

## **CARACTERIZAÇÃO DAS INTUIÇÕES DE ALUNOS DO 9º ANO EM INDEPENDÊNCIA E PROBABILIDADE CONDICIONADA**

*Paulo Ferreira Correia*

Escola Secundária/3 de Barcelos, [ferreiracorreiapaulo@gmail.com](mailto:ferreiracorreiapaulo@gmail.com)

*José António Fernandes*

Universidade do Minho, [jfernandes@ie.uminho.pt](mailto:jfernandes@ie.uminho.pt)

**Resumo.** Neste estudo caracterizam-se as intuições de alunos nos conteúdos de probabilidade condicionada e independência, considerando as respostas dos alunos (corretas e erradas), as justificações por eles apresentadas e relações entre o desempenho na disciplina de Matemática e as respostas. Participaram no estudo 310 alunos do 9º ano de escolaridade, a quem foi aplicado um questionário com várias tarefas sobre probabilidade condicionada e independência. Em termos de resultados, salienta-se que mais de metade dos alunos apresentaram respostas corretas em mais de dois terços dos itens, a considerável redução da percentagem de alunos que apresentaram justificações adequadas às respostas corretas e, em geral, o aumento da percentagem de respostas corretas com o desempenho em Matemática.

*Palavras-chave:* Probabilidade condicionada; Independência; Intuições dos alunos; Alunos do 9º ano.

### **Introdução**

Atualmente, o ensino das Probabilidades e da Estatística tem sido aprofundado nos programas escolares e nas salas de aula de muitos países. No caso português, após a introdução destes temas nos anos sessenta do século passado nos programas do ensino secundário, na sequência da reforma do ensino da matemática, eles foram também incluídos nos programas escolares do ensino básico no início dos anos noventa, que resultaram da Reforma do Sistema Educativo de 1986. Finalmente, com o reajustamento deste último programa (Ministério da Educação, 2007), estes temas, sob a designação de Organização e Tratamento de Dados, passaram a fazer parte de todos os três ciclos do ensino básico, incluindo o 1º ciclo do ensino básico, o que antes não acontecia.

No caso das Probabilidades, o seu ensino logo nos primeiros anos de escolaridade tem sido preconizado por alguns investigadores (e.g., Batanero, 2013; Fischbein, 1975) com o fundamento de que se trata de uma temática em que proliferam muitas intuições erradas e a ausência de ensino formal contribui para a consolidação dessas intuições. Fischbein (1975) argumenta que a ausência no currículo escolar dos fenómenos aleatórios implica consolidar a visão determinista do mundo que a escola amplamente tem transmitido.

Em situações contraintuitivas, Fernandes (1990) observou uma forte adesão a ideias intuitivas erradas por alunos do 11º ano (sem ensino de Probabilidades). Também em situações não contraintuitivas, Fernandes (2001) observou ganhos relativamente limitados dos alunos do 11º ano (sem ensino de Probabilidades) relativamente a alunos do 8º ano, especialmente no caso de acontecimentos de experiências compostas.

Ora, encontrando-se os conteúdos de probabilidade condicionada e independência entre aqueles que mais revelam ideias intuitivas erradas dos alunos (e não só) importa conhecer mais profundamente as ideias intuitivas dos alunos em fases etárias mais novas, tendo em vista avaliar as possibilidades do ensino formal de tais conceitos de modo a evitar a consolidação dessas intuições erradas.

Embora, tradicionalmente, os conteúdos de probabilidade condicionada e independência sejam abordados apenas no ensino secundário, são vários os estudos (e.g., Tarr & Lannin, 2005; Tarr, 1997; Tarr & Jones, 1997) que referem que ele é de facto apropriado para o currículo de matemática do ensino básico. Segundo Tarr (1997), a aprendizagem dos conceitos de probabilidade condicionada e independência não precisa de ser adiada até que os estudantes tenham desenvolvido destrezas robustas na comparação de frações, devendo a abordagem destes conceitos ser efetuada de uma forma intuitiva.

No caso português, os resultados referidos por Correia, Fernandes e Contreras (2011) e Correia e Fernandes (2012), sobre as intuições em probabilidade condicionada de alunos do 9º ano de escolaridade, revelam-se encorajadores quanto à possibilidade de introduzir o estudo deste conceito no 9º ano, pelo menos nos contextos de tabelas simples, tabelas de dupla entrada e de sacos com bolas, como aconteceu nesses trabalhos.

Embora exista investigação substancial sobre o pensamento probabilístico de alunos do 3º ciclo, pouca dessa investigação se tem centrado no pensamento de estudantes em probabilidade condicionada e independência. Esta ausência de investigação sobre o pensamento dos estudantes nestes conceitos e a importância crescente que lhe é atribuída no ensino de Probabilidades no 3º ciclo (Tarr & Jones, 1997) destacam o seu interesse.

## **1. Investigação prévia**

Na perspetiva de Borovcnik e Kapadia (2010) as pessoas usam a sua experiência para efetuar julgamentos probabilísticos de forma imperfeita, pior ainda, de uma forma desorganizada; têm dificuldades em efetuar julgamentos envolvendo valores muito pequenos e muito grandes de probabilidade, especialmente se elas estão associadas a consequências desfavoráveis; estão inclinadas para atribuir igual *chance* às diferentes possibilidades, especialmente se são apenas duas; atribuem probabilidades e processam-nas em novas situações negligenciando as regras mais básicas, como por exemplo, que a soma de todas as probabilidades é igual a 1.

Ainda segundo estes autores, algumas particularidades do pensamento estocástico tornam-no muito diferente daquele que é mobilizado em outras situações, pois não há um controlo direto do sucesso em probabilidades – o acontecimento mais raro pode ocorrer e *destruir* a melhor estratégia, a interferência das reinterpretações causais pode deixar uma pessoa completamente perdida, os nossos critérios em situações de incerteza podem ter a sua base *em qualquer parte* e podem estar carregados de emoções – a probabilidade e a divindade tiveram uma origem comum na Grécia antiga.

Estimativas informais de probabilidade apoiadas na experiência são muitas vezes fortemente influenciadas por aspetos não científicos. Por exemplo, as pessoas recorrem ao que é mais fácil de lembrar, à informação fornecida pelas suas preconcepções, ao que parece especial em circunstâncias atuais e à preferência por um certo resultado, o que as leva a ignorar influências contraditórias e a exagerar outras (Ahlgren & Garfield, 1991).

Segundo Garfield e Ahlgren (1988), de uma maneira geral, as dificuldades dos estudantes no desenvolvimento correto de intuições sobre ideias probabilísticas fundamentais deve-se essencialmente a três aspetos: muitos estudantes têm dificuldades associadas ao conceito de número racional e ao nível do raciocínio proporcional, aspetos usados no cálculo, descrição e interpretação de probabilidades; as ideias probabilísticas conflituam muitas vezes com as experiências dos estudantes e com a forma como eles veem o mundo; e muitos estudantes desenvolvem aversão às probabilidades ao serem expostos a um ensino muito abstrato e formal do tema.

### **1.1. Probabilidade condicionada**

Segundo Spinillo (2002), o raciocínio proporcional envolve basicamente relações de primeira ordem, em que se comparam os elementos de uma razão, e relações de segunda ordem, em que se comparam duas razões. Por exemplo, no caso de um saco com bolas de duas cores, uma relação de

primeira ordem traduz-se na comparação do número de bolas de cada uma das cores, o que dá origem a uma relação *parte-parte*, ou na comparação do número de bolas de uma das cores com o número total de bolas, o que dá origem a uma relação *parte-todo*. Já no caso de termos dois sacos com bolas de duas cores, a identificação do saco em que é mais provável obter uma bola de uma das cores implica a comparação das razões relativas a cada um dos sacos.

Além das razões parte-parte e parte-todo, no presente estudo introduzimos a relação de primeira ordem *todo-todo* para designar as comparações entre o número total de elementos de cada um dos sacos, a que Cañizares (1997) chama comparação do número de casos possíveis, e entre o número total de elementos de um conjunto antes e após a extração, com ou sem reposição, de um elemento desse conjunto.

Na opinião de Tarr e Lannin (2005) os julgamentos em probabilidade condicionada requerem a habilidade de estabelecer comparações probabilísticas, havendo evidências contraditórias que documentam as destrezas de alunos do ensino básico para efetuarem corretamente tais comparações. Piaget e Inhelder (1951) concluíram que as crianças que não compreendem as relações parte-todo revelam dificuldades na comparação de probabilidades de acontecimentos, enquanto outros autores identificaram outras estratégias que permitem aos alunos efetuar essas comparações. Recorrendo a vantagens (*odds*) ou outra comparação do tipo parte-parte, os alunos dos estudos de Falk (1993) e Green (1983) foram capazes de comparar probabilidades de dois acontecimentos, sugerindo que os alunos não precisam de atingir o estágio das operações formais para efetuarem com sucesso comparações probabilísticas (Tarr & Lannin, 2005).

Tarr (1997), num estudo com 26 alunos do 5º ano, observou que, antes de um programa de instrução em probabilidade condicionada e independência, os alunos começaram por utilizar mais comparações parte-parte do que comparações parte-todo quando faziam julgamentos sobre probabilidade condicionada. Segundo o autor, se bem que as comparações parte-parte permitem a muitos alunos perceberem que a probabilidade condicionada de alguns acontecimentos se altera em situações de não reposição, estas estratégias limitam, muitas vezes, os alunos no reconhecimento de que a probabilidade de todos os acontecimentos se altera nas situações em que não há reposição. Mesmo depois da instrução, na ausência de uma forma de representação formal da probabilidade de um acontecimento, os alunos continuaram a usar formas alternativas para determinar e comparar probabilidades, incluindo representações inventadas associadas a comparações parte-parte e parte-todo e outras idiossincráticas.

Fischbein e Gazit (1984), numa experiência de ensino sobre probabilidade condicionada, envolvendo 285 alunos dos 5º, 6º e 7º anos de escolaridade, concluíram que a percentagem de respostas corretas na determinação de probabilidades condicionadas em situações sem reposição, em geral, foi mais baixa do que nas situações com reposição.

No caso específico da probabilidade condicionada, Pollatsek, Well, Konold e Hardiman (1987) verificaram que os alunos confundem  $P(A|B)$  com  $P(A \cap B)$ , isto é, não distinguem claramente os significados da condicional e da conjunta, confusão que se tornou particularmente evidente aquando da interpretação de enunciados de problemas que implicavam a identificação destas probabilidades. Esta dificuldade também foi observada em futuros professores do ensino primário (Contreras, Batanero, Díaz & Fernandes, 2011; Estrada & Díaz, 2006) e em alunos do 9º ano de escolaridade (Correia et al., 2011) na resolução de uma tarefa envolvendo frequências de dois acontecimentos numa tabela de dupla entrada.

Falk (1986) verificou que muitos alunos não discriminam entre uma probabilidade condicionada e a sua transposta, isto é, entre as duas probabilidades  $P(A|B)$  e  $P(B|A)$ , erro que designou por *falácia da condicional transposta*. No estudo de Correia et al. (2011), antes referido, verificou-se que alguns alunos do 9º ano também aderiram a este erro.

No estudo desenvolvido por Lecoutre e Durand (1988), em que participaram 342 alunos dos 14 aos 18 anos de idade, os autores concluíram que os alunos tendem a admitir que acontecimentos de carácter aleatório são por natureza equiprováveis. Esta ideia, designada por *enviesamento de*

*equiprobabilidade*, mostrou-se extremamente resistente a variações de fatores relacionados com a situação experimental (informação de natureza combinatória, de natureza frequencista, modificações ao nível da formulação, etc.) e com fatores de caracterização dos sujeitos (nível de formação, tipo de estudos secundários, sexo, etc.), que foram manipulados no estudo.

Watson (2005), com base numa ampla revisão de literatura sobre a compreensão de conceitos probabilísticos, concluiu que, geralmente, os alunos são capazes de apreciar a incerteza e o propósito das tarefas que lhe são propostas, enquanto raciocínios sofisticados envolvendo raciocínio proporcional, independência e espaços amostrais são difíceis para a maioria dos alunos. Contudo, a autora conjectura que a situação pode melhorar com a introdução, em muitos países, do ensino de Probabilidades no ensino básico, o que não acontecia aquando das investigações analisados no seu estudo.

## 1.2. Independência

Fischbein, Nello e Marino (1991), num estudo em que participaram 618 alunos do 4º ano ao 8º ano de escolaridade, sem instrução em probabilidades, questionaram os alunos sobre se o acontecimento *obter três faces europeias* é mais provável em três lançamentos consecutivos de uma moeda ou no lançamento simultâneo de três moedas. Os autores verificaram que cerca de um terço dos alunos responderam que a probabilidade não era a mesma, sendo predominante, em todos os anos de escolaridade, a crença de que é mais provável obter três faces europeias em três lançamentos consecutivos de uma moeda do que no lançamento simultâneo de três moedas. Apoiados nas entrevistas realizadas, os autores concluíram que os alunos acreditavam fortemente que os resultados obtidos no lançamento da moeda podiam ser controlados pelo indivíduo, crença esta que é incompatível com a independência dos acontecimentos uma vez que a probabilidade de obter face europeia em cada experiência mantém-se constante e igual a  $1/2$ .

Resultados ligeiramente melhores foram obtidos por Green (1983) em alunos dos 11 aos 16 anos de idade, com um quarto de respostas incorretas, quanto estes foram questionados sobre a face mais provável de obter no quinto lançamento de uma moeda ao ar, depois de ter saído a face europeia nos quatro lançamentos anteriores.

Já no estudo de Konold, Pollatsek, Well, Lohmeier e Lipson (1993), em que foi pedido a estudantes universitários de um curso de remediação matemática para indicarem qual das sequências seguintes é mais provável e menos provável de ocorrer, respetivamente, quando é lançada cinco vezes uma moeda equilibrada: a) *EEENN*; b) *NEENE*; c) *NENNN*; d) *ENENE*; e) as quatro sequências são igualmente prováveis (*E* representa a face europeia e *N* a face nacional), verificou-se que quase dois terços dos alunos responderam corretamente relativamente à sequência mais provável, mas apenas cerca de um terço dos alunos responderam corretamente em relação à sequência menos provável. Fernandes (1990), num item muito semelhante ao usado por Konold et al. (1993), obteve resultados muito semelhantes em alunos do 11º ano e futuros professores de Matemática. Face aos resultados obtidos, os autores concluíram existir um conflito entre a crença da equiprobabilidade de obter cada face da moeda e a crença de que em vários lançamentos da moeda obtém-se sensivelmente o mesmo número de cada uma das faces.

No estudo já antes referido, de Fischbein, Nello e Marino (1991), questionaram-se também os alunos acerca da probabilidade dos acontecimentos *A*: “obter face 5 num dado e face 6 no outro” e *B*: “obter face 6 em ambos os dados”, na experiência aleatória de lançamento de dois dados equilibrados com as faces numeradas de 1 a 6 e anotar o número da face que fica voltada para cima. Nesta situação foram muito poucos os alunos que responderam corretamente e a instrução não se revelou eficaz para vencerem as ideias erradas. Os alunos que tinham recebido instrução em Probabilidades apresentaram justificações que envolvem o conceito de independência e a equiprobabilidade das seis faces do dado: “Cada dado é independente do outro. A probabilidade de obter um certo número de um dado é  $1/6$  e a probabilidade de obter o mesmo número com outro dado é a mesma” (p. 535). Neste caso, a justificação

de que os pares (5,6) e (6,6) têm igual probabilidade resulta da combinação entre as ideias de independência e de equiprobabilidade e de considerar os resultados possíveis 5 e 6 separadamente.

Outra dificuldade dos alunos resulta da tendência de negligenciarem a influência da dimensão da amostra quando efetuam estimativas de probabilidade, atribuindo às pequenas amostras propriedades apenas válidas na população ou em grandes amostras (Kahneman & Tversky, 1982). Na situação seguinte, apresentada por Fischbein e Schnarch (1997), muitos alunos revelaram essa tendência.

A probabilidade de obter face europeia pelo menos duas vezes quando se lançam três moedas é:

- a) Menor do que a probabilidade de obter face europeia pelo menos 200 vezes quando se lançam 300 moedas.
- b) É igual à probabilidade de obter face europeia pelo menos 200 vezes quando se lançam 300 moedas.
- c) É maior do que a probabilidade de obter face europeia pelo menos 200 vezes quando se lançam 300 moedas. (p. 99)

Nesta questão, cerca de um terço dos alunos do 5º ano e três quartos dos alunos do 11º ano aderiram à ideia errada de que a probabilidade de obter face europeia pelo menos 2 vezes quando se lançam 3 moedas é igual à probabilidade de obter face europeia pelo menos 200 vezes quando se lançam 300 moedas, revelando que, de uma maneira geral, a utilização da estratégia efeito do tamanho da amostra aumentou com a idade. Esta é uma crença tão forte que disfarça uma ideia mais subtil, especificamente a ideia de que se a amostra se torna maior, a probabilidade de obter um certo resultado empírico tende a aproximar melhor a predição teórica. Por outro lado, os estudantes poderão não compreender a influência do tamanho da amostra porque invocam raciocínio proporcional e assumem que toda a amostra deve ser proporcional ou refletir o comportamento da população.

Tarr (1997) concluiu que, antes da instrução, alunos do 5º ano sentiram mais dificuldades no conteúdo independência do que nos conteúdos probabilidade condicionada e probabilidade geral, em consequência da sua predisposição para adotarem a estratégia da representatividade (Kahneman & Tversky, 1982) quando faziam julgamentos probabilísticos. Já depois de uma experiência de ensino centrada na compreensão dos conceitos de probabilidade condicionada e independência, verificou-se que os estudantes foram, de uma maneira geral, bem-sucedidos na aprendizagem dos dois conceitos. Quanto às alterações qualitativas no pensamento probabilístico dos estudantes, Tarr (1997) concluiu que, comparando com as avaliações iniciais em independência, os estudantes após a instrução estavam mais inclinados para usar números para rejeitar a estratégia da representatividade e reconhecer que o espaço amostral é conservado nas situações com reposição e que nenhum número finito de experiências garante a realização do acontecimento pretendido numa experiência aleatória.

Para além da influência das “conceções erradas do acaso”, a heurística da representatividade (Kahneman & Tversky, 1982) é também influenciada pela “insensibilidade às probabilidades prévias ou *a priori* dos resultados”, neste caso por ignorar o impacto da informação prévia na probabilidade, e pela “insensibilidade à dimensão da amostra”, fenómeno que os autores designam por “lei dos pequenos números”, já antes referido. O problema seguinte, apresentado por Fischbein e Schnarch (1997) a alunos do 5º ano, 7º ano, 9º ano, 11º ano e a estudantes universitários, despoletou a adesão dos alunos a esta heurística.

No jogo do loto escolhem-se 6 números de um total de 49. O João escolheu os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e a Ana escolheu os números 39, 1, 17, 49, 8 e 27. Qual deles tem maior chance de ganhar?

- a) O João tem mais chances de ganhar.
- b) A Ana tem mais chances de ganhar.
- c) O João e a Ana têm as mesmas chances de acertar nos 6 números. (p. 98)

Nas justificações dos alunos que responderem que a Ana tem mais chances de ganhar está implícita a adesão à heurística da representatividade se a justificação do aluno evoca argumentos de aleatoriedade (por exemplo, referir que a chave da Ana reflete maior aleatoriedade do que a chave de João), tendo os autores concluído que a adesão à estratégia da representatividade diminuiu com a idade, variando entre cerca de um quinto dos estudantes universitários e dois terços dos alunos do 5º ano.

O *efeito recente negativo* e *efeito recente positivo* (Fischbein, 1975) são ideias que ilustram a heurística da representatividade. No primeiro caso, verifica-se uma tendência para acreditar que, após a obtenção de uma sequência de faces nacional no lançamento de uma moeda equilibrada, seria mais provável sair a face europeia. Já no segundo caso, há uma tendência para acreditar que, após a obtenção de uma sequência de faces nacional no lançamento de uma moeda, seria mais provável sair novamente a face nacional.

No caso do estudo de Fischbein e Schnarch (1997), a adesão à estratégia *efeito recente negativo* diminuiu com a idade, tendo sido adotada por cerca de um terço dos alunos do 5º ano e por nenhum aluno universitário. Quanto à estratégia *efeito recente positivo*, ela ocorreu residualmente. Já no estudo de Green (1983), já antes referido, observou-se um equilíbrio entre a percentagem de alunos a aderirem ao efeito recente positivo e ao efeito recente negativo (ligeiramente superior a 10%), aumentando a percentagem de respostas corretas com a idade (entre 67% e 80%).

## 2. Metodologia

No presente estudo pretendeu-se, fundamentalmente, caracterizar as ideias intuitivas de alunos do 9º ano de escolaridade acerca da probabilidade condicionada e independência em diferentes contextos. Para tal, foi realizado um estudo, fundamentalmente, de tipo quantitativo e de natureza descritiva e comparativa.

Participaram no estudo 310 alunos do 9º ano de escolaridade, designados por  $A_i$ , com  $1 \leq i \leq 310$ , pertencentes a quatro escolas do Litoral Norte de Portugal, duas inseridas em meio urbano e duas em meio rural. As idades dos alunos variavam entre os 13 e os 17 anos, com 14 anos de média de idades (que é a idade normal de frequência do 9º ano); 51% dos alunos eram do sexo feminino e 49% do sexo masculino; as suas classificações na disciplina de Matemática, no final do 8º ano, numa escala de 1 a 5, variavam entre 2 e 5, com uma média de 3,1; e 79% dos alunos não tinham qualquer repetência.

A recolha de dados foi efetuada através de um questionário que, para além de algumas questões centradas na aquisição de informação pessoal, incluía nove questões, quase todas com vários itens, sobre independência, probabilidade condicionada e probabilidade geral (ver Anexo). Na Tabela 1 apresenta-se a distribuição dos itens segundo o conteúdo que avaliam e o contexto em que são apresentados.

Tabela 1 – Distribuição dos itens do questionário segundo o conteúdo e o contexto

Conteúdo	Contexto						
	Moeda	Roleta	Saco de bolas	Fichas	Gráfico de barras	Tabela simples	Tabela de dupla entrada
Independência	1	2					
Probabilidade condicionada			3a, 3b, 4a, 4b, 8a1, 8b1	9b, 9c	5b	6b	7b2, 7b3
Probabilidade geral			8a2, 8b2	9a	5a	6a	7a1, 7a2, 7a3, 7b1

O questionário estrutura-se em duas partes: a parte I englobando quatro questões de escolha múltipla em que se pedia aos alunos para justificarem a opção selecionada e a parte II englobando as restantes cinco questões de desenvolvimento, envolvendo o cálculo de probabilidades. No conteúdo independência incluem-se 2 itens (1 e 2), no conteúdo probabilidade condicionada incluem-se 12 itens (3a, 3b, 4a, 4b, 5b, 6b, 7b2, 7b3, 8a1 e 8b1, 9b, 9c) e no conteúdo probabilidade geral incluem-se 9 itens (5a, 6a, 7a1, 7a2, 7a3, 7b1, 8a2, 8b), 9a). Na Tabela 2 apresenta-se a distribuição das questões e itens segundo o conteúdo que avaliam e tipo de item.

Tabela 2 – Distribuição dos itens segundo o seu conteúdo e a sua tipologia

Conteúdo	Tipo de item	
	Escolha múltipla	Desenvolvimento (cálculo de probabilidades)
Independência	1, 2	
Probabilidade condicionada	3a, 3b, 4a, 4b	5b, 6b, 7b2, 7b3, 8a1, 8b1, 9b, 9c
Probabilidade geral		5a, 6a, 8a2, 8b2, 9a, 7a1, 7a2, 7a3, 7b1

Nos itens das questões de probabilidade geral, as questões 7a1, 7a2, 7a3 referem-se ao significado de valores fornecidos numa tabela de dupla entrada; a questão 9a) refere-se à obtenção do espaço amostral; as questões 7b1, 8a2 e 8b2 referem-se à probabilidade conjunta, embora o cálculo da probabilidade conjunta, por definição, envolva a probabilidade condicionada, uma vez que  $P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$ ; e as questões 5a) e 6a) referem-se à probabilidade da união de acontecimentos disjuntos.

O questionário foi aplicado em aulas dos alunos, de 90 minutos, no início do 2º período escolar do ano letivo 2011/2012 e os alunos tinham estudado os conteúdos de Probabilidades, previstos no programa da disciplina de Matemática do 9º ano no início do ano letivo – aspetos de linguagem e definições clássica e frequentista de probabilidade, dos quais não fazem parte a probabilidade condicionada e a independência.

Em termos de análise de dados, estudaram-se as respostas, as justificações e os erros cometidos pelos alunos nos vários itens individuais do questionário e em diferentes conjuntos de itens, incluindo os diferentes conteúdos (independência, probabilidade condicionada e probabilidade geral), o tipo de item (escolha múltipla e de desenvolvimento) e os diferentes contextos (moeda, roleta, saco de bolas, fichas, tabela simples, tabela de dupla entrada e gráfico), determinando-se frequências e recorrendo-se a tabelas como forma de sintetizar os resultados.

Além da análise ao nível da estatística descritiva, acima referida, aplicou-se o teste de independência de qui-quadrado ( $\chi^2$ ) para comparar as percentagens de respostas corretas e erradas em cada um dos itens do questionário e o teste de Kruskal-Wallis para comparar a realização dos alunos em cada um dos conteúdos (independência, probabilidade condicionada e probabilidade geral) e no questionário com o seu desempenho em Matemática (fraco, médio e bom).

Na codificação do desempenho dos alunos em Matemática recorreu-se à classificação do aluno no final do 8º ano, numa escala de 1 a 5, de acordo com o seguinte critério: desempenho fraco correspondente aos níveis 1 ou 2; desempenho médio correspondente ao nível 3; e desempenho bom correspondente aos níveis 4 ou 5. Em termos de análise estatística, usou-se o programa *SPAW Statistics 18*, adotou-se o nível de significância estatística de 0,05 e consideraram-se as não respostas como sendo respostas erradas.

### 3. Apresentação de resultados

A apresentação dos resultados do estudo estrutura-se em três secções: a primeira centrada na análise das respostas (corretas e erradas); a segunda focada na análise das justificações que os alunos apresentaram para explicarem as suas respostas; e a terceira centrada na comparação entre o desempenho em Matemática e as respostas (corretas e erradas) em cada um dos itens, nos três conteúdos considerados e na totalidade do questionário. Seguidamente, apresentam-se os resultados obtidos em cada uma destas análises.

#### 3.1. Análise das respostas

Relativamente às respostas dos alunos, na Figura 1 podemos observar a percentagem de respostas corretas em cada um dos 23 itens do questionário, que foram apresentadas pelos 310 alunos que participaram no estudo.

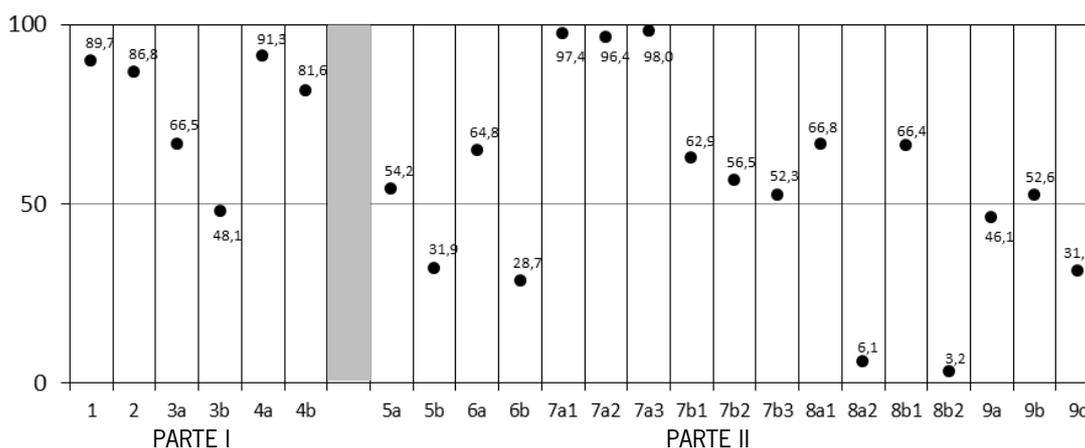


Figura 1. Percentagem de respostas corretas em cada um dos 23 itens do questionário.

Globalmente, verifica-se que a percentagem de respostas corretas varia entre o mínimo de 3,2% e o máximo de 98,0%, com uma média de respostas corretas de 60,0% e um desvio padrão de 27,5% no conjunto de todos os itens do questionário, o que leva a concluir que o grupo de alunos envolvidos no estudo revelou uma razoável realização no conteúdo estudado.

Da Figura 1 conclui-se que os itens de significado de valores de uma tabela de dupla entrada (itens 7a1, 7a2, 7a3), consideradas no conteúdo probabilidade geral, foram os que se revelaram mais fáceis para os alunos, com percentagens de respostas corretas acima de 96%. Já os itens 8a2 e 8b2, sobre probabilidade conjunta e inseridas no mesmo conteúdo, foram os que se revelaram mais difíceis para os alunos, com percentagens de respostas corretas igual ou inferior a 6%.

Nas duas questões de independência (itens 1 e 2), a percentagem de alunos a apresentarem como resposta a opção correta manteve-se acima de 86%.

Nas questões de probabilidade condicionada, a percentagem de respostas corretas variou entre 28,7% e 91,3%: nas questões de escolha múltipla (itens 3a, 3b, 4a e 4b) a percentagem de respostas corretas variou entre 48,1% e 91,3%; nas questões em que se pedia para calcular a probabilidade (itens 5b, 6b, 7b2, 7b3, 8a1, 8b1, 9b e 9c) a percentagem de respostas corretas variou entre 28,7% e 66,8%.

Na Figura 2 podemos observar a percentagem de respostas corretas em cada um dos itens segundo os conteúdos contemplados no questionário.

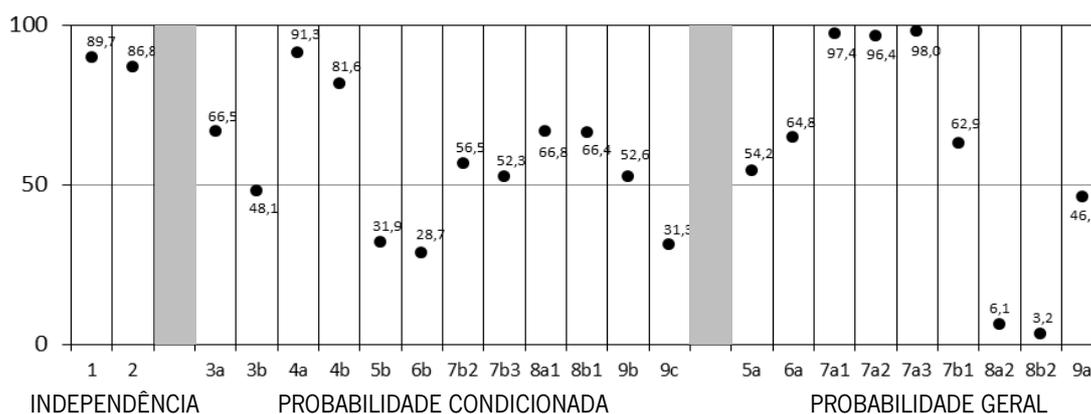


Figura 2. Percentagem de respostas corretas em cada um dos conteúdos.

Pela Figura 2 observa-se, em geral, um melhor desempenho dos alunos no conteúdo independência e análogo em probabilidade condicionada e probabilidade geral. Estes resultados precisam-se na Tabela 3, onde se apresenta a distribuição das porcentagens de respostas (corretas e erradas) dos alunos segundo os três conteúdos contemplados no questionário: independência; probabilidade condicionada e probabilidade geral.

Tabela 3 – Distribuição (em %) das respostas dos 310 alunos segundo o conteúdo

Conteúdo (n° de itens)	Respostas		Não respostas
	Corretas	Erradas	
Independência (2)	88,2	11,3	0,5
Probabilidade condicionada (12)	56,1	38,3	5,6
Probabilidade geral (9)	58,8	34,6	6,6

Da leitura da Tabela 3 confirma-se que o conteúdo em que os alunos revelaram melhor desempenho foi o de independência. Neste caso, poderão ter contribuído para essa superior realização dos alunos os seguintes aspectos relativos aos itens do questionário:

– As duas questões de independência são de escolha múltipla, enquanto na maior parte das questões de probabilidade condicionada é pedido o valor numérico da probabilidade. Nas questões de escolha múltipla (os 6 itens da parte I do questionário) a percentagem de respostas corretas é de 77,3% (88,2% de respostas corretas em independência e 71,7% de respostas corretas em probabilidade condicionada) e nas questões de resposta curta, em que é pedido o cálculo de uma probabilidade condicionada (8 itens da parte II do questionário, os itens 5b, 6b, 7b2, 7b3, 8a1, 8b1, 9b e 9c), a percentagem de respostas corretas é de 48,3%;

– O questionário contemplava um número muito inferior de questões de independência, comparativamente com os outros dois conteúdos;

– As justificações apresentadas pelos alunos, nas questões de escolha múltipla (parte I), nem sempre justificavam adequadamente a opção correta.

Quanto aos conteúdos probabilidade condicionada e probabilidade geral, estes reúnem uma percentagem bastante próxima de respostas corretas, embora muito inferior à percentagem de respostas corretas no conteúdo independência.

Do exposto, conclui-se que o tipo de questão (escolha múltipla e resposta curta) influenciou o desempenho dos alunos nos vários conteúdos de probabilidades, uma vez que as questões de escolha múltipla reúnem uma maior percentagem de respostas corretas do que as questões de resposta curta. Assim, as questões de resposta curta, incluídas apenas nos conteúdos probabilidade condicionada e probabilidade geral, explicam as menores percentagens de respostas corretas nesses conteúdos.

No conteúdo probabilidade geral, apresenta-se na Tabela 4 a distribuição das percentagens de respostas (corretas e erradas) dos alunos segundo os vários conceitos contemplados nos itens desse conteúdo.

Tabela 4 – Distribuição (em %) das respostas dos 310 alunos no conteúdo probabilidade geral

Conceito (n° de itens)	Respostas		Não respostas
	Corretas	Erradas	
Frequências (3)	97,3	1,6	1,1
Probabilidade da união (2)	59,5	36,1	4,4
Espaço amostral (1)	46,1	45,8	8,1
Probabilidade conjunta (3)	24,1	62,9	13,0

Da Tabela 4 destaca-se a percentagem de respostas corretas abaixo dos 50% nas questões de probabilidade conjunta e espaço amostral. No caso da probabilidade conjunta, embora a percentagem de respostas corretas seja muito inferior à percentagem de respostas corretas dos outros conceitos do conteúdo probabilidade geral, tal como se pode observar no gráfico da Figura 1, no item 7b1 a percentagem de respostas corretas foi de 62,9%.

Na Tabela 5 apresenta-se a distribuição das percentagens de respostas (corretas e erradas) dos alunos nas questões que envolvem situações de extração de objetos (bolas ou fichas) com reposição (itens 3a, 4a e 8a1) e sem reposição (itens 3b, 4b, 8b1, 9b e 9c) no conteúdo de probabilidade condicionada.

Tabela 5 – Distribuição (em %) das respostas dos 310 alunos nas questões com e sem reposição

Tipo de extração (n° de itens)	Respostas		Não respostas
	Corretas	Erradas	
Probabilidade condicionada em situações com reposição (3)	74,7	22,4	2,9
Probabilidade condicionada em situações sem reposição (5)	56,0	37,0	7,0

Dos dados da Tabela 5 conclui-se que foram mais fáceis para os alunos as questões que envolviam a probabilidade condicionada em situações com reposição do que em situações sem reposição. Além disso, repare-se também que foi nas situações sem reposição que mais alunos não responderam às questões.

Na Tabela 6 apresenta-se a distribuição das percentagens de respostas (corretas e erradas) dos alunos segundo o contexto em que se insere cada uma das questões do questionário.

Da leitura da tabela 6 concluímos que foi mais difícil para os alunos resolverem as questões de probabilidades em contexto gráfico, de extração sem reposição de fichas e de tabela de frequências simples do que em contexto de tabela de dupla entrada, roleta ou moeda.

No caso específico da tabela de dupla entrada, foram considerados dois tipos de questões: significado de dados da tabela, cuja percentagem média das respostas corretas é 97,3%; e cálculo de probabilidades, cuja percentagem média de respostas corretas é de 57,2%. Consequentemente, quase todos os alunos foram capazes de ler o significado de dados da tabela, enquanto apenas pouco mais de metade foram capazes de calcular as probabilidades pedidas.

Tabela 6 – Distribuição (em %) das respostas dos 310 alunos segundo o contexto das questões

Contexto (nº de itens)	Respostas		Não respostas
	Corretas	Erradas	
Moeda (1)	89,7	9,6	0,7
Roleta (1)	86,8	12,9	0,3
Tabela de dupla entrada (6)	77,3	19,2	3,5
Saco de bolas (8)	53,7	38,9	7,4
Tabela simples (2)	46,8	47,4	5,8
Fichas (3)	43,3	47,9	8,8
Gráfico (2)	43,1	53,5	3,4

Quanto à situação em contexto de extração sem reposição de fichas de um saco, também foram considerados dois tipos de questões: obtenção do espaço amostral, cuja percentagem média de respostas corretas é de 46,1%; e cálculo de probabilidades, cuja percentagem média de respostas corretas é de 41,9%. No contexto de extração de bolas, foram também considerados dois tipos de questões: os itens 3a, 3b, 4a e 4b de comparação de probabilidades, cuja percentagem média de respostas corretas é de 71,7%; e as questões 8a1, 8a2, 8b1 e 8b2 de cálculo de probabilidades, cuja percentagem média de respostas corretas é de 35,6%. Neste último caso salienta-se uma grande diminuição da percentagem de respostas corretas quando passamos da comparação de probabilidades para o cálculo de probabilidades, o que se deve fundamentalmente a estarem aí incluídas as duas questões de probabilidade conjunta (itens 81b e 82b), que foram as questões em que os alunos sentiram maior dificuldade.

### 3.2. Análise das justificações e estratégias

Na Tabela 7 apresenta-se a distribuição das resoluções dos alunos segundo as estratégias de contagem utilizadas nos 4 itens da questão 8 (utilizadas em 9,8% das resoluções), no item 9a de escrita do espaço amostral (utilizadas em 83% das resoluções) e nos itens 9b e 9c (utilizadas em 14,7% das resoluções).

Tabela 7 – Distribuição das resoluções dos alunos segundo as estratégias de contagem utilizadas nas questões 8 e 9

Estratégias	Percentagem de utilização
Configurações	41,0
Diagrama de árvore	29,8
Tabela de dupla entrada	16,0
Enumeração não sistemática	4,2
Diagrama de árvore e regra do produto	3,6
Regra do produto	3,1
Desenhos	1,1
Regrada soma	0,7
Diagrama de árvore, regra do produto e regra da soma	0,5

A informação fornecida na Tabela 7 permite concluir que as estratégias de contagem mais utilizadas pelos alunos incidiram na determinação de configurações, na construção de um diagrama de árvore e na construção de uma tabela de dupla entrada, sendo a estratégia *configurações* claramente a preferida dos alunos. No entanto, estas estratégias foram utilizadas essencialmente quando se solicitava a determinação do espaço amostral (item 9a), sendo muito pouco utilizadas por iniciativa do aluno nas restantes questões envolvendo experiências compostas.

Na Tabela 8 apresenta-se a distribuição das justificações dos alunos segundo o tipo de relação estabelecida (todo-todo, parte-parte e parte-todo) para compararem probabilidades condicionadas nas questões 3 e 4 (itens 3a, 3b, 4a e 4b). Nestas questões observaram-se 938 justificações destes tipos, num universo de 1104 justificações (85,0% das justificações): 414 nos dois itens da questão 3 e 524 nos dois itens da questão 4.

Tabela 8 – Distribuição das justificações utilizadas pelos alunos nas questões 3 e 4 segundo o tipo de relação estabelecida

Tipo de relação	Percentagem
Todo - Todo	4,7
Parte - Parte	71,2
Parte - Todo	24,1

Da leitura da Tabela 8 conclui-se que aquando da comparação de probabilidades condicionadas predominaram as relações do tipo parte-parte. Mesmo tendo sido lecionada a regra de Laplace (que envolve uma relação do tipo parte-todo) os alunos não deram preferência a este tipo de relação, tal como era de esperar.

Na tabela 9 apresenta-se a distribuição das justificações apresentadas pelos alunos na Parte I do questionário, que foram codificadas em três categorias: justificações de natureza tautológica, justificações que revelam a adesão ao enviesamento de equiprobabilidade e justificações que revelam a adesão à heurística de representatividade. A informação apresentada na Tabela 9 refere-se às justificações dos alunos que envolvem apenas essas estratégias, pois essas estratégias ocorreram, por vezes, associadas a outras estratégias que não as referidas na tabela. Nestes itens (1, 2, 3a, 3b, 4a e 4b) observaram-se 267 justificações desta natureza num universo de 1686 justificações (15,8% das justificações): 100 no item 1; 60 no item 2; 91 nos dois itens da questão 3; e 16 nos dois itens da questão 4.

Tabela 9 – Distribuição de justificações apresentadas pelos alunos nos itens da parte I do questionário (itens de escolha múltipla)

Natureza da justificação	Percentagem
Tautológica	30,7
Heurística da representatividade	16,5
Enviesamento de equiprobabilidade	52,8

Quanto à heurística da representatividade, as estratégias repartiram-se entre o *efeito recente negativo* e o *efeito recente positivo* nas questões de independência, isto é, nas questões 1 e 2.

Pela Tabela 9 conclui-se sobre a forte adesão à estratégia de enviesamento de equiprobabilidade (se um acontecimento é possível, ele é equiprovável) para justificar que dois acontecimentos são equiprováveis e a afirmações tautológicas que não justificam a opção selecionada uma vez que se limitam a repetir, em parte ou no todo, o enunciado da questão.

Na Tabela 10 apresenta-se a distribuição de justificações com potencial para justificar a opção correta apresentada pelos alunos nas questões da Parte I do questionário. As justificações foram

classificadas em dois grandes grupos: justificações específicas (utilizadas em 605 de 1686 justificações) e justificações gerais (utilizadas em 420 de 1686 justificações), conforme reunissem potencial para responder corretamente apenas à situação específica do questionário ou reunissem potencial para responder corretamente a situações similares às apresentadas no questionário, respectivamente.

Tabela 10 – Distribuição das justificações dos alunos para a escolha da resposta correta nos itens da parte I do questionário (itens de escolha múltipla)

Justificações	Porcentagem
<b>Gerais</b>	<b>41,0</b>
Razões de probabilidade	82,6
Razão bolas pretas (brancas) / bolas brancas (pretas)	14,0
Os sacos têm quantidades proporcionais de bolas	3,4
<b>Específicas</b>	<b>59,0</b>
No saco há tantas bolas brancas como pretas	35,2
Há menos bolas pretas do que brancas no saco	30,0
A região preta da roleta é maior que a região branca	21,3
O saco B tem mais bolas brancas do que o saco A	11,2
O saco B tem mais bolas do que o saco A	2,3

Entre as duas categorias de justificações, salienta-se uma maior percentagem de justificações específicas em relação às justificações gerais. No caso da justificação *razão bolas pretas (brancas)/bolas brancas (pretas)*, ela integra o conjunto das justificações gerais, enquanto vantagem (quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos desfavoráveis), porque os sacos continham apenas dois tipos de objetos (bolas brancas e bolas pretas). Contudo, tal não é garantia de que os alunos recorressem a esta estratégia caso a situação envolvesse mais tipos de objetos.

Quanto às justificações específicas, salientam-se as justificações *no saco há tantas bolas brancas como pretas* e *há menos bolas pretas do que brancas no saco*, alicerçadas na comparação do número de casos favoráveis e desfavoráveis.

Na Tabela 11 apresenta-se a distribuição dos erros dos alunos nas questões de resposta curta de determinação de uma probabilidade, excetuando as questões de resposta curta 7a1, 7a2, 7a3 e 9a por não envolverem o cálculo de uma probabilidade.

Da observação da Tabela 11, conclui-se que o erro predominante, com uma percentagem bastante expressiva comparativamente com os restantes erros, foi o erro *probabilidade diferente da probabilidade pedida*. Este erro consiste na apresentação de uma razão que, embora não sendo a probabilidade solicitada, é a razão de probabilidade de um acontecimento com significado no contexto da situação apresentada.

Dada a diversidade de erros que esta categoria envolve, efetua-se de seguida uma análise mais pormenorizada desta situação. Este erro resulta de o aluno: confundir as relações de ordem *maior, maior ou igual, menor* ou *menor ou igual* (36); ignorar o acontecimento condicionado (29); ignorar o acontecimento condicionante (222); considerar o acontecimento complementar (38); reduzir despropositadamente o espaço amostral (6); interpretar incorretamente a informação fornecida no enunciado (29); confundir probabilidade condicionada e probabilidade conjunta (236); confundir uma probabilidade condicionada com e a sua transposta (37); ignorar um dos acontecimentos da conjunção (15); confundir as probabilidades associadas às situações “sabendo que a primeira ficha tem uma letra, determina a probabilidade de a segunda ficha ter um número” e “sabendo que a segunda ficha tem um número, determina a probabilidade de a primeira ficha ter também um número” (139); outras probabilidades (130).

Tabela 11 — Distribuição dos erros cometidos pelos 310 alunos nas questões de resposta curta que envolviam o cálculo de uma probabilidade

Erros	Porcentagem (Frequência)
Probabilidade diferente da probabilidade pedida	48,0 (917)
Considerar valores que a variável pode tomar em vez da frequência que lhe está associada	12,5 (239)
Valor maior que 1 sem que seja o inverso de uma probabilidade	6,8 (130)
Inverso de uma razão de probabilidade	5,8 (110)
Cálculo de duas probabilidades em vez de uma	4,0 (76)
Razão bolas brancas (pretas) / bolas pretas (brancas)	3,8 (72)
Centrar a atenção na cor das bolas	3,6 (69)
Admitir que a probabilidade conjunta é igual à soma ou diferença de probabilidades	3,4 (64)
Não considerar a reposição quando é devida	2,3 (44)
Considerar a reposição quando não é devida	1,4 (27)
Probabilidade igual a 1	1,4 (27)
A razão é menor que 1 e envolve o número de linhas da tabela	0,9 (18)
Não considerar a ordem	0,4 (8)
Outros valores	5,7 (108)
<b>Total</b>	<b>100 (1909)</b>

O erro *considerar valores que a variável pode tomar* na obtenção de uma razão de probabilidade resulta de o aluno: considerar o valor da variável *idade* do eixo horizontal do gráfico da questão 5, considerar o valor da variável *número de irmãos* da questão 6 e considerar o valor da variável *número de bolas* na questão 8. Nesta categoria incluíram-se também os erros resultantes de considerar o número de barras do gráfico da questão 5, isto é, um número de valores que a variável *idade* pode tomar e de considerar o *número de linhas da tabela* na questão 6, isto é, um número de valores que a variável *número de irmãos* pode tomar.

Já o erro *inverso de uma razão de probabilidade* consiste em obter o inverso da probabilidade pedida ou o inverso de uma razão de probabilidade que, embora não sendo a probabilidade solicitada, representa a probabilidade de um acontecimento com significado no contexto da situação apresentada.

O erro *valor maior que 1 sem que seja o inverso de uma probabilidade* consiste na obtenção de uma razão maior que 1 ou em considerar para probabilidade um número inteiro maior do que 1. Embora quase todos os valores inteiros considerados pelos alunos tenham um significado no contexto do problema, a realidade é que o valor apresentado para a probabilidade pedida não tem qualquer significado no contexto de Probabilidades.

O erro *cálculo de duas probabilidades* consiste em considerar duas razões de probabilidade, quando a resposta correta envolve apenas uma.

O erro *razão bolas brancas (pretas)/bolas pretas (brancas)* consiste em identificar a probabilidade com uma espécie de *vantagem*, isto é, a razão entre o número de bolas brancas (pretas) e o número de bolas pretas (brancas) existentes no saco ou a razão do número de bolas brancas existentes no saco antes e depois da primeira extração.

O erro *centrar a atenção na cor* consiste em centrar a atenção na cor dos objetos em vez do número de configurações possíveis, tomando para acontecimentos elementares pares do tipo *BB*, *BP*, *PB* e *PP* quando há vários objetos de cada tipo e considerando-os acontecimentos elementares equiprováveis.

O erro admitir que a probabilidade conjunta é igual à soma ou diferença de probabilidades consiste em adicionar ou subtrair probabilidades, muitas das quais estão envolvidas no erro *cálculo de duas probabilidades*. No caso da soma de probabilidades, o aluno admite que  $P(A \cap B) = P(A|B) + P(B)$  em vez de considerar que  $P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$ .

Por oposição às categorias antes referidas, incluíram-se na categoria *outros valores* as respostas desprovidas de sentido na situação apresentada.

### 3.3. Desempenho em matemática e respostas

Efetou-se uma análise das respostas por item, por grupos de itens correspondentes aos diferentes conteúdos – independência, probabilidade condicionada e probabilidade geral, e na totalidade do questionário segundo os níveis de desempenho em matemática, codificado em fraco, médio e bom.

Na análise de cada uma das questões do questionário utilizámos o teste de qui-quadrado para testar a independência entre as variáveis desempenho em matemática (fraco, médio e bom) e o tipo de resposta (correta e errada). Na Tabela 12 apresenta-se a distribuição das respostas corretas nos 23 itens do questionário, segundo o nível de desempenho em matemática dos alunos envolvidos no estudo.

Tabela 12 – Distribuição das respostas corretas segundo o desempenho dos alunos em matemática

Item	Percentagem de respostas corretas segundo o desempenho em Matemática			Valor da estatística $\chi^2$	Valor de p
	Fraco	Médio	Bom		
1	87,5	86,4	97,7	8,022*	0,018
2	83,3	83,2	96,5	9,598**	0,008
3a	54,2	65,6	83,7	18,164**	0,000
3b	41,7	46,4	55,8	3,764	0,153
4a	88,5	90,4	95,3	2,791	0,248
4b	71,9	84,0	89,5	10,196**	0,006
5a	39,6	48,8	79,1	31,176**	0,000
5b	14,6	28,8	55,8	36,430**	0,000
6a	49,0	61,6	88,4	32,203**	0,000
6b	16,7	23,2	51,2	29,656**	0,000
7a1	92,7	100,0	100,0	— ***	—
7a2	92,7	98,4	97,7	— ***	—
7a3	93,8	100,0	100,0	— ***	—
7b1	50,0	60,8	81,4	19,742**	0,000
7b2	44,8	53,6	74,4	17,029**	0,000
7b3	38,5	48,0	73,3	23,338**	0,000
8a1	58,3	64,0	82,6	13,248**	0,001
8a2	1,0	2,4	17,4	26,229**	0,000
8b1	49,0	67,2	83,7	24,581**	0,000
8b2	1,0	0,0	10,5	— ***	—
9a	35,4	48,0	54,7	7,122*	0,028
9b)	34,4	57,6	65,1	19,437**	0,000
9c	25,0	32,0	36,0	2,700	0,259

\* Diferenças estatisticamente significativas a menos de 0,05.

\*\* Diferenças estatisticamente significativas a menos de 0,01.

\*\*\* Não foi possível aplicar o teste de qui-quadrado por existir 3 células com frequência esperada inferior a 5.

Pela tabela 12 observa-se, em geral, um aumento da percentagem de respostas corretas quando passamos de um desempenho em matemática fraco para um desempenho médio e deste para um desempenho bom. Nos itens 1 e 2 (itens de independência) e no item 8b2 (item de probabilidade geral) observam-se percentagens semelhantes de respostas corretas nos níveis de desempenho fraco e médio e um aumento considerável destas respostas no nível de desempenho bom. De entre estas questões, não foi possível aplicar o teste de qui-quadrado à questão 8b2, por existir um número excessivo de células (3 células) com frequência esperada inferior a 5.

Nos itens 7a1, 7a2 e 7a3 (itens de probabilidade geral), em que se avaliava a capacidade de atribuir significado a dados de uma tabela de dupla entrada, observam-se percentagens semelhantes de respostas corretas nos três níveis de desempenho em matemática, muito próximas ou mesmo de 100%. Em todas estas questões não foi possível aplicar o teste de qui-quadrado pelas mesmas razões que as referidas para a questão 8b2.

Dos restantes 19 itens, em 16 a aplicação do teste de qui-quadrado determinou diferenças estatisticamente significativas a menos de 5% e nos 3 restantes itens (3b, 4a e 9c, de probabilidade condicionada) não se verificaram diferenças estatisticamente significativas.

Para cada um dos conjuntos de itens considerados, correspondentes aos três conteúdos considerados e à totalidade do questionário, aplicámos o teste bilateral não paramétrico de Kruskal-Wallis para comparar o desempenho dos alunos nesses conteúdos e no questionário com o desempenho em matemática. Na Tabela 13 apresentam-se os resultados dessa análise, incluindo os valores da média, do desvio padrão e da estatística do teste e correspondente valor de prova.

Tabela 13 – Análise das respostas corretas por desempenho em matemática nos três conteúdos considerados e no questionário

Dimensões	Média (desvio padrão) do número de respostas corretas segundo o desempenho em matemática						Valor da estatística $H_e$	Valor de p
	Fraco		Médio		Bom			
Independência	1,7	(0,54)	1,7	(0,53)	1,9	(0,24)	16,150**	0,000
Probabilidade condicionada	5,4	(2,61)	6,6	(2,59)	8,5	(2,45)	54,148**	0,000
Probabilidade geral	4,6	(1,39)	5,2	(1,17)	6,3	(1,16)	70,188**	0,000
Questionário total	11,6	(3,79)	13,5	(3,29)	16,7	(2,96)	79,836**	0,000

\*\* Diferenças estatisticamente significativas a menos de 0,01.

Pela Tabela 13 verifica-se que o teste de Kruskal-Wallis determinou diferenças estatisticamente significativas em todos os três conteúdos estudados e na totalidade do questionário.

Em síntese, podemos concluir que ao maior nível de desempenho em matemática corresponde, em geral, uma melhor realização dos alunos nas diversas dimensões estudadas no questionário, tendo-se obtido diferenças estatisticamente significativas na grande maioria dos itens considerados individualmente, em todos os conteúdos considerados (independência, probabilidade condicionada e probabilidade geral) e na totalidade do questionário.

#### 4. Conclusão

Na globalidade do questionário verificou-se que, em média, os alunos responderam corretamente a quase dois terços dos itens. O facto de se ter obtido uma maior percentagem de respostas corretas no caso do conteúdo independência e percentagens semelhantes nos conteúdos probabilidade condicionada

e probabilidades geral, leva-nos a concluir que a independência e a probabilidade condicionada não se revelaram conteúdos mais difíceis do que a probabilidade geral. Por outro lado, tal como verificou Fischbein (1984), também foi consideravelmente maior a percentagem de respostas corretas na globalidade dos itens envolvendo extração com reposição relativamente aos que envolvem extração sem reposição.

Em termos das justificações e estratégias avançadas pelos alunos para as suas respostas nos itens de escolha múltipla saliente-se o recurso a relações parte-parte, como é referido em Correia e Fernandes (2012) e a adesão ao enviesamento de equiprobabilidade, a justificações tautológicas e à heurística da representatividade a partir dos efeitos recentes positivo e negativo. Em termos de estratégias de contagem foram mais utilizadas pelos alunos a determinação das diferentes configurações, a construção de um diagrama de árvore e a construção de uma tabela de dupla entrada, as quais foram utilizadas principalmente quando se solicitava a determinação do espaço amostral e muito pouco usadas nas outras questões, particularmente no cálculo de probabilidades em experiências compostas onde a construção de um diagrama de árvore ou de uma tabela de dupla entrada se poderia revelar uma estratégia muito promissora.

No caso das respostas corretas, observou-se que, em pouco menos de metade dos casos, os alunos apresentaram justificações gerais, que garantem a seleção das respostas corretas nas situações apresentadas e em situações similares, e em pouco mais de metade dos casos, os alunos apresentaram justificações específicas, que garantem a resposta correta apenas nas situações específicas do questionário. Relativamente ao estudo de Fernandes (2001), este resultado representa um aumento significativo da adesão a raciocínios gerais no caso dos alunos do 8º ano, que não tinham tido ensino prévio de probabilidades.

No caso dos itens envolvendo o cálculo de probabilidades observaram-se vários tipos de erros, salientando-se a determinação de uma probabilidade diferente da probabilidade pedida, com cerca de metade dos erros, seguindo-se considerar valores da variável em vez das frequências no caso dos gráficos, um valor maior do que 1 sem que seja o inverso de uma probabilidade, o inverso de uma razão de probabilidade e calcular duas probabilidades em vez de uma, entre outros. No caso da determinação de uma probabilidade diferente da pedida, destacou-se o facto de os alunos ignorarem o acontecimento condicionante, também observado em Correia et al. (2011), confundirem a probabilidade condicionada com a probabilidade conjunta, também observado em Correia et al. (2011) e Pollatsek et al. (1987) e dificuldades na interpretação dos enunciados.

Ao aumento de desempenho em matemática correspondeu, em geral, um aumento da percentagem de respostas corretas dos alunos em qualquer dos conteúdos avaliados (independência, probabilidade condicionada e probabilidade geral), tal como se verificou no estudo de Fernandes (2001) no caso da probabilidade geral.

Globalmente, os resultados obtidos no presente estudo, enfatizando a percentagem de respostas corretas, os raciocínios e o aumento da percentagem de respostas corretas com o maior desempenho em matemática, constituem evidências que corroboram a possibilidade de introduzir o ensino da independência e da probabilidade condicionada na escolaridade básica.

## Referências

- Ahlgren, A., & Garfield, J. (1991). Analysis of the Probability Curriculum. In R. Kapadia, & M. G. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: probability in education* (pp. 107-134). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación? In J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho, & F. Viseu (Orgs.), *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 9-21). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

- Borovcnik, M. G., & Kapadia, R. (2010). Research and developments in probability education internationally. In M. Joubert, & P. Andrews (Eds.), *Proceedings of the British Congress for Mathematics Education* (pp. 41-48). Acedido em: [www.bsrlm.org.uk/IPs/ip30-1/BSRLM-IP-30-1-06.pdf4](http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip30-1/BSRLM-IP-30-1-06.pdf4).
- Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.
- Contreras, J. M., Batanero, C., Díaz, C., & Fernandes, J. A. (2011). Prospective teachers' common and specialized knowledge in a probability task. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Rzeszów, Poland, 9th to 13th February 2011.
- Correia, P. F., Fernandes, J. A., & Contreras, J. M. (2011). Intuições de alunos do 9º ano de escolaridade sobre probabilidade condicionada. In C. Nunes, A. Henriques, A. Caseiro, A. Silvestre, H. Pinto, H. Jacinto & J. Ponte (Orgs.), *Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Correia, P. F. & Fernandes, J. A. (2012). Comparação de probabilidades condicionadas no contexto de extração de bolas de um saco. In H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre & C. Nunes (Orgs.), *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 429-442). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Estrada, A., & Díaz, C. (2006). Computing probabilities from two way tables: an exploration study with future teachers. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of Seventh International Conference on Teaching of Statistics*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education.
- Falk, R. (1993). *Understanding probability and statistics: a book of problems*. Wellesley, Massachusetts: A K Peters.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: Insights and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of Second International Conference on Teaching Statistic* (pp. 292-297). Victoria, BC: University of Victoria.
- Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.
- Fernandes, J. A. (2001). Intuições probabilísticas em alunos do 8.º e 11.º anos de escolaridade. *Quadrante*, 10(2), 3-32.
- Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15, 1-24.
- Green., D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (vol. 2, pp. 766-783). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.
- Kahneman, D., & Tversky, A. (1982). Subjective probability: A judgment of representativeness. In D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 32-47). Cambridge: Cambridge University Press.
- Konold, C., Pollatsek, A., Well, A., Lohmeier, J., & Lipson, A. (1993). Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(5), 392-414.
- Lecoutre, M.; Durand, J. (1988). Jugements probabilistes et modeles cognitifs: etude d'une situation aleatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19(3), 357-368.
- Ministério da Educação (2007). *Programa Ajustado de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C., & Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organisation, Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255-269.

- Spinillo, A. G. (2002). O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, 15(3), 475-487.
- Tarr, J. E. (1997). Using middle school students' thinking in conditional probability and independence to inform instruction. (Doctoral dissertation, Illinois State University, 1997). *Dissertation Abstracts International*, 49, Z5055.
- Tarr, J. E., & Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, 9(1), 39-59.
- Tarr, J. E., & Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 215-238). New York, NY: Springer.
- Watson, J. (2005). The probabilistic reasoning of middle school students. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 145-169). New York, NY: Springer.

## ANEXO

### Parte I

Esta parte do questionário é constituída apenas por questões de escolha múltipla. Das três alternativas que te são apresentadas escolhe **apenas uma** e assinala-a com um **X**. Não te esqueças de justificar a tua escolha.

1. Quando se lança uma moeda há dois resultados possíveis: obter a face Euro ( $E$ ) ou obter a face Nacional ( $N$ ). Lançou-se **cinco** vezes consecutivas uma moeda equilibrada ao ar e obteve-se sempre a face Euro, isto é, a sequência  $EEEE$ .

Algum dos seguintes resultados é mais provável?

- Obter novamente a face Euro no sexto lançamento.  
 Obter a face Nacional no sexto lançamento.  
 É igualmente provável obter qualquer uma das faces da moeda no sexto lançamento.

Justifica a tua resposta.

2. Quando se gira a roleta da Figura 1, há dois resultados possíveis para o ponteiro quando a roleta parar: o ponteiro assinala a cor branca ( $B$ ) ou o ponteiro assinala a cor preta ( $P$ ). Girou-se **cinco** vezes a roleta e obteve-se a sequência  $BPPBP$ .

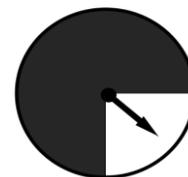


Figura 1

Gira-se novamente a roleta pela **sexta** vez. Algum dos seguintes resultados é mais provável?

- O ponteiro assinala a cor **Branca** quando a roleta para.  
 O ponteiro assinala a cor **Preta** quando a roleta para.  
 É igualmente provável o ponteiro assinalar qualquer uma das cores, branca ou preta, quando a roleta para.

Justifica a tua resposta.

3. Considera dois sacos A e B com bolas brancas e bolas pretas.

O saco A tem 10 bolas brancas e 20 bolas pretas.

O saco B tem 100 bolas brancas e 200 bolas pretas.

- a) Retira-se, ao acaso, uma bola do saco **A** e uma bola do saco **B** e verifica-se que são ambas brancas. Depois de se **colocar** de novo estas bolas nos respetivos sacos, retira-se novamente uma bola de cada um dos sacos.

Algum dos seguintes resultados é mais provável?

- Obter uma bola branca do saco **A**.  
 Obter uma bola branca do saco **B**.  
 É igualmente provável obter uma bola branca do saco **A** e do saco **B**.

Justifica a tua resposta.

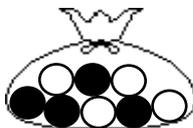
- b) Retira-se, ao acaso, uma bola do saco **A** e uma bola do saco **B** e verifica-se que são ambas brancas. **Sem colocar** de novo estas bolas nos respetivos sacos, retira-se novamente uma bola de cada um dos sacos.

Algum dos seguintes resultados é mais provável?

- Obter uma bola branca do saco **A**.  
 Obter uma bola branca do saco **B**.  
 É igualmente provável obter uma bola branca do saco **A** e do saco **B**.

Justifica a tua resposta.

4. Num saco há 4 bolas brancas e 4 bolas pretas, conforme se mostra na figura seguinte. As bolas são todas iguais exceto na cor. Sem ver, tiram-se sucessivamente (uma a seguir à outra) **duas** bolas do saco.



- a) Extraí-se uma 1ª bola do saco e **coloca-se** essa bola no saco antes de se extrair uma 2ª bola.  
Comparativamente com a probabilidade da 1ª bola ser preta, a probabilidade de a 2ª bola ser branca:

- Aumenta.  
 Diminui.  
 Mantém-se.

Justifica a tua resposta.

- b) Extraí-se uma 1ª bola do saco e **não se coloca** essa bola no saco antes de se extrair uma 2ª bola.  
Comparativamente com a probabilidade da 1ª bola ser preta, a probabilidade de a 2ª bola ser branca:

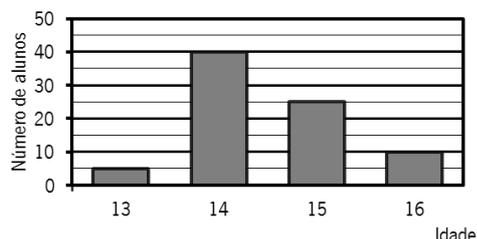
- Aumenta.  
 Diminui.  
 Mantém-se.

Justifica a tua resposta:

## Parte II

Nas questões desta parte do questionário deves indicar todos os cálculos e raciocínios que realizaste para obter as respostas apresentadas.

5. Um dos trabalhos realizados pelo João para a disciplina de Matemática consistiu em fazer o registo das idades dos alunos do 9.º ano da sua escola e em elaborar um gráfico da distribuição dos alunos por idades. O gráfico que o João elaborou, apresentado ao lado, está correto. Escolheu-se, ao acaso, um aluno do 9.º ano da escola do João.



- a) Qual a probabilidade de o aluno ter mais de 14 anos?  
b) Esse aluno tem menos de 15 anos. Qual a probabilidade de ele ter 13 anos?

6. Escolheram-se, ao acaso, 60 estudantes de uma escola e perguntou-se a cada um deles o seu número de irmãos. A partir das respostas dadas, obtiveram-se os dados do quadro seguinte:

Nº de irmãos	Nº de estudantes
0	8
1	25
2	15
3 ou mais	12

Escolhe-se, novamente ao acaso, um estudante do grupo dos 60 estudantes.

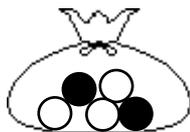
- a) Qual a probabilidade de o estudante escolhido ter mais que 1 irmão?  
b) Sabe-se que o estudante escolhido tem menos que 2 irmãos. Qual a probabilidade de ter exatamente 1 irmão?

7. Escolheram-se, ao acaso, 25 estudantes de uma escola e perguntou-se a cada um deles se praticava ou não desporto. Os dados obtidos foram registados, segundo o sexo dos estudantes, no quadro seguinte.

	Rapariga	Rapaz	Total
Pratica desporto	8	6	14
Não pratica desporto	7	4	11
Total	15	10	25

- a) No quadro anterior, o que representa: **1)** O número 14; **2)** O número 10; **3)** O número 6.  
b) Escolhe-se, ao acaso, um estudante do grupo dos 25 estudantes.  
**1)** Qual a probabilidade de o estudante ser rapaz e praticar desporto?  
**2)** Sabe-se que o estudante escolhido pratica desporto. Qual a probabilidade de ser rapaz?  
**3)** Sabe-se que o estudante escolhido é rapaz. Qual a probabilidade de praticar desporto?

8. Num saco há 3 bolas brancas e 2 bolas pretas, conforme se mostra na figura seguinte. As bolas são todas iguais exceto na cor. Sem ver, tiram-se sucessivamente **duas** bolas do saco.



- a) Considera que a **1ª** bola extraída **é colocada** de novo no saco antes de se extrair a **2ª** bola.
- 1) Sabe-se que a **1ª** bola extraída é branca. Qual a probabilidade de a **2ª** bola ser branca?
  - 2) Qual a probabilidade de obter **duas** bolas brancas?
- b) Considera que a **1ª** bola extraída **não é colocada** de novo no saco antes de se extrair a **2ª** bola.
- 1) Sabe-se que a **1ª** bola extraída é branca. Qual a probabilidade de a **2ª** bola ser preta?
  - 2) Qual a probabilidade de obter **uma** bola branca e **uma** bola preta (por qualquer ordem)?
9. Num saco há 4 fichas todas iguais, em duas estão inscritos os números 1 e 2 e nas restantes duas estão inscritas as letras A e B, como se mostra a seguir.



Considera que a Ana tirou, ao acaso, duas fichas do saco **sem repor** a 1ª ficha no saco antes de retirar a 2ª ficha.

- a) Escreve todas as sequências possíveis para as duas fichas extraídas pela Ana.
- b) Sabendo que a **primeira** ficha tem uma letra, determina a probabilidade de a **segunda** ficha ter um número.
- c) Sabendo que a **segunda** ficha tem um número, determina a probabilidade de a **primeira** ficha ter também um número.