descobertas. A comunicação, enquanto partilha e debate de ideias, é essencial não só para exprimir e clarificar o próprio pensamento, mas também para a construção significativa de conhecimento (Wood, Merkel & Uerkwitz, 1996).

Para finalizar, e depois de analisados todos os dados que integraram este trabalho de investigação verificamos que os resultados corroboram a opinião de Polya, "se o estudante conseguir resolver o problema que tem entre mãos, terá acrescentado alguma coisa à sua capacidade de resolver problemas (...) aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os." (Polya, p. 26, 2003)

6.2. Implicações para a prática pessoal e profissional

Ensinar matemática é uma tarefa complexa. Não se pode dizer que exista uma regra para os alunos a aprenderem ou para os professores a ensinarem com eficiência, face à heterogeneidade das turmas que lecionam. Mas, atualmente, e devido à grande projeção que se tem dado ao estudo/ensino da matemática, existem diversas orientações sobre as formas de a ensinar que parecem ser mais adequadas. Estas devem ser tidas em linha de conta na orientação de certas tomadas de decisão da atividade profissional. Para tal, os professores devem saber e compreender a matemática que ensinam, assim como, devem ser capazes de utilizar os seus conhecimentos de forma flexível no decurso das suas atividades letivas/didáticas.

Com a realização destas tarefas o propósito era que os alunos fossem capazes de resolver problemas pelo que deveriam conceber e pôr em prática estratégias de resolução verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados, discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Analisados os dados é, agora, importante refletir sobre todo o trabalho desenvolvido, no qual se enquadra, também, uma análise da evolução enquanto profissional do ensino. Assim, houve uma enorme satisfação com a realização deste estudo e com os resultados obtidos, foi bastante gratificante ter sido possível realizá-lo com alunos que, de certa forma, fizeram sentir o que é concretizar um trabalho que, espera-se, os faça ter outra conceção da matemática. A aprendizagem pela descoberta foi bastante motivadora para os alunos tendo proporcionado uma visão diferente do ensino da matemática, afastando-se das normas de uma aula tradicional.

A formação de atitudes mais positivas da parte dos alunos, a realização de tarefas mais apelativas e um ensino mais direcionado para a resolução de problemas poderão, certamente, contribuir para fomentar o gosto pela resolução de problemas e pela matemática.

Um dos principais objetivos dos programas de matemática escolar consiste em estimular a autonomia e a aprendizagem dos alunos. Os professores devem por isso conhecer os alunos, ter em conta a sua faixa etária e, por isso, selecionar muito bem as estratégias pedagógicas e de avaliação (NCTM, 2007).

Com a realização desta investigação aprofundou-se o conhecimento pessoal sobre a resolução de problemas, esta jornada tornou-se extremamente enriquecedora, na medida em que permitiu encarar e perspetivar de uma maneira diferente o ensino e a aprendizagem da Matemática. A fase da recolha de dados foi particularmente desafiante e possibilitou a nível profissional e pessoal uma relação pedagógica mais segura com a Matemática. De facto, este estudo constituiu-se como a primeira oportunidade de estudar e compreender determinados aspetos envolvidos na prática, proporcionando um novo olhar sobre os alunos e sobre a atividade docente. Conduzir investigação torna-se um novo modo de refletir sobre os alunos, a mudança e nós próprios (Serrazina e Oliveira, 2002).

Atendendo ao desempenho dos alunos na resolução de problemas, sente-se necessidade de continuar o processo de aprendizagem e de compreensão das suas dificuldades, de modo a melhorar a prática neste tema. Importa proporcionar múltiplas oportunidades para que os alunos resolvam diferentes problemas numa diversidade de contextos, interpretem enunciados, analisem e reflitam sobre as estratégias de resolução, bem como a adequação dos resultados obtidos para que consolidem conhecimentos. É igualmente essencial criar oportunidades para que os alunos argumentem e comuniquem os seus raciocínios, ideias e dificuldades.

Para finalizar, a realização deste estudo foi muito gratificante e constituiu um importante momento de aprendizagem porque permitiu aprofundar o conhecimento matemático, didático e científico numa área da Matemática aprazível e simultaneamente desafiante.

6.3. Limitações

As limitações inerentes a este estudo prendem-se exclusivamente com o facto de ter sido aplicado a um determinado nível de escolaridade numa determinada escola, assim, os resultados estão diretamente associados às duas turmas que nele participaram. Atendendo a estes pressupostos os resultados obtidos em termos de procedimentos estatísticos não podem ser generalizáveis a outros contextos. Contudo, este estudo será uma mais-valia sobre o conhecimento que se tem sobre desempenho dos alunos na resolução de problemas com padrões numéricos.

6.4. Recomendações para futuras investigações

A resolução de problemas é uma atividade fundamental na disciplina de Matemática e dadas as dificuldades manifestadas pelos alunos em generalizar, considera-se ser de todo o interesse a implementação de estudos com padrões e outros, em crianças mais novas, nomeadamente, no 4.º ano de escolaridade. Tal implementação permitirá o desenvolvimento de competências ao nível do raciocínio e da comunicação matemática. Considera-se importante desenvolver atividades onde os alunos possam comunicar as suas ideias e compreender as ideias dos outros, de forma a raciocinar matematicamente. Um ensino mais direcionado para a resolução de problemas com recurso a tarefas apelativas poderá certamente, contribuir para fomentar o gosto pela resolução de problemas. De acordo com o Programa do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007) o pensamento algébrico atravessa, de forma clara, todos os ciclos de ensino, devendo dar-se especial atenção à investigação de padrões, à identificação de relações e à generalização.

A argumentação matemática como capacidade transversal do programa da disciplina de Matemática e sendo a Álgebra uma das formas de comunicar ideias gerais, considera-se ainda ser importante que se continue a realizar investigação no âmbito do ensino e da aprendizagem da Álgebra, em Portugal, nos vários anos de escolaridade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P. (1989). *Um (bom) problema (não) é (só)...*, Educação e Matemática, 8, 7-10 e 35.

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Amaro. G., Cardoso, F. & Reis, P. (1994). *Terceiro estudo internacional de matemática e ciências, relatório internacional, desempenho de alunos em matemática e ciências: 7.º e 8.º anos*. Lisboa: IIE.

Amit, M., & Neria, D. (2008). *''Rising to the challenge'': using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students.* ZDM Mathematics Education, 40, 111–129.

APPA Group (2004). A toolkit for analysing approaches to algebra. In Stacey, K., Chick, H. & Kendal, M. (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (p. 73-96). Norwell: Klumer.

Barbosa, A. (2009). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico.* Tese de Doutoramento. Braga: Universidade do Minho.

Barbosa, A., Borralho, A., Cabrita, I., Fonseca, L. Pimentel, T. e Vale, I. (2008). Padrões no Currículo de Matemática: Presente e Futuro. In Luengo, R., Alfonso B., Camaho, M. & Nieto B. (Eds.), *Investgación en Educación Matemática* (p. 477-493). Badajoz: SEEM e SEIEM.

Becker, J. & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In Chick, H. & Vincent, J. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 121-128.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico*. Dissertação de Mestrado. Lisboa: Universidade de Lisboa.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: Um projecto curricular no 8º ano.* Tese de doutoramento. Universidade de Lisboa. Lisboa.

Charles, R., Lester, F. & O'Daffer, P. (1987). *How to evaluate progress in problem solving*. Reston: NCTM.

CE - DGEC (2000). *Relatório europeu sobre a qualidade do ensino básico e secundário.* Retirado da Worl Wide Web em 12/10/2012: http://ec.europa.eu/education/lifelong-learning-policy/doc/policy/rapin_pt.pdf

Creswell, J. (2003). *Research design: qualitative, quantitative and mixed approaches*. Newbury Park, CA: Sage.

Dante, L. R. (1989). *Didática da resolução de problemas de matemática*. São Paulo: Ática.

Davidov, V. (1990). *Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula*. Reston: NCTM.

Devlin, K. (2002). *Matemática: a ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

English, L. & Warren, E. (1995). *General reasoning processes and elementary algebraic understanding: Implications for initial instruction*. Focus on Learning Problems in Mathematics, 17(4), 1–19.

Fernandes, Ângela. (2011). *Processos de resolução de problemas: uma experiência com alunos de cursos de educação e formação de adultos na área de matemática para a vida.* Dissertação de Mestrado. Braga: Universidade do Minho.

Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: constructing number sense, addition and subtraction*. Portsmouth: Heinemann.

Fraenkel, J. & Wallen, N. (1990). *How to Design and Evaluate Research in Education.* New York: Mc Graw-Hill.

Frobisher, L., Monaghan, J., Orton, A., Orton, J., Roper, T. & Threlfall, J. (1999). *Learning to Teach Number*. Cheltenham: Stanley Thornes.

GAVE (2003), *PISA 2000 – Conceitos fundamentais em jogo na avaliação da literacia científica e competências dos alunos portugueses*, Lisboa: GAVE.

GAVE (2009), *Prova de Aferição de Matemática do 2.º Ciclo – Relatório Nacional de 2009.* Lisboa: GAVE.

GAVE (2010), *Prova de Aferição de Matemática do 2.º Ciclo – Relatório Nacional de 2010.* Lisboa: GAVE.

GAVE (2011), *Prova de Aferição de Matemática do 2.º Ciclo – Relatório Nacional de 2011.* Lisboa: GAVE.

Herbert, K. e Brown, R. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning, Teaching Children Mathematics, 3, 340-345.

Kamii, C., Lewis, B. A., & Kirkland, L. D. (2001). Fluency in subtraction compared with addition. Journal of Mathematical Behavior, 20, 33-42.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In Fennema E. & Romberg T. (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (p. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lannin, J., Barker, D. & Townsend, B. (2006). *Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection.* Mathematics Education Research Journal, 18(3), 3-28.

Lester, F. (1978). Mathematical problem solving in the elementary school: some educational and phychological considerations. In, Hatfield, H. & Bradbard, D. (Eds.), *Mathematical* *problem solving: papers from a research workshop* (p.53-87). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Lester, F. (1980). Research in mathematical problem solving. In Shumway. R. (Ed.), *Research in mathematics education* (p. 286-323). Reston: NCTM.

Lester, F. (1993). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In D. Fernandes, A. Borralho, & G. Amaro (Eds.), *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (p. 13-34). Lisboa: IIE.

Lopes, I. (2010). *Uma abordagem curricular em matemática no 3º ciclo do ensino básico – um estudo de caso em Geometria*. Tese de Doutoramento. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Lüdke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária Ltda.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1993). Seeing a pattern and writing a rule. In Hirabayashi, I., Nohda, N., Shigematsu, K. & Lin F. (Eds.), *Proceedings of the 17th PME International Conference*, 1, 181-188.

Mamede, E. (2002). A calculadora no 1º ciclo: Mero instrumento de verificação ou algo mais? In Ponte, P., Costa, C., Rosendo, A., Maia, E., Figueiredo, N., & Dionísio, A., (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores.* (p.113-123). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática. Lisboa: Gráfica.

Mason, J. (1992). Researching problem solving from the inside. In, Ponte, J., Matos, J.F., Matos, J. M., & Fernandes, D., (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies* (p. 17-36). Berlin: Springer-Verlag.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1985). *Thinking Mathematically.* Bristol: Addison-Wesley.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In Bednarz, N., Kieran, C. & Lee L. (Eds.), *Approaches to algebra* (p. 65 – 86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Mason, J., Johnston-Wilder, S. & Graham, A. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. London: Sage.

Matos, J., & Serrazina, M. (1996). *Didáctica da matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

McMillan, J. & Schumacher, S. (2001). *Research in Education: A Conceptual Introduction*. New York: Longman.

ME (2004b). *PISA 2003 – Resultados do estudo internacional.* Lisboa: ME.

ME - DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais.* Lisboa: ME-DEB.

Moyer-Packenham, P. (2005). *Using virtual manipulatives to investigate patterns and generate rules in algebra.* Teaching Children Mathematics, 11(8), 437-444.

Moreira, L. (2008). *Resolvo problemas, logo penso*. Educação e Matemática*,*100, 11-15.

Moreira, S., Fonseca, L., (2009). *A comunicação e a resolução de problemas envolvendo padrões.* Actas do XIXEIEM. Vila Real. Retirado da World Wide Web em 12/10/2012: http://www.ese.ipvc.pt/padroes/artigos/2009_11.pdf

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa da edição original de 2000).

Nunnally, J. (1978). P*sychometric theory.* New York: McGraw-Hill Inc.

OCDE (2004). *PISA 2003: Relatório Internacional, O rendimento dos alunos em Matemática.* Lisboa: Santillana-Constância.

Oliveira, I. & Serrazina, L. (2002). *A reflexão e o professor como investigador. Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (p. 29-42). Lisboa: APM.

Orton, A. e Orton, J. (1999). Pattern and Approach to Algebra. In Orton A. (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (p. 104-124). Londres: Cassel.

Orton, J. (1999). Children's Perception of Pattern in Relation to Shape. In Orton A. (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (p. 149-167). Londres: Cassel.

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas.* Lisboa: Gradiva. Edição Original: (1945) *How to solve It – A new aspect of mathematical method*, Estados Unidos: Princeton University Press).

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (p. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J., Boavida, A., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da matemática*. Lisboa: DES, ME.

Ponte, J.P., Brocardo, J. e Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte, Autêntica.

Ponte, J., Matos, J. & Abrantes, P. (1998). *Investigação em Educação Matemática: Implicações curriculares*. Ministério da Educação: Instituto de Inovação Educacional. Coimbra.

Ponte, J. & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação: DGIDC.

Ponte, J. & Sousa, H. (2010) *Uma oportunidade de mudança na Matemática do Ensino Básico*. Lisboa, APM.

Quivy, R. & Campenhoudt, L. (2003). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Lisboa: Gradiva.

Radford, L. (2006). *Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective.* In Alatorre, S., Cortina, J., Sáiz, M. & Méndez, A. (Eds.), Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1, 1-21.

Ramalho, G. (1994). *As nossas crianças e a Matemática. Caracterização da participação dos alunos portugueses no "Second International Assessment of Educational Progress".* Lisboa: DEPGEF.

Romberg, T. (1994). Classroom instruction that fosters mathematical thinking and problem solving: connections between theory and practice. In Schoenfeld, A. (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving.* (p. 287-304). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Santos, M. & Oliveira, H. (2008). *Generalização de padrões: um estudo no 5.º ano de escolaridade*. Retirado da Worl Wide Web em 24/01/2012: http://funes.uniandes.edu.co/1213/1/Santos2008Generalizacao_SEIEM_461.pdf

Schwartz, J. (1992). Can we solve the problem solving problem without posing the problem posing problem? In, Ponte, J., Matos, J.F., Matos, J. M., & Fernandes, D., (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies* (p. 167-176.) Berlin: Springer-Verlag.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In Grouws, D. (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 334-370). New York: MacMillan.

Serrazina, L., & Ferreira, E. (2006). Competência de cálculo? Sim! E também colaborando a distância. In *Equipa do Projecto Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares.* Lisboa, APM.

Serrazina, L. e Oliveira, I. (2002). *Novos Professores: Primeiros anos de profissão.* Quadrante, 11(2) 55-73.

Serrazina, L. & Oliveira, I. (2005). O currículo de Matemática do ensino básico sob o olhar da competência matemática. In APM-GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (p. 35-62). Lisboa: APM.

Smole, K. & Diniz, M. (1998). *Ensinar e Aprender: Matemática - Impulso Inicial.*, Centro de Estudos e Pesquisas em Educação, Cultura e Ação Comunitária (CENPEC). São Paulo.

Stacey, K. (1989). *Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems.* Educational Studies in Mathematics, 20(2), 147-164.

Steen, L. (1988). *The Science of Patterns*, Science, 240, 611-616.

Tashakkori, A. & Teddlie, C. (2003). The past and future of mixed methods research: From data triangulation to mixed model designs. In Tashakkori A. & Teddlie C. (Eds.), *Handbook on mixed methods in the behavioral and social sciences* (p. 671-701). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Teixeira, C. (2011). *Resolução de problemas em contexto geométrico: O estudo de triângulos no 7.º Ano*. Tese de Mestrado. Lisboa: Universidade do Lisboa.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (p. 18-30). London: Cassell.

UNESCO (1990) Declaração mundial sobre a educação para todos. Retirado da Worl Wide Web em 06/09/2012: http://unesdoc.unesco.org/images/0008/000862/086291por.pdf

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I. & Borralho, A. (2006). Os padrões no ensino aprendizagem da Álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (p. 193-213). Lisboa: SPCE.

Vale, I. & Pimentel, T. (2004). Resolução de Problemas. In Palhares, P. (Ed.), *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico*. Lisboa: Lidel.

Warren, E. (2008). *Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking*. Educational Studies in Mathematics, 67, 171-185.

Wood, T., Merkel, G. & Uerkwitz, J. (1996). *Criar um ambiente na aula para falar sobre a matemática.* Educação e Matemática, 40, 39-43.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). *Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation.* Educational studies in mathematics, 49, 379-402.

ANEXOS I

Teste de Avaliação de Desempenho

Instruções para a realização do teste

- O teste tem a duração de 30 minutos.
- Deves realizar a prova com caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não podes usar calculadora.
- Lê e responde a todas as questões com a máxima atenção.
- Em algumas questões, tens de mostrar como chegaste à tua resposta. Podes fazê-lo usando desenhos, cálculos, esquemas e palavras.
- Se acabares antes do tempo previsto, revê as tuas respostas.
- Não risques os cálculos, esquemas, nem os desenhos que utilizares nas tuas respostas.
- Se precisares de alterar alguma resposta, risca-a e escreve a nova resposta.
- Segue as instruções de cada uma das questões com cuidado.

ESCOLA: ____

Nome do aluno: ____

Ano: ____ Turma: ____ Data: ____ / ____ / _________

1. Sequências

Continua as sequências indicando os dois termos seguintes.

1.1.

1, 4, 9, 16, 25, __________, __________

1.2.

101, 110011, 111000111, __________, __________

1.3.

25, 22, 19, 16, __________, __________

1.4.

98, 987, 9876, 98765, __________, __________

1.5.

5, 10, 15, 20, __________, __________

1.6.

5, 11, 19, 29, 41, __________, __________

2. A torre dos ímpares

Considera o seguinte triângulo de números.

1						
1	**3**					
1	**3**	**5**				
1	**3**	**5**	**7**			
1	**3**	**5**	**7**	**9**		
1	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	
___	___	___	___	___	___	___

2.1. Escreve a sétima linha.

2.2. Indica qual a soma dos números da oitava linha do triângulo, **sem a escrever**.

2.3. Consegues encontrar um processo que nos indique a soma dos números de uma determinada linha do triângulo, dependendo do número da linha? **Explica-o**.

3. Ziguezague dos números.

Considera a seguinte distribuição numérica.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
10	**9**	**8**	**7**	**6**	
	11	**12**	**13**	**14**	**15**
20	**19**	**18**	**17**	**16**	
	___	___	___	___	___

3.1. Continua a sequência por mais uma linha.

3.2. Em que linha aparecerá o número 50? **Explica detalhadamente**.

3.3. Indica qual **a soma** dos números da décima quinta linha, **sem a escrever**. Explica o teu raciocínio.

FIM DO TESTE

Anexo II

Escala de Avaliação do Teste de Avaliação de Desempenho

Escala de Avaliação do Teste de Desempenho

Questão		Pontuação
1.	**0 Pontos**	▪Não responde. ▪Continua a sequência, sem nenhuma relação com a resposta.
	1 Ponto	▪Revela alguma compreensão da sequência.
	2 Pontos	▪Indica um dos termos da sequência corretamente e o outro não. ▪Indica apenas o termo seguinte da sequência corretamente.
	3 Pontos	▪Responde corretamente. ▪Continua a sequência corretamente mas indica mais termos que os dois seguintes.
2. 1.	**0 Pontos**	▪Não responde. ▪Responde incorretamente.
	1 Ponto	▪Escreve alguns números que faltam na sequência, nomeadamente o último.
	2 Pontos	▪Escreve, no local respetivo, os números que faltam na sequência, mas escreve um número incorreto.
	3 Pontos	▪Responde corretamente.

2. 2.	**0 Pontos**	▪Não responde. ▪Responde incorretamente.
	1 Pontos	▪Utiliza uma estratégia de resolução do problema, mas responde incorretamente, ou não responde. ▪Há algum trabalho, revelando alguma compreensão do problema.
	2 Pontos	▪Responde corretamente, mas escreve a oitava linha do triângulo. ▪Utiliza uma estratégia apropriada de resolução do problema, mas comete um erro de cálculo.
	3 Pontos	▪Utiliza uma estratégia apropriada e completa de resolução do problema e responde corretamente.
2. 3.	**0 Ponto**	▪Não responde. ▪Responde incorretamente.
	1 Pontos	▪Utiliza uma estratégia de resolução do problema, mas responde incorretamente, ou não termina. ▪Há algum trabalho, revelando alguma compreensão do problema.
	2 Pontos	▪Responde corretamente, sem apresentar uma explicação compreensível, ou sem apresentar uma explicação. ▪Responde corretamente, mas escreve a oitava linha do triângulo. ▪Utiliza uma estratégia apropriada de resolução do problema, mas comete um erro de cálculo.
	3 Pontos	▪Utiliza uma estratégia apropriada e completa de resolução do problema e responde corretamente.

3.1.	**0 Pontos**	▪Não responde. ▪Responde incorretamente.
	1 Ponto	▪Escreve nos locais respetivos, alguns números que faltam na sequência.
	2 Pontos	▪Escreve, no local respetivo, os números que faltam na sequência, mas com uma falha.
	3 Pontos	▪Responde corretamente.
3.2.	**0 Pontos**	▪Não responde. ▪Responde incorretamente.
	1 Pontos	▪Utiliza uma estratégia de resolução do problema, mas responde incorretamente, ou não responde. ▪Há algum trabalho, revelando alguma compreensão do problema.
	2 Pontos	▪Responde corretamente, sem apresentar uma explicação compreensível, ou sem apresentar uma explicação. ▪Utiliza uma estratégia apropriada de resolução do problema, mas comete um erro de cálculo.
	3 Pontos	▪Utiliza uma estratégia apropriada e completa de resolução do problema e responde corretamente.
3.3.	**0 Ponto**	▪Não responde. ▪Responde incorretamente.

1 Pontos	▪Utiliza uma estratégia de resolução do problema, mas responde incorretamente, ou não responde. ▪Há algum trabalho, revelando alguma compreensão do problema.
2 Pontos	▪Responde corretamente, sem apresentar uma explicação compreensível, ou sem apresentar uma explicação. ▪Responde corretamente, mas escreve a décima quinta linha. ▪Utiliza uma estratégia apropriada de resolução do problema, mas comete um erro de cálculo.
3 Pontos	▪Utiliza uma estratégia apropriada e completa de resolução do problema e responde corretamente.

ANEXO III

TAREFAS

TAREFA 1.
Nome do aluno: ____

1. Considera a sequência seguinte.

a) Escreve a próxima linha da sequência.

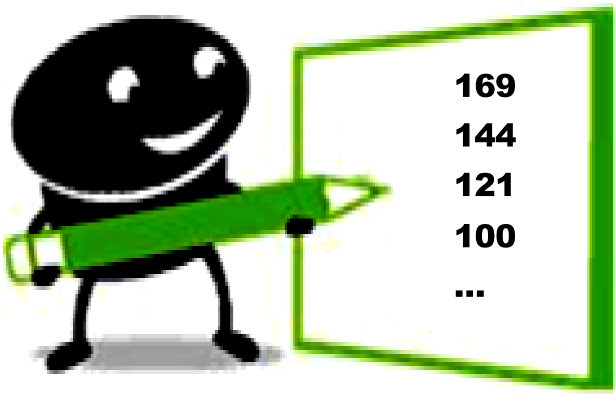
b) Escreve a décima linha da sequência.

c) Explica detalhadamente o teu raciocínio para continuares a sequência.

TAREFA 2.

Nome do aluno: ____

1. Considera a sequência seguinte.



a) Escreve o termo seguinte da sequência.

b) Escreve o décimo termo da sequência.

c) Explica detalhadamente o raciocínio que permite continuar a sequência.

TAREFA 3.

Nome do aluno: ____

1. Considera a sequência seguinte.

a) Escreve os dois termos seguintes da sequência.

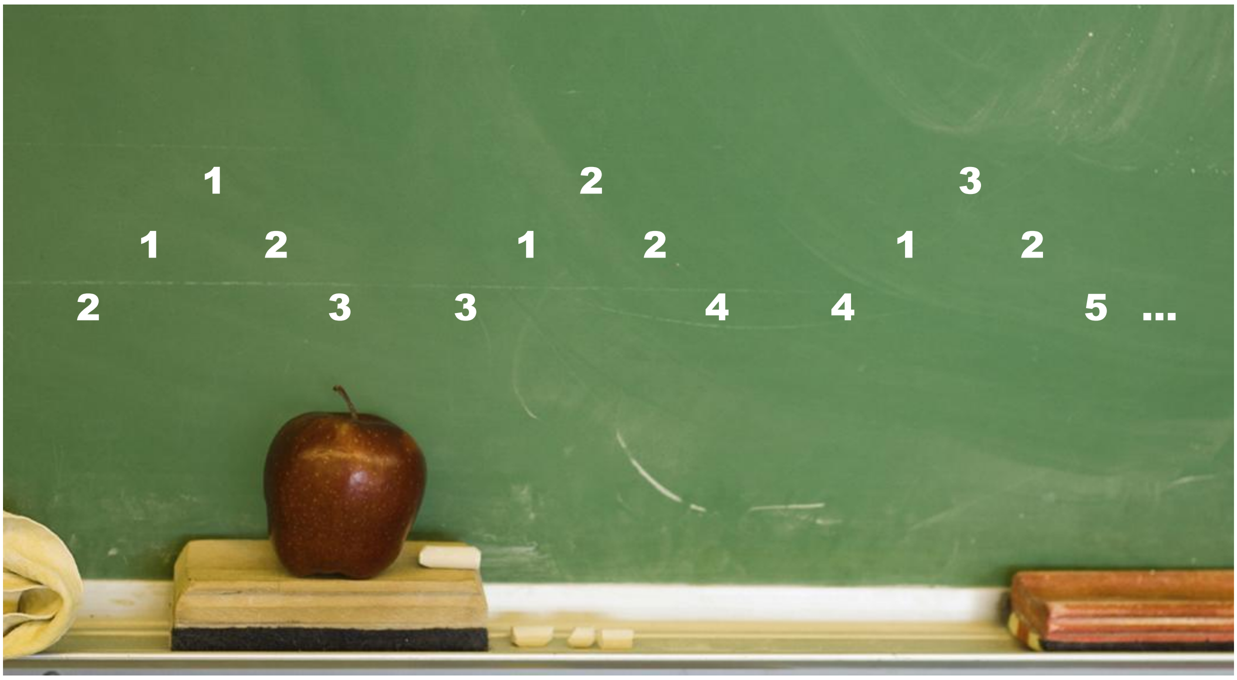
b) Escreve o 15º termo da sequência.

c) Explica detalhadamente o raciocínio que permite continuar a sequência.

TAREFA 4.

Nome do aluno: ____

1. Considera a sequência seguinte.



a) Continua a sequência com mais um triângulo de números.

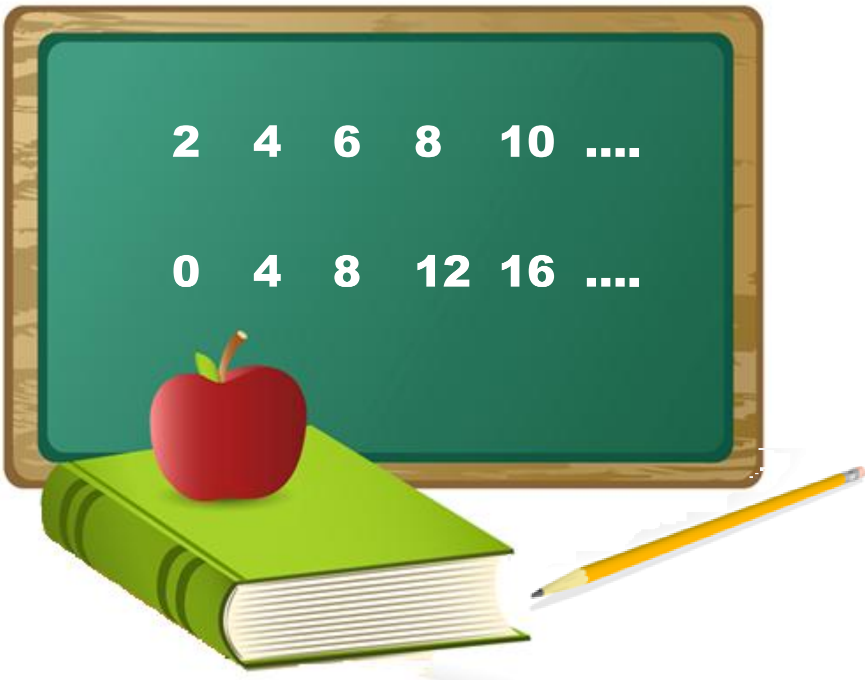
b) Escreve o décimo triângulo de números.

c) Explica detalhadamente o teu raciocínio para continuares a sequência.

TAREFA 5.

Nome do aluno: ____

1. Considera a sequência seguinte.



a) Escreve o termo seguinte da sequência.

b) Quando na linha de baixo aparecer o número 28, qual o número que aparece a linha de cima?

c) Explica detalhadamente o teu raciocínio para continuares a sequência.

TAREFA 6.

Nome do aluno: ____

1. Considera a sequência seguinte.

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	___
2	**4**	**8**	1**6**	3**2**	6**4**	12**8**	25**6**	___

a) Qual é o algarismo das unidades da potência seguinte?

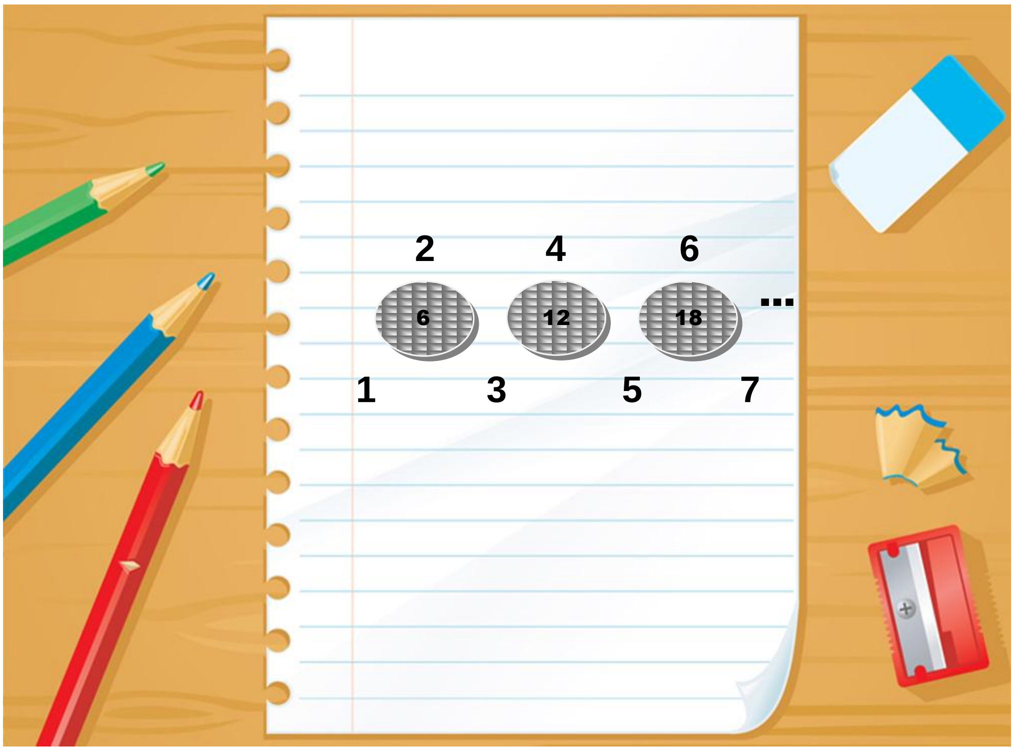
b) Qual é o algarismo das unidades do número 2^{25}?

c) Explica detalhadamente o raciocínio que te permite escrever o número das unidades de qualquer potência.

TAREFA 7.

Nome do aluno: ___________________________________

1. Considera a sequência seguinte.



a) Continua a sequência até que na linha de baixo encontres o número 9.

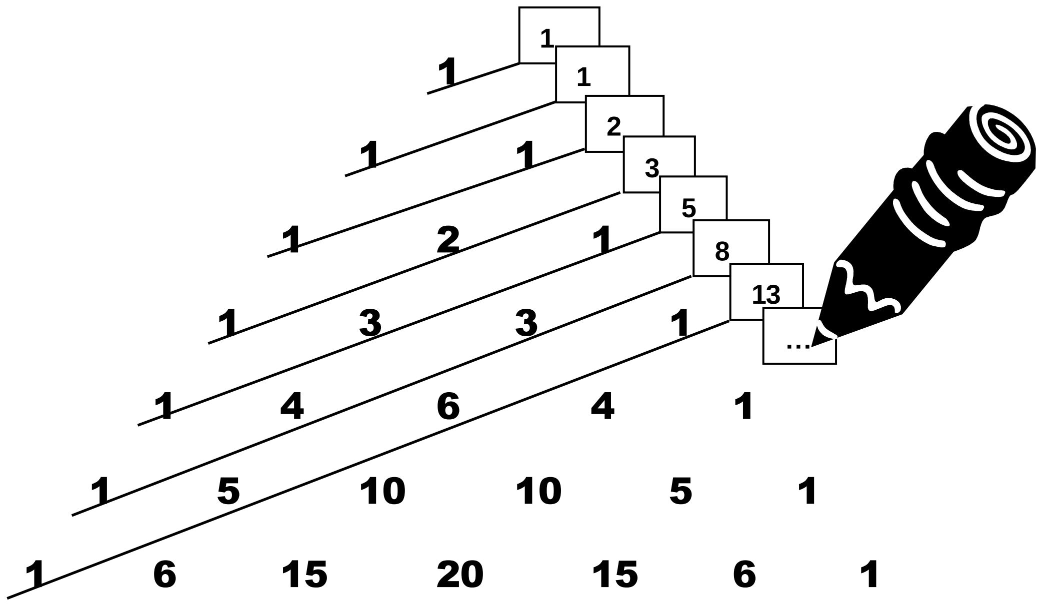
b) Escreve o número que aparece no centro, quando na linha de cima aparecer o número 30.

c) Explica detalhadamente o teu raciocínio para continuares a sequência.

TAREFA 8.

Nome do aluno: ____

1. Considera a sequência seguinte.



a) Escreve o termo seguinte da sequência.

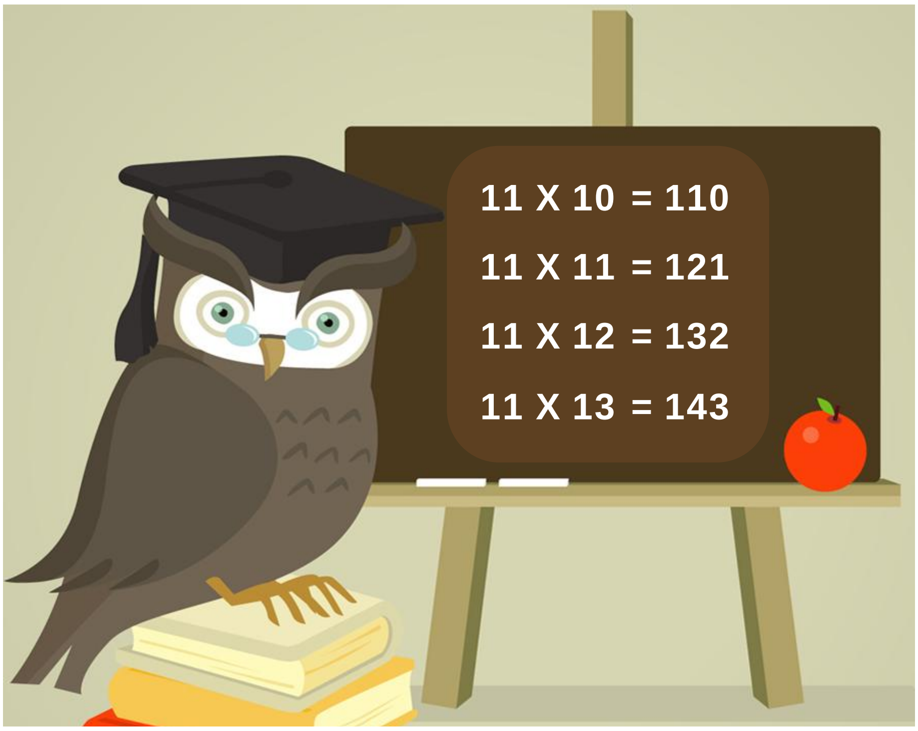
b) Escreve o décimo quinto termo da sequência.

c) Explica detalhadamente o teu raciocínio para continuares a sequência.

TAREFA 9.

Nome do aluno: ____

1. Considera a sequência seguinte.



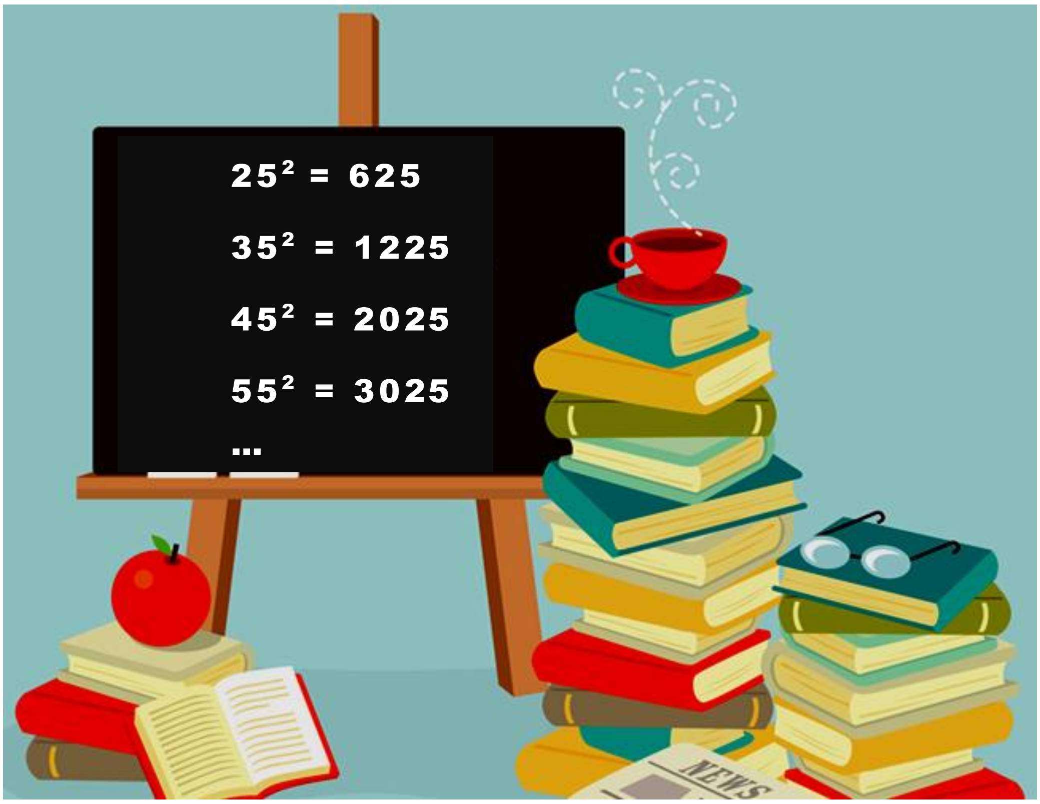
a) Continua a sequência por mais uma linha.

b) Escreve a oitava linha da sequência.

c) Explica detalhadamente o raciocínio que te permitiu escrever a oitava linha da sequência.

TAREFA 10.
Nome do aluno: ____

1. Considera a sequência seguinte.



a) Continua a sequência por mais uma linha.

b) Escreve a oitava linha da sequência.

c) Explica detalhadamente o raciocínio que te permitiu escrever a oitava linha da sequência.

ANEXO IV

Protocolo de Investigação com a Escola

Universidade do Minho
Instituto de Educação

PROTOCOLO DE INVESTIGAÇÃO COM A ESCOLA

O presente documento tem como objetivo estabelecer a natureza do projeto de investigação a desenvolver pela investigadora, Ângela Raquel Pacheco Marques de Freitas Faria, mestranda em Estudos da Criança, especialização em **Ensino e Aprendizagem da Matemática** pela Universidade do Minho, sob a orientação do Professor Doutor Pedro Palhares. Este documento visa clarificar o contributo solicitado aos participantes no mesmo, assim como os princípios éticos e as condições que presidem a toda a atividade de investigação.

A estrutura geral do estudo e objetivos são apresentados no documento em anexo, referindo-se o presente protocolo ao envolvimento do Agrupamento Arqueólogo Mário Cardoso do Concelho de Guimarães. Nesta investigação participarão duas turmas de 6.º ano, em que uma é a turma de controlo.

No presente trabalho será utilizada uma investigação mista, essencialmente quantitativa com recurso a alguns métodos qualitativos.

Tendo como base o atual currículo de matemática e uma vez que o uso de padrões é recorrente ao longo dos ciclos focando o conceito de problema e a resolução de problemas. O presente trabalho pretende perceber que estratégias de generalização são possíveis identificar na resolução de problemas com padrões exclusivamente numéricos no trabalho escrito realizado pelos alunos e se existe alguma influência da resolução de problemas com padrões exclusivamente numéricos, na capacidade de os alunos generalizarem.

O desenvolvimento desta investigação pauta-se por regras que protegem os direitos dos sujeitos participantes. Faz-se referência ao nome da instituição, bem como a dos participantes envolvidos no âmbito desta investigação, embora sem necessidade de os identificar nominalmente. Os dados recolhidos serão divulgados na dissertação de mestrado sendo garantida a confidencialidade dos mesmos e a salvaguarda do anonimato dos professores e alunos participantes (se assim o pretenderem).

Ciente de que compreenderão a importância que a vossa resposta terá para a efetivação da investigação que me propus efetuar, espero da parte de V.Exª o melhor acolhimento a este meu pedido.

Ao assinarem este protocolo (em duplicado), ambas as partes envolvidas concordam com as condições nele estabelecidas. Qualquer outra situação omissa a este protocolo, as partes comprometem-se a resolvê-la no sentido de salvaguardar os interesses da instituição e da própria investigação.

Guimarães, 9 de janeiro de 2012

A investigadora

Raquel Faria

____

O Diretor

[redacted]

____

ANEXO V

PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO AOS ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO

Universidade do Minho
Instituto de Educação

PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO AOS ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO

Exmo. Sr. Encarregado de Educação

Ângela Raquel Pacheco Marques de Freitas Faria, professora de Matemática e Ciências da Natureza, a frequentar o 2º ano do Mestrado em Estudos da Criança – Área de especialização em **Ensino e Aprendizagem da Matemática**, da Universidade do Minho vem, por este meio, expor a necessidade da participação do seu educando no seu projeto de investigação de mestrado intitulado "Resolução de problemas envolvendo padrões numéricos", no qual se procurará desenvolver capacidades matemáticas ligadas à resolução de problemas.

A investigação será realizada durante o segundo período do presente ano letivo, tendo já sido autorizada pelo Diretor do Agrupamento. Para a sua concretização será necessário proceder ao registo áudio das atividades investigativas desenvolvidas. Para o efeito, solicito a vossa autorização para a participação do seu educando nesta investigação.

Saliento que os dados recolhidos serão usados exclusivamente como material de trabalho, estando garantida a privacidade e anonimato dos participantes. Manifesto ainda, a minha inteira disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento adicional que considere necessário.

Na expetativa de uma resposta favorável, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

Guimarães, 9 de janeiro de 2012

A Investigadora	O Diretor
Raquel Faria	[redacted]
_______________________	_______________________

Universidade do Minho
Instituto de Educação

PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO AOS ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO

Eu, …………………………………………………………..., Encarregado de Educação do aluno ...., da Turma …., autorizo que a professora Raquel Faria, faça registo áudio no âmbito da investigação que me foi dada a conhecer.

Guimarães, 9 de janeiro de 2012

O Encarregado de Educação,

____