Universidade do Minho
Escola de Ciências

Jorge Manuel Martins Correia

O Teorema da Normalização para Lógica de Primeira Ordem

Julho de 2009

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Jorge Manuel Martins Correia

O Teorema da Normalização para Lógica de Primeira Ordem

Tese de Mestrado Matemática
Área de Especialização em Ensino

Trabalho efectuado sobre a orientação do
Doutor José Carlos Espírito Santo
e do
Doutor Luís Filipe Ribeiro Pinto

Julho de 2009

O Teorema da Normalização para Lógica de Primeira Ordem

Resumo

Nesta dissertação apresentamos um estudo sobre a Dedução Natural, cujo objectivo principal é a demonstração do Teorema da Normalização, quer para a Lógica Clássica, quer para a Lógica Intuicionista. Apresentamos também alguns dos corolários e aplicações imediatas do Teorema da Normalização, em particular algumas das propriedades mais características da Lógica Intuicionista, como o teorema da separação, a propriedade da disjunção e a propriedade do quantificador existencial. O processo de normalização usa operações de substituição, em derivações, de variáveis por termos e de hipóteses por derivações. Associadas a estas operações estão condições de substituibilidade, que garantem que as condições de aplicabilidade das regras de inferência dos quantificadores são satisfeitas. Esta tese contém um tratamento rigoroso destas questões.

The Normalization Theorem for First Order Logic

Abstract

In this dissertation we present a study of Natural Deduction, whose main goal is to prove the Normalization Theorem, both for Classic Logic and Intuitionistic Logic. We also present some of the corollaries and immediate applications of the Normalization Theorem, in particular some of the most characteristic properties of Intuitionistic Logic, like the separation theorem, the disjunction property, and the existential quantifier property. The normalization process makes use of the operations of substitution, in derivations, of terms for variables and of derivations for hypotheses. There are substitutivity conditions associated with those operations, which guarantee the satisfaction of the side conditions of quantifiers' inference rules. This thesis contains a rigorous treatment of these matters.

Agradecimentos

Quero deixar os meus especiais agradecimentos ao Doutor José Carlos Espírito Santo pela sua disponibilidade, pela sua incansável e generosa dedicação nas revisões efectuadas ao longo deste trabalho.

Ao Doutor Luís Filipe Ribeiro Pinto pela solidariedade demonstrada e dedicação, por ter estado disponível, por todas as discussões e apoio que prestou e levaram à realização deste trabalho.

O meu sincero obrigado.

À Carla e ao Lucas

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Nesta dissertação apresentamos um estudo sobre a Dedução Natural, um dos sistemas dedutivos formais mais estudados em Teoria da Demonstração. O objectivo principal do estudo é a demonstração do Teorema da Normalização, quer para a Lógica Clássica, quer para a Lógica Intuicionista. Apresentamos também alguns dos corolários e aplicações imediatas do Teorema da Normalização, em particular algumas das propriedades mais características da Lógica Intuicionista, como o teorema da separação, a propriedade da disjunção e a propriedade do quantificador existencial.

O sistema de Dedução Natural caracteriza-se pela proximidade com o raciocínio humano, onde há lugar ao raciocínio hipotético, distinguindo-se por isso de outros sistemas dedutivo como, por exemplo, o cálculo de sequentes e os sistemas axiomáticos. As origens do sistema de Dedução Natural remontam ao início do século XX com Lukasiewics (1926), Jaśkowski (1934) e Gentzen (1935) [9, 12]. Prawitz [10], em 1965, desenvolve o estudo da Dedução Natural e prova pela primeira vez o Teorema da Normalização [1]. A Dedução Natural é um dos sistemas dedutivos mais populares em manuais de Lógica recentes [1, 8, 18]. Existem vários estilos de Dedução Natural, como, por exemplo, o estilo Gentzen-Prawitz (seguido nesta dissertação e em [18]), onde as derivações são árvores de fórmulas, e o estilo Fitch adoptado em [1, 8], onde as derivações são sequências de fórmulas.

O Teorema da Normalização afirma que, se uma fórmula é derivável a partir de um conjunto de hipóteses, então existe uma derivação dessa fórmula a partir do mesmo conjunto de hipóteses, onde certas formas de raciocínio redundantes são evitadas. Essas derivações são ditas normais. Depois de sabermos que um dado sistema satisfaz o Teorema da Normalização, podemos inferir outras propriedades desse sistema, como, por exemplo, a propriedade da subfórmula, muito importante na área da demonstração automática. Outra aplicação do Teorema da Normalização é como um método para demonstrar a não derivabilidade e, em particular, a consistência. A demonstração do Teorema da Normalização

[1] Sabe-se agora que, embora não o tendo publicado, Gentzen provou o Teorema da Normalização para Lógica Intuicionista [19].

que é apresentada neste trabalho vai um pouco mais longe, pois diz que toda a derivação pode ser transformada, através de sequências de transformações elementares (ditas reduções), numa derivação normal. Este resultado é, por vezes, chamado de Teorema da Normalização Fraca, por contraste com o Teorema da Normalização Forte (demonstrado pela primeira vez por Prawitz [11]), que diz que qualquer sequência de reduções conduz a uma derivação normal. Neste trabalho seguimos, no que se refere à demonstração do Teorema da Normalização para Lógica Clássica, a metodologia adoptada por Prawitz em [10], considerando apenas um subsistema completo onde estão omitidos os símbolos lógicos $\vee$ e $\exists$. Uma demonstração para o sistema onde os símbolos $\vee$ e $\exists$ são primitivos pode ser consultada em [13].

As regras de inferência para os quantificadores têm uma certa complexidade e estão sujeitas a condições de aplicabilidade. Na mera formulação dessas regras e das suas condições de aplicabilidade intervém o conceito de substituição de variável por um termo numa fórmula. Ora, em Lógica de Primeira Ordem, associada a essa operação de substituição está uma condição de substituibilidade (nos manuais, normalmente, diz-se "t livre para x em A", mas nós diremos "x é substituível por t em A"). Na demonstração do Teorema da Normalização tudo se complica, uma vez que, para definir as reduções que constituem o processo de normalização, temos de estender a operação de substituição de variáveis por termos a uma derivação e introduzir a nova operação de substituição de hipóteses por uma derivação numa derivação. Estas novas operações também estão sujeitas a condições de substituibilidade, sob pena de violarem as condições de aplicabilidade das regras dos quantificadores e, por isso, não produzirem derivações.

Para garantir as condições de substituibilidade para as novas operações de substituição, aplicam-se às derivações certas transformações de carácter burocrático, a saber: mudança do nome de variável ligada e mudança da chamada variável crítica de alguma instância de duas das regras de inferência para os quantificadores. Na literatura, uma forma de aligeirar ou tornar informal estas questões é forçar que nas derivações haja uma separação entre as variáveis que ocorrem ligadas e as variáveis com ocorrências livres. Prawitz [10] separa à partida o conjunto das variáveis em dois conjuntos com esse intuito. Outros autores [14, 15, 16], por sua vez, adoptam o que podemos chamar de "convenção da α-equivalência", que consiste em identificar as fórmulas α-equivalentes, ou seja, fórmulas que apenas diferem no nome das variáveis ligadas. Esta convenção, na prática, diz que o nome das variáveis ligadas pode ser escolhido de maneira apropriada. Nesta tese não adoptamos nenhum desses expedientes e damos um tratamento completo das questões da substituição e da substituibilidade. Nesta abordagem, o Teorema da Normalização apenas garante a existência de uma derivação normal com conclusão e hipóteses α-equivalentes à conclusão e hipóteses originais. Esta nuance está implícita quando se adopta a convenção da α-equivalência.

A presente dissertação encontra-se estruturada em cinco capítulos e um apêndice, correspondendo o Capítulo 1 a esta introdução. No Capítulo 2 são fixados aspectos sintácticos e são apresentadas várias definições básicas associadas a uma linguagem de primeira ordem. Ainda neste capítulo é introduzido o formalismo da Dedução Natural, que este trabalho estudará. No Capítulo 3 é ilustrado o princípio da inversão de Prawitz e algumas transformações de derivações que o concretizam. São também analisadas questões relacionadas com as duas operações de substituição mencionadas acima e as respectivas condições de substituibilidade. No Capítulo 4 e no Capítulo 5 são apresentadas as demonstrações do Teorema da Normalização para a Lógica Clássica e para a Lógica Intuicionista, respectivamente, sendo também ilustradas algumas das suas aplicações. Algumas demonstrações do Capítulo 3 são remetidas para o apêndice.

Capítulo 2

Dedução Natural

Neste capítulo pretendemos, em primeiro lugar, fixar aspectos sintácticos e relembrar várias definições básicas associadas a uma linguagem de primeira ordem.

De seguida, introduziremos o formalismo da Dedução Natural, que nos acompanhará ao longo de todo este trabalho.

2.1 Sintaxe de uma linguagem de primeira-ordem

Ao longo desta dissertação consideraremos fixada uma linguagem de primeira-ordem $\mathscr{L}$ constituída por um conjunto de *símbolos de função* denotado por $\mathscr{F}$, por um conjunto de *símbolos de relação* ou *símbolos de predicado* denotado por $\mathscr{R}$ e por um conjunto de *constantes* denotado por $\mathscr{C}$.

A cada símbolo de função ou de relação está associado um número natural (diferente de zero), chamado aridade, que representa o número de argumentos de cada símbolo.

Consideraremos também fixo um conjunto numerável $\mathscr{V}$ de variáveis. Usaremos as letras x, y, z, v, w (possívelmente com índice) como meta-variáveis sobre $\mathscr{V}$.

Usaremos habitualmente as letras f, r, c como meta-variáveis sobre os conjuntos $\mathscr{F}, \mathscr{R}, \mathscr{C}$, respectivamente.

Definição 1 (Alfabeto)**.** *O* alfabeto *induzido por uma linguagem $\mathscr{L}$, que notamos por $\mathcal{A}_{\mathscr{L}}$, é o conjunto formado pelos símbolos de $\mathscr{F}$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{V}$ e $\mathscr{C}$ e ainda pelos símbolos:*

a) $\wedge$, $\vee$, $\supset$ *e* $\perp$, *chamados* conectivos proposicionais*, respectivamente, conjunção, disjunção, implicação e absurdo;*

b) $\exists$ *e* $\forall$, *chamados* quantificadores*, respectivamente, existencial e universal;*

c) "(" , ")" *e* ",".

Os símbolos especificados nas alíneas a) e b), da definição anterior, são denominados de *símbolos lógicos*.

Uma *palavra* em $\mathcal{A}_{\mathscr{L}}$ é uma sequência finita de símbolos do alfabeto $\mathcal{A}_{\mathscr{L}}$. Denotaremos por ${\mathcal{A}_{\mathscr{L}}}^*$, o conjunto das palavras em $\mathcal{A}_{\mathscr{L}}$.

Definição 2 (Termos em $\mathscr{L}$)**.** *O conjunto de* termos *de uma linguagem $\mathscr{L}$, que denotamos por $\mathcal{T}_{\mathscr{L}}$, é o menor conjunto $X \subseteq {\mathcal{A}_{\mathscr{L}}}^*$ tal que:*

a) *para qualquer $x \in \mathscr{V}$, $x \in X$;*

b) *para qualquer $c \in \mathscr{C}$, $c \in X$;*

c) *para qualquer $f \in \mathscr{F}$ de aridade n, se $t_1, \ldots, t_n \in X$ então $f(t_1, \ldots, t_n) \in X$.*

Usaremos as letras t, u (possívelmente indexadas) como meta-variáveis sobre $\mathcal{T}_{\mathscr{L}}$.

Definição 3 (Variáveis de um termo)**.** *O conjunto das* variáveis de um termo *t, que representamos por $Var(t)$, é definido recursivamente por:*

a) *para qualquer $c \in \mathscr{C}$, $Var(c) = \emptyset$;*

b) *para qualquer $x \in \mathscr{V}$, $Var(x) = \{x\}$;*

c) *para quaisquer $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_{\mathscr{L}}$, $f \in \mathscr{F}$ de aridade n,*

$$Var(f(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} Var(t_i) \ .$$

Definição 4 (Substituição de variáveis em termos)**.** *Para cada variável x e termo u, a* substituição *num termo t de x por u, que denotamos por $t[u/x]$, é o termo definido recursivamente por:*

a) $y[u/x] = \begin{cases} u & \text{se } y = x \\ \\ y & \text{se } y \neq x \end{cases}$ *, para qualquer $y \in \mathscr{V}$;*

b) *$c[u/x] = c$, para qualquer $c \in \mathscr{C}$;*

c) *$f(t_1, \ldots, t_n)[u/x] = f(t_1[u/x], \ldots, t_n[u/x])$, para quaisquer $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_{\mathscr{L}}$, $f \in \mathscr{F}$ de aridade n.*

Definição 5 (Fórmula atómica)**.** *Uma palavra em $\mathcal{A}_{\mathscr{L}}$ da forma $\perp$ ou $r(t_1, \ldots, t_n)$, em que r tem aridade n, é denominada de* fórmula atómica*. Representamos o conjunto das fórmulas atómicas por ${\mathcal{F}_{\mathscr{L}}}^{atom.}$.*

Definição 6 (Fórmulas)**.** *O conjunto de* fórmulas *de uma linguagem $\mathscr{L}$, que denotamos por $\mathcal{F}_{\mathscr{L}}$, é o menor conjunto $X \subseteq {\mathcal{A}_{\mathscr{L}}}^*$ tal que:*

a) *para qualquer $A \in {\mathcal{F}_{\mathscr{L}}}^{atom.}$, $A \in X$;*

b) *para qualquer* $\boxtimes \in \{\wedge, \vee, \supset\}$, *se* $A \in X$ *e* $B \in X$ *então* $(A \boxtimes B) \in X$*;*

c) *para qualquer* $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathscr{V}$, *se* $A \in X$ *então* $(Qx\, A) \in X$.

Usaremos as letras A, B, C, D, E, F (possivelmente indexadas) e a letra Q como meta-variáveis sobre o conjunto $\mathcal{F}_{\mathscr{L}}$ e $\{\exists, \forall\}$, respectivamente.

A sequência de símbolos Qx diz-se um quantificador sobre x. Uma fórmula B da forma QxA diz-se uma quantificação sobre x e A diz-se o alcance do quantificador sobre x que conjuntamente com A constitui a fórmula B.

Por convenção, os parênteses externos de uma fórmula são geralmente omitidos.

Definição 7 (Grau)**.** *O* grau *de uma fórmula* A*, que representamos por* $Grau(A)$*, é o número de ocorrências de símbolos lógicos, diferentes de* $\perp$*, existentes em* A*.*

Da definição anterior decorre que o grau de qualquer fórmula atómica é zero.

Definição 8 (Símbolo principal)**.** *Sendo* A *uma fórmula não atómica,* A *tem exactamente uma das seguintes formas:* $A_1 \wedge A_2$, $A_1 \vee A_2$, $A_1 \supset A_2$, $\exists x A_1$ *e* $\forall x A_1$*, com* $A_1, A_2 \in \mathcal{F}_{\mathscr{L}}$ *e* $x \in \mathscr{V}$*; o símbolo* $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\exists$ *e* $\forall$*, é chamado* símbolo principal *de* A*, respectivamente.*

Definição 9 (Subfórmula)**.** *O conjunto de* subfórmulas *de uma fórmula* A*, que denotamos por* $Subf(A)$*, é definido recursivamente por:*

a) *para qualquer* $A \in \mathcal{F}_{\mathscr{L}}{}^{atom.}$, $Subf(A) = \{A\}$ *;*

b) *para quaisquer* $A, B \in \mathcal{F}_{\mathscr{L}}$, $\boxtimes \in \{\wedge, \vee, \supset\}$, $Subf(A \boxtimes B) = Subf(A) \cup Subf(B) \cup \{A \boxtimes B\}$*;*

c) *para quaisquer* $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathscr{V}$, $A \in \mathcal{F}_{\mathscr{L}}$,

$$Subf(Qx\, A) = \left(\bigcup_{t \in \mathcal{T}_x^A} Subf(A[t/x]) \right) \cup \{Qx\, A\} \ ,$$

onde $\mathcal{T}_x^A = \{t \in \mathcal{T}_{\mathscr{L}} : x$ *é substituível por* t *em* $A\}$.

Definição 10 (Variáveis livres e ligadas)**.** *Numa fórmula, uma ocorrência de uma variável* x *diz-se* livre *quando* x *não está no alcance de algum quantificador sobre* x*; caso contrário, essa ocorrência de* x *diz-se* ligada.

Escrevemos $Liv(A)$ (resp. $Lig(A)$) para designar o conjunto das variáveis que têm ocorrências livres (resp. ligadas) em A.

Se duas fórmulas A e B diferirem apenas no nome das variáveis ligadas diremos que são α-equivalentes e escrevemos $A =_\alpha B$. Ver a Definição 27 para a definição rigorosa deste conceito.

Definição 11 (Substituição de variáveis em fórmulas)**.** *Para cada variável* x *e termo* t*, a* substituição numa fórmula A das ocorrências livres de x por t*, que denotamos por* $A[t/x]$*, é a fórmula definida recursivamente por:*

a) $\perp[t/x] = \perp$;

b) $r(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = r(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$, *para quaisquer* $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_{\mathscr{L}}$, $r \in \mathscr{R}$ *de aridade* n;

c) $(A \boxtimes B)[t/x] = A[t/x] \boxtimes B[t/x]$, *para quaisquer* $A, B \in \mathcal{F}_{\mathscr{L}}$, $\boxtimes \in \{\wedge, \vee, \supset\}$;

d) $(Qy\,A)[t/x] = \begin{cases} Qy\,A & \text{se } y = x \\ \\ Qy\,(A[t/x]) & \text{se } y \neq x \end{cases}$, *para quaisquer* $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathscr{V}$, $A \in \mathcal{F}_{\mathscr{L}}$.

Proposição 1. *Se A é uma fórmula, t um termo e x uma variável então $A[t/x]$ tem o mesmo grau de A.*

Demonstração. Por indução em A. Demonstração omitida. □

Definição 12 (Variável substituível por termo em fórmula)**.** *Uma variável x diz-se* substituível por um termo t numa fórmula A *quando não existe qualquer ocorrência livre de x em A que esteja no alcance de um quantificador sobre uma variável do termo t.*

Observemos que mesmo quando uma variável x não é substituível por um termo t numa fórmula A, a operação de substituição de x por t em A encontra-se definida. Por exemplo, a operação de substituição de y por x em $A = \forall x(r(x, y))$ encontra-se definida e o resultado é igual a $\forall x(r(x, x))$. No entanto y não é substituível por x em A, porque a ocorrência de y em A, que era livre, foi substituída por x, dando origem a uma nova ocorrência ligada de x. Esta situação é denominada de *captura de variável*.

Genericamente, quando y não é substituível por t em A, temos uma situação que, por vezes, representamos graficamente da seguinte forma:

$$A = \text{——}\ Qx\,(\ \text{——}\ \overset{\overset{t}{\downarrow}}{y}\ \text{——}\ )\ \text{——}\ ,$$

com $x \in Var(t)$ e a ocorrência de y exibida livre em A.

Lema 1. *Se x é substituível por y em A e $y \notin Liv(A)$ então:*

i. *y é substituível por x em $A[y/x]$;*

ii. $A[y/x][x/y] = A$

Demonstração. **i.** Se y não é substituível por x em $A[y/x]$, então temos a seguinte situação de captura:

$$A[y/x] = \text{——}\ Qx\,(\ \text{——}\ \overset{\overset{x}{\downarrow}}{y}\ \text{——}\ )\ \text{——}\ ,$$

onde a ocorrência de y exibida é livre. Como $y \notin Liv(A)$, a ocorrência y exibida surge necessariamente da substituição de x por y em A, o que é absurdo, pois a ocorrência

exibida está no alcance de um quantificador sobre x.
ii. Basta notar que $y \notin Liv(A)$. □

Lema 2 (Lema da substituição)**.** *Se x é substituível por t numa fórmula A, y substituível por t' em $A[t/x]$, $x \neq y$ e $x \notin Var(t')$ então temos:*

i. *y é substituível por t' em A;*

ii. *x é substituível por $t[t'/y]$ em $A[t'/y]$;*

iii. $(A[t/x])[t'/y] = (A[t'/y])[t[t'/y]/x]$.

Demonstração. **i.** Se y não fosse substituível por t' em A, e como $x \neq y$, então y não seria substituível por t' em $A[t/x]$.
ii. Suponhamos que não. Temos então a seguinte situação de captura

$$A[t'/y] = \text{——}\ Qz\ (\ \text{——}\ \overset{\overset{t[t'/y]}{\downarrow}}{x}\ \text{——}\ )\ \text{——} \quad ,$$

com $z \in Var(t[t'/y])$. Como $x \notin Var(t')$, x ocorre livre no alcance de Qz em A, ou seja

$$A = \text{——}\ Qz\ (\ \text{——}\ x\ \text{——}\ )\ \text{——} \quad .$$

Daqui concluímos que:

- $z \notin Var(t)$, caso contrário x não seria substituível por t em A;

- $y \in Var(t)$, caso contrário $t[t'/y] = t$ e teríamos a contradição $z \notin Var(t)$ e $z \in Var(t[t'/y]) = Var(t)$;

- $z \in Var(t')$, caso contrário não teríamos captura, isto é, teríamos $z \notin Var(t[t'/y])$.

Mas então y não é substituível por t' em $A[t/x]$, pois dá-se a seguinte situação de captura

$$A[t/x] = \text{——}\ Qz(\ \text{——}\ \overset{\overset{t'}{\downarrow}}{y}\ \text{——}\ )\ \text{——} \quad ,$$

pois $y \in Var(t)$ e $z \in Var(t')$. Absurdo.
iii. Por indução em A. Demonstração omitida. □

Observação 1. *Os símbolos $\neg$ e $\equiv$, negação e equivalência, respectivamente, poderão ser utilizados em abreviaturas de fórmulas:*

- $\neg A \underset{def}{=} A \supset \bot$;
- $A \equiv B \underset{def}{=} (A \supset B) \wedge (B \supset A)$.

2.2 Sistema dedutivo

Derivações

Definição 13 (Pré-derivação)**.** *$\mathcal{D}$ denota o conjunto das árvores de fórmulas onde as folhas podem aparecer entre parênteses rectos, em cujo caso dizemos que a folha está cancelada. Aos elementos de $\mathcal{D}$ chamamos* pré-derivações.

Notação 1. *Sejam $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ pré-derivações e A uma fórmula, então, a notação:*

a)
$$\frac{\Pi_1 \, \Pi_2 \, \ldots \, \Pi_n}{A}$$
representa a árvore cuja raiz é A e cujas sub-árvores imediatas são $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$;

b)
$$\begin{array}{c} A \\ \Pi \end{array}$$
significa que A pode ocorrer em Π como folha não cancelada;

c)
$$\begin{array}{c} [A] \\ \Pi \end{array}$$
representa a pré-derivação obtida de Π cancelando todas as ocorrências de A como folha de Π que não estejam ainda canceladas;

d)
$$\begin{array}{c} \Pi \\ A \end{array}$$
significa que a raiz de Π é A.

Observemos que a notação da alínea b) significa que A ocorre zero ou mais vezes em Π como folha não cancelada. Apesar do significado da notação ser vacuoso (pois qualquer fórmula ocorre como folha não cancelada zero ou mais vezes em qualquer pré-derivação), ela será usada, por exemplo, para enfatizar uma transformação de Π, por intermédio de uma regra de inferência, que produz a pré-derivação denotada conforme a alínea c), onde queremos admitir o caso em que se cancelam zero ocorrências de A.

Estamos particularmente interessados num subconjunto do conjunto das pré-derivações, cujos elementos se designam por *derivações*, as quais são geradas por regras denominadas por *regras de inferência*. Nas derivações há uma relação de "consequência lógica" entre a raiz (*conclusão*) e as folhas não canceladas (*hipóteses*), pelo que uma derivação é uma prova formal da conclusão a partir das hipóteses.

Um sistema de Dedução Natural caracteriza-se por um conjunto de regras de inferência, o qual determina um conjunto de derivações que, por sua vez determina uma relação de consequência lógica entre fórmulas e conjuntos de fórmulas. Nesta dissertação estudaremos dois exemplos de sistemas de Dedução Natural, caracterizando a relação de consequência lógica relativa a duas lógicas diferentes: Lógica Intuicionista e Lógica Clássica.

As regras de inferência consistem numa ou mais regras de introdução e numa ou mais regras de eliminação para cada símbolo lógico à excepção do absurdo. Uma regra de introdução (resp. eliminação) relativa a um símbolo lógico indica como inferir (resp. tirar conclusões a partir de) fórmulas cujo símbolo principal é esse símbolo lógico.

Além destas regras de introdução e eliminação existem duas regras para o conectivo $\perp$. São elas, o *Reduction Ad Absurdum* ou regra de Redução ao Absurdo (RAA) e a regra do *Ex Falsum Quod Libet* ou simplesmente *Ex Falsum* ($\perp_i$). Os dois sistemas de Dedução Natural estudados nesta dissertação distinguem-se somente pelas regras que adoptam para o conectivo $\perp$.

As regras de inferência consideradas neste trabalho estão listadas na Tabela 2.1, a qual pode ser vista como um sumário da Definição 16, onde é formalizado o conceito de derivação.

Notemos que:

- uma aplicação ou instância de uma regra de inferência diz-se uma *inferência*;

- uma instância de uma regra de introdução (resp. eliminação) diz-se uma introdução (resp. eliminação);

- as regras de inferência têm nome ($I_\wedge, E_\supset$, etc) conforme indicado na Tabela 2.1;

- quando se apresentam derivações, o nome das regras de inferência usadas na construção das derivações pode ser explicitado para facilitar a leitura das mesmas, embora em rigor não façam parte da derivação em si, pois uma derivação é apenas uma árvore de fórmulas;

- algumas regras de inferência têm condições de aplicação (as condições (a), (b), (c) e (d) na Tabela 2.1). Uma aplicação de uma dessas regras que respeite (resp. viole) a sua condição de aplicabilidade diz-se *válida* (resp. *inválida*);

- a variante escolhida, neste trabalho, para as regras de inferência $I_\forall$ e $E_\exists$, é discutida no final deste capítulo.

Dizemos que a variável y é a *variável crítica* de uma instância da regra $I_\forall$ se $x \in Liv(A)$. Dizemos que a variável y é a *variável crítica* de uma instância da regra $E_\exists$ se $x \in Liv(A)$ e $A[y/x]$ é de facto cancelada por essa instância[1].

[1] É conveniente associar a cada inferência $I_\forall$ ou $E_\exists$ uma variável crítica. Quando for impossível satisfazer as condições, agora definidas, para que y seja a variável crítica de uma dessas inferências, convencionamos que a variável crítica é uma variável fixa que apenas é usada para esse efeito, que nunca ocorre nos termos, fórmulas e derivações, e que, portanto, satisfaz sempre as condições de aplicabilidade de $I_\forall$ e $E_\forall$.

Regras de Introdução	*Regras de Eliminação*	*Regras do Absurdo*
$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_2\\ B\end{matrix}}{A \wedge B}\, I_\wedge$	$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A \wedge B\end{matrix}}{A}\, E_{\wedge_1}$ $\quad$ $\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A \wedge B\end{matrix}}{B}\, E_{\wedge_2}$	$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \bot\end{matrix}}{A}\, \bot_i(d)$
$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\end{matrix}}{A \vee B}\, I_{\vee_1}$ $\quad$ $\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ B\end{matrix}}{A \vee B}\, I_{\vee_2}$	$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A \vee B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A]\\ \Pi_2\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \Pi_3\\ C\end{matrix}}{C}\, E_\vee$	$\dfrac{\begin{matrix}[\neg A]\\ \Pi_1\\ \bot\end{matrix}}{A}\, RAA(d)$
$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Pi_1\\ B\end{matrix}}{A \supset B}\, I_\supset$	$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A \supset B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_2\\ A\end{matrix}}{B}\, E_\supset$	
$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A[y/x]\end{matrix}}{\forall x A}\, I_\forall(a)$	$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \forall x A\end{matrix}}{A[t/x]}\, E_\forall(b)$	
$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A[t/x]\end{matrix}}{\exists x A}\, I_\exists(b)$	$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \exists x A\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A[y/x]]\\ \Pi_2\\ B\end{matrix}}{B}\, E_\exists(c)$	

(a) (i) $y = x$; ou: y não ocorre livre em A e x é substituível por y em A;

(ii) y é uma variável que não ocorre livre nas folhas não canceladas de Π_1.

(b) x é substituível por t em A.

(c) (i) $y = x$; ou: y não ocorre livre em A e x é substituível por y em A;

(ii) y não ocorre livre em B, nem nas folhas de Π_2 não canceladas e diferentes de $A[y/x]$.

(d) $A \neq \bot$.

Tabela 2.1: Regras de inferência

Exemplo 1. *Alguns exemplos de instâncias das regras de inferência:*

$$\frac{[A]}{A \supset A}\ {\scriptstyle I_{\supset}};\quad \frac{B}{A \supset B}\ {\scriptstyle I_{\supset}};\quad \frac{\forall x\, r(x)}{r(x)}\ {\scriptstyle E_{\forall}};\quad \frac{r(x)}{\exists x\, r(x)}\ {\scriptstyle I_{\exists}};$$

Exemplos de pré-derivações que não correspondem a uma aplicação (válida) das regras de inferência:

$$\frac{A \vee B}{A}\ ;\quad \frac{A}{A \wedge B}\ ;\quad \frac{r(x)}{\forall x\, r(x)}\ ;\quad \frac{\exists x\, r(x) \quad [r(x)]}{r(x)}\ ;$$

Definição 14 (Premissa, consequência e aridade)**.** *Numa regra de inferência, as fórmulas imediatamente acima do traço de inferência são chamadas as* premissas *da regra e a fórmula abaixo do traço de inferência é chamada a* consequência *da regra de inferência. O número de premissas de uma regra de inferência diz-se a sua* aridade*.*

Definição 15 (Premissa menor e premissa principal)**.** *Numa regra de eliminação, a premissa mais à esquerda é chamada* premissa principal *e as restantes premissas (caso existam) são chamadas* premissas menores*.*

A premissa principal contém o símbolo lógico que é eliminado.

Definição 16 (Derivações)**. 1.** *O conjunto das* derivações*, em Dedução Natural, da Lógica Intuicionista, que denotamos por N_i, é o menor conjunto X, de pré-derivações, tal que:*

a) *para qualquer $A \in \mathcal{F}_{\mathscr{L}}$, a árvore cujo único nodo é A pertence a X;*

b) *Se* $\begin{array}{c}\Pi_1\\ A\end{array} \in X$ *e* $\begin{array}{c}\Pi_2\\ B\end{array} \in X$ *então* $\dfrac{\begin{array}{cc}\Pi_1 & \Pi_2\\ A & B\end{array}}{A \wedge B} \in X$*;*

c) *Se* $\begin{array}{c}\Pi\\ A \wedge B\end{array} \in X$ *então* $\dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ A \wedge B\end{array}}{A} \in X$ *e* $\dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ A \wedge B\end{array}}{B} \in X$*;*

d) *Se* $\begin{array}{c}A\\ \Pi\\ B\end{array} \in X$ *então* $\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \Pi\\ B\end{array}}{A \supset B} \in X$*;*

e) *Se* $\begin{array}{c}\Pi_1\\ A \supset B\end{array} \in X$ *e* $\begin{array}{c}\Pi_2\\ A\end{array} \in X$ *então* $\dfrac{\begin{array}{cc}\Pi_1 & \Pi_2\\ A \supset B & A\end{array}}{B} \in X$*;*

f) *Se* $\begin{array}{c}\Pi\\ A\end{array} \in X$ *então* $\dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ A\end{array}}{A \vee B} \in X$ *e* $\dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ A\end{array}}{B \vee A} \in X$*;*

g) *Se* $\begin{array}{c}\Pi_1\\ A \vee B\end{array} \in X$ *,* $\begin{array}{c}A\\ \Pi_2\\ C\end{array} \in X$ *e* $\begin{array}{c}B\\ \Pi_3\\ C\end{array} \in X$ *então* $\dfrac{\begin{array}{ccc} & [A] & [B]\\ \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3\\ A \vee B & C & C\end{array}}{C} \in X$*;*

h) *Se* $\begin{array}{c}\Pi\\ A[y/x]\end{array} \in X$ *onde: (i) $y = x$; ou: y não ocorre livre em A e x é substituível por y em A; (ii) y é uma variável que não ocorre livre nas folhas não canceladas de Π então* $\dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ A[y/x]\end{array}}{\forall x\, A} \in X$*;*

i) *Se* $\begin{matrix}\Pi\\ \forall x\, A\end{matrix} \in X$ *e* x *é substituível por* t *em* A *então* $\dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ \forall x\, A\end{matrix}}{A[t/x]} \in X$*;*

j) *Se* $\begin{matrix}\Pi\\ A[t/x]\end{matrix} \in X$ *e* x *é substituível por* t *em* A *então* $\dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ A[t/x]\end{matrix}}{\exists x\, A} \in X$*;*

k) *Se* $\begin{matrix}\Pi_1\\ \exists x\, A\end{matrix} \in X$ *e* $\begin{matrix}A[y/x]\\ \Pi_2\\ B\end{matrix} \in X$, *onde:* (i) $y = x$*; ou:* y *não ocorre livre em* A *e* x *é substituível por* y *em* A*;* (ii) y *não ocorre livre em* B*, nem nas folhas de* Π_2 *não canceladas e diferentes de* $A[y/x]$*, então* $\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \exists x\, A\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A[y/x]]\\ \Pi_2\\ B\end{matrix}}{B} \in X$*;*

l) *Se* $\begin{matrix}\Pi\\ \bot\end{matrix} \in X$ *e* $A \neq \bot$ *então* $\dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ \bot\end{matrix}}{A} \in X$*.*

2. *O conjunto das* derivações*, em Dedução Natural, da Lógica Clássica, que denotamos por* N_c*, é o menor conjunto* X*, de pré-derivações, tal que:*

a) 1.a) *a* 1.k) *são satisfeitas;*

b) *Se* $\begin{matrix}\neg A\\ \Pi\\ \bot\end{matrix} \in X$ *e* $A \neq \bot$ *então* $\dfrac{\begin{matrix}[\neg A]\\ \Pi\\ \bot\end{matrix}}{A} \in X$*.*

N_i e N_c também denotam os respectivos sistemas de Dedução Natural e utilizaremos a letra S para representar qualquer um desses sistemas.

Dada uma derivação, à sua raiz chamamos *conclusão*; às suas folhas não canceladas chamamos *hipóteses*; às suas folhas canceladas chamamos *hipóteses canceladas*.

Exemplos e contra-exemplos

Exemplo 2. *Sejam* A *e* B *fórmulas, distintas de* $\bot$*, e* x *e* y *variáveis.*

a) *A pré-derivação* A *é uma derivação em* S*, mas a pré-derivação* $[A]$ *não o é (por indução em derivações, prova-se que a conclusão de uma derivação nunca é uma hipótese cancelada; o princípio de indução em derivações será detalhado mais abaixo).*

b) *A pré-derivação* Π *seguinte é uma derivação em* N_c

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A] \qquad \dfrac{[(A \supset B) \supset A] \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A] \quad [A]}{\bot}\,E_\supset}{B}\,RAA}{A \supset B}\,I_\supset}{A}\,E_\supset}{\bot}\,E_\supset}{A}\,RAA}{((A \supset B) \supset A) \supset A}\,I_\supset$$

.

Em Π, *temos que:*

- *o conjunto de hipóteses é* $\emptyset$*;*
- *o conjunto de hipóteses canceladas é* $\{A, \neg A, (A \supset B) \supset A\}$*;*
- *a conclusão é* $((A \supset B) \supset A) \supset A$ *(conhecida como* Lei de Pierce*).*

c) *A seguinte pré-derivação*

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg(A \vee \neg A)]$}
\AxiomC{$[\neg(A \vee \neg A)]$}
\AxiomC{$[\neg A]$}
\RightLabel{$I_{\vee_2}$}
\UnaryInfC{$A \vee \neg A$}
\RightLabel{$E_\supset$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{RAA}
\UnaryInfC{A}
\RightLabel{$I_{\vee_1}$}
\UnaryInfC{$A \vee \neg A$}
\RightLabel{$E_\supset$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{RAA}
\UnaryInfC{$A \vee \neg A$}
\end{prooftree}
$$

é também uma derivação em N_c*.*

d) *A seguinte pré-derivação é uma derivação em* N_i

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\bot]$}
\RightLabel{$\bot_i$}
\UnaryInfC{A}
\RightLabel{$I_\supset$}
\UnaryInfC{$\bot \supset A$}
\end{prooftree}
\quad .
$$

e) *A seguinte pré-derivação é uma derivação em* S

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\exists x\, \forall y\, A]$}
\AxiomC{$[\forall y\, A]$}
\RightLabel{$E_\forall(a)$}
\UnaryInfC{A}
\RightLabel{$I_\exists(b)$}
\UnaryInfC{$\exists x\, A$}
\RightLabel{$E_\exists(c)$}
\BinaryInfC{$\exists x\, A$}
\RightLabel{$I_\forall(d)$}
\UnaryInfC{$\forall y\, \exists x\, A$}
\RightLabel{$I_\supset$}
\UnaryInfC{$\exists x\, \forall y\, A \supset \forall y\, \exists x\, A$}
\end{prooftree}
\quad .
$$

(a) *y é substituível por y em A;*

(b) *x é substituível por x em A;*

(c) *a variável crítica é x e x não ocorre livre em $\exists x\, A$;*

(d) *a variável crítica é y e y não ocorre livre em $\exists x\, \forall y\, A$.*

f) *Se x ocorre livre em A, a pré-derivação seguinte não é uma derivação em S, pois a aplicação da regra de inferência $I_\forall$ é inválida,*

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\forall x\, \exists y\, A]$}
\RightLabel{$E_\forall$}
\UnaryInfC{$\exists y\, A$}
\AxiomC{$[A]$}
\RightLabel{$I_\forall$}
\UnaryInfC{$\forall x\, A$}
\RightLabel{$I_\exists$}
\UnaryInfC{$\exists y\, \forall x\, A$}
\RightLabel{$E_\exists$}
\BinaryInfC{$\exists y\, \forall x\, A$}
\RightLabel{$I_\supset$}
\UnaryInfC{$\forall x\, \exists y\, A \supset \exists y\, \forall x\, A$}
\end{prooftree}
\quad .
$$

Conceitos sobre derivações

A maioria dos conceitos apresentados abaixo será utilizada apenas nos capítulos seguintes. Estes conceitos são introduzidos para podermos explicar convenientemente a estrutura das derivações e suas propriedades e para definir transformações sobre derivações.

Definição 17 (Sub-derivação). *Em S, dada uma derivação Π, Π' é uma* sub-derivação *de Π, que representamos por $sub(\Pi', \Pi)$, se e só se $\Pi' = \Pi$; ou Π é obtida de uma regra de inferência, n-ária, a partir de derivações $\Pi_1 \cdots \Pi_n$ e existe $1 \leq i \leq n$ tal que $sub(\Pi', \Pi_i)$.*

Definição 18 (Linha). *Uma sequência $A_1, \cdots, A_n$ de ocorrências de fórmulas numa derivação Π diz-se uma* linha *de Π, se:*

a) *A_1 é uma hipótese ou hipótese cancelada de Π;*

b) *A_i está imediatamente acima de A_{i+1} em Π, para cada $i < n$;*

c) *A_n é a conclusão de Π.*

Definição 19 (Sub-derivação determinada por uma fórmula). *Em S, se A é uma ocorrência de uma fórmula numa derivação Π, a* sub-derivação de Π determinada pela ocorrência da fórmula A *é a sub-derivação de Π que tem essa ocorrência A como conclusão.*

Definição 20 (Fórmulas lateralmente conectadas). *Se numa derivação Π, em S, ocorre uma inferência da forma*

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 & & \Pi_n\\ A_1 & \cdots & A_n\end{matrix}}{A}$$

dizemos que A_i está lateralmente conectada com *A_j $\quad (i, j \leq n)$.*

Definição 21 (Comprimento de uma derivação). *O* comprimento *de uma derivação é o número de ocorrências de fórmulas nessa derivação.*

Exemplo 3. *Consideremos novamente a derivação Π da alínea* b) *do* Exemplo 2*:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A] \qquad \dfrac{[(A \supset B) \supset A] \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A] \quad [A]}{\bot}{\scriptstyle E_\supset}}{B}{\scriptstyle RAA}}{A \supset B}{\scriptstyle I_\supset}}{A}{\scriptstyle E_\supset}}{\bot}{\scriptstyle E_\supset}}{A}{\scriptstyle RAA}}{((A \supset B) \supset A) \supset A}{\scriptstyle I_\supset} \quad .$$

Em Π, temos que:

- *as derivações*

$$\dfrac{\dfrac{\neg A \quad A}{\perp}\, E_{\supset}}{B}\, RAA \qquad e \qquad \dfrac{(A \supset B) \supset A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A \quad [A]}{\perp}\, E_{\supset}}{B}\, RAA}{A \supset B}\, I_{\supset}}{A}\, E_{\supset}$$

são sub-derivações de Π*. A derivação da esquerda (resp. direita) também pode ser entendida como a sub-derivação de* Π *determinada pela única ocorrência da fórmula* B *(resp. por uma ocorrência da fórmula* A*). Um exemplo de fórmulas lateralmente conectadas são as ocorrências das fórmulas* $(A \supset B) \supset A$ *e* $A \supset B$ *na derivação da direita;*

- *as seguintes sequências são linhas de* Π*:*
  - $(A \supset B) \supset A, A, \perp, A, ((A \supset B) \supset A) \supset A$*;*
  - $\neg A, \perp, A, ((A \supset B) \supset A) \supset A$*;*
  - $\neg A, \perp, B, A \supset B, A, \perp, A, ((A \supset B) \supset A) \supset A$*;*

- *O comprimento de* Π *é* 11*.*

Definição 22. *Em* S*, dados uma fórmula* A*, uma variável* x*, um termo* t *e derivações* Π, Π_1, Π_2 *em que* Π_2 *é uma derivação de* A*, a notação:*

a) $\Pi[t/x]$ *denota a pré-derivação que resulta de efectuar a substituição* $[t/x]$ *em cada ocorrência de fórmula de* Π*;*

b) $\Pi_1[\Pi_2/A]$ *ou* $\begin{matrix}\Pi_2\\(A)\\\Pi_1\end{matrix}$ *denota*[2] *a pré-derivação que resulta de substituir todas as hipóteses de* Π_1 *da forma* A *por* Π_2*.*

Notemos que as operações de substituição definidas anteriormente podem não produzir derivações. Basta notar que, se Π é uma derivação da forma

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi'\\B[y/x]\end{matrix}}{\forall_x B}\, I_{\forall} \qquad (*)$$

e supondo que x ocorre livre numa hipótese de Π e t um termo tal que $y \in Var(t)$, então a pré-derivação $\Pi[t/x]$ não é uma derivação, pois y ocorre livre numa hipótese de $\Pi'[t/x]$. Se Π é uma derivação da forma $(*)$ onde A é uma hipótese e Π_2 é uma derivação de A

[2]Notemos que Prawitz usa esta última notação para representar a operação de substituição de *uma* ocorrência de A como hipótese de Π_1 por Π_2.

onde há uma hipótese na qual a variável y é livre, então $\Pi[\Pi_2/A]$ não é uma derivação, pois a última inferência de $\Pi[\Pi_2/A]$ não é uma aplicação válida de $I_\forall$.

Precisaremos ainda da operação de substituição, numa derivação Π, de uma sua sub-derivação Π_1, com conclusão A digamos, por outra derivação Π_2 com conclusão A. Quando Π_1 é uma determinada ocorrência de A como hipótese de Π (denotemo-la por A°), representamos o resultado da operação de substituição por $\Pi[\Pi_2/A^\circ]$ ou

$$\begin{array}{c} \Pi_2 \\ A^\circ \\ \Pi \end{array} \; .$$

O símbolo $^\circ$ será omitido quando for claro pelo contexto qual a ocorrência de A em causa.

A demonstração da proposição seguinte é omitida.

Proposição 2. *Em S, sejam Π uma derivação de B a partir de Γ, Π_1 uma sub-derivação de Π com conclusão A e cujo conjunto de hipóteses é Γ_1 e Π_2 uma derivação de A cujo conjunto de hipóteses é $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$. O resultado da substituição, em Π, de Π_1 por Π_2 é uma derivação de B a partir de Γ.*

Cancelamento de hipóteses

Por vezes serão utilizadas anotações/numerações, quer em aplicações de regras de inferência quer em hipóteses canceladas para indicar qual a instância de regra que permite efectuar cada um dos cancelamentos. Notemos que, mais uma vez, estas anotações/numerações não fazem parte do formalismo de uma derivação, facilitam apenas a sua leitura e interpretação.

Por exemplo, a derivação do Exemplo 2.b) pode ser (re)escrita da seguinte forma

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^2 \qquad \dfrac{[(A \supset B) \supset A]^3 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^2 \quad [A]^1}{\bot}\,E_{\supset}}{B}\,RAA}{A \supset B}\,{I_{\supset}}^1}{A}\,E_{\supset}}{\bot}\,E_{\supset}}{A}\,RAA^2}{((A \supset B) \supset A) \supset A}\,{I_{\supset}}^3 \qquad ,$$

onde a leitura e interpretação da mesma torna-se agora mais simples.

Observemos que, no tocante ao cancelamento de hipóteses, este trabalho adopta a *convenção do cancelamento completo*. Com esta convenção, aquando da aplicação de uma regra de inferência onde haja lugar ao cancelamento de hipóteses, cancelaremos *todas* as ocorrências da hipótese em questão.

Vejamos um exemplo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\supset(A\supset B)]^1 \quad [A]^3}{A\supset B}{\scriptstyle E_\supset} \qquad [A]^3}{B}{\scriptstyle E_\supset}}{A\supset B}{\scriptstyle {I_\supset}^3} \qquad [A]^2}{B}{\scriptstyle E_\supset}}{A\supset B}{\scriptstyle {I_\supset}^2}}{(A\supset(A\supset B))\supset(A\supset B)}{\scriptstyle {I_\supset}^1} \quad .$$

Nesta derivação, as duas ocorrências de A canceladas com etiqueta 3 ocorrem na derivação da premissa B de duas aplicações diferentes da regra $I_\supset$. Caso não tivessemos adoptado o cancelamento completo de hipóteses e nos fosse permitido, na aplicação da regra $I_\supset$ (neste caso), o cancelamento de um número arbitrário de ocorrências de folhas (da forma A, neste caso), os cancelamentos de A com a etiqueta 3, na derivação anterior, poderiam também ser efectuados com a etiqueta 2.

Princípio de indução em S

A cada regra de inferência

$$\dfrac{\Pi_1 \quad \cdots \quad \Pi_n}{A}{\scriptstyle R}$$

tal que R está em

$$\{I_\wedge,\, E_{\wedge_1},\, E_{\wedge_2},\, E_\supset,\, I_{\vee_1},\, I_{\vee_2},\, E_\vee,\, \bot_i,\, I_\forall,\, E_\forall,\, I_\exists\} \tag{2.1}$$

está associada uma função parcial n-ária, $\mathcal{F}_R$, de $\mathcal{D}^n$ em $\mathcal{D}$. Por exemplo, à regra de introdução do conectivo $\wedge$ está associada a seguinte função (total)

$$\begin{array}{lccc} \mathcal{F}_{I_\wedge}: & \mathcal{D}^2 & \to & \mathcal{D} \\ & \left(\begin{array}{c}\Pi_1\\ A\end{array},\ \begin{array}{c}\Pi_2\\ B\end{array}\right) & \mapsto & \dfrac{\begin{array}{cc}\Pi_1 & \Pi_2\\ A & B\end{array}}{A\wedge B} \end{array} \quad .$$

À regra de eliminação do conectivo $\vee$ está associada a função parcial

$$\begin{array}{lccc} \mathcal{F}_{E_\vee}: & \mathcal{D}^3 & \to & \mathcal{D} \\ & \left(\begin{array}{c}\Pi_1\\ A\vee B\end{array},\ \begin{array}{c}\Pi_2\\ C\end{array},\ \begin{array}{c}\Pi_3\\ C\end{array}\right) & \mapsto & \dfrac{\begin{array}{ccc} & [A] & [B]\\ \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3\\ A\vee B & C & C\end{array}}{C} \end{array} \quad ,$$

a qual está definida apenas para os ternos ordenados (Π_1, Π_2, Π_3) de $\mathcal{D}^3$ cuja conclusão da derivação Π_1 seja uma fórmula com símbolo principal $\vee$ e cujas conclusões de Π_2 e Π_3 sejam iguais.

A cada regra de inferência

$$\dfrac{\Pi_1 \quad \cdots \quad \Pi_n}{A}{\scriptstyle R}$$

tal que R está em

$$\{I_{\supset},\ E_{\exists},\ RAA\} \tag{2.2}$$

está associada uma família $\{\mathcal{F}_R^B\}_{B\in\mathcal{F}_{\mathscr{L}}}$ de funções parciais n-árias, de $\mathcal{D}^n$ em $\mathcal{D}$. Por exemplo, à regra de introdução do conectivo $\supset$ está associada, para cada fórmula A, a seguinte função (total)

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}_{I_{\supset}}^A : & \mathcal{D} & \to & \mathcal{D} \\ & \begin{array}{c} A \\ \Pi \\ B \end{array} & \mapsto & \dfrac{\begin{array}{c} [A] \\ \Pi \\ B \end{array}}{A \supset B} \end{array} .$$

À regra de eliminação do quantificador existencial, está associada, para cada fórmula C, a seguinte função parcial

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}_{E_{\exists}}^C : & \mathcal{D}^2 & \to & \mathcal{D} \\ & \left(\begin{array}{c} \Pi_1 \\ \exists x A \end{array} ,\ \begin{array}{c} A[y/x] \\ \Pi_2 \\ B \end{array} \right) & \mapsto & \dfrac{\begin{array}{c} \Pi_1 \\ \exists x A \end{array} \quad \begin{array}{c} [A[y/x]] \\ \Pi_2 \\ B \end{array}}{B} \end{array} ,$$

a qual está definida apenas para pares ordenados $(\Pi_1,\ \Pi_2)$ cuja conclusão da derivação Π_1 seja da forma $\exists x\, A$ e C seja igual a $A[y/x]$ para algum y, tal que y, C e Π_2 satisfaçam as condições de aplicabilidade da regra de inferência.

Proposição 3 (Princípio de indução em S). *Seja P uma propriedade sobre pré-derivações. Se:*

i. *para cada fórmula A, $P(A)$;*

ii. *para cada regra de inferência n-ária R de S em* (2.1)*, se $P(\Pi_1), \cdots, P(\Pi_n)$ e $\mathcal{F}_R(\Pi_1, \cdots, \Pi_n)$ está definida, então $P(\mathcal{F}_R(\Pi_1, \cdots, \Pi_n))$;*

iii. *para cada regra de inferência n-ária R de S em* (2.2)*, para cada fórmula A, se $P(\Pi_1), \cdots, P(\Pi_n)$ e $\mathcal{F}_R^A(\Pi_1, \cdots, \Pi_n)$ está definida, então $P(\mathcal{F}_R^A(\Pi_1, \cdots, \Pi_n))$;*

então para todo $\Pi \in S$, $P(\Pi)$.

Demonstração. A Definição 16 pode ser reescrita usando as funções $\mathcal{F}_R$ e $\mathcal{F}_R^A$ associadas a cada regra no conjunto (2.1) e (2.2), respectivamente, de modo que o conjunto das derivações S é o menor conjunto X de pré-derivações tal que $\phi_1(X), \phi_2(X), \phi_3(X)$, para condições ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 óbvias. Seja Y o conjunto das pré-derivações que satisfazem a propriedade P. Pelas condições i., ii. e iii., temos $\phi_1(Y), \phi_2(Y)$ e $\phi_3(Y)$. Então, $S \subseteq Y$, pelo que toda a derivação satisfaz a propriedade P. $\square$

Quando se prova uma propriedade P para toda a derivação Π de S, usando este princípio de indução, podemos dizer que a propriedade se prova por indução em Π.

Derivabilidade

Definição 23 (Fórmula derivável ou dedutível)**.** *Uma fórmula A diz-se* derivável *ou* dedutível *a partir de um conjunto Γ de fórmulas, num sistema S (notação: $\Gamma \vdash_S A$), se existe uma derivação Π, em S, cuja conclusão é A e cujo conjunto de hipóteses é um subconjunto de Γ. Neste caso, diz-se que Π é uma derivação, em S, de A a partir de Γ.*

Observação 2. *Quando o conjunto Γ tiver apenas um elemento, $\Gamma = \{B\}$, diremos, simplesmente que Π é uma derivação, em S, de A a partir de B e escreveremos $B \vdash_S A$.*

Definição 24 (Teoremas)**.** *Uma fórmula A diz-se um* teorema *de S (notação: $\vdash_S A$), quando $\emptyset \vdash_S A$, ou seja, quando existe uma derivação Π, em S, de A a partir do conjunto vazio de hipóteses. Denotaremos o conjunto formado por todos os teoremas de um sistema S por* $\mathrm{Teo}(S)$*.*

Notação 2. *A notação*

$$\begin{array}{c}\Gamma\\ \Pi\\ A\end{array}$$

indica que Π é uma derivação da fórmula A a partir do conjunto de fórmulas Γ.

Proposição 4. $\Gamma \vdash_{N_i} A \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash_{N_c} A.$

Demonstração. Basta provar que, se Π é uma derivação de uma fórmula A a partir de um conjunto de fórmulas Γ em N_i, então existe uma derivação Π' de A a partir de Γ em N_c. Mostremos então, por indução em Π, que

$$\forall_{\Pi \in N_i} \underbrace{\left(\begin{array}{c}\Gamma\\ \Pi\\ A\end{array} \Rightarrow \exists_{\Pi' \in N_c} : \begin{array}{c}\Gamma\\ \Pi'\\ A\end{array} \right)}_{P(\Pi)} .$$

Caso base. Seja A uma fórmula e consideremos Π a árvore cujo único nodo é A. Logo $A \in \Gamma$. Basta tomar a derivação $\Pi' = \Pi = A$ e temos Π' derivação de A a partir de Γ.

Caso $\perp_i$. Sabendo $P(\Pi_1)$ mostremos $P(\Pi)$, onde

$$\Pi = \cfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \perp\end{array}}{A}\ \perp_i \qquad (\text{com } A \neq \perp) \ .$$

Suponhamos que Π é uma derivação a partir de Γ em N_i. Então Π_1 é uma derivação a partir de Γ em N_i. Por $P(\Pi_1)$, existe uma derivação Π_1', em N_c, de $\perp$ a partir de Γ.

Seja Π' a seguinte derivação

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg A] \\ \Pi_1' \\ \bot\end{matrix}}{A}\, RAA \quad .$$

Π' é uma derivação, em N_c, de A a partir de $\Gamma \setminus \{\neg A\} \subseteq \Gamma$.

Restantes casos indutivos. Seguem da aplicação rotineira das hipóteses de indução. □

Corolário 1. $\vdash_{N_i} A \quad \Rightarrow \quad \vdash_{N_c} A$.

Demonstração. Basta tomar $\Gamma = \varnothing$ na proposição anterior. □

Assim, $\mathrm{Teo}(N_i) \subseteq \mathrm{Teo}(N_c)$. Veremos no Capítulo 5 que essa inclusão é estrita.

Regras dos quantificadores

O conjunto das regras de inferência usado ao longo desta dissertação é o apresentado, por exemplo, por Troelstra e Schwichtenberg em [16]. Contudo outras variantes das regras de inferência, nomeadamente no que diz respeito às inferências $I_\forall$ e $E_\exists$, podem ser encontradas em Prawitz [10] ou em Troelstra e van Dalen [14].

Na Tabela 2.2 estão listadas as inferências $I_{\forall'}$ e $E_{\exists'}$, adoptadas por Troelstra e van Dalen em [14]. Vejamos que estas regras de inferência e as adoptadas neste trabalho são equivalentes no sentido da proposição seguinte.

Proposição 5. *Uma inferência é uma instância da regra $I_\forall$ (resp. $E_\exists$) se e só se é instância da regra $I_{\forall'}$ (resp. $E_{\exists'}$).*

Demonstração. Vamos demonstrar esta afirmação apenas para o caso "$I_\forall \Rightarrow I_{\forall'}$", uma vez que as demonstrações dos restantes casos são análogas.

Seja Π uma derivação da forma

$$\begin{matrix}\Pi_1 \\ A\end{matrix}$$

que satisfaça a condição (a) da Tabela 2.2, para $y \neq x$ (caso contrário as regras $I_\forall$ e $I_{\forall'}$ coincidem). Assim,

1. $A = A[x/y][y/x]$, pelo Lema 1;
2. x é substituível por y em $A[x/y]$, pelo Lema 1;
3. $y \notin Liv(A[x/y])$, pela definição da operação de substituição $[x/y]$.

Então,

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ A\end{matrix}}{\forall x\, A[x/y]}\, I_\forall$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi \\ A\end{array}}{\forall x\, A[x/y]}\; I_{\forall'}\,(a)$$	$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \\ \exists x\, A[x/y]\end{array} \quad \begin{array}{c}[A] \\ \Pi_2 \\ B\end{array}}{B}\; E_{\exists'}\,(b)$$
(a) (i) $y = x$; ou: $x \notin Liv(A)$ e y é substituível por x em A; (ii) y não ocorre livre nas hipóteses de Π. (b) (i) $y = x$; ou: $x \notin Liv(A)$ e y é substituível por x em A; (ii) y não ocorre livre em B, nem nas hipóteses de Π_2 diferentes de A.	

Tabela 2.2: Versão alternativa das regras $I_\forall$ e $E_\exists$

é uma aplicação válida da inferência $I_\forall$, pois $A = A[x/y][y/x]$ e a condição (a) da Tabela 2.1 está satisfeita por 2., 3. e por y não ocorrer livre nas hipóteses de Π_1 (garantido pela condição (a) (ii) da Tabela 2.2). $\square$

Em particular, as regras alternativas não alteram a relação de derivabilidade.

Há uma versão mais simplificada (dita versão restrita) para as inferências $I_\forall$ e $E_\exists$, definida na Tabela 2.3. Seja S^- o sistema que se obtém de S substituindo as regras de inferência $I_\forall$ e $E_\exists$ (ditas gerais) pelas regras $I_{\forall^-}$ e $E_{\exists^-}$. Estes dois sistemas são equivalentes ao nível da derivabilidade, como demonstra a proposição seguinte.

Proposição 6. *$\Gamma \vdash_{S^-} A \Leftrightarrow \Gamma \vdash_S A$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Basta notar que as regras ditas restritas são um caso particular das gerais.
$\Leftarrow$) Por indução sobre derivações, em que os únicos casos interessantes são aqueles em que a última inferência é uma instância de $I_\forall$ ou $E_\exists$.

Caso $I_\forall$. A derivação

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \\ A[y/x]\end{array}}{\forall x A}\; I_\forall \quad ,$$

com:

(i) $y \neq x$ (se $y = x$ as duas versões da regra coincidem);

(ii) $y \notin Liv(A)$;

(iii) x é substituível por y em A;

(iv) y não ocorre livre nas hipóteses de Π_1;

é transformada em

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall y A[y/x]]^1}{A[y/x][x/y]}\,E_\forall(a)}{\forall x A}\,I_{\forall^-}(b)}{\forall y A[y/x] \supset \forall x A}\,I_\supset{}^1 \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A[y/x]\end{array}}{\forall y A[y/x]}\,I_{\forall^-}(c)}{\forall x A}\,E_\supset \tag{2.3}$$

(a) y é substituível por x em $A[y/x]$, pelo Lema 1.

(b) $A[y/x][x/y] = A$ (pois $y \notin Liv(A)$) e x não ocorre livre em $\forall y A[y/x]$.

(c) y não ocorre livre nas hipóteses de Π_1 (por (iv)).

Caso $E_\exists$. A derivação

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \exists x A\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A[y/x]]^1\\ \Pi_2\\ B\end{array}}{B}\,I_\exists{}^1 ,$$

com:

(i) $y \neq x$ (se $y = x$ as duas versões da regra coincidem);

(ii) $y \notin Liv(A)$;

(iii) x é substituível por y em A;

(iv) $y \notin Liv(B)$;

(v) y não ocorre livre nas hipóteses de Π_2 diferentes de $A[y/x]$;

é transformada em

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \exists x A\end{array} \qquad \dfrac{[A[y/x][x/y]]^1}{\exists y A[y/x]}\,I_\exists(a)}{\exists y A[y/x]}\,E_{\exists^-}{}^1(b) \qquad \begin{array}{c}[A[y/x]]^2\\ \Pi_2\\ B\end{array}}{B}\,E_{\exists^-}{}^2(c) \tag{2.4}$$

(a) y é substituível por x em $A[y/x]$, pelo Lema 1.

(b) $A[y/x][x/y] = A$ (pois $y \notin Liv(A)$) e x não ocorre livre em $\exists y A[y/x]$.

(c) y não ocorre livre em B nem nas hipóteses de Π_2 diferentes de $A[y/x]$ (por (v)).

$\square$

Os dois sistemas são portanto equivalentes no que se refere à derivabilidade. Dado que as regras gerais são substancialmente mais complexas que as regras restritas, qual o motivo que nos leva a adoptá-las?

Observemos que na derivação (2.3) a fórmula $\forall y\, A[y/x] \supset \forall x\, A$ é simultaneamente conclusão de uma inferência $I_\supset$ e premissa principal de uma inferência $E_\supset$; e na derivação (2.4) há uma sequência de duas ocorrências da fórmula $\exists y\, A[y/x]$, onde a primeira ocorrência (de cima para baixo) é conclusão de uma inferência $I_\exists$ e a última é premissa principal de uma inferência $E_\exists$. Nos capítulos seguintes, estaremos interessados não apenas na derivabilidade, isto é, na mera existência de uma derivação, mas também em derivações

$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi \\ A\end{array}}{\forall x A}\ I_{\forall -}\,(a)$	$\dfrac{\begin{array}{cc} & [A] \\ \Pi_1 & \Pi_2 \\ \exists x A & B\end{array}}{B}\ E_{\exists -}\,(b)$
(a) x é uma variável que não ocorre livre nas folhas não canceladas de Π. (b) x não ocorre livre em B, nem nas folhas de Π_2 não canceladas e diferentes de A.	

Tabela 2.3: Versão restrita das regras $I_\forall$ e $E_\exists$

com uma forma especial, ditas normais, onde estas situações não ocorrem.

Capítulo 3

Normalização: Preliminares

Neste capítulo pretendemos, em primeiro lugar, ilustrar o princípio da inversão de Prawitz e algumas transformações de derivações (ditas reduções) que o implementam, numa versão mais simples. Ilustraremos de seguida a necessidade de introduzir refinamentos nessas reduções. Esses refinamentos, cujo tratamento completo será realizado nos capítulos seguintes, envolvem certas questões "burocráticas", como seja o caso da *mudança de variável crítica* e da *mudança de variável ligada* numa derivação, as quais são estudadas no final deste capítulo.

3.1 Princípio da inversão

Prawitz (1965), analisando as principais propriedades dos sistemas de Dedução Natural propostos por Gentzen, constatou que as regras de eliminação são, num certo sentido, o inverso das correspondentes regras de introdução, pois se, numa derivação, a premissa principal de uma regra de eliminação é deduzida a partir da correspondente regra de introdução, então nada de novo é acrescentado à demonstração. Esta ideia está patente no seu *princípio da inversão*:

Seja α uma aplicação de uma regra de eliminação cuja consequência é A. A(s) derivação(ões) da(s) premissa(s) da inferência que introduzisse a premissa principal de α, quando combinada(s) com a(s) derivação(ões) da(s) premissa(s) menor(es) (se existir(em)), já "contêm" a derivação de A. Uma derivação de A poderia então ser obtida directamente a partir dessa(s) derivação(ões) sem se aplicar a regra α.

No trabalho de Gentzen [12], esta ideia já estava implícita: "uma regra de introdução dá a definição da constante lógica e a regra de eliminação é somente uma consequência da correspondente regra de introdução" .

As instâncias de uma eliminação cuja premissa principal é consequência de uma introdução podem ser "dispensadas" através de transformações de derivações. Este processo de transformação é conhecido como *normalização*.

Os exemplos seguintes ilustram o *princípio da inversão* e apresentam, numa versão simples, as reduções que constituem o processo da normalização:

a) Seja Π a seguinte derivação

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_2 \\ B\end{matrix}}{A \wedge B}\, I_\wedge}{A}\, E_{\wedge_1} \quad .$$

A derivação de uma das premissas da introdução já é derivação da conclusão de Π. Assim, a derivação Π pode ser reduzida à seguinte

$$\begin{matrix}\Pi_1 \\ A\end{matrix} \quad .$$

b) Seja Π a seguinte derivação

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \Pi_1 \\ B\end{matrix}}{A \supset B}\, I_\supset \quad \begin{matrix}\Pi_2 \\ A\end{matrix}}{B}\, E_\supset \quad .$$

A derivação da premissa da introdução "combinada" com a derivação da premissa menor da eliminação é uma derivação da conclusão de Π. Assim, a derivação Π pode ser reduzida à seguinte

$$\begin{matrix}\Pi_2 \\ (A) \\ \Pi_1 \\ B\end{matrix} \quad .$$

c) Seja Π a seguinte derivação

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ A[y/x]\end{matrix}}{\forall x\, A}\, I_\forall}{A[t/x]}\, E_\forall \quad .$$

Uma "instânciação" da derivação da premissa da introdução é uma derivação da conclusão de Π. Assim, a derivação Π pode ser reduzida à seguinte

$$\begin{matrix}\Pi_1[t/y] \\ A[t/x]\end{matrix} \quad .$$

A instânciação $[t/x]$ quando aplicada a Π_1 não altera as suas hipóteses, devido às restrições impostas à variável crítica y.

O princípio da inversão e as reduções que o concretizam precisam de refinamentos por três motivos. Em primeiro lugar porque as reduções, se definidas de forma simplista, podem não produzir derivações. Consideremos a derivação (2.3) do capítulo anterior, reproduzida a seguir. Nessa derivação a ocorrência da fórmula $\forall y\, A[y/x] \supset \forall x\, A$ é consequência de uma inferência $I_{\supset}$ e premissa principal de uma inferência $E_{\supset}$. Aplicando-lhe a redução sugerida pela alínea $b)$ anterior, obtemos

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall y A[y/x]]^1}{A[y/x][x/y]}\,{\scriptstyle E_{\forall}}}{\forall x A}\,{\scriptstyle I_{\forall-}}}{\forall y A[y/x] \supset \forall x A}\,{\scriptstyle I_{\supset}{}^1} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A[y/x]\end{matrix}}{\forall y A[y/x]}\,{\scriptstyle I_{\forall-}}}{\forall x A}\,{\scriptstyle E_{\supset}} \quad\rightsquigarrow\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A[y/x]\end{matrix}}{\forall y\, A[y/x]}\,{\scriptstyle I_{\forall-}}}{A[y/x][x/y]}\,{\scriptstyle E_{\forall}}}{\forall x\, A}\,{\scriptstyle I_{\forall-}}\;.$$

Caso x ocorra livre nalguma hipótese de Π_1, a pré-derivação resultante não é uma derivação pois a última inferência não é válida. Com esta situação ilustramos o problema que pode advir da substitução de uma hipótese por uma derivação. Problemas semelhantes ao descrito podem ocorrer aquando da substituição de uma variável por um termo numa derivação, operação utilizada, por exemplo, na redução da alínea $c)$ acima.

Em segundo lugar, as ocorrências repetidas da mesma fórmula, causadas pelas inferências $E_{\vee}$ ou $E_{\exists}$, tornam desejável estender o princípio da inversão a situações em que a premissa principal da eliminação α redundante é consequência de uma introdução que não antecede imediatamente α. Por exemplo, seja Π a derivação (2.4) reproduzida na figura seguinte à esquerda.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \exists x A\end{matrix} \quad \dfrac{[A[y/x][x/y]]^1}{\exists y A[y/x]}\,{\scriptstyle I_{\exists}}}{\exists y A[y/x]}\,{\scriptstyle E_{\exists-}{}^1} \qquad \begin{matrix}[A[y/x]]^2\\ \Pi_2\\ B\end{matrix}}{B}\,{\scriptstyle E_{\exists-}{}^2} \quad\rightsquigarrow\quad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \exists x\, A\end{matrix} \quad \dfrac{\dfrac{[A[y/x][x/y]]^1}{\exists y\, A[y/x]}\,{\scriptstyle I_{\exists}} \quad \begin{matrix}[A[y/x]]^2\\ \Pi_2\\ B\end{matrix}}{B}\,{\scriptstyle E^2_{\exists-}}}{B}\,{\scriptstyle E^1_{\exists-}}\;.$$

A fórmula $\exists y\, A[y/x]$ tem uma ocorrência como premissa principal de uma eliminação e outra como consequência de uma introdução, repetição essa causada pela eliminação da fórmula $\exists x\, A$. Seria desejável que existisse uma só ocorrência de $\exists y\, A[y/x]$. Para tal recorre-se a uma *transformação auxiliar* que produz a derivação à direita da figura acima, permutando as duas inferências $E_{\exists-}$. Porém, caso x ocorra livre em B, a pré-derivação resultante não é uma derivação pois a última inferência não é válida.

Em terceiro lugar, é necessário uma extensão do princípio da inversão ao caso em que a premissa principal da eliminação α é consequência de uma inferência RAA ou $\perp_i$.

As questões relacionadas com a substituição serão tratadas já na próxima secção deste capítulo, enquanto que as questões relacionadas com as inferências $E_{\vee}$, $E_{\exists}$ e $\perp_i$ e as relacionadas com as inferências RAA serão tratadas no Capítulo 5 e no Capítulo 4, respectivamente.

3.2 Substituição

Nesta secção vamos tratar de algumas questões "burocráticas" que resultam dos refinamentos das reduções relacionados com as operações de substituição em derivações (substituição de uma hipótese por uma derivação e substituição de uma variável por um termo, Definição 22). Apresentaremos dois desenvolvimentos, um por cada operação de substituição, em que:

- definiremos a condição de substituibilidade da operação (Definição 25 e Definição 29);

- demonstraremos um resultado que afirma que, se a condição é satisfeita, então a operação de substituição produz uma derivação (Proposição 7 e Proposição 9);

- definiremos um processo de transformação de derivações (o processo de mudança de variável ligada e o processo de mudança de variável crítica de uma inferência $I_\forall$ ou $E_\exists$), que determina uma relação em derivações ($\xrightarrow[\alpha]{}$ e $\xrightarrow[\xi]{}$) (Definição 27 e Definição 30);

- demonstraremos outro resultado, para o caso em que a condição de substituibilidade não é satisfeita, o qual afirma que podemos transformar, de acordo com o processo da alínea anterior, uma derivação dada de modo que a derivação resultante satisfaça a condição (Proposição 11 e Proposição 12).

Definição 25 (Variável substituível)**.** *Uma variável x é substituível por um termo t numa derivação Π, se:*

a) *x é substituível por t em qualquer fórmula de Π;*

b) *se y é uma variável crítica de alguma inferência $I_\forall$ ou $E_\exists$ em Π então $y \neq x$ e $y \notin Var(t)$.*

Proposição 7 (Substituição de variável substituível)**.** *Se Π é uma derivação de A a partir de Γ em S e a variável x é substituível pelo termo t em Π então $\Pi[t/x]$ é uma derivação de $A[t/x]$ a partir de $\Gamma[t/x] = \{B[t/x] : B \in \Gamma\}$.*

Demonstração. Ver Apêndice A. □

Definição 26 (Variável nova numa fórmula/derivação)**.** *Uma variável x é* nova numa fórmula A*, se x não ocorre de todo em A (nem livre nem ligada). Uma variável x é* nova numa derivação Π*, se x é uma variável nova em todas as fórmulas de Π.*

Definição 27 (Mudança de variável ligada)**.**

a) *Dada uma fórmula A e y uma variável nova em A, $\alpha_x^y(A)$ denota a substituição de todas as ocorrências ligadas de x em A por y, a qual é definida recursivamente por:*

i. *para qualquer $A \in \mathcal{F_L}^{atom.}$, $\alpha_x^y(A) = A$;*

ii. *para quaisquer $A_1, A_2 \in \mathcal{F_L}$, $\boxtimes \in \{\wedge, \vee, \supset\}$, $\alpha_x^y(A_1 \boxtimes A_2) = \alpha_x^y(A_1) \boxtimes \alpha_x^y(A_2)$;*

iii. *para quaisquer $z \in \mathscr{V}$, $A \in \mathcal{F_L}$, $Q \in \{\forall, \exists\}$,*

$$\alpha_x^y(QzA) = \begin{cases} Qy\ (\alpha_x^y(A)[y/x]) & se\ z = x \\ \\ Qz\, \alpha_x^y(A) & se\ z \neq x \end{cases} ;$$

b) *Dada uma derivação Π e y uma variável nova em Π, $\alpha_x^y(\Pi)$ denota o resultado de substituir cada fórmula A de Π por $\alpha_x^y(A)$;*

c) *Dado um conjunto de fórmulas Γ, $\alpha_x^y(\Gamma)$ denota o resultado de substituir cada fórmula A de Γ por $\alpha_x^y(A)$;*

d) $A \xrightarrow[\alpha]{} A'$ *se e só se existem $x, y \in \mathscr{V}$ tais que y é nova em A e $A' = \alpha_x^y(A)$;*

e) $\Pi \xrightarrow[\alpha]{} \Pi'$ *se só se existem $x, y \in \mathscr{V}$ tais que y é nova em Π e $\Pi' = \alpha_x^y(\Pi)$;*

f) $\Gamma \xrightarrow[\alpha]{} \Gamma'$ *se e só se existem $x, y \in \mathscr{V}$ tais que $\Gamma' = \alpha_x^y(\Gamma)$*[1].

g) *A relação de α-equivalência em fórmulas (notação $=_\alpha$) é a menor relação de equivalência em $\mathcal{F_L}$ que contém $\xrightarrow[\alpha]{}$.*

Lema 3. *Se y é nova em A, então x não ocorre livre em $\alpha_x^y(A)$ no alcance de Qy.*

Demonstração. Por indução em A. Demonstração omitida. □

Lema 4. *Sejam A uma fórmula, t um termo, x, y e z variáveis em que y é nova em A, $y \notin Var(t)$ e z é substituível por t em A. Então $\alpha_x^y(A[t/z]) = \alpha_x^y(A)[t/z]$.*

Demonstração. Ver Apêndice A. □

A proposição seguinte afirma que $\xrightarrow[\alpha]{}$ envia derivações em derivações.

Proposição 8. *Seja Π uma derivação de A a partir de Γ em S.*

i. *Se y é uma variável nova em Π, então $\alpha_x^y(\Pi)$ é uma derivação de $\alpha_x^y(A)$ a partir de $\alpha_x^y(\Gamma)$.*

[1] Se Γ contém as hipóteses de uma derivação onde y é nova, então y será nova nesses elementos de Γ, mas não necessariamente nos outros. Por isso, não exigimos a pré-condição de y ser nova em todos os elementos de Γ para definir $\alpha_x^y(\Gamma)$.

ii. *Se* $\Pi \xrightarrow[\alpha]{} \Pi'$ *então existem* A' *e* Γ' *tais que* Π' *é uma derivação de* A' *a partir de* Γ' *e* $A \xrightarrow[\alpha]{} A'$ *e* $\Gamma \xrightarrow[\alpha]{} \Gamma'$ *.*

Demonstração. **i.** Ver Apêndice A.
ii. Por definição de $\Pi \xrightarrow[\alpha]{} \Pi'$ existem $x, y \in \mathscr{V}$ tais que y é nova em Π e $\Pi' = \alpha_x^y(\Pi)$. Tomemos $A' = \alpha_x^y(A)$ e $\Gamma' = \alpha_x^y(\Gamma)$. Assim, por definição temos $A \xrightarrow[\alpha]{} A'$ e $\Gamma \xrightarrow[\alpha]{} \Gamma'$. Por **i.**, temos que Π' é uma derivação de A' a partir de Γ'. □

Pretendemos ainda demonstrar que, dada uma derivação Π tal que x não seja substituível por t em Π, então conseguimos transformar Π de modo que x seja substituível por t na derivação resultante. Teremos de aguardar até ao final do capítulo para conseguirmos provar este resultado. A transformação de Π por intermédio de mudanças de variáveis ligadas é insuficiente; estas têm de ser combinadas com aplicações de uma nova operação, mudança da variável critíca de inferências $I_\forall$ ou $E_\exists$. Segue-se agora o tratamento completo da substituibilidade de fórmulas em derivações e da mudança de variável crítica[2].

Definição 28 (Alcance de uma inferência $I_\forall$ ou $E_\exists$). *Uma hipótese* A *de uma derivação* Π *está no* alcance de uma inferência $I_\forall$ (resp. $E_\exists$) *se* A *é uma hipótese da sub-derivação determinada pela premissa (resp. premissa menor) dessa inferência.*

Definição 29 (Fórmula substituível). *Sejam* Π_1 *e* Π_2 *derivações em que* A *é a conclusão de* Π_2*.*

a) *Se a ocorrência* A° *é uma hipótese de* Π_1*, então dizemos que* A° é substituível por Π_2 em Π_1*, se, em* Π_1*,* A° *não está no alcance de uma inferência* $I_\forall$ *ou* $E_\exists$ *cuja variável crítica ocorre livre em alguma hipótese de* Π_2*.*

b) *Dizemos que* A é substituível por Π_2 em Π_1*, se todas as ocorrências de* A *como hipótese de* Π_1 *são substituíveis por* Π_2 *em* Π_1*.*

Proposição 9 (Substituição de fórmula substituível). *Em* S*, se* Π_1 *é uma derivação de* A *a partir de* Γ_1*,* Π_2 *é uma derivação de* B *a partir de* Γ_2 *e* B° *é uma ocorrência de* B *como hipótese de* Π_1*, então:*

i. *se* B *é substituível por* Π_2 *em* Π_1 *então* $\Pi_1[\Pi_2/B]$ *é uma derivação de* A *a partir de* $\Gamma_2 \cup (\Gamma_1 \setminus \{B\})$*;*

ii. *se* B° *é substituível por* Π_2 *em* Π_1 *então* $\Pi_1[\Pi_2/B^\circ]$ *é uma derivação de* A *a partir de* $\Gamma_2 \cup \Gamma_1$*.*

Demonstração. Ver Apêndice A. □

[2]Não era possível fazer-se, em primeiro lugar, todo o tratamento da substituibilidade de fórmulas e mudança de variáveis críticas porque, nesse tratamento, há uma proposição (Proposição 10) cuja demonstração depende da Proposição 7 acima demonstrada.

Definição 30 (Mudança de variável crítica)**.**

a) *Se* Π_1 *é da forma*

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ A[y/x]\end{matrix}}{\forall x\, A}\; I_\forall$$

e z *é nova em* Π_1 *então* $\xi_{\forall}{}^{z}_{y}(\Pi_1)$ *denota a (pré-)derivação*

$$\dfrac{\left(\begin{matrix}\Pi_2\\ A[y/x]\end{matrix}\right)[z/y]}{\forall x\, A}\; I_\forall \tag{3.1}$$

b) *Se* Π_1 *é da forma*

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ \exists x\, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A[y/x]]\\ \Pi_3\\ B\end{matrix}}{B}\; E_\exists$$

e z *é nova em* Π_1 *então* $\xi_{\exists}{}^{z}_{y}(\Pi_1)$ *denota a (pré-)derivação*

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ \exists x\, A\end{matrix} \qquad \left(\begin{matrix}[A[y/x]]\\ \Pi_3\\ B\end{matrix}\right)[z/y]}{B}\; E_\exists \tag{3.2}$$

c) $\Pi \xrightarrow[\xi]{} \Pi'$ *se existem* Π_1*,* $Q \in \{\forall, \exists\}$ *e variáveis* y, z *tais que:*

- Π_1 *é sub-derivação de* Π *cuja conclusão é consequência de uma inferência* $I_\forall$ *ou* $E_\exists$ *com variável crítica* y*;*
- z *é nova em* Π*;*
- Π' *resulta de* Π *pela substituição de* Π_1 *por* $\xi_{Q}{}^{z}_{y}(\Pi_1)$*.*

Notemos que $\xi_{Q}{}^{z}_{y}(\Pi_1)$ é definida através de uma substituição no alcance da inferência $I_\forall$ ou $E_\exists$, em que a variável substituída é a variável crítica da inferência. Como demonstra o próximo resultado, as pré-derivações (3.1) e (3.2) são derivações.

A proposição seguinte afirma que $\xrightarrow[\xi]{}$ envia derivações em derivações.

Proposição 10. *Se* $\Pi \xrightarrow[\xi]{} \Pi'$ *e* Π *é uma derivação de* A *a partir de* Γ *então* Π' *é uma derivação de* A *a partir de* Γ*.*

Demonstração. Tendo em conta a Proposição 2, basta provar que, para $Q \in \{\forall, \exists\}$:

1. $\xi_{Q}{}^{z}_{y}(\Pi_1)$ é uma derivação;

2. $\xi_{Q}{}^{z}_{y}(\Pi_1)$ mantém a conclusão de Π_1;

3. o conjunto das hipóteses de $\xi_{Q_y^z}(\Pi_1)$ é igual ao conjunto das hipóteses de Π_1.

1. Recordando que z é nova em Π e atendendo à Proposição 7, basta mostrar que a última inferência de

$$\xi_{\forall_y^z}(\Pi_1) = \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2[z/y]\\ A[z/x]\end{array}}{\forall x\, A}\, I_\forall$$

e de

$$\xi_{\exists_y^z}(\Pi_1) = \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2\\ \exists x\, A\end{array} \quad \begin{array}{c}[A[z/x]]\\ \Pi_3[z/y]\\ B\end{array}}{B}\, E_\exists$$

é uma aplicação válida das inferências $I_\forall$ ou $E_\exists$, respectivamente. As condições de aplicabilidade estão satisfeitas pelo facto de z ser uma variável nova em Π_1.
2. É imediato.
3. Atendendo a que $\xi_{Q_y^z}(\Pi_1)$ é definido por uma substituição, no alcance da inferência $I_\forall$ ou $E_\exists$, da variável crítica y, e atendendo a que y não ocorre livre nas hipóteses (resp. hipóteses diferentes de $A[y/x]$) de Π_1 no caso $I_\forall$ (resp. caso $E_\exists$), então as únicas hipóteses alteradas pela substituição da variável crítica y são eventuais ocorrências de $A[y/x]$ (substituídas por $A[z/x]$) no caso da inferência $E_\exists$. No entanto, as mesmas são canceladas por essa inferência, não fazendo parte do conjunto de hipóteses de $\xi_{\exists_y^z}(\Pi_1)$. □

Proposição 11 (Garantia de substituibilidade)**.** *Em S, se Π_1 é uma derivação de A a partir de $\Gamma_1 \cup \{B\}$ e Π_2 uma derivação de B a partir de Γ_2 , então existe uma derivação Π_1' de A a partir de $\Gamma_1 \cup \{B\}$ tal que B é substituível por Π_2 em Π_1' e $\Pi_1 \xrightarrow[\xi]{*} \Pi_1'$* [3].

Demonstração. Fixemos uma derivação Π_2 de B a partir de Γ_2. Dada Π_1 uma derivação arbitrária de A a partir de $\Gamma_1 \cup \{B\}$ definimos $n_{sc}(\Pi_1, \Pi_2, B)$, o número de "sub-derivações críticas" de Π_1 relativamente a Π_2 e B, como sendo o número de sub-derivações de Π_1 cuja conclusão é consequência de uma inferência $I_\forall$ ou $E_\exists$ tal que: a variável crítica dessa inferência ocorre livre em alguma hipótese de Π_2 e B é uma hipótese do alcance dessa inferência. Definimos ainda $\Psi(\Pi_1, \Pi_2, B)$ o predicado: existe uma derivação Π_1' de A a partir de $\Gamma_1 \cup \{B\}$ tal que $\Pi_1 \xrightarrow[\xi]{*} \Pi_1'$ e Π_2 é substituível por B em Π_1'.

Vamos provar, por indução completa sobre n, que

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_0}\forall_{\Pi_1\in S}\left(\begin{array}{c}\Gamma\cup\{B\}\\ \Pi_1\\ A\end{array} \quad \text{e} \quad n_{sc}(\Pi_1,\Pi_2,B) = n \Rightarrow \Psi(\Pi_1,\Pi_2,B)\right) .$$

Seja Π_1 uma derivação arbitrária de A a partir de $\Gamma_1 \cup \{B\}$ e seja $n = n_{sc}(\Pi_1, \Pi_2, B)$. Mostremos $\Psi(\Pi_1, \Pi_2, B)$. Temos dois casos.

[3] Dada uma relação binária R sobre um conjunto X, R^* denota *o fecho reflexivo e transitivo de R*, ou seja, a menor relação reflexiva e transitiva em X que contém R.

1. B é substituível por Π_2 em Π_1, isto é, $n_{sc}(\Pi_1, \Pi_2, B) = 0$. Basta tomar $\Pi_1' = \Pi_1$.

2. B não é substituível por Π_2 em Π_1, ou seja, em Π_1, B ocorre no alcance de uma inferência $I_\forall$ ou $E_\exists$ cuja variável crítica y ocorre livre em alguma hipótese de Π_2. Assim, $n_{sc}(\Pi_1, \Pi_2, B) > 0$.

Seja Π_3 a sub-derivação de Π_1 determinada pela conclusão de uma tal inferência $I_\forall$ ou $E_\exists$. Seja z uma variável escolhida de modo a ser nova em Π_1 e em Π_2 e seja $Q = \forall$ (resp. $Q = \exists$) se a última inferência de Π_3 é uma inferência $I_\forall$ (resp. $E_\exists$). Seja Π_1'' o resultado obtido da substituição em Π_1 de Π_3 por $\xi_{Q}{}^{z}_{y}(\Pi_3)$. Seja ainda $k = n_{sc}(\Pi_1'', \Pi_2, B)$.

Então temos $\Pi_1 \xrightarrow[\xi]{} \Pi_1''$ e, pela Proposição 10, Π_1'' é uma derivação de A a partir de $\Gamma_1 \cup \{B\}$. Temos também que $k < n$, pois, por um lado, a transformação aplicada a Π_3 elimina pelo menos uma sub-derivação crítica e, por outro, sendo a variável z nova em Π_1 e em Π_2, não são acrescidas novas sub-derivações críticas.

Como $k < n$ então, por hipótese de indução, $\Psi(\Pi_1'', \Pi_2, B)$, ou seja, existe uma derivação Π_1' de A a partir de $\Gamma_1 \cup \{B\}$ tal que $\Pi_1'' \xrightarrow[\xi]{*} \Pi_1'$ e Π_2 é substituível por B em Π_1'. De $\Pi_1 \xrightarrow[\xi]{} \Pi_1'' \xrightarrow[\xi]{*} \Pi_1'$ segue $\Pi_1 \xrightarrow[\xi]{*} \Pi_1'$. Logo $\Psi(\Pi_1, \Pi_2, B)$ fica demonstrado. □

Agora que o tratamento da substituibilidade de fórmulas em derivações e mudança de variável crítica está completo, podemos dar por concluído também o tratamento da substituibilidade de termos em derivações e mudança de variável ligada, com a proposição seguinte.

Proposição 12 (Garantia de substituibilidade)**.** *Sejam Π uma derivação, em S, de A a partir de Γ, t um termo e x uma variável. Então existe uma derivação Π' de A' a partir de Γ', tal que:*

i. $A \xrightarrow[\alpha]{*} A'$ *e* $\Gamma \xrightarrow[\alpha]{*} \Gamma'$ *;*

ii. *x é substituível por t em Π';*

iii. $\Pi \xrightarrow[\alpha\xi]{*} \Pi'$ *,*

em que $\xrightarrow[\alpha\xi]{} \; = \; \xrightarrow[\alpha]{} \; \cup \; \xrightarrow[\xi]{}$.

Demonstração. Fixemos um termo t e uma variável x. Dada Π uma derivação arbitrária de A a partir de Γ, definimos $n_c(\Pi, t, x)$, o número "crítico" de Π relativamente a t e x, como

$$n_c(\Pi, t, x) = n_{sc}(\Pi, t, x) + n_{fc}(\Pi, t, x) \ ,$$

onde $n_{sc}(\Pi, t, x)$ denota o número de "sub-derivações críticas" de Π relativamente a t e a x, ou seja, o número de sub-derivações de Π cuja conclusão é consequência de uma inferência $I_\forall$ ou $E_\exists$ cuja variável crítica é x ou pertence às variáveis de t; e $n_{fc}(\Pi, t, x)$ denota o número de "fórmulas críticas" de Π relativamente a t e x, isto é, o número de ocorrências de fórmulas de Π em que x não é substituível por t. Definimos ainda $\Phi(\Pi, t, x)$ o predicado: existe uma derivação Π' tal que $\Pi \xrightarrow[\alpha\,\xi]{*} \Pi'$ e x é substituível por t em Π'.

Provemos, por indução completa sobre n, que

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_0} \forall_{\Pi \in S} \quad n_c(\Pi, t, x) = n \Rightarrow \Phi(\Pi, t, x) \ .$$

Seja Π uma derivação de A a partir de Γ e seja $n = n_c(\Pi, t, x)$. Mostremos $\Phi(\Pi, t, x)$. Notemos que, uma vez demonstrado $\Phi(\Pi, t, x)$, fica garantida, pelas proposições 8 e 10, a existência de A' e Γ' com as propriedades desejadas. Temos dois casos.

1. x é substituível por t em Π, isto é, $n_c(\Pi, t, x) = 0$. Basta tomar $\Pi' = \Pi$.

2. x não é substituível por t em Π, ou seja, $n_{sc}(\Pi, t, x) > 0$ ou $n_{fc}(\Pi, t, x) > 0$.

a) Se $n_{sc}(\Pi, t, x) > 0$, então Π apresenta uma sub-derivação Π_1 cuja conclusão é consequência de uma inferência $I_\forall$ ou $E_\exists$ cuja variável crítica, digamos w, é x ou pertence às variáveis de t. Seja y uma variável escolhida de modo a ser nova em Π e tal que $y \notin Var(t)$ e seja $Q = \forall$ (resp. $Q = \exists$) se a última inferência de Π_1 é uma inferência $I_\forall$ (resp. $E_\exists$). Seja Π'' o resultado obtido da substituição em Π de Π_1 por ${\xi_Q}^y_w(\Pi_1)$. Seja ainda $k = n_c(\Pi'', t, x)$. Então temos $\Pi \xrightarrow[\xi]{} \Pi''$ e temos também $k < n$, pois, por um lado, a transformação aplicada a Π_1 elimina pelo menos uma sub-derivação crítica e, por outro, sendo a variável y nova em Π e $y \notin Var(t)$, não são acrescidas novas sub-derivações críticas.

b) Se $n_{fc}(\Pi, t, x) > 0$, então Π apresenta uma ocorrência de fórmula B tal que x não é substituível por t em B, isto é,

$$B = \text{——}\; Qz\,(\text{——}\; \overset{\overset{t}{\downarrow}}{x} \;\text{——})\;\text{——} \quad ,$$

com $z \in Var(t)$. Seja w uma variável escolhida de modo a ser nova em Π e $w \notin Var(t)$ e seja $\Pi'' = \alpha^w_z(\Pi)$. Então temos $\Pi \xrightarrow[\alpha]{} \Pi''$ e temos também $k < n$, pois, por um lado, a transformação aplicada a Π elimina pelo menos uma fórmula crítica e, por outro, sendo a variável w nova em Π e $w \notin Var(t)$, não são acrescidas novas fórmulas críticas.

Em ambos os casos $\Pi \xrightarrow[\alpha\,\xi]{} \Pi''$ e $k < n$. Então, por hipótese de indução, $\Phi(\Pi'', t, x)$, ou seja, existe uma derivação Π' tal que x é substituível por t em Π' e $\Pi'' \xrightarrow[\alpha\,\xi]{*} \Pi'$. De $\Pi \xrightarrow[\alpha\,\xi]{} \Pi'' \xrightarrow[\alpha\,\xi]{*} \Pi'$ segue $\Pi \xrightarrow[\alpha\,\xi]{*} \Pi'$, o que conclui a demonstração de $\Phi(\Pi, x, t)$. $\square$

Capítulo 4

Normalização em Lógica Clássica

Pretendemos neste capítulo estudar a normalização de derivações em Lógica Clássica. Tal como Prawitz, este estudo não será realizado usando o sistema de Dedução Natural da Lógica Clássica, N_c, mas sim usando um seu subsistema que inclui um conjunto de símbolos lógicos completo para Lógica Clássica. Como Prawitz refere, esta escolha permite "minimizar o efeito perturbador da regra RAA", tornando mais simples o processo de normalização de derivações em Lógica Clássica. Existem vários estudos que tratam normalização em Dedução Natural da Lógica Clássica tomando como primitivos todos os símbolos lógicos. Um desses estudos é apresentado por Stalmarck em [13] e inclui mesmo uma prova do teorema da normalização forte para Dedução Natural da Lógica Clássica.

4.1 Subsistema completo para Lógica Clássica

Denotaremos por $N_{c'}$ o sistema de Dedução Natural da Lógica Clássica obtido a partir de N_c, por exclusão dos símbolos lógicos $\vee$ e $\exists$ e respectivas regras de inferência. No restante deste capítulo adoptaremos este sistema $N_{c'}$ e o teorema da normalização será provado para este sistema.

Nesta secção, começaremos por definir uma tradução de fórmulas no subconjunto das fórmulas que permite apenas os símbolos lógicos: $\perp, \wedge, \supset, \forall$, que será denotada por *. Provaremos depois que * preserva a relação de derivabilidade (Proposição 15).

Definição 31 (Tradução *)**.** *A tradução * é definida recursivamente por:*

a) *para qualquer $A \in \mathcal{F}_{\mathscr{L}}{}^{atom.}$, $A^* = A$;*

b) *para quaisquer $A, B \in \mathcal{F}_{\mathscr{L}}$, $\boxtimes \in \{\wedge, \supset\}$, $(A \boxtimes B)^* = A^* \boxtimes B^*$;*

c) *para quaisquer $A, B \in \mathcal{F}_{\mathscr{L}}$, $(A \vee B)^* = \neg(\neg A^* \wedge \neg B^*)$;*

d) *para quaisquer $A \in \mathcal{F}_{\mathscr{L}}$, $x \in \mathscr{V}$, $(\exists x\, A)^* = \neg(\forall x\, \neg A^*)$;*

e) *para quaisquer $A \in \mathcal{F}_{\mathscr{L}}$, $x \in \mathscr{V}$, $(\forall x\, A)^* = \forall x\, A^*$.*

Proposição 13. *Para quaisquer* $A \in \mathcal{F}_{\mathscr{L}}$, $x \in \mathscr{V}$, $t \in \mathcal{T}_{\mathscr{L}}$,

i. $(A[t/x])^* = A^*[t/x]$;

ii. *se* x *é substituível por* t *em* A, *então* x *é substituível por* t *em* A^*;

iii. *se* $x \notin Liv(A)$ *então* $x \notin Liv(A^*)$;

iv. $A^* \supset A$ *e* $A \supset A^*$ *são teoremas em* N_c.

Demonstração. Todas as propriedades seguem por indução em A. Demonstrações omitidas. □

Proposição 14. *Se* Π *é uma derivação de* A *a partir de* Γ *em* N_c, *então existe uma derivação* Π' *de* A^* *a partir de* $\Gamma^* = \{B^* : B \in \Gamma\}$ *em* $N_{c'}$.

Demonstração. Por indução em Π, mostraremos que:

$$\forall_{\Pi \in N_c} \left(\begin{array}{c} \Gamma \\ \Pi \\ A \end{array} \Rightarrow \exists_{\Pi' \in N_{c'}} : \begin{array}{c} \Gamma^* \\ \Pi' \\ A^* \end{array} \right) .$$

Caso base. Π é uma árvore cuja única fórmula é A. Assim $A \in \Gamma$, consequentemente $A^* \in \Gamma^*$, e basta tomar $\Pi' = A^*$.

Caso $I_{\vee_1}$**.** Suponhamos que

$$\Pi = \dfrac{\begin{array}{c} \Pi_1 \\ B \end{array}}{B \vee C}\ I_{\vee_1} .$$

Sendo Π uma derivação a partir de Γ, então Π_1 também é uma derivação a partir de Γ. Por hipótese de indução, existe uma derivação Π_1' de B^* a partir de Γ^*, em $N_{c'}$. Deste modo,

$$\Pi' = \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg B^* \wedge \neg C^*]^1}{\neg B^*}\ E_{\wedge_1} \quad \begin{array}{c} \Pi_1' \\ B^* \end{array}}{\bot}\ E_{\supset}}{\neg(\neg B^* \wedge \neg C^*)}\ I_{\supset}1$$

é uma derivação de $(B \vee C)^* = A^*$ a partir de Γ^* em $N_{c'}$.

Caso $I_{\vee_2}$**.** Análogo ao caso $I_{\vee_1}$.

Caso $E_{\vee}$**.** Suponhamos que

$$\Pi = \dfrac{\begin{array}{c} \Pi_1 \\ B \vee C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B] \\ \Pi_2 \\ A \end{array} \quad \begin{array}{c} [C] \\ \Pi_3 \\ A \end{array}}{A}\ E_{\vee} .$$

Sendo Π uma derivação a partir de Γ, então Π_1 também o é e Π_2 (resp. Π_3) é uma derivação a partir de $\Gamma \cup \{B\}$ (resp. $\Gamma \cup \{C\}$). Por hipótese de indução, existe, em $N_{c'}$, uma derivação Π'_1 de $(B \vee C)^*$ a partir de Γ^* e uma derivação Π'_2 (resp. Π'_3) de A^* a partir de $\Gamma^* \cup \{B^*\}$ (resp. $\Gamma^* \cup \{C^*\}$).
Ora,

$$\Pi' = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi'_1\\ \neg(\neg B^* \wedge \neg C^*)\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A^*]^3 \quad \begin{array}{c}[B^*]^1\\ \Pi'_2\\ A^*\end{array}}{\bot}\,{\scriptstyle E_\supset}}{\neg B^*}\,{\scriptstyle I_\supset 1} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg A^*]^3 \quad \begin{array}{c}[C^*]^2\\ \Pi'_3\\ A^*\end{array}}{\bot}\,{\scriptstyle E_\supset}}{\neg C^*}\,{\scriptstyle I_\supset 2}}{\neg B^* \wedge \neg C^*}\,{\scriptstyle I_\wedge}}{\bot}\,{\scriptstyle E_\supset}}{A^*}\,{\scriptstyle RAA^3}$$

é uma derivação de A^* a partir de Γ^* em $N_{c'}$.

Caso $I_\exists$. Suponhamos que

$$\Pi = \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ B[t/x]\end{array}}{\exists x\, B}\,{\scriptstyle I_\exists} \quad ,$$

com x substituível por t em B. Sendo Π uma derivação a partir de Γ, então Π_1 também o é. Por hipótese de indução e como, pela Proposição 13, $(B[t/x])^* = B^*[t/x]$, existe uma derivação Π'_1 de $B^*[t/x]$ a partir de Γ^*, em $N_{c'}$. Deste modo, da suposição de que x é substituível por t em B e da Proposição 13, segue que x é substituível por t em $\neg B^*$ e que

$$\Pi' = \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\, \neg B^*]^1}{\neg B^*[t/x]}\,{\scriptstyle E_\forall} \qquad \begin{array}{c}\Pi'_1\\ B^*[t/x]\end{array}}{\bot}\,{\scriptstyle E_\supset}}{\neg(\forall x\, \neg B^*)}\,{\scriptstyle I_\supset 1}$$

é uma derivação, em $N_{c'}$, de $(\exists x\, B)^* = A^*$ a partir de Γ^* .

Caso $E_\exists$. Suponhamos que

$$\Pi = \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \exists x\, B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B[y/x]]\\ \Pi_2\\ A\end{array}}{A}\,{\scriptstyle E_\exists} \quad ,$$

com:

(i) $y = x$; ou: $y \notin Liv(B)$ e x é substituível por y em B;

(ii) y não ocorre livre nem em A nem nas hipóteses de Π_2 diferentes de $B[y/x]$.

Sendo Π uma derivação a partir de Γ, então Π_1 (resp. Π_2) é uma derivação a partir de Γ (resp. $\Gamma \cup \{B[y/x]\}$). Por hipótese de indução, existe, em $N_{c'}$, uma derivação Π'_1 de $(\exists x\, B)^*$ a partir de Γ^* e uma derivação Π'_2 de A^* a partir de $\Gamma^* \cup (B[y/x])^* = \Gamma^* \cup \{B^*[y/x]\}$.

Deste modo, tem-se que

$$\Pi' = \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Pi_1' \\ \neg(\forall x\, \neg B^*)\end{array} \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[\neg A^*]^2 \quad \begin{array}{c}[B^*[y/x]]^1 \\ \Pi_2' \\ A^*\end{array}}{\perp}\, E_\supset}{\neg B^*[y/x]}\, I_\supset 1}{\forall x\, \neg B^*}\, I_\forall}{\cfrac{\perp}{A^*}\, RAA^2}\, E_\supset$$

é uma derivação de A^* a partir de Γ^*, onde a inferência $I_\forall$ é válida uma vez que:

- de (i) e da Proposição 13, $y = x$; ou: $y \notin Liv(\neg B^*)$ e x é substituível por y em $\neg B^*$;
- de (ii) e da Proposição 13, $y \notin Liv(\neg A^*)$ e y não ocorre livre nas hipóteses de Π_2' diferentes de $B^*[y/x]$, pelo que y não ocorre livre nas hipóteses da derivação da premissa da inferência $I_\forall$.

Restantes casos indutivos. Seguem da aplicação rotineira das hipóteses de indução. □

Proposição 15. $\Gamma \vdash_{N_c} A \Leftrightarrow \Gamma^* \vdash_{N_{c'}} A^*$.

Demonstração. $\Rightarrow$) Segue de imediato pela Proposição 14.
$\Leftarrow$) Uma vez que o conjunto das regras de inferência de $N_{c'}$ está contido no conjunto das regras de inferência de N_c, uma derivação Π de A^* a partir de Γ^* em $N_{c'}$ é ainda uma derivação de A^* a partir de Γ^*, em N_c. Deste modo, substituindo cada hipótese B^* de Π pela derivação

$$\cfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \\ B \supset B^*\end{array} \quad B}{B^*}\, E_\supset \quad ,$$

onde Π_1 representa uma derivação de $B \supset B^*$ a partir do conjunto vazio, que existe pela Proposição 13, obtemos uma derivação Π' de A^* a partir de Γ. Assim,

$$\cfrac{\begin{array}{c}\Pi_2 \\ A^* \supset A\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi' \\ A^*\end{array}}{A}\, E_\supset$$

é uma derivação de A a partir de Γ, representando Π_2 uma derivação de $A^* \supset A$ a partir do conjunto vazio, cuja existência é garantida novamente pela Proposição 13. □

4.2 Teorema da Normalização

Nesta secção demonstraremos o Teorema da Normalização. Como ponto prévio, estabeleceremos o Teorema da Atomização, que vem dar resposta à extensão do princípio da inversão com a possibilidade da premissa principal de uma eliminação ser consequência de uma inferência RAA. Este teorema mostra como transformar derivações, em $N_{c'}$, de modo a que todas as inferências RAA possuam conclusões atómicas.

Notação 3. *Dada uma derivação* Π*,* $At(\Pi)$ *denota que a conclusão de qualquer aplicação da regra* RAA *é uma fórmula atómica, em* Π*.*

Teorema 1 (Teorema da Atomização)**.** *Se* $\Gamma \vdash_{N_{c'}} A$ *então existe, em* $N_{c'}$*, uma derivação de* A *a partir de* Γ*, na qual a conclusão de qualquer aplicação da regra* RAA *é uma fórmula atómica.*

Demonstração. Dada uma derivação Π em $N_{c'}$, define-se:

- $n(\Pi) = max\{Grau(A) : A \text{ é conclusão de uma inferência } RAA \text{ em } \Pi\}$; ($n(\Pi) = 0$, caso não haja nenhuma inferência RAA em Π)

- $m(\Pi) =$ o número de ocorrências de fórmulas que são conclusão de uma inferência RAA em Π e cujo grau é $n(\Pi)$.

Mostraremos, por indução na ordem lexicogáfica em $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ [1], que:

$$\forall_{(n,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} \underbrace{\left(\forall_{\Pi\in N_{c'}} : \left(\begin{array}{c}\Gamma\\ \Pi\\ A\end{array} \text{ e } (n(\Pi), m(\Pi)) = (n,m) \Rightarrow \left(\exists_{\Pi'\in N_{c'}} : \begin{array}{c}\Gamma\\ \Pi'\\ \mathrm{A}\end{array} \text{ e } At(\Pi')\right)\right)\right)}_{\Phi(n,m)}$$

Suponhamos que Π é uma derivação de A a partir de Γ, em $N_{c'}$ e que $(n(\Pi), m(\Pi)) = (n,m)$. Pretendemos mostrar que existe uma derivação Π' de A a partir de Γ tal que $At(\Pi')$, em $N_{c'}$.

Se não existem em Π inferências RAA de conclusão não atómica, então basta tomar $\Pi' = \Pi$. Caso contrário, temos $n > 0$. Seja F a conclusão de uma inferência RAA, em Π, tal que $Grau(F) = n$ e tal que, acima de F, não haja nenhuma inferência RAA cuja conclusão seja também de grau n. Assim, Π tem a seguinte forma:

$$\begin{array}{c}[\neg F]^p\\ \Pi_2\\ \dfrac{\perp}{F}\, RAA^p\\ \Pi_1\\ A\end{array}$$

A fórmula F, não sendo atómica (pois $n > 0$), tem uma das seguintes formas em $N_{c'}$: $B \wedge C$, $B \supset C$ ou $\forall x\, B$. Em primeiro lugar, para cada um destes casos, vejamos como

[1] A ordem lexicográfica em pares de números naturais é definida por:

$$(n', m') < (n, m) \Leftrightarrow \big((n' < n) \vee (n' = n \wedge m' < m)\big) \ .$$

A esta ordem bem fundada está associado o seguinte princípio de indução

$$\left[\forall_{(n,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} \left(\forall_{(n',m')\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} \left(n', m'\right) < (n,m) \Rightarrow \Phi\left(n', m'\right)\right) \Rightarrow \Phi(n,m)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall_{(n,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} \Phi(n,m) \ ,$$

onde Φ representa uma propriedade sobre pares de números naturais.

transformar a inferência RAA etiquetada com p, recorrendo a aplicações de RAA com conclusões de grau inferior a n.

Caso $F = B \wedge C$**.**

$$\Pi = \begin{array}{c} [\neg(B\wedge C)]^p \\ \Pi_2 \\ \dfrac{\bot}{B\wedge C}\,RAA^p \\ \Pi_1 \\ A \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \Pi'' = \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{[\neg B]^q \quad \dfrac{[B\wedge C]^s}{B}\,E_{\wedge_1}}{\bot}\,E_{\supset}}{(\neg(B\wedge C))}\,I_{\supset^s} \\ \Pi_2 \\ \dfrac{\bot}{B}\,RAA^q \end{array} \qquad \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{[\neg C]^u \quad \dfrac{[B\wedge C]^l}{C}\,E_{\wedge_2}}{\bot}\,E_{\supset}}{(\neg(B\wedge C))}\,I_{\supset^l} \\ \Pi_2 \\ \dfrac{\bot}{C}\,RAA^u \end{array}}{B\wedge C}\,I_{\wedge} \\ \Pi_1 \\ A \end{array}.$$

Caso $F = B \supset C$**.**

$$\Pi = \begin{array}{c} [\neg(B\supset C)]^p \\ \Pi_2 \\ \dfrac{\bot}{B\supset C}\,RAA^p \\ \Pi_1 \\ A \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \Pi'' = \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{[\neg C]^s \quad \dfrac{[B\supset C]^q \quad [B]^l}{C}\,E_{\supset}}{\bot}\,E_{\supset}}{(\neg(B\supset C))}\,I_{\supset^q} \\ \Pi_2 \\ \dfrac{\dfrac{\bot}{C}\,RAA^s}{B\supset C}\,I_{\supset^l} \\ \Pi_1 \\ A \end{array}.$$

Caso $F = \forall x\, B$**.**

$$\Pi = \begin{array}{c} [\neg(\forall x\, B)]^p \\ \Pi_2 \\ \dfrac{\bot}{\forall x\, B}\,RAA^p \\ \Pi_1 \\ A \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \Pi'' = \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{[\neg B[y/x]]^q \quad \dfrac{[\forall x\, B]^s}{B[y/x]}\,E_{\forall}}{\bot}\,E_{\supset}}{(\neg(\forall x\, B))}\,I_{\supset^s} \\ \Pi_2 \\ \dfrac{\dfrac{\bot}{B[y/x]}\,RAA^q}{\forall x\, B}\,I_{\forall} \\ \Pi_1 \\ A \end{array},$$

onde y é nova em Π.

Notemos que, em todos os casos:

1. Π'' é uma derivação de A a partir de Γ;

2. $m(\Pi'') < m$, pois a inferência RAA etiquetada com p é eliminada e as novas inferências RAA, produzidas em cada transformação, têm na conclusão uma fórmula de grau inferior a n (notemos que, na última transformação $Grau(B[y/x]) = Grau(B) < Grau(\forall x\, B)$, pela Proposição 1);

3. $(n\,(\Pi''), m\,(\Pi'')) < (n, m)$ pois, de 2. segue que, se $m(\Pi'') = 0$, então $n(\Pi'') < n$; e se $m(\Pi'') > 0$, então $n(\Pi'') = n$ e $m(\Pi'') < m$.

De 3. segue então, por hipótese de indução, que $\Phi\,(n(\Pi''), m(\Pi''))$ e, consequentemente, existe uma derivação Π' de A a partir de Γ, em $N_{c'}$, tal que $At(\Pi')$. □

Introduziremos de seguida algumas definições necessárias ao Teorema da Normalização.

Definição 32 (Fórmula maximal)**.** *Uma ocorrência de uma fórmula numa derivação é dita* maximal *se for simultaneamente conclusão de uma introdução ou de uma aplicação da regra RAA e premissa principal de uma eliminação. Uma fórmula é maximal numa derivação se nela existirem ocorrências maximais dessa fórmula.*

Da definição anterior podemos concluir que uma fórmula atómica nunca poderá ser maximal.

Definição 33 (Derivação normal)**.** *Uma derivação é dita* normal *se não tem fórmulas maximais.*

Definição 34 (Fórmula interna)**.** *Uma ocorrência de uma fórmula numa derivação é dita* interna *se não é conclusão nem hipótese da derivação. Uma fórmula é interna numa derivação se nela existirem ocorrências internas dessa fórmula.*

Observemos que toda a fórmula interna é obrigatóriamente consequência de uma regra de inferência e premissa de outra e, em particular, toda a fórmula maximal é fórmula interna.

Teorema 2 (Teorema da Normalização)**.** *Se $\Gamma \vdash_{N_{c'}} A$ então, em $N_{c'}$, existe uma derivação normal de A' a partir de Γ', onde $A \xrightarrow[\alpha]{*} A'$ e $\Gamma \xrightarrow[\alpha]{*} \Gamma'$.*

Demonstração. Dada uma derivação Π em $N_{c'}$, define-se:

- $n(\Pi) = max\{Grau(A) : A\,\text{é fórmula maximal em}\,\Pi\}$. Caso não existam fórmulas maximais em Π, $n(\Pi) = 0$.

- $m(\Pi) =$ número de ocorrências em Π de fórmulas maximais cujo grau é $n(\Pi)$.

Consideremos, dados $n, m \in \mathbb{N}_0$,

$$\Delta(n,m) = \left(\forall_{\Pi \in N_{c'}} : \left(\begin{array}{c}\Gamma\\ \Pi\\ A\end{array} \text{ e } (n\,(\Pi), m\,(\Pi)) = (n,m) \Rightarrow\right.\right.$$

$$\left.\left.\Rightarrow \left(\exists_{\Pi' \in N_{c'}} \exists_{A',\Gamma'} : \begin{array}{c}\Gamma'\\ \Pi'\\ A'\end{array} \text{ e } A \xrightarrow[\alpha]{*} A' \text{ e } \Gamma \xrightarrow[\alpha]{*} \Gamma' \text{ e } \Pi' \text{ é normal}\right)\right)\right) \quad .$$

Mostraremos, por indução na ordem lexicogáfica em $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, que:

$$\forall_{(n,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} \quad \Delta(n,m) \ .$$

Suponhamos que Π é uma derivação de A a partir de Γ, em $N_{c'}$ e que $At(\Pi)$, e suponhamos que $(n\,(\Pi)\,, m\,(\Pi)) = (n,m)$. Pretendemos mostrar que, em $N_{c'}$, existe uma derivação normal Π' de A' a partir de Γ', onde $A \xrightarrow[\alpha]{*} A'$ e $\Gamma \xrightarrow[\alpha]{*} \Gamma'$.

Se Π é uma derivação normal, então basta tomar $\Pi' = \Pi$. Caso contrário, temos $n > 0$. Seja F uma fórmula maximal, em Π, tal que $Grau(F) = n$ e suponhamos também que todas as fórmulas maximais que estão na sub-derivação determinada pela ocorrência de uma fórmula lateralmente conectada com F, se existirem, têm grau inferior a n. Sendo F uma fórmula maximal, não pode ser atómica e tem, em $N_{c'}$, uma das seguintes formas: $B \wedge C$, $B \supset C$ ou $\forall x\, B$. A fórmula maximal F pode ser removida de acordo com as transformações apresentadas abaixo.

Caso $F = B \wedge C$**.**

$$\Pi = \begin{array}{c}\Pi_1 \quad \Pi_2\\ \dfrac{\dfrac{B \qquad C}{B \wedge C}\,I_\wedge}{B}\,E_{\wedge_1}\\ \Pi_3\\ A\end{array} \quad\rightsquigarrow\quad \Pi'' = \begin{array}{c}\Pi_1\\ B\\ \Pi_3\\ A\end{array} \qquad \text{ou} \qquad \Pi = \begin{array}{c}\Pi_1 \quad \Pi_2\\ \dfrac{\dfrac{B \qquad C}{B \wedge C}\,I_\wedge}{C}\,E_{\wedge_2}\\ \Pi_3\\ A\end{array} \quad\rightsquigarrow\quad \Pi'' = \begin{array}{c}\Pi_2\\ C\\ \Pi_3\\ A\end{array} \ .$$

Caso $F = B \supset C$**.**

$$\Pi = \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[B]^p\\ \Pi_1\\ C\end{array}}{B \supset C}\,I_\supset{}^p \qquad \begin{array}{c}\Pi_2\\ B\end{array}}{C}\,E_\supset\\ \Pi_3\\ A\end{array} \quad\rightsquigarrow\quad \Pi'' = \begin{array}{c}\Pi_2\\ (B)\\ \Pi_1'\\ C\\ \Pi_3\\ A\end{array} \ ,$$

onde Π_1' é uma derivação tal que $\Pi_1 \xrightarrow[\xi]{*} \Pi_1'$ e B é substituível por Π_2 em Π_1'.

Caso $F = \forall x\, B$**.**

$$\Pi = \begin{array}{c}\Pi_1\\ \dfrac{\dfrac{B[y/x]}{\forall x\, B}\,I_\forall}{B[t/x]}\,E_\forall\\ \Pi_2\\ A\end{array} \quad\rightsquigarrow\quad \Pi'' = \begin{array}{c}\Pi_1'[t/y]\\ B'[t/x]\\ \Pi_2'\\ A'\end{array} \ ,$$

onde Π_1' e Π_2' são derivações tais que:

(i) $\Pi_1 \xrightarrow[\alpha\,\xi]{*} \Pi_1'$ e y é substituível por t em Π_1';

(ii) Π_2' é obtida de Π_2 efectuando as mesmas mudanças de variáveis ligadas que foram efectuadas na obtenção de Π_1' a partir de Π_1.

Comecemos por observar que, em todos os casos, produzimos, em $N_{c'}$, uma derivação de A'' a partir de Γ'', onde $A \xrightarrow[\alpha]{*} A''$ e $\Gamma \xrightarrow[\alpha]{*} \Gamma''$.

Caso $F = B \wedge C$**.** B (resp. C) é substituível por Π_1 (resp. Π_2) em Π_3, pelo que a Proposição 9 garante que Π'' é uma derivação de A a partir de Γ.

Caso $F = B \supset C$**.** A Proposição 11 garante a existência de uma derivação Π_1' de C a partir de $\Gamma \cup \{B\}$ com as propriedades referidas. Assim, pela Proposição 9, $\Pi_1'[\Pi_2/B]$ é uma derivação de C a partir de Γ. Como a operação $\xrightarrow[\xi]{}$ não altera as variáveis livres das hipóteses, C é substituível por $\Pi_1'[\Pi_2/B]$ em Π_3. Então, pela Proposição 9, Π'' é uma derivação de A a partir de Γ.

Caso $F = \forall x\, B$**.** A Proposição 12 garante a existência de uma derivação Π_1' de $B'[y/x]$ a partir de Γ' nas condições de (i), onde $\Gamma \xrightarrow[\alpha]{*} \Gamma'$ e $B \xrightarrow[\alpha]{*} B'$ ($B[y/x] \xrightarrow[\alpha]{*} C \Rightarrow C = B'[y/x]$ e $B \xrightarrow[\alpha]{*} B'$). Pela Proposição 7, $\Pi_1'[t/y]$ é uma derivação de $B'[t/x]$ a partir de $\Gamma'[t/y]$. Por y ser a variável crítica da inferência $I_\forall$, y não ocorre livre em Γ, consequentemente y não ocorre livre em Γ' e, portanto, $\Gamma'[t/y] = \Gamma'$. Observemos que Π_2' é construída de modo que seja uma derivação de A' a partir de $\Gamma' \cup \{B'[t/x]\}$, onde $A \xrightarrow[\alpha]{*} A'$. $B'[t/x]$ é substituível por $\Pi_1'[t/y]$ em Π_2', pois quer a operação $\xrightarrow[\alpha]{}$ quer $\xrightarrow[\xi]{}$ não alteram as variáveis livres das hipóteses. Pelo que, pela Proposição 9, Π'' é uma derivação de A' a partir de Γ'.

Mostremos agora que, em cada um dos casos, $m(\Pi'') < m$.

Caso $F = B \wedge C$**.** Observemos que:

- $m = 1 + m(\Pi_1) + m(\Pi_2) + m(\Pi_3)$;
- a transformação não altera as fórmulas internas de Π_1 (resp. Π_2) nem de Π_3;
- B (resp. C) (eventual nova fórmula maximal gerada pela transformação) tem grau inferior a n.

Logo, $m(\Pi'') = m(\Pi_1) + m(\Pi_3)$ (resp. $m(\Pi'') = m(\Pi_2) + m(\Pi_3)$) é inferior a m.

Caso $F = B \supset C$**.** Observemos que:

- não há fórmulas maximais de grau n em Π_2, dada a escolha fixada para a fórmula maximal F[2];

[2]Notemos que se em Π_2 fossem permitidas fórmulas maximais de grau máximo, então em Π'' poderia ocorrer a duplicação destas fórmulas, caso existisse em Π mais do que um cancelamento etiquetado por p.

- $m = 1 + m(\Pi_1) + m(\Pi_3)$;
- a transformação não afecta as fórmulas internas de Π_2, e $m(\Pi_1') = m(\Pi_1)$ uma vez que as únicas alterações possíveis nas fórmulas internas correspondem a substituições de variáveis críticas;
- B e C (eventuais novas fórmulas maximais geradas pela transformação) têm grau inferior a n.

Logo, $m(\Pi'') = m(\Pi_1) + m(\Pi_3) < m$.

Caso $F = \forall x\, B$**.** Observemos que:

- $m(\Pi) = 1 + m(\Pi_1) + m(\Pi_2)$;
- $m(\Pi_1') = m(\Pi_1)$ e $m(\Pi_2') = m(\Pi_2)$ uma vez que, em ambos os casos, as únicas alterações possíveis nas fórmulas internas correspondem a substituições de variáveis críticas ou de variáveis ligadas, ou então à substituição de y por t;
- $B[t/y]$ (eventual nova fórmula maximal gerada pela transformação) tem grau inferior a n.

Logo, $m(\Pi'') = m(\Pi_1) + m(\Pi_2) < m$.

Como $m(\Pi'') < m$, segue que $(n(\Pi''), m(\Pi'')) < (n, m)$, pois se $m(\Pi'') = 0$ então $n(\Pi'') < n$ e se $m(\Pi'') > 0$ então $n(\Pi'') = n$ e $m(\Pi'') < m$.

Deste modo, por hipótese de indução, temos $\Delta(n(\Pi''), m(\Pi''))$ ou seja, existe uma derivação normal Π' de A' a partir de Γ', em $N_{c'}$ e $A'' \xrightarrow[\alpha]{*} A'$ e $\Gamma'' \xrightarrow[\alpha]{*} \Gamma'$. De $A \xrightarrow[\alpha]{*} A'' \xrightarrow[\alpha]{*} A'$ segue $A \xrightarrow[\alpha]{*} A'$ e analogamente $\Gamma \xrightarrow[\alpha]{*} \Gamma'$.

□

4.3 Corolários do Teorema da Normalização

O Teorema da Normalização tem consequências e aplicações importantes, as quais permitem-nos tirar conclusões sobre o próprio sistema de Dedução Natural, como por exemplo, a sua consistência. Isto deve-se ao facto de todas as derivações normais terem uma forma peculiar (ver Proposição 16).

Definição 35 (Ramo)**.** *Dada uma derivação* Π*, em* $N_{c'}$*, um* ramo *é a parte inicial,* $A_1, \cdots, A_n$*, de uma linha de* Π *tal que* A_n *satisfaça:*

a) A_n *é a primeira ocorrência, na linha, de uma fórmula que é premissa menor de uma inferência* $E_\supset$*;*

ou

b) *A_n é a conclusão de* Π, se uma tal ocorrência não existe na linha.

Um ramo de Π *é* principal *se A_n satisfaz a condição* b)*. Usaremos a letra β como meta-variável para denotar ramos e* $Ramos(\Pi) = \{\beta : \beta$ *é um ramo de* $\Pi\}$.

Definição 36 (Ordem de um ramo)**.** *Dado um ramo β de uma derivação* Π*, define-se a sua* ordem *, que denotamos por* $ordem(\beta)$*, do seguinte modo:*

a) *todo o ramo principal tem ordem zero*;

b) *um ramo que termina numa premissa menor da aplicação da regra $E_\supset$ tem ordem $p+1$, se a premissa principal dessa aplicação pertence a um ramo de ordem p.*

Exemplo 4. *Consideremos novamente a derivação* Π *da alínea* b) *do* Exemplo 2*:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A] \qquad \dfrac{[(A\supset B)\supset A] \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A] \quad [A]}{\bot}\,{\scriptstyle E_\supset}}{B}\,{\scriptstyle RAA}}{A\supset B}\,{\scriptstyle I_\supset}}{A}\,{\scriptstyle E_\supset}}{\bot}\,{\scriptstyle E_\supset}}{A}\,{\scriptstyle RAA}}{((A\supset B)\supset A)\supset A}\,{\scriptstyle I_\supset} \quad .$$

Em Π*, temos que:*

- $\neg A$, $\bot$, A, $((A\supset B)\supset A)\supset A$ *é o ramo principal e tem ordem zero;*

- $(A\supset B)\supset A$, A *é um ramo de ordem* 1*;*

- $\neg A$, $\bot$, B, $A\supset B$ *é um ramo de ordem* 2*;*

- A *é um ramo de ordem* 3.

Lema 5 (Existência de um ramo)**.** *Se A é uma ocorrência de uma fórmula, numa derivação* Π*, em $N_{c'}$, então existe um ramo de* Π *que contém A.*

Demonstração. Por indução em Π, mostremos $P(\Pi)$, onde $P(\Pi)$ sse, para toda a ocorrência A, em Π, existe $\beta \in Ramos(\Pi)$ tal que β contém A.

Caso base. Π é uma árvore com uma só fórmula A.
Basta considerar $\beta = A$.

De todos os casos indutivos, mostramos apenas o mais interessante.

Caso $E_\supset$. Sendo

$$\Pi = \dfrac{\begin{array}{cc}\Pi_1 & \Pi_2 \\ A \supset B & A\end{array}}{B}\,E_\supset \quad ,$$

suponhamos $P(\Pi_1)$ e $P(\Pi_2)$ e mostremos $P(\Pi)$. Temos que todos os ramos de Π_2 são ramos de Π. Logo, por $P(\Pi_2)$, para todas as fórmulas de Π_2 existe um ramo de Π que as contém. Temos também que todos os ramos não principais de Π_1 são ramos de Π e que, se β é um ramo principal de Π_1, então β, B é um ramo principal de Π. Logo, por $P(\Pi_1)$, todas as fórmulas de Π_1 (bem como a conclusão de Π) pertencem a um ramo de Π. □

Proposição 16 (Forma das derivações normais)**.** *Se Π é uma derivação normal em $N_{c'}$ e $\beta = A_1, \cdots, A_n$ é um ramo de Π, então existe uma fórmula A_i, chamada* fórmula mínima *de β, a qual separa β em duas partes (possivelmente vazias), designadas por "parte das eliminações" (parte E) e por "parte das introduções" (parte I) de β, com as seguintes propriedades:*

i. *Cada A_j pertencente à parte E (i.e, $j < i$) é uma premissa principal de uma aplicação de uma regra de eliminação e A_{j+1} é subfórmula de A_j;*

ii. *A_i (desde que $i \neq n$) é uma premissa de uma aplicação de uma regra de introdução ou da regra RAA;*

iii. *Cada A_j pertencente à parte I, exceptuando a última ocorrência (i.e, $i < j < n$), é premissa de uma aplicação de uma regra de introdução e é uma subfórmula de A_{j+1}.*

Demonstração. Notemos que todas as fórmulas de β que são premissas principais de alguma regra de eliminação precedem todas as fórmulas de β que são premissas de alguma regra de introdução ou da regra de RAA, pois, caso contrário, existiria uma fórmula A_k de β que seria premissa principal de uma regra de eliminação precedida de uma premissa de uma regra de introdução ou da regra de RAA e, consequentemente, A_k seria fórmula maximal, o que contradiz o facto da derivação Π ser normal.

Seja então A_i a primeira fórmula de β que é premissa de uma regra de introdução ou da regra de RAA, ou, caso não exista uma fórmula nestas condições, tomemos $A_i = A_n$ (A_i é a fórmula mínima enunciada na proposição). Demonstremos i., ii. e iii.

i. Pelo o que foi dito atrás, A_j ($j < i$) é premissa principal de alguma regra de eliminação e A_{j+1} é conclusão da aplicação de uma regra de eliminação, cuja premissa principal é A_j, assim A_{j+1} é subfórmula de A_j.

ii. Por definição de A_i.

iii. Como já foi referido anteriormente, cada A_j ($i < j < n$) é premissa de uma introdução ou de uma aplicação da regra RAA. Mas nenhum desses A_j é $\perp$ e portanto premissa da regra RAA. De facto, A_{i+1} (caso $i + 1 < n$) não é $\perp$ (se A_i é premissa da regra RAA isto segue da restrição à regra RAA). Logo A_{i+1} é premissa de uma introdução e A_{i+2} não é $\perp$, assim sucessivamente. Portanto A_{j+1} $(j < i < n)$ é conclusão da aplicação de uma regra de introdução, da qual A_j é premissa; assim A_j é subfórmula de A_{j+1}. □

Corolário 2 (Princípio da subfórmula)**.** *Toda a ocorrência de uma fórmula numa derivação normal de A a partir de Γ, em $N_{c'}$, é subfórmula de A ou subfórmula de alguma fórmula de Γ, exceptuando-se as hipóteses canceladas pela aplicação da regra RAA e as ocorrências de $\perp$ que estejam imediatamente abaixo de tais hipóteses.*

Demonstração. Seja Π uma derivação normal, em $N_{c'}$, de A a partir de Γ. Dada uma ocorrência de fórmula B em Π, definimos

$$PSF(B, A, \Gamma) \text{ sse } \neg\phi(B) \Rightarrow PSF!(B, A, \Gamma)$$

onde $\phi(B)$ se e só se B é uma hipótese cancelada pela aplicação da regra RAA ou B é uma ocorrência de $\perp$ imediatamente abaixo de uma dessas hipóteses; e $PSF!(B, A, \Gamma)$ se e só se B é subfórmula de A ou de alguma fórmula de Γ.

Consideremos a seguinte afirmação

$$\forall_{p\in\mathbb{N}_0}\forall_{\beta\in Ramos(\Pi)}\ (\,ordem(\beta) = p \Rightarrow \forall_{B\in\beta}\ PSF(B, A, \Gamma)) \quad . \quad (*)$$

Provado $(*)$, o corolário fica demonstrado, pois toda a ocorrência de fórmula em Π pertence a um ramo β de Π (Lema 5). $(*)$ é demonstrado por indução completa sobre p.

Sejam $p \in \mathbb{N}_0$, $\beta = A_1, \cdots, A_n$ um ramo de ordem p de Π e A_i a fórmula mínima de β. Queremos demonstrar que, para todo j, com $1 \leq j \leq n$, $PSF(A_j, A, \Gamma)$.

Caso $i < j \leq n$. Comecemos por analisar A_n. Se $A_n = A$ então $PSF!(A_n, A, \Gamma)$, pois A é subfórmula dela própria. Se $A_n \neq A$ então A_n é premissa menor de uma inferência $E_\supset$ (por definição de ramo), cuja premissa principal é da forma $A_n \supset C$, a qual pertence a um ramo β' de ordem $p-1$. Assim, por hipótese de indução, temos $PSF(A_n \supset C, A, \Gamma)$. Há dois casos a considerar (visto que $(A_n \supset C) \neq \perp$):

(i) Se $(A_n \supset C)$ não é cancelada por nenhuma aplicação da regra RAA então $PSF!(A_n \supset C, A, \Gamma)$ e, visto que A_n é subfórmula de $A_n \supset C$, também temos $PSF!(A_n, A, \Gamma)$.

(ii) Se $(A_n \supset C)$ é cancelada por alguma aplicação da regra RAA então $C = \perp$ e Π tem a seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{[A_n \supset \perp]^m \qquad \begin{matrix}\Pi_1\\ A_n\end{matrix}}{\perp}\,E_\supset}{\begin{matrix}A_n\\ \Pi_2\\ A\end{matrix}}\,RAA^m$$

A ocorrência A_n que é conclusão da aplicação da regra RAA etiquetada com m pertence ao ramo β'; consequentemente, por hipótese de indução, temos $PSF!(A_n, A, \Gamma)$.

Portanto, em todos os casos, $PSF!(A_n, A, \Gamma)$. Então, como cada A_j $(i < j < n)$ é subfórmula de A_n, pela Proposição 16 (iii.), podemos concluir que $PSF!(A_j, A, \Gamma)$ para todo $i < j \leq n$.

Caso $1 \leq j \leq i$. Temos dois sub-casos.

a) A_1 não é cancelada por nenhuma aplicação da regra RAA. Ou $A_1 \in \Gamma$ e, consequentemente, $PSF!(A_1, A, \Gamma)$; ou A_1 é cancelada por uma aplicação da regra $I_\supset$, cuja conclusão é da forma $A_1 \supset C$. Neste caso, se essa conclusão pertence à parte I do ramo β, já vimos acima que $PSF!(A_1 \supset C, A, \Gamma)$, donde $PSF!(A_1, A, \Gamma)$; se essa conclusão pertence à parte I de algum ramo de ordem menor que p, então, por hipótese de indução, $PSF!(A_1 \supset C, A, \Gamma)$, donde $PSF!(A_1, A, \Gamma)$.

Portanto, em todos os casos, $PSF!(A_1, A, \Gamma)$. Então, como cada A_j $(1 \leq j \leq i)$ é subfórmula de A_1, pela Proposição 16 (i.), podemos concluir que $PSF!(A_j, A, \Gamma)$, para todo $1 \leq j \leq i$.

b) A_1 é cancelada por alguma aplicação da regra RAA. Ou A_1 é premissa de uma regra de introdução e, assim, $A_1 = A_i$; ou A_1 é a premissa principal de uma aplicação da regra de $E_\supset$ e, assim, $A_2 = A_i = \perp$; ou A_1 é a premissa menor de uma aplicação da regra de $E_\supset$ e, assim, $A_1 = A_i = A_n$. Em todos os casos temos $\phi(A_j)$ para todo $1 \leq j \leq i$. Logo $PSF(A_j, A, \Gamma)$, para todo $1 \leq j \leq i$.

□

Terminamos com uma consequência mais simples, mas não menos importante, da Proposição 16.

Corolário 3 (Consistência)**.** *$\perp$ não é teorema de $N_{c'}$.*

Demonstração. Suponhamos que existe uma derivação normal Π, em $N_{c'}$, de $\perp$ a partir de $\emptyset$. Seja β um ramo principal de Π. Pela Proposição 16 (iii.), a parte I de β é vazia, pelo que a primeira ocorrência de β é uma hipótese não cancelada, o que contradiz o facto de Π ser uma derivação a partir de $\emptyset$. □

Capítulo 5

Normalização em Lógica Intuicionista

As origens da Lógica Intuicionista remontam ao início do século passado e ao trabalho do matemático L. Brouwer. A Lógica Intuicionista, em oposição à Lógica Clássica, caracteriza-se por rejeitar o *princípio do terceiro excluído*, o qual afirma que qualquer proposição ou é verdadeira ou é falsa e, portanto, que a fórmula $A \vee \neg A$ é válida. Brouwer rejeita categoricamente este princípio pois, segundo ele, uma proposição só pode ser considerada verdadeira se for possível estabelecer uma demonstração da mesma. Em Lógica Clássica existe uma demonstração do princípio do terceiro excluído (Exemplo 2 c)), portanto o que está em causa são certos princípios de demonstração da Lógica Clássica. Tudo se resume à rejeição da regra RAA, a qual é substituída pela regra $\perp_i$. Veremos que, sem a regra RAA, é impossível demonstrar $A \vee \neg A$. As propriedades da disjunção e da existência são outra característica da Lógica Intuicionista. A primeira propriedade diz que, para termos uma demonstração de uma disjunção, temos de indicar qual das componentes da disjunção é verdadeira (isso não se passa na demonstração clássica de $A \vee \neg A$); a segunda propriedade diz que uma demonstração de uma quantificação existencial tem de construir o objecto cuja existência se afirma. Outra consequência da rejeição da regra RAA é o facto de certas equivalências lógicas válidas em Lógica Clássica não o serem em Lógica Intuicionista. Além da equivalência lógica entre A e $\neg\neg A$, temos as equivalências lógicas que estabelecem, em Lógica Clássica, a interdefinibilidade das operações lógicas, como, por exemplo, a equivalência lógica entre $\exists x\, A$ e $\neg(\forall x\, \neg A)$. Esta interdefinibilidade permitiu-nos simplificar o tratamento da normalização em Lógica Clássica, pois foram deixadas de parte as operações $\vee$ e $\exists$. No tratamento da normalização em Lógica Intuicionista, todas as operações voltam a ser primitivas. Dada a especificidade das regras de eliminação para $\vee$ e $\exists$, é possível que certas derivações apresentem sequências de ocorrências da mesma fórmula. Algumas destas sequências desempenham em Lógica Intuicionista o mesmo papel que as fórmulas maximais em Lógica Clássica.

5.1 Teorema da Normalização

Definição 37 (Segmento)**.** *Dada uma derivação* Π *em* N_i*, uma sequência* $A_1, \cdots, A_n$ *de ocorrências de fórmulas consecutivas de uma linha de* Π *é um* segmento*, se:*

a) A_1 *não é consequência de uma inferência* $E_\vee$ *ou* $E_\exists$*;*

b) A_i *(para todo* $i < n$*) é premissa menor de uma inferência* $E_\vee$ *ou* $E_\exists$*;*

c) A_n *não é premissa menor de uma inferência* $E_\vee$ *ou* $E_\exists$*.*

Usaremos as letras σ, τ (possivelmente indexadas) como meta-variáveis para segmentos.

Notemos que, segundo esta definição, uma ocorrência de fórmula que não seja consequência ou premissa menor de uma inferência $E_\vee$ ou $E_\exists$ é um segmento (a condição b) é vacuosamente verdadeira) e notemos também que todas as ocorrências de fórmulas de um segmento são ocorrências da mesma fórmula, que designamos a *fórmula do segmento.*

Diremos que um segmento σ *está acima* de um segmento τ, se o segmento σ pertence à sub-derivação que tem como conclusão a primeira ocorrência de τ. Diremos que um segmento σ *está abaixo* de um segmento τ, se o segmento τ está acima do segmento σ.

Definição 38 (Grau e comprimento de um segmento)**.** *Seja* σ *um segmento. O* grau de σ*, que denotamos por grau*(σ)*, é igual ao grau da fórmula de* σ*. O* comprimento de σ*, que denotamos por comp*(σ)*, é igual ao número de ocorrências de fórmulas em* σ*.*

Exemplo 5. *Consideremos a seguinte derivação* Π *em* N_i

$$\Pi = \dfrac{A \vee (B \vee C) \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^1}{A \vee B}\, I_{\vee 1}}{(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) \vee \boldsymbol{C}^{(a)}}\, I_\vee \qquad \dfrac{[B \vee C]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[B]^2}{A \vee B}\, I_{\vee 2}}{(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) \vee \boldsymbol{C}^{(b)}}\, I_\vee \qquad \dfrac{[C]^2}{(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) \vee \boldsymbol{C}^{(c)}}\, I_{\vee 2}}{(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) \vee \boldsymbol{C}^{(d)}}\, {E_\vee}^2}{(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) \vee \boldsymbol{C}^{(e)}}\, {E_\vee}^1 .$$

Em Π *temos que:*

- (a)*,* (e) *é um segmento de comprimento* 2*;*
- (b)*,* (d)*,* (e) *é um segmento de comprimento* 3*;*
- (c)*,* (d)*,* (e) *é um segmento de comprimento* 3*;*
- *as restantes ocorrências de fórmulas são segmentos de comprimento* 1*.*

Definição 39 (Segmento maximal)**.** *Um segmento* $\sigma = A_1, \cdots, A_n$ *numa derivação diz-se* segmento maximal *se:*

a) A_1 *é consequência de uma aplicação da regra de inferência* $\bot_i$ *ou de uma regra de introdução;*

b) A_n *é premissa principal de uma aplicação de uma regra de eliminação.*

Observemos que uma fórmula maximal (Definição 32) é um caso particular de um segmento maximal e que as ocorrências de fórmulas que ocorrem num segmento maximal são ocorrências de uma mesma fórmula não atómica.

No Exemplo 5 não existem segmentos maximais. Na derivação (2.4), da página 24, há um segmento maximal de comprimento 2.

Exemplo 6. *Na derivação*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(A\wedge B)\vee(A\wedge C) \qquad \dfrac{\dfrac{[A\wedge B]^2}{A}E_{\wedge 1} \quad [D]^1}{\boldsymbol{A\wedge D}^{(a)}}I_\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{[A\wedge C]^2}{A}E_{\wedge 1} \quad [D]^1}{\boldsymbol{A\wedge D}^{(b)}}I_\wedge}{\boldsymbol{A\wedge D}^{(c)}}E_\vee{}^2}{A}E_{\wedge 1}}{D\supset A}I_\supset{}^1 \quad ,$$

os segmentos $(a),(c)$ *e* $(b),(c)$ *são maximais.*

Definição 40 (Inferências redundantes)**.** *Numa derivação, se uma inferência* $E_\vee$ *ou* $E_\exists$ *não cancela qualquer hipótese da sub-derivação determinada pela premissa menor (no caso* $E_\exists$*) ou não cancela qualquer hipótese de, pelo menos, uma das sub-derivações determinadas pelas premissas menores (no caso* $E_\vee$*) , então essa inferência é dita* redundante*.*

Observemos que, devido ao cancelamento completo de hipóteses adoptado neste trabalho, dizer que uma aplicação de uma inferência $E_\vee$ ou $E_\exists$ é redundante equivale a dizer que a fórmula a cancelar não é hipótese na sub-derivação determinada pela premissa menor (caso $E_\exists$) ou em pelo menos uma das sub-derivações determinadas pelas premissas menores (caso $E_\vee$).

Inferências redundantes numa derivação podem ser facilmente removidas usando as seguintes transformações:

Caso $E_\vee$.

$$\begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A\vee B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A]\\ \Pi_2\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \Pi_3\\ C\end{array}}{C}E_\vee \\ \Pi_4 \\ D \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c}\Pi_i\\ C\\ \Pi_4\\ D\end{array} \; ,$$

com $i\in\{2,3\}$ e supondo que a regra $E_\vee$ não cancela qualquer hipótese em Π_i.

Caso $E_\exists$.

$$\dfrac{\begin{array}{cc} & [A[y/x]] \\ \Pi_1 & \Pi_2 \\ \exists_x A & B \end{array}}{\begin{array}{c} B \\ \Pi_3 \\ C \end{array}} E_\exists \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{array}{c} \Pi_2 \\ B \\ \Pi_3 \\ C \end{array}$$

Notemos ainda que as transformações definidas anteriormente produzem derivações com a mesma conclusão e a partir do mesmo conjunto de hipóteses da derivação dada, pela Proposição 2.

Definição 41 (Derivação normal). *Uma derivação em N_i é* normal *se não contém qualquer segmento maximal nem inferências redundantes.*

Notemos que uma derivação normal em $N_{c'}$ também é normal segundo esta definição.

Teorema 3 (Teorema da Normalização). *Se $\Gamma \vdash_{N_i} A$ então existe uma derivação normal, em N_i, de A' a partir de Γ', onde* $A \xrightarrow[\alpha]{*} A'$ e $\Gamma \xrightarrow[\alpha]{*} \Gamma'$.

Demonstração. Dada uma derivação Π em N_i, define-se:

- $g(\Pi) = max\{grau(\sigma) : \sigma$ é um segmento maximal em $\Pi\}$. Caso não existam segmentos maximais em Π, $g(\Pi) = 0$;

- $segmax(\Pi) = \{\sigma : \sigma$ é um segmento maximal em Π e $grau(\sigma) = g(\Pi)\}$;

- $s(\Pi) = \sum_{\sigma \in segmax(\Pi)} comp(\sigma)$. Caso $segmax(\Pi) = \emptyset$, $s(\Pi) = 0$.

Consideremos, dados $g, s \in \mathbb{N}_0$,

$$\Delta(g,s) = \left(\forall_{\Pi \in N_i} : \left(\begin{array}{c} \Gamma \\ \Pi \\ A \end{array} \text{ e } (g(\Pi), s(\Pi)) = (g,s) \Rightarrow \right.\right.$$

$$\left.\left.\Rightarrow \left(\exists_{\Pi' \in N_i} : \begin{array}{c} \Gamma' \\ \Pi' \\ A' \end{array} \text{ e } A \xrightarrow[\alpha]{*} A' \text{ e } \Gamma \xrightarrow[\alpha]{*} \Gamma' \text{ e } \Pi' \text{ é normal}\right)\right)\right) .$$

Mostraremos, por indução na ordem lexicogáfica em $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, que:

$$\forall_{(g,s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} \quad \Delta(g,s) .$$

Suponhamos que Π é uma derivação de A a partir de Γ, em N_i, sem inferências redundantes, e suponhamos que $(g(\Pi), s(\Pi)) = (g,s)$. Pretendemos mostrar que, em N_i, existe uma derivação normal Π' de A' a partir de Γ', onde $A \xrightarrow[\alpha]{*} A'$ e $\Gamma \xrightarrow[\alpha]{*} \Gamma'$.

Se Π é uma derivação normal, então basta tomar $\Pi' = \Pi$. Caso contrário, temos $g > 0$ e $s > 0$. Seja σ um segmento maximal, em Π, tal que $grau(\sigma) = g$ e suponhamos também que (i) não existe nenhum segmento maximal de grau g acima de σ e (ii) não existe nenhum segmento maximal de grau g que esteja acima ou que contenha uma ocorrência de fórmula lateralmente conectada com a última ocorrência de fórmula de σ [1].

1º caso. Se σ é um segmento de comprimento 1, ou seja, se σ é uma fórmula maximal então σ pode ser removido de acordo com as transformações apresentadas abaixo, dependendo da introdução da qual σ é consequência.

Caso $I_\wedge$, $I_\supset$ ou $I_\forall$. Usam-se as transformações definidas no Capítulo 4 aquando da demonstração do Teorema 2 (Teorema da Normalização em Lógica Clássica).

Caso$\perp_i$. Usemos as transformações seguintes para remover a fórmula maximal $\sigma = B$. Seja E a eliminação da qual σ é a premissa principal.

(i) E tem uma premissa.

$$\Pi = \begin{array}{c} \Pi_1 \\ \dfrac{\dfrac{\perp}{B}\perp_i}{C}E \\ \Pi_2 \\ A \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \Pi'' = \begin{array}{c} \Pi_1 \\ \dfrac{\perp}{C}\perp_i \\ \Pi_2 \\ A \end{array} \quad .$$

(ii) $E = E_\supset$ e $B = C \supset D$.

$$\Pi = \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \\ \perp\end{array}}{C \supset D}\perp_i \quad \begin{array}{c}\Pi_2 \\ C\end{array}}{D}E \\ \Pi_3 \\ A \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \Pi'' = \begin{array}{c} \Pi_1 \\ \dfrac{\perp}{D}\perp_i \\ \Pi_3 \\ A \end{array} \quad .$$

[1] Demonstra-se a existência de tal segmento σ da seguinte forma:

- Seja $\mathscr{S}_\Pi = \{\tau : \tau$ é segmento maximal em Π de grau máximo e τ satisfaz (i) $\}$;

- Dados σ_1, σ_2 em $\mathscr{S}_\Pi$, dizemos que σ_2 **está à direita** de σ_1 quando uma das ocorrências de fórmula de σ_2, ou uma das ocorrências de fórmula de um prolongamento suficientemente longo em direcção à conclusão de σ_2, é uma fórmula lateralmente conectada à direita com a última ocorrência de fórmula de σ_1 ou de um prolongamento em direcção à conclusão de σ_1;

- Se σ_2 está à direita de σ_1 então $\sigma_1 \neq \sigma_2$ (i.e, a relação "estar à direita" é irreflexiva em $\mathscr{S}_\Pi$);

- A relação "estar à direita" é transitiva em $\mathscr{S}_\Pi$;

- Se σ em $\mathscr{S}_\Pi$ não satisfaz (ii) então existe, em $\mathscr{S}_\Pi$, σ' à direita de σ;

- Iremos obter em $\mathscr{S}_\Pi$ um segmento que satisfaça (ii) do seguinte modo. Escolha-se um segmento em $\mathscr{S}_\Pi$; se o segmento escolhido não satisfaz (ii), então escolhe-se outro à direita do anterior; e assim sucessivamente. A irreflexibilidade e a transitividade garantem que os sucessivos segmentos escolhidos saõ todos diferentes. Como $\mathscr{S}_\Pi$ é finito, é garantido que vamos escolher um segmento que satisfaça (ii) .

(iii) $E = E_\exists$ e $B = \exists x\, A$.

$$\Pi = \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \bot\end{array}}{\exists x\, A}\,\bot_i \qquad \begin{array}{c}[A[y/x]]\\ \Pi_2\\ C\end{array}}{C}\,E \\ \Pi_3 \\ A\end{array} \quad\rightsquigarrow\quad \Pi'' = \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \bot\end{array}}{(A[y/x])}\,\bot_i \\ \Pi_2' \\ C \\ \Pi_3 \\ A\end{array}$$

onde Π_2' é uma derivação tal que $\Pi_2 \xrightarrow[\xi]{*} \Pi_2'$ e $A[y/x]$ é substituível por Π_1 em Π_2'.

(iv) $E = E_\vee$ e $B = A_1 \vee A_2$.

$$\Pi = \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \bot\end{array}}{A_1 \vee A_2}\,\bot_i \qquad \begin{array}{c}[A_1]\\ \Pi_2\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_2]\\ \Pi_3\\ C\end{array}}{C}\,E \\ \Pi_4 \\ A\end{array} \quad\rightsquigarrow\quad \Pi'' = \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \bot\end{array}}{(A_i)}\,\bot_i \\ \Pi_{i+1}' \\ C \\ \Pi_4 \\ A\end{array}$$

onde Π_{i+1}' é uma derivação tal que $\Pi_{i+1} \xrightarrow[\xi]{*} \Pi_{i+1}'$ e A_i é substituível por Π_1 em Π_{i+1}'.

Nos vários casos anteriores, é assumido que a consequência das inferências $\bot_i$, explicitadas em Π'', não é $\bot$. Caso contrário, bastaria simplesmente omitir estas inferências.

Caso $I_{\vee_1}$.

$$\Pi = \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ B\end{array}}{B \vee C}\,I_{\vee_1} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ \Pi_2\\ D\end{array} \quad \begin{array}{c}[C]\\ \Pi_3\\ D\end{array}}{D}\,E_\vee \\ \Pi_4 \\ A\end{array} \quad\rightsquigarrow\quad \Pi'' = \begin{array}{c} \Pi_1 \\ (B) \\ \Pi_2' \\ D \\ \Pi_4 \\ A\end{array} \quad ,$$

onde Π_2' é uma derivação tal que $\Pi_2 \xrightarrow[\xi]{*} \Pi_2'$ e B é substituível por Π_1 em Π_2'.

Caso $I_{\vee_2}$. Análogo ao caso $I_{\vee_1}$.

Caso $I_\exists$.

$$\Pi = \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ B[t/x]\end{array}}{\exists x\, B}\,I_\exists \qquad \begin{array}{c}[B[y/x]]\\ \Pi_2\\ C\end{array}}{C}\,E_\exists \\ \Pi_3 \\ A\end{array} \quad\rightsquigarrow\quad \Pi'' = \begin{array}{c} \Pi_1 \\ (B[t/x]) \\ \Pi_2''[t/y] \\ C' \\ \Pi_3' \\ A'\end{array} \quad ,$$

onde Π_2'' e Π_3' são derivações tais que:

(i) $\Pi_2' \xrightarrow[\xi]{*} \Pi_2''$ e $B[t/x]$ é substituível por Π_1 em Π_2'', onde Π_2' é tal que $\Pi_2 \xrightarrow[\alpha]{*} \Pi_2'$ e y é substituível por t em Π_2' e $C' = C[t/y]$ é a conclusão de Π_2';

(ii) Π_3' é obtida de Π_3 efectuando as mesmas mudanças de variáveis ligadas que foram efectuadas na obtenção de Π_2' a partir de Π_2.

Observemos que, em todos os casos, produzimos, em N_i, uma derivação de A'' a partir de Γ'', onde $A \xrightarrow[\alpha]{*} A''$ e $\Gamma \xrightarrow[\alpha]{*} \Gamma''$. (A justificação é análoga à apresentada aquando da demonstração do Teorema 2).

2º caso. Se o comprimento do segmento σ é superior a 1, reduzimos o seu comprimento aplicando as transformações definidas seguidamente. Seja F a fórmula de σ. Tratamos apenas o caso em que a eliminação E de que a última ocorrência de F em σ é premissa principal tem exactamente uma premissa menor G (os casos em que E tem zero ou duas premissas menores são análogos). Temos dois casos.

1. A última ocorrência da fórmula F em σ é consequência de uma inferência $E_\vee$.

$$\Pi = \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ B\vee C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \Pi_2\\ F\end{array} \quad \begin{array}{c}[C]\\ \Pi_3\\ F\end{array}}{F}\,E_\vee \qquad \begin{array}{c}\Pi_4\\ G\end{array}}{D}\,E \\ \Pi_5 \\ A \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \Pi'' = \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ B\vee C\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[B]\\ \Pi_2\\ F\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi_4\\ G\end{array}}{D}\,E \quad \dfrac{\begin{array}{c}[C]\\ \Pi_3\\ F\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi_4\\ G\end{array}}{D}\,E}{D}\,E_\vee \\ \Pi_5 \\ A \end{array} .$$

Π' é uma derivação de A a partir de Γ em N_i; basta ter em atenção que, apesar da inferência E em Π ter sido substituída em Π' por duas inferências da mesma forma cujas premissas principais agora dependem das ocorrências de B e de C, respectivamente, essa situação não acresce qualquer dificuldade, pois, na eventualidade de E ser $E_\exists$, as restrições à aplicabilidade não dizem respeito à derivação da premissa principal de E.

2. A última ocorrência da fórmula F em σ é consequência de uma inferência $E_\exists$.

$$\Pi = \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \exists x\, B\end{array} \quad \begin{array}{c}[B[y/x]]\\ \Pi_2\\ F\end{array}}{F}\,E_\exists \qquad \begin{array}{c}\Pi_3\\ G\end{array}}{D}\,E \\ \Pi_4 \\ A \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \Pi'' = \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \exists x\, B\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[B[z/x]]\\ \Pi_2'\\ F\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi_3\\ G\end{array}}{D}\,E}{D}\,E_\exists \\ \Pi_4 \\ A \end{array} ,$$

onde z é nova em Π_3 e em D e $\Pi_2' = \Pi_2[z/y]$. Notemos que, nesta transformação, implicitamente, começamos por efectuar uma mudança de variável crítica na sub-derivação determinada pela conclusão da inferência $E_\exists$ exibida em Π. Esta mudança de variável garante que em Π'' a inferência $E_\exists$ é válida. Esta observação, juntamente com uma observação análoga à do caso anterior, justifica que Π'' é uma derivação de A a partir de Γ em N_i.

Quer no 1ºcaso, quer no 2ºcaso, realizando uma análise análoga à efectuada aquando da demonstração do Teorema 2 e atendendo que o segmento escolhido satisfaz as condições (i) e (ii), mostra-se que $(g(\Pi''), s(\Pi'')) < (g, s)$. Deste modo, por hipótese de indução, temos

$\Delta\,(g(\Pi''), s(\Pi''))$, ou seja, existe uma derivação normal Π' de A' a partir de Γ', em N_i e $A'' \xrightarrow[\alpha]{*} A'$ e $\Gamma'' \xrightarrow[\alpha]{*} \Gamma'$. De $A \xrightarrow[\alpha]{*} A'' \xrightarrow[\alpha]{*} A'$ segue $A \xrightarrow[\alpha]{*} A'$ e analogamente $\Gamma \xrightarrow[\alpha]{*} \Gamma'$. □

5.2 Corolários do Teorema da Normalização

Há uma certa analogia entre os estudos da forma das derivações normais em Lógica Clássica e em Lógica Intuicionista, sendo até possível estender alguns conceitos e proposições apresentados no capítulo anterior.

Atendendo a que a conclusão de uma aplicação de uma inferência $E_\vee$ ou $E_\exists$ não é necessariamente uma subfórmula da premissa principal dessa inferência, e com o intuito de conservar válido o princípio da subfórmula, generaliza-se a noção de ramo de uma derivação, generalização essa que não passa apenas por considerar segmentos como unidades em vez das ocorrências de fórmulas.

Definição 42 (Caminho)**.** *Uma sequência de fórmulas* $A_1, \cdots, A_n$ *é um* caminho *numa derivação* Π*, em* N_i*, se e só se:*

a) A_1 *é uma folha de* Π *que não é cancelada por uma inferência* $E_\vee$ *ou* $E_\exists$*;*

b) *Para cada* $i < n$*,* A_i *não é premissa menor de uma inferência* $E_\supset$ *e:*

- **i.** A_i *não é premissa principal de uma inferência* $E_\vee$ *ou* $E_\exists$ *e* A_{i+1} *é a ocorrência de fórmula imediatamente abaixo de* A_i*;*
  ou
- **ii.** A_i *é premissa principal de uma aplicação* α *de uma inferência* $E_\vee$ *ou* $E_\exists$ *e* A_{i+1} *é uma hipótese cancelada pela aplicação* α*;*

c) A_n *é a premissa menor de uma inferência* $E_\supset$*; ou conclusão de* Π*; ou premissa principal de uma aplicação* α *de uma inferência* $E_\vee$ *ou* $E_\exists$ *tal que* α *não cancela qualquer hipótese.*

Se A_n *é a conclusão de* Π *o caminho diz-se* principal.

Usaremos a letra δ (possivelmente indexada) como meta-variável para caminhos e denotamos por $Caminhos(\Pi)$ o conjunto $\{\delta : \delta \text{ é um caminho de } \Pi\}$.

Observemos que, segundo esta definição, numa derivação normal, a última ocorrência de fórmula de um caminho é sempre uma premissa menor de uma aplicação da regra $E_\supset$ ou a própria conclusão da derivação.

Observemos também que um caminho pode ser dividido em vários segmentos consecutivos (compostos, muitas das vezes, por uma única ocorrência de fórmula). Assim, dado um caminho δ, ele pode ser visto como uma concatenação de uma sequência de segmentos, podendo ser escrito da seguinte forma

$$A_{1,1}, A_{1,2}, \cdots, A_{1,n_1}, A_{2,1}, A_{2,2}, \cdots, A_{2,n_2}, \cdots, A_{k,1}, A_{k,2}, \cdots, A_{k,n_k};$$

onde para cada $i \leq k$, $\quad A_{i,1}, \cdots, A_{i,n_i}$ é um segmento σ_i de δ. A sequência $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ denomina-se de *sequência de segmentos de* δ.

O exemplo seguinte ilustra vários caminhos de uma dada derivação.

Exemplo 7. *Consideremos em* N_i *a derivação:*

$$\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}\forall_x\exists_y A}{{}^{(2)}\exists_y A[w/x]}E_\forall \qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(3)}[(A[w/x])[z/y]]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(5)}\forall_x\forall_y(A\supset B)}{{}^{(6)}\forall_y(A\supset B)[w/x]}E_\forall}{{}^{(7)}((A\supset B)[w/x])[z/y]}E_\forall \qquad {}^{(4)}[(A[w/x])[z/y]]^1}{{}^{(8)}(B[w/x])[z/y]}E_\supset}{{}^{(9)}((A\wedge B)[w/x])[z/y]}I_\wedge}{{}^{(10)}\exists_y(A\wedge B)[w/x]}I_\exists}{\dfrac{{}^{(11)}\exists_y(A\wedge B)[w/x]}{{}^{(12)}\forall_x\exists_y(A\wedge B)}I_\forall}E_\exists{}^1$$

As sequências indicadas a seguir ilustram os três caminhos presentes na derivação:

- $\delta_1 : (1), (2), (3), (9), (10), (11), (12)$ *;*

- $\delta_2 : (1), (2), (4)$*;*

- $\delta_3 : (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12)$.

A sequência de segmentos do caminho δ_1 *é:* $\underbrace{(1)}_{\sigma_1}, \underbrace{(2)}_{\sigma_2}, \underbrace{(3)}_{\sigma_4}, \underbrace{(9)}_{\sigma_4}, \underbrace{(10), (11)}_{\sigma_5}, \underbrace{(12)}_{\sigma_6}$.

Os caminhos δ_1 *e* δ_3 *são caminhos principais de* Π.

Para descrever a forma das derivações normais precisamos de estender alguma terminologia a segmentos.

Definição 43. *Um segmento* σ *de fórmula* F *de uma derivação* Π *em* N_i*, diz-se:*

a) *um* segmento do topo *se a primeira ocorrência da fórmula* F *de* σ *é uma folha;*

b) *um* segmento final *se a última ocorrência da fórmula* F *de* σ *é a conclusão de* Π*;*

c) *uma* consequência de uma aplicação de uma regra de inferência R *se a primeira ocorrência da fórmula* F *de* σ *é a consequência da inferência* R*;*

d) *uma* premisa (principal ou menor) de uma aplicação de uma regra de inferência R *se a última ocorrência da fórmula* F *de* σ *é premissa (principal ou menor) da inferência* R.

Proposição 17 (Forma das derivações normais)**.** *Seja* Π *uma derivação normal em* N_i *e* δ *um caminho de* Π*, e seja* $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ *a sequência de segmentos de* δ*. Então existe um segmento* σ_i*, chamado* segmento mínimo *de* δ*, o qual separa* δ *em duas partes (possivelmente vazias), designadas por "parte de eliminações" (parte E) e por "parte de introduções" (parte I) de* δ*, com as seguintes propriedades:*

i. *Cada* σ_j *pertencente à parte E (i.e,* $j < i$*) é premissa principal de uma aplicação de uma regra de eliminação e a fórmula que ocorre em* σ_{j+1} *é subfórmula da que ocorre em* σ_j*;*

ii. σ_i *(desde que* $i \neq n$*) é uma premissa de uma aplicação de uma regra de introdução ou da regra* $\perp_i$*;*

iii. *Cada* σ_j *pertencente à parte I, exceptuando-se o último, (i.e,* $i < j < n$*) é premissa de uma aplicação de uma regra de introdução e a fórmula que ocorre em* σ_j *é subfórmula da que ocorre em* σ_{j+1}*.*

Demonstração. Demonstração análoga à demonstração da Proposição 16. □

Definição 44 (Ordem de um caminho)**.** *Dado um caminho* δ *de uma derivação sem inferências redundantes, define-se a sua* ordem*, que denotamos por* $ordem(\delta)$*, do seguinte modo:*

a) *todo o caminho principal tem ordem zero*;

b) *um caminho que termina numa premissa menor de uma aplicação* $E_\supset$ *tem ordem* $p+1$*, se a premissa principal dessa aplicação pertence a um caminho de ordem* p*.*

Lema 6 (Existência de um caminho)**.** *Numa derivação normal em* N_i*, cada ocorrência de fórmula pertence a um caminho.*

Demonstração. Por indução em Π, mostremos $P(\Pi)$, onde $P(\Pi)$ sse, para toda a ocorrência A, em Π, existe $\delta \in Caminhos(\Pi)$ tal que δ contém A.

Relativamente ao Lema 5, as novidades são os casos relativos às regras $E_\vee$ e $E_\exists$. Como estes dois casos são análogos, apresentamos apenas um.

Caso $E_\vee$**.** Seja

$$\Pi = \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A_1 \vee A_2\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_1]\\ \Pi_2\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_2]\\ \Pi_3\\ C\end{array}}{C}\, E_\vee \quad ,$$

suponhamos $P(\Pi_1)$, $P(\Pi_2)$ e $P(\Pi_3)$ e mostremos $P(\Pi)$.

Seja δ_1 um caminho de Π_1 que termina na conclusão de Π_1. Seja δ_2 um caminho de Π_2 que comece na hipótese A_1 (a existência desta hipótese é garantida porque Π não tem inferências redundantes). Seja δ_2' igual a δ_2, caso δ_2 não termine na conclusão de Π_2 ; caso contrário, δ_2' é o prolongamento de δ_2 com a conclusão de Π. Seja δ_3 um caminho de Π_3 que termina na conclusão de Π_3. Seja δ_3' igual a δ_3, caso δ_3 não comece numa hipótese A_2; caso contrário, δ_3' é δ_1 seguido de δ_3.

Seja A uma ocorrência em Π. Temos quatro casos. (i) A é ocorrência em Π_1. Seja δ um caminho em Π_1 que contém A. Um caminho de Π que contém A é δ, eventualmente seguido de δ_2', caso δ termine na conclusão de Π_1. (ii) A é ocorrência em Π_2. Seja δ um caminho de Π_2 que contém A. Então um caminho de Π que contém A é δ, eventualmente antecedido de δ_1 (caso δ comece numa hipótese A_1), e eventualmente prolongado pela conclusão de Π (caso δ termine na conclusão de Π_2). (iii) A é ocorrência em Π_3. Análogo ao caso anterior. (iv) A é conclusão de Π. Um caminho de Π que contém A é δ_3' prolongado com a conclusão de Π. □

O princípio da subfórmula é mais elegante em Lógica Intuicionista que em Lógica Clássica.

Corolário 4 (Princípio da subfórmula)**.** *Cada ocorrência de fórmula numa derivação normal de A a partir de Γ, em N_i, é subfórmula de A ou subfórmula de alguma fórmula de Γ.*

Demonstração. Demonstração análoga à demonstração do Corolário 2, usando o Lema 6 em vez do Lema 5. Note-se que agora a demonstração é por indução sobre a ordem de um caminho, e $PSF(B, A, \Gamma)$ significa que a ocorrência B é subfórmula de A ou de alguma fórmula de Γ (pois não há inferências RAA na derivação). □

Corolário 5 (Teorema da separação)**.** *Se Π é uma derivação normal de A a partir de Γ, em N_i, então as únicas regras de inferência que ocorrem em Π são as regras de inferência relativas aos símbolos lógicos que ocorrem na fórmula A ou nalguma fórmula de Γ.*

Demonstração. Imediata pelo Corolário 4, e porque as regras de inferência têm a seguinte propriedade: se a regra é relativa a um determinado símbolo lógico, então esse símbolo lógico ocorre numa das premissas ou na consequência da regra. □

Corolário 6 (Consistência)**.** *$\perp$ não é teorema de N_i.*

Demonstração. Demonstração análoga à do Corolário 3, substituindo ramo por caminho e utilizando a Proposição 17 em vez da Proposição 16. □

Corolário 7 (Propriedade da disjunção e do quantificador existencial)**.**

i. *Se $\vdash A \vee B$ então $\vdash A$ ou $\vdash B$.*

ii. *Se $\vdash \exists x A$ então $\vdash A[t/x]$ para algum t.*

Demonstração. Como as demonstrações das propriedades são análogas, demonstraremos apenas a propriedade da disjunção. Seja Π uma derivação normal de $A \vee B$ a partir de $\emptyset$ em N_i e δ um caminho principal de Π. Vejamos que a última inferência de Π é uma aplicação de uma regra de introdução (necessariamente a inferência $I_{\vee_1}$ ou $I_{\vee_2}$), ou seja, que a derivação Π é da forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\end{matrix}}{A \vee B}\, I_{\vee_1} \qquad \text{ou} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ B\end{matrix}}{A \vee B}\, I_{\vee_2} \quad .$$

Se assim for, a demonstração está concluída, pois Π_1 é derivação de A a partir de $\emptyset$ e Π_2 é derivação de B a partir de $\emptyset$.

Se a última inferência de Π é uma aplicação de $\perp_i$, então temos uma derivação de $\perp$ a partir de $\emptyset$ e, consequentemente, N_i não é consistente, o que contradiz o Corolário 6. Se a última inferência de Π é uma aplicação de uma regra de eliminação, então pela Proposição 17, a parte I do caminho δ é vazia e, consequentemente, a primeira ocorrência de δ não é cancelada, o que contradiz o facto de Π ser uma derivação de $A \vee B$ a partir de $\emptyset$. Assim, a última inferência de Π é de facto uma aplicação de uma regra de introdução. $\square$

Esta demonstração diz mais que o Corolário 7. Como uma derivação de $A \vee B$ a partir de $\emptyset$ termina numa introdução, a premissa dessa introdução diz qual das componentes da disjunção é teorema. Análogamente, uma derivação de $\exists x\, A$ a partir de $\emptyset$ termina numa introdução cuja premissa contém um termo t tal que $A[t/x]$ é teorema.

O próximo resultado mostra que $\text{Teo}(N_i) \subset \text{Teo}(N_c)$.

Corolário 8 (Terceiro excluído)**.** *Seja A uma fórmula atómica diferente de $\perp$. Então $A \vee \neg A$ não é teorema de N_i.*

Demonstração. Suponhamos que existe uma derivação normal Π de $A \vee \neg A$ a partir de $\emptyset$, em N_i. Seja δ um caminho principal de Π. Por argumentos análogos à demonstração anterior, conclui-se que a última inferência de Π é uma regra de introdução. Assim, Π tem uma das seguintes formas

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\end{matrix}}{A \vee \neg A}\, I_{\vee_1} \qquad \text{ou} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ \neg A\end{matrix}}{A \vee \neg A}\, I_{\vee_2} \quad .$$

Se a última inferência de Π_1 ou Π_2 é uma aplicação da regra $\perp_i$ ou uma eliminação, a primeira ocorrência de δ é uma hipóteses não cancelada, o que contradiz o facto de Π ser uma derivação a partir de $\emptyset$. Em relação a Π_1, não há mais casos. Em relação a Π_2, resta ainda um caso, que é a última inferência ser uma instância de $I_{\supset}$. Nesse caso, a premissa dessa inferência é uma ocorrência de $\perp$, a qual é a fórmula mínima do caminho δ. A primeira fórmula de δ é, então, cancelada por essa inferência $I_{\supset}$, pelo que é uma ocorrência de A. Como A é atómica, a parte E de δ é vazia. Assim, a fórmula mínima de

δ é a primeira ocorrência do caminho, logo $A = \perp$. Absurdo.

$\square$

Apêndice A

Substituição

Seguem-se as demonstrações de alguns resultados do Capítulo 3.

Proposição 7. *Se* Π *é uma derivação de* A *a partir de* Γ *em* S *e a variável* x *é substituível pelo termo* t *em* Π *então* $\Pi[t/x]$ *é uma derivação de* $A[t/x]$ *a partir de* $\Gamma[t/x] = \{B[t/x] : B \in \Gamma\}$.

Demonstração. Por indução em Π.

Caso base. Π é uma árvore com uma só fórmula A. Consideremos que Π é uma derivação a partir de Γ, ou seja, $A \in \Gamma$. Ora, a derivação $\Pi[t/x]$ é $A[t/x]$. Como $A[t/x] \in \Gamma[t/x]$, $\Pi[t/x]$ é uma derivação de $A[t/x]$ a partir de $\Gamma[t/x]$.

Caso $E_\forall$. Suponhamos que

$$\Pi = \cfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \Pi_1 \\ \forall z\, B\end{array}}{B[t'/z]}\, E_\forall \quad ,$$

com z substituível por t' em B e x substituível por t em Π. Pretendemos mostrar que $\Pi[t/x]$ é uma derivação de $(B[t'/z])\,[t/x]$ a partir de $\Gamma[t/x]$. Ora

$$\Pi[t/x] = \cfrac{\begin{array}{c}\Gamma[t/x] \\ \Pi_1[t/x] \\ (\forall z\, B)\,[t/x]\end{array}}{B([t'/z])[t/x]} \ .$$

Notemos que sendo x substituível por t em Π então x também é substituível por t em Π_1. Por hipótese de indução $\Pi_1[t/x]$ é derivação de $(\forall z\, B)[t/x]$ a partir de $\Gamma[t/x]$. Falta ver que a última inferência de $\Pi[t/x]$ é uma inferência válida da regra $E_\forall$. Temos dois casos.
1. Se $x \neq z$ e $z \notin Var(t)$ então, usando o Lema 2,

$$\Pi[t/x] = \cfrac{\begin{array}{c}\Gamma[t/x] \\ \Pi_1[t/x] \\ \forall z\, B[t/x]\end{array}}{(B[t/x])[t'[t/x]/z]} \ .$$

Em particular, o Lema 2 garante que z é substituível por $t'[t/z]$ em $B[t/x]$, pelo que a última inferência de $\Pi[t/x]$ é uma aplicação válida da regra $E_\forall$.

2. Se $x = z$ ou $z \in Var(t)$. Notemos que, se $z \in Var(t)$, então $x \notin Liv(B)$ (caso contrário x não seria substituível por t em $\forall z\, B$). Então, quer no caso $x = z$, quer no caso $z \in Var(t)$, tem-se $(\forall z\, B)[t/x] = \forall z\, B$. Tem-se também $B[t'/z][t/x] = B[t'[t/x]/z]$, isto porque, em ambos os casos, as únicas ocorrências livres de x em $B[t'/z]$ são as de t'. Logo

$$\begin{array}{c} \Gamma[t/x] \\ \Pi_1[t/x] \end{array}$$
$$\Pi[t/x] = \dfrac{\forall z\, B}{B[t'[t/x]/z]} \; .$$

Falta apenas ver que z é substituível por $t'[t/x]$ em B. Suponhamos que não. Temos então a seguinte situação de captura

$$B = \text{——}\; Qy\,(\;\text{——}\; \overset{t'[t/x]}{\overset{\downarrow}{z}} \;\text{——}\;)\;\text{——} \;,$$

com $y \in Var(t'[t/x])$ e $y \neq z$.

Daqui concluímos que:

- $y \notin Var(t')$, caso contrário z não seria substituível por t' em B;
- $x \in Var(t')$, caso contrário $t'[t/x] = t'$ e z não seria substituível por t' em B [1];
- $y \in Var(t)$, caso contrário não teríamos captura, isto é, teríamos $y \notin Var(t'[t/x])$.

Mas então teríamos uma nova situação de captura

$$B[t'/z] = \text{——}\; Qy(\;\text{——}\; \overset{t}{\overset{\downarrow}{t'}} \;\text{——}\;)\;\text{——} \;,$$

pois $x \in Var(t')$ e $y \in Var(t)$. Isto é, x não seria substituível por t em $B[t'/z]$. Absurdo.

Caso $I_\exists$. Análogo ao caso $E_\forall$.

Caso $I_\forall$. Suponhamos que

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \Pi_1 \end{array}$$
$$\Pi = \dfrac{B[y/z]}{\forall_z B}\,I_\forall \quad ,$$

com:

(i) $y = z$; ou: y não ocorre livre em B e z é subst. por y em B;

(ii) y não ocorre livre nas hipóteses de Π_1.

(iii) x é substituível por t em Π; consequentemente, $y \neq x$ e $y \notin Var(t)$.

[1] Argumento alternativo: $x \in Var(t')$, caso contrário $t'[t/x] = t'$ e teríamos a contradição $y \notin Var(t'[t/x])$ e $y \in Var(t'[t/x])$.

Pretendemos mostrar que $\Pi[t/x]$ é uma derivação de $(\forall_z B)\,[t/x]$ a partir de $\Gamma[t/x]$. Ora

$$\Pi[t/x] = \begin{array}{c} \Gamma[t/x] \\ \Pi_1[t/x] \\ \underline{(B[y/z])\,[t/x]} \\ (\forall_z B)[t/x] \end{array} \quad . \qquad (*)$$

Notemos que, sendo x substituível por t em Π, então x também é substituível por t em Π_1. Por hipótese de indução $\Pi_1[t/x]$ é derivação de $B[y/z][t/x]$ a partir de $\Gamma[t/x]$. Falta ver que a última inferência de $(*)$ é uma aplicação válida da regra $I_\forall$. Temos três casos.

1. Se $x = z$ então

$$\Pi[t/x] = \begin{array}{c} \Gamma[t/x] \\ \Pi_1[t/x] \\ \underline{B[y/z]} \\ \forall_z B \end{array} \quad .$$

Dada a hipótese (i), falta apenas ver que y não ocorre livre nas hipóteses de $\Pi_1[t/x]$. Ora isto está justificado por (ii) e por $y \notin Var(t)$.

2. Se $x \neq z$ e $z \notin Var(t)$ então

$$\begin{array}{rcll} B[y/z][t/x] & = & B[t/x][y[t/x]/z] & \text{(Lema 2)} \\ & = & B[t/x][y/z] & (y \neq x) \end{array}$$

donde

$$\Pi[t/x] = \begin{array}{c} \Gamma[t/x] \\ \Pi_1[t/x] \\ \underline{(B[t/x])[y/z]} \\ \forall z\, B[t/x] \end{array} \quad .$$

A última inferência é válida porque:

- y não ocorre livre em $B[t/x]$, pois $y \notin Var(t)$ e y não ocorre livre em B;
- z é substituível por y em $B[t/x]$, pois $z \notin Var(t)$ e z é substituível por y em B;
- y não ocorre livre nas hipóteses de $\Pi_1[t/x]$ pelas mesmas razões do caso anterior.

3. Se $x \neq z$ e $z \in Var(t)$. Então $x \notin Liv(B)$, caso contrário x não seria substituível por t em $\forall_z B$, o que contradiz x ser substituível por t em Π. Logo, como $x \neq y$, $x \notin Liv(B[y/z])$. Então

$$\Pi[t/x] = \begin{array}{c} \Gamma[t/x] \\ \Pi_1[t/x] \\ \underline{B[y/z]} \\ \forall z\, B \end{array} \quad .$$

Dada a hipótese (i), falta apenas ver que y não ocorre livre nas hipóteses de $\Pi_1[t/x]$. Ora isto está justificado como nos casos anteriores.

Caso $E_\exists$. Análogo ao caso $I_\forall$.

Restantes casos indutivos. Seguem da aplicação rotineira das hipóteses de indução. □

Lema 4 *Sejam A uma fórmula, t um termo, x, y e z variáveis em que y é nova em A, $y \notin Var(t)$ e z é substituível por t em A. Então $\alpha_x^y(A[t/z]) = \alpha_x^y(A)[t/z]$.*

Demonstração. Por indução em A.

Se $z \notin Liv(A)$ então $z \notin \alpha_x^y(A)$. Deste modo, $\alpha_x^y(A[t/z]) = \alpha_x^y(A) = \alpha_x^y(A)[t/z]$. Suponhamos doravante que $z \in Liv(A)$. Logo $z \neq y$ (porque y é nova em A).

Caso $A \in \mathcal{F}_{\mathscr{L}}{}^{atom.}$. A atómica então também $A[t/z]$ é atómica e $\alpha_x^y(A[t/z]) = A[t/z] = \alpha_x^y(A)[t/z]$.

Caso $A = A_1 \boxtimes A_2$. Suponhamos que $A = A_1 \boxtimes A_2$ com $\boxtimes \in \{\wedge, \vee, \supset\}$ e $A_1, A_2 \in \mathcal{F}_{\mathscr{L}}$.

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_x^y(A[t/z]) & = & \alpha_x^y((A_1 \boxtimes A_2)\,[t/z]) \\
 & = & \alpha_x^y(A_1[t/z] \boxtimes A_2[t/z]) \\
 & = & \alpha_x^y(A_1[t/z]) \boxtimes \alpha_x^y(A_2[t/z]) \\
 & \underset{HI}{=} & \alpha_x^y(A_1)[t/z] \boxtimes \alpha_x^y(A_2)[t/z] \\
 & = & (\alpha_x^y(A_1) \boxtimes \alpha_x^y(A_2))[t/z] \\
 & = & \alpha_x^y(A)[t/z]
\end{array}$$

Caso $A = Qw\,B$. Suponhamos que $A = Qw\,B$. Então $z \neq w$ porque $z \in Liv(A)$. Temos dois casos.

1. $x \neq w$.

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_x^y(A[t/z]) & = & \alpha_x^y((Qw\,B)\,[t/z]) \\
 & = & \alpha_x^y(Qw\,B[t/z]) \\
 & = & Qw\,\alpha_x^y(B[t/z]) \\
 & \underset{HI}{=} & Qw\,(\alpha_x^y(B)[t/z]) \\
 & = & (Qw\,\alpha_x^y(B))[t/z] \\
 & = & \alpha_x^y(Qw\,B)[t/z] \\
 & = & \alpha_x^y(A)[t/z]
\end{array}$$

2. $x = w$. Como z é substituível por t em A e como $z \in Liv(A)$ então $x \notin Var(t)$.

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_x^y(A[t/z]) & = & \alpha_x^y((Qw\,B)\,[t/z]) \\
 & = & \alpha_x^y(Qw\,B[t/z]) \\
 & = & Qy\,(\alpha_x^y(B[t/z])[y/x]) \\
 & \underset{HI}{=} & Qy\,(\alpha_x^y(B)[t/z][y/x]) \\
 & \underset{(*)}{=} & Qy\,(\alpha_x^y(B)[y/x][t/z]) \\
 & = & (Qy\,(\alpha_x^y(B)[y/x]))[t/z] \\
 & = & \alpha_x^y(Qw\,B)[t/z] \\
 & = & \alpha_x^y(A)[t/z]
\end{array}$$

$(*)$ Pelo Lema 2 e $t[y/x] = t$.

Vejamos que as condições de aplicabilidade do Lema 2 são satisfeitas:

(i) $z \neq y$ e logo $z \notin Var(y)$.

(ii) z é substituível por t em $\alpha^y_x(B)$. Suponhamos que não. Então temos a seguinte situação de captura

$$\alpha^y_x(B) = \text{——}\; Qv\,(\;\text{——}\; \overset{\overset{t}{\downarrow}}{z} \;\text{——}\;)\;\text{——} \quad ,$$

com $v \in Var(t)$. Logo $v \neq y$. Então, como $z \neq x$, a ocorrência de z exibida continua a ser livre em

$$B = \text{——}\; Qv\,(\;\text{——}\; z \;\text{——}\;)\;\text{——} \quad ,$$

donde, como $z \neq w$, a ocorrência de z exibida continua a ser livre em

$$A = Qw\,B = \text{——}\; Qv\,(\;\text{——}\; z \;\text{——}\;)\;\text{——} \quad ,$$

o que contradiz o facto de z ser substituível por t em A.

(iii) x é substituível por y em $\alpha^y_x(B)[t/x]$. Suponhamos que não. Então temos a seguinte situação de captura

$$\alpha^y_x(B)[t/z] = \text{——}\; Qy\,(\;\text{——}\; \overset{\overset{y}{\downarrow}}{x} \;\text{——}\;)\;\text{——} \quad .$$

Como $x \notin Var(t)$, temos

$$\alpha^y_x(B) = \text{——}\; Qy\,(\;\text{——}\; x \;\text{——}\;)\;\text{——} \quad ,$$

o que contradiz o Lema 3.

$\square$

Proposição 8 *Seja* Π *é uma derivação de* A *a partir de* Γ *em* S*.*

i. *Se* y *uma variável nova em* Π*, então* $\alpha^y_x(\Pi)$ *é uma derivação de* $\alpha^y_x(A)$ *a partir de* $\alpha^y_x(\Gamma)$*.*

Demonstração. **i.** Por indução em Π.

Caso base. Π é uma árvore com uma só fórmula A. Logo $A \in \Gamma$. Então $\alpha^y_x(\Pi) = \alpha^y_x(A)$ é derivação de $\alpha^y_x(A)$ a partir de $\alpha^y_x(\Gamma)$, pois $\alpha^y_x(A) \in \alpha^y_x(\Gamma)$.

Caso $I_\forall$. Suponhamos que

$$\Pi = \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Pi_1\\ B[w/z]\end{array}}{\forall z\, B}\; I_\forall$$

com:

(i) $w = z$; ou: $w \notin Liv(B)$ e z é substituível por w em B;

(ii) w não ocorre livre nas hipóteses de Π_1.

Por hipótese de indução, $\alpha^y_x(\Pi_1)$ é derivação de $\alpha^y_x(B[w/z])$ a partir de $\alpha^y_x(\Gamma)$. Ora

$$\alpha^y_x(\Pi) = \dfrac{\begin{array}{c}\alpha^y_x(\Gamma)\\ \alpha^y_x(\Pi_1)\\ \alpha^y_x(B[w/z])\end{array}}{\alpha^y_x(\forall z\, B)} \quad . \qquad (*)$$

Falta apenas ver que a última inferência de $(*)$ é uma aplicação válida da regra $I_\forall$. Temos dois casos.

1. $z = x$. Então

a)
$$\begin{array}{rcll}\alpha^y_x(B[w/z]) & = & \alpha^y_x(B)[w/z] & \text{(Lema 4)}\\ & = & \alpha^y_x(B)[y/z][w/y] & (y \text{ nova})\end{array}$$

b) $\alpha^y_x(\forall z\, B) = \forall y\, \alpha^y_x(B)[y/z]$;

c)

$$\alpha^y_x(\Pi) = \dfrac{\begin{array}{c}\alpha^y_x(\Gamma)\\ \alpha^y_x(\Pi_1)\\ \alpha^y_x(B)[y/z][w/y]\end{array}}{\forall y\, \alpha^y_x(B)[y/z]} \quad .$$

Quanto às condições de aplicabilidade, w não ocorre livre nas hipóteses de $\alpha^y_x(\Pi_1)$, porque as variáveis livres das hipóteses de $\alpha^y_x(\Pi_1)$ são as mesmas que as variáveis livres das hipóteses de Π_1. Supondo que $w \neq y$, temos ainda duas condições para verificar:

- $w \notin Liv(\alpha^y_x(B)[y/z])$. Se $w = z$ é imediato; caso contrário segue de $w \notin Liv(B)$ e $w \neq y$.

- y é substituível por w em $\alpha^y_x(B)[y/z]$. Se não fosse, teríamos a seguinte situação de captura

$$\alpha^y_x(B)[y/z] = \text{——}\ Qw\,(\ \text{——}\ \overset{\overset{w}{\downarrow}}{y}\ \text{——}\ )\ \text{——} \quad ,$$

donde viria, por $w \neq y$ e y nova,

$$B = \text{——}\ Qw\,(\ \text{——}\ z\ \text{——}\ )\ \text{——} \quad ,$$

o que contradiz o facto de z ser substituível por w em B.

2. $z \neq x$. Então, aplicando o Lema 4 à premissa da última inferência de $(*)$, obtemos

$$\alpha_x^y(\Pi) = \dfrac{\begin{array}{c}\alpha_x^y(\Gamma)\\ \alpha_x^y(\Pi_1)\\ \alpha_x^y(B)[w/z]\end{array}}{\forall z\, \alpha_x^y(B)}\ .$$

Quanto às condições de aplicabilidade, w não ocorre livre nas hipóteses de $\alpha_x^y(\Pi_1)$, pelas mesmas razões do caso anterior. Suponhamos que $z \neq w$. Temos ainda duas condições para verificar:

- $w \notin Liv(\alpha_x^y(B))$. Segue de $w \notin Liv(B)$.

- z é substituível por w em $\alpha_x^y(B)$. Se não fosse, teríamos a seguinte situação de captura

  $$\alpha_x^y(B) = \text{——}\ Qw\ (\text{——}\ \overset{\overset{w}{\downarrow}}{z}\ \text{——}\ )\ \text{——}\ \ .$$

  Então haveria dois casos a considerar. Se $w \neq x$, então como $z \neq x$ a ocorrência exibida de z seria ainda livre em

  $$B = \text{——}\ Qw\ (\text{——}\ z\ \text{——}\ )\ \text{——}\ \ ,$$

  o que contradiz o facto de z ser substituível por w em B. Se $w = x$, então $z \notin Liv(B)$ (porque y é nova). Mas novamente a ocorrência exibida de z seria livre em

  $$B = \text{——}\ Qx\ (\text{——}\ z\ \text{——}\ )\ \text{——}\ \ ,$$

  o que é absurdo.

Caso $E_\exists$. Análogo ao caso $I_\forall$.

Caso $E_\forall$. Suponhamos que

$$\Pi = \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Pi_1\\ \forall z\, B\end{array}}{B[t/z]}\, E_\forall\ ,$$

com z substituível por t em B. Por hipótese de indução, $\alpha_x^y(\Pi_1)$ é derivação de $\alpha_x^y(\forall z\, B)$ a partir de $\alpha_x^y(\Gamma)$. Ora

$$\alpha_x^y(\Pi) = \dfrac{\begin{array}{c}\alpha_x^y(\Gamma)\\ \alpha_x^y(\Pi_1)\\ \alpha_x^y(\forall z\, B)\end{array}}{\alpha_x^y(B[t/z])}\ . \qquad (**)$$

Falta apenas ver que a última inferência de $(**)$ é uma aplicação válida da regra $E_\forall$. Temos dois casos.

1. $z = x$. Então

a)
$$\begin{array}{rcll} \alpha^y_x(B[t/z]) & = & \alpha^y_x(B)[t/z] & \text{(Lema 4)} \\ & = & \alpha^y_x(B)[y/z][t/y] & (y \text{ nova}) \end{array}$$

b) $\alpha^y_x(\forall z\, B) = \forall y\, \alpha^y_x(B)[y/z]$;

c)
$$\alpha^y_x(\Pi) = \dfrac{\begin{array}{c}\alpha^y_x(\Gamma)\\ \alpha^y_x(\Pi_1)\\ \forall y\, \alpha^y_x(B)[y/z]\end{array}}{\alpha^y_x(B)[y/z][t/y]}\ .$$

Quanto à condição de aplicabilidade, y é substituível por t em $\alpha^y_x(B)[y/z]$, porque, caso contrário, teríamos a seguinte situação de captura

$$\alpha^y_x(B)[y/z] = \text{——}\ Qw\,(\text{——}\ \overset{\overset{t}{\downarrow}}{y}\ \text{——})\ \text{——} \quad ,$$

com $w \in Var(t)$, donde viria, por y nova e $w \neq y$,

$$B = \text{——}\ Qw\,(\text{——}\ z\ \text{——})\ \text{——} \quad ,$$

o que contradiz o facto de z ser substituível por t em B.

2. $z \neq x$. Então, aplicando o Lema 4 à conclusão de $(**)$, obtemos

$$\alpha^y_x(\Pi) = \dfrac{\begin{array}{c}\alpha^y_x(\Gamma)\\ \alpha^y_x(\Pi_1)\\ \forall z\, \alpha^y_x(B)\end{array}}{\alpha^y_x(B)[t/z]}\ .$$

Quanto à condição de aplicabilidade, z é substituível por t em $\alpha^y_x(B)$, porque, caso contrário, teríamos a seguinte situação de captura

$$\alpha^y_x(B) = \text{——}\ Qw\,(\text{——}\ \overset{\overset{t}{\downarrow}}{z}\ \text{——})\ \text{——} \quad ,$$

com $w \in Var(t)$. Então haveria dois casos a considerar. Se $w \neq y$, então, como $z \neq x$, a ocorrência exibida de z seria ainda livre em

$$B = \text{——}\ Qw\,(\text{——}\ z\ \text{——})\ \text{——} \quad ,$$

o que contradiz o facto de z ser substituível por t em B. Se $w = y$, então $y \in Var(t)$ e portanto $z \notin Liv(B)$ (caso contrário y não seria nova, pois ocorreria em $B[t/z]$). Mas novamente a ocorrência exibida de z seria livre em

$$B = \text{——}\ Qx\,(\text{——}\ z\ \text{——})\ \text{——} \quad ,$$

o que é absurdo.

Caso $I_\exists$. Análogo ao caso $E_\forall$.

Restantes casos indutivos. Seguem da aplicação rotineira das hipóteses de indução. $\square$

Proposição 9. *Em S, se Π_1 é uma derivação de A a partir de Γ_1, Π_2 é uma derivação de B a partir de Γ_2 e B° é uma ocorrência de B como hipótese de Π_1, então:*

i. *se B é substituível por Π_2 em Π_1 então $\Pi_1[\Pi_2/B]$ é uma derivação de A a partir de $\Gamma_2 \cup (\Gamma_1 \setminus \{B\})$;*

ii. *se B° é substituível por Π_2 em Π_1 então $\Pi_1[\Pi_2/B^\circ]$ é uma derivação de A a partir de $\Gamma_2 \cup \Gamma_1$.*

Demonstração. Comecemos por provar a primeira afirmação, por indução em Π_1.

Caso base. Π_1 é uma árvore com uma só fórmula A donde $A \in \Gamma_1$. Temos dois casos.
1. $A = B$: $A[\Pi_2/B] = \Pi_2$ e Π_2 é derivação de $A = B$ a partir de $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_2 \cup (\Gamma_1 \setminus \{B\})$;
2. $A \neq B$: $A[\Pi_2/B] = A$ e A é uma derivação de A a partir de:

$$\begin{array}{rcll} \{A\} & = & \{A\} \setminus \{B\} & (\text{porque}\, A \neq B) \\ & \subseteq & \Gamma_1 \setminus \{B\} & (\text{porque}\, \{A\} \subseteq \Gamma_1) \\ & \subseteq & \Gamma_2 \cup (\Gamma_1 \setminus \{B\}) & \end{array}$$

Caso $I_\forall$. Suponhamos que

$$\Pi_1 = \cfrac{\begin{array}{c}\Pi_1' \\ C[y/x]\end{array}}{\forall x\, C}\; I_\forall \quad ,$$

com:
(i) $y = x$; ou: $y \notin Liv(C)$ e x é substituível por y em C;
(ii) y não ocorre livre nas hipóteses de Π_1'.

Π_1' é uma derivação de $C[y/x]$ a partir de Γ_1 e B é substituível por Π_2 em Π_1'; logo, por hipótese de indução, $\Pi_1'[\Pi_2/B]$ é uma uma derivação de $C[y/x]$ a partir de $\Gamma_2 \cup (\Gamma_1 \setminus \{B\})$. Tem-se

$$\Pi_1[\Pi_2/B] = \cfrac{\begin{array}{c}\Pi_1'[\Pi_2/B] \\ C[y/x]\end{array}}{\forall x\, C} \quad . \qquad (*)$$

Falta apenas ver que a última inferência de $(*)$ é uma aplicação válida da regra $I_\forall$:

- por (i), $y = x$; ou: $y \notin Liv(C)$ e x é substituível por y em C;

- y não ocorre livre nas hipóteses de $\Pi_1'[\Pi_2/B]$ porque y não ocorre livre nas hipóteses de Π_1' (por (ii)) e porque B é substituível por Π_2 em Π_1.

Caso $E_\exists$. Suponhamos que

$$\Pi_1 = \cfrac{\begin{matrix} & [C[y/x]] \\ \Pi_1' & \Pi_1'' \\ \exists x\, C & D \end{matrix}}{D}\, E_\exists \quad ,$$

com:

(i)	$y = x$; ou: $y \notin Liv(C)$ e x é substituível por y em C;
(ii)	y não ocorre livre nem em D nem nas hipóteses de Π_1'' diferentes de $C[y/x]$;
(iii)	Π_1' derivação a partir de Γ_1';
(iv)	Π_1'' derivação a partir de $\Gamma_1'' \cup \{C[y/x]\}$, com $C[y/x] \notin \Gamma_1''$;
(v)	$\Gamma_1 \supseteq \Gamma_1' \cup \Gamma_1''$.

Como B é substituível por Π_2 em Π_1' e Π_1'' então, por hipótese de indução, $\Pi_1'[\Pi_2/B]$ é uma derivação de $\exists_x C$ a partir de $\Gamma_2 \cup (\Gamma_1' \setminus \{B\})$ e $\Pi_1''[\Pi_2/B]$ é uma derivação de D a partir de $\Gamma_2 \cup ((\Gamma_1'' \cup C[y/x]) \setminus \{B\})$. Tem-se

$$\Pi_1[\Pi_2/B] = \cfrac{\begin{matrix} & [C[y/x]] \\ \Pi_1'[\Pi_2/B] & \Pi_1''[\Pi_2/B] \\ \exists x\, C & D \end{matrix}}{D} \quad . \qquad (**)$$

A última inferência de $(**)$ é uma aplicação válida da regra $E_\exists$ porque:

- por (i), $y = x$; ou: $y \notin Liv(C)$ e x é substituível por y em C;
- por (ii), y não ocorre livre em D;
- y não ocorre livre nas hipóteses de $\Pi_1''[\Pi_2/B]$ diferentes de $C[y/x]$ porque B é substituível por Π_2 em Π_1 e porque y não ocorre livre nas hipóteses de Π_1'' diferentes $C[y/x]$ (por (ii)).

A derivação $(**)$ é uma derivação a partir de $\Gamma_2 \cup (\Gamma_1 \setminus \{B\})$ pois:

$$\begin{array}{lll}
 & \Gamma_2 \cup (\Gamma_1' \setminus \{B\}) \cup \big[\big[\Gamma_2 \cup ((\Gamma_1'' \cup \{C[y/x]\}) \setminus \{B\})\big] \setminus \{C[y/x]\}\big] & \\
\subseteq & \Gamma_2 \cup (\Gamma_1' \setminus \{B\}) \cup \Gamma_2 \cup (\Gamma_1'' \setminus \{B\}) & \text{(teoria de conj.)} \\
= & \Gamma_2 \cup \big[(\Gamma_1' \cup \Gamma_1'') \setminus \{B\}\big] & \text{(teoria de conj.)} \\
\subseteq & \Gamma_2 \cup (\Gamma_1 \setminus \{B\}) & (\Gamma_1' \cup \Gamma_1'' \subseteq \Gamma_1)
\end{array}$$

restantes casos indutivos: Seguem da aplicação rotineira das hipóteses de indução.

Quanto à segunda afirmação da proposição, uma demonstração análoga à anterior prova que $\Pi_1[\Pi_2/B^\circ]$ é uma derivação, sendo apenas necessária uma óbvia adaptação do caso base. Nesta segunda indução, todos os argumentos acerca do conjunto das hipóteses podem ser omitidos. Dado que $\Pi_1[\Pi_2/B]$ é uma derivação a partir de $\Gamma_2 \cup (\Gamma_1 \setminus \{B\})$, então $\Pi_1[\Pi_2/B^\circ]$ é uma derivação a partir de $(\Gamma_2 \cup (\Gamma_1 \setminus \{B\})) \cup \{B\}$. Este último conjunto é simplesmente $\Gamma_2 \cup \Gamma_1$ porque $B \in \Gamma_1$ (dada a existência da ocorrência B°). $\square$

Bibliografia

[1] Barwise J. and Etchemendy J. (2000). *Language Proof and Logic*. Seven Bridges Press.

[2] Bostock D. (1997). *Intermediate Logic*. Clarendon Press.

[3] D´Agostino M. (2005). In S. Artemov, H. Barringer, A. S. d´Avila Garcez, L. C. Lamb and J. Woods (a curi di) We Will Show Them: Essays in Honour of Dov Gabbay. *Classical Natural Deduction*. Vol. 1. pages 420-468. London, College Publications.

[4] Ebbinghaus H.-D., Flum J. and Thomas W. (1996). *Mathematical Logic*. Second Edition. Springer.

[5] Guimarães A. S. (2002). *Construção de Contra-Modelo em Lógica Proposicional Intuicionista*. Dissertação apresentada para obtenção de grau de Mestre em Matemática, Braga: Universidade do Minho.

[6] Martins A. T., Oliveira A. G. e Queiroz R.. *Uma introdução à Teoria da Prova*. Brasil: U.F.C. / U.F.P.

[7] Negri S. and von Plato J. (2001) *Structural Proof Theory*. Cambridge University Press.

[8] Newton-Smith W. H. (2005). *Lógica: um curso introdutório*. Gradiva.

[9] Pelletier F. J. (2000). Logic Consequence: Rival Approaches. *A History of Natural Deduction and Elementary Logic Textbooks*. Vol. 1. J. Woods and V. Brian (Eds). Oxford Hermes Science Publications, pages 105-138.

[10] Prawitz D. (1965). *Natural Deduction. A Proof-Theoretical Study*. Almquist and Wiksell, Stockholm.

[11] Prawitz D. (1971). Ideas and results in proof theory, *Proceeding of the second Scandinavian logic symposium*. North-Holland, Amesterdam.

[12] Szabo M. E. (1969). *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. North-Holland.

[13] Stalmarck G. (1991). *Normalization Theorems for Full First Order Classical Natural Deduction*. The Journal of Symbolic Logic, Volume 56, Number 1.

[14] Troelstra A. S. and van Dalen D. (1988). *Constructivism in Mathematics: an Introduction*. Vol. 1. North-Holland.

[15] Troelstra A. S. and van Dalen D. (1988). *Constructivism in Mathematics: an Introduction*. Vol. 2. North-Holland.

[16] Troelstra A. S. and Schwichtenberg H. (2000). *Basic Proof Theory*. Second Edition. Cambridge University Press.

[17] Ungar A. M. (1992). *Normalization, Cut-Elimination and The Theory of Proofs*. CSLI.

[18] van Dalen D. (1994). *Logic and Structure*. Third Edition. Springer-Verlag.

[19] von Plato J. (2008). *Gentzen´s Proof of Normalization for Natural Deduction*. The Bulletin of Symbolic Logic, Volume 14, Number 2.