Universidade do Minho
Instituto de Educação

Ana Cristina Pires Fernandes

As TIC no desenvolvimento da capacidade de argumentação dos alunos do 9.º ano na aprendizagem de Geometria

Outubro de 2011

UMinho | 2011 Ana Cristina Pires Fernandes As TIC no desenvolvimento da capacidade de argumentação dos alunos do 9.º ano na aprendizagem de Geometria

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Ana Cristina Pires Fernandes

As TIC no desenvolvimento da capacidade de argumentação dos alunos do 9.º ano na aprendizagem de Geometria

Dissertação de Mestrado
Mestrado em Ciências da Educação
Área de Especialização em Supervisão Pedagógica
na Educação Matemática

Trabalho realizado sob a orientação do
Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

Outubro de 2011

DECLARAÇÃO

NOME: Ana Cristina Pires Fernandes

ENDEREÇO ELECTRÓNICO: anacrispires.fernandes@gmail.com

NÚMERO DO BILHETE DE IDENTIDADE: 8222751

Título da dissertação: As TIC no desenvolvimento da capacidade de argumentação dos alunos do 9.º ano na aprendizagem de Geometria

Orientador:

Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

Ano de conclusão: 2011

Mestrado em Ciências da Educação, Área de Especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática

Universidade do Minho, 31 de outubro de 2011.

Assinatura: ____

(Ana Cristina Pires Fernandes)

AGRADECIMENTOS

Ao Doutor Floriano Viseu, meu orientador, pelo seu constante apoio, sugestões, críticas, incentivo e disponibilidade, que me permitiram levar a cabo este estudo.

Aos professores que me acompanharam durante a realização deste mestrado e que me ajudaram a crescer academicamente.

Aos meus colegas de mestrado com quem partilhei muitas experiências e momentos de trabalho.

A todos os meus alunos que sempre colaboraram e me ajudaram a levar a cabo este projeto.

Ao Diretor e colegas da Escola onde trabalhei nos anos em que estive a realizar este mestrado, pelas condições que me proporcionaram e apoio prestado.

À minha família pelo apoio e ânimo que sempre me deram.

Ao André pela sua paciência, incentivo e ajuda.

À Beatriz e à Carolina pelo carinho, paciência e capacidade de compreender as minhas limitações de tempo para estar com elas.

À Teresa pela sua disponibilidade, colaboração e amizade.

AS TIC NO DESENVOLVIMENTO DA CAPACIDADE DE ARGUMENTAÇÃO DOS ALUNOS DO 9.º ANO NA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

RESUMO

Este estudo pretende analisar como se desenvolve a capacidade de argumentação de alunos do 9.º ano, no estudo do tema de Geometria, através da resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa com recurso às TIC. A investigação segue uma abordagem de natureza qualitativa com um design de estudo de caso com alunos de desempenhos escolares diferentes – bom (Júlia e Nélia), suficiente (Anita e Filipa) e insuficiente (Diana e Mara) – e que procura responder às questões: (1) Como argumentam os alunos as suas ideias e discutem as argumentações de outros? Que dificuldades manifestam em argumentar as suas ideias? (2) Que perspetivas têm os alunos sobre a argumentação matemática e a aprendizagem da Geometria com recurso a ambientes de geometria dinâmica e a tarefas de exploração e de investigação? A recolha de dados foi realizada através de um questionário, registos escritos pelos alunos, transcrições das aulas gravadas em formato áudio-vídeo, notas de campo e uma entrevista. A informação para analisar o estudo de caso foi organizada em três momentos: antes, durante e no final da experiência de ensino.

A revisão de literatura deste estudo estrutura-se em quatro partes: (1) breve análise da evolução da Geometria no currículo de Matemática do Ensino Básico e as suas mudanças mais marcantes a partir da década de 60; (2) referência às teorias de argumentação (as diferentes abordagens assumidas por diversos autores e o estudo de alguns dos instrumentos de análise da argumentação); (3) a argumentação e a prova matemática, e o contributo dos ambientes de geometria dinâmica para a formulação, teste e prova de conjeturas; (4) o contributo das tecnologias da informação e comunicação para o desenvolvimento da capacidade argumentativa dos alunos.

Os alunos que constituem o estudo de caso evidenciaram uma evolução significativa relativamente a um dos aspectos da argumentação matemática – formulação e teste de conjeturas, apesar de terem revelado dificuldades na prova de conjeturas. Desenvolveram a aptidão para procurar regularidades nos estudos que exploram, para apresentar generalizações matemáticas, para encontrar contraexemplos que refutem afirmações, assim como para identificar argumentos matemáticos que as validem. A resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa com recurso a um ambiente de geometria dinâmica favoreceu a produção de raciocínios mais estruturados e contribuiu para o desenvolvimento da capacidade argumentativa dos alunos.

Palavras-Chave: Matemática, Argumentação, Resolução de tarefas, TIC, Geometria.

THE ICT IN DEVELOPMENT OF ARGUMENTATION CAPACITY OF THE 9th GRADE STUDENTS LEARNING GEOMETRY

ABSTRACT

This study aims to analyze how the argumentation capacity of 9th grade students develops, concerning the study on Geometry, by solving exploratory and investigative tasks using ICT. The investigation follows a qualitative approach with a design case study with students from different school performances – good (Júlia e Nélia), sufficient (Anita e Filipa) and insufficient (Diana e Mara) – that tries to answer the following questions: (1) How students argue their ideas and discuss the arguments of others? What difficulties manifest themselves in arguing their ideas? (2) Perspectives that have students on the mathematical reasoning and learning of geometry using dynamic geometry environments and exploration and research tasks? The collecting data collection was conducted through a questionnaire, the written records students, transcripts of recorded lectures in audio-video, field notes and an interview. The information to analyze the case study was organized in three stages: before, during and after the teaching experience.

This research literature review of this study consist of four parts: (1) brief analysis of the evolution of geometry in mathematics curriculum of basic education and its most striking changes from the 60's, (2) refer to argumentation theories of (the different approaches taken by various authors and the study of some of the analytical tools of argument); (3) argumentation and mathematical proof, and the contribution of dynamic geometry environments for the design, test and test conjectures; (4) the contribution of information and communication technologies for the development of argumentative capacity of students.

Students who are the case study showed a significant relation to an aspect of mathematical reasoning - the formulation and testing of conjectures – although they revealed difficulties in proof of conjectures. Developed the ability to search for regularities in studies that explore, to make mathematical generalizations, to find counterexamples to refute statements, as well as to identify mathematical arguments that validate. The resolution of tasks of exploratory and investigative using a dynamic geometry environment favored the production of more structured reasoning and contributed to the development of students' argumentative capacity

Key-words: Mathematic, Argumentation, Tasks solving, ICT, Geometry.

ÍNDICE

DECLARAÇÃO ii

AGRADECIMENTOS iii

RESUMO v

ABSTRACT vi

ÍNDICE vii

ÍNDICE DE TABELAS xi

CAPÍTULO 1 1

INTRODUÇÃO 1

1.1. Motivação para o estudo 1

1.2. Objetivo e questões de investigação 3

1.3. Organização do estudo 4

CAPÍTULO 2 5

ENQUADRAMENTO TEÓRICO 5

2.1. A Geometria no currículo de Matemática do Ensino Básico 5

2.2. A argumentação em Matemática 13

2.3. A argumentação e a prova matemática 32

2.4. O contributo das TIC na argumentação 39

CAPÍTULO 3 49

METODOLOGIA 49

3.1. Opções metodológicas 49

3.2. Descrição do estudo 50

3.3. Participantes no estudo 54

3.3.1. Caraterização da turma/escola 54

3.3.2. A professora da turma 55

3.3.3. Os alunos da turma 56

3.4. Métodos de recolha de dados 60

3.4.1. Questionário 61
3.4.2. Entrevista 62
3.4.3. Observação 62
3.4.4. Análise documental 63
3.5. Análise de dados 64
CAPÍTULO 4 67
APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS 67
4.1. Aspetos da argumentação matemática 67
4.1.1. Formulação e teste de conjeturas 67
4.1.2. Prova de conjeturas 110
4.2. Perspetivas sobre a aprendizagem da Geometria com recurso aos ambientes de geometria dinâmica e a tarefas de natureza exploratória e investigativa 122
4.3. Perspetivas sobre a argumentação 126
CAPÍTULO 5 133
CONCLUSÕES 133
5.1. Síntese do estudo 133
5.2. Conclusões do estudo 135
5.2.1. Aspetos da argumentação matemática 136
5.2.2. Perspetivas sobre a aprendizagem da Geometria com recurso aos ambientes de geometria dinâmica e a tarefas de natureza exploratória e investigativa 138
5.2.3. Perspetivas sobre a argumentação 140
5.3. Implicações do estudo para o ensino da Geometria 141
5.4. Recomendações para futuros estudos 145
BIBLIOGRAFIA 147
ANEXOS 157
Anexo I 158
Pedido de autorização à direção do agrupamento 158

Anexo II 159

Pedido de autorização ao encarregado de educação..159

Anexo III 160

Questionário 160

Anexo IV 165

TAREFA 1 – Ângulo ao centro e ângulo inscrito. Relação entre o ângulo ao centro e o arco correspondente 165

Anexo V 166

TAREFA 2 – Relação entre o ângulo inscrito e o arco correspondente 166

Anexo VI 167

TAREFA 3 – Relação entre o ângulo ao centro e o ângulo inscrito no mesmo arco correspondente..167

Anexo VII 168

TAREFA 4 – Relação entre cordas geometricamente iguais e os correspondentes ângulos ao centro e arcos 168

Anexo VIII 169

TAREFA 5 – Propriedades geométricas em circunferências 169

Anexo IX 171

TAREFA 6 – Soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de um polígono 171

Anexo X 173

TAREFA 7 – Quadrado inscrito e circunscrito na mesma circunferência 173

Anexo XI 174

TAREFA 8 – Pavimentações com polígonos regulares..174

Anexo XII 175

TAREFA 9 – Razões trigonométricas de ângulos agudos...175

Anexo XIII 177

TAREFA 10 – Relações entre as razões trigonométricas 177

Anexo XIV 178

TAREFA 11 – Investigando volumes 178

Anexo XIV 179

Guião da entrevista 179

Anexo XIV 180

Guião da para a elaboração de um relatório 180

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1: Tópicos e competências específicas da experiência de ensino 52

Tabela 2: Duração prevista para cada tarefa 53

Tabela 3: Métodos de recolha de dados segundo as questões de investigação do estudo 64

Tabela 4: Codificação dos instrumentos de recolha de dados 64

Tabela 3: Valores encontrados por Filipa (RE-T9) 98

Tabela 4: Valores encontrados por Diana (RE-T9) 98

Tabela 5: Valores encontrados por Nélia (RE-T10) 102

INDÍCE DE FIGURAS

Figura 1: Forma reduzida do modelo de argumentação, segundo Toulmin. 17

Figura 2: Modelo de argumentação segundo Toulmin (adaptado de Boavida, 2005)............. 17

Figura 3: Abordagem interaccionista de argumentação (adaptado de Grácio, 2010).............. 23

Figura 4: Diagrama para a análise dos fundamentos de um discurso argumentativo (Clark & Sampson, 2008)... 25

Figura 5 Diagrama para codificar da qualidade conceptual de um argumento com base nas suas vertentes (Clark & Sampson, 2008) 27

Figura 6: Esquema das fases do ciclo da prova (de Villiers, 2003) 36

Figura 7: Conjetura efetuada por Diana sobre a relação entre as amplitudes dos ângulos ao centro e do arco correspondente numa circunferência. (RE-T1)............. 68

Figura 8: Conjetura efetuada por Nélia sobre a relação entre as amplitudes dos ângulos ao centro e do arco correspondente numa circunferência. (RE-T1)............. 69

Figura 9: Conjetura efetuada por Júlia sobre a relação entre as amplitudes dos ângulos ao centro e do arco correspondente numa circunferência. (RE-T1)............. 69

Figura 10: Resolução da aplicação da tarefa 1 por Filipa. (RE-T1) 70

Figura 11: Resolução da aplicação da tarefa 1 por Júlia. (RE-T1) 71

Figura 12: Flipchart da exploração da questão 1 da tarefa 2. (RV-T2) 71

Figura 13: Conjetura sobre a relação entre o ângulo ao centro e o ângulo inscrito no mesmo arco correspondente apresentada por Diana. (RE-T3)........................... 74

Figura 14: Flipchart da questão 1 (RE-T4)... 75

Figura 15: Flipchart da Questão 2 da tarefa 'Propriedades geométricas em circunferências' (RE-T5).. 77

Figura 16: Conclusões obtidas por Nélia às questões 2.3. e 2.4. (RE-T5) 77

Figura 17: Resolução da questão 3.3. da Júlia. (RE-T5) 79

Figura 18: Conjetura apresentada por Diana (esquerda) e por Anita (direita) sobre a consequência de uma reta ser tangente a uma circunferência. (RE-T5)...... 80

Figura 19: Conjeturas apresentadas por Filipa (esquerda) e por Júlia (direita) sobre a consequência de uma reta ser tangente a uma circunferência. (RE-T5)...... 80

Figura 20: Resolução das questões 1.3. e 1.4. da tarefa 6 por Diana (RE-T6).......................... 81

Figura 21: Resolução das questões 1.3. e 1.4. da tarefa 6 por Anita (RE-T6).......................... 81

Figura 22: Flipchart da questão 1.2. da tarefa 6 resolvida por Nélia. (RE-T6).......................... 82

Figura 23: Resolução da questão 2.1. da tarefa 6 (RE-T6)... 83
Figura 24: Resolução da questão 2.1. da tarefa 6 (RE-T6)... 84
Figura 25: Flipchart da questão 2.1. da tarefa 6, Mara (RE-T6) 84
Figura 26: Flipchart da tarefa 7, Nélia (RE-T7) 86
Figura 27: Flipchart da tarefa 7, Diana (RE-T7) 87
Figura 28: Tabela com os valores das áreas dos polígonos inscritos, circunscritos e das respetivas circunferências determinados por Diana (RE-T7)........................... 88
Figura 29: Flipchart da tarefa 7, relação entre as áreas, Francisca (RE-T7).............................. 89
Figura 30: Flipchart da tarefa 7, polígonos inscritos e circunscritos numa circunferência elaborados por Filipa (RE-T7) 89
Figura 31: Flipchart da tarefa 7, valores das áreas e perímetros de polígonos inscritos e circunscritos numa circunferência determinados por Filipa (RE-T7)........ 90
Figura 32: Flipchart com octógonos inscrito e circunscrito na circunferência representados por Júlia (RV-T7) 92
Figura 33: Flipchart da conclusão da tarefa 7 elaborada por Júlia (RV-T7) 92
Figura 34: Flipchart de uma pavimentação demi-regular construída por Nélia (RE-T8) 94
Figura 35: Flipchart de pavimentações com dois polígonos regulares de Filipa (RE-T8)............ 94
Figura 36: Flipchart de pavimentações com três polígonos regulares de Filipa (RE-T8) 95
Figura 37: Flipchart com contraexemplos de combinações definidos por Filipa (RE-T8) 95
Figura 38: Flipchart de duas pavimentações semirregulares construídas por Júlia (RE-T8)....... 96
Figura 39: Resolução da tarefa 9 por Diana (RE-T9)... 99
Figura 40: Resolução da tarefa 9 por Mara (RE-T9).. 100
Figura 41: Resolução da tarefa 9 por Júlia (RE-T9)... 100
Figura 42: Resolução da aplicação da tarefa 9 por Júlia (RE-T9) 101
Figura 43:Resolução da aplicação da tarefa 9 por Diana (RE-T9) 102
Figura 44: Flipchart da tarefa 10 realizada por Mara (RE-T10) 103
Figura 45: Conjetura apresentada por Júlia (RE-T10) 104
Figura 46: Resolução da aplicação da tarefa 10 por Anita (RE-T10)...................................... 104
Figura 47: Resolução da aplicação da tarefa 10 por Júlia (RE-T10) 105
Figura 48: Determinação da capacidade de recipientes de gelado por Diana (RE-T11)........... 106
Figura 49: Conjetura apresentada por Diana (RE-T11) 107
Figura 50:Registo dos volumes do cone, esfera e cilindro por Mara (RE-T11) 109

Figura 51: Conjetura apresentada por Júlia (RE-T11) 110
Figura 52: Flipchart da prova por Anita (RE-T2).......... 111
Figura 53: Prova produzida por Júlia (RE-T2) 112
Figura 54: Flipchart da relação de uma reta perpendicular a uma corda que passe pelo centro de uma circunferência (RE-T5).......... 113
Figura 55: Flipchart da relação de arcos e cordas compreendidos entre retas paralelas (RE-T5) 114
Figura 56: Prova da relação entre a tangente de um ângulo agudo de um triângulo rectângulo e a razão entre o seu seno e o seu cosseno por Júlia (RE-T10).......... 117
Figura 57: Prova da relação entre a tangente de um ângulo agudo de um triângulo rectângulo e a razão entre o seu seno e o seu cosseno (RE-T10).......... 118
Figura 58: Prova da relação entre o seno e o cosseno de um ângulo agudo por Mara (RE-T10).......... 119
Figura 59: Prova da relação entre o seno e o cosseno de um ângulo agudo por Nélia (RE-T10).......... 120
Figura 60: Prova da relação entre os volumes do cone, do cilindro e da esfera com o raio o dobro da altura por Júlia (RE-T11) 120
Figura 61: Prova da relação entre os volumes do cone, do cilindro e da esfera com a altura o dobro do raio por Mara (RE-T11). 121

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. Motivação para o estudo

O tema de Geometria é um dos temas que marca uma forte presença nas sucessivas reformulações dos programas escolares de Matemática. A aprendizagem deste tema proporciona ao aluno "uma das formas privilegiadas de adquirir uma intuição e uma orientação espacial crucial para o mundo moderno" (Matos & Serrazina 1996, p. 265). A importância da Geometria no currículo advém, segundo o NCTM (1991), da fonte de problemas não rotineiros que proporciona, o que favorece o desenvolvimento de capacidades, entre outras, de visualização espacial, de raciocínio e de argumentação, identificadas como fundamentais para os cidadãos no presente e no futuro. De acordo com o novo programa do ensino básico, a comunicação e a argumentação ocupam lugar de destaque, na medida em que podem ser bastante desenvolvidos com a Geometria através de discussões e debates entre pares ou entre grupos. Na realização destas atividades, os alunos deverão aprender a formular explicações convincentes para as suas conjecturas e soluções (NCTM, 2007).

Para alguns autores, como por exemplo Yackel e Cobb (1994), o conceito de argumentação foca-se especificamente nas interações que estão relacionadas com explicações ou justificações intencionais do raciocínio dos alunos, durante ou após tentativas de resolução de problemas. Também para Wood (1999), a argumentação é considerada como um processo interativo de saber como e quando participar num argumento numa troca discursiva entre pessoas com o objectivo de convencer outros através de certos modos de pensamento. Seguindo estas duas perspectivas, Krummheuer (1995) considera que a argumentação na aula de matemática não deve ser considerada equivalente à demonstração, embora inclua processos de produção de provas matemáticas. Para este autor, a argumentação na aula de matemática deve ser, então, uma atividade mais ampla do que a demonstração, cujo caminho é formal, lógico e linear. Deste modo, o desenvolvimento do raciocínio é promovido pela explicação, justificação e argumentação (Yackel, 2001; Whitenack & Yackel, 2008). Por sua vez, a explicação e a justificação são distinguidas pelas suas funções: a explicação como uma forma de clarificar aspectos do pensamento matemático e a justificação como uma resposta às aparentes transgressões da atividade matemática normativa (Cobb et al., 1992). A argumentação é vista como o conjunto de explicações e justificações matemáticas que podem ser aceites, individual e colectivamente, pelos participantes e que resultam das suas interações. A vertente explicativa da argumentação pode, então, ser considerada como um meio de motivação, criando a sensação que são os próprios alunos os criadores do significado matemático.

A capacidade dos alunos argumentarem desenvolve-se quando, nas aulas de matemática, são criados momentos para a exploração de tarefas que estimulam a formulação e a prova de conjecturas (Boavida, 2005; Douek & Pichat, 2003). De um modo geral, a prova permite aos alunos regular o seu próprio pensamento (Bieda, 2010), comunicar matematicamente (Lakatos, 1976; Schoenfeld, 1991) e serve para convencer os outros e a nós próprios (Alibert & Thomas, 1991; Hanna, 1989), podendo ser vista como um processo de negociação dentro da sala de aula, na medida em que os alunos têm que argumentar, convencer os outros do que fizeram e como fizeram.

O tipo de explorações que se fomentam nas salas de aula pode levar os alunos a novas descobertas em Matemática. Assente neste pressuposto, de Villiers (2003) alude à exploração de conjecturas geométricas desenvolvidas em ambientes de geometria dinâmica. A formulação de conjecturas é aqui caracterizada como o resultado de um conjunto de evidências, com uma determinada regularidade, que origina uma afirmação e, parecendo à partida razoável, desponta a necessidade de se investigar a sua veracidade (Mason et al., 1982). De Villiers (2003) considera que, após a apresentação de uma conjectura, o aluno deve testar alguns casos. Se a conjectura não for confirmada por esses casos, então a mesma deve ser rejeitada, por ser falsa, ou reformulada. Se a conjectura for confirmada por esses casos, pode-se começar a acreditar que essa conjectura pode ser verdadeira, convicção essa que pode constituir um pré-requisito e um estímulo para se iniciar o processo de prova e que pode ser caracterizada por um misto de intuição, verificação quase-empírica e prova lógica, não necessariamente rigorosa. Se, decorrido algum tempo, não se tiver produzido a prova desejada, então pode-se começar a duvidar da validade da conjectura e considerar mais alguns casos, repetindo-se o processo.

Atendendo à importância do desenvolvimento da capacidade de argumentação do que se faz na aprendizagem de Matemática, em geral, e da Geometria, em particular, a presente investigação tem como objetivo analisar o contributo de um ambiente de geometria dinâmica para o desenvolvimento da capacidade de argumentação de alunos do 9.º ano nas suas atividades de aprendizagem de tópicos de Geometria deste ano de escolaridade. Os materiais didáticos usados no processo de ensino-aprendizagem da Geometria foram o GeoGebra e o quadro interativo multimédia, que foram fundamentais na realização de tarefas de caráter exploratório e investigativo.

1.2. Objetivo e questões de investigação

De acordo com as sugestões referenciadas anteriormente ao ser proporcionado aos alunos um ambiente de aprendizagem com estas caraterísticas estudei uma estratégia com o objetivo de analisar o papel dos ambientes de geometria dinâmica, mais especificamente, o software computacional GeoGebra, e do quadro interativo, para que possam potenciar a capacidade de argumentação dos alunos sobre as suas atividades como uma ferramenta educativa no processo ensino-aprendizagem da Geometria, com vista à formulação, teste e prova de conjeturas. Com este propósito, procura-se responder às seguintes questões:

(1) Como argumentam os alunos as suas ideias e discutem as argumentações de outros? Que dificuldades manifestam em argumentar as suas ideias?

(2) Que perspetivas têm os alunos sobre a argumentação matemática e a aprendizagem da Geometria com recurso a ambientes de geometria dinâmica e a tarefas de exploração e de investigação?

As razões da escolha do tema do presente estudo devem-se, por um lado, ao gosto que a investigadora nutre pela Geometria e pelo uso das TIC no processo de ensino-aprendizagem de Matemática. Associada a esta razão, emergem outras relacionadas com a pertinência dos assuntos geométricos envolvidos e com a atualidade, evidenciada não só pelo papel que a Geometria pode desempenhar ao relacionar-se com outras áreas do saber como também pela importância que tem ganho dentro da Matemática, de acordo com as orientações atuais da Educação Matemática e de alguns trabalhos de investigação nesta área, como os de Boavida (2005), Candeias (2005) e Junqueira (1995).

1.3. Organização do estudo

Este estudo está organizado em cinco capítulos. No primeiro capítulo são referidas as razões que levaram a investigadora a realizar o estudo e é apresentado o problema à volta do qual ele se desenvolve, as respetivas questões de investigação às quais se procura dar resposta. De seguida é feita uma pequena apresentação do estudo onde é descrita a forma como está organizado. Posteriormente, no segundo capítulo, começa-se por fazer uma breve abordagem à evolução da Geometria no currículo de Matemática do Ensino Básico e às suas mudanças mais marcantes a partir da década de 60. São também focadas algumas teorias de argumentação, as diferentes abordagens sobre a argumentação matemática, assumidas por diversos autores, e analisados alguns dos instrumentos de análise da argumentação. Posteriormente, aborda-se a argumentação e a prova matemática, onde se procuram evidenciar não só diferenças e semelhanças entre estes dois campos da atividade matemática, como também o contributo dos ambientes de geometria dinâmica para a descoberta e verificação de conjeturas e, consequentemente, para a procura de argumentos que as justifiquem, dando-se início ao processo de prova, ou que as refutem, sendo rejeitadas ou reformuladas. Por fim, procura-se evidenciar o contributo das tecnologias da informação e comunicação, em particular do GeoGebra, para o desenvolvimento da capacidade argumentativa dos alunos. No capítulo três são apresentadas as opções metodológicas que foram seguidas ao longo do estudo, onde são abordados aspetos como a descrição do estudo, a caraterização do contexto e dos participantes, assim como a caraterização dos instrumentos na recolha de dados. No capítulo quatro é apresentado o estudo de caso onde é analisado o percurso dos seis alunos para serem interpretados os procedimentos desenvolvidos pelos alunos num ambiente natural de sala de aula. Por fim, no capítulo sete são apresentadas as conclusões a que se chegou e é efetuada a reflexão pessoal da investigadora acerca do trabalho desenvolvido ao longo da investigação, onde constam as limitações encontradas e algumas recomendações para futuros estudos.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo, organizado em quatro partes, são apresentadas referências consideradas relevantes para o tema em estudo, com o intuito de documentar e orientar a investigação realizada. A primeira parte é dedicada à evolução da Geometria no currículo de Matemática do Ensino Básico e às suas mudanças mais marcantes a partir da década de 60. Na segunda parte são focadas algumas teorias de argumentação, as diferentes abordagens sobre a argumentação matemática, assumidas por diversos autores, e analisados alguns dos instrumentos de análise da argumentação. A terceira parte é centrada na argumentação e na prova matemática, onde se procuram evidenciar não só diferenças e semelhanças entre estes dois campos da atividade matemática, como também o contributo dos ambientes de geometria dinâmica para a descoberta e verificação de conjeturas e, consequentemente, para a procura de argumentos que as justifiquem, dando-se início ao processo de prova, ou que as refutem, sendo rejeitadas ou reformuladas. Na quarta parte, procura-se evidenciar o contributo das tecnologias da informação e comunicação, em particular do GeoGebra, para o desenvolvimento da capacidade argumentativa dos alunos.

2.1. A Geometria no currículo de Matemática do Ensino Básico

A Geometria é um tema que, ao longo dos tempos, tem merecido um especial destaque nos programas dos diferentes anos de escolaridade. Essa atenção deve-se, segundo Matos e Serrazina (1996), ao papel que este tema desempenha em proporcionar ao aluno "uma das formas privilegiadas de adquirir uma intuição e uma orientação espacial crucial para o mundo moderno" (p. 265). Para o NCTM (1991), a importância da Geometria no currículo advém da fonte de problemas não rotineiros que proporciona, o que favorece o desenvolvimento de capacidades, entre outras, de visualização espacial, de raciocínio e de argumentação, identificadas como fundamentais para os cidadãos no presente e no futuro. Como muitos dos conteúdos de Geometria se relacionam com situações que o aluno vivencia no seu dia a dia, as recomendações atuais para o ensino da Matemática defendem metodologias de ensino que considerem as perspetivas que este desenvolve, formalmente e informalmente, e "lhe proporcione os meios e o ambiente para que ele próprio desenvolva os seus conhecimentos" (Matos & Serrazina, 1996, p. 265).

Desde há muito tempo que a Geometria é considerada como o tema do currículo de Matemática onde os alunos aprendem a raciocinar e a compreender a estrutura axiomática da Matemática (NCTM, 2007). Porém, durante muitos anos, o ensino e a aprendizagem da Geometria mantiveram-se num plano estagnado (Junqueira 1996). Na época que antecede o movimento da Matemática Moderna, tanto em Portugal como noutros países, o ensino da Geometria não constituía uma prioridade nos currículos de Matemática. Segundo Veloso (1998), o seu currículo era caracterizado por duas componentes: as construções geométricas, onde se determinavam alguns lugares geométricos e se realizavam cálculos algébricos com segmentos; e a geometria euclidiana no plano e no espaço, no seu estado puro, cujo objetivo consistia em fomentar hábitos de raciocínio rigoroso e sistemático em alunos dos 12 aos 14 anos (atualmente, estas idades correspondem a alunos do 3.º ciclo do ensino básico). A primeira componente incitou alguns professores a realizar atividades de resolução de problemas, enquanto a segunda componente suscitou a rejeição por completo da Geometria, pela maior parte dos alunos, uma vez que a mesma era observada como o domínio ideal para os alunos aprenderem a enunciar e demonstrar um grande número de axiomas, postulados, lemas, corolários e anotações, e a olharem para a matemática como uma construção lógica perfeita.

Na década de 60, surgiu o movimento da Matemática Moderna que colocou o ensino e a aprendizagem da Geometria em detrimento de outros temas da Matemática como a Teoria de Conjuntos, a Álgebra abstrata e a Lógica. Este movimento teve, segundo Matos (2006), dois momentos marcantes: o primeiro caracteriza-se por um renovar do ensino da Matemática, através da reorganização do currículo, de acordo com os trabalhos do grupo Bourbaki; o segundo momento procurou compatibilizar o currículo de Matemática com os trabalhos de Piaget. Realizaram-se vários encontros e convenções (por exemplo, Royaumont em 1959, e Dubrovnik em 1960) com o objetivo de procurar estabelecer um currículo para a Matemática pré-universitária, que unificasse esforços que vinham a ser desenvolvidos em vários países. As reações e polémicas causadas por esta reforma fizeram-se sentir nos finais dos anos 50 e início dos anos 60. Apesar de Dieudonné, um dos promotores da Matemática Moderna, ter censurado a forma como se ensinava a Geometria e ter apelado à intuição nos primeiros tempos de ensino deste tema, a sua preocupação estava exclusivamente relacionada com a preparação dos alunos para o ensino universitário, donde resultou num modelo de axiomática para o ensino da

Geometria baseado na noção de espaço vetorial. Dieudonné, juntamente com o grupo de Bourbaki, reduzem, assim, a geometria euclidiana ao estudo das transformações geométricas como funções.

Em Portugal, em 1962, foi formada uma comissão de revisão do programa do 3.º ciclo liceal, presidida por Sebastião e Silva, para preparar a reforma curricular segundo a ideologia da Matemática Moderna. O ensino era dividido em primário, técnico e liceal e as reformas para os Ensinos Primário e Técnico só se verificaram mais tarde. Foram ministrados cursos de preparação dos professores do liceu para a experiência pedagógica e, em 1963, foi aplicado um currículo experimental a três turmas do 6.º ano liceal e, gradualmente, foi-se aumentando o número de turmas, de professores e de liceus. Apesar de Sebastião e Silva ser um defensor da visualização e da intuição geométrica, com a generalização desta reforma ao ciclo preparatório e ao curso geral unificado, e com a sua morte precoce, a situação do ensino da Matemática em Portugal entrou em declínio. Ao longo dos anos 70 e 80, a Geometria, em particular, foi lentamente afastada dos currículos implementados pelos professores. Esse desaparecimento foi motivado pelos seguintes fatores:

- na corrente bourbakista, a geometria não tinha lugar de destaque, aparecendo próximo da álgebra linear. O caráter intuito da Geometria foi-se perdendo com a abordagem formal das transformações geométricas;
- as construções geométricas, consideradas por muitos professores como atividades interessantes de Geometria, foram transferidas para a disciplina de Educação Visual, sendo consideradas sem a perspetiva matemática;
- a diminuição do papel desta área em detrimento da aritmética, álgebra e análise;
- a memória de uma experiência negativa no ensino da axiomática da Geometria.

Entretanto, foram-se realizando algumas experiências e reflexões sobre o ensino da Geometria com vista a preparar, assim, o seu regresso como tema fundamental dos currículos da matemática escolar. Um dos matemáticos que mais lutou contra o afastamento da Geometria do ensino e, consequentemente, maior influência teve no regresso da Geometria como tema fundamental da matemática escolar, foi o holandês Hans Freudenthal. Segundo este autor, a Geometria era vista como “um meio – talvez o mais poderoso – para que as crianças sintam a força do espírito humano, isto é, do seu próprio espírito” (Freudenthal, 1973, p. 407). No seu livro *"Mathematics as an Educational Task"*, publicado em 1973, Freudenthal apresenta, através de exemplos e comentários, algumas orientações para a renovação do ensino da Geometria. A tradução para inglês das obras dos seus discípulos, Dina e Pierre van Hiele, veio permitir uma expansão das suas ideias, apesar da visão do modelo dos níveis de compreensão dos van Hiele ter sido reduzida e a divulgação da sua abordagem didática limitada (Veloso, 1998). Para estes dois professores holandeses, a Geometria que se ensinava nos anos de escolaridade, correspondentes aos atuais 7.°, 8.° e 9.°, envolvia um grau de raciocínio elevado que exigia aos alunos a realização de experiencias matematicamente desafiantes nos anos de escolaridade anteriores. Assim, o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico dos van Hiele – concebido para ajudar os alunos a compreender as matérias de geometria, assim como para avaliar as suas capacidades – é caracterizado por cinco níveis de compreensão: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. No nível da visualização, os alunos percebem o espaço apenas enquanto algo que existe à sua volta. As figuras geométricas são reconhecidas pela sua forma como um todo e não pelas suas partes ou propriedades. Um aluno situado neste nível, pode aprender vocabulário geométrico, identificar formas e reproduzir figuras geométricas. Quanto ao nível da análise, os alunos começam a distinguir as características das figuras geométricas, através da observação e da experimentação. As figuras geométricas são reconhecidas como possuindo partes e pelas partes. No nível da dedução informal, os alunos começam a estabelecer relações entre as propriedades de uma determinada figura geométrica, bem como entre figuras geométricas. Os alunos podem seguir e apresentar argumentos informais e os resultados empíricos são usados juntamente com técnicas de dedução, na medida em que os alunos não compreendem o significado da dedução como um todo, assim como não assimilam o papel dos axiomas. Relativamente ao nível da dedução formal, os alunos entendem o significado da dedução como um meio de estabelecer uma teoria geométrica dentro de um sistema axiomático. Neste nível, os alunos reconhecem a inter-relação e o papel de termos não definidos, axiomas, postulados, definições teoremas e demonstrações, e conseguem construir demonstrações sem as memorizar. Os alunos admitem, ainda, a possibilidade de desenvolver uma demonstração mais do que uma forma e é reconhecida a interação entre condições necessárias e suficientes. Pode, ainda, ser estabelecida a distinção entre uma afirmação e a afirmação recíproca. No nível do rigor, o aluno pode movimentar-se em diversos sistemas axiomáticos e a Geometria é vista como abstrata. Este último nível é o menos desenvolvido dos quatro níveis por se centrar numa Geometria mais a nível superior.

Os autores consideram que a transição entre cada um dos níveis encontra-se mais dependente da instrução recebida do que a idade ou maturidade geométrica. Assim, os alunos situados num determinado nível de compreensão consoante a sua maturidade geométrica, podem passar sequencialmente para níveis de compreensão superiores se lhes for atribuído um ensino específico que auxilie essa passagem. Deste modo, consegue-se ver as diferenças dos alunos quanto à compreensão geométrica, o que permite aos professores lidarem com essas diferenças e, assim, atuarem em conformidade. No entanto, se um aluno se encontrar num determinado nível de compreensão e, para que ele possa aceder ao nível superior, se se aplicar um ensino apropriado ao nível superior pode, também, acontecer que o impeça de progredir na sua compreensão geométrica. Assim, as interpretações que se dão a este modelo podem ser redutoras e/ou prejudiciais, como salienta o próprio Freudenthal.

Com o decorrer do tempo e devido ao fracasso da Matemática Moderna para resolver os problemas da aprendizagem da matemática, o ensino da Geometria começou, de novo, a ser explorado e defendido por pedagogos e matemáticos, reconhecendo-se o seu papel formativo, em particular, na prova, como um meio para validar institucionalmente o conhecimento matemático. A abordagem à prova matemática está perspetivada para o ensino básico e secundário numa vertente informal, através da exploração de exemplos (Knuth, 2002). O objetivo é o de formular conjeturas que, posteriormente, serão provadas num meio mais formal. Os ambientes geométricos dinâmicos, uma terminologia proposta por Noss, Healy e Hoyles (1994), são, assim, ferramentas fundamentais para gerar exemplos em situações geométricas, na medida em que permitem construir e manipular figuras geométricas no ecrã do computador (Coelho & Saraiva, 2002). O reconhecimento desta situação levou à recuperação da Geometria que, hoje em dia, é largamente explorada. Surgem, assim, discussões relativas à sua abordagem, tanto ao nível dos conteúdos como das metodologias.

Um pouco por todo o mundo, o movimento de regresso da Geometria aos currículos escolares acentuou-se, segundo Veloso (1998), através de várias iniciativas, tais como:

- Criação de novos materiais e softwares para o ensino da geometria, tais como o programa LOGO, de Seymour Papert, *The Geometer Supposer*, *de* Judah Schwartz e Michael Yerushalmy, o *Cabri-géomètre*, de Jean Laborde e Frank Bellemain e o *Geometer's Sketchpad*, de Nicholas Jackiw;
- Realização de encontros e reuniões, tais como os grandes *meetings* sobre o LOGO (Estados Unidos, 1984 e 1986); o encontro sobre poliedros, *Shaping Space: a polyhedral approach* (Estados Unidos, 1984); os *topic* e *working*

groups de geometria nos últimos ICME's (Budapeste, 1988, Quebec, 1992, e Sevilha, 1996); os workshops e a conferência final do projeto de geometria de *S. Olaf* e o seminário *Geometry's Future*, organizado pelo Consortium for Mathematics and its Applications (Estados Unidos, 1990);

– Publicação de diversos livros e documentos sobre geometria, nomeadamente, as *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1991), as Adendas às normas sobre Geometria (NCTM, 1992);

– Criação de grupos de trabalho, o *Learning/Teaching of Geometry*, orientado por Richard Leyer, do *National Center of Research in Mathematical Sciences of Education*, e de projetos no âmbito da geometria, tais como o *University of Chicago School Mathematics Project*, orientado por Zalman Uziskin e que publicou manuais inovadores dos quais o *Geometry*; o projeto *Vertically-Integrate, Inquiry-Based Geometry, a project to transform 6-12 mathematics*, no *St. Olaf College*, programa com a duração de três anos, destinado a professores do ensino secundário e que visava a transformação do currículo de Matemática; o projeto The Connected Geometry, planeado para o desenvolvimento curricular de geometria e que inclui a produção de materiais estabelecendo conexões entre a Geometria e outros temas da matemática escolar; o Visual Geometry Project, dirigido por Eugene Klotz e Doris Schattschneider, onde foram publicados os livros The Platonic Solids e The Stella Octangula e ao qual se deve a criação do programa *Geometer's Sketchpad*; o projeto que produziu várias versões do programa *Cabri Géomètre*, dirigido por Jean Marie Laborde;

– Difusão de novas ideias sobre o ensino da Geometria através de sites da Internet – o *Geometry Forum* (mais tarde denominado *The Math Center*) conhecido pelos materiais e grupos de discussão e o *Geometry Center* pelos seus materiais interativos, produção de software, cursos e seminários.

A publicação das *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar*, do NCTM (1991), constituiu um momento de extrema importância no movimento de recuperação da Geometria uma vez que para além de ter concentrado num único documento as alterações metodológicas que mostram a visão do ensino da Matemática transmitida pelas Normas, são apresentadas, também, propostas de alteração aos programas tradicionais, com especial destaque para a Geometria (Veloso, 1998). Tais *Normas* retratam não só todo um movimento de rejeição da situação em que a Matemática se encontrava após o movimento da Matemática Moderna, como também o aumento do interesse pela Geometria e pelas experiências de ensino que caracterizou a parte final da década de 80 do século passado (Guimarães, 1988; Veloso, 1998) e tiveram grande influência em vários países, como nos Estados Unidos da América e no Canadá (Kilpatrick & Moura, 1999).

Em Portugal, as principais referências para o regresso da Geometria no currículo da Matemática apontam para questões transversais ao currículo, tais como a resolução de problemas, a utilização de computadores e calculadoras no ensino e a gestão da sala de aula. Segundo Veloso (1998), é a partir dos computadores e da sua aplicação no ensino que se acentua o movimento de regresso da Geometria, em que destacam as seguintes iniciativas:

- A criação do projeto Minerva e o aparecimento do programa LOGO, ampliou o interesse por questões e problemas relacionados com a geometria plana, refletindo-se na realização das semanas LOGO;
- A publicação de artigos pela Associação de Professores de Matemática (APM) na sua revista Educação e Matemática, bem como a realização de sessões práticas sobre a Geometria e de encontros anuais;
- A publicação do livro *O Geoplano na sala de aula*, de Lurdes Serrazina e José Manuel Matos (APM), onde, além de promover a utilização do geoplano, divulgava uma metodologia inovadora de ensino da Geometria através de inúmeras propostas de atividades de investigação e de problemas, acompanhados de comentários sobre estes recursos;
- Reformulação de metodologias e alteração dos programas escolares.

Com estas ações, no final da década de 80 foram criadas as condições para se lançar a reforma dos programas de matemática, que assentou em dois processos de revisão curricular paralelos mas distintos: um para o ensino básico e outro para o ensino secundário (Santos, Canavarro & Machado, 2006). No que diz respeito à Geometria, verificou-se uma maior preocupação em ampliar o espaço reservado a esta área da Matemática, chegando a atingir mais de 40% do tempo letivo total. Ao nível das orientações curriculares, Veloso (1998) realça o valor da intuição e da utilização de materiais manipuláveis. Apesar destas mudanças positivas, o autor enuncia alguns constrangimentos, nomeadamente:

- uma visão global redutora dos problemas e das respetivas soluções. Um exemplo disso foi a divisão das transformações geométricas por ano de escolaridade – simetrias no 6.º, semelhanças no 7.º, rotações no 8.º e translações no 9.º ano de escolaridade;
- um estímulo positivo insuficiente para a utilização de computadores no ensino da Matemática, em geral, e da Geometria, em particular;
- uma inexistência de consciencialização quanto ao nível de formação dos professores e à necessidade de criação de condições físicas nas escolas.

Ainda na linha de pensamento do autor, o programa de Matemática generalizado desde 1993 persiste na apresentação hipotético-dedutiva da Geometria e aborda a geometria analítica como um tema isolado, ignorando as recomendações recentes sobre a renovação da Geometria propostas pelas Normas do NCTM. Decorridos dois anos, foram propostos e discutidos diversos ajustamentos ao programa de Matemática, com o objetivo de o substituir no ano letivo de 1997-1998. Apesar do ajustamento do programa de Matemática ter sido considerado uma experiência exemplar (Veloso, 1998), quanto à Geometria do ensino secundário continuou a ser vista como uma preparação para o prosseguimento de estudos superiores. Deste modo, mantiveram-se algumas falhas, nomeadamente um desequilíbrio entre a Geometria Intuitiva e a Geometria Analítica, a inexistência das transformações geométricas e das geometrias não-euclidianas e a ocupação quase exclusiva da trigonometria na Geometria do 11.° ano de escolaridade.

Para Goldenberg (1998), os cursos de Geometria reduzem-se a tentativas de réplicas fiéis de Euclides, diferindo da formalidade euclidiana nos principais resultados de Geometria que são geralmente enunciados, em vez de derivados. Segundo este autor, a Geometria caracteriza-se por ser indutiva na medida em que o raciocínio é orientado do específico para o geral, com base na experiência e pelo método da descoberta. A Geometria é, então, perspetivada como um meio de desenvolvimento de hábitos de pensamento e de novas experiências, determinadas, em parte, pelos materiais curriculares e pelas suas orientações.

Como refere Laborde (1993), aprender Geometria com papel, lápis, régua e compasso é diferente de aprender Geometria recorrendo a materiais manipuláveis, que, por sua vez, é diferente de aprender Geometria recorrendo aos ambientes geométricos dinâmicos. Estes libertam-nos de tarefas mecânicas e rotineiras, de construção, de medição e de cálculos, deixando tempo para um trabalho mais dinâmico e ativo em Geometria. Numa sociedade em constante mudança, o progresso tecnológico tem um papel preponderante no ensino da Geometria, permitindo não só aos alunos adquirirem conhecimentos de uma forma dinâmica, como também criarem oportunidades de manipulação, experimentação e construção de figuras de tal forma a serem levados a intuir as suas propriedades e a sentir a necessidade de descobrir todos os casos em que estas se mantêm. As teorias construtivistas constituem, atualmente, o modelo de referência no processo de ensino—aprendizagem, tornando-se imprescindível o recurso às novas tecnologias da informação e comunicação, tais como a máquina de calcular, o computador, o quadro interativo e a Internet. Assim, mais facilmente se proporciona uma diversidade nas abordagens dos conteúdos, bem como nas formas de pensar, de comunicar e na troca de conhecimentos. Fazendo apelo à intuição e à visualização e recorrendo, com naturalidade, à manipulação de materiais, a Geometria torna-se uma área especialmente propícia a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas, desde os níveis escolares mais elementares (Abrantes, 1999). Segundo este autor, esta área é propícia ao desenvolvimento de tarefas de natureza exploratória e investigativa na sala de aula, constituindo, assim, argumentos fortes para a sua valorização no currículo e nas aulas de Matemática.

Em 2007 foi aprovado um reajustamento do programa de Matemática do ensino básico de 1991, que apresenta alterações significativas ao nível de estrutura, do conteúdo e linguagem com que as propostas programáticas são apresentadas, assim como ao nível da própria natureza dessas propostas. O novo programa é organizado por ciclos e estruturado em quatro grandes temas – Números e operações, Álgebra, Geometria e Organização e Tratamento de dados – e destaca três capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática – Resolução de problemas, Raciocínio matemático e Comunicação matemática. O tema da Geometria, presente nos três ciclos, surge tendo como "ideia central o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos" (Ministério da Educação, 2007, p. 7), que pode ser definido como uma intuição sobre as formas e as relações entre as formas e inclui a capacidade para visualizar mentalmente objetos e relações espaciais (van de Walle, 2004). Neste tema, o estudo das transformações geométricas ocorre de forma crescente desde o 1.º ciclo; no 2.º ciclo aprofunda-se o estudo das propriedades dos polígonos e a sua classificação e no 3.º ciclo destaca-se a inter-relação plano-espaço, introduz-se a relação de semelhança, o Teorema de Pitágoras e razões trigonométricas no triângulo retângulo e ampliam-se os conceitos de área e volume trabalhados anteriormente. Relativamente às orientações do anterior programa, o novo programa de Matemática do ensino básico valoriza a demonstração, a argumentação e a discussão de ideias, processos e resultados matemáticos. Assim, o aluno deve apresentar, em todo o seu processo ensino-aprendizagem, um papel mais interventivo – o aluno deve ser estimulado a envolver-se em tarefas e descobrir estratégias para as resolver, ouvir e praticar e fazer, argumentar e discutir problemas, raciocínios e estratégias.

2.2. A argumentação em Matemática

A abordagem à argumentação apresenta as suas origens num processo de retórica da antiga civilização grega, por volta do século V a. C. Entenda-se *processo de retórica* como todo o ato de bem falar de modo a persuadir pelo discurso (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1999). Conta-se que, nessa época, a Sicília era governada por dois tiranos que expropriavam terras para as distribuírem pelos seus soldados. Por volta de 427 a. C., uma rebelião derrubou a tirania e os antigos proprietários das terras expropriadas reclamaram-nas, gerando um grande número de processos judiciais. Foi neste contexto que Córax e seu discípulo Tísias teriam escrito o primeiro texto, ou "método raciocinado", para falar em tribunal, ou, noutros termos, o primeiro tratado de argumentação. Plantin (1996) atribui o início da reflexão sobre a argumentação aos sofistas (séculos V e IV a. C.). Considerados autênticos sábios, submeteram a graves críticas os conceitos éticos e sociais existentes nessa época. Assim, o pensamento e a prática sofista foi alvo de duras contestações, nomeadamente por Platão (427–347 a. C.). Foram as adulterações às críticas que Platão dirigiu a este pensamento que provocaram um descrédito em todo o pensamento sofista. Deste modo, passou-se a ligar a Aristóteles (384–322 a. C.) o início da reflexão sobre argumentação. Segundo Oléron (1996), já na era aristotélica a noção de argumentação apresentava uma visão retórica e científica, campos que podem ser identificados nas suas obras *Tópicos* e *Analíticos*, como uma forma de raciocínio, e na sua obra *Retórica*, como um meio de persuasão. Para Perelman (1993), o interesse de Aristóteles pelos raciocínios analíticos foi responsável pelo epíteto de *pai da lógica formal*. Grácio (2010) salienta o facto de Aristóteles conferir às questões de raciocínio prático uma maior intencionalidade persuasiva do discurso, sendo esta inevitável quando são abordadas questões classificáveis como ambíguas – questões com, pelo menos, duas respostas possíveis e que levantam problemas de escolha e de preferência. Deste modo, fica aberto o espaço da deliberação e da ação que se caracteriza pela tentativa não só de se chegarem a conclusões como também de se abrirem caminhos de ação. Estes caminhos ou planos de ação, entre o espaço dos possíveis e o das opções admissíveis, não são arbitrários, uma vez que é pretendido reforçar o desenho do assunto que está em causa relativamente a quem produz o discurso e ao auditório que o considerará. Para este autor, o auditório é visto não só como "aqueles a quem o discurso se dirige (...) [como também] aqueles que têm poder de deliberar (Grácio, p. 23).

Em conformidade com esta linha de pensamento, Coelho (1999) indica dois modos básicos de raciocínio adotados por Aristóteles – o raciocínio analítico, que se fundamenta em proposições evidentes, isto é garantem a própria certeza e conduzem o pensamento a conclusões verdadeiras, e a argumentação dialética, que se baseia em enunciados prováveis, opiniões aceites por todos, pela maioria ou pelos sábios, e dos quais se podem retirar conclusões apenas verosímeis. Para este autor, apesar de não ser desenvolvido, explorado ou considerado na mesma medida estes dois modos básicos de raciocinar (argumentações analíticas e argumentações dialéticas), é estabelecido um paralelo entre o silogismo analítico, onde assenta toda a lógica formal, e o silogismo dialético, expresso através de argumentos sobre enunciados prováveis, não se notando qualquer tipo de hierarquização entre estas duas formas de raciocínio – "elas não se excluem mutuamente, não se sobrepõem, não se substituem uma à outra" (Coelho, 1999, p. 12). No entanto, esta equiparação foi-se perdendo com a evolução do pensamento filosófico, tendo-se dado, na perspetiva deste autor, e durante vinte e três séculos, uma notável importância aos métodos do conhecimento (rigoroso e verdadeiro) e relegado para segundo plano a dialética. A contribuição de Perelman, segundo Coelho (1999), foi essencial para reabilitar a retórica e o raciocínio dialético de Aristóteles, delimitando a teoria da demonstração da teoria da argumentação. Para Perelman (1993), a lógica foi vista, até meados do século XIX, como uma lógica formal assente nos raciocínios analíticos aristotélicos, em detrimento dos raciocínios dialéticos, visão que o autor condena na medida em que, se por um lado a lógica formal assenta em operações e cálculos, por outro lado também estimula o raciocínio mesmo quando não se calcula. Mais ainda, quando se apresentam argumentos que validam ou refutam um determinado assunto, na perspetiva do autor, não se prova, como acontece em Matemática, antes argumenta-se. Deste modo, a lógica pode envolver o estudo do raciocínio sobre todas as suas vertentes se for complementada com uma teoria da argumentação baseada nos raciocínios dialéticos aristotélicos.

Embora a argumentação seja considerada, em termos retóricos, como uma forma de justificação persuasiva e como um recurso para a obtenção de consensos através de estratégias argumentativas (formas dedutivas, indutivas, abdutivas, analógicas, metafóricas, causais, pessoais,...), Grácio (2010) destaca a dinâmica argumentativa interativa onde privilegia as situações de contraposição de discursos, de interação entre perspetivas alternativas e incompatíveis sobre um assunto em questão. É este assunto em questão que faz com que surja e seja definido o espaço argumentativo, ou campo argumentativo (Toulmin, 1958), ou seja, um espaço de confrontação de perspetivas. Uma situação pode caracterizar-se como argumentativa quando um assunto levanta questões, quando suscita pontos de vista diferentes, tensões discursivas entre eles (discursos e contradiscursos) e produz razões (argumentos) que reforçam a forma de ver a questão. Estas divergências dependem ainda da natureza dos assuntos, das questões, das situações, dos argumentadores e das oportunidades, que, por sua vez, são condicionadas pela forma de raciocínio ou de estratégia seguidas.

A ideia de que se argumenta porque se é instado a argumentar, ideia partilhada por alguns autores (Angenot, 2008; Goodwin, 2005), é importante na medida em que, segundo os mesmos, permite ligar a argumentação a situações específicas, situações onde o argumentador se encontra envolvido e onde, aparentemente, é colocada em causa a sua identidade e a honorabilidade da sua existência. Naturalmente que o ato de argumentar apresenta os seus constrangimentos (Grácio, 2010). Para este autor, numa argumentação, além de estar em causa o que gostaríamos de expor, também deve ser alvo da nossa atenção o que devemos trazer à nossa conversação, não descurando todo o conjunto de regras e normativas que acompanham a abordagem e enquadramento do assunto em questão. Assim, o auditório e a adaptação necessária para que o discurso flua e se revele eficaz, fazem parte de um desses constrangimentos. Um outro constrangimento que o autor destaca é o que decorre da natureza específica do assunto em causa e prende-se com a seletividade do assunto que, por sua vez, está relacionada com a capacidade de discernir por forma a mostrar caminhos e modos de ver passíveis de justificação.

Modelos argumentativos comuns

Os modelos argumentativos de Toulmin e de Perelman têm servido de base para estudos que analisam e documentam diferentes formas de aprendizagem e de padrões encorajadores da argumentação, bem como para a criação de ambientes propícios à discussão na sala de aula (Boavida, 2005; Krummheuer, 1995; Pedemonte, 2002; Yackel, 2001; Whitenack & Knipping, 2002). Porém, os estudos argumentativos desenvolvidos por Toulmin e Perelman apresentam perspetivas diferentes. Mais recentemente, surgiu uma teoria sistemática da argumentação, o modelo pragma-dialético de van Eemeren e Grootendorst (2004), com o objetivo de conjugar as vertentes descritiva e normativa da argumentação.

Modelo argumentativo de Toulmin. Numa forma reduzida, o modelo de argumentação de Toulmin é composto por três noções – dados (D), conclusão (C) e garantia (G) – que se articulam por uma seta que liga o dado factual (D) à conclusão (C), através de uma lei de passagem (G) e pode ser representado pelo esquema representado na Figura 1.

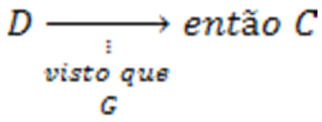


Figura 1: Forma reduzida do modelo de argumentação, segundo Toulmin.

Segundo Toulmin, uma afirmação pode ser alvo de contestação caso não esteja apoiada em dados válidos e fortes. Os dados, sendo caracterizados por asserções válidas que não são colocadas em causa, são a base para uma conclusão sólida. No caso de se levantarem questões relativas à natureza e validade da passagem entre dados e conclusão, a mesma deve ser, como sustenta Toulmin (1993), reforçada por proposições (conjunto de regras, princípios e enunciados,...). Estas proposições são designadas por garantias (G) e funcionam como a "autoridade racional" (Toulmin, Rieke & Janik, 1984, p. 49), não impedindo que a mesma seja questionada. Assim, os dados (D) ficam ligados à conclusão (C), ligação esta que fica validada pela garantia (G). Qualquer argumento pode ser expresso na forma dados–garantias–conclusão (Toulmin, 1969), que Krummheuer (1995), denomina por "forma mínima de argumentação" (p. 243), ou ainda, segundo Plantin (2010), se traduz numa abordagem dos elementos constitutivos do raciocínio argumentativo a que chama a "célula argumentativa" (Plantin, 2010, p.24).

Uma outra forma de representar o modelo de argumentação de Toulmin ()surge quando os dados (D) e as garantias (G) não são suficientes para analisar um discurso argumentativo. O autor propôs outros elementos que visam reforçar a conclusão, designadamente: o fundamento (F), os qualificadores modais (Q) e as condições de exceção ou refutação (R). Estes componentes, juntamente com os anteriores, relacionam-se do seguinte modo (Figura 2):

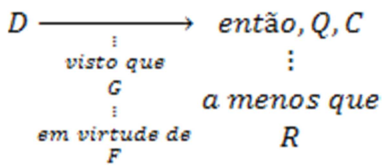


Figura 2: Modelo de argumentação, segundo Toulmin (adaptado de Boavida, 2005)

A introdução destes novos componentes no padrão toulminiano de análise das argumentações está direcionada para a questão da força da argumentação. O fundamento (F) reforça a legitimidade da garantia (G), indicando porque é que essa garantia deve ser aceite. O qualificador modal (Q) designa a força que a garantia atribui à articulação entre dados e conclusão. Por fim, as condições de exceção ou refutação (R) indicam as causas que anulam a aceitabilidade da garantia (G). No contexto argumentativo interativo, uma proposição é refutada quando é abandonada pelo proponente, ou seja, quando se constata que desaparece da interação (Plantin, 2010).

Através da análise do trabalho de Toulmin e de trabalhos realizados com base no seu esquema de argumentação (e.g., Boavida, 2005; Bustamante, 1999; Driver, Simon & Osborne, 2000), sintetizam-se no Quadro 1 os componentes do modelo argumentativo do autor.

Quadro 1: Caracterização dos elementos do discurso argumentativo proposto por Toulmin, segundo Boavida

Componentes	Caracterização dos componentes
Dados (D)	Elementos, não necessariamente empíricos, que apoiam e fundamentam a Conclusão.
Garantia (G)	Proposições que validam a relação entre Dados e Conclusão.
Fundamento (F)	Condições ou afirmações científicas que reforçam a legitimidade e aceitabilidade da Garantia como autoridade.
Qualificador modal (Q)	Proposições ou enunciados que designam a força que a Garantia, em virtude do Fundamento, atribui à articulação entre Dados e Conclusão.
Condições de exceção ou Refutação (R)	Causas que anulam a aceitabilidade da Garantia e especificam quando a Conclusão não é válida.
Conclusão (C)	Asserção ou enunciado que se pretende legitimar.

A lei de passagem, identificada no esquema proposto por Toulmin, tem como função transferir para a conclusão o acordo conferido ao argumento (Plantin, 2010) e atribui ao dado um sentido argumentativo, até então inexistente, permitindo-lhe, deste modo, adquirir uma orientação para a conclusão. Para Grácio (2010), a lógica informal está geralmente associada a perguntas críticas. É através da força das suas premissas e da regra de passagem para a conclusão que se testa a força de um argumento.

O modelo de Toulmin representa, assim, um esquema geral de argumentação, que, como sustenta Krummheuer (1995), apresenta componentes que podem variar de acordo com a análise das interações. Para este autor, apesar de este modelo estar mais centrado em monólogos argumentativos (ou interações individuais), a argumentação na sala de aula envolve uma interação argumentativa direta dos protagonistas intervenientes. Ainda na linha de pensamento do autor, estamos perante uma argumentação coletiva, na medida em que se vão produzindo discursos coletivos e que, por sua vez, os mesmos vão-se modelando até obter um conjunto de afirmações consensuais. Toulmin defende que no dia a dia ninguém argumenta com base em silogismos analíticos. Se existirem duas premissas aceites pela audiência, nada garante que essa mesma audiência valide a conclusão, contrariamente ao que aconteceria se fossem adotadas as regras da lógica formal. No entanto, a lógica não deve ser eliminada da argumentação, devendo estar presente mas de um modo informal (Krummheuer, 1995; Toulmin, 1958). Para Pedemonte (2002) e Knipping (2004), este modelo argumentativo é uma ferramenta que permite analisar e refletir sobre as argumentações individuais dos alunos e comparar a argumentação com a demonstração/prova. Foi a partir da análise do modelo de toulminiano que Pedemonte (2002) classificou, do ponto de vista estrutural, a argumentação em três vertentes: dedução, abdução e indução. Na argumentação dedutiva, a conclusão (C) é obtida pelos dados (D) através de princípios da lógica que permitem a sua inferência. Na argumentação abdutiva, a conclusão (C) é inferida por representar a melhor explicação para os dados (D) enunciados nas premissas, ou seja, um determinado princípio permite a asserção de uma conclusão, mesmo que não estejam disponíveis todos os dados. Na argumentação indutiva, a conclusão (C) é obtida por uma extensão dos dados (D), o que conduz à construção de novos conhecimentos a partir de casos particulares. No caso da validade das premissas garantirem a validade das conclusões, os argumentos dizem-se dedutivos e quando estes são bem formados podem ser designados por argumentos válidos (Weston, 1996). Para Bortolleto e Carvalho (2009), o modelo toulminiano mostra-se eficaz para organizar dados empíricos, justificações e conhecimento básicos, para enunciar explicações, assim como para estruturar refutações e qualificadores, com o objetivo de compreender uma teoria científica.

Apesar de este modelo servir de base para diversos estudos, não deixa de apresentar algumas limitações. Knipping (2004) destaca que o modelo é profícuo na análise de etapas argumentativas individuais dos alunos, fracassando na análise da estrutura global dos processos de prova. Cada um dos componentes do modelo pode assumir mais do que uma funcionalidade na argumentação, o que torna difícil distinguir a conclusão principal das anteriores (Brink-Budgen, 2004) bem como diferenciar alguns dos elementos argumentativos, tais como os dados das justificações e os fundamentos teóricos das justificações (Erduran, Simon & Osborne, 2004).

Modelo argumentativo de Perelman. Na obra '*Tratado da Argumentação. A Nova Retórica*', de Perelman e Olbrechts-Tyteca (1958), surge um outro modelo argumentativo amplamente reconhecido e seguido por vários autores. Neste modelo, o efeito da argumentação é classificado de acordo com a sua repercussão no auditório, interpretado como o conjunto daqueles que o orador quer influenciar pela sua argumentação (Perelman, 1993) e no qual qualquer argumentação se desenvolve (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1999). Na obra supracitada, Plantin (2010), Boavida (2005), ... agrupam as técnicas argumentativas em três categorias: as argumentações quase-lógicas, as argumentações baseadas na estrutura do real e as argumentações que fundamentam a estrutura do real.

As argumentações quase-lógicas são definidas como argumentações próximas do raciocínio formal e são de natureza lógica ou matemática. Na natureza lógica, situa-se a contradição, a identidade e a transitividade; na natureza matemática, situam-se as relações da parte com o todo, do menor para o maior e a relação de frequência (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1999). Plantin (2010) sustenta que a definição e a discussão deste tipo de argumentações aproximam-se da definição de paralogismo, definida, segundo o autor, como uma "argumentação que não respeita as regras que asseguram a validade de um silogismo" (p. 31).

As argumentações baseadas na estrutura do real apoiam-se tanto em ligações de sucessão, existentes entre os elementos do real, que aliam um fenómeno às suas causas e consequências, como em ligações de coexistência que unem a pessoa aos seus atos e o grupo aos seus constituintes. Quanto às ligações de sucessão, Perelman (1987) apresenta como exemplo o argumento da direção que se caracteriza por apresentar um ato não como um fim, mas como um conjunto de etapas numa certa direção. As ligações de coexistência podem ser exemplificadas pelo argumento de autoridade ou argumento de confirmação (Plantin, 2010), onde é apresentado um conjunto de atos ou juízos de uma pessoa ou de um grupo de pessoas como meio para provar uma determinada tese (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1999). Por último, as argumentações que fundamentam a estrutura do real instituem um modelo ou uma regra geral a partir de um caso conhecido. São modelos desta técnica argumentativa os raciocínios pelo exemplo, pelo modelo, pela analogia e pela metáfora (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1999).

A teoria da argumentação de Perelman (1958) defende, segundo Boavida (2005), que o efeito da argumentação depende dos vários tipos de argumentos que surgem na prática discursiva, conduzindo a uma teoria argumentativa mais descritiva do que normativa, contrariamente à teoria de Toulmin (1993) que se baseia na contestação da lógica formal. Também Grácio (2010) enfatiza a ideia de ausência de uma perspetiva normativa no modelo argumentativo de Perelman e Olbrechts-Tyteca, salientando a atitude descritiva e exemplificadora que o caracteriza. Para este autor, a eficácia e a qualidade dos auditórios são considerados como critérios únicos para a avaliação dos argumentos. Van Eemeren (2002) sustenta, ainda, que os modelos argumentativos destes dois filósofos desenvolveram-se reactivamente contra a lógica, centrando-se exclusivamente em argumentos de raciocínios isolados e ignorando os seus aspetos pragmático, contextual e situacional. Deste modo, a abordagem retórica da argumentação torna-se insuficiente para justificar a forma como os esquemas argumentativos são usados como garantia (van Eemeren & Grootendorst, 2004). Apesar de divergentes, Boavida (2005) salienta o facto de estes dois modelos apresentarem algumas afinidades, nomeadamente a recusa da separação das construções lógicas e o esforço de racionalidade do pensamento não formal.

Modelo argumentativo de de van Eemeren e Grootendorst. As teorias de argumentação podem derivar de uma teoria preliminar do argumento ou da dimensão da interação presente na argumentação (Grácio, 2010). No primeiro caso, é favorecido o discurso monológico, sendo objeto de análise o discurso de alguém que apresenta uma posição justificada por argumentos. No segundo caso, é estabelecida uma ligação funcional entre o tipo de diálogo, o seu objetivo e os movimentos efetuados pelos participantes. No entanto, para o autor, nestas duas concepções verifica-se a ausência de uma articulação entre assunto, discurso e contradiscurso, bem como da análise da argumentação como uma forma de contrapor argumentos a outros argumentos, teses a outras teses e perspetivas a outras perspetivas. Deste modo, *o ponto de partida de uma argumentação não é a apresentação de argumentos, mas a oposição entre discursos* (Grácio, 2010, p. 51).

Com o objetivo de conjugar as perspetivas descritiva e normativa da argumentação, van Eemeren e Grootendorst (2004), considerados os mentores da perspetiva pragma-dialética, apresentam uma teoria sistemática da argumentação que permite associar três campos: (i) a identificação de um discurso argumentativo, no qual se procura identificar o uso da linguagem como argumentativo, em que as afirmações têm uma função e uma finalidade específicas; (ii) a análise de um discurso argumentativo, com o qual se pretende determinar se o discurso argumentativo conduz, ou não, à tomada de posições; (iii) a avaliação de um discurso argumentativo, onde são analisadas situações de contestação e cujo critério de avaliação é dado pela submissão, ou não, dos discursos ao modelo de discussão crítica proposto. Deste modo, os autores apresentam um processo argumentativo no qual determinado assunto problemático, o assunto em questão, admite abordagens e pontos de vista diferentes, originando situações de discussão crítica, isto é de oposição. Este esquema é dividido em quatro fases — a confrontação, a abertura, a argumentação e o final da argumentação — que constituem a base descritiva à qual se associam aspetos normativos (Grácio, 2010). A *confrontação* é caracterizada pela apresentação do assunto em questão ou da discordância sobre um determinado ponto de vista. Através da contradição ou da dúvida torna-se visível a objeção à opinião manifestada por um dos interlocutores, sendo esta fase indispensável para a concretização da discussão crítica. A *abertura* gera a discussão produtiva que está, usualmente, implícita no seu contexto. É conseguida através de um compromisso mútuo que assenta no conhecimento comum que ambas as partes partilham – o formato da discussão, o conhecimento prévio do assunto em questão e o dever de reagir criticamente à opinião e à defesa da outra parte. A *argumentação* é, assim, evidenciada pelas premissas favoráveis a uma determinada opinião que o protagonista apresenta e que leva à refutação das críticas ou ao esclarecimento das dúvidas colocadas pelo antagonista. Por sua vez, o antagonista analisa o argumento e, caso o mesmo não seja convincente, expressa uma opinião contrária à do protagonista, originando novos argumentos e a inversão de papéis. Nesta fase, para se resolverem as diferenças de opinião, é importante apresentar argumentos fortes que validem cada uma das opiniões e, também, avaliar criticamente cada argumento. Deste modo, uma discussão pode configurar-se como crítica quando ocorrerem estes dois fatores. Por último, é apresentado o *final da argumentação*, fase em que é avaliada a tentativa de resolução das diferenças de cada uma das abordagens. A resolução do conflitos só ocorrerá, de facto, se ambas as partes estiverem de acordo quanto à aceitabilidade da opinião do protagonista e se todas as dúvidas do antagonista forem esclarecidas.

Para Grácio (2010), é na interatividade entre interlocutores que os argumentos manifestam o seu verdadeiro poder argumentativo. Desta forma, esquematizou a proposta descritiva de van Eemeren da seguinte forma:

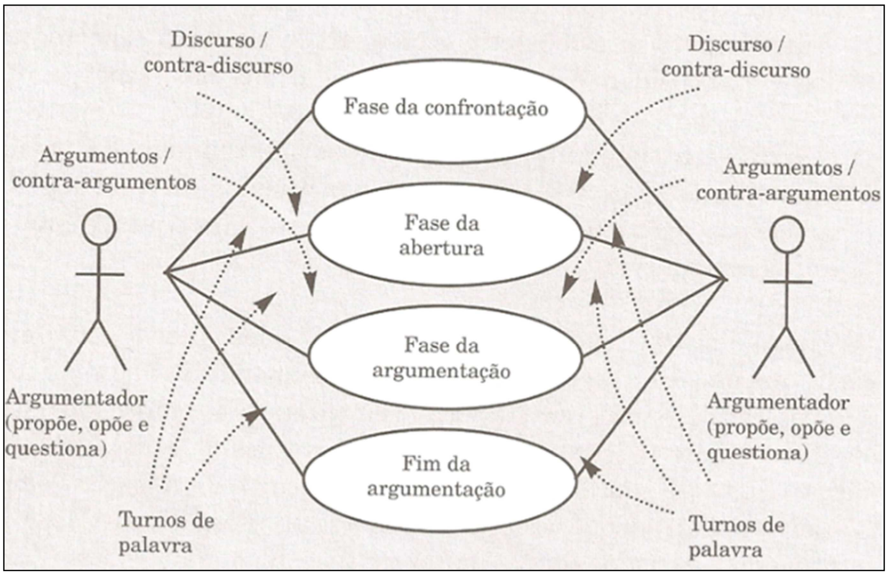


Figura 3: Abordagem interaccionista de argumentação (adaptado de Grácio, 2010)

Grácio (2010) considera que este esquema argumentativo apresenta vantagens relativamente aos modelos de Toulmin e de Perelman, na medida em que proporciona uma diversidade de pontos de vista e fomenta situações de oposição, "a situação argumentativa nasce da oposição entre discursos sobre um determinado assunto em questão" (p. 56). No entanto, o autor não interpreta a fase do final da argumentação da mesma forma que van Eemeren. Sustenta que uma argumentação não tem que, necessariamente, apresentar uma conclusão nem, tão pouco, apresentar a resolução de conflitos. Para o autor, numa argumentação, o confronto de perspetivas deve predominar em detrimento da avaliação de argumentos. Assim, pretende mostrar que, perante contradiscursos, uma determinada forma de perspetivar é preferível a outras formas que se encontram em análise. Grácio acrescenta ainda que, para fins de análise, a estrutura de van Eemeren permite reconhecer que a maior parte das interações comunicativas não atingem a fase da argumentação, limitando-se a atingir a fase da confrontação.

Com a inclusão da visão retórica num quadro pragmático-dialético, van Eemeren e Grootendorst (2004) sustentam que ficou, assim, criada uma nova perspetiva para o estudo da argumentação, que supera a tradicional divisão entre a abordagem dialética e a abordagem retórica de discurso argumentativo através da possibilidade de uma abordagem integrada em que ambas as visões, dialética e retórica, são invariavelmente consideradas.

Instrumentos de análise da argumentação

Para caracterizar as formas de aprendizagem e os padrões encorajadores da argumentação, regularmente os investigadores recorrem a esquemas argumentativos analíticos, como o modelo toulminiano, modelo centrado exclusivamente na estrutura dos argumentos (Grácio, 2010). Assim, os esquemas de análise que lhe são posteriores constituem um complemento ao modelo de Toulmin, apresentando instrumentos analíticos que se centram na caracterização de cada um dos elementos argumentativos, sem, no entanto, abarcar todos eles (Bustamante, 1999; Jorge & Puig, 2000; Kelly & Takao, 2001; Sunal & Tirri, 2001; Sadler & Fowler, 2006).

A visão dialógica da argumentação pode ser encarada como um processo de análise de diferentes perspetivas com o objetivo de alcançar um acordo sobre afirmações ou campos de ação (Driver et al., 2000), salientando as interações que os indivíduos ou os grupos realizam para as mesmas serem aceites (Skoumios, 2009). É através do processo argumentativo dialógico que os alunos articulam as suas justificações para apoiarem as suas afirmações (Driver et al., 2000), resolvem problemas e alcançam o conhecimento (Duschl & Osborne, 2002), permitindo-lhes ir mais além da simples justificação ou refutação de determinada perspetiva (van Eemeren, Grootendorst & Henkemans, 2002). Foi a partir desta perspetiva que os investigadores Clark e Sampson (2008) identificaram a argumentação dialógica como um processo de propor, apoiar, avaliar e refinar perspetivas com o intuito de dar sentido a um problema complexo ou mal definido. No seu estudo, são salientadas as formas como os alunos se envolvem na argumentação quando o objeto da discussão envolve conceitos científicos e onde são analisadas várias estruturas argumentativas, designadamente: a qualidade conceptual das suas ideias, a qualidade dos seus argumentos e a relação entre os tipos de afirmações que os alunos fazem e os níveis de oposição. A avaliação da eficácia das estruturas argumentativas permite promover a qualidade da argumentação dialógica que, por sua vez, possibilita aos investigadores analisar possíveis conexões entre argumentação e o objeto de aprendizagem. Deste modo, recorreram a sistemas analíticos de níveis para classificar as estruturas argumentativas.

Para classificar a qualidade do argumento, Clark e Sampson (2008) recorreram à análise do uso de evidências empíricas (Dados) como suporte da Conclusão. Para isso, definiram um sistema analítico de quatro níveis, por ordem crescente de qualidade: no nível 0, situam-se as afirmações sem fundamento ou que não apresentam suporte empírico; no nível 1, localizam-se os fundamentos que incluem uma só explicação mas não é apresentada evidência empírica; no nível 2, posicionam-se os fundamentos que incluem evidências empíricas; no nível 3, encontram-se os fundamentos que incluem explicações conjugadas com evidências empíricas. Para aumentar a fiabilidade do processo de codificação, os investigadores apresentaram um diagrama (Figura 4) constituído por um grupo de questões que permitem alcançar um dos níveis referenciados.

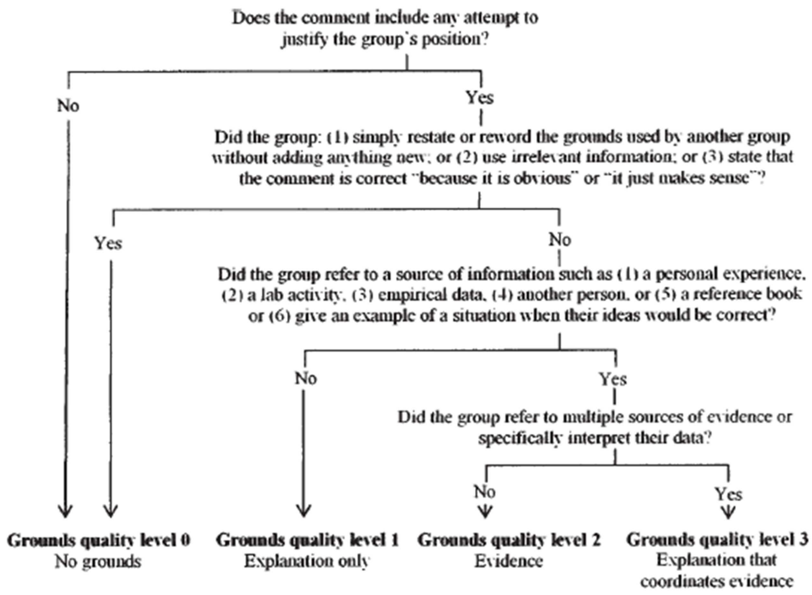


Figura 4: Diagrama para a análise dos fundamentos de um discurso argumentativo (Clark & Sampson, 2008)

Para caracterizar e classificar a qualidade de um argumento como apoio à conclusão (C) estabelecida, outros autores, como Sunal, Sunal e Tirri (2001) e Kelly, Regev e Prothero (2005), criaram outros sistemas analíticos de níveis de qualidade das estruturas argumentativas, ainda que, no geral, idênticos aos de Clark e Sampson (2008). Sunal, Sunal e Tirri (2001) realizaram um estudo com alunos entre os 13 e 15 anos com o objetivo de investigar a forma como os alunos usavam as evidências e compreendiam as suas limitações na construção e argumentação de um caso. Para isso, criaram um sistema analítico para caracterizar a qualidade do argumento com vista a sustentar a conclusão (C). Com base nesta particularidade, idealizaram quatro categorias relacionadas com o número de conclusões (C) e o suporte dado às mesmas. No nível 0, encontram-se os argumentos que, apresentando uma ou várias conclusões, não exibem qualquer tipo de suporte. No nível 1, figuram os argumentos que apresentam uma única conclusão (C) sustentada por justificações (J). No nível 3, os argumentos são caracterizados por conterem várias conclusões (C), simples ou competitivas, suportadas tanto por justificações (J) e qualificadores modais (Q) como por Refutações (R). Por fim, o nível 4 é caracterizado por emitir julgamentos através de diferentes argumentos. Os resultados permitiram mostrar que a maior parte das asserções realizadas pelos alunos situam-se no nível 3 de argumentação e são fundamentadas através de refutações e de outras afirmações opositoras. Indicaram, ainda, que os grupos de alunos desenvolveram algumas das características da argumentação e um conjunto de aptidões usadas na construção e argumentação de um caso probatório. No entanto, os alunos necessitaram de orientação para poderem desenvolver o uso de provas e o conhecimento das suas limitações. Baseado na sua capacidade de usar evidências e identificar as suas limitações, foi, também, possível categorizar a argumentação do aluno.

Para caracterizar a qualidade conceptual da argumentação dos alunos, Clark e Sampson (2008) definiram quatro níveis, por ordem crescente de qualidade: no nível 0, situam-se os argumentos *não-normativos*; o nível 1, os argumentos transitórios; no nível 2, os argumentos normativos; no nível 3, encontram-se os argumentos multinormativos. De acordo com estes autores, a natureza não-normativa de um argumento corresponde a asserções cientificamente incorretas. O caráter transitório dos argumentos é evidenciado por características transitórias e/ou normativas e equivale a afirmações cientificamente corretas e incorretas. O caráter normativo de um argumento é manifestado através de características tanto transitórias como normativas e são baseadas em concepções cientificamente corretas. A natureza multinormativa de um argumento inclui características maioritariamente normativas, embora possam apresentar um ou outro argumento de caráter transitório.

A codificação da qualidade conceptual de um argumento inicia-se com a determinação da quantidade de aspetos não-normativos, transitórios e normativos que estão considerados como parte do argumento. Posteriormente, para facilitar a classificação desta estrutura argumentativa, os investigadores incluíram um outro diagrama (Figura 5) que determina a qualidade geral conceptual de um argumento através de uma série de decisões binárias.

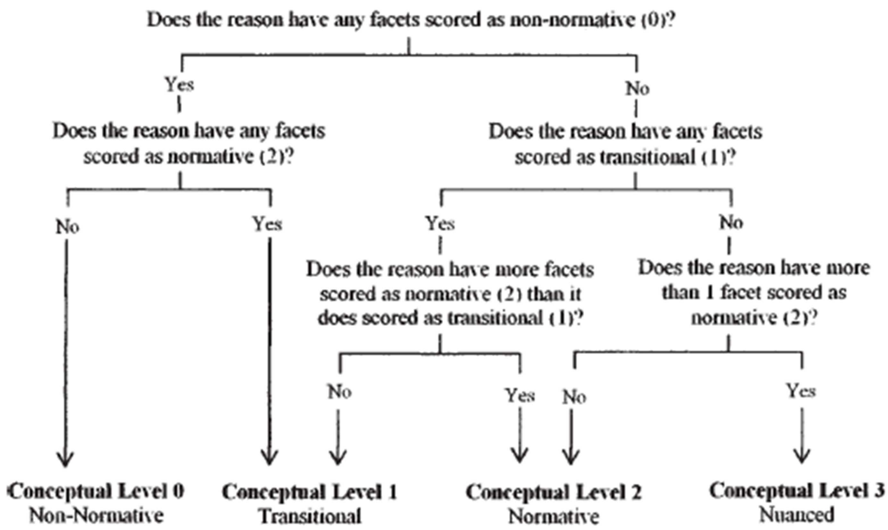


Figura 5: Diagrama para codificar da qualidade conceptual de um argumento com base nas suas vertentes (Clark & Sampson, 2008)

Segundo os autores, esta abordagem pode ser observada como um meio para analisar conexões entre um determinado discurso, o uso de fundamentos e a qualidade conceptual de um diálogo.

Para classificar a relação entre os tipos de afirmações que os alunos fazem e os níveis de oposição, vários autores (Clark & Sampson, 2008, e Erduran, Simon & Osborne, 2004) recorreram a esquemas analíticos baseados na classificação de níveis de qualidade: no nível 1, situam-se os argumentos compostos por conclusões (C) concordantes ou discordantes, sem fundamentos (F) nem refutações (R); no nível 2, encontram-se os argumentos cujas conclusões (C) são sustentadas nos dados (D) e nas garantias (G), apresentando afirmações ou contra-afirmações mas não refutações (R); o nível 3, inclui os argumentos formados por várias conclusões (C), concordantes ou discordantes, apoiadas em dados (D) e garantias (G), apresentando-se uma refutação (R) com intensidade reduzida; no nível 4, encontram-se os argumentos que apresentam conclusões (C) concordantes e discordantes, sendo evidentes algumas estratégias de refutação (R) sem, no entanto, apresentar motivos que desafiem os fundamentos que apoiam os dados (D); no nível 5, situam-se os argumentos que envolvem múltiplas refutações (R) e que desafiam a interpretação de um fenómeno e a validade dos fundamentos que são utilizados para apoiar essa interpretação. Os esquemas dos autores supracitados são muito semelhantes entre si. No entanto, Clark e Sampson (2008) salientam-se dos restantes por terem incluído um outro nível de qualidade – o nível 0 que contém os argumentos que não apresentam qualquer tentativa de refutação (R).

De um modo geral, Clark e Sampson (2008) definem a qualidade geral de um argumento através da presença ou ausência dos tipos de refutações na sua estrutura de análise, em vez de classificar, apenas, a qualidade estrutural na presença de refutações que contestem a validade dos dados (D) e das garantias (G). Como, nesta linha de pensamento, qualquer tipo de refutação pode ser usado para conduzir o autor de um dado (D) a avaliar a validade do seu argumento, a presença de qualquer tipo de refutação é reconhecida como um indicador significativo da qualidade estrutural de um argumento.

Para Johnson e Blair (2005), os argumentos podem ser avaliados atendendo a três critérios: a aceitabilidade, a relevância e a suficiência. Quanto à aceitabilidade, um argumento é reconhecido como tal se as premissas forem verdadeiras, prováveis ou fiáveis. Relativamente à relevância, um argumento é relevante quando as premissas forem adequadas ou significativas para alcançar a conclusão. No que diz respeito à suficiência, um argumento é suficiente quando as premissas proporcionam um suporte à conclusão. De acordo com os autores, um argumento que supere os testes destes três critérios é considerado um bom argumento.

Diferentes abordagens do conceito de argumentação matemática

De acordo com o novo programa do ensino básico, a comunicação e a argumentação ocupam lugar de destaque nas orientações metodológicas para o ensino de Geometria, na medida em que podem ser desenvolvidos através de discussões e debates entre pares ou entre grupos. Também, segundo o NCTM (2007), "os alunos deverão aprender a formular explicações convincentes para as suas conjeturas e soluções" (p.45). Para alguns autores, como por exemplo Yackel e Cobb (1994), o conceito de argumentação foca-se especificamente nas interações que estão relacionadas com explicações ou justificações intencionais do raciocínio dos alunos, durante ou após tentativas de resolução de problemas. Para Wood (1999), a argumentação é considerada como um processo interativo de saber como e quando participar num argumento, ou ainda, numa troca discursiva entre pessoas com o objetivo de convencer outros através de certos modos de pensamento. Seguindo estas duas perspetivas e segundo Krummheuer (1995), a argumentação na aula de matemática não deve ser considerada equivalente à demonstração, embora inclua processos de produção de provas matemáticas. Para este autor, a argumentação na aula de matemática deve ser, então, uma atividade mais ampla do que a demonstração, cujo caminho é formal, lógico e linear. Paralelamente, Boavida (2005), tendo por referência os estudos desenvolvidos por vários autores, Perelman (1993), Perelman & Olbrechts-Tyteca (1999) e Grácio (1993b), organiza, segundo a perspetiva perelmaniana, as diferenças entre demonstração e argumentação baseando-se em seis aspetos, nomeadamente: a finalidade, a linguagem, a relação com os sujeitos, o valor, a amplitude e a ordem.

No que diz respeito à finalidade, enquanto a demonstração se preocupa com a verdade abstrata, categórica ou formal e procura provar a verdade da conclusão através da verdade das premissas, a argumentação preocupa-se com a adesão e procura transferir para a conclusão a adesão atribuída às premissas. Quanto à linguagem usada, na demonstração é artificial e exigente, enquanto na argumentação é natural, podendo ser adaptada consoante as necessidades. Relativamente à relação com os sujeitos, na demonstração é impessoal, enquanto na argumentação existe uma interação constante entre quem argumenta e os sujeitos aos quais se dirige, pretendendo, assim, obter a sua adesão. No que concerne ao valor, a demonstração é correta, tem valor, se estiver em conformidade com regras de sistemas formais. Nesse caso, os axiomas não são discutidos e não existe preocupação em verificar se as conclusões são aceites pelos sujeitos. No caso de a demonstração ser incorreta, a mesma não tem qualquer valor. Contrariamente à demonstração, a argumentação de uma tese não se considera correta ou totalmente incorreta, mas antes pode ter mais ou menos força, ser mais ou menos pertinente e mais ou menos convincente. Parte-se de factos, princípios, opiniões, lugares e valores e tudo pode ser novamente colocado em questão e proceder-se a nova discussão. Quanto à amplitude, a demonstração de uma proposição torna desnecessário outras demonstrações, enquanto na argumentação não existem limites de argumentos. No que diz respeito à ordem, na demonstração a disposição dos axiomas e etapas adotadas não é importante, enquanto na argumentação a ordem em que são apresentados os argumentos assume uma importância relevante para a sua aceitação.

Lampert (1990) apresenta a ideia de que a argumentação matemática é um caminho em zig-zag, contrariamente ao caminho linear da demonstração, e que se inicia com a formulação de conjeturas, envolve o estudo de fórmulas consideradas verdadeiras e inclui contradições e contraexemplos. Já para Wood (1999), a argumentação é considerada como uma troca de discursos entre os participantes e tem como principal objetivo convencer os outros através de certos modos de pensamento. Deste modo, a argumentação é vista como um processo interativo de saber como e quando participar na discussão. Da mesma forma, para Grize (1996), argumentar é uma forma de interferir intencionalmente nas ideias, opiniões, atitudes, sentimentos ou comportamentos de uma pessoa ou de um grupo de pessoas, como meio de promover a atividade discursiva, mobilizando a participação ativa daqueles a quem é dirigida.

Analisando as atividades individuais e coletivas dos alunos, Douek (1998) estabeleceu conexões entre as argumentações relacionadas ao contexto, os modelos matemáticos e a sua concepção e analisou a sua relevância para a educação matemática. Para esta investigadora, a argumentação deve, assim, incluir fundamentos teóricos, dados numéricos, desenhos e esquemas, entre outros, e devem ser ligados por dedução, indução ou analogia, considerando as argumentações produzidas individualmente, as produções escritas e as produções orais resultantes das discussões em sala de aula. A atividade argumentativa pode, ainda, ser analisada sob dois pontos de vista: (i) como os alunos exploram os seus conhecimentos de referência, de forma a executarem determinada tarefa; e (ii) como os conhecimentos de referência se vão desenvolvendo no decorrer da própria tarefa, paralelamente aos processos de concepção e refinamento dos seus modelos. Esta análise mostra a importância do contexto social, gerido pelo professor, para assegurar a evolução do conhecimento de referência.

Na mesma linha de pensamento, Douek e Pichat (2003) analisam a argumentação como um processo que estabelece ligações lógicas entre o discurso de um determinado assunto e o texto produzido. Já a argumentação matemática pode ser caracterizada como um caso particular da argumentação na medida em que lida com objetos matemáticos e com capacidades. Para estes investigadores existem atributos gerais da argumentação que são particularmente relevantes para o caso da argumentação matemática, tais como: a elaboração de uma conjetura será, posteriormente, sujeita a interpretação e discussão; a organização de justificações, representadas através de declarações verbais, evidências experimentais, desenhos e/ou esquemas, que vão validar ou questionar a conjetura; a preocupação em manter juntos os argumentos e a conjetura sobre escrutínio, com o objetivo de a justificar através de dúvidas, contestações, refutações, interpretações, e até mesmo de novas conclusões; a preservação de uma estrutura global, uma organização verbal, para, assim, a argumentação poder ser compreendida e aceite; a perceção de que a atividade cognitiva de quem argumenta tem de ser consciente e voluntária, o que pressupõe a interiorização de um “outro” sujeito que regula o raciocínio lógico, a veracidade das afirmações e o tratamento de sinais envolvidos.

Em consonância com a linha de pensamento de Pólya (1954), Vacaretu (2010) alude para o facto de que ensinar os alunos a pensar não significa necessariamente que o professor tenha de partilhar toda a informação com os alunos, mas antes terá de encontrar uma forma de desenvolver a capacidade dos alunos usarem a informação que lhes é fornecida. É nesse sentido que Yackel e Cobb (1996) propõem um conjunto de normas sociomatemáticas como reguladoras da argumentação matemática e criadoras de oportunidades de aprendizagem. Nesse estudo, os investigadores diferenciaram normas sociais de normas sociomatemáticas através dos seguintes aspetos: as normas sociais sustentam as microculturas de sala de aula, caracterizadas pela explicação, justificação e argumentação de qualquer área em geral, não especificamente da matemática; as normas sociomatemáticas focam-se em aspetos normativos de discussões matemáticas, específicos da ação matemática dos alunos. Assim, foram identificados diferentes tipos de normas sociomatemáticas – da *diferença matemática*, da *sofisticação matemática*, da *eficácia matemática* e da *elegância matemática*. Contudo, estas normas não são rigidamente pré-determinadas e não caem aleatoriamente do exterior para a sala de aula. Antes, são regeneradas e modificadas, tanto pelos alunos como pelos professores, no decorrer das interações na sala de aula, o que facilita a construção do conhecimento matemático.

Em estudos posteriores, Yackel (2001) e Whitenack e Yackel (2008) apontam aspetos que destacam a explicação, a justificação e a argumentação como promotores do desenvolvimento do raciocínio matemático. A explicação e a justificação são distinguidas pelas suas funções – a explicação como uma forma de clarificar aspetos do pensamento matemático e a justificação como uma resposta às aparentes transgressões da atividade matemática normativa. Desta forma, a argumentação é vista como o conjunto de explicações e justificações matemáticas que podem ser aceites, individual e coletivamente, pelos participantes, e que resultam das suas interações. Assim, a vertente explicativa da argumentação pode ser considerada como um meio de motivação, criando a sensação que são os próprios alunos os criadores do significado matemático.

Boavida (2005) afirma, também, que a argumentação pode desenvolver-se em domínios distintos. Assim, aquilo que é adequado num domínio pode não o ser noutro domínio e, consequentemente, a argumentação deve, em primeiro lugar, ser situada num campo particular. Para vários autores (como por exemplo, para Boavida, 2005 e Douek e Pichat, 2003), a capacidade dos alunos argumentarem é desenvolvida quando, nas aulas de matemática, são criados momentos para a exploração de tarefas pormenorizadamente preparadas, de forma a estimularem a formulação e a prova de conjeturas. Deste modo, os alunos são responsabilizados e incentivados a fundamentar os seus raciocínios, a descobrir a origem de determinados resultados ou situações e a entender os argumentos dos restantes elementos da turma (Boavida, Gomes & Machado, 2002).

No desenvolvimento da argumentação, Perelman e Olbrechts-Tyteca (1988) enfatizam a ideia de que as premissas podem ser continuamente melhoradas e desta forma podem surgir novas premissas. Consequentemente, pode também despontar uma nova ordem dos argumentos. A argumentação pode desempenhar assim um papel decisivo nas atividades matemáticas dos alunos, surgindo como uma componente fundamental para as suas produções individuais (Douek & Scali, 2000).

2.3. A argumentação e a prova matemática

Como foi visto na secção anterior, um argumento caracteriza-se por um paralelo entre raciocínios analítico, onde assenta toda a lógica formal, e dialético, expresso através de argumentos sobre enunciados prováveis. Como observa Boavida (2008), raciocinar matematicamente envolve não só o cálculo como também o uso da razão. Quando se apresentam razões que justifiquem as afirmações, pode-se, ainda, sustentar que se está perante um raciocínio. A atividade de argumentação identifica-se, assim, como uma parte integrante do raciocínio essencial para a construção do pensamento matemático, desempenhando um papel fundamental na elaboração de justificações e provas matemáticas (Boavida et al., 2002).

A necessidade de desenvolver as capacidades de raciocínio e de argumentação matemática emerge da dificuldade que os alunos sentem na produção de provas matemáticas (Boavida, 2005), provas essas que validam ou rejeitam as conjeturas formuladas (Ponte et al., 1999). Hanna (2002) e de Villiers (2007) reforçam a ideia da prova ser mais do que uma sequência de passos corretos, apesar de consistir num conjunto de cadeias explícitas de inferência, criadas através de regras de dedução aprovadas, e de ser caracterizada pelo uso de notação formal, de sintaxe específica e de normas de manipulação. Para estes autores, a prova é entendida como uma sequência de ideias e de conhecimentos com o objetivo de alcançar a compreensão matemática. O uso da prova matemática deve ser promovida pelos educadores como um meio de se certificarem que os alunos não só saibam que determinada afirmação é verdadeira mas que também entendam porque é que é verdadeira.

Schoenfeld (1994) identifica a prova como um procedimento central da disciplina de matemática, sendo essencial para "fazer comunicar e recordar matemática" (cit. em Knuth, 2002). Tradicionalmente, a prova é encarada como um meio quase exclusivo de verificar a veracidade de afirmações matemáticas, sendo usada para excluir as dúvidas pessoais ou as dúvidas dos céticos (Bell, 1976; de Villiers, 2003).

Knuth (2002), através de uma investigação que envolveu dezassete professores e que teve como objetivo estudar as concepções de professores sobre a prova no contexto de matemática do ensino secundário, dividiu-a em três níveis: prova formal, prova menos formal e prova informal. Independentemente do nível de prova em que o aluno se enquadrasse, as perspetivas destes professores convergiram para a ideia de que a prova é atribuída somente aos alunos de classes mais avançadas de matemática e para aqueles que pretendam ingressar no ensino superior em áreas ligadas com a matemática. No entanto, estas perspetivas são incongruentes com as perspetivas defendidas pelos educadores matemáticos. De acordo com Hanna (1983), o método axiomático e o conceito de prova rigorosa estão entre os mais valiosos ativos da matemática moderna e deve fazer parte das aquisições intelectuais do aluno do ensino secundário. Por outro lado, todos os professores do estudo supracitado consideraram ser a prova informal uma ideia central ao longo do ensino secundário, que deveria ser apropriada para todos os alunos e integrada em qualquer classe. Apesar da importância da prova informal ser reconhecida, Hanna (1995) refuta a ideia de limitar as experiências dos alunos, relativas à prova, a métodos informais. Uma consequência desse aspeto é o dos alunos poderem ser levados a desenvolver a crença de que a prova informal é simplesmente a verificação de vários exemplos. Para de Villiers (2003), o valor das provas vai muito para além da mera verificação de resultados. Para este autor, as provas são extremamente valiosas porque podem fornecer uma perceção mais clara das situações, conduzir a novas descobertas ou ajudar na sistematização do conhecimento matemático, constituindo, ainda, um desafio intelectual. Assim, e de uma forma geral, a prova permite aos alunos regular o seu próprio pensamento (Bieda, 2010), permite comunicar matematicamente (Lakatos, 1976; Schoenfeld, 1994) e serve para convencimento dos outros e de nós próprios (Alibert & Thomas, 1991; Hanna, 1989), podendo ser vista como um processo de negociação dentro da sala de aula, porque os alunos têm que argumentar, convencer os outros do que fizeram e como fizeram.

Argumentação e prova: semelhanças e diferenças

No ensino da Geometria, são vários os autores que distinguem os processos da atividade matemática dos produtos dessa mesma atividade, isto é que distinguem a argumentação da prova. Polya (1954) realça essa distinção quando salienta dois tipos de raciocínios, distintos mas que se completam e devem ser abordados em paralelo: o dedutivo e o plausível. Segundo o autor, o resultado da atividade matemática é um raciocínio dedutivo, uma prova, que, por sua vez, é revelado pelo raciocínio plausível, pela análise. Também Lakatos (1976) enfatiza esta diferenciação quando mostra, na sua obra, como o resultado final dissimula a atividade que o originou. Este autor defende a abordagem heurística, que, contrariamente à visão dedutivista, evidencia os fatores que originam o produto final. Embora Duval (1998) sustente que a prova e a argumentação são processos distintos, Douek (1998) enfatiza os aspetos epistemológicos e cognitivos comuns a estas duas áreas, apesar de realçar diferenças significativas no âmbito social e cultural. Já Mason et al. (1982) identificam quatro procedimentos do pensamento matemático: a especialização, a formulação de conjeturas, teste e justificação, estando a especialização ligada ao processo indutivo da procura de regularidades num conjunto de evidências ou na exploração de casos particulares.

Para outros autores, como Loureiro e Bastos (2002), o raciocínio plausível precede a prova e o ensino da prova deve estar presente em todos os níveis de ensino, tal como defendia Piaget. Estas autoras afirmam, ainda, que a prova deve provir da atividade dos alunos. A tarefa de provar deve ser encarada como parte de uma atividade matemática onde exista a necessidade de experimentar a prova e não considerá-la como um produto acabado. A tecnologia informática poderá, ainda, e segundo as autoras, ter aqui um papel muito importante, ideia partilhada pela maioria dos investigadores que se dedicaram a este tipo de estudos. Mas, nem sempre os alunos reconhecem e compreendem a necessidade da prova. Brocardo (2001) sustenta que quando um aluno formula uma conjetura, a sua validade pode parecer tão óbvia, que a necessidade de a provar é passada para segundo plano. Uma forma de combater esta ideia seria a de dar mais importância à atividade de produzir a prova e não destacar tanto o seu formato final (Hanna & Boavida, 2001).

Apesar da argumentação matemática ser uma atividade recorrente nas salas de aula, não existe uma definição consensual. Pedemonte (2002) apresenta uma experiência de ensino, realizada com alunos entre os quinze e os dezasseis anos, caracterizada por dois problemas geométricos, de estrutura aberta, onde os alunos tinham de formular conjeturas e, eventualmente, produzir provas. A autora recorreu ao modelo argumentativo de Toulmin para analisar e comparar a proximidade ou o afastamento entre a estrutura de um argumento, apoiado por uma conjetura, e a estrutura das respetivas etapas da prova, o que permitiu, de acordo com a pesquisa cognitiva, concluir que a atividade argumentativa resultante da exploração de problemas de natureza aberta favorece a produção de provas. Salienta, ainda, que estas duas estruturas não devem ser analisadas de forma independente – apesar da prova, como um produto, ser importante para esta análise, o estudo do seu conteúdo não é suficiente para observar todos os aspetos cognitivos da relação entre a argumentação e a prova.

Na sua definição de prova, Stylianides (2007) procurou equiparar as concepções de prova da própria disciplina de matemática com as de matemática escolar, enfatizando os aspetos socioculturais da produção de provas. Na perspetiva do autor, a prova não é mais do que um argumento matemático, uma conexão de proposições a favor ou contra uma afirmação matemática, sendo caracterizada por demonstrações verdadeiras e reconhecidas pela *comunidade da sala de aula*, como também por formas de raciocínio (modos de argumentação) válidas e aceites *pela comunidade sala de aula* e, ainda, por formas de expressão (modos de representação de um argumento) apropriadas e conhecidas também pela *comunidade sala de aula*. Mas, segundo Pedemonte (2002), a atenção dada ao papel da *comunidade sala de aula* incide no professor que, frequentemente tende a arbitrar a validade da prova apresentada pelos alunos, restringindo, deste modo, as suas experiências. No entanto, a autora refere que a prova apresentada por Stylianides emerge do resultado dos discursos entre professor e alunos, destacando os procedimentos necessários para a justificação de uma conjetura e a forma como várias formas de argumentação podem influenciar a justificação de uma potencial prova. Deste modo, os alunos reconhecem que a prova, para além do convencimento próprio, ajuda a convencer um público mais amplo. A autora realça, ainda, os movimentos entre alunos e professor, os discursos e os contradiscursos fomentados na sala de aula como foco de atenção para a compreensão do envolvimento destes nas produções de provas.

A descoberta matemática e a prova

O tipo de explorações que se fomentam nas salas de aula pode levar os alunos a novas descobertas em matemática. Assente neste pressuposto, de Villiers (2003) alude à exploração de conjeturas geométricas desenvolvidas em ambientes de geometria dinâmica como um exemplo disso. A formulação de conjeturas é aqui caracterizada como o resultado de um conjunto de evidências, com uma determinada regularidade, que origina uma afirmação e, parecendo à partida razoável, desponta a necessidade de se investigar a sua veracidade (Mason et al., 1982). O processo de formulação de conjeturas advém dos processos de generalização, quando se encontra uma regularidade, e de especialização, quando a investigação se inicia através de casos particulares escolhidos a partir de uma situação mais geral. O simples facto de questionar os alunos sobre as razões da veracidade de um determinado resultado, desperta, nestes, uma curiosidade prolongada e um reconhecimento de que a verificação indutiva/experimental apenas confirma o resultado, não desenvolve o conhecimento nem a compreensão (de Villiers, 2003). O autor salienta, ainda, que, para isso, é necessário que sejam dadas oportunidades aos alunos para explorar, conjeturar, refutar, reformular e explicar, completando um ciclo que pode ser observado na Figura 6,

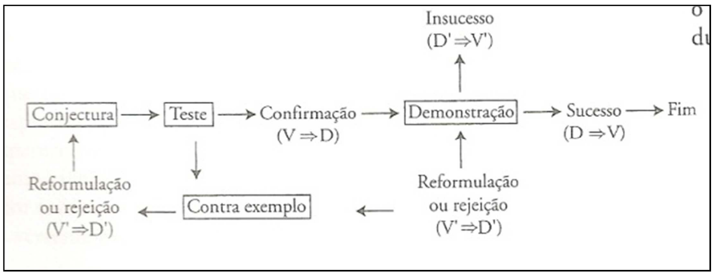


Figura 6: Esquema das fases do ciclo da prova (de Villiers, 2003)

Após a apresentação de uma conjetura, de Villiers considera que o aluno deve testar alguns casos. Se a conjetura não for confirmada por esses casos, então a mesma deve ser rejeitada, por ser falsa, ou reformulada. Se a conjetura for confirmada por esses casos, pode-se começar a acreditar que essa conjetura pode ser verdadeira, convicção essa que pode constituir um pré-requisito e um estímulo para se iniciar o processo de prova e que pode ser caracterizada por um misto de intuição, verificação quase-empírica e prova lógica, não necessariamente rigorosa. Se, decorrido algum tempo, não se tiver produzido/encontrado a prova desejada, então pode-se começar a duvidar da validade da conjetura e considerar mais alguns casos, repetindo-se o processo. Também Pedemonte (2002) sustenta que as conjeturas devem ser colocadas em questão e, na impossibilidade de conseguir um contraexemplo que as refute, não deve ser abandonada a tentativa de procurar argumentos válidos e convincentes que as justifiquem. Mason et al. (1982) sustentam que a formulação de conjeturas é um procedimento que merece especial sentido, uma vez que deve conter todas as indicações necessárias para os alunos começarem a analisar casos particulares e, a partir desse momento, formularem suas conjeturas. Denotam, ainda, que com o desenvolvimento de todo este processo e com a análise de casos particulares, as conjeturas podem naturalmente ser refutadas ou reformuladas. Esta fase é denominada pelos investigadores como a fase da especialização, o primeiro dos quatro procedimentos do raciocínio matemático.

O processo de justificação de uma conjetura, ou seja, a procura de argumentos válidos e convincentes que a validem, constituem, para Brocardo (2001), o processo de demonstração/prova/argumentação. A autora observa ainda que os termos demonstração, prova ou argumentação são, por vezes, usados com significados diferentes. A demonstração e a prova são termos frequentemente usados para referir um tipo de prova caracterizada por regras próprias da Matemática e aceite no mesmo seio. Por outro lado, o termo prova é comum ser usado para caracterizar uma explicação ou um raciocínio que justifique determinada resultado ou padrão. Por fim, ao termo argumentação é atribuído um significado mais amplo, dado que se relaciona com interações observadas na sala de aula, sendo estas caracterizadas por explicações intencionais de um determinado raciocínio.

Os ambientes de geometria dinâmica e a prova matemática

O ensino tradicional da geometria é criticado por diversos investigadores, tais como de Villiers (1999), na medida em que, na sua perspetiva, os programas de geometria dinâmica estimulam fortemente a prova como uma atividade significativa para os alunos, que, por sua vez, deve ser encarada não como um meio de verificação em geometria dinâmica mas como uma forma de explicação e descoberta. Ainda, segundo este autor, os programas de geometria dinâmica são não só meios poderosos de verificação de conjeturas verdadeiras, como também são extremamente úteis na construção de contraexemplos para falsas conjeturas. Conjuntamente, realça a relação dos alunos com a prova, quando estes recorrem à utilização de ambientes de geometria dinâmica,

> Apesar da maior parte dos alunos parecer não precisar de mais nada para ter convicções quando exploram conjeturas em ambientes geométricos dinâmicos como o Cabri ou o Sketchpad, não me é difícil estimular a sua curiosidade perguntando-lhes por que é que eles pensam que um determinado resultado é verdadeiro. Desafia-os tentar explicá-lo. Os alunos rapidamente admitem que a verificação indutiva/experimental apenas confirma; não esclarece nem contribui para uma compreensão satisfatória. Eles parecem desejar então procurar

> argumentos dedutivos como uma tentativa, mais do que uma verificação. (p. 116)

Também, para Loureiro e Bastos (2002) o computador proporciona ambientes favoráveis à exploração matemática e à descoberta de novos resultados, o que traz novas oportunidades e novas formas de encarar a prova na educação matemática. Na mesma ordem de ideias, Hanna (2002) partilha da opinião de de Villiers (2003) ao fazer a distinção entre as "provas que explicam" das "provas que só validam", e ao considerar os programas de geometria dinâmica, como o Cabri ou o Sketchpad, como instrumentos que apresentam todo o potencial para encorajar tanto a exploração como a prova. Para a autora, torna-se, assim, muito mais fácil criar e testar conjeturas, dando um novo significado à exploração matemática, o que, em particular, revigora o interesse no ensino da Geometria.

Keyton (2003) considera os ambientes de geometria dinâmica uma ferramenta imprescindível para a descoberta de conjeturas, para a procura de contraexemplos e para a elaboração de provas. A descoberta de forma autónoma é realçada com este recurso computacional na medida em que proporciona aos alunos a constatação de um facto mesmo antes da sua demonstração. Os alunos são conduzidos a dar um encadeamento lógico às suas provas e a aperceberem-se que a prova matemática constitui uma parte essencial na construção das suas concepções. O uso de um ambiente de geometria dinâmico é também, para Jones (1998), uma oportunidade para alguns alunos experimentarem a prova através da explicação. Para estes investigadores, o uso dos ambientes de geometria dinâmica, associado a tarefas adequadas, pode constituir uma oportunidade para os alunos apreciarem a natureza e a finalidade da prova matemática, uma vez que encorajam os alunos a formular conjeturas, focalizando as relações entre os objetos geométricos, e fornece os meios para os alunos explicarem as suas ações e os seus resultados.

Apesar de Schumann e Green (2003) evidenciarem vantagens no uso de ambientes de geometria dinâmica, tais como o tempo gasto na construção de lugares geométricos e a possibilidade de alteração de uma figura, por arrastamento, salientam, também, algumas desvantagens no seu uso, como a dissolução dos efeitos da prática manual e da assimilação do método de construção de lugares geométricos. Para estes investigadores não é correto depreciar a abordagem tradicional, ambos os métodos são válidos – tudo depende do objetivo que se pretende alcançar.

2.4. O contributo das TIC na argumentação

O envolvimento dos alunos em atividades de argumentação matemática pode ser facilitado tanto pela proposta de tarefas com determinadas características, como pela existência, na sala de aula, de certas práticas normativas. Indo de encontro a estas ideias, de Villiers (1997) indica os programas de geometria dinâmica como 'poderosos' por funcionar como um meio de verificação de conjeturas verdadeiras, e também muito 'valiosos' quando se pretende encontrar contraexemplos para conjeturas falsas, estimulando e propiciando ao aluno o desenvolvimento da compreensão e da construção da argumentação.

O desenvolvimento e a crescente utilização das TIC na sociedade tem vindo a refletir-se no espaço escolar e, em particular, nas aulas de Matemática. Vários estudos apontam que a sua utilização tem modificado as práticas pedagógicas dos professores. Segundo Fernandes e Vaz (1998), o recurso às tecnologias permite não só promover uma aprendizagem mais profunda e significativa, como também estimular uma abordagem mais indutiva e experimental da matemática e ampliar as aplicações da matemática. Para Hirschhorn e Thompson (1996) e Healy e Hoyles (2001), os recursos tecnológicos podem desempenhar um papel muito importante no desenvolvimento de raciocínios, na medida em que permite formular, testar e explorar conjeturas. Piteira (2000) salienta o recurso às tecnologias como ferramentas facilitadoras na construção de significados geométricos. Jones (1998) atribui às tecnologias a responsabilidade de facultar a compreensão do significado de termos matemáticos. Castilho (2008) enfatiza o uso das TIC como um suporte ao ensino da Matemática, transformando as práticas pedagógicas nas salas de aula através da criação de ambientes apropriados que beneficiem a aprendizagem da Matemática.

São diversos os recursos tecnológicos que hoje em dia o professor tem à sua disposição. Destacam-se os computadores e os ambientes computacionais, as calculadoras científicas e gráficas, sendo estas últimas mais utilizadas no ensino secundário, a Internet, os ambientes de geometria dinâmica e, mais atualmente, os quadros interativos multimédia.

O estudo realizado por Jones (1998) com alunos com 12 anos de idade foca as interpretações dos alunos e, em especial, as apropriações de terminologia matemática, no contexto geométrico, para explicarem como são mediadas através do ambiente de geometria dinâmico. Neste estudo, Jones sustenta que os ambientes de geometria dinâmica introduzem critérios específicos de validação para a resolução de problemas de construção – uma solução é válida se e só se não for possível estragá-la por arrastamento. Deste modo, as figuras têm de ser construídas de tal forma que sejam consistentes com a teoria geométrica.

Apesar das vantagens enunciadas com o uso dos ambientes de geometria dinâmica, é importante refletir sobre a verdadeira contribuição das tecnologias informáticas para o papel da argumentação. Segundo Loureiro e Bastos (2002), nem sempre o recurso aos ambientes de geometria dinâmica são úteis para a demonstração. Já Junqueira (1995) refere o facto de que os ambientes de geometria dinâmica podem dar um contributo importante ao processo de descoberta indutiva de teoremas, enquanto o recurso a papel e lápis torna a exploração de exemplos significativos mais morosa e com menor precisão. No entanto, e de acordo com Coelho e Saraiva (2002), não são só as especificidades dos ambientes de geometria dinâmica que contribuem para estimular o processo de descoberta mas a "todo um contexto de ensino/aprendizagem, com realce para as interações estabelecidas entre professores, alunos e o próprio AGD [ambiente de geometria dinâmica] (elemento mediador na construção do conhecimento matemático), aos modelos didáticos ensaiados e às características exploratórias das tarefas propostas" (p.56)

Por outro lado, os argumentos justificativos emergentes numa sala de aula podem, segundo Lavy (2004), ser influenciados pelo recurso a ambientes de geometria dinâmica. No seu estudo, Lavy mostrou como os quatro tipos de argumentos matemáticos (básico, composto, elaborado e específico), construídos pelos alunos através de exemplos, podem sustentar o desenvolvimento de provas matemáticas formais. Enquanto os argumentos básicos dependem somente das formas geométricas consideradas, a partir do nível composto os argumentos resultam também das reflexões matemáticas relativas às propriedades dos números. A interação entre alunos e ambiente de geometria dinâmico simplificou a percepção de conexões entre as formas geométricas e as propriedades dos números. Logo após ser transposto o nível básico e tendo-se atingindo os níveis composto e elaborado, a capacidade dos alunos para debaterem as suas ideias apresentou melhorias muito significativas. Para finalizar este processo, segue-se a fase de discussão, onde as provas devem ser construídas com base nesses argumentos. No entanto, de acordo com de Villiers (2003), os alunos não reconhecem nem compreendem a necessidade da prova. Segundo Hanna e Boavida (2001), uma forma de combater esta ideia seria a de dar mais importância à atividade de produzir a prova e não destacar tanto o seu formato final. Na generalidade, apesar de coexistirem, a alguns níveis, ideias divergentes, os ambientes de geometria dinâmica podem influenciar positivamente tanto na concepção, como na forma de analisar e de argumentar. Segundo vários estudos (*e.g.* Junqueira, 1995; Hanna, 2002; de Villiers, 1997), os ambientes de geometria dinâmica são ambientes propícios à descoberta de propriedades e de relações geométricas, favorecendo a aprendizagem, beneficiando a aquisição de conhecimentos e incluindo a produção de provas.

O computador e os ambientes de geometria dinâmica

Atendendo à utilização que se dá aos recursos tecnológicos no dia a dia, a escola tem de se adaptar às novas exigências da sociedade. Caso contrário, arrisca-se a "ser cada vez mais rejeitada pelos jovens" (Ponte & Canavarro, 1997, p. 24). Perante este facto, porque não transpor essa tendência tecnológica social para a sala de aula, potencializando e rentabilizando a sua utilização na resolução de desafios que cativem os alunos e que desenvolvam as suas competências? Desde sempre se discutiu quais os recursos mais adequados para a sala de aula de tal forma a proporcionar aos alunos uma aprendizagem mais significativa. De acordo com as indicações metodológicas do novo programa, "tanto os recursos computacionais como os modelos geométricos concretos permitem desenvolver a intuição geométrica, a capacidade de visualização e uma relação mais afetiva com a Matemática" (Ministério da Educação, 2007, p. 51). O recurso a programas computacionais de geometria dinâmica, de acordo com o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ministério da Educação, 2007), favorece a compreensão dos conceitos e relações geométricas (2.º ciclo) e deve ser utilizado em tarefas exploratórias e de investigação (3.º ciclo). Relativamente ao 1.º ciclo, este documento, embora não faça referência à utilização destes programas, menciona a importância da utilização do computador em sala de aula de modo a possibilitar explorações que podem enriquecer as aprendizagens realizadas no âmbito da Geometria. A nível internacional, as indicações vão no mesmo sentido. As orientações expressas pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2007) indicam que, desde os primeiros anos de escolaridade, os alunos deverão desenvolver a capacidade de visualização através de experiências concretas com uma diversidade de objetos geométricos e através da utilização das tecnologias, que permitem rodar, encolher e deformar uma série de objetos bi e tridimensionais.

Os ambientes computacionais mais recentes para o ensino da geometria permitem realizar construções geométricas, no ecrã do computador, utilizando explicitamente as propriedades das figuras, e possibilitam a manipulação direta dessas construções, conservando as propriedades utilizadas. Para De Corte (1992), estes ambientes devem ter como referência o desenvolvimento de três componentes:

- a competência: caracterizada pelo desenvolvimento de capacidades num determinado domínio;
- a aquisição: que consiste na obtenção de processos de aprendizagem que conduzam ao desenvolvimento de competências;
- a intervenção: que se resume à aplicação de métodos de ensino e de estratégias adequadas para colocar em prática os processos de aprendizagem.

Este investigador refere, ainda, o facto dos ambientes computacionais se basearem na natureza construtivista da aprendizagem, onde os professores, os colegas e o computador sustentam o desenvolvimento das ideias dos alunos e a construção do conhecimento geométrico. É, assim, indiscutível a atração que os computadores exercem sobre os jovens de hoje. Neste sentido, muitos investigadores têm procurado estudar as diversas potencialidades do mesmo com o objetivo de proporcionar aos alunos uma aprendizagem mais atrativa e originadora de eficazes ambientes de ensino–aprendizagem. A Geometria é, por excelência, uma área da Matemática adaptada a explorar as potencialidades dinâmicas e gráficas desses ambientes, permitindo, assim, ao aluno, uma abordagem mais rica e intensa.

Para Schwartz (1992), os ambientes de geometria dinâmica são ambientes exploratórios que, através das ferramentas disponibilizadas, propiciam a formulação de hipóteses que funcionam como "espelhos intelectuais" (p. 223), onde os alunos podem experimentar as suas ideias, através da manipulação das construções. Segundo Laborde (1993), o movimento e a modificação de construções realizadas em ambientes de geometria dinâmica facilitam a visualização das propriedades e das relações geométricas, conservando-as invariantes. Estes ambientes geométricos, contrariamente aos processos tradicionais (papel e lápis), permitem a manipulação de uma maior variedade de ações e de objetos, possibilitando a realização de outras tarefas, progressivamente mais complexas. Desta forma, os alunos podem libertar-se de tarefas mecânicas e automáticas para darem espaço à descoberta e à formulação de conjeturas, fortalecendo os próprios processos de pensamento (Junqueira, 1995), e refletindo sobre os seus processos de resolução. Assim, segundo Olive (2002), estes ambientes fazem com que os alunos compreendam, de uma forma mais profunda, as relações entre os conceitos geométricos, estimulando o raciocínio abstrato.

Piteira (2000), num trabalho que envolveu uma turma do 8.º ano e outra do 9.º ano de escolaridade, de duas escolas diferentes, investigou a atividade matemática desenvolvida pelos alunos com o recurso ao ambiente de geometria dinâmico Sketchpad. Neste estudo, a investigadora pôde observar que os próprios menus do ambientes de geometria dinâmica com que trabalhou obrigou os alunos a que, em determinadas situações, tivessem de pensar como construir novas figuras, avaliassem o que tinham construído e pensassem sobre as conclusões a obter, o que, na sua perspetiva, ajudou os alunos a manusearem os objetos geométricos até chegarem a conclusões sobre as suas propriedades e relações geométricas. O estudo permitiu-lhe observar as potencialidades deste recurso computacional, destacando o papel facilitador na construção de significados geométricos, bem como na compreensão das relações nas interações entre alunos e professores e na consciencialização dos alunos na atividade que desenvolvem. Para a autora, os ambientes de geometria dinâmica permitem aos alunos expor e clarificar, numa perspetiva de partilha e negociação, os seus pontos de vista, as suas compreensões, as suas ideias e respetivas reavaliações.

Um outro estudo que teve como objetivo investigar a aprendizagem dos alunos e a forma como os mesmos superam as suas dificuldades com recurso a um ambiente de geometria dinâmica, o Sketchpad, foi o trabalho desenvolvido por Mota (2004). Esta investigação, tendo como base o quadro teórico de van Hiele, envolveu duas turmas de 9.º ano de escolaridade e o tópico *Circunferência e Polígonos. Rotações*. A investigadora sustenta que este ambiente computacional permitiu aos alunos realizarem as construções pedidas nas tarefas propostas e desenvolver a capacidade de formularem conjeturas e realizarem as respetivas provas, enfatizando, assim, a importância deste recurso no desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos. No entanto, a autora revela que observou uma preocupação exagerada, por parte da maioria dos alunos, na aparência das figuras construídas, em detrimento das suas propriedades.

Uma questão colocada por Jones (2000) relaciona-se com a forma como os alunos distinguem as características fundamentais de uma determinada construção geométrica, numa construção com recurso aos ambientes de geometria dinâmica. Os trabalhos de Balacheff (1996), realizados com o CabriGéomètre, permitiram mostrar que a organização sequencial de ações necessárias para uma construção neste tipo de ambientes de geometria dinâmica respeita uma determinada hierarquia de construção que, para a maior parte dos alunos, não é entendida. Qualquer objeto que obedeça a uma construção hierárquica não pode ser alterada, correndo o risco de ter de se iniciar nova construção (Hoyles, 1995). Contrariamente, nas construções geométricas a papel e lápis, este constrangimento não é identificado, na medida em que os objetos não têm orientações, salvo indicações em contrário. No entanto, para Laborde (1997, 1998), este constrangimento é minimizado pela possibilidade de arrastamento das figuras, permitindo aos alunos explorar, rápida e agilmente, diferentes construções da mesma figura.

Ambientes de geometria dinâmica e as tarefas matemáticas

É inquestionável que os ambientes de geometria dinâmica constituem um contributo no processo de ensino-aprendizagem da Geometria, na medida em que estes permitem, de uma forma mais interativa e motivadora, explorar, descobrir e desenvolver conceitos matemáticos e não somente verificar resultados ou realizar experiências. No entanto, segundo Candeias e Ponte (2005) e Piteira (2000), esta componente da Matemática não pode estar isolada. Estes programas computacionais têm de estar associados a tarefas que tenham como objetivo desenvolver a competência geométrica dos alunos, termo este entendido pelos autores como um "processo de ativar recursos (conhecimentos, capacidades estratégias), em diversos tipos de situação, nomeadamente situações problemáticas" (Ministério da Educação, 2001, p.9) e que está relacionado com a construção de figuras geométricas, com a experimentação e com a observação (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Brown, Jones & Taylor, 2003; NCTM, 2000; Ministério da Educação, 2001). Estas tarefas, sendo realizadas em pares/grupos de alunos, podem gerar discussões facilitadoras da organização do processo de raciocínio dos próprios alunos. Assim, permitem desenvolver as capacidades dos alunos, refletindo, confrontando ideias, conjeturando, concluindo e registando os resultados do trabalho desenvolvido. Para estes autores, o conceito de aprender é, então, oposto ao tradicional, na medida em que é o aluno que, partindo à descoberta, constrói o seu próprio saber, levando-o a uma aprendizagem mais significativa.

As interpretações efetuadas pelos alunos e a apropriação de terminologia matemática no contexto geométrico são, segundo Jones (2000), mediadas pelos ambientes de geometria dinâmica. Estes ambientes influenciam as ações dos alunos na resolução de problemas, no que diz respeito às estratégias usadas para a realização de tarefas e, consequentemente, influenciam também o feedback que é dado ao utilizador. Ainda segundo este autor, os ambientes de geometria dinâmica incluem critérios específicos de validação – num problema de construção, uma solução é válida se e só se não for possível sofrer alterações por arrastamento, isto é se a construção for robusta e apresentar consistência com a teoria geométrica.

No seu estudo sobre a conceção de prova, por parte dos alunos, quando este recorrem a ambientes de geometria dinâmica, Marrades e Gutiérrez (2000) sustentam que os tipos de argumentação presentes nas produções dos alunos, bem como as fases que constituem o processo de argumentação, são elementos complementares e revelam-se de extrema importância para o estudo dos raciocínios dos alunos, enquanto estes exploram tarefas onde é solicitada a prova, bem como para a análise das estratégias adotadas e, ainda, para a estudo de (in)coerências que ocorram nos diferentes momentos. Ainda na linha de pensamento destes dois autores, os ambientes geométricos dinâmicos permitem aos alunos, antes de passarem para a forma abstrata, realizar explorações empíricas, através de representações significativas do objeto em estudo, manipular e obter feedback imediato. Consideram, ainda, que a possibilidade de arrastamento de uma figura é uma característica única destes ambientes, na medida em que possibilitam a exploração de variados exemplos, num curto espaço de tempo, permitem a observação de propriedades, casos específicos, contraexemplos, o que está ligado à formulação de justificações e de conjeturas. As construções com recurso a ambientes de geometria dinâmica tornam-se muito mais poderosas do que a construção tradicional a papel e lápis.

Gomes e Vergnaud (2004) apresentam um estudo de caso onde analisam a aprendizagem da Geometria, do ponto de vista conceitual, mediada por conceitos geométricos específicos, quando os alunos resolvem tarefas com o recurso aos ambientes de geometria dinâmica e a um sistema de instrumentos (régua e compasso). Os resultados deste estudo apontam para uma influência positiva do ambiente de geometria dinâmica. Os autores observam, ainda, que o uso de diferentes programas ou de diferentes sistemas de instrumentos, favorece o aparecimento de diferentes conceitos geométricos, divergentes nas conceitualizações implícitas mas convergentes nas estratégias específicas do raciocínio que emergem do uso de uma determinada interface. Assim, o ensino da Geometria deve ser rico em situações e não deve restringir o acesso a diferentes sistemas de instrumentos.

O ambiente geométrico dinâmico que vai ser utilizado no estudo é o GeoGebra. Este software computacional é um programa livre, está escrito em Java e, assim, disponível em múltiplas plataformas, sendo de fácil manuseamento para os alunos. Este programa computacional foi desenvolvido por Markus Horenwarter, da Universidade de Salzburg, e está indicado para o estudo da geometria dinâmica e da álgebra. Reúne, num só programa, geometria, álgebra e cálculo. É um sistema dinâmico de geometria onde se podem fazer construções de pontos, vetores, segmentos, retas, circunferências, transpor distâncias, traçar paralelas e perpendiculares e construir gráficos. As construções geométricas virtuais produzidas com o GeoGebra são móveis: os pontos geométricos iniciais de uma construção podem ser arrastados, mantendo invariantes as relações matemáticas que vigoram entre eles e os objetos dependentes desses pontos. Na janela de visualização do GeoGebra podem ser visíveis dois ambientes: uma janela de geometria e outra janela relativa à zona algébrica. Assim, uma expressão corresponde a um objeto na janela de geometria e vice-versa.

A Internet e os Quadros Interativos Multimédia

Com os profundos avanços tecnológicas verificados nas últimas décadas, a diminuição do porte e a facilidade do acesso à aquisição de calculadoras, computadores e de outras tecnologias de informação e comunicação, determinam o perfil da sociedade atual – a sociedade da informação e das novas tecnologias. No que diz respeito à Internet, a sua fácil utilização como fonte de pesquisa, comunicação e tratamento da informação, é omnipresente na nossa sociedade.

Segundo Fernandes et al (2006), em Portugal, a Internet foi introduzida em meados da década de 1980, em Universidades e algumas empresas, através de terminais conectados, por via telefónica, a Universidades Europeias e dos Estados Unidos da América. Nessa altura, a sua utilização limitava-se a consultas documentais e ao correio eletrónico. As ações do grupo Portuguese Unix Users Group e da Fundação de Cálculo Científico Nacional, constituíram um marco muito importante na difusão da Internet em Portugal. Com a criação da Rede de Comunicação Científica Nacional, o uso da Internet generaliza-se a todas as Universidades Portuguesas, no início da década de 1990. A sua popularidade aumenta, por volta do ano de 1994, com o surgimento da Internet Service Provider (ISP).

Segundo Figueiredo (1995), o acesso à Internet permite aos alunos ter a oportunidade de poderem aprender fazendo, em vez de aprenderem ouvindo, e aos professores favorece a dinamização de práticas colaborativas. As escolas também usufruem deste recurso na medida que têm a possibilidade de divulgarem as suas dinâmicas educativas, reforçando, assim, a sua integração no seio da comunidade.

Apesar a Internet se ter mostrado um recurso importante para a educação, as grandes quantidades de informação que são disponibilizadas, bem como o acesso fácil e rápido, levantam questões quanto à importância do que se ensina e a forma como se ensina. Uma forma de minimizar este problema é integrar a Internet na sala de aula através da implementação de WebQuests. Segundo Dogde (1997), uma WebQuest resume-se a uma atividade de pesquisa orientada em que parte ou toda a informação com que os alunos interagem resulta de fontes da Internet.

Alguns estudos, tais como os de Almeida, Viseu e Ponte (2004), realizados com professores estagiários e que envolvem o uso de WebQuests na sala de aula, apontam vantagens, tanto para os elementos dos núcleos de estágio (promoção do trabalho colaborativo, estruturação do núcleo e capacidade de resposta aos problemas que vão surgindo) como para os próprios alunos (desenvolvimento da capacidade de pesquisa, seleção e tratamento de informação e construção ativa do conhecimento).

Os quadros interativos multimédia são um recente recurso tecnológico introduzido no contexto de aprendizagem, que, pelo facto de constituir novidade, em ambiente de sala de aula, e de estarem associados a iniciativas governamentais relacionadas com o equipamento das escolas, têm sido alvo de vários estudos (Higgins et al., 2007, e John & Sutherland, 2005). Em Portugal salienta-se o Plano Tecnológico da Educação (PTE), projeto governamental que se caracteriza por equipar todas as escolas com meios tecnológicos mais modernos.

Ball (2003) realizou um estudo sobre o ensino e aprendizagem da matemática com o recurso aos quadros interativos multimédia. O estudo envolveu três aulas de dois professores que leccionavam o nível equivalente ao 9.º ano do ensino básico. Ambos os professores adoptavam frequentemente as novas tecnologias e, em particular, os quadros interativos multimédia. Na sua observação, a autora salienta a preparação prévia que esteve inerente às atividades apresentadas pelos professores. Todo o tempo despendido na produção dos materiais envolvidos pode, segundo a autora, ser facilmente minimizado pela possibilidade de reutilização dos mesmos, tanto pelo próprio professor como por outros elementos. Refere, ainda, que ambos os professores envolvidos neste estudo proporcionaram aos alunos aulas de grande qualidade, tendo produzido um efeito positivo nos mesmos. São visíveis, pela autora, vantagens no uso desta tecnologia no ensino e aprendizagem da matemática dado que, entre outras, estimula a discussão entre os alunos, intensifica o ritmo da aula, incentiva o professor a planificar aulas interativas dirigidas à turma, permite facilmente alterar as construções realizadas e as imagens dinâmicas, através de uma caneta ou de um dedo, e alternar os diferentes programas bem como o modo como eles são usados.

Para Meireles (2006), a utilização dos quadros interativos multimédia depende da criatividade do professor. No entanto, Santos e Carvalho (2009) sustentam que a utilização adequada desta tecnologia depende em primeiro lugar do desenvolvimento de competências e só posteriormente da criatividade do professor. Estas autoras enfatizam, ainda, o impacto deste recurso logo desde a partir do primeiro ciclo do ensino básico, tal como sustentam Higgins et al. (2005).

No entanto, os estudos realizados sobre o impacto dos quadros interativos multimédia no ensino-aprendizagem da matemática não são consensuais. Por um lado, alguns autores (Bell, 1998; Levy, 2002; Meireles, 2006) defendem que existem benefícios para os intervenientes na eficácia do processo de ensino-aprendizagem. Estes benefícios são visíveis através de um maior envolvimento dos intervenientes, um aumento da sua motivação, uma promoção da aprendizagem cooperativa e um reforço do papel do professor como mediador do processo ensino-aprendizagem. Por outro lado, outros investigadores (Brown, 2003; Colon, 2005; Lewin et al., 2008) apresentam conclusões contrárias, referindo a existência de alguns perigos originados por uma má utilização dos quadros interativos multimédia: metodologias muito expositivas, centralização no professor e o papel passivo do aluno.

Em consonância com a linha de pensamento de Santos e Carvalho (2009), os quadros interativos multimédia usados e explorados convenientemente apresentam potencialidades que podem alterar de forma significativa não só o modo como os temas são trabalhados na sala de aula, através dos recursos multimédia e animação gráfica, como também o tempo e o espaço de aprendizagem, através da disponibilização *on-line* de recursos, e ainda toda a dinâmica de sala de aula.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

Neste capítulo são descritos os procedimentos adotados para alcançar o objetivo e as questões de investigação deste estudo e está organizado em seis subsecções. Em primeiro lugar, são apresentadas as opções metodológicas consideradas nesta investigação. Seguidamente é efetuada uma descrição detalhada dos procedimentos usados na realização da investigação. Prossegue com a apresentação e caracterização dos participantes neste estudo. De seguida, são indicados os instrumentos de recolha de dados e, por fim, termina com a descrição da forma como os dados foram analisados

3.1. Opções metodológicas

Este plano de trabalho visa, essencialmente, analisar o papel dos ambientes de geometria dinâmica, mais especificamente, o software computacional GeoGebra, e do quadro interativo, de forma a que possam potenciar a capacidade de argumentação dos alunos sobre as suas atividades como uma ferramenta educativa no processo ensino-aprendizagem da Geometria, com vista à formulação, teste e prova de conjeturas. Assim, pretendeu-se observar, descrever e interpretar os procedimentos desenvolvidos pelos alunos num ambiente natural de sala de aula e em tempo real.

Atendendo ao objetivo do estudo e à natureza das questões formuladas, o estudo segue uma abordagem de natureza qualitativa, de índole interpretativa. A natureza qualitativa envolve, tal como afirmam Bogdan e Biklen (1994), a obtenção de dados no contacto direto do investigador com a situação onde os fenómenos ocorrem naturalmente e são influenciados pelo seu contexto. Estes autores destacam, também, a importância da preferência pelos processos em detrimento dos resultados ou produtos, bem como a importância das perspectivas dos participantes no estudo.

O caráter interpretativo advém, de acordo com Erickson (1986), da pretensão de se analisar não só a ação física observável mas também os significados conferidos quer pelos participantes às ações nas quais se empenham, quer por aqueles com quem interagem.

O desenho de estudo segue uma metodologia de estudo de caso por se pretender "investiga[r] um fenómeno contemporâneo situado no contexto da vida real; [onde] as fronteiras entre o fenómeno e o contexto não são claramente evidentes; e no qual múltiplas fontes de evidência são usadas" (Yin, 1989, p. 23). Assim, realizar um estudo de caso pressupõe identificar o caso, ou os casos, segundo os quais o estudo vai incidir e que, por sua vez, está relacionado com a escolha do objeto de estudo (Stake, 1994). Este autor indica dois tipos de estudo de caso: o instrumental e o intrínseco. O instrumental é orientado pelo objetivo de estudo e tem por finalidade facilitar a compreensão de algo; o intrínseco carateriza-se pelas particularidades do caso que desencadeiam o estudo. Embora o conceito de caso continue a ser objeto de discussão, em termos abstratos, Miles e Huberman (1994) definem um caso como "um tipo de fenómeno de algum tipo que ocorre num contexto limitado. (...) Há um foco, ou o 'coração' do estudo, e uma fronteira de certo modo indeterminada define o limite do caso: o que não será estudado" (p.25). Os autores identificam, assim, exemplos de casos que podem ser uma pessoa num determinado contexto, a sua experiência de trabalho, um pequeno grupo, um projeto, um local, entre outros. Num estudo de caso é fundamental utilizar uma diversidade de fontes de informação, devendo o investigador socorrer-se de uma variedade de dados, recolhidos em situações variadas e em momentos diferentes (Patton, 1990). Esta variedade permite, aquando da análise de dados, uma triangulação dos mesmos, procurando assim evidências a partir de dados de natureza distinta de modo a evitar interpretações enviesadas dos dados.

De acordo com o objetivo da investigação e tendo o aluno como unidade de análise, optou-se por realizar um estudo de caso composto por seis alunos com níveis de desempenho diferenciados, para, assim, perceber como se desenvolve a sua capacidade de argumentação na aprendizagem de Geometria com recurso às TIC, nomeadamente, aos ambientes de geometria dinâmica, associados a tarefas de natureza exploratória e investigativa. Nos momentos em que se recorreu a um ambiente de geometria dinâmica, optou-se pela metodologia de trabalho de grupo/pares porque, para além das limitações do espaço e dos recursos informáticos, "ajuda a desenvolver capacidades fundamentais do ponto de vista da Educação Matemática, como por exemplo, de argumentar, de construir uma justificação para os próprios pontos de vista, de criticar as opiniões dos colegas, de ouvir, compreender e aproveitar as ideias dos outros, e de organizar o trabalho" (Veloso, 1993, p.11).

3.2. Descrição do estudo

Este estudo realizou-se ao longo de cinco meses, entre 27 de Janeiro e 23 de Maio de 2011, e foram abordados tópicos do tema de Geometria do 9.º ano de escolaridade. Na experiência de ensino procurou-se valorizar as atividades dos alunos na resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa com recurso às TIC, em especial a um ambiente de geometria dinâmica, o GeoGebra, e ao quadro interativo multimédia. Atendendo aos objetivos do estudo e tendo em consideração as aprendizagens anteriores dos alunos, foram elaboradas onze tarefas para esta investigação, inspiradas em De Villiers (2003), Key Curriculum Press (1997), NCTM (2007) e nas páginas electrónicas de *National Library of Virtual Manipulatives* e de *Illumination – Resources for Teaching Math*. O resultado das atividades desenvolvidas pelos alunos, nas onze tarefas propostas na experiência de ensino, foi analisado segundo as seguintes categorias: (i) formulação e teste de conjeturas; (ii) prova de conjeturas; (iii) perspetivas dos alunos sobre o recurso aos ambientes de geometria dinâmica e a tarefas de natureza exploratória e investigativa; (iv) perspetivas dos alunos sobre a argumentação. A aplicação das tarefas de natureza exploratória desencadeou-se em três fases: breve introdução da tarefa; exploração da tarefa em grupos de dois alunos; e apresentação pelos alunos das conclusões obtidas na exploração da tarefa, com espaço para a discussão em grande grupo. Para esta última fase da exploração das tarefas, foi usado o quadro interativo multimédia para que fosse possível gravar todas as etapas das resoluções dos alunos. A aplicação das tarefas de natureza investigativa desencadeou-se em duas fases: na primeira fase, correspondente a um bloco, foi realizada uma breve introdução da tarefa, onde foi fornecido um pequeno guião para o aluno (Anexo XVI) sobre os aspetos principais a ter em atenção quando se desenvolvem tarefas desta natureza, seguida da exploração da mesma em grupos de dois alunos; a segunda fase decorreu na aula seguinte onde foram efetuadas as apresentações das propostas de resolução dos alunos, com espaço para a discussão em grande grupo. Das onze tarefas, oito são de natureza exploratória, de estrutura semelhante, e três são de carácter investigativo. Na Tabela 1 estão descritas as competências que o programa do ensino básico (ME, 2007) prevê para os tópicos em questão e que foram desenvolvidas neste estudo.

Tabela 1: Tópicos e competências específicas da experiência de ensino

<table>
<tr><th colspan="2">Tópicos</th><th>Competências</th><th>Formulação e teste de conjeturas</th><th>Prova de conjeturas</th><th>TIC</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Circunferência e polígonos: Rotações</td><td rowspan="2"></td><td>A aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente.</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>A predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas.</td><td>X</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Trigonometria do triângulo Rectângulo</td><td>A aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação de figuras, para fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios.</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>O reconhecimento do significado de fórmulas no contexto de situações concretas e usá-las na resolução de problemas.</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Espaço – Outra Visão</td><td>A compreensão dos conceitos de comprimentos e perímetro, área, volume e amplitude, assim como a aptidão para utilizar conhecimentos sobre estes conceitos na resolução e formulação de problemas.</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
</table>

O tempo que foi previsto para a aplicação das tarefas contemplou o estipulado na planificação do grupo disciplinar de Matemática, para cada um dos tópicos abordados. Na Tabela 2 é apresentada a duração prevista para cada uma das tarefas, num total de blocos de 90 minutos, pela respectiva ordem de leccionação.

Tabela 2: Duração prevista para cada tarefa

Tarefa	Observação de aulas	N.º de Blocos
1	Ângulo ao centro e ângulo inscrito. Relação entre o ângulo ao centro e o arco correspondente.	1
2	Relação entre o ângulo inscrito e o arco correspondente.	1
3	Relação entre o ângulo ao centro e o ângulo inscrito no mesmo arco correspondente	1
4	Relação entre cordas geometricamente iguais e os correspondentes ângulos ao centro e arcos	1
5	Propriedades geométricas em circunferências	2
6	Soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de um polígono	1
7	Quadrado Inscrito e Circunscrito na mesma circunferência	2
8	Pavimentações com polígonos regulares	2
9	Razões trigonométricas de ângulos agudos	2
10	Relações entre as razões trigonométricas	1
11	Investigando volumes	2

As apresentações dos resultados encontrados pelos alunos aos seus pares e a discussão resultante da resolução das tarefas que ocorreu no final da aplicação das tarefas permitiram avaliar o nível de concretização das tarefas e o respectivo envolvimento dos alunos. Deste modo, todos os trabalhos produzidos pelos alunos, bem como a sua participação na resolução das tarefas e na discussão final de algumas delas foram avaliadas de acordo com os critérios previstos em grupo disciplinar.

Com a resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa, pretendeu-se proporcionar aos alunos momentos onde pudessem explorar os objetos geométricos construídos, procurar regularidades, formular conjeturas e produzir provas das conjeturas formuladas, e, posteriormente apresentar, discutir e debater os resultados obtidos. As tarefas foram exploradas com recurso ao computador, a um ambiente de geometria dinâmica e ao quadro interativo multimédia. Procurou-se tirar partido das potencialidades destes materiais didáticos de modo a estimular e a facilitar a aprendizagem dos alunos de tópicos de Geometria do 9.º ano de escolaridade.

Dos recursos usados, ocupa lugar de destaque o ambiente de geometria dinâmico GeoGebra por ser um programa livre, estar escrito em Java e, assim, disponível em múltiplas plataformas, sendo de fácil acesso e manuseamento para os alunos.

A turma onde se concretizou esta experiência de ensino foi uma turma do 9.º ano de escolaridade composta por vinte e sete alunos. A sala onde decorreu esta investigação encontrava-se equipada com um quadro interativo multimédia e catorze computadores, pelo que, para a exploração das tarefas, os alunos foram organizados em pares. Esta organização realizou-se inicialmente, de forma aleatória, tendo sido aplicadas pequenas alterações por sugestão da professora da turma. Os alunos foram acompanhados por esta professora que procurou com que todos eles tivessem um papel ativo nas suas aprendizagens. Para isso, a professora da turma analisou cada uma das tarefas com os alunos, dando de seguida espaço para a exploração das mesmas. Dentro de cada par, qualquer um dos elementos podia intervir sempre que apresentasse alguma dificuldade ou alguma ideia pouco clara. Como forma de promover as interações dos participantes, os resultados foram apresentados e discutidos perante o grupo turma e as conclusões foram registadas no quadro branco e/ou no quadro interativo multimédia. Os alunos puderam assim refutar ou confirmar as conclusões de uns e de outros.

3.3. Participantes no estudo

3.3.1. Caraterização da turma/escola

Este estudo decorreu numa Escola Básica, com 2.º e 3.º ciclo, do distrito do Porto, escola onde a investigadora está integrada desde o ano letivo 2009/2010. A escola acolhe um total de 528 alunos dos 2.º e 3.º Ciclos e 53 alunos dos Cursos de Educação e Formação. Dos 528 alunos do 2.º e 3.º Ciclos, 258 são do 2.º ciclo, divididos por 12 turmas, e 270 são alunos do 3.º ciclo, divididos em 11 turmas. Dos 53 alunos dos Cursos de Educação e Formação, 22 são do curso de informática, distribuídos por duas turmas, 15 alunos do curso de operador de armazém, distribuídos por uma turma e 16 do curso de jardinagem, distribuídos, também, por uma turma. Relativamente às habilitações literárias dos Encarregados de Educação, em média, cerca de 14% possui o 2.º ciclo, 13% apresenta o 1.º ciclo, 10% possui o Ensino Secundário, 9% o 3.º ciclo, 2% possui o Ensino Superior e 52% apresenta formação desconhecida/outra (Projeto Curricular de Agrupamento). No que diz respeito à atividade profissional dos Encarregados de

Educação, a grande parte são operários, seguranças, trabalhadores metalúrgicos e trabalhadores não qualificados dos serviços e comércio. Sendo uma escola da periferia do Porto, e uma das freguesias menos desenvolvidas do concelho, apresenta uma alta taxa de desemprego e um nível de escolaridade da população bastante baixo. Estes factores, implicando fracas qualificações e dificuldades de competir no mercado de trabalho, explicam o facto de a população desta freguesia se incluir nos níveis mais baixos de rendimento. A escola iniciou a sua atividade no ano lectivo 1989/1990, mas a sua inauguração, no atual edifício, ocorreu no ano lectivo 1992/1993. Tem uma área coberta de, aproximadamente, 5746 m^2 incluindo espaço desportivo, contentor e coberto/recreio e é constituída por três corpos que comunicam entre si, interior e exteriormente (Projeto Educativo de Escola).

Como o estudo incidiu sobre o tema de Geometria do 9.º ano de escolaridade e como, nesse ano letivo, existia apenas uma professora a lecionar o 9.º ano de escolaridade, a professora acedeu simpaticamente participar no estudo. Das três turmas de 9.º ano existentes no ano letivo 2010/2011, optou-se por escolher a turma com que a professora tinha maior empatia. Por questões legais e éticas, foi solicitada autorização à Direção da Escola (anexo I) para a realização deste estudo, assim como aos Encarregados de Educação (anexo II) dos alunos que integram a turma selecionada. Também, e antes da experiência de ensino, foi apresentada a proposta de trabalho aos alunos da turma selecionada, foram informados dos objetivos e da metodologia de trabalho que iria ser desenvolvida nas aulas, tendo-lhes sido, posteriormente, solicitada a sua participação. Apesar dos alunos, em geral, terem aceitado este desafio com entusiasmo, uma minoria mostrou-se um pouco apreensiva por, até ao momento, terem poucas experiências com o ambiente de geometria dinâmica que iria ser usado para o desenvolvimento do estudo.

3.3.2. A professora da turma

Por lecionarem na mesma escola, a investigadora conhece a professora da turma escolhida. A professora da turma leciona Matemática há 15 anos e integra a escola onde foi desenvolvida a investigação desde o ano letivo 2001/2002. É uma pessoa bastante comunicativa, simpática e prestável, tendo-se mostrado, desde cedo, uma pessoa aberta a este tipo de iniciativas. Licenciou-se em Matemática, via de ensino, numa universidade do Porto, e posteriormente, concluiu o mestrado em Matemática Aplicada na mesma instituição. Tem leccionado todos os níveis do 3.º ciclo e, por norma, acompanha as turmas do 7.º ao 9.º ano de escolaridade. Tem recorrido com regularidade aos ambientes de geometria dinâmica, em especial ao Geometer's Sketchpad e mais recentemente ao GeoGebra . Normalmente, nas suas aulas, é a própria que usa a tecnologia através do quadro interativo multimédia. No entanto, reserva algumas aulas para a realização de tarefas que possibilitem o recurso a ambientes de geometria dinâmica, por parte dos alunos.

3.3.3. Os alunos da turma

A turma que integra este estudo é composta por 27 alunos, sendo 23 do sexo feminino, com idades compreendidas entre os 13 e os 15 anos, e 4 do sexo masculino com idades compreendidas entre os 13 e os 16 anos. No final do 3.º ciclo, dos 27 alunos, 8 alunos obtiveram nível dois, 16 alunos alcançaram nível três, 2 alunos obtiveram nível quatro e 1 aluno atingiu nível cinco. No exame nacional, 3 alunos obtiveram nível um, 13 alunos alcançaram nível dois, 2 alunos conseguiram nível três, 3 alunos obtiveram nível quatro e um aluno atingiu nível 5. Da totalidade dos alunos da turma, apenas dois não concluiu o 9.º ano.

Os alunos da turma aparentam ter dificuldades à disciplina de Matemática, sendo referida por 10 alunos como a disciplina em que apresentam mais dificuldades e apenas três alunos indicam ser a sua disciplina preferida. Apenas quatro alunos se encontravam a repetir o 9.º ano, mas 15 alunos já tinham obtido nível inferior a três na disciplina de Matemática, sendo que 9 destes alunos alcançaram nível inferior a três no 8.º ano de escolaridade. As razões frequentes apontadas para as dificuldades evidenciadas foram a falta de atenção, a falta de estudo, o facto de não gostar da matéria e da própria Matemática, de ser difícil e de ter sempre nível negativo à disciplina. Questionados sobre o gosto pela Geometria, 5 alunos manifestaram preferência por este tema e 2 alunos indicaram-no como o tema menos preferido. Os restantes não manifestaram opinião sobre o tema. Dos 27 alunos, 23 alunos indicam que costumam usar o computador para estudar matemática e já usaram o ambiente de geometria dinâmico GeoGebra para a aprendizagem de Matemática. Apenas 5 alunos apontam que não costumam usar o computador para estudar matemática, mas, no entanto, já usaram o GeoGebra nas suas atividades de aprendizagem nesta disciplina, em anos anteriores.

De um modo geral, a professora indica que alguns elementos novos que foram integrados na turma no 9.º ano são um pouco agitados e conversadores, o que se tem refletido no comportamento geral da turma. Quanto ao aproveitamento, salienta ter alunos com bastantes dificuldades, reflexo de alguma desmotivação pela disciplina e de falta de hábitos de trabalho.

Dos 27 alunos, foram selecionados, então, 6 para constituírem o estudo de caso. Os critérios usados para a seleção destes alunos estiveram relacionados com vários factores: (1) riqueza das interações que foram emergindo nas apresentações dos resultados ao grupo turma; (2) pertinência das intervenções e das produções escritas dos alunos; (3) diferentes níveis de desempenho. Por sua vez, os desempenhos foram definidos em função dos critérios de avaliação definidos no grupo disciplinar, nas suas componentes cognitivas e atitudinais. Assim, na escala de 1 a 5, um aluno apresenta desempenho insuficiente quando a sua classificação corresponde a um nível 1 ou 2; apresenta desempenho suficiente quando a sua classificação corresponde a um nível 3; e apresenta desempenho bom quando a sua classificação corresponde a um nível 4 ou 5. De acordo com a avaliação no final do 1.º período, que antecedeu a experiência de ensino em que se baseia este estudo, escolheram-se dois alunos com desempenho insuficiente (Diana e Mara), dois com desempenho suficiente (Anita e Filipa) e dois com desempenho bom (Júlia e Nélia). Optou-se por informar os alunos escolhidos apenas no final da implementação da experiência de ensino para, assim, procurar que todos os alunos continuassem a acolher o desafio com o entusiasmo e o empenho que demonstraram no início do estudo.

Anita tem 14 anos de idade e é a primeira vez que frequenta o 9.º ano de escolaridade. É uma aluna muito interessada e responsável e apresenta bom aproveitamento em todas as áreas curriculares, excepto em Inglês, onde revela algumas dificuldades. No seu percurso escolar, não apresenta retenções e nunca obteve nível inferior a três na disciplina de Matemática. No 9.º ano de escolaridade, Anita alcançou nível 3 nos três momentos internos de avaliação, mas obteve nível 2 no exame nacional. As preferências disciplinares de Anita recaem sobre Geografia e indicou a disciplina de Inglês como a que apresentava mais dificuldades. Dentro da Matemática, o tópico que mais gostou foi de "expressões numéricas" por "gostar de raciocínio e contas" e o tema que menos gostou foi o de Geometria por não achar "nada de interessante" (Q). Indica, ainda, que costuma usar o computador no estudo de Matemática, tendo já trabalhado com o GeoGebra, e costuma consultar *sites* com exercícios. Dos tópicos de Geometria estudados nos anos anteriores a sua preferência recai para os "sólidos" por achar "mais interessante", em detrimento das "retas no plano" por serem "pouco interessantes". Nas aulas de Geometria dos anos anteriores, Anita gostou mais de trabalhar com computadores por achar "mais divertido" e o que menos apreciou foi a componente "teórica" por achar "uma seca" (Q). Refere ainda ter recorrido ao GeoGebra, nas aulas de Geometria dos anos anteriores, mas não ter usado o quadro interativo multimédia como recurso.

Diana é uma aluna com 14 anos de idade e apresenta um percurso escolar regular, sendo a primeira vez que frequenta o 9.º ano de escolaridade. Revela um comportamento razoável, mas, por vezes, é bastante faladora. Apresenta um aproveitamento suficiente em todas as áreas curriculares, exceto na disciplina de Matemática, onde revela algumas dificuldades. Durante o seu percurso escolar, não apresenta retenções. No entanto, no 6.º, 7.º e 8.º ano de escolaridade, a aluna transitou de ano com nível inferior a três na disciplina de Matemática. Durante o 9.º ano de escolaridade, a aluna obteve nível inferior a três tanto no primeiro período como no exame nacional, tendo obtido nível três nos restantes momentos de avaliação. Apesar de Diana ter indicado manifestar dificuldades na disciplina de Matemática, mais especificamente no tópico das Equações, refere como tema preferido desta disciplina a Geometria, justificando a sua opção por este envolver um menor número de cálculos. A eleição deste tema parece, também, estar associada à escolha da disciplina de Educação Visual como uma das suas disciplinas preferidas. Refere, ainda, que costuma usar o computador quando estuda Matemática e que conhece o programa GeoGebra. Dos tópicos de Geometria já estudados, tem preferência pelos sólidos por achar "mais divertido" e indica ter sido menos interessante o estudo das retas no plano. Nas aulas dos anos anteriores, afirma ter já usado o computador e o GeoGebra, embora não se "lembre da sua finalidade" (Q). Revela ainda que o que gostou mais de fazer nas aulas de Geometria dos anos anteriores foram "as construções no computador" (Q) e indica a "teoria" como a componente das aulas que menos gosta. Quanto ao quadro interativo multimédia, a aluna indicou que não costuma trabalhar com este recurso na sala de aula.

Filipa tem 13 anos e não apresenta qualquer retenção no seu percurso escolar, tendo alcançado sempre nível positivo à disciplina de Matemática. Apresenta bom comportamento e bom aproveitamento. É uma aluna participativa e revela interesse e empenho nas atividades escolares. Gosta de ajudar os colegas e manifesta entusiasmo em qualquer atividade a que se proponha participar. A disciplina em que apresenta mais dificuldades é o Inglês e a sua preferência incide na disciplina de Educação Visual, motivo que a leva a escolher a Geometria como o seu tema predileto dentro da Matemática porque "podemos 'desenhar' e não lidamos só com números" (Q). Refere os tópicos "conjuntos numéricos e funções" como aqueles que menos aprecia por achar "confuso" (Q). Filipa costuma usar o computador e indicou o "GeoGebra, e-escolas e exel" (Q) como os programas que já usou nas suas atividades de aprendizagem de Matemática. Os tópicos que mais lhe agradam "são os sólidos" por achar "interessante" e as maiores dificuldades incidem na "posição de retas e planos" (Q), embora não apresente qualquer justificação. Nas aulas de Geometria dos anos anteriores, Filipa revela ter sido importante ter recorrido sólidos para "entender volumes" e o que menos apreciou foi o estudo das retas porque "não acho interessante" (Q). Expressa ter usado o GeoGebra em algumas aulas dos anos anteriores para "entender a matéria", mas quanto ao quadro interativo multimédia, a aluna indicou que não costuma trabalhar com este recurso na sala de aula (Q).

Júlia é uma aluna com 14 anos e apresenta muito bom aproveitamento e comportamento em todas as áreas curriculares. Revela interesse e empenho nas atividades escolares e é muito responsável. Apresenta a Matemática como a sua disciplina preferida e refere não ter dificuldades em qualquer outra área curricular, estando frequentar o 9.º ano pela primeira vez. Tendo tido sempre nível positivo a Matemática elegeu os tópicos sobre "equações e resolver problemas de raciocínio" (Q) como as matérias de Matemática de predileção, sendo que não desvaloriza nenhum tópico. Quanto à avaliação interna de escola e do exame nacional, Júlia alcançou sempre o nível 5. Assinala, ainda, que costuma usar o computador no estudo de Matemática, tendo trabalhado com o "GeoGebra e Graph" para "ter novas perspetivas da representação de retas e figuras" (Q). Dos tópicos de Geometria estudados em anos anteriores, a sua preferência incide para tópicos que permitam "saber as caraterísticas dos sólidos porque me permite associá-los a objetos do dia-a-dia" (Q). Nas aulas de Geometria dos anos anteriores, Júlia apreciou "calcular os volumes e áreas" por "envolve mais raciocínio" (Q). Contudo, a aluna revela nunca ter usado o computador e o quadro interativo multimédia nas aulas de geometria.

Mara tem 15 anos de idade e apresenta um percurso escolar irregular. Manifesta problemas de atenção e concentração, o que a leva a desmotivar-se com facilidade das atividades escolares. Por vezes, expressa variações de humor que a tornam conflituosa. A falta de assiduidade e a falta de estudo arrastou-a a fazer o 9.º ano pela segunda vez. Mara indicou as disciplinas de Educação Visual e de Educação Física como sendo as suas disciplinas preferidas e História e Inglês as disciplinas onde apresenta mais dificuldade e Afirmou ter tido nível inferior a três no 7.º ano de escolaridade, ano em que ficou retida. Durante o 9.º ano de escolaridade, a aluna alcançou nível 3 nos momentos de avaliação interna e obteve nível 2 no exame nacional. Refere os tópicos "sistemas, equações do 1.º e do 2.º grau e probabilidades", como os de sua preferência pois "permite fazer muitos cálculos". Desvaloriza o tema de Geometria e de Funções porque a "dão muito trabalho a pensar" (Q). Mara revela ainda que, em anos anteriores, nas atividades de aprendizagem de Matemática, recorreu a programas de computador para matemática, tal como o GeoGebra. Mara valoriza os tópicos "Áreas e Volumes" por "permitir fazer cálculos e eu gosto de fazer cálculos.", em detrimento do tópico "rectas e planos" por serem "muito complicados. de resolver" (Q). Expressa, ainda, não ter usado o GeoGebra nem o algum quadro interativo multimédia" (Q).

Nélia tem 14 anos e é a primeira vez que frequenta o 9.° ano de escolaridade. É uma aluna muito interessada nas atividades letivas, responsável e participativa. É organizada e revela bom comportamento e aproveitamento em todas as áreas curriculares. No seu percurso escolar, não apresenta retenções e nunca obteve nível inferior a três na disciplina de Matemática. No 9.° ano de escolaridade, Nélia alcançou nível 4 nos três momentos internos de avaliação, mas obteve nível 3 no exame nacional. A aluna aponta as suas preferências para a disciplina de Educação Visual e indicou a disciplina de Francês como a que apresenta mais dificuldades. Dentro da Matemática, o tópico que mais gostou recaiu para a matéria das "inequações, dos sistemas e das probabilidades" por ter achado "relativamente fáceis" (Q). Assinala, ainda, que não costuma usar o computador no estudo de Matemática por não achar "propriamente necessário e porque também para mim estudar matemática resume-se a pegar numa folha, calculadora, lápis e borracha e resolver exercícios" (Q). No entanto, expressa que nas aulas de Geometria dos anos anteriores já recorreu ao GeoGebra para "fazer gráficos com retas, imagens/objectos" e ao quadro interativo multimédia para resolver "problemas matemáticos" (Q).

3.4. Métodos de recolha de dados

A recolha de dados foi efectuada no ambiente natural da sala de aula. De acordo com o carácter qualitativo da metodologia adoptada, a recolha de dados procura obter uma caracterização o mais completa possível das situações em estudo. Assim, de acordo com o objectivo e o tipo de questões deste estudo, optou-se por uma diversificação das fontes de recolha de dados – questionário, entrevista, observação e análise documental – que, segundo Tuckman (2000) e Yin (1989), constituem a base para analisar um processo de estudo de caso, permitindo recolher evidências relacionadas com as questões de investigação. Neste estudo, a principal técnica de recolha de dados foi a observação, complementada com documentos escritos produzidos pelos alunos. Para Lüdke e André (1986) e Vieira (1993), a observação usada como principal método de investigação ou associada a outras técnicas de recolha, apresenta vantagens significativas por possibilitar um contacto pessoal e estreito entre o investigador e o fenómeno investigado.

A recolha de dados decorreu durante o horário escolar dos alunos, nas aulas da disciplina de Matemática, quando se abordaram os tópicos *Circunferência e Polígonos. Rotações*, *Trigonometria do Triângulo Retângulo* e *Espaço – Outra Visão*, e foi subdividida em três momentos: (i) início da experiência de ensino; (ii) durante a experiência de ensino; e (iii) final da experiência de ensino. No início da experiência de ensino, os alunos responderam a um questionário (anexo III) e exploraram as tarefas 1, 2 e 3. Durante a experiência de ensino, os alunos exploraram as tarefas 4, 5, 6 e 7. No final da experiência de ensino, os alunos exploraram as tarefas 8, 9, 10 e 11. Após o término do estudo do tema de Geometria, efetuou-se uma entrevista semiestruturada aos alunos (anexo XV). Após a exploração de cada uma das tarefas, foram recolhidos os respetivos registos das atividades realizados pelos alunos, assim como os registos áudio e vídeo do trabalho desenvolvido nas aulas e as notas de campo da observação direta das aulas realizadas pela investigadora.

3.4.1. Questionário

Os questionários são instrumentos que podem fornecer informação que a observação das aulas e as entrevistas aos alunos não permite obter. Como refere Varandas (2000), "é uma metodologia indicada quando se pretende ter como informantes um conjunto numeroso de pessoas e as condicionantes de tempo inviabilizam o recurso à entrevista" (p. 72). Com o intuito de ajudar a dar resposta às questões de investigação, foi aplicado um questionário no início do estudo. O questionário, composto por questões abertas e questões fechadas, "questionário misto" (Rojas, 2001), foi dividido em três partes, precedidas de uma pequena introdução. A primeira parte é constituída por dez questões e tem como objetivo recolher alguma informação pessoal sobre os alunos, sobre as suas experiências com o computador e o conhecimento de programas relacionados com a Matemática. A segunda parte é constituída por onze questões e pretende-se conhecer as perspectivas dos alunos sobre a Geometria e a sua importância, assim como obter alguma informação sobre as formas de trabalho que já experimentaram neste tema. Por fim, a terceira parte é abrangida por quatro questões, de natureza fechada onde se tenciona conhecer as perspectivas dos alunos sobre a argumentação.

O questionário foi, ainda, alvo de validação por parte de quatro docentes: dois do Ensino Superior, da área da Investigação em Educação Matemática, e outros dois de Matemática do

Ensino Básico. As sugestões recebidas foram atendidas, o que muito contribuíram para tornar as questões mais claras e para as organizarem segundo uma sequência lógica.

3.4.2. Entrevista

A entrevista, considerada como um dos processos mais diretos de encontrar informações sobre aquilo que se procura estudar, (Tuckman, 1994), permite recolher dados descritivos na linguagem do entrevistado com a finalidade de ter uma percepção da forma como o entrevistado pensa e interpreta determinados pontos de vista. Assim, optou-se pela técnica da entrevista por esta permitir uma interação entre quem pergunta e quem responde, possibilitando conhecer mais particularmente a opinião dos entrevistados sobre aspectos que ajudem a enquadrar as questões de investigação.

A entrevista realizada neste estudo foi semiestruturada por se situar no limite entre a entrevista estruturada, orientada por questões previamente escritas onde é seguida integralmente a sua formulação e sequência, e a entrevista não estruturada em que a maior parte das questões emergem do fluxo da conversação e podem tomar qualquer rumo que seja apropriado (Patton, 2002). Embora a entrevista deste estudo tivesse seguido um guião semiestruturado (anexo XV), este foi flexível permitiu, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), uma recolha de dados sistemática num ambiente natural de conversa. A entrevista foi aplicada a cada um dos alunos deste estudo após a experiência de ensino, tendo sido gravada em registo áudio, e está estruturada em três partes: (1) Apreciação sobre as aulas de Geometria; (2) Apreciação sobre as tarefas de Geometria com recurso aos ambientes de geometria dinâmica; e (3) Perspectivas sobre a argumentação.

3.4.3. Observação

Nesta investigação, pretendeu-se acompanhar os alunos nas suas atividades dentro da sala de aula, pelo que a investigadora manteve contacto estreito com os alunos desde o início até ao final do ano letivo de 2010/2011. Segundo Lessard-Hébert et al. (1994), o investigador pode adoptar uma postura direta sistemática ou uma forma participante e, dentro desta, os autores distinguem entre observação participante passiva e observação participante ativa. Na observação participante passiva, o investigador não participa nos acontecimentos, apenas assiste do exterior e regista os dados no período de duração da investigação, contrariamente à observação participante ativa em que o investigador se envolve nos acontecimentos e regista os dados após eles se realizarem. Neste contexto, e apesar de esporadicamente, a investigadora ter tido um papel ligeiramente interventivo, pode-se considerar que a observação participante em questão foi passiva. Durante a observação, a investigadora registou os acontecimentos ocorridos num formato descritivo, recorrendo a notas de campo, e através do registo áudio e vídeo. Dos registos efetuados, o formato áudio foi abandonado por ter ficado imperceptível devido ao barulho que, na fase de exploração de tarefas, se fazia sentir na sala de aula.

3.4.4. Análise documental

Numa investigação qualitativa, a informação que resulta da análise dos documentos produzidos pelos participantes, emergentes da observação participante ou da entrevista, são um meio para obter dados mais significativos (Bogdan & Biklen, 1994). Esta técnica é, segundo Yin (1989), segura, por poder ser usada sem sofrer alterações, precisa, por conter nomes, referências e pormenores de um acontecimento, e de larga cobertura, por passar por longos períodos de tempo, abranger vários acontecimentos e ambientes distintos. Neste estudo, a contemplação deste tipo de dados é importante para se investigar uma experiência de ensino que envolveu tarefas para os alunos explorarem, conjeturarem e provarem, onde a escrita, em formato papel ou digital, se torna um documento imprescindível para o desenvolvimento do mesmo.

Foram, então, analisados documentos internos da escola e documentos produzidos pelos alunos. Dos documentos internos da escola, destaca-se o Projeto Educativo da Escola onde se realizou a componente empírica deste estudo, o Projeto Curricular de Agrupamento e o Projeto Curricular de Turma. Dos documentos produzidos pelos alunos foi analisada toda a informação procedente do questionário e das produções dos alunos resultantes da sua atividade na sala de aula, tais como os registos escritos, as construções realizadas no GeoGebra e os Flipcharts recolhidos do quadro interativo multimédia. Foram, ainda, analisadas as transcrições resultantes das gravações de vídeo e áudio na sala de aula e da gravação áudio da entrevista, assim como as anotações de campo realizadas pela investigadora. Todos os documentos relativos aos alunos e à professora da turma foram devidamente organizados por data de recolha.

Na Tabela 3: Métodos de recolha de dados segundo as questões de investigação do estudo, os métodos de recolha de dados são distribuídos segundo as questões de investigação.

Tabela 3: Métodos de recolha de dados segundo as questões de investigação do estudo

Questões \ Instrumentos	Questionário	Observação de aulas	Documentos produzidos	Entrevista
Q1	X	X	X	
Q2		X	X	X

Assumida uma posição de observadora participante passiva, a investigadora pôde aperceber-se de pormenores sentidos dentro do espaço sala de aula, que, de outra posição, seriam praticamente imperceptíveis. Vários autores, tais como Bogdan e Biklen (1994) e Yin (1989), destacam, ainda, que nestas posições, o investigador tem a possibilidade de efetuar descrições pormenorizadas e analisá-las com informações recolhidas através de outras fontes de recolha de dados. Para facilitar a compreensão do tipo de instrumentos que foram usados para a análise documental, recorreu-se à sua codificação (Tabela 4: Codificação dos instrumentos de recolha de dados):

Tabela 4: Codificação dos instrumentos de recolha de dados

Instrumentos de recolha de dados	Codificação
Questionário	Q
Registo escrito das resoluções dos alunos na tarefa i	RE-T i, onde $i \in \{1, 2, 3, \dots, 11\}$
Registo de vídeo das interações promovidas na sala de aula	RV-T i, onde $i \in \{1, 2, 3, \dots, 11\}$
Entrevista	E
Notas de campo	NC-dia.mês.ano

A análise documental dos vários tipos de instrumentos relativos aos registos dos alunos e as notas de campo realizadas pela investigadora foram processadas em simultâneo, para, assim, obter uma percepção mais apurada dos procedimentos matemáticos usados pelos alunos.

3.5. Análise de dados

Analisar os dados qualitativos, segundo Lüdke e André (1986), significa trabalhar e dar significado ao material obtido pela pesquisa. Também, Miles e Huberman (1994) defendem a criação de categorias que procurem ordenar, organizar e sistematizar a informação. Assim, procedeu-se a uma análise qualitativa baseada na descrição e interpretação dos dados recolhidos com recurso aos instrumentos usados para o efeito, e a uma posterior categorização tendo em conta o objetivo e as questões de investigação.

A análise de dados iniciou-se depois de ter sido recolhida toda a documentação pela qual a investigadora se apoiou. Após os dados terem sido alvo de uma leitura cuidada, identificaram-se os alunos que revelaram intervenções mais pertinentes durante as aulas em que decorreu esta experiência de ensino. Seguidamente, a informação recolhida foi fragmentada para procurar regularidades e, deste modo, destacar os aspectos mais relevantes por forma a reduzir os dados, sem retirar o sentido conferido pelos participantes. Deste modo, foram criadas as seguintes categorias de análise dos dados: (i) aspectos da argumentação matemática; (ii) perspectivas sobre a aprendizagem da Geometria com recurso aos ambientes de geometria dinâmica e a tarefas de natureza exploratória e investigativa; (iii) perspectivas sobre a argumentação.

A categoria 'aspectos da argumentação matemática' procura descrever as fases da argumentação que emergem da linha de pensamento de vários autores, tais como de Villiers (2003), Douek e Pichat (2003), Hanna (2002) e Mason et al. (1982). Deste modo, a categoria foi, ainda, fragmentada em outras duas subcategorias: formulação e teste de conjeturas e prova de conjeturas.

Nas categorias 'aspectos da argumentação matemática' e 'perspectivas sobre a aprendizagem da Geometria com recurso aos ambientes de geometria dinâmica e a tarefas de natureza exploratória e investigativa', a informação foi organizada de acordo com os três momentos em que foi recolhida: (i) antes da experiência de ensino; (ii) durante a experiência de ensino; (iii) final da experiência de ensino.

Na categoria 'perspectivas sobre a argumentação', a informação foi organizada de acordo com os dois momentos em que foi recolhida: (i) antes da experiência de ensino; (iii) final da experiência de ensino.

Ao longo do estudo são apresentados e analisados alguns diálogos entre os alunos e, pontualmente, envolvendo a professora, extraídos dos registos escritos e de áudio e vídeo, e de algumas notas de campo realizadas pela investigadora. Procurou-se deste modo, possibilitar uma melhor compreensão dos acontecimentos e dos contextos onde eles se desenvolvem. Nesta investigação constam, também, algumas resoluções apresentadas pelos alunos nas tarefas que realizaram e nos relatórios das investigações. Durante todo o processo de análise de dados, teve-se a preocupação de não acrescentar significados ou comentários aos textos originais, nem alterar o sentido, assim como procurou-se que a informação proveniente da fragmentação realizada a esses textos fosse compreensível quando for lido fora do contexto em que está inserida.

CAPÍTULO 4

APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

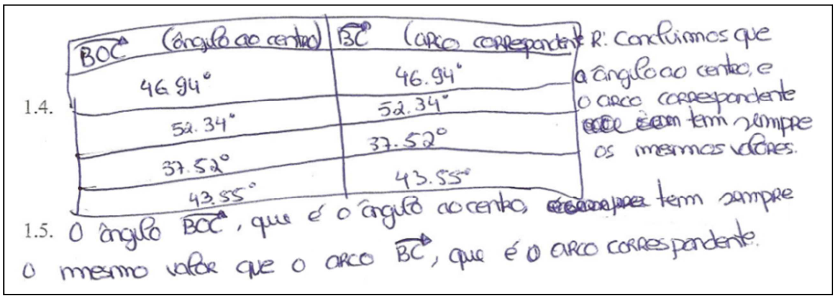
Neste capítulo são analisados os dados que resultam das atividades desenvolvidas pelos alunos nas onze tarefas propostas na experiência de ensino sobre o tema de Geometria do 9.º ano de escolaridade, com recurso ao GeoGebra, segundo as seguintes categorias: (i) formulação e teste de conjeturas; (ii) prova de conjeturas; (iii) perspetivas dos alunos sobre o recurso aos ambientes de geometria dinâmica e a tarefas de natureza exploratória e investigativa; (iv) perspetivas dos alunos sobre a argumentação. Cada uma destas categorias é estruturada pela análise e interpretação dos dados recolhidos em três momentos: início, durante e final da experiência de ensino. O início da experiência de ensino abrange as três primeiras tarefas; o momento correspondente à parte intermédia da experiência de ensino trata as quatro tarefas seguintes; e o momento correspondente ao final da experiência de ensino integra as quatro últimas tarefas. Em cada um destes momentos evidencia-se o trabalho desenvolvido durante a exploração das tarefas e na apresentação e discussão das atividades dos alunos na sala de aula.

4.1. Aspetos da argumentação matemática

4.1.1. Formulação e teste de conjeturas

Início da experiência de ensino. O estudo da Geometria de 9.º ano iniciou-se com a apresentação, por parte da professora, dos tópicos a abordar. De seguida, os alunos exploraram a tarefa 1 (Anexo IV) que incidiu sobre as definições de ângulo ao centro e de ângulo inscrito numa circunferência e a relação entre as amplitudes do ângulo ao centro de uma circunferência e do arco correspondente. Ao ritmo de cada um, os alunos representaram, com recurso ao GeoGebra, numa circunferência alguns ângulos ao centro e ângulos inscritos. Posteriormente, determinaram as amplitudes de ângulos ao centro de uma circunferência e dos arcos correspondentes. À medida que registavam as amplitudes numa tabela, os discentes aperceberam-se da existência de uma regularidade. Como se procurava que estabelecessem uma conjetura a partir da observação dos valores registados, a professora aproveitou a oportunidade para elucidar os alunos de que "na vossa conjetura vão generalizar, não vão particularizar" (RV-T1).

No momento de apresentação das atividades dos alunos à turma, Diana registou no quadro uma tabela com os valores que obteve para os ângulos ao centro e para os arcos correspondentes (Figura 7).



1.4.

$\widehat{BOC}$ (ângulo ao centro)	$\widehat{BC}$ (arco correspondente)
46.94°	46.94°
52.34°	52.34°
37.52°	37.52°
43.55°	43.55°

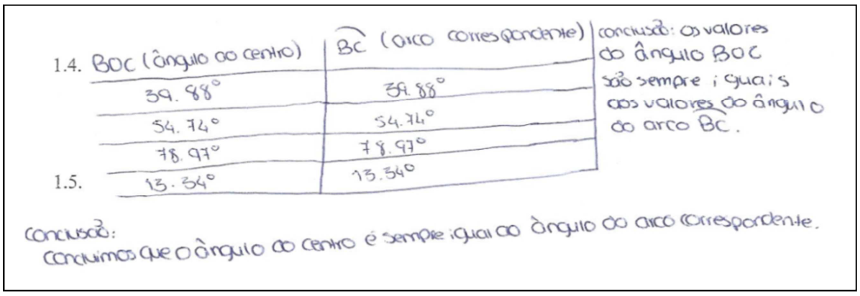
R: Concluímos que o ângulo ao centro, e o arco correspondente tem sempre os mesmos valores.

1.5. O ângulo $\widehat{BOC}$, que é o ângulo ao centro, tem sempre o mesmo valor que o arco $\widehat{BC}$, que é o arco correspondente.

Figura 7: Conjetura efetuada por Diana sobre a relação entre as amplitudes dos ângulos ao centro e do arco correspondente numa circunferência. (RE-T1)

A existência de letras na representação dos ângulos ao centro e dos seus arcos correspondentes parece condicionar a forma como Diana generalizou a relação entre as amplitudes destes elementos da circunferência. Ao ver as letras como um objeto, a aluna não distingue a diferença entre situações particulares que determinou e a expansão dessas situações para uma relação mais abrangente, que se verifique para quaisquer amplitudes que considere de um ângulo ao centro e do arco correspondente.

A resposta apresentada pela Diana à turma mereceu algumas reações dos alunos, como exemplifica a intervenção da Anita: “O que observamos foi que por mais que alargássemos ou diminuíssemos o ângulo [ao centro], as amplitudes do ângulo e do arco [correspondente] são sempre iguais” (RV-T1). Esta aluna, ao abstrair-se das letras que representavam o ângulo ao centro, apresenta uma conjetura com um formato de generalização, o que também é evidenciado na resposta que Nélia apresenta à turma (Figura 8).



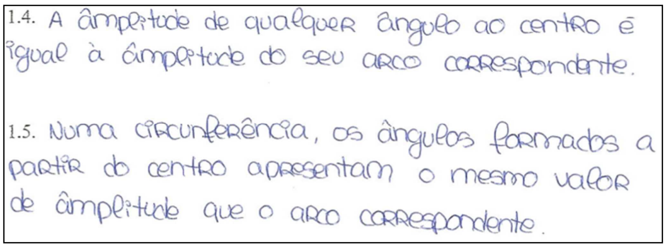
1.4. BOC (ângulo ao centro)	$\overset{\frown}{BC}$ (arco correspondente)
39.88°	39.88°
54.74°	54.74°
78.97°	78.97°
1.5. 13.34°	13.34°

conclusão: os valores do ângulo BOC são sempre iguais aos valores do ângulo do arco $\overset{\frown}{BC}$.

conclusão:
concluimos que o ângulo do centro é sempre igual ao ângulo do arco correspondente.

Figura 8: Conjetura efetuada por Nélia sobre a relação entre as amplitudes dos ângulos ao centro e do arco correspondente numa circunferência. (RE-T1)

Na conjetura que estabeleceu, esta aluna parece entender que as regularidades que observou em situações particulares são passíveis de serem representadas por uma 'expressão' que se estende a qualquer situação que considere. Porém, apesar de terem observado regularidades entre os valores encontrados na primeira e na segunda coluna da tabela, a maior parte dos alunos apresenta dificuldades em distinguir uma observação particular de uma conjetura, como se pode constatar na resposta dada pela Júlia (Figura 9).



1.4. A amplitude de qualquer ângulo ao centro é igual à amplitude do seu arco correspondente.

1.5. Numa circunferência, os ângulos formados a partir do centro apresentam o mesmo valor de amplitude que o arco correspondente.

Figura 9: Conjetura efetuada por Júlia sobre a relação entre as amplitudes dos ângulos ao centro e do arco correspondente numa circunferência. (RE-T1)

Após a discussão na turma dos resultados obtidos pelos alunos sobre a relação entre as amplitudes dos ângulos ao centro e dos seus arcos correspondentes, procurou-se expandir a aplicação do conhecimento adquirido numa situação do dia-a-dia. Tratou-se de determinar as amplitudes dos elementos da circunferência estudados na distribuição de oito queijos, com o formato aproximadamente 'triangular', numa caixa com o formato 'circular'. Considerando que os queijos eram geometricamente iguais e que os seus 'vértices' convergiam no centro da caixa, os alunos conseguiram determinar as amplitudes dos ângulos ao centro e dos arcos correspondentes representados pelos oito queijos.

Nélia: Se [a circunferência] for dividida em quatro, cada ... cada parte tem um ângulo de 90°. Como cada parte é dividida em dois, fiz 90 a dividir por 2 que me deu 45.
Prof.: Uma outra forma de justificar isso? Quem fez de outra forma?
Filipa: Pus 360° a dividir por 8, que deu 45°.
Prof.: 360 corresponde a quê?
Filipa: À amplitude total da circunferência.
(...)
Anita: Oh Stôra, nós depois tínhamos de explicar a medida do arco correspondente, não tínhamos?
Prof.: Precisamos de acrescentar o quê?
Anita: Eu pus, cada circunferência tem 360° no ângulo ao centro. Se estiver dividido em 8 partes iguais, como na imagem, cada pedaço tem 45 ° de amplitude do ângulo ao centro, porque fiz como a Filipa, dividi por 8. Como o arco correspondente é igual ao ângulo ao centro, cada arco tem 45° também. (RV-T1).

Mas, o mesmo já não aconteceu na determinação dessas amplitudes no caso de a caixa conter *n* queijos iguais. Um significativo número de alunos não efetuou a generalização que se pretendia. Entre os alunos que apresentaram uma resposta a esta questão, destaca-se a que foi apresentada por Filipa à turma (Figura 10).

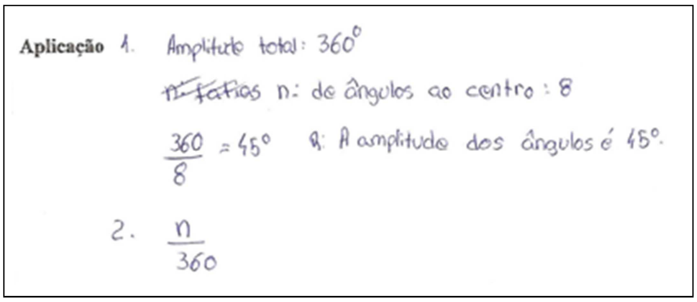
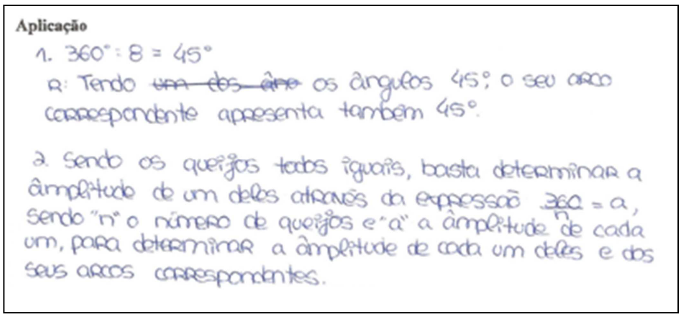

Aplicação 1. Amplitude total: 360°
~~nº fatias~~ n: de ângulos ao centro: 8
$\frac{360}{8} = 45°$ R: A amplitude dos ângulos é 45°.
2. $\frac{n}{360}$

Figura 10: Resolução da aplicação da tarefa 1 por Filipa. (RE-T1)

Enquanto na situação concreta a aluna mostra perceber a relação que existe entre a amplitude da circunferência e a amplitude de cada um dos oito ângulos formados pelos queijos, na generalização para *n* queijos quaisquer revela não distinguir o significado da letra *n* em relação à amplitude da circunferência. A noção de grandeza que *n* pode tomar parece condicionar o raciocínio da aluna. Enquanto na situação particular o todo corresponde à amplitude da circunferência, a ser dividida em 8 partes, na situação geral a percepção de que o valor desconhecido pode ser superior a 360 poderá contribuir para a perda da noção da razão a estabelecer. Dos alunos que conseguiram generalizar a situação apresentada, Júlia denota compreender a importância das letras na tradução do seu raciocínio (Figura 11).


Aplicação

1. $360° : 8 = 45°$
R: Tendo ~~um dos ân~~ os ângulos 45°, o seu arco correspondente apresenta também 45°.

2. Sendo os queijos todos iguais, basta determinar a amplitude de um deles através da expressão $\frac{360}{n} = a$, sendo "n" o número de queijos e "a" a amplitude de cada um, para determinar a amplitude de cada um deles e dos seus arcos correspondentes.

Figura 11: Resolução da aplicação da tarefa 1 por Júlia. (RE-T1)

Após a determinação da relação entre as amplitudes do ângulo ao centro e do seu arco correspondente numa dada circunferência, os alunos foram à procura da relação entre a amplitude do ângulo inscrito e do seu arco correspondente através da exploração da tarefa 2 (Anexo V). Aos poucos, os alunos foram-se ambientando ao GeoGebra. Recorrendo às potencialidades deste software, os discentes desenharam ângulos inscritos numa circunferência, determinaram as suas amplitudes e as dos arcos correspondentes e transferiram os valores encontrados para uma tabela (Figura 12).

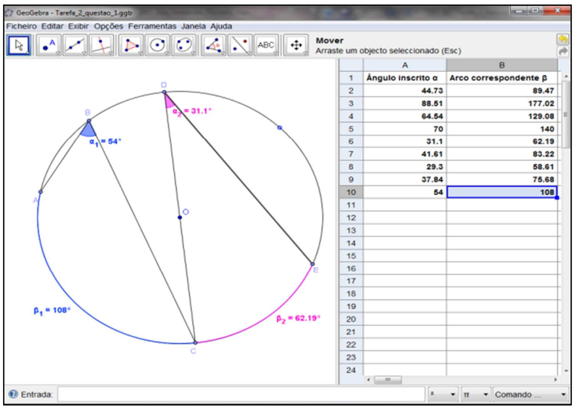


Figura 12: Flipchart da exploração da questão 1 da tarefa 2. (RV-T2)

Na apresentação dos resultados à turma, os alunos puderam, através do quadro interativo, evidenciar a regularidade entre os valores que obtiveram na recolha, por arrastamento de pontos, das várias amplitudes de ângulos inscritos e dos respetivos arcos correspondentes. Esta apresentação foi determinante para convencer os alunos que tal relação se verifica para qualquer ângulo inscrito que se considere, como exemplificam as respostas dadas por Juliana e por Mara:

Júlia: As amplitudes dos arcos correspondentes são o dobro das amplitudes dos ângulos inscritos.
Mara: Na circunferência a amplitude do ângulo inscrito é sempre metade da amplitude do arco que o corresponde. (RV-T2)

Alguns alunos sentiram-se condicionados na formulação das suas conjeturas sobre a situação em estudo por obterem valores aproximados, tal como refere Ana: "Stôra, mas tem ali valores que não são bem o dobro" (RV-T2).

Como consequência do estudo do ângulo inscrito obtém-se a relação que determina a amplitude de um ângulo inscrito numa semicircunferência (tarefa 3, Anexo VI). Depois de se debaterem os aspetos essenciais que representam um ângulo deste tipo, os alunos, ao arrastarem o vértice do ângulo, constataram que a relação anteriormente estabelecida se mantém:

Mara: Stôra, temos que justificar que... porque o arco... dá 180°. O arco [correspondente] é sempre 180°, logo o ângulo inscrito tem de ser metade.
Prof.: Mas que arco é esse?
Mara: É o BA, stôra.
Filipa: Eu concordo com o que a Mara disse, acho que o que a Mara disse faz sentido.
Prof.: Vamos reformular o que Mara disse, Filipa, onde está o ângulo inscrito?
Filipa: Oh, stôra! Eu sei que o ângulo é de 90° porque tem um arco correspondente de 180°, certo? Também sei que o ângulo está inscrito na circunferência.
Prof.: E em especial...
Júlia: O ângulo está inscrito em metade da circunferência, numa semicircunferência, não é stôra? Foi assim que eu respondi. Todos os ângulos inscritos numa semicircunferência apresentam 90° de amplitude porque os seus extremos são os extremos do diâmetro, tendo sempre o seu arco correspondente 180°. (RV-T3)

A discussão sobre os resultados obtidos ajudou a clarificar algumas respostas formuladas com pouco sentido crítico, como foi o caso da resposta dada por Anita: "a amplitude do ângulo BCA é 90° porque é um ângulo reto" (RE-T3). A ênfase que a aluna atribui à amplitude do ângulo reto indicia derivar da importância que dá aos valores que obtém através do GeoGebra em detrimento das razões que justificam esses mesmos valores.

A forma como os alunos constroem certos conceitos matemáticos ao longo da sua escolaridade nem sempre ajuda a formulação de novos conceitos. No caso da representação de um ângulo inscrito numa semicircunferência, a presença de um diâmetro na imagem fornecida aos alunos fez com que alguns deles considerassem este elemento da circunferência como parte integrante do ângulo inscrito. Assim, alguns alunos focam a sua atenção na relação que existe entre as amplitudes dos ângulos internos de um triângulo, como se constata na resposta dada por Filipa: "A soma dos ângulos inscritos numa circunferência é 180°" (RE-T3). Tal resposta revela ausência de análise crítica da aluna sobre o que escreveu, alargando a relação que aprendeu sobre os ângulos internos de um triângulo a ângulos inscritos de uma circunferência.

As representações dos conceitos matemáticos são determinantes na exploração e no estabelecimento de conjeturas. As tabelas foram uma das representações que os alunos usaram frequentemente na exploração das tarefas propostas. O seu preenchimento, através da recolha de valores com o GeoGebra, ajudou os alunos a formularem as suas conjeturas, como foi o caso da comparação entre as amplitudes de um ângulo ao centro e as do ângulo inscrito com o mesmo arco correspondente.

Diana: Temos um ângulo ao centro e um ângulo inscrito no mesmo arco [de circunferência].
Prof.: Quais são os seus valores?
Diana: O arco tem 85.34°, o ângulo [ao centro] tem também 85.34° e este ângulo [apontando para o ângulo inscrito] tem 42.67°.
Prof.: Confirma a relação encontrada?
Diana: Sim, stôra! [...] O ângulo inscrito é metade do ângulo ao centro.
Prof.: Vamos mover o ponto C e experimentar outros valores? Confirma?
Filipa: Stôra, a mim deu-me ao contrário [...] mas também está certo, não está? Eu escrevi que a amplitude do ângulo ao centro e do seu arco correspondente é sempre o dobro do seu ângulo inscrito.
Diana: Stôra, eu também escrevi na minha resposta o que a Filipa disse e acho que é a mesma coisa porque se o primeiro é metade do segundo é o mesmo que ter que o segundo é o dobro do primeiro. (RV-T3)

A observação de casos particulares que cada aluno apresentou permitiu o estabelecimento de conjeturas, como exemplifica a resposta dada por Diana (Figura 13):

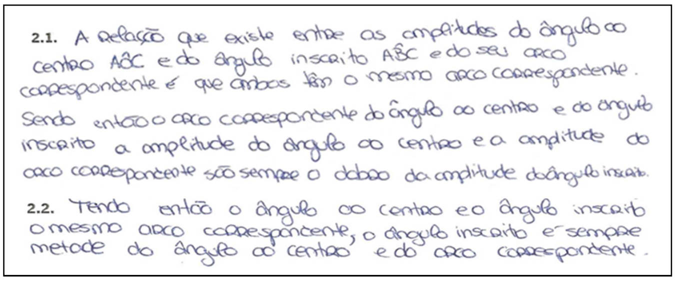


Figura 13: Conjetura sobre a relação entre o ângulo ao centro e o ângulo inscrito no mesmo arco correspondente apresentada por Diana. (RE-T3)

Como se verificou nas outras situações exploradas, esta conjetura foi validada porque ninguém apresentou qualquer contraexemplo que a refutasse. De modo a justificar a relação que estabeleceu, Diana dirigiu-se ao quadro interativo para, através da movimentação de um dos pontos da figura que construiu, mostrar a sua validade para outras situações. Ao identificar que a relação que obteve é inversa da relação que os seus colegas obtiveram, a aluna mostra que ambas as relações são corretas dependendo do sentido que se estipula.

De um modo geral, a maior parte dos alunos conseguiu, ao seu ritmo, construir, com recurso ao GeoGebra, as figuras que representavam as situações propostas, explorá-las para recolherem valores que as dispunham em tabela, o que os ajudou na formulação de conjeturas das relações estudadas. Aos poucos, foram-se apercebendo da relevância que a construção de uma diversidade de situações tinha nas justificações que apresentavam para convencerem os outros das suas convicções

Durante a experiência de ensino. Na continuidade do estudo da circunferência, os alunos exploraram a tarefa 4 (Anexo VII) para estabelecerem a relação entre cordas geometricamente iguais e os correspondentes arcos e ângulos ao centro. Depois da construção, com recurso ao GeoGebra, destes elementos numa circunferência com um raio qualquer à escolha dos alunos, nem todos estavam a interpretar devidamente o que se pretendia que fizessem, como se verifica na intervenção de Diana:

Diana: Stôra, aqui [apontou para o monitor] porque eu tenho duas medidas para o ângulo ao centro (...) iguais, e depois nos arcos tenho duas medidas mas são diferentes (...) das medidas dos ângulos.
Prof.: Mas o que é que sabemos, de aulas anteriores, sobre as amplitudes dos ângulos ao centro e do arcos correspondentes?
Diana: São sempre iguais (...). Então está mal! (RV-T4)

Tal dificuldade deveu-se à forma como a aluna representou a corda. Em vez de selecionar dois pontos da circunferência e construir o segmento que os une, optou por ativar o comando do segmento de reta sem atender que o mesmo passasse por esses pontos. Quando movimentava um dos pontos da figura, as medidas que obtinha não tornavam a relação invariante como se pretendia que acontecesse.

Na fase de discussão, através da observação dos valores que foram registados numa tabela, os alunos concluem que os ângulos ao centro definidos pelas extremidades de cordas geometricamente iguais apresentam as mesmas amplitudes, bem como os arcos correspondentes (Figura 14: Flipchart da questão 1 (RE-T4)). No raciocínio dos alunos emerge a consequência que as 'premissas' – cordas iguais e ângulos ao centro iguais – têm na conclusão – arcos correspondentes iguais.

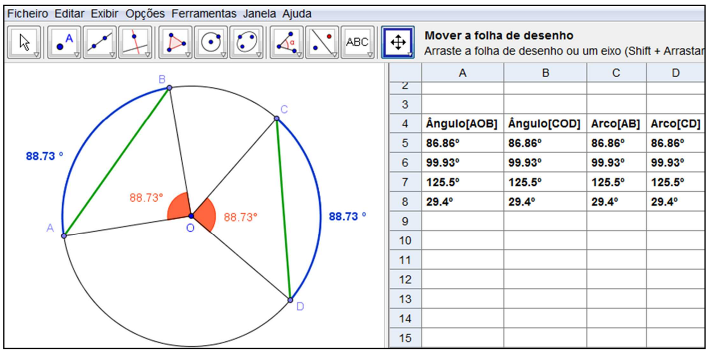


Figura 14: Flipchart da questão 1 (RE-T4)

Prof.: Vamos olhar para a figura, para a primeira linha e para as duas primeiras colunas! O que é que está a acontecer?

Diana: Os ângulos ao centro têm ambos amplitude 86.86°.

Prof.: Observem agora a segunda linha das duas primeiras colunas! O que está a acontecer, Diana?

Diana: Os ângulos ao centro têm de amplitude 99.93°, são também iguais.

Prof.: E a terceira linha das duas primeiras colunas?

Diana: Os ângulos ao centro também são iguais.

Prof.: Então o que é que podemos concluir?

Diana: Que os ângulos ao centro são iguais porque deram o mesmo valor.

Prof.: Quais foram as condições iniciais? De que é que vocês partiram?

Júlia: Das cordas (...) que são iguais!

Prof.: Essa é a condição (...) inicial! E relativamente aos arcos definidos por essas cordas?

Mara: Também são iguais entre si.

Prof.: Já temos as conclusões que nos pediam, ângulos ao centro e arcos. Quem quer avançar com uma conjetura?

Júlia: Para cordas iguais, os ângulos ao centro e os arcos correspondentes apresentam sempre amplitude igual (RV-T4).

A maior parte dos alunos identificou a condição que funcionou como ponto de partida para as duas conclusões, indiciando que distinguiram a importância que a exploração dos dados tem na obtenção das suas conclusões. Nessa exploração, ganha relevância a destreza técnica que os alunos adquirem com as características do GeoGebra. Exemplo disso foi a forma como construíram eixos de reflexão que lhes permitia identificar simetrias numa circunferência, como mostra a resposta dada por Filipa: "A reta dividiu-se em duas partes iguais, a reta designa-se de eixo de simetria ou eixo reflexo (diâmetro)" (RE-T5). A aluna mostra ter presente a noção de eixo de reflexão, mas atribui-lhe a designação de eixo de simetria por essa reta ter dividido a circunferência em duas partes iguais, duas semicircunferências, que são simétricas uma da outra (NC-16.02.2011). Ao designar o diâmetro como um eixo de reflexão, Filipa não distingue, como grande parte dos alunos, uma reta de um segmento de reta, o que indicia uma organização ténue de noções matemáticas. O todo prevalece perante a parte. Na formulação de conjeturas, nem sempre os alunos justificam as suas afirmações. Por exemplo, Júlia ao afirmar que "qualquer reta que passa pelo centro da circunferência corresponde a um eixo de reflexão" (RE-T5), só justifica a sua resposta depois de ser questionada pela professora:

> Se a reta passa pelo centro da circunferência, contém o diâmetro. Como o diâmetro divide a circunferência em duas partes iguais, então a reta que passa pelo centro da circunferência também a divide em duas partes iguais. Então esta reta é um eixo de reflexão. Como existe uma infinidade de diâmetros, então também existe uma infinidade de eixos de reflexão. Então toda a reta que passa pelo centro da circunferência corresponde a um eixo de reflexão. (NC-17.02.2011).

O ato de justificar faz com que a aluna articule conhecimentos sobre diferentes conceitos e relações matemáticas, o que a resposta sucinta que apresentou anteriormente não permitia revelar.

Depois de realizadas as construções pedidas, os alunos adquirem as condições necessárias para poder formular uma conjetura que relacione a reta que passa pelo centro da circunferência com as cordas que lhes são perpendiculares e com os arcos e ângulos ao centro correspondentes. A fase exploratória e de discussão foram realizadas em dias diferentes, pelo que, na fase de discussão, a professora solicitou a uma aluna, a Diana, que se deslocasse ao quadro interativo para apresentar a sua construção (Figura 15: Flipchart da Questão 2 da tarefa 'Propriedades geométricas em circunferências' (RE-T5)).

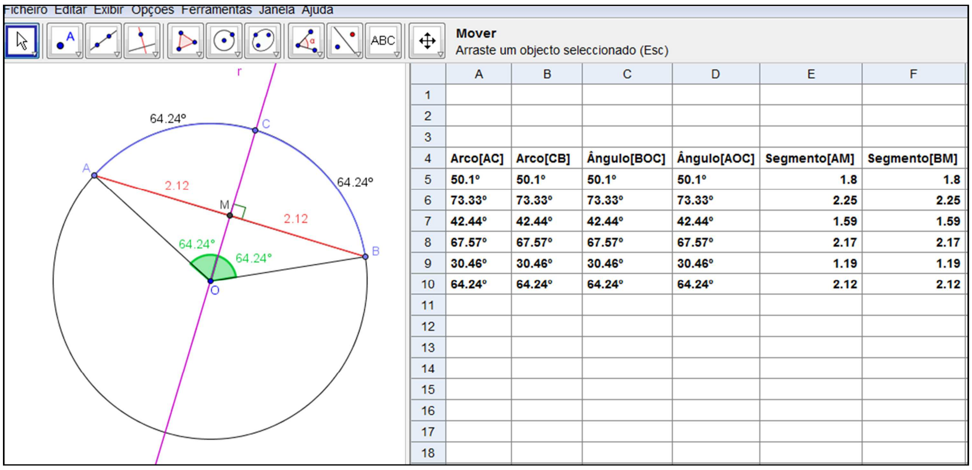
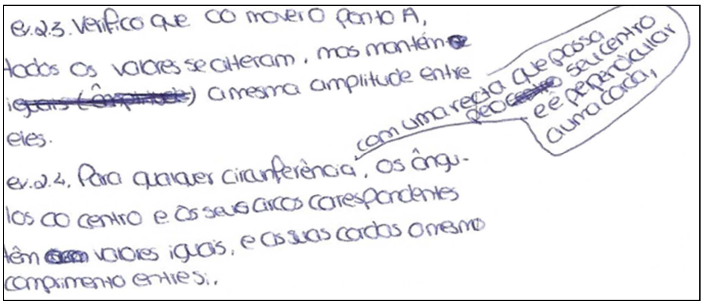


Figura 15: Flipchart da Questão 2 da tarefa 'Propriedades geométricas em circunferências' (RE-T5)

Apesar da realização de uma análise pormenorizada da figura e da tabela, a insegurança da aluna impediu-a de organizar as informações obtidas e apresentá-las aos restantes elementos da turma. Nélia ofereceu-se para dar continuidade à apresentação da sua colega e apresentou à turma as conclusões a que chegou (Figura 16).



Ex.2.3. Verifico que ao mover o ponto A,
todos os valores se alteram, mas mantêm
~~iguais (ângulos)~~ a mesma amplitude entre
eles.
com uma recta que passa pelo seu centro e é perpendicular a uma corda,
Ex.2.4. Para qualquer circunferência, os ângu-
los ao centro e os seus arcos correspondentes
têm valores iguais, e as suas cordas o mesmo
comprimento entre si.

Figura 16: Conclusões obtidas por Nélia às questões 2.3. e 2.4. (RE-T5)

A conjetura formulada pela aluna tem por base o teste de alguns casos e os argumentos apresentados (questão 2.3.) são validados pelos valores que obtém quando move o ponto A da figura. A aluna revela compreender a necessidade de inclusão das condições iniciais, que se tornam essenciais para poder estabelecer relações entre os elementos considerados.

Outros alunos apresentam argumentos diferentes para a conjetura que formularam, como é exemplo a que Anita apresentou:

Anita: Stôra, concluí o mesmo que a Filipa, mas usei um outro ponto de vista (...) só falei do eixo (...) eu escrevi "numa circunferência, as retas que passam no centro da circunferência são eixos de reflexão, ou seja dividem a circunferência em partes iguais (...) não relacionamos com...
Prof.: Mas relaciona agora! Os colegas ajudam.
Anita: A corda é perpendicular ao eixo de reflexão. Então as cordas que obtive são iguais.
Nélia: Não são cordas, são segmentos!
Anita: Sim! A corda foi dividida em dois segmentos iguais, eu vi na medida. E com os ângulos ao centro é a mesma coisa (...) dividiu tudo ao meio, é o que o eixo de reflexão faz!
Prof.: Podemos enunciar a conjetura?
Anita: Isso já é mais difícil!
Prof.: Vamos começar com o que temos...
Júlia: Temos uma reta que passa pelo centro da circunferência e é perpendicular a uma corda!
Prof.: E ficamos com quê?
Anita: Com tudo dividido ao meio.
Prof.: Quando diz *tudo* refere-se a quê?
Anita: À corda, ao ângulo ao centro e ao arco correspondente.
Prof.: Então...
Júlia: Quando temos uma reta que passa pelo centro da circunferência e é perpendicular a uma corda, divide ao meio a própria corda, o ângulo ao centro e o arco correspondente. (RV-T5)

Esta estratégia de resolução surgiu em sequência da abordagem das reflexões numa circunferência, o que denota o desenvolvimento de conexões entre aquilo que os alunos já aprenderam e aquilo que estão a aprender a cada momento.

Seguiu-se a procura de relações de arcos e cordas compreendidos entre retas paralelas através de uma pequena exploração. Os alunos foram desafiados a formular uma conjetura com base nas evidências recolhidas. No momento de apresentação à turma do que resultou da sua atividade, Filipa ofereceu-se para realizar a sua construção no quadro interativo. Depois de construídas duas cordas paralelas e definidas as cordas e os arcos compreendidos entre as cordas paralelas, bem como as suas medidas, a aluna moveu o ponto A que era um dos extremos de uma das cordas paralelas.

Filipa: As cordas continuam com a mesma medida, mas (…) ao deslocar o ponto A parece que ficam diferentes, mas na realidade não ficam!
Prof.: Então o que é que podemos verificar?
Filipa: Movendo o ponto A, as cordas têm a mesma medida!
Mara: E os arcos também ficam iguais, ao olharmos para o quadro, vemos isso também!
Prof.: Podemos escrever já a conjetura?
Filipa: Eu acho que sim (…). Quando duas cordas são paralelas, são sempre iguais e os arcos [que] são definidos por essas cordas paralelas e pelas cordas compreendidas nelas, os arcos que se opõem são geometricamente iguais e têm a mesma amplitude.
Prof.: Podemos definir as cordas e os arcos que a Filipa se refere de outro modo! São aquelas cordas em particular (…) e aqueles arcos em particular que se definem em função de quê?
Júlia: São arcos compreendidos entre as cordas paralelas!
Prof.: E as cordas? [apontando para as cordas entre as cordas paralelas]
Júlia: Também estão compreendidas entre as cordas paralelas! (RV-T5)

Das respostas que os alunos apresentam, a da Júlia destaca-se pela estrutura de generalização que evidencia, fundamentada nas regularidades encontradas dos tópicos em estudo, e que, por sua vez, origina a sua conjetura. A aluna parece ter uma percepção clara entre o que se sabe, as condições que são dadas nos enunciados e o que se pretende concluir. É visível, também, a preocupação da aluna em apresentar argumentos que sustentem as suas conclusões (Figura 17: Resolução da questão 3.3. da Júlia. (RE-T5)):

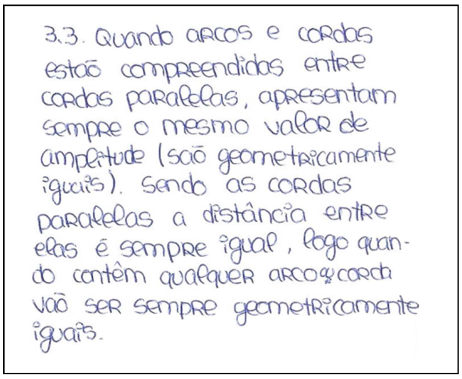
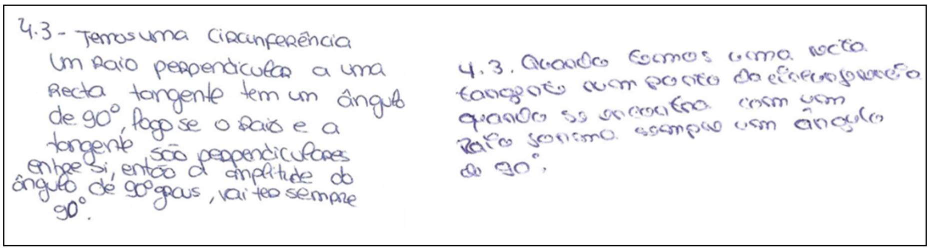

3.3. Quando arcos e cordas estaõ compreendidos entre cordas paralelas, apresentam sempre o mesmo valor de amplitude (saõ geometricamente iguais). Sendo as cordas paralelas a distância entre elas é sempre igual, logo quando contêm qualquer arco e corda vaõ ser sempre geometricamente iguais.

Figura 17: Resolução da questão 3.3. da Júlia. (RE-T5)

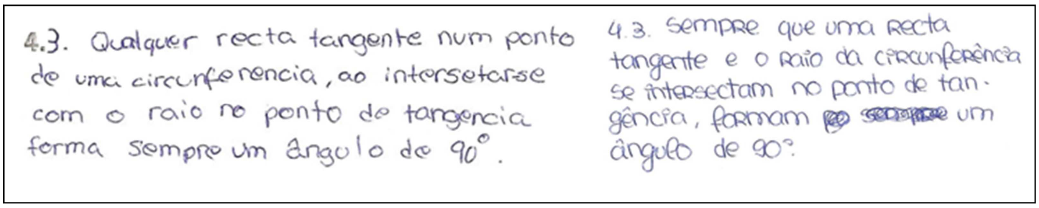
Como o tempo despendido para esta tarefa foi amplamente ultrapassado, a professora optou por explorar a quarta questão em grupo, através do quadro interativo. Para isso, pediu a um aluno que se dirigisse ao quadro interativo e iniciasse a construção da figura, seguindo as indicações do enunciado da questão. Na altura de os alunos formularem a sua conjetura, foi unânime o ponto de partida – uma reta tangente à circunferência e um raio da circunferência, em que um dos extremos é o ponto de tangência. No entanto, notou-se, ainda, algumas dificuldades em encadear os dados para alcançar a conclusão, como se pode observar nas respostas elaboradas por Diana e Anita (Figura 18: Conjetura apresentada por Diana (esquerda) e por Anita (direita) sobre a consequência de uma reta ser tangente a uma circunferência. (RE-T5)).


4.3 - Temos uma circunferência
Um raio perpendicular a uma
Recta tangente tem um ângulo
de 90°, logo se o raio e a
tangente são perpendiculares
entre si, então a amplitude do
ângulo de 90 graus, vai ter sempre
90°.

4.3. Quando temos uma recta
tangente num ponto da circunferência
quando se encontra com um
raio formam sempre um ângulo
de 90°.

Figura 18: Conjetura apresentada por Diana (esquerda) e por Anita (direita) sobre a consequência de uma reta ser tangente a uma circunferência. (RE-T5)

Diana mistura o que pretende chegar com os dados de partida. Anita, embora contemple os dados da questão — uma reta tangente num ponto da circunferência e um raio que interseta o ponto de tangência — a sua conclusão revela dificuldade em encadeá-los de modo a obter a conclusão que se pretendia. Já as resoluções (Figura 19) da Filipa (esquerda) e da Júlia (direita) contemplam os dois dados e a devida conclusão:


4.3. Qualquer recta tangente num ponto
de uma circunferencia, ao intersetarse
com o raio no ponto de tangencia
forma sempre um ângulo de 90°.

4.3. Sempre que uma Recta
tangente e o Raio da circunferência
se intersectam no ponto de tan-
gência, formam um
ângulo de 90°.

Figura 19: Conjeturas apresentadas por Filipa (esquerda) e por Júlia (direita) sobre a consequência de uma reta ser tangente a uma circunferência. (RE-T5)

No estudo da relação que determina a soma das amplitudes dos ângulos internos e dos ângulos externos de um polígono convexo (tarefa 6, Anexo IX), os alunos construíram os polígonos que eram pedidos e identificaram o número de lados, bem como o número de triângulos em que o polígono ficava dividido. Determinaram, também, a soma dos ângulos internos do polígono e, depois de analisarem a tabela com os valores encontrados, procuraram regularidades para estabelecer uma conjetura que relacione o número de lados com a soma obtida. Das resoluções apresentadas, destaca-se a de Diana (Figura 20)

1.3 A soma dos ângulos internos do polígono depende do nº de triângulos em que o polígono ficou dividido e este depende do nº de lados do polígono, ou seja, o nº de triângulos em que o polígono ficou dividido é inferior duas vezes ao nº de lados.

1.4 A soma das amplitudes ~~dop~~ de um polígono com o seu nº de lados é a soma das amplitudes que é igual ao nº de lados menos dois, vezes o 180°.

Figura 20: Resolução das questões 1.3. e 1.4. da tarefa 6 por Diana (RE-T6)

Diana começa, de acordo com os valores encontrados, por encontrar uma relação entre a soma obtida e o número de triângulos em que os polígonos são divididos. Acrescenta, ainda, que o número de triângulos conseguidos depende do número de lados desses mesmos polígonos: “se olharmos para a primeira e a segunda coluna, os valores da segunda coluna menos dois do que os valores da primeira coluna” (RV-T6). Posteriormente, a aluna formula a conjetura pedida e descreve-a por palavras, sem, no entanto, indicar a fórmula que alcançou em função dos valores que registou na tabela.

Alguns alunos traduzem o seu raciocínio através de uma expressão algébrica que representa a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo em função do seu número de lados, como se observa na resposta apresentada por Anita (Figura 21):

1.3. A soma das amplitudes dos angulos internos de um polígono convexo depende do nº de ~~lados~~ triângulos em que o polígono foi dividido.

1.4. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono é 180° x (nº de lados - 2), ou seja o número de triângulos em que foi dividido o polígono.

Figura 21: Resolução das questões 1.3. e 1.4. da tarefa 6 por Anita (RE-T6)

Na fase de apresentação dos raciocínios dos alunos, a professora iniciou a discussão com a análise dos valores encontrados na tabela apresentada pela Nélia (Figura 22).

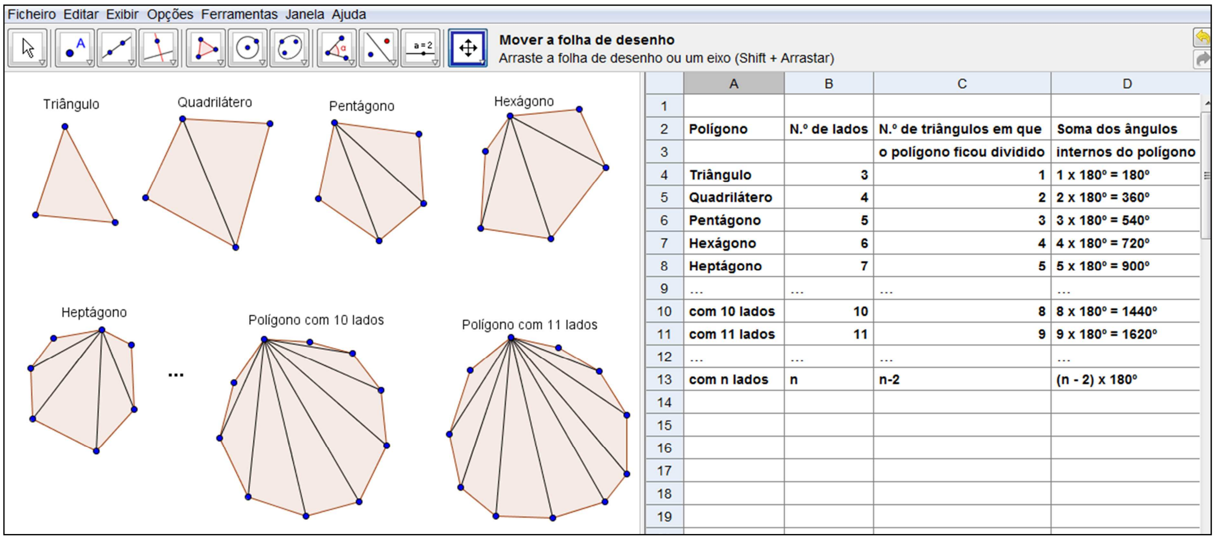


Figura 22: Flipchart da questão 1.2. da tarefa 6 resolvida por Nélia. (RE-T6)

Prof.: Que relação existe entre os valores da primeira coluna e os valores da segunda coluna?

Mara: Quando o número de lados aumenta, o número de triângulos também aumenta!

Prof: Sim, mas para além disso? Observem cada par de valores.

Mara: O número de triângulos é sempre menor que o número de lados!

Filipa: É sempre menos duas unidades!

Prof.: E na última coluna (...) Como se determina a soma?

Nélia: Através do número de triângulos vezes 180°.

Prof.: Porque é que acham que aparece o produto por 180°?

Júlia: Porque a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Se temos um triângulo é um vezes 180°, se forem dois triângulos é dois vezes 180°, se forem três triângulos é três vezes 180°, e por aí em diante (...) é sempre o número de triângulos vezes 180°!

Prof.: E o que acontece com um polígono com n lados? Vamos generalizar?

Nélia: Ficamos com $n - 2$ triângulos (...). Então a soma é ($n - 2$) x 180° [Nessa altura a Nélia apercebe-se que, na sua resolução tinha atribuído a n o número de triângulos e não o número de lados do polígono]. Stôra, eu pus que a soma dos ângulos internos depende do número de triângulos...

Prof.: Mas está correto. E o número de triângulos depende de quê?

Nélia: É menos dois que o número de lados. (...) Ah! Então também depende do número de lados! (RV-T6)

A relação que é estabelecida através da interação entre os alunos com a professora não é entendida de igual modo por todos, como exemplifica a afirmação de Júlia: "a soma total das amplitudes sobre o número de lados é sempre 180°" (RV-T6). Nélia, ao prestar atenção à afirmação da sua colega, mostra a sua discordância questionando-a: "mas não é o número de lados menos dois? (...) e isso não é o número de triângulos em que se pode dividir o polígono?". Júlia, ao aperceber-se do seu erro, reformula, através de novos argumentos, a sua conjetura considerando que:

> A soma total das amplitudes sobre o número de triângulos é sempre 180°, mas como é pedido para relacionar a soma com o número de lados do polígono, a conjetura tem de ser a soma total das amplitudes sobre o número de lados menos dois é sempre 180° (RV-T6).

Apesar de Júlia ter apresentado uma outra forma de relacionar a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono com o número de lados, a aluna não teve em consideração a informação que obteve da observação direta da tabela. Nas argumentações apresentadas pela Nélia e por Júlia, bem como nas apresentadas pelos alunos em geral, é notória a necessidade de testar as suas conjeturas, logo após a sua formulação, através dos valores atribuídos para os casos considerados.

Posteriormente a esta tarefa, os alunos construíram, com recurso ao GeoGebra, um polígono convexo, marcaram os seus ângulos externos e mediram as suas amplitudes. Notaram-se algumas dificuldades na marcação dos ângulos externos dos polígonos construídos (RV-T6). Por arrastamento dos vértices do polígono construído, obtiveram novos valores para os ângulos externos e registaram os valores numa tabela, como é visível na resposta dada pela Filipa (Figura 23).

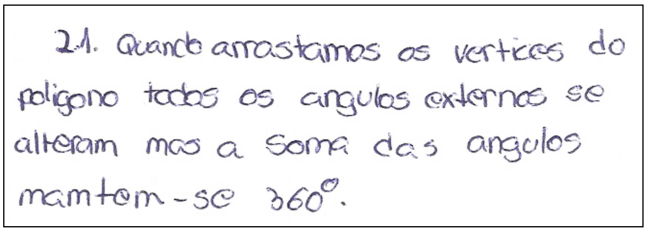

2.1. Quando arrastamos os vertices do poligono todos os angulos externos se alteram mas a soma das angulos mamtem-se 360°.

Figura 23: Resolução da questão 2.1. da tarefa 6 (RE-T6)

Depois de a aluna verificar a regularidade encontrada relativamente ao polígono que construiu (triângulo), foram apresentadas outras observações para outros polígonos (quadriláteros, pentágonos e hexágonos). Em cada uma das situações apresentadas, os alunos observaram que a soma de cada um dos polígonos considerados era sempre igual a 360°, como exemplifica a resposta dada pela Júlia (Figura 24).

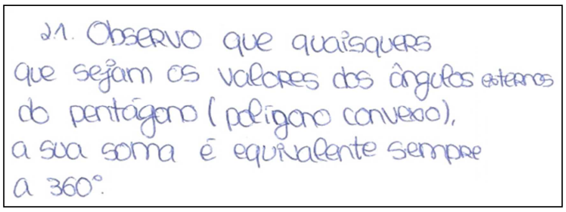

2.1. Observo que quaisquers que sejam os valores dos ângulos externos do pentágono (polígono convexo), a sua soma é equivalente sempre a 360°.

Figura 24: Resolução da questão 2.1. da tarefa 6 (RE-T6)

A formulação de uma conjetura para a soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono convexo foi discutida em grupo com as prestações dos alunos:

Diana: Para qualquer polígono convexo a soma dos ângulos externos é sempre a mesma!

Mara: E vai ser sempre igual a 360°. Vimos para o triângulo, o quadrado [quadrilátero], o pentágono e o hexágono. Stôra, mas não vimos para os outros casos. Também dá o mesmo? (RV-T6)

A questão colocada por Marta levou a professora a solicitar-lhe que testasse um outro caso. Com recurso ao GeoGebra e ao quadro interativo, Mara construiu um decágono e marcou os ângulos externos (Figura 25**Erro! A origem da referência não foi encontrada.**).

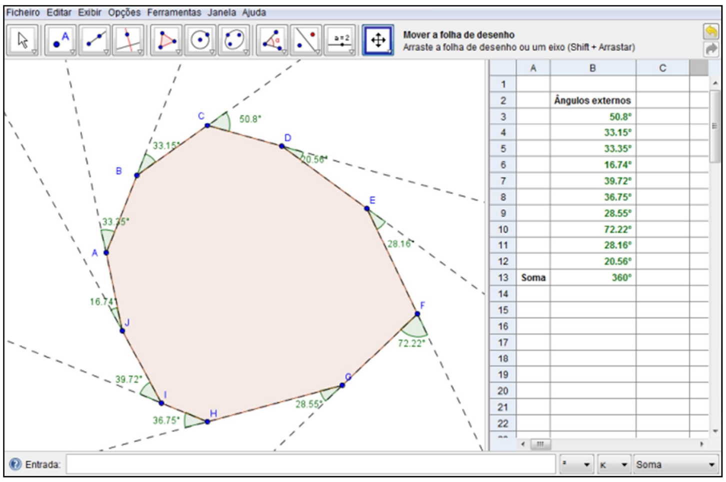


Figura 25: Flipchart da questão 2.1. da tarefa 6, Mara (RE-T6)

Ao verificar um novo caso, a aluna apercebe-se que, ao arrastar os vértices do decágono, a soma permanece inalterável e, assim, a conjetura continua válida. Este caso adicional permitiu à aluna convencer-se a ela própria e convencer os outros da relação existente entre os ângulos externos de um polígono convexo.

Depois de exploradas as tarefas que permitiram estabelecer relações sobre os ângulos de polígonos, seguiu-se a tarefa 7 (Anexo X) que teve como objetivo investigar, com o recurso ao GeoGebra, a relação entre a área de um quadrado circunscrito a uma circunferência e a área do quadrado inscrito na mesma circunferência. A tarefa decorreu em dois momentos: no primeiro momento, a professora apresentou a tarefa e orientou os alunos para escreverem todas as conjeturas que formularem e apresentarem as justificações que julguem necessárias para as validar; o segundo momento ocorreu fora do horário escolar dos alunos com a ajuda da investigadora que se disponibilizou para esclarecer eventuais dúvidas. No decurso da resolução da tarefa, foram evidentes as dificuldades com que os alunos se depararam, nomeadamente na construção do quadrado circunscrito à circunferência.

Na apresentação das propostas de resolução pelos alunos, Nélia descreveu todas as fases da construção da circunferência, do quadrado circunscrito e do quadrado inscrito, num total de treze. A aluna descreveu o seu trabalho, com imagens das explorações realizadas no GeoGebra, usando, para isso, o quadro interativo e fundamentou cada passo que teve de realizar até obter o quadrado circunscrito.

Prof.: Porque é que achaste que se tratava de um quadrado circunscrito?
Nélia: Humm... porque os lados tocam na circunferência.
Prof.: Em quantos pontos? [Questionando o grupo-turma].
Nélia: Cada lado num só ponto!
Prof.: Como se designam esses pontos? [Colocou a questão para a Daniela, mas como não respondeu, voltou-se para o grupo-turma].
Júlia: São pontos de tangência.
Prof.: Como se caracterizam esses pontos?
Júlia: São pontos de tangência... Estão nas retas tangentes e também na circunferência. (RV-T7)

Depois de construir o quadrado circunscrito, a aluna explicou aos colegas, através de um exemplo, que a ordem com que se selecionam os pontos para construir um polígono num ambiente de geometria dinâmica é importante para a construção do polígono que se pretende: "selecionamos apenas o ponto F e o ponto H para que o Quadrado fique do lado de dentro da

Circunferência e não do lado de fora como aconteceria se selecionássemos, por exemplo, o ponto F e o ponto G" (RE-T7). A construção do 'quadrado inscrito' pode ser obtida através da interseção das diagonais do quadrado circunscrito à circunferência (Figura 26).

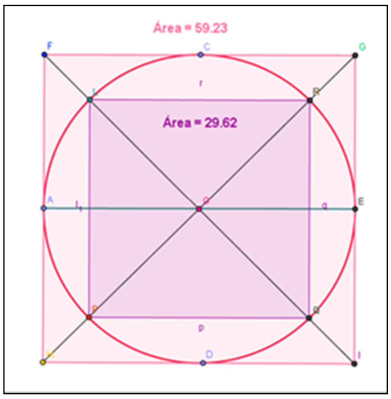


Figura 26: Flipchart da tarefa 7, Nélia (RE-T7)

Questionada sobre os motivos que lhe permitem garantir a igualdade dos lados do quadrado inscrito obtido, Nélia defende a sua construção com base na igualdade dos triângulos obtidos.

Nélia: Os triângulos LOR, LOP, POQ e QOR são triângulos iguais porque têm os dois lados iguais, são raios, e o outro lado é também igual.
Prof.: Como chegaste a essa conclusão, quanto ao terceiro lado?
Nélia: Não sei, mas acho que são... ao olhar vê-se que são iguais.
Diana: Os lados do quadrado têm um arco de 90°, todos eles. Então são iguais.
Prof.: Porquê?
Júlia: Acho que já sei... Não é porque as diagonais de um quadrado, ao se cruzarem no ponto O, formam um ângulo de 90°? E como é um ângulo ao centro, então vai ter igual valor para o arco. Então os arcos têm todos 90°.
Prof.: Mas nós não queremos provar que os lados do quadrado são iguais... Já concluímos isso? Se olhássemos isoladamente para cada um dos lados do quadrado e esquecêssemos os outros trê, podíamos dizer que cada um desses lados é ...!
Diana: Stôra!!! É uma corda com um arco de 90°.
Prof.: E...!
Júlia: A arcos iguais correspondem cordas iguais. (RV-T7)

Como consequência do diálogo alargado à turma, Nélia enunciou a sua conjetura — "Observamos assim que a área do Quadrado maior [circunscrito] é o dobro [da área] do quadrado menor [inscrito]" — e estendeu-a para todos os polígonos regulares ao referir: "a área de um polígono regular circunscrito é sempre o dobro da área de um polígono regular inscrito na mesma circunferência" (RE-T7). Ao ser questionada pela professora, Nélia mostra-se segura das conclusões a que chegou.

Prof.: Acha que a conjetura que formulou é válida se, por exemplo, aumentarem ou diminuírem as medidas do lado do quadrado inscrito?

Nélia: Fica igual, experimentei com outras medidas e dá igual. (...) A área do quadrado maior é o dobro da área do quadrado menor. É isto que é igual. (RV-T7)

Diana, ao obter conclusões diferentes pediu autorização à professora para mostrar os resultados que obteve com o quadrado e cinco situações que servem de contraexemplos da conjetura formulada por Nélia (Figura 27).

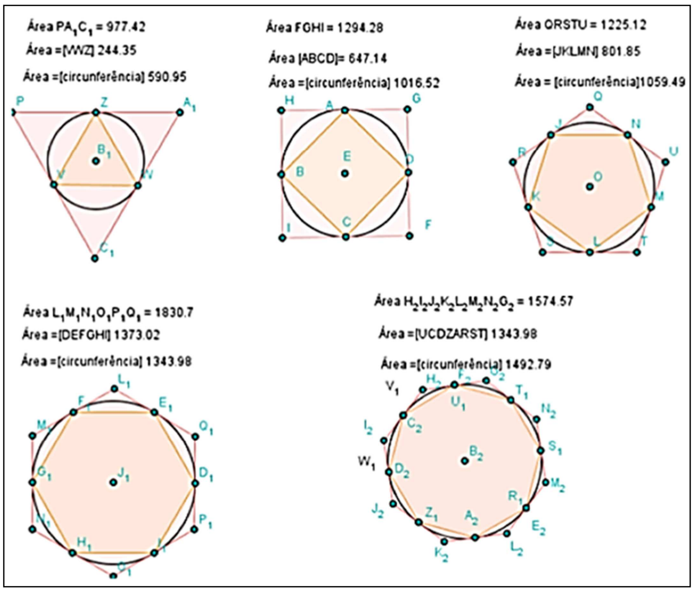


Figura 27: Flipchart da tarefa 7, Diana (RE-T7)

Diana iniciou a sua apresentação com o caso do quadrado e mostrou, por arrastamento, que independentemente dos valores que obtinha, a relação enunciada se mantinha. De seguida, percorreu as outras construções e mostrou que a relação entre cada polígono inscrito e o respetivo polígono circunscrito numa mesma circunferência já não se verificava.

Diana: Fiz uma tabela com os valores [Figura 28]. A área do quadrado inscrito é o dobro da área do quadrado circunscrito e esta é a área da circunferência [apontando para a tabela]. E fiz para os outros [polígonos] e não deu aproximadamente a área do quadrado [polígono] circunscrito, era sempre aproximada da área da circunferência para os outros polígonos.

Prof.: E a conjetura?

Diana: A relação entre a área de um quadrado circunscrito a uma circunferência e a área do outro quadrado inscrito na mesma circunferência é que a área de um quadrado circunscrito a uma circunferência é o dobro da área do outro quadrado inscrito na mesma circunferência.

Prof.: E para os outros polígonos regulares?

Diana: Pois. A relação entre a área de um polígono circunscrito a uma circunferência e a área do outro polígono inscrito é que a área do polígono circunscrito não é o dobro da área do polígono inscrito, mas em vez disso, aproxima-se da área da circunferência. (RV-T7)

Polígonos	Área do polígono inscrito	Área do polígono circunscrito	Área da circunferência
Quadrado	334.03	668.61	525.12
Pentágono	801.85	1225.12	1059.49
Triângulo	418.88	692.82	173.21
Hexágono	848.44	1131.25	1343.98
Octógono	1492.79	1574.57	1343.98

Figura 28: Tabela com os valores das áreas dos polígonos inscritos, circunscritos e das respetivas circunferências determinados por Diana (RE-T7)

Foi, ainda, objeto de atenção o trabalho de uma outra aluna, a Filipa, por ter superado o que tinha sido pedido nesta tarefa. A aluna iniciou a exposição do seu trabalho, realizado em formato de apresentação, com as definições de polígono circunscrito e inscrito numa circunferência. Posteriormente, explorou a sua apresentação para responder à questão que colocou: "Haverá alguma relação entre a área de um polígono inscrito e circunscrito na mesma circunferência?".

Filipa: Com recurso ao GeoGebra descobri que existe uma relação entre a área do polígono [quadrado] inscrito e circunscrito na mesma circunferência. As minhas conclusões foram que a área de um quadrado circunscrito é o dobro da área do quadrado inscrito na mesma circunferência, ou a área de um quadrado inscrito é metade da área do quadrado circunscrito da mesma circunferência. [Em simultâneo, a aluna ia apontando para a imagem construída no GeoGebra e ia justificando os valores para as áreas dos quadrados (Figura 29)]. Aqui nos valores das áreas, se dividirmos a área do quadrado circunscrito [por 2] vai-nos dar a área do quadrado inscrito.

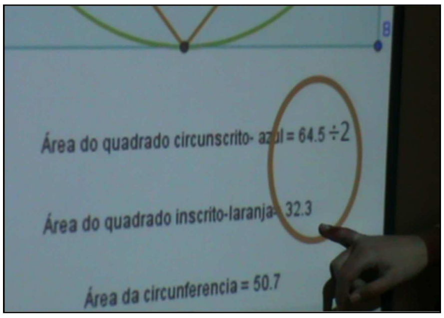


Figura 29: Flipchart da tarefa 7, relação entre as áreas, Francisca (RE-T7).

Filipa: Depois de descobrir essa relação, continuei para ver o que acontecia com os outros polígonos. Descobri que a relação do dobro entre as áreas dos polígonos só se aplica aos quadrados. Aqui [apontando para os triângulos] no triângulo não se aplica... é diferente... já não é o dobro. Depois, se começarmos por desenhar um triângulo inscrito e circunscrito a uma circunferência e formos aumentando o número de lados do polígono, triângulo, quadrado, pentágono, hexágono,..., apercebemo-nos que o espaço entre esses polígonos vai diminuindo.

Prof.: Que espaço é esse?

Filipa: É o que eu vou explicar a seguir. (RV-T7)

A aluna mostrou as outras construções que realizou e que funcionaram como contraexemplos para refutar a ideia que a relação enunciada se verifica para todos os polígonos (Figura 30).

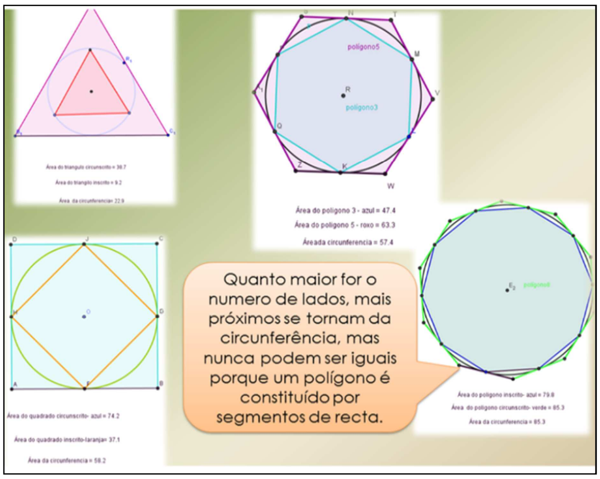


Figura 30: Flipchart da tarefa 7, polígonos inscritos e circunscritos numa circunferência elaborados por Filipa (RE-T7)

Filipa: Aqui [apontando para os triângulos inscrito e circunscrito numa circunferência], só temos três lados e este espaço é maior. Quando passamos para o quadrado [apontando para os quadrados inscrito e circunscrito numa circunferência], íamos ver que já era menor [apontando para o espaço entre os quadrados] do que aqui [apontando para o espaço entre os triângulos]. E se formos para estas figuras [apontando para o espaço entre os hexágonos e entre os decágonos] também já vemos que a diferença é grande. Se compararmos, por exemplo, o [caso do] decágono com o [caso do] triângulo, existe um pequeno espaço [apontando para a superfície de espaço existente entre os decágonos].

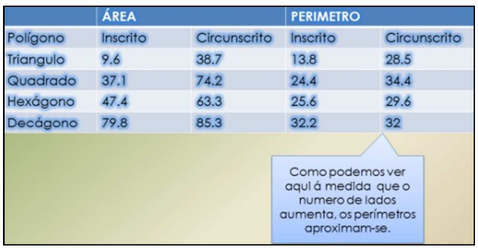
Prof.: Como pode ser definido, matematicamente, esse espaço?

Filipa: Só se for... Ahhh... ou seja, quanto maior é o número de lados...

Prof.: Está a falar de uma superfície, não é? Uma parte do plano, uma porção do plano... uma porção do plano entre... polígonos. (RV-T7)

Nesta fase da apresentação do trabalho, a aluna começa a não entender o objetivo das questões formuladas pela professora. A aluna mostra-se baralhada com o que a professora pretendia, porque para ela estava claro o que queria transmitir aos colegas e, como ainda não tinha terminado a sua exposição, sentiu necessidade de dar continuidade para conseguir mostrar a validade das suas afirmações (NC-10.03.2011).

Filipa: É o que está aqui [apontando para o balão laranja da Figura 24]. Quanto maior for o número de lados, mais próximos se tornam da circunferência, mas nunca podem ser iguais porque um polígono é constituído por segmentos de reta [apontando para caso dos decágonos inscrito e circunscrito numa circunferência].
Organizei os dados numa tabela (Figura 31) só [...] tive um lapso porque não pus aqui a área da circunferência, porque me esqueci.



	ÁREA		PERIMETRO	
Polígono	Inscrito	Circunscrito	Inscrito	Circunscrito
Triangulo	9.6	38.7	13.8	28.5
Quadrado	37.1	74.2	24.4	34.4
Hexágono	47.4	63.3	25.6	29.6
Decágono	79.8	85.3	32.2	32

Figura 31: Flipchart da tarefa 7, valores das áreas e perímetros de polígonos inscritos e circunscritos numa circunferência determinados por Filipa (RE-T7)

A apresentação da Filipa foi posterior às exposições da Nélia e da Diana. O *lapso* que a Filipa mencionou, durante a sua exposição, surgiu após uma reflexão dos trabalhos exibidos pelas suas colegas. Durante o decorrer da sua apresentação, a professora questionou a aluna sobre o motivo que a levou a considerar, na tabela, os perímetros dos polígonos.

> **Filipa**: Eu coloquei os valores dos perímetros porque (...) eu não escrevi mas eu queria ver se havia alguma relação entre os perímetros [dos polígonos], mas não encontrei nenhuma (...) só encontrei que vai-se aproximando da circunferência.
>
> **Prof.**: Uma sugestão que lhe proponho é a de usar essa tabela e acrescentar uma coluna para as áreas dos círculos e outra para os perímetros da circunferência (...), talvez aí já consiga obter uma afirmação mais fundamentada.
>
> **Filipa**: Pois stôra, era a conclusão que (...) quanto mais aumenta o número de lados, mais próximo fica do perímetro da circunferência. (RV-T7)

Júlia iniciou a sua exploração com a explicação das etapas que foram necessárias desenvolver para relacionar as áreas dos quadrados inscrito e circunscrito na mesma circunferência, onde evidenciou a estrutura do seu raciocínio. Assim, iniciou a sua investigação com a construção do quadrado e das mediatrizes aos lados do polígono. Através da interseção das mediatrizes determinou o circuncentro. De seguida, desenhou a circunferência centrada no circuncentro e que passa pelos vértices do quadrado considerado. Através dos pontos de interseção das mediatrizes dos lados do quadrado inscrito com a circunferência, desenhou as tangentes nesses pontos.

> Como encontrei a interseção de todas as tangentes [vértices do polígono circunscrito à circunferência] desenhei o quadrado circunscrito (...) e depois medi as áreas, (...) a área do quadrado inscrito é igual a 40,4° e a área do quadrado circunscrito é igual a 80,8°, e a partir desta informação pude concluir que a afirmação – a área do polígono inscrito é metade da área do polígono circunscrito à mesma circunferência – se aplica ao quadrado. (RV-T7)

De seguida, e de modo análogo, Júlia refere que vou "verificar se a afirmação – a área do polígono inscrito é metade da área do polígono circunscrito à mesma circunferência – se aplica a outros polígonos regulares" (RV-T7). A aluna apresentou o caso do pentágono e do octógono, onde concluiu que a mesma afirmação não se aplicava aos casos do pentágono regular e do octógono regular (Figura 32).

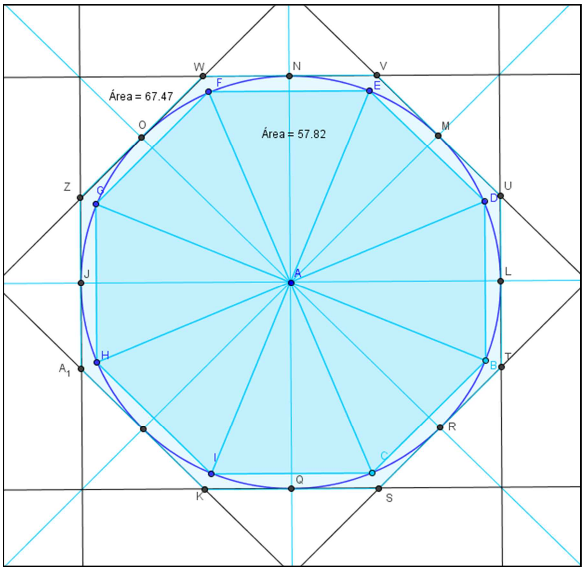


Figura 32: Flipchart com octógonos inscrito e circunscrito na circunferência representados por Júlia (RV-T7)

Em cada uma das construções que realizou, a aluna recorreu a propriedades e relações geométricas já suas conhecidas. Júlia termina a sua investigação com as conclusões que pôde realizar através da observação das áreas dos polígonos construídos, bem como da área do círculo (Figura 33).

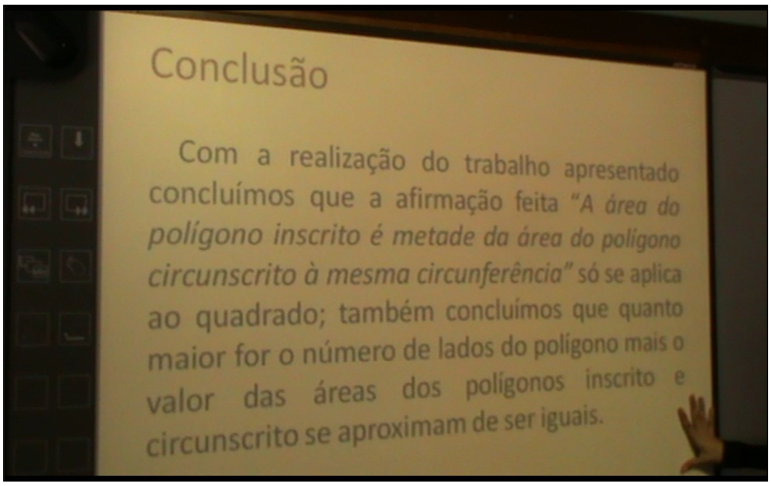


Figura 33: Flipchart da conclusão da tarefa 7 elaborada por Júlia (RV-T7)

Na conclusão apresentada, a aluna acrescentou, ainda, que "considerei a área da circunferência, mas não cheguei a acabar" (RV-T7). Nesse momento, refere que "quanto maior é o número de lados do polígono [regular] considerado, mais as áreas dos polígonos inscritos e circunscrito se aproximam da área do círculo” (NC-14.03.2011). A capacidade de identificar argumentos matemáticos é visível neste raciocínio quando a aluna distingue os exemplos considerados dos argumentos matemáticos gerais para toda uma classe de objetos. A aluna reconhece e apresenta generalizações matemáticas, exemplos e contraexemplos de uma determinada afirmação.

Final da intervenção de ensino. A tarefa 8 (Anexo XI) é composta por uma investigação, onde os alunos têm de construir pavimentações através de um conjunto dos polígonos regulares considerados com os lados de igual comprimento. É, também, solicitado que indiquem duas combinações de dois dos polígonos regulares construídos para obter uma pavimentação semirregular, bem como o número de combinações possíveis para uma pavimentação com três dos polígonos regulares construídos. Além disso, os alunos têm de apresentar as condições para que uma combinação de polígonos regulares dê origem a uma pavimentação do tipo semirregular. Depois de esta tarefa ter sido proposta, os alunos tiveram a possibilidade de esclarecer algumas dúvidas que foram surgindo.

Nélia deu início à apresentação da sua investigação com uma pequena introdução ao que era proposto com a tarefa. A aluna acrescentou que iria “divulgar quantas combinações [de dois polígonos regulares] são possíveis de obter” (RV-T8). Depois de construir os polígonos regulares — um triângulo, um quadrado, um pentágono e um hexágono —, a aluna apresentou duas pavimentações semirregulares diferentes, compostas por triângulos e hexágonos. Justificou o motivo que a levou a considerar as pavimentações como semirregulares pelo facto do

> comprimento dos lados dos polígonos regulares sejam todos iguais entre si, a cada vértice corresponda outro vértice, a soma dos ângulos internos seja 360º e não é possível deixar nenhum espaço em branco no plano de pavimentação, caso contrário deixa de ser uma pavimentação. (RE-T8)

Dando continuidade à sua intervenção, Nélia mostrou uma pavimentação composta por três polígonos regulares: triângulos, quadrados e hexágonos (Figura 34).

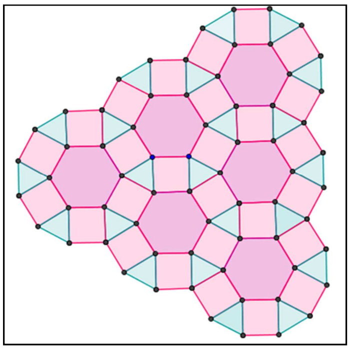


Figura 34: Flipchart de uma pavimentação demi-regular construída por Nélia (RE-T8)

A partir desta construção, a aluna inicia a procura da resposta à pergunta "Quantas combinações são possíveis de conceber com três polígonos regulares?". No entanto, refere que não conseguiu concluir e alude que "em cada vértice, a soma dos ângulos internos de cada vértice tem de dar 360° (...) para que não haja espaços vazios" (RV-T8). Questionada sobre o motivo que a levou a considerar o triângulo equilátero e o hexágono regular para as pavimentações semirregulares consideradas, Nélia não apresenta uma explicação matemática, referindo simplesmente que "era mais fácil", mas não efetuou pavimentações semirregulares com outros polígonos regulares.

Filipa, ao revelar as suas construções, iniciou a sua apresentação com a referência à definição de plano pavimentado, bem como aos tipos de pavimentações que existem. A aluna mostrou como construiu uma pavimentação regular, constituída por quadrados, e duas pavimentações semirregulares construídas através de quadrados e triângulos (Figura 35).

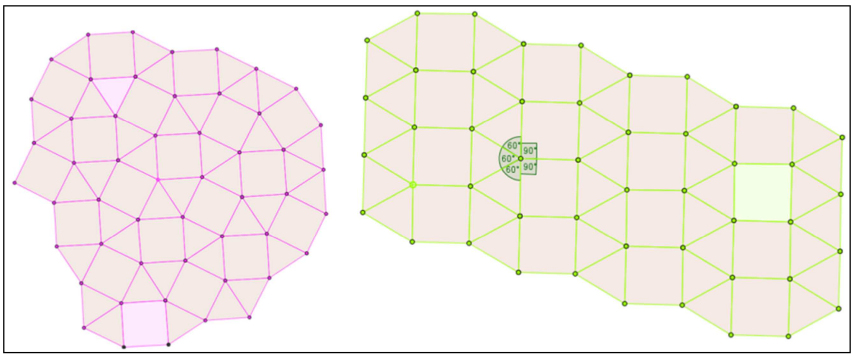


Figura 35: Flipchart de pavimentações com dois polígonos regulares de Filipa (RE-T8)

A aluna argumentou que as pavimentações são semirregulares uma vez que "são formadas por, no mínimo dois polígonos regulares e para cada vértice partem o mesmo número de lados e, como podemos ver na figura neste vértice" (RE-T8). Mostrou, ainda, três pavimentações semirregulares compostas por três polígonos regulares (Figura 36).

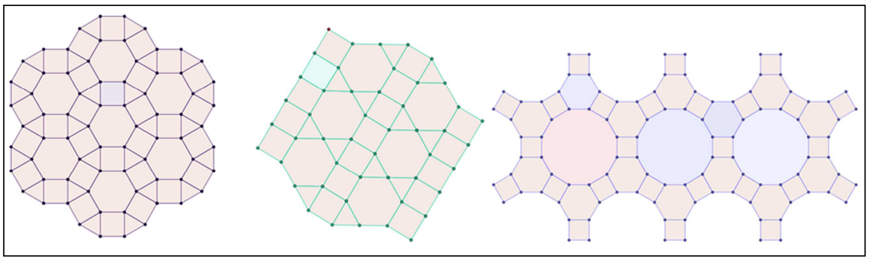


Figura 36: Flipchart de pavimentações com três polígonos regulares de Filipa (RE-T8)

Filipa: Todas elas [pavimentações] são semirregulares porque todas são (...) para cada vértice, em cada pavimentação, converge o mesmo número de lados e porque a soma dos ângulos [apontou para os ângulos de um vértice da figura central] deste, deste, deste e deste são 360°.

Prof.: Como justifica essa afirmação?

Filipa: Porque não ficam espaços vazios nem sobrepostos (...), a soma tem de ser 360°. Mas eu explico melhor mais à frente, nas pavimentações demi-regulares. (RV-T8)

A aluna apresenta, também, um exemplo de uma pavimentação demi-regular, composta por dois polígonos regulares, e salienta, na pavimentação, um vértice onde convergem cinco lados e outro vértice onde convergem seis lados. Refere, ainda, que "esta pavimentação é demi-regular porque para cada vértice não converge o mesmo número de lados, apesar de todas as outras características se manterem (...) dos semirregulares" (RV-T8). Na parte final da sua apresentação, Filipa mostra aos colegas dois exemplos em que as regras que caracterizam as pavimentações não são válidas (Figura 37).

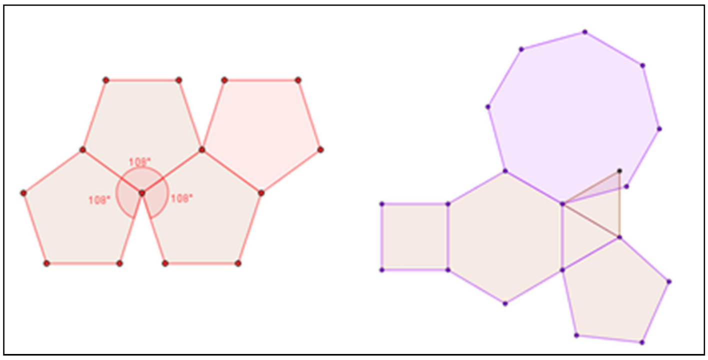


Figura 37: Flipchart com contraexemplos de combinações definidos por Filipa (RE-T8)

Depois de analisar as duas construções, Filipa conclui que não é possível construir uma pavimentação com qualquer polígono regular.

Filipa: Quando tentei fazer uma pavimentação com pentágonos (...) não deu, sobrava um bocado. Se eu colocasse aqui um triângulo [apontando para o espaço vazio da construção com pentágonos] não ia ser regular e assim não dava. Somei os ângulos e não deu 360°. No outro caso [o da direita], construí um triângulo para completar o espaço vazio, mas não deu, ficou sobreposto. A soma dos ângulos nesse vértice não dava 180°!

Prof.: Então, qual a definição de pavimentação semirregular?

Filipa: Não podem existir espaços vazios ou sobreposições.

Anita: Stôra! São as condições! (...) Uma pavimentação é um conjunto de polígonos regulares, cujos vértices são unidos uns aos outros (...) onde não há sobreposições nem espaços em branco (...) e preenchem todo o plano. (RV-T8)

A grande maioria dos alunos concluiu que uma combinação de polígonos é uma pavimentação semirregular quando os polígonos estão unidos e, em cada vértice, a soma dos ângulos é igual a 360°. No entanto, os alunos atribuíram pouca atenção ao tipo de vértices, condição necessária para diferenciar uma pavimentação semirregular de demi-regular. Também foi notória a dificuldade em indicar duas combinações possíveis, com o mesmo tipo de polígonos regulares, para uma pavimentação semirregular.

Apenas o trabalho exibido por Júlia apresentou uma condição matemática para que seja possível indicar todas as combinações possíveis. Apesar de a aluna, no decorrer da sua investigação, ter realizado construções onde não conseguiu alcançar pavimentações, na apresentação do seu trabalho as mesmas não foram referenciadas. Iniciou, assim, a sua exposição com os casos que estudou e dos quais obteve sucesso (Figura 38).

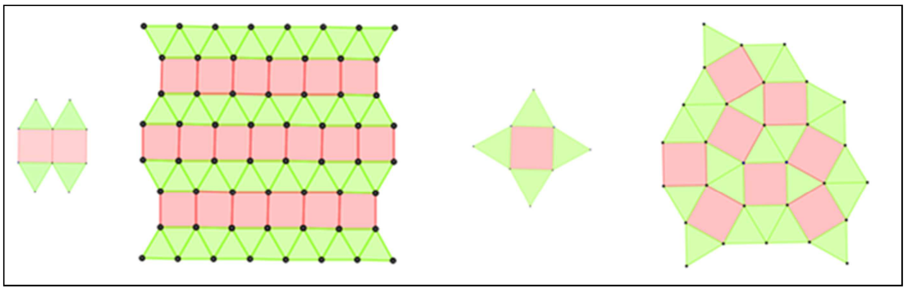


Figura 38: Flipchart de duas pavimentações semirregulares construídas por Júlia (RE-T8)

Em cada uma das situações estudadas, a aluna não só indicou a estrutura que serviu de base para cada uma das pavimentações apresentadas, como também explicitou todos os procedimentos necessários à sua construção:

> Para a primeira pavimentação tomei como exemplo a (...) figura composta apenas por um quadrado e dois triângulos regulares; para a obter, construí um quadrado a partir do comando *polígono regular* e adicionei, a partir de um lado do quadrado, triângulos regulares em lados opostos. (RE-T8)

Após cada apresentação, a aluna classificou cada uma das pavimentações atendendo a três fatores: (1) à combinação de um, dois ou mais tipos de polígonos regulares; (2) ao facto de não existirem sobreposições nem espaços vazios; (3) ao tipo de vértices que estão presentes na pavimentação. Estes três fatores constituem, para a aluna, as condições essenciais para construir uma pavimentação. A ocorrência de ter iniciado a construção das suas pavimentações através do recurso aos polígonos com o menor número de lados, constituiu, para a aluna, um fator determinante para a possibilidade de pavimentar o plano (NC-08.04.2011). A aluna justificou esta escolha pela facilidade com que conseguiu completar os 360°, em cada vértice, e, deste modo, garantir a inexistência de sobreposições e espaços em branco.

Depois do estudo relacionado com a circunferência, seguiu-se o tema de Trigonometria. A tarefa 9 (Anexo XII) incide sobre as razões trigonométricas de ângulos agudos e é composta por duas questões, uma de caráter exploratório e outra de aplicação. A tarefa decorreu em dois momentos: no primeiro momento a professora apresentou a tarefa e os alunos iniciaram a sua exploração; no segundo momento teve lugar a discussão dos resultados obtidos pelos alunos. Depois de construírem um triângulo [ABC], retângulo em C, com recurso ao GeoGebra, e de fixarem um dos ângulos agudos, o ângulo em B, os alunos mediram os lados do triângulo retângulo, registaram os valores encontrados na tabela e determinaram o valor das razões entre as medidas dos lados. Depois de arrastar o ponto A, os alunos registaram os novos valores obtidos para os lados do triângulo e determinaram as razões entre as medidas dos lados. Preenchida a tabela (Tabela 5), os alunos tiveram que comparar os resultados obtidos e justificar se os valores encontrados para cada razão dependem, ou não, das medidas dos lados dos triângulos obtidos.

Tabela 5: Valores encontrados por Filipa (RE-T9)

$\hat{B} = 60°$	Medidas dos lados do triângulo			Razões entre as medidas dos lados		
	Cateto oposto	*Cateto adjacente*	*Hipotenusa*	$\frac{Cateto\ oposto}{Hipotenusa}$	$\frac{Cateto\ adjacente}{Hipotenusa}$	$\frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente}$
Posição 1	8	5	9	$\frac{8}{9} = 0{,}88$	$\frac{5}{9} = 0{,}55$	$\frac{8}{5} = 1{,}6$
Posição 2	5	3	6	$\frac{5}{6} = 0{,}83$	$\frac{3}{6} = 0{,}5$	$\frac{5}{3} = 1{,}66$
Posição 3	10	6	12	$\frac{10}{12} = 0{,}83$	$\frac{6}{12} = 0{,}5$	$\frac{10}{6} = 1{,}66$

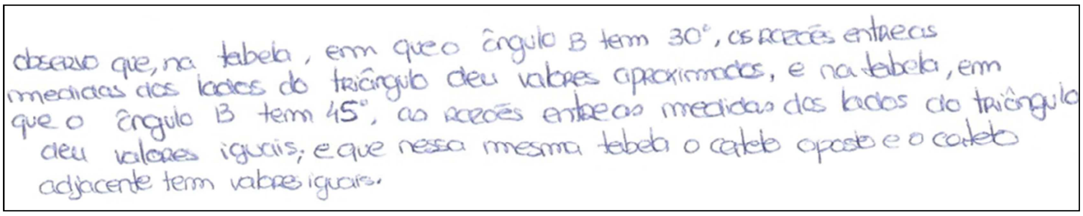
Os valores encontrados por Filipa leva-a a considerar que "a medida dos catetos e da hipotenusa não são iguais, nem aproximadas em nenhuma das posições, mas as relações [razões] são aproximadas" (RE-T9). A maior parte dos alunos concluiu que "independentemente dos lados do triângulo (...) as razões dão sempre valores aproximados, coluna a coluna" (RV-T9). Mais uma vez, a escala de aproximação assumida pelo próprio programa origina algumas imprecisões nas medições, visível nas respostas dadas pelos alunos.

Posteriormente, os alunos tiveram de testar as conclusões a que chegaram para duas outras amplitudes do ângulo B (30° e 45°) (Tabela 6).

Tabela 6: Valores encontrados por Diana (RE-T9)

$\hat{B} = 30°$	Medidas dos lados do triângulo			Razões entre as medidas dos lados		
	Cateto oposto	*Cateto adjacente*	*Hipotenusa*	$\frac{Cateto\ oposto}{Hipotenusa}$	$\frac{Cateto\ adjacente}{Hipotenusa}$	$\frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente}$
Posição 1	1,38	2,39	2,76	$\frac{1{,}38}{2{,}76} = 0{,}5$	$\frac{2{,}39}{2{,}76} = 0{,}87$	$\frac{1{,}38}{2{,}39} = 0{,}58$
Posição 2	2,38	4,12	4,75	$\frac{2{,}38}{4{,}75} = 0{,}5$	$\frac{4{,}12}{4{,}75} = 0{,}87$	$\frac{2{,}38}{4{,}12} = 0{,}58$
Posição 3	3,2	5,54	6,4	$\frac{3{,}2}{6{,}4} = 0{,}5$	$\frac{5{,}54}{6{,}4} = 0{,}87$	$\frac{3{,}2}{5{,}54} = 058$
$\hat{B} = 45°$	Medidas dos lados do triângulo			Razões entre as medidas dos lados		
	Cateto oposto	*Cateto adjacente*	*Hipotenusa*	$\frac{Cateto\ oposto}{Hipotenusa}$	$\frac{Cateto\ adjacente}{Hipotenusa}$	$\frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente}$
Posição 1	5,54	5,54	7,83	$\frac{5{,}54}{7{,}83} = 0{,}71$	$\frac{5{,}54}{7{,}83} = 0{,}71$	$\frac{5{,}54}{5{,}54} = 1$
Posição 2	4,47	4,47	6,31	$\frac{4{,}47}{6{,}31} = 0{,}71$	$\frac{4{,}47}{6{,}31} = 0{,}71$	$\frac{4{,}47}{4{,}47} = 1$
Posição 3	2,77	2,77	3,91	$\frac{2{,}77}{3{,}91} = 0{,}71$	$\frac{2{,}77}{3{,}91} = 0{,}71$	$\frac{2{,}77}{2{,}77} = 1$

Depois de preenchidas as tabelas, os alunos indicaram o que observavam. Para o ângulo de amplitude 30°, Diana aproximou os valores para obter a mesma razão (Figura 39).



observo que, na tabela, em que o ângulo B tem 30°, os razões entre as medidas dos lados do triângulo deu valores aproximados, e na tabela, em que o ângulo B tem 45°, as razões entre as medidas dos lados do triângulo deu valores iguais; e que nessa mesma tabela o cateto oposto e o cateto adjacente tem valores iguais.

Figura 39: Resolução da tarefa 9 por Diana (RE-T9)

A aluna apercebe-se que o triângulo retângulo com um ângulo de 45° apresenta uma característica diferente dos outros dois tipos de triângulos analisados. Diana indica a igualdade de duas razões mas não especifica as razões a que se refere. Quando tenta justificar a igualdade de dois dos seus lados, Diana relaciona as amplitudes dos ângulos internos de um triângulo com os seus lados.

Diana: Se um [ângulo] é 90° e o outro é 45°, o outro também tem de ser [45°], porque dentro de um triângulo, a soma dos ângulos interiores é 180° e as medidas também são, como se vê na tabela.
Prof.: Se não tivesse a tabela, conseguia concluir que os lados eram congruentes?
Diana: Não, acho que não!
Filipa: Stôra, se os ângulos são iguais, as medidas dos lados também são iguais!
Prof.: Porque...
Filipa: A ângulos iguais opõem-se lados iguais. (RV-T9).

Na sua argumentação, Diana recorre ao facto de o triângulo retângulo apresentar um ângulo de amplitude 45° e, desse modo, consegue determinar a amplitude do outro ângulo. Contudo, a aluna opta por justificar a igualdade das medidas de dois dos lados do triângulo retângulo através dos valores que constam na tabela em detrimento da relação geométrica existente entre os ângulos e os lados de um triângulo. Filipa procura ajudar a sua colega, afirmando que “as razões entre as medidas dos lados, nas diferentes posições, são sempre iguais e quando altero o ângulo as medidas alteram-se mas as razões não deixam de ser iguais” (RE-T9). Esta aluna reconhece que as medidas dos lados variam em função das amplitudes dos ângulos mas para cada ângulo corresponde um só valor para cada razão trigonométrica, independentemente da posição assumida.

Posteriormente, procurou-se justificar se os valores encontrados para cada razão dependiam das amplitudes dos ângulos considerados. A maior parte das respostas apresentadas pelos alunos apontam afirmativamente para essa dependência. No entanto, algumas das respostas apresentadas indiciam uma interpretação incorreta, por parte dos alunos, do enunciado da respetiva questão, como é visível na resposta dada por Mara (Figura 40).

1.5. O valor encontrado para cada razão depende das amplitudes dos ângulos considerados? Justifica a tua resposta. Sim, porque se o ângulo for 30º o ~~semel~~ resultado é semelhante, se for 45º o resultado é sempre igual.

Figura 40: Resolução da tarefa 9 por Mara (RE-T9)

Mara compara os valores de cada uma das razões nas três posições assumidas, com a amplitude do ângulo considerado, em vez de relacionar os valores das razões de uma determinada posição, nas três tabelas, com a amplitude de cada ângulo considerado. Para além desta interpretação ser assumida pela maioria dos alunos, os mesmos parecem ter retido a informação das duas últimas tabelas, referentes aos ângulos de amplitudes 30º e 45º, em detrimento da primeira tabela referente ao ângulo de amplitude 60º. Apenas a resposta apresentada por Júlia respondeu ao objetivo da questão (Figura 41).

1.5. Sim porque verificou-se que quando os ângulos considerados são diferentes a razão entre as medidas dos lados também são diferentes.

Figura 41: Resolução da tarefa 9 por Júlia (RE-T9)

Depois de terem sido atribuídas denominações específicas para as razões anteriormente determinadas de ângulos agudos de um triângulo rectângulo — seno, cosseno e tangente — procurou-se estudar a variação das razões seno e cosseno. Por observação dos valores das razões obtidos nas três tabelas os alunos concluiram que "os valores do seno e do cosseno são maiores que 0 e menores que 1" (RV-T9).

Após a discussão na turma dos resultados obtidos pelos alunos sobre as razões entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, procurou-se alargar o conhecimento alcançado na sua aplicação a uma situação do quotidiano. Considerando a distância dada entre duas cidades A e B, uma terceira cidade alinhada com A e B segundo um triângulo [ABC], retângulo em C, e o ângulo em A de amplitude 55º, tratou-se de determinar as distâncias entre as cidades A e C e entre as cidades B e C. Das respostas apresentadas, evidenciaram-se dificuldades em distinguir aquilo que é dado num problema daquilo que é pedido, assim como em identificar os lados do triângulo rectângulo como sendo o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo agudo considerado, de amplitude 55°. Ultrapassadas estas dificuldades, levantou-se a questão da razão trigonométrica a usar: seno ou cosseno?

Anita: Stôra, utilizei a razão trigonométrica do seno (...) que é dividir o cateto oposto pela hipotenusa!
Prof.: Usou a razão trigonométrica do ângulo... de que ângulo?
Anita: O ângulo de 55°.
Prof.: Porquê o seno e não outra razão trigonométrica?
Anita: Porque nós sabemos a hipotenusa e queremos saber o cateto oposto e é essa a razão que envolve as duas coisas. (RV-T9)

Anita reconhece os segmentos que unem as cidades B e C e as cidades A e C como os catetos do triângulo [ABC], retângulo em C, e encontra uma estratégia adequada para determinar as distâncias desconhecidas: a partir da distância entre as cidades A e B, hipotenusa do triângulo [ABC], e da amplitude do ângulo BAC (ambos dados no enunciado do problema) aplica a razão seno para determinar a medida do cateto oposto ao ângulo BAC. Para determinar a distância entre as cidades A e C, a aluna usou um raciocínio análogo, tendo recorrido à razão cosseno, "porque sabemos a hipotenusa e queremos saber o cateto adjacente" (RV-T9).
Grande parte dos alunos recorreu às razões seno e cosseno para determinar as distâncias pedidas. No entanto, não as evidenciam quando apresentam as suas resoluções, como se observa na produção escrita de Júlia (Figura 42).

$$\frac{\overline{CA}}{80} = 0,574 \Leftrightarrow \overline{CA} = 80 \times 0,574 \Leftrightarrow \overline{CA} = 45,92 \text{ km} = 46 \text{ km}$$

$$\frac{\overline{CB}}{80} = 0,819 \Leftrightarrow \overline{CB} = 80 \times 0,819 \Leftrightarrow \overline{CB} = 65,52 \text{ km} = 66 \text{ km}$$

Figura 42: Resolução da aplicação da tarefa 9 por Júlia (RE-T9)

Na sua apresentação, Júlia concretiza o valor do seno e do cosseno e efetua, no início da sua resolução, um arredondamento dos valores obtidos a três casas decimais. Posteriormente, a aluna resolve as equações definidas em ordem a cada uma das incógnitas. Este procedimento, adotado pela maioria dos alunos, parece dever-se à relutância que os alunos revelam na resolução de equações literais em distinguir a incógnita das outras letras. Os alunos parecem, assim, mais instigados a resolver equações com, apenas, uma incógnita. Das resoluções apresentadas, destaca-se a resposta de Diana. Contrariamente à maioria dos alunos, esta aluna explicita, no início da sua exploração, cada componente das equações que definiu para determinar os valores das distâncias pedidas (Figura 43).

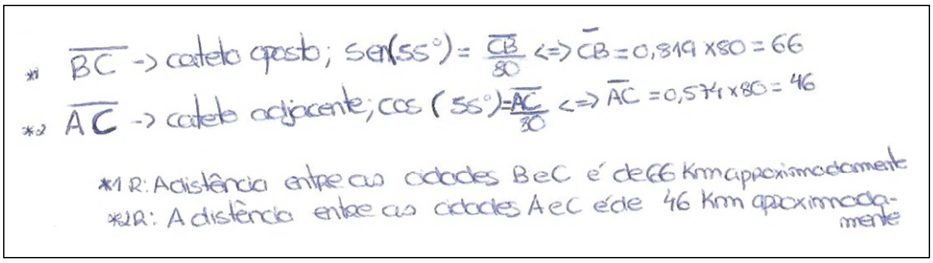

*1 $\overline{BC}$ -> cateto oposto; $sen(55°) = \frac{\overline{CB}}{80} \Leftrightarrow \overline{CB} = 0,819 \times 80 = 66$
*2 $\overline{AC}$ -> cateto adjacente; $cos(55°) = \frac{\overline{AC}}{80} \Leftrightarrow \overline{AC} = 0,574 \times 80 = 46$
*1 R: A distância entre as cidades B e C é de 66 Km approximadamente
*2 R: A distância entre as cidades A e C é de 46 Km approximadamente

Figura 43: Resolução da aplicação da tarefa 9 por Diana (RE-T9)

Da relação que estabelece entre ângulos e distâncias, Diana parece reconhecer as variáveis quando concretiza a variável independente – identifica a amplitude do ângulo como a variável independente e os catetos como variável dependente. No entanto, ao concretizar o seno de 55°, a aluna procede a arredondamentos nos cálculos intermédios. Apesar do resultado apresentado ser o mesmo dos apresentados pelos restantes alunos, Diana parece mostrar uma maior preocupação em justificar os argumentos usados na explicitação do seu raciocínio.

A tarefa 10 (Anexo XIII) abrange as relações entre as razões trigonométricas de ângulos agudos. Os alunos construíram, no GeoGebra, um triângulo retângulo e, depois de considerarem alguns ângulos agudos, determinaram e registaram numa tabela os valores do seno, do cosseno, da tangente e da razão entre o seno e o cosseno, como se pode observar nos registos realizados por Nélia (Tabela 7).

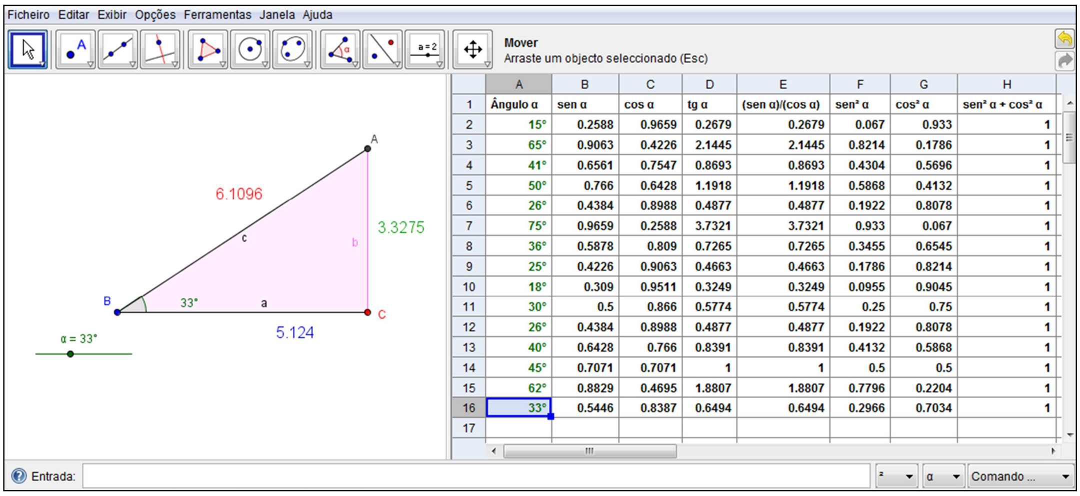
Tabela 7: Valores encontrados por Nélia (RE-T10)

α	$sen(\alpha)$	$cos(\alpha)$	$tg(\alpha)$	$\frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$
30°	0,5	0,87	0,58	≈0,6
45°	0,71	0,71	1	1
60°	0,87	0,5	1,73	1,73
25°	0,42	0,91	0,47	0,46

Depois de Nélia observar a existência de uma regularidade entre os valores registados na tabela — "observo que para o ângulo de 30°, 45°, 60° ou 25°, os valores do seno sobre o cosseno são iguais aos valores da tangente" (RV-T10) —, a aluna generalizou a sua observação através de uma conjetura que relaciona a razão trigonométrica tangente com a razão das razões trigonométricas seno e cosseno: "concluo que o valor da tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é sempre igual ao valor da razão de seno sobre cosseno" (RE-T10). A aluna consegue, assim, distinguir os casos particulares, que a auxiliam a relatar o que é observado na sua tabela, de uma situação genérica, quando extrapola a sua observação para qualquer ângulo agudo, em qualquer triângulo retângulo.

Posteriormente, os alunos acrescentaram, na tabela construída, uma coluna para o quadrado da razão seno, outra para o quadrado da razão cosseno e, ainda, uma outra coluna para a soma dos resultados obtidos. Depois de observarem a tabela com as novas colunas, os discentes estabeleceram uma conjetura que relaciona os quadrados das razões trigonométricas seno e cosseno. Na exploração desta parte da tarefa parecem ainda persistir dificuldades na interpretação do enunciado. Salienta-se o facto de, inicialmente, os discentes determinarem o seno e o cosseno do quadrado do ângulo e não o quadrado do seno e o quadrado do cosseno desse ângulo.

No momento destinado à apresentação dos resultados à turma, Mara registou no quadro interativo os valores que considerou. Como grande parte dos alunos manifestou dificuldade na apresentação dos cálculos efetuados, mais especificamente nos arredondamentos intermédios, a professora sugeriu que se atribuíssem mais valores para o ângulo α e se determinassem, na folha de cálculo do GeoGebra, os respetivos valores alcançados para as razões trigonométricas consideradas. Aos dados apresentados pela aluna acrescentaram-se novos valores determinados por alguns alunos (Figura 44).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Ângulo α	sen α	cos α	tg α	(sen α)/(cos α)	sen² α	cos² α	sen² α + cos² α
2	15°	0.2588	0.9659	0.2679	0.2679	0.067	0.933	1
3	65°	0.9063	0.4226	2.1445	2.1445	0.8214	0.1786	1
4	41°	0.6561	0.7547	0.8693	0.8693	0.4304	0.5696	1
5	50°	0.766	0.6428	1.1918	1.1918	0.5868	0.4132	1
6	26°	0.4384	0.8988	0.4877	0.4877	0.1922	0.8078	1
7	75°	0.9659	0.2588	3.7321	3.7321	0.933	0.067	1
8	36°	0.5878	0.809	0.7265	0.7265	0.3455	0.6545	1
9	25°	0.4226	0.9063	0.4663	0.4663	0.1786	0.8214	1
10	18°	0.309	0.9511	0.3249	0.3249	0.0955	0.9045	1
11	30°	0.5	0.866	0.5774	0.5774	0.25	0.75	1
12	26°	0.4384	0.8988	0.4877	0.4877	0.1922	0.8078	1
13	40°	0.6428	0.766	0.8391	0.8391	0.4132	0.5868	1
14	45°	0.7071	0.7071	1	1	0.5	0.5	1
15	62°	0.8829	0.4695	1.8807	1.8807	0.7796	0.2204	1
16	33°	0.5446	0.8387	0.6494	0.6494	0.2966	0.7034	1
17								

Figura 44: Flipchart da tarefa 10 realizada por Mara (RE-T10)

A partir da observação dos valores da tabela, os alunos não manifestaram dificuldade em observar que os valores da coluna referente à soma do quadrado do seno com o quadrado cosseno são iguais a um. No entanto, nas conjeturas de alguns alunos salienta-se a dificuldade que os mesmos apresentam em traduzir os elementos observados para linguagem corrente, tal como é evidenciado pela Mara: “a soma dos quadrados trigonométricos dá sempre valor um para cada posição [do ângulo agudo]” (RV-T10). A aluna, embora mostre que sabe a que é que se está a referir, não o transmite de forma clara. Dos alunos que conseguiram generalizar a situação apresentada, destaca-se a forma como Júlia apresenta o seu raciocínio, apontando para uma compreensão clara da relação estabelecida (Figura 45).

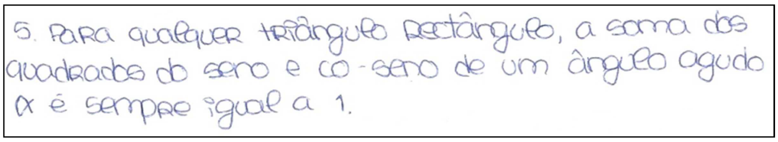

5. Para qualquer triângulo rectângulo, a soma dos quadrados do seno e co-seno de um ângulo agudo α é sempre igual a 1.

Figura 45: Conjetura apresentada por Júlia (RE-T10)

Após a relação encontrada entre a soma dos quadrados do seno e do cosseno de um ângulo agudo, num triângulo retângulo qualquer, procurou-se ampliar a relação encontrada através de uma aplicação. Tratou-se de determinar as razões trigonométricas seno e cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo, conhecido o valor da sua tangente. Anita ofereceu-se para apresentar a sua proposta de resolução e registou no quadro a sua resposta (Figura 46).

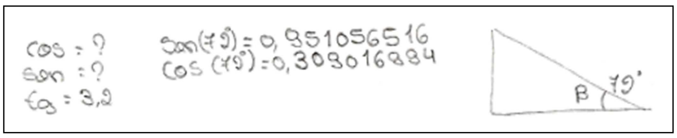


Figura 46: Resolução da aplicação da tarefa 10 por Anita (RE-T10)

Da resposta apresentada por Anita à turma emergiu a intervenção de Júlia: “quando aqui diz... pede os valores exatos... do cosseno e do seno... só podemos usar seno de β e cosseno de β. Não podemos calcular seno e cosseno de 73° porque assim vamos ter dízimas, não vamos ter os valores exatos” (RV-T10).

Prof.: E o que é pedido nesta aplicação?

Anita: Eu não fiz os valores exatos, então está mal, porque eu aqui escrevo o seno e o coseno [de 72°] e dão-me dízimas...

Prof.: Como é que obteve esse ângulo de amplitude 72°?

Anita: Ah! Eu não escrevi, mas fui pela tangente menos um de 3,2! Quando tenho o valor do seno, do cosseno ou da tangente e quero saber o valor do ângulo, vou buscar à máquina [de calcular] o seno menos um, o cosseno menos um ou a tangente menos um!

Prof.: E o seno e o cosseno de 72° são valores exatos?

Após a intervenção de Júlia e a questão colocada pela professora, Anita parece ter-se apercebido que a sua resolução não cumpria as condições do enunciado, pelo que tinha de ser reformulada. Abandonada a proposta de resolução de Anita, Júlia apresenta o seu raciocínio à turma (Figura 47).

$$3{,}2 = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} \Leftrightarrow 3{,}2\cos\beta = \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos^2\beta + 10{,}24\cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\beta(1+10{,}24) = 1$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{1}{11{,}24}$$
$$\Leftrightarrow \cos\beta = \sqrt{\frac{1}{11{,}24}}$$

$$\operatorname{sen}^2\beta + \frac{1}{11{,}24} = 1$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\beta = \frac{10{,}24}{11{,}24}$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\beta = \sqrt{\frac{10{,}24}{11{,}24}}$$

Figura 47: Resolução da aplicação da tarefa 10 por Júlia (RE-T10)

Através da razão trigonométrica tangente, Júlia determina a razão trigonométrica seno em função da razão trigonométrica cosseno e substitui na fórmula fundamental da trigonometria o seno pela relação encontrada. Com a expressão do cosseno, Júlia determina o seno recorrendo novamente à fórmula fundamental da trigonometria. Júlia apercebe-se que pode definir o seno e o cosseno de um determinado ângulo, tendo como referência o valor da sua tangente e a relação entre as razões. Na sequência da resolução apresentada por Júlia, Nélia propõe uma outra forma de determinar a expressão para o seno, após ter determinado a expressão para o cosseno:

Nélia: Para calcular o seno, eu fui substituir em seno de beta igual a três vírgula dois vezes cosseno de beta, o cosseno de beta por raiz de um a dividir por onze vírgula vinte e quatro e fiquei com cosseno de beta igual a três vírgula dois vezes raiz de um a dividir por onze vírgula vinte e quatro.

Júlia: Stôra, mas vai dar o mesmo! Se passarmos o três vírgula dois para dentro da raiz, fica ...

Júlia revela sentido crítico ao comparar a resolução da sua colega com a sua, reconhecendo que não trazia nada de novo.

Para finalizar esta experiência de ensino, implementou-se a tarefa 11 (Anexo XIV) que consistiu numa investigação sobre as relações entre os volumes de alguns sólidos (cones, cilindros e esferas). Os alunos, através de um 'applet' puderam estudar e comparar as capacidades dos sólidos em análise e que representavam os recipientes de gelado e a bola de gelado que faziam parte do problema proposto. Posteriormente, os alunos tiveram de justificar qual dos recipientes deveriam escolher para que não se corresse o risco de o gelado derreter e transbordar para fora do recipiente. Para isso, Diana representou os recipientes através do cone, do cilindro e da esfera (Figura 48).

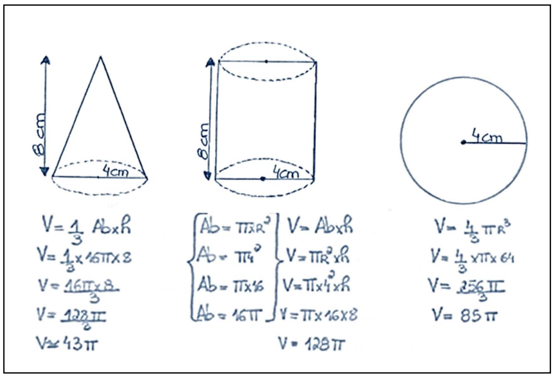


Figura 48: Determinação da capacidade de recipientes de gelado por Diana (RE-T11)

O recurso à construção de sólidos geométricos como forma de representar os conceitos matemáticos identificados neste problema – recipientes cónico e cilíndrico e bola de gelado esférica – é visível nas resoluções de grande parte dos alunos, o que parece que contribuiu para uma melhor compreensão do próprio problema.

Depois de interpretada a situação em estudo, Diana calculou os volumes dos sólidos que representavam os recipientes e a bola de gelado e justificou a opção que escolheu: "Como o volume da esfera é maior que o volume do cone, a bola de gelado não vai caber dentro do cone, ao contrário do cilindro, que é maior" (RV-T11). Através do cálculo dos volumes, Diana comparou a capacidade dos dois recipientes para argumentar a sua escolha, no contexto do problema. Ao determinar o número de bolas de gelado que cabe em cada recipiente, a aluna determinou os quocientes entre a capacidade de cada um dos recipientes e o volume ocupado pela bola de gelado, o que lhe permite encontrar uma relação entre os volumes dos recipientes e o volume da esfera (Figura 49).

Vcone = 43 cm Vcilindro = 128 cm Vesfera = 85 cm

43 :85 = 0.5 128 :85 = 1.5

R: No cone, pode ser embalada meia bola de gelado.
No copo cilíndrico pode ser embalada uma bola e meia de gelado.

Figura 49: Conjetura apresentada por Diana (RE-T11)

Apesar de, inicialmente, Diana ter definido o volume dos recipientes em função de pi, nos cálculos que efetuou para determinar o número de bolas de gelado que comporta cada recipiente, parece que ignorou o valor de pi em cada um dos valores dos volumes do cone, do cilindro e da esfera.

Diana: Aqui [apontando para os cálculos] eu fui ao volume de cada um [dos recipientes] peguei no volume do cone e dividi pelo volume da esfera e (...) no cilindro, peguei no volume do cilindro e dividi-o pelo volume da esfera e (...) no cone pode ser embalada meia bola de gelado e no copo de cilindro pode ser embalada bola e meia [de gelado].

Anita: Porque é que tiraste o pi em cada uma das divisões que calculaste?

Diana: Como [os volumes] acabam todos em pi eu tirei-os, como se faz por exemplo nos denominadores.

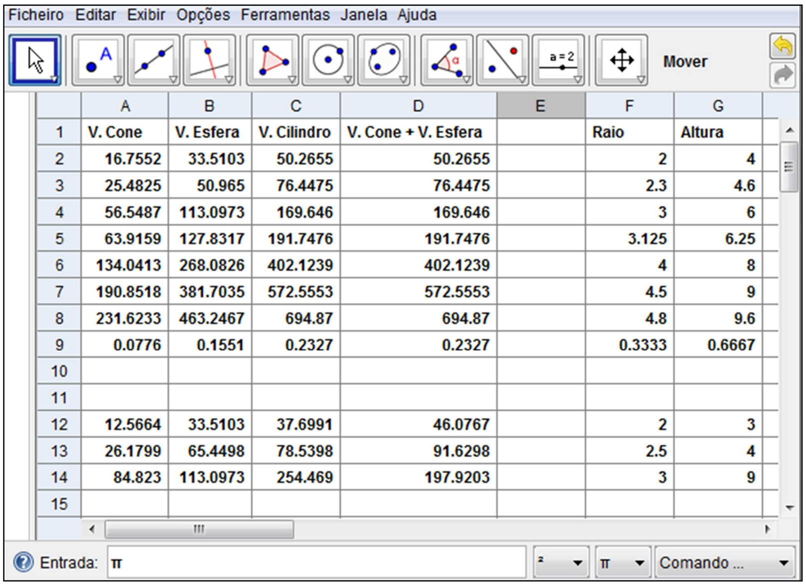
Mara: Mas a Diana não pode fazer isso, é como se tivesse aquele número vezes o pi, que é três vírgula catorze (...) não se pode tirar (...) senão ia mudar o número [valor do volume].

Filipa: Stôra, eu acho que um número com o pi não se pode tirar o pi, mas como a Diana fez ao tirar o pi (...) não vai alterar as relações (...) como tirou em todos [os valores dos volumes] não vai mexer com as igualdades [resultados].

A discussão sobre os resultados obtidos parece indiciar que a maioria dos alunos, ao proceder a transformações, não analisa, por vezes, o contexto em que essas transformações estão inseridas, assumindo que as mesmas são válidas para qualquer situação, como foi o caso da resposta dada por Diana. A aluna 'esquece' os valores de pi quando procura estabelecer uma relação entre os volumes dos recipientes e da bola de gelado, justificando que aplicou os procedimentos que usualmente adota para uma igualdade de frações com o mesmo denominador. Após a discussão da resposta dada por Diana, seguiu-se a formulação da conjetura:

> Apesar de os três sólidos geométricos serem iguais em relação à altura e ao raio, todos apresentam volumes diferentes, mas continuam na mesma relacionados, ou seja, a capacidade que o cone e a esfera têm juntos é igual à capacidade de volume do cilindro. A capacidade de volume do cilindro menos a capacidade volume da esfera é igual ao volume do cone e o volume do cilindro menos o volume do cone é igual ao volume da esfera. (RE-T11)

Diana divide a sua conjetura em três condições. No entanto, as duas últimas parecem uma dedução da primeira condição da sua conjetura – a soma dos volumes do cone e da esfera é igual ao volume do cilindro. O facto de a aluna formular uma conjetura e não verificar a sua validade para outros casos, parece que condicionou a identificação de uma condição fundamental – o facto de a altura dos sólidos ser o dobro do raio dos círculos que constituem as bases e a esfera. Nesta exploração ganha relevância as questões colocadas por alguns alunos que vão no sentido de reformular a conjetura apresentada por Diana. Exemplo disso foi a questão levantada por Mara: "Stôra, nós temos que ver se é verdadeiro o que a Diana diz (...) temos de dar exemplos..." (RV-T11). Mara dá a entender que o teste de um número limitado de casos não é suficiente para inferir conclusões, mostrando sentido crítico nas respostas dadas pelos colegas. Diana apercebe-se, assim, da importância que as representações dos conceitos matemáticos tiveram na exploração de tarefas anteriores: "Eu verifiquei só para o exemplo que foi dado na pergunta (...) não verifiquei para outros casos (...) não me lembrei de construir uma tabela, como nas tarefas anteriores" (RV-T11). Os valores atribuídos no enunciado parecem, por vezes, constituir uma condicionante para o desenvolvimento dos raciocínios dos alunos, em especial na formulação de conjeturas. No entanto, Mara dá a entender que o teste de um número limitado de casos não é suficiente para inferir conclusões. Deste modo, e para os alunos analisarem a conjetura de Diana, foram assumidos novos valores para o raio e a altura dos sólidos, tendo Mara procedido ao seu registo na folha de cálculo do GeoGebra (Figura 50).



	A	B	C	D	E	F	G
1	V. Cone	V. Esfera	V. Cilindro	V. Cone + V. Esfera		Raio	Altura
2	16.7552	33.5103	50.2655	50.2655		2	4
3	25.4825	50.965	76.4475	76.4475		2.3	4.6
4	56.5487	113.0973	169.646	169.646		3	6
5	63.9159	127.8317	191.7476	191.7476		3.125	6.25
6	134.0413	268.0826	402.1239	402.1239		4	8
7	190.8518	381.7035	572.5553	572.5553		4.5	9
8	231.6233	463.2467	694.87	694.87		4.8	9.6
9	0.0776	0.1551	0.2327	0.2327		0.3333	0.6667
10							
11							
12	12.5664	33.5103	37.6991	46.0767		2	3
13	26.1799	65.4498	78.5398	91.6298		2.5	4
14	84.823	113.0973	254.469	197.9203		3	9
15							

Figura 50: Registo dos volumes do cone, esfera e cilindro por Mara (RE-T11)

Através da observação dos valores atribuídos para o raio da esfera e o raio da base dos recipientes, bem como para a altura dos mesmos, os alunos puderam, assim, confirmar a regularidade a que Diana chegou. Da observação de alguns contraexemplos, foi evidenciado que tal regularidade não se verificava para qualquer situação. Diana reformulou, assim, a sua conjetura, onde passou a incluir a condição que a valida:

> Quando a medida do raio de uma esfera é igual à medida do raio das bases de um cone e de um cilindro, e a altura do cone e do cilindro é o dobro da do raio das bases, o volume de um cilindro é igual à soma do volume do cone com o da esfera. (RV-T11)

Dos alunos que investigaram a relação entre os volumes do cone, do cilindro e da esfera nas condições dadas, destaca-se ainda a investigação apresentada por Júlia, onde subdividiu a relação encontrada em três etapas:

> A primeira conjetura a que cheguei foi que o volume de um cone é metade do volume da esfera, mas só quando a altura é o dobro do raio. A segunda conjetura que cheguei foi que o volume do cilindro é uma vez e meia o volume da esfera, quando também a altura é o dobro do raio. A terceira conclusão a que cheguei foi que o volume do cilindro é três vezes o volume do cone, mas esta conjetura verifica-se para qualquer cone e cilindro que tenham a mesma base e a mesma altura, aqui a altura não tem de ser o dobro do raio. (RV-T11)

A aluna mostrou, usando os valores dos casos apresentados por Mara, que as duas primeiras conjeturas são válidas somente quando os sólidos envolvidos estão nas condições estipuladas no problema. Na terceira conjetura, Júlia considera os valores dos contraexemplos que foram considerados por Mara para mostrar que para qualquer cone e cilindro com a mesma base e a mesma altura, a conjetura estabelecida permanece válida. Apesar de a aluna ter parcelado o seu raciocínio, apresenta uma outa conjetura onde são relacionados os três sólidos considerados (Figura 51):

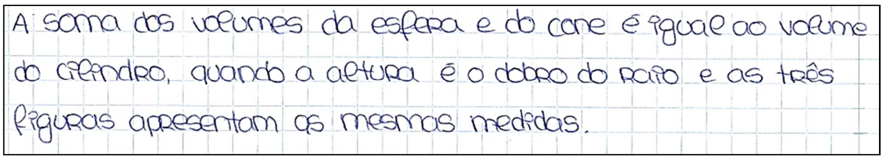

A soma dos volumes da esfera e do cone é igual ao volume do cilindro, quando a altura é o dobro do raio e as três figuras apresentam as mesmas medidas.

Figura 51: Conjetura apresentada por Júlia (RE-T11)

Júlia parece ter-se apercebido que para estabelecer uma relação entre os três sólidos juntos tem de procurar regularidades entre os valores considerados dos três sólidos nos casos explorados. Mais uma vez, a análise de tabelas com valores dos casos estudados, como representações de conceitos matemáticos, foi determinante na exploração e na formulação de conjeturas.

De um modo geral, os alunos mostram uma aptidão para procurar regularidades nos estudos que exploram, apresentam generalizações matemáticas, exemplos e contraexemplos de uma determinada afirmação e identificam argumentos matemáticos que validam as suas afirmações.

4.1.2. Prova de conjeturas

Início da experiência de ensino. Após os alunos terem iniciado a formulação e teste de conjeturas, são encaminhados a experimentar a prova. Nesta fase da experiência de ensino, os alunos iniciaram o processo da prova no final da exploração da tarefa 2 (Anexo V). Depois de terem estabelecido uma conjetura que relacionasse as amplitudes de um ângulo inscrito e do seu arco correspondente, os alunos passaram à prova da conjetura que formularam e que, por sua vez, foi baseada na observação de regularidades. Para isso, foi sugerido aos discentes que considerassem um ângulo inscrito numa semicircunferência e procedessem à construção de um triângulo tal que um dos seus vértices coincidisse com o centro da circunferência e os outros dois vértices fossem os extremos da corda que não contém o diâmetro. Com base no ângulo inscrito e no triângulo construído, os alunos tiveram de provar a conjetura formulada anteriormente. Apesar de não manifestarem dificuldade em realizar a construção, no GeoGebra, do triângulo sugerido, os alunos em geral apresentaram muitas dificuldades em iniciarem o processo de prova. Para os ajudar, a professora construiu o triângulo sugerido, com recurso ao GeoGebra, e através do quadro interativo chamou a atenção dos alunos para a necessidade de analisar minuciosamente todos os elementos visíveis na construção, bem como efetuar as medições que achassem necessárias para auxiliar no raciocínio a seguir para a produção da prova. Através do GeoGebra, os discentes construíram o triângulo sugerido para, assim, procederem à caraterização dos seus elementos (Figura 52).

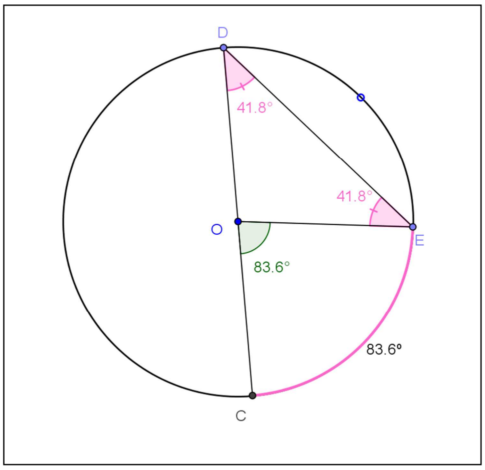


Figura 52: Flipchart da prova por Anita (RE-T2)

Com recurso ao GeoGebra e ao quadro interativo, Anita apresenta a sua tentativa de prova à turma, movendo um dos pontos do triângulo para mostrar a conjetura a que tinha chegado. Ao movimentar o ponto, os alunos parecem aperceber-se do que querem provar. No entanto, a relevância que, nesta fase do estudo, é dada aos casos particulares limita a produção da prova, tal como é visível no seguinte diálogo:

Prof.: Qual foi a conjetura a que chegaram?
Anita: A amplitude do ângulo inscrito é sempre a metade do arco correspondente.
Mara: Stôra, mas isso já não está provado em 1.2?
Anita: Stôra, eu acho que não! Nós só verificámos para alguns valores!

Prof.: E é isso que queremos? Só acontece para os valores da Mara? Ou acontece também para os valores da Anita? Ou para qualquer um de vós?

Filipa: Não, stôra! Também acontece com os meus valores e com os valores de todos nós!

Prof.: Então, parece-nos que o que a Mara disse vai acontecer para todos os ângulos naquelas condições... Sim ou não? (...) Para termos a certeza temos de o provar, mas não podemos provar com um ou vários exemplos!

Filipa: Eu acho que o que nós temos de fazer é... se a lados iguais se opõem ângulos iguais e se... este arco [apontando para o arco correspondente do ângulo inscrito] é metade deste ângulo [apontando para o ângulo inscrito]... Ah! Não! Isto é o que queremos provar! (...) Mas se somar estes dois ângulos...

Júlia: Se nós descobrirmos a amplitude deste ângulo [ângulo externo do triângulo] através da soma deste e deste [ângulos internos não adjacentes], sabemos a amplitude do arco correspondente, porque... é um ângulo ao centro. E assim vemos que é o dobro do ângulo inscrito. (RV-T2)

A orientação dada pela professora parece ter sido imprescindível para os alunos identificarem, no triângulo, a relação entre um ângulo externo e os ângulos internos não adjacentes. Assim, emergiram noções matemáticas exploradas anteriormente, que Júlia aproveitou para dar início à prova da conjetura, como exemplifica na sua resposta (Figura 53).

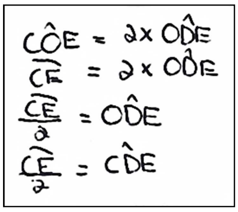


Figura 53: Prova produzida por Júlia (RE-T2)

A forma como os alunos abordam a prova matemática nesta fase da experiência de ensino parece revelar pouca familiaridade com os processos desta natureza. Os alunos parecem, assim, conferir demasiada ênfase à prova como uma verificação indutiva/experimental em detrimento da sua vertente dedutiva. A procura de argumentos dedutivos como uma tentativa de esclarecer um raciocínio parece, nesta fase, ainda muito distante, inviabilizando a sistematização do conhecimento matemático.

Durante a experiência de ensino. Na sequência do estudo da circunferência, os alunos continuaram a experimentar a prova para confirmar a conjetura formulada e que relaciona a reta que passa pelo centro de uma circunferência com as cordas que lhes são perpendiculares e com os ângulos ao centro e arcos correspondentes (tarefa 5, Anexo VIII). Em consequência de questões anteriores e através da construção realizada, com recurso ao GeoGebra, para a exploração da conjetura formulada, os alunos identificaram a reta que passa pelo centro de uma circunferência e é perpendicular a uma corda como um eixo de reflexão. Nélia começou por interpretar a construção projetada no quadro interativo e deu início à construção da sua prova (Figura 54)

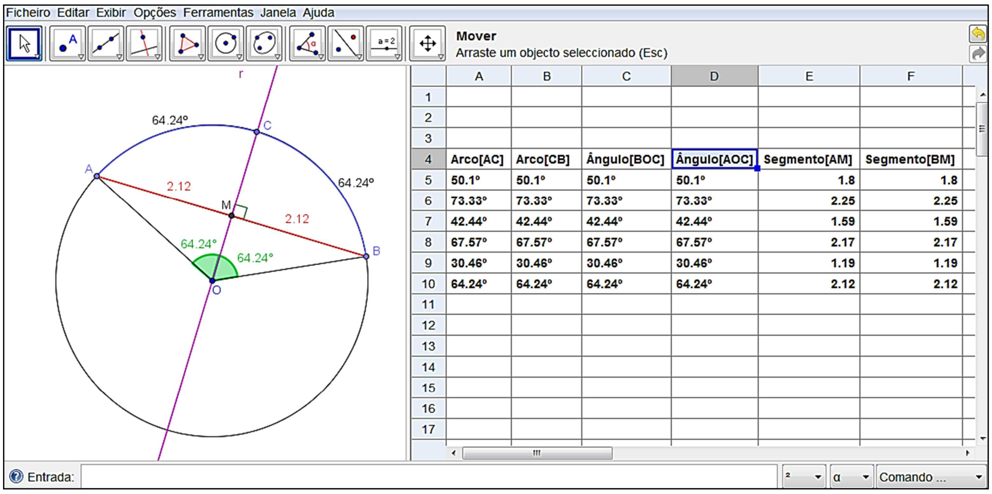


Figura 54: Flipchart da relação de uma reta perpendicular a uma corda que passe pelo centro de uma circunferência (RE-T5)

Nélia: Os triângulos [MOA] e [MOB] são iguais, pelo critério lado, lado, lado, porque têm os três pares de lados iguais: um par de lados são raios, então [AO]=[OB]; outro par de lados é comum aos dois triângulos [MO]; o outro par de lados resulta da divisão de uma corda pela sua mediatriz, então [AM]=[MB].

Prof.: Então o que é que podemos dizer em relação à reta?

Nélia: É um eixo de reflexão porque transformou um triângulo noutro geometricamente igual.

Prof.: E o que acontece nos eixos de reflexão?

Nélia: Um ângulo ao centro é transformado noutro ângulo ao centro geometricamente igual, uma corda noutra corda geometricamente igual e também um arco noutro arco geometricamente igual.

Anita: Então bastava provar que a reta era um eixo de reflexão e concluir o resto a partir daí! (RV-T5)

Durante a discussão, a análise dos triângulos observados na sua construção e a noção recente de eixo de reflexão, parece ter encorajado Nélia na procura de argumentos dedutivos que validassem as suas afirmações. A aluna parece reconhecer a necessidade da prova como parte integrante da sua atividade matemática.

Ainda nesta fase da experiência de ensino, a prova é abordada em dois outros momentos. Na produção da prova da relação estabelecida para os arcos e cordas compreendidas entre cordas paralelas, Anita tenta argumentar matematicamente as suas conclusões com base na análise da figura construída no GeoGebra (Figura 55) e da recente abordagem à prova da relação anterior.

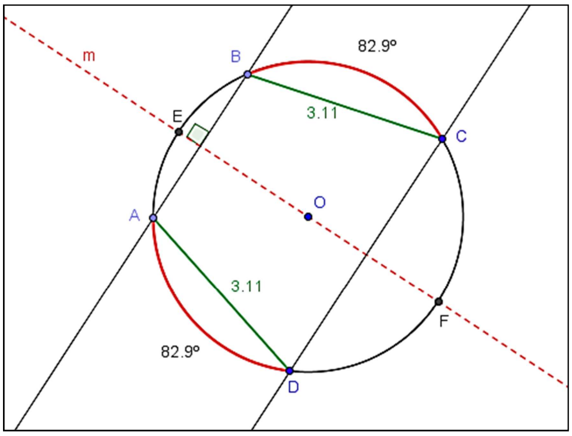


Figura 55: Flipchart da relação de arcos e cordas compreendidos entre retas paralelas (RE-T5)

Anita: Pelo resultado anterior [toda a reta que passa pelo centro da circunferência divide ao meio as cordas que lhe são perpendiculares], sabemos que os arcos AE e EB [apontando para os arcos] são iguais e que os arcos DF e CF [apontando para os arcos] também o são. Então:

Sabemos que:

$$\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB}$$
$$\overset{\frown}{DF} = \overset{\frown}{CF}$$

Como eu vejo duas semicircunferências divididas pela reta m, em cada uma delas tenho uma amplitude de 180°. Assim tenho os arcos AD e BC a partir das semicircunferências:

$$\overset{\frown}{AD} = 180^\circ - \overset{\frown}{DF} - \overset{\frown}{AE}$$
$$\overset{\frown}{BC} = 180^\circ - \overset{\frown}{CF} - \overset{\frown}{EB}$$

Como o arco DF é igual ao arco CF e o arco AE é igual ao arco EB, posso substituir numa das igualdades e ficam as igualdades:

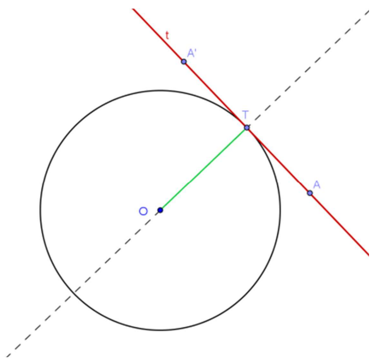
$$\overset{\frown}{AD} = 180^\circ - \overset{\frown}{CF} - \overset{\frown}{EB}$$
$$\overset{\frown}{BC} = 180^\circ - \overset{\frown}{CF} - \overset{\frown}{EB}$$

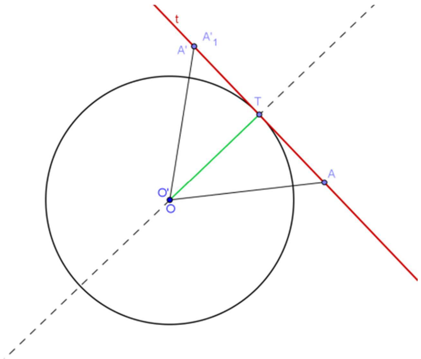
> Como os arcos AD e BC são iguais a 180° menos uma quantidade que é igual, vê-se que:
>
> $$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$$
>
> E fica provado que os arcos são iguais.
>
> **Prof.**: Como é que vamos provar que as cordas definidas por essas cordas paralelas são também iguais?
>
> **Mara**: Olhando para a figura vemos que têm o mesmo comprimento!
>
> **Anita**: Não podemos provar com exemplos!
>
> **Júlia**: Stôra, na tarefa anterior concluímos que se tivéssemos arcos iguais as cordas traduzidas por esses arcos também eram iguais. Então também podemos usar esse resultado para provar que as cordas são também iguais. (RV-T5)

A identificação, por parte de Anita, dos dados inferidos pela figura e do resultado que pretende provar, constituiu o ponto de partida para a aluna investigar a veracidade das suas afirmações. Anita expressou as suas afirmações e os resultados obtidos através de igualdades algébricas, e simplificou-as recorrendo a propriedades e a resultados anteriores. Também Júlia parece ter compreendido a importância das conclusões alcançadas em resultados anteriores na experimentação da prova. No entanto, nesta fase do estudo a prova é, ainda, assumida como uma simples verificação de exemplos, ideia partilhada por Mara e por grande parte dos alunos.

Na prova da conjetura que os alunos formularam sobre a relação entre uma reta tangente num ponto de uma circunferência e o raio no ponto de tangência, Júlia estabelece conexões com conhecimentos anteriores:

> Eu começo por ver que o raio é como se fosse [está contido num] um eixo de reflexão porque qualquer reta que passa pelo centro de uma circunferência é um eixo de reflexão. Se eu tiver um ponto A na reta tangente e, refletir esse ponto segundo o raio, vou obter um outro ponto acima A', na reta tangente, que está à mesma distância do ponto de tangência:



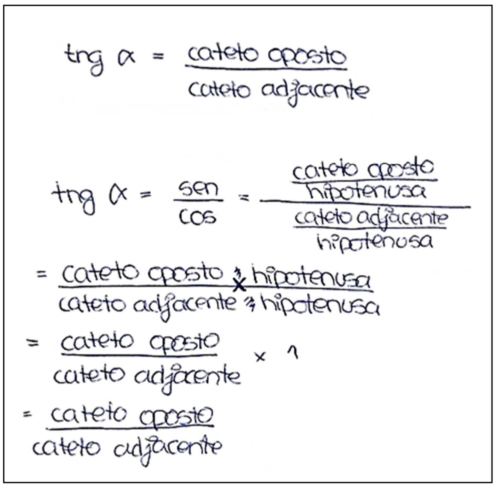
> Se eu desenhar o segmento AO e o refletir na reta fico com outro segmento em que o ponto A é refletido no ponto A'_1 e que vai coincidir com o ponto A'.
>
> 
>
>
> Assim, fico com os triângulos ATO e A'_1TO, que vão ser geometricamente iguais porque o segundo foi construído através do primeiro, por reflexão. Então, os ângulos ATO e A'_1TO são iguais e a sua soma é 180º. Então cada um tem 90º de amplitude, que era o que queríamos provar. (RV-T5)

Na exploração da sua prova, Júlia recorreu às propriedades do eixo de reflexão e da congruência de triângulos como forma de argumentar as suas afirmações. A partir desta abordagem emergiu uma outra que parece ter resultado de um melhoramento da prova realizada por Júlia. Partindo, também, da noção de eixo de reflexão, Diana argumenta que a relação estabelecida se deve por o raio estar contido num eixo de reflexão:

> Se prolongar o raio, fico com uma reta que contém o raio da circunferência. Como vimos, qualquer reta que passe pelo centro de uma circunferência é um eixo de reflexão, então qualquer ângulo que tenha é enviado num outro ângulo geometricamente igual. Como os dois formam um ângulo raso, cada um deles tem metade de 180º, que é 90º (...). Assim fica provado que qualquer reta tangente é perpendicular ao raio no ponto de tangência. (RV-T5)

O caminho assumido por Júlia e Diana indicia que as alunas encaram a prova não como um produto acabado, mas como uma atividade matemática onde destacam a procura de argumentos válidos e convincentes como uma forma de explicação e descoberta do próprio raciocínio. No entanto, nem todos os alunos parecem encarar a prova desta forma, tal como é evidenciado por Mara. A aluna parece, assim, conferir demasiada ênfase à prova como uma mera confirmação de casos particulares, em detrimento da tentativa de caraterização de um raciocínio, justificado por um resultado ou padrão. A compreensão e o reconhecimento da necessidade da prova como forma de sistematizar o conhecimento matemático parecem, assim, ainda um pouco distantes para parte dos alunos.

Final da experiência de ensino. Nesta última fase da experiência de ensino, os alunos continuam a experimentar a prova para confirmar as conjeturas formuladas. Na tarefa 10 (Anexo XIII), os alunos têm de provar a relação entre a tangente de um ângulo agudo de um triângulo rectângulo e a razão entre o seu seno e o seu cosseno e a relação entre os quadrados das razões trigonométricas seno e cosseno. Dos alunos que exploraram a prova da conjetura que relaciona a tangente de um ângulo agudo de um triângulo rectângulo e a razão entre o seu seno e o seu cosseno, destaca-se a resposta apresentada por Júlia (Figura 56).



$$\text{tng}\ \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\text{tng}\ \alpha = \frac{\text{sen}}{\text{cos}} = \frac{\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}}{\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}}$$

$$= \frac{\text{cateto oposto} \times \text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente} \times \text{hipotenusa}}$$

$$= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \times 1$$

$$= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Figura 56: Prova da relação entre a tangente de um ângulo agudo de um triângulo rectângulo e a razão entre o seu seno e o seu cosseno por Júlia (RE-T10)

Na apresentação da sua resposta à turma, Júlia desenvolve o processo de prova com base nas razões trigonométricas de um ângulo agudo α e em função dos lados do triângulo retângulo. No entanto, Júlia parece não conseguir estabelecer diferenças entre os dados da conjetura e o que se pretende provar, perceptível quando refere:

> **Júlia**: Se a tangente é igual ao seno sobre o cosseno e se o seno é igual a esta expressão [razão trigonométrica] e o cosseno é igual a esta expressão [razão trigonométrica], depois... a partir das regras que nós aprendemos das equações podemos fazer as transformações e ficamos com cateto oposto sobre o cateto adjacente.
>
> **Filipa**: Eu acho que a Júlia substituiu a tangente do ângulo α pela fórmula [razão trigonométrica]... mas acho que não é isso que pede... eu acho que temos de provar a conjetura.
>
> **Prof.**: E qual é a conjetura?

Filipa: O valor da tangente de ângulo agudo α é igual ao valor do seno desse ângulo com o cosseno desse ângulo!

Anita: Mas não foi isso que a Júlia escreveu?

Júlia: Sim, mas não devia ter partido daí porque é o que nós queremos provar.

Mara: Então partimos de quê? Não gosto nada de provas! É muito complicado!

Nélia: E se partíssemos da razão entre o seno e o cosseno, em vez de partirmos da tangente? Talvez desse!

Júlia: Acho que a Nélia tem razão, vamos experimentar começar com a razão entre o seno e o cosseno e ver onde chegamos! (RV-T10)

Nesta exploração ganha relevância as interações entre os vários intervenientes. Estes discursos e contradiscursos parecem ter suscitado, na maior parte dos alunos, um estímulo e uma curiosidade para dar continuidade ao processo de prova iniciado por Júlia. Deste modo, a discussão sobre a resposta que Júlia apresentou ajudou a clarificar a ligação entre o que se sabe e o que se pretende provar e, com os contributos dos alunos, a prova iniciada por Júlia foi alvo de uma significativa melhoria (Figura 57):

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}}{\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}}$$

$$= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} : \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \times \frac{\text{hipotenusa}}{\text{hipotenusa}}$$

$$= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \times 1 = \text{tg}\,\alpha$$

Figura 57: Prova da relação entre a tangente de um ângulo agudo de um triângulo rectângulo e a razão entre o seu seno e o seu cosseno (RE-T10).

Na sequência do estudo das relações entre as razões trigonométricas, os alunos exploram a prova para comprovar a validade da conjetura que relaciona o quadrado do seno com o quadrado do cosseno de um ângulo agudo. Nesta fase da experiência de ensino, é visível uma receptividade, por parte dos alunos mais céticos, em compreender e reconhecer a necessidade de experimentar a prova como parte da atividade matemática, como evidencia Mara.

Prof.: O que é que queremos provar?

Nélia: Queremos provar que o quadrado do seno mais o quadrado do cosseno é sempre igual a um.

Prof.: Partimos de onde?

Anita: Da soma dos quadrados!

Prof.: E queremos chegar aonde? (...) A que é que via ser igual?

Diana: Tem de ser igual a um.

Prof.: Então queremos chegar onde?

Diana: A um?

Mara: Mas como é que chegamos a um? A única coisa que eu sei sobre o seno e o cosseno é que o seno é o cateto oposto sobre a hipotenusa e o cosseno é o cateto adjacente sobre a hipotenusa! Podemos partir daqui? (...) Posso tentar, stôra?

Através desta interação, Mara mostra identificar as condições necessárias para iniciar a prova, estabelecendo uma relação entre o que sabe e o que pretende provar: “Como eu sei o seno e o cosseno, então tenho que achar os seus quadrados, somá-los e no fim ver se dá igual a um” (RV-T10). Mara inicia, assim, o seu processo de prova (Figura 58).

$$(\text{sen}\,\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=$$
$$=\left(\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}\right)^2+\left(\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}\right)^2$$
$$=\frac{\text{cateto oposto}^2}{\text{hipotenusa}^2}+\frac{\text{cateto adjacente}^2}{\text{hipotenusa}^2}$$
$$=\frac{\text{cateto oposto}^2+\text{cateto adjacente}^2}{\text{hipotenusa}^2}$$
$$=\frac{\text{hipotenusa}^2}{\text{hipotenusa}^2}\quad(\text{pelo teorema de pitágoras})$$
$$=\frac{\cancel{\text{hipotenusa}}\,1}{\cancel{\text{hipotenusa}}\,1}$$
$$=1$$

Figura 58: Prova da relação entre o seno e o cosseno de um ângulo agudo por Mara (RE-T10)

Após ter escrito as razões trigonométricas, seno e cosseno, em função das medidas dos lados de um triângulo retângulo, Mara simplifica a expressão algébrica que obtém. Da análise da expressão algébrica, apercebe-se do seu significado geométrico: “Pelo teorema de Pitágoras, eu sei que cateto ao quadrado mais cateto ao quadrado é igual à hipotenusa ao quadrado” (RV-T11). A aluna procura, na resolução geométrica de triângulos retângulos, uma estratégia para alcançar uma razão entre partes iguais e, assim, obter o resultado pretendido.

Das provas produzidas pelos alunos, destaca-se, ainda, a resposta apresentada por Nélia (Figura 59).

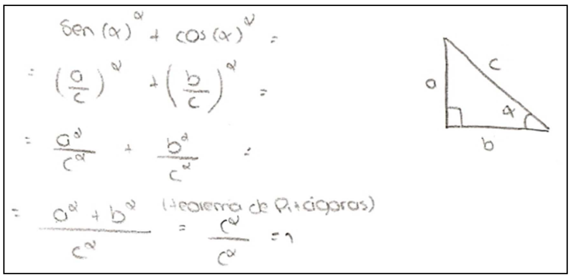


Figura 59: Prova da relação entre o seno e o cosseno de um ângulo agudo por Nélia (RE-T10)

Ao desenhar um triângulo retângulo, Nélia estabelece uma correspondência entre a representação geométrica do teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas envolvidas. Após algumas simplificações, a aluna identifica a soma dos quadrados dos catetos com o quadrado da hipotenusa e obtém o resultado pretendido.

A tarefa 11 (Anexo XIV) constitui o último momento desta experiência de ensino onde os alunos exploram a prova. Após a análise de uma tabela com os valores dos volumes do cone, do cilindro e da esfera, caraterizados por terem a mesma medida para o raio da esfera, para o raio do círculo que constitui a base do cone e a base do cilindro, e a altura dos sólidos ser o dobro do raio da base, os alunos formularam uma conjetura que relaciona os sólidos considerados nas condições referidas. Posteriormente, através das expressões para os volumes dos sólidos a relação que estabeleceram entre o raio e a altura dos sólidos, os alunos vão provar a conjetura formulada. Dos trabalhos apresentados pelos alunos, destaca-se a prova apresentada por Júlia (Figura 60).

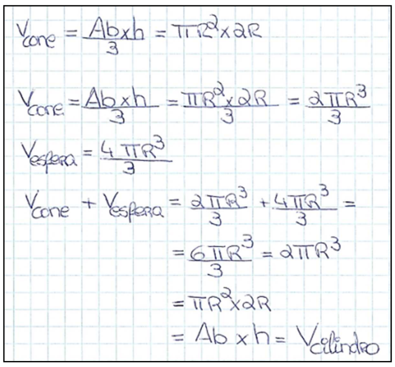


Figura 60: Prova da relação entre os volumes do cone, do cilindro e da esfera com o raio o dobro da altura por Júlia (RE-T11)

Com base nas expressões dos volumes dos sólidos considerados, a aluna aplica a relação estabelecida entre o raio da base dos recipientes, cone e cilindro, e a sua altura no desenvolvimento do seu raciocínio. Júlia recorre a procedimentos algébricos para, através de transformações de expressões, chegar à expressão pretendida. A aluna mostrou compreender o processo de prova que adotou e aplicou adequadamente os conceitos que aprendeu. Porém, nem todos os alunos apresentaram argumentos válidos e convincentes que sustentem as conjeturas que formulam, como é o caso da prova apresentada por Mara (Figura 61).

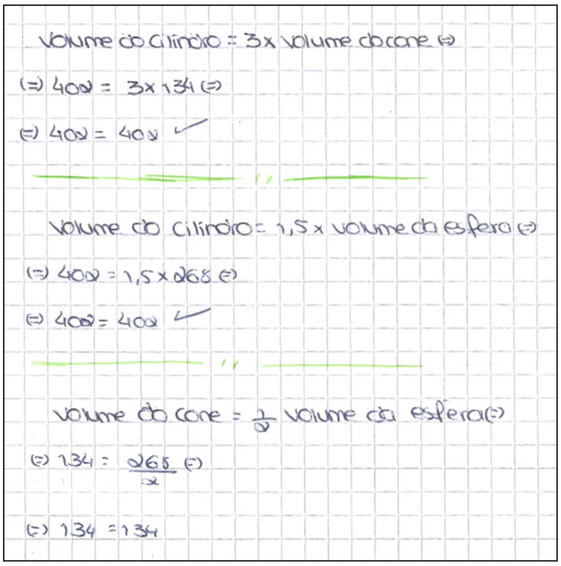


Figura 61: Prova da relação entre os volumes do cone, do cilindro e da esfera com a altura o dobro do raio por Mara (RE-T11).

Apesar de, na relação entre o seno e o cosseno de um ângulo agudo, Mara ter conseguido iniciar um processo de prova, a aluna prova a relação que estabeleceu entre os volumes do cone, do cilindro e da esfera, recorrendo a um único caso particular. Tal situação parece advir do facto de, no primeiro caso, a prova ter sido explorada e experimentada por descoberta, através das interações promovidas na sala de aula, contrariamente ao segundo caso, onde a desenvolvimento de interações na sala de aula não foi tão significativo. Deste modo, as interações entre os vários intervenientes na sala de aula parecem constituir um estímulo importante para os alunos descobrirem a origem dos resultados ou das situações e para fundamentarem os raciocínios seguidos, dando, assim, início ao processo de prova.

4.2. Perspetivas sobre a aprendizagem da Geometria com recurso aos ambientes de geometria dinâmica e a tarefas de natureza exploratória e investigativa

Início da experiência de ensino. Das experiências realizadas durante o percurso escolar, os alunos em geral manifestam uma opinião favorável ao uso dos ambientes de geometria dinâmica e a tarefas de natureza exploratória e investigativa na aprendizagem da Geometria, como é evidenciado nas descrições dos seis alunos que compõem este estudo.

Mara revela ter algum conhecimento sobre o GeoGebra, embora este recurso não seja um método a que usualmente recorra para a aprendizagem da Geometria. A aluna encara a Geometria como uma área onde é possível construir objetos geométricos e calcular as suas áreas e volumes, sendo que a preferência para a sua aprendizagem recai sobre construções geométricas com régua e compasso. Apesar do contacto com o computador, o GeoGebra e o quadro interativo multimédia ser esporádico dentro ou fora da sala de aula, tal situação não impede que Mara reconheça contributos deste recurso para a aprendizagem da Geometria, "Ajuda-nos a construir objectos geométricos com várias ferramentas do programa" (Q).

Também Diana considera a Geometria como "a construção de objectos geométricos" (Q) que são visíveis em situações do dia-a-dia, tais como "a construção de casas (...) e campos de futebol" (Q). A aluna indica as construções geométricas com régua e compasso como um dos métodos da sua preferência para a aprendizagem da Geometria, em paralelo com a resolução de problemas sobre situações reais e a realização de trabalhos em grupo/pares. Apesar de ter usado ocasionalmente o GeoGebra nas atividades de aprendizagem da Geometria, Diana reconhece o seu contributo na aprendizagem da Geometria – "acho que incentivam mais os alunos, a interessar-se sobre esta matéria" (Q).

Para Anita, a Geometria não constitui uma área da sua preferência já que, para a aluna, resume-se a "construções (...) a geometria encontra-se em tudo o que nos rodeia (...) na construção de edifícios" (Q). No entanto, expressa uma opinião favorável relativamente ao uso de programas de geometria dinâmica, indicando as construções geométricas com programas de geometria dinâmica, em paralelo com a realização de trabalhos em grupo/pares e a discussão das diferentes estratégias seguidas, como os métodos da sua preferência para a aprendizagem da Geometria.

Filipa valoriza a Geometria relativamente às outras áreas da Matemática por considerar "um meio de representar figuras com precisão (...) podemos 'desenhar' e não lidamos só com números" (E). A aluna indica o recurso a manipuláveis como uma das estratégias de ensino mais marcantes no estudo da geometria dos anos de escolaridade transatos. Nesse sentido, Filipa opta pelas construções geométricas com programas de geometria dinâmica, pela realização de trabalhos em grupos/pares e pela resolução de tarefas exploratórias e investigativas como os métodos preferenciais para a aprendizagem da Geometria. Para a aluna, os ambientes de geometria dinâmica, juntamente com tarefas de carácter exploratório de investigativo, constituem, assim, um recurso importante para a compreensão dos tópicos relacionados com esta área da Matemática.

Pela forma como Nélia responde às questões relacionadas com os ambientes de geometria dinâmica, parece que o seu uso nas atividades matemáticas foi irregular. Tal facto parece ter influenciado a forma como a aluna vê a Matemática, em geral, e a Geometria, em particular – "para mim, estudar matemática resume-se a pegar numa folha, calculadora, lápis e borracha e resolver exercícios" (Q). A Geometria é encarada por Nélia como "um tema onde se desenha imagens/objectos, aplica-se escalas, etc, o que não é muito divertido de se estudar" (Q). Desta forma, Nélia destaca a importância da Geometria na compreensão e resolução de situações do quotidiano quando "se é arquitecto ou se tem uma profissão onde é necessário desenhar com rigor, fazer projectos e aplicá-los em construções, etc." (Q). Esta visão limitativa sobre temas matemáticos justifica as escolhas que faz quanto aos métodos preferenciais para a aprendizagem da Geometria, onde destaca "a exposição da matéria pelo professor, as construções geométricas com régua e compasso e as construções geométricas com programas de geometria dinâmica". Esta última opção parece dever-se a um breve contacto que teve com o GeoGebra nas aulas de Geometria, em anos anteriores, e de o mesmo lhe ter facilitado as construções realizadas.

Júlia vê a Geometria como uma forma de "representação de figuras no plano e no espaço". A aluna reconhece a importância desta área da Matemática quando refere que a Geometria permite "conhecer e associar figuras no plano a objectos do dia-a-dia, por exemplo associar uma mesa a um paralelepípedo." (Q). Júlia revela conhecer os softwares GeoGebra e Graph, o que lhe permitiu alcançar "novas perspectivas da representação de rectas e de figuras." (Q). Relativamente aos diferentes métodos para aprender Geometria, Júlia valorizou a resolução de problemas sobre situações reais, as construções geométricas com régua e compasso assim como a utilização de materiais manipuláveis.

Final da experiência de ensino. Após a implementação desta experiência de ensino, grande parte dos alunos indica vantagens no uso dos ambientes de geometria dinâmica e na realização de tarefas de natureza exploratória e investigativa quando se aborda o tema da Geometria.

Mara partilha a mesma opinião, quando indica vantagens na metodologia adotada na sala de aula. Para Mara, o uso do GeoGebra estimulou a sua aprendizagem e permitiu-lhe obter os resultados de uma forma mais rápida, desenvolvendo as suas capacidades geométricas. No que diz respeito às tarefas exploratórias e investigativas, a aluna indica que este tipo de atividade, subdividida em várias fases (apresentar, justificar, discutir e defender as conclusões) permite "sermos nós a chegarmos às ideias" (E). Mara salienta a tarefa referente às propriedades geométricas em circunferências como uma das suas escolhas por, essencialmente, ter atingido um trabalho mais autónomo. Para isso, o recurso ao computador e ao GeoGebra teve um contributo fundamental na medida em que "me permitiu analisar as figuras, compreender conceitos e relações geométricas, formular, testar e explorar conjeturas e justificar procedimentos matemáticos" (E). No entanto, Mara destaca algumas dificuldades sentidas na realização das tarefas, em particular na formulação e prova de conjeturas. A aluna mostra que a observação e discussão dos resultados com os seus colegas contribuíram para que conseguisse superar as suas dificuldades.

Após a experiência de ensino com o recurso a ferramentas tecnológicas na sala de aula, Diana conclui que:

> Com o uso do GeoGebra e com as tarefas que resolvemos, achei mais fácil compreender as matérias... mais rápido e prático de chegar ao resultado que queríamos... apesar de, por vezes, não entender bem os objetivos das tarefas e ter dificuldades em formular e provar conjeturas! (E)

Diana atribui um papel de destaque ao computador e ao GeoGebra quando se analisam caraterísticas e propriedades de figuras e se realizam transformações geométricas com vista à compreensão de conceitos e de relações geométricas e à justificação de procedimentos matemáticos. São também indispensáveis para a formulação e exploração de conjeturas, assim como para o teste de casos, mas tende a considerar que o seu uso é mais útil quando a exploração é realizada em conjunto.

Ao ser confrontada com todo o percurso que efetuou ao longo da experiência de ensino, Anita realça a diferença entre as aulas em que usou o computador e o GeoGebra e as aulas em que não usou estes recursos, destacando que:

> Vi uma grande diferença, principalmente porque ao fazermos as construções das figuras e ao movermos um ponto, vamos obter novos valores... e se movimentarmos outra vez, vai-nos dar outro ponto, ..., e mais outro, e assim sucessivamente, até termos muitos casos para podermos fazer a conjetura e depois a prova, ... aí é que foi mais difícil! (E)

A possibilidade que Anita teve de observar as provas realizadas pelos seus colegas em tarefas anteriores, suscitou um estímulo para, autonomamente, a aluna procurar iniciar o seu processo de prova no trabalho de investigação sobre o tópico de Geometria da sua preferência, intitulado *Investigando volumes*. Comparativamente com a opinião manifestada no início da experiência de ensino, Anita passou a valorizar as construções geométricas com programas de geometria dinâmica como ferramentas para analisar características e propriedades de figuras, e para compreender conceitos e relações geométricas.

Da análise que faz às tarefas realizadas com recurso ao GeoGebra, Filipa destaca vantagens no seu uso: "facilitou a aprendizagem, porque com a visualização e o facto de sermos nós próprios a fazer as coisas e a mover as figuras faz com que entendamos melhor o que se pretende em cada uma das tarefas." (E). Para além de realçar este ponto, enumera ainda benefícios no uso de tecnologias, particularmente para a formulação, teste e exploração de conjeturas e a possibilidade de realizar transformações geométricas em figuras sem que as mesmas se destruam. Quanto às tarefas propostas para esta experiência de ensino, a aluna destaca as tarefas de investigação como as da sua preferência por poder realizá-las de um modo mais autónomo e envolver figuras planas. Mais uma vez, a prova de conjeturas é indicada como a maior dificuldade sentida.

Nesta fase da experiência de ensino, Nélia reconhece já benefícios na realização de tarefas exploratórias e investigativas com recurso às tecnologias informáticas, o que lhe permite efetuar uma avaliação positiva do seu uso:

> Este método de trabalho estimulou a minha aprendizagem da Geometria pois os assuntos que iam sendo tratados ficaram mais interessantes e deixou-nos com vontade de trabalhar esses temas. Também notei muitas diferenças nas aulas em que usámos o computador e nas aulas em que não usámos o computador e

> o GeoGebra. Quando usámos, a turma estava mais entusiasmada, aplicada e interessada, o que não acontecia nas aulas normais. (E)

Nélia reconhece que o uso do computador e do GeoGebra desperta uma maior motivação para a aprendizagem da Geometria do que nas 'aulas normais'. Essa motivação resulta da oportunidade que teve com o GeoGebra de "manipular os objetos construídos, analisar caraterísticas e propriedades de figuras e formular, testar e explorar conjeturas". Além destes factores, a aluna salienta a rapidez e o rigor com que se realizam as construções geométricas. Quanto às dificuldades sentidas, Nélia aponta, também, para a prova de conjeturas na resolução de tarefas.

Através da realização de tarefas com recurso ao GeoGebra, Júlia refere vantagens no seu uso e acrescenta que nas aulas em que não foi adotada esta metodologia "a compreensão de certos exercícios não era tão rápida" (E) por poder "manipular os objetos construídos, compreender conceitos e relações geométricas, analisar caraterísticas e propriedades de figuras elaborar estratégias de resolução, ser mais autónomo refletir sobre os objetivos das tarefas" (E). Indica, também como única dificuldade sentida, a prova de conjeturas

4.3. Perspetivas sobre a argumentação

Início da experiência de ensino. Nesta fase da experiência de ensino, os alunos em geral, manifestam uma ideia desajustada do significado de argumentação matemática, como é comprovado nos registos dos alunos que integram este estudo.

A opinião que Mara tem acerca de argumentar uma afirmação matemática resume-se a "dar uma opinião, ou até explicar essa afirmação e aprender alguma coisa" (Q). A aluna valoriza a apresentação e discussão das suas conclusões para, assim, ter a oportunidade de também poder "ouvir os meus colegas e aprender alguma coisa" (Q). A discussão e o debate de conclusões perante a turma são assumidos por Mara como um complemento da aprendizagem, com a finalidade de a ajudar a compreender o tópico debatido. Quando questionada sobre a forma como apresenta o seu raciocínio, Mara expressa a sua preferência pela produção escrita para poder "escrever e dar ao professor para corrigir." (Q). Assim, Mara justifica a escolha que faz pelo receio do seu raciocínio não ser aceite coletivamente, o que indicia uma grande insegurança por parte da aluna.

Diana perspetiva a argumentação como sendo um meio de "comentar uma afirmação e falar sobre ela." (Q). A aluna apresenta uma visão simplificada desta ação o que sugere que, durante o seu percurso escolar, tenham sido escassas as atividades onde se tenha desenvolvida a capacidade de argumentar as suas ideias. Diana escolhe a forma oral para apresentar os seus raciocínios em detrimento da forma escrita por achar "que é mais fácil para a outra pessoa entender o meu raciocínio." (Q). A oportunidade de discussão e de debate das conclusões perante a turma parece ser, para Diana, um fator importante para a sua compreensão matemática "as dúvidas de uns podem ser as dúvidas de outros." (Q).

A opinião que Anita tem em relação à atividade de argumentação reduz-se a "explicar e raciocinar" (Q). A aluna expressa valorizar a discussão e o debate de conclusões por "também gostar de ouvir as conclusões dos meus colegas e, desse modo, "contribuir para uma melhor ideia" (Q). Diana manifesta, também, preferência por apresentar os seus raciocínios de forma oral, por achar que lhe facilita a apresentação.

Pela forma como exprime a sua opinião sobre a atividade de argumentar uma afirmação matemática, "ver se [essa afirmação] está correta" (Q), Filipa indicia que durante o seu percurso escolar não reconheceu a necessidade de justificar e debater as afirmações, que encara como um meio de "ver se me expliquei correctamente." (Q). A aluna considera, assim, importante discutir e debater as conclusões perante a turma "para trocar ideias" (Q) e valoriza a forma oral de apresentação dos raciocínios por ser "mais fácil de nos expressarmos." (Q).

Ao recordar as experiências por que passou na sala de aula, Nélia revela não costumar apresentar e discutir as suas conclusões perante a turma, porque "não mo é exigido." (Q). Contudo, esta situação não a impede de reconhecer a importância da discussão e do debate das conclusões perante a turma, onde reforça que se pode "aprender com os próprios erros". Nas opiniões que exprime, Nélia entende que argumentar matematicamente é "dizer o que achamos, se concordamos ou não e porquê e apresentar justificações para tal."(Q).

Para Júlia, as suas atividades escolares anteriores a esta experiência de ensino evidenciam o hábito de apresentar e discutir as suas conclusões com os colegas. A sua preferência para comunicar as suas conclusões recai na forma escrita, por "ter mais facilidade nesse modo de expressão" (Q). Considera importante discutir as suas conclusões por entender que "quantas mais resoluções diferentes e certas nos apresentarem, mais aprendemos" (Q). Deste modo, Júlia descreve a argumentação sobre uma afirmação matemática como a forma de "saber apresentar uma crítica e uma opinião acerca do assunto abordado" (Q), o que indicia que reconhece a sua importância na aprendizagem.

Final da experiência de ensino. Nesta fase, ganha relevância o significado que os alunos, em geral, conferem às atividades argumentativas na sala de aula, com recurso a um ambiente de geometria dinâmica.

Mara revela que durante a implementação das tarefas que integram esta experiência de ensino foram criados momentos de discussão, o que considera vantajoso por entender que "ao apresentar as nossas conclusões aos nossos colegas fazemos com que a turma tenha novas ideias ... ou vice-versa" (E). A aluna manifesta preferência pela apresentação dos seus raciocínios de forma escrita, permitindo-lhe construir e ordenar o seu raciocínio ao seu ritmo para, posteriormente, Mara o apresentar oralmente à turma. Mara reconhece a prova de conjeturas como a maior dificuldade sentida, ideia partilha pela maior parte dos alunos. A aluna valoriza o tipo de atividades desenvolvidas e o contributo do GeoGebra como promotores da formulação de conjeturas e da produção de provas: "antes eu não percebia muito bem o significado da palavra [prova], mas consegui superar... porque com o GeoGebra conseguimos encontrar informações para conjeturarmos e até provarmos perante a turma" (E). Quanto aos momentos de discussão fomentados na sala de aula, a aluna considera-os fundamentais para o seu desenvolvimento matemático: "na discussão entre a turma, nós conseguimos saber a opinião de cada aluno e se juntarmos, chegamos a alguma conclusão." (E). Argumentar matematicamente é, para Mara, "tirar informações de vários tipos de recursos, juntar tudo num papel e justificar à turma, tanto por cálculos como por palavras nossas." (E). Ao chegar a esta fase da experiência de ensino, Mara vê a argumentação noutra perspectiva, encara-a como um conjunto de explicações que, depois de estruturadas, vão ser aceites ou rejeitadas pela turma.

Diana reconhece a necessidade de se proporcionarem momentos de discussão na sala de aula por ser "a justificar as nossas conclusões, a discutir e a defender as nossas ideias ... que chegamos a alguma conclusão" (E). A aluna manifesta preferência pela apresentação oral dos seus raciocínios, em detrimento do formato escrito. Quando confrontada com situações onde tem de provar um resultado, Diana depara-se com dificuldades em "perceber aquilo que é dado daquilo que é pedido." (E). Para Diana, os momentos de discussão na sala de aula são fundamentais para o desenvolvimento matemático porque "motivam os alunos e ajudam a interpretar as questões e resolvê-las mais facilmente. Por vezes, pensamos que estamos a fazer bem, mas quando nos damos conta, estamos errados porque não soubemos entender bem a questão." (E). A aluna evidencia a interpretação das questões como um aspeto determinante no desenvolvimento do raciocínio e que pode ser detetado quando são criados momentos de discussão. Diana indica vantagens do uso do GeoGebra na formulação de conjeturas quando reconhece que conseguia “muitos casos de uma forma rápida.” (E). Por fim, Diana define argumentação como uma oportunidade de “discutir informações, justificar-me perante os meus resultados e defender as minhas ideias.” (E).

Depois de ter feito um balanço do percurso que efetuou desde o início desta experiência de ensino, Anita valoriza os momentos de discussão e de debate que foram criados na implementação das tarefas, onde realça a importância de apresentar, justificar e defender as suas conclusões perante a turma quando refere que é uma maneira de “percebermos todos os pontos de vista e vermos vários caminhos para chegarmos a uma só resposta.” (E). Apesar de continuar a manifestar dificuldade em apresentar o raciocínio por escrito, a aluna reconhece que “no final temos de apresentar o raciocínio por escrito e eu não sou muito boa a escrever.” (E). No entanto, aponta a produção da prova de conjeturas como a maior dificuldade sentida, “o facto de não poder seguir-me só por um exemplo e ter que o fazer de forma geral” (E) constitui para Anita uma aptidão que ainda está por desenvolver. Para a aluna, a possibilidade de poder discutir as suas conclusões com os colegas, apoiadas pelas potencialidades de um ambiente de geometria dinâmico, constituem contributos fundamentais para o desenvolvimento da capacidade de produzir argumentos matemáticos que sustentem as conclusões a que chega. Por fim, Anita define argumentação como sendo “uma forma de explicarmos situações com fundamento em relações matemáticas e com base em regras matemáticas e de justificarmos, com base na Matemática, afirmações feitas, validando-as.” (E)

Com a oportunidade que teve de realizar atividades com recurso a um ambiente de geometria dinâmica e a tarefas de natureza exploratória e investigativa, Filipa evidencia uma perspectiva sobre a argumentação matemática diferente da que tinha apresentado antes desta experiência de ensino. A aluna valoriza os momentos de discussão que ocorreram durante a implementação das tarefas e reconhece o contributo do GeoGebra para a formulação e prova de conjeturas, que identifica como elementos fundamentais para o desenvolvimento da capacidade argumentativa dos alunos:

> Os momentos de discussão possibilitaram que pudéssemos defender as ideias formuladas, explicá-las aos outros e também entender melhor as coisas. Com o GeoGebra, podemos visualizar as nossas construções, movimentar pontos para obter vários exemplos e podermos fazer conjeturas. Para as provas não vi grande necessidade de o usar, mas também tive dificuldade em provar porque foi difícil utilizar o caso geral para prova [...] eu muitas vezes usava um caso específico. (E)

Filipa reconhece a vantagem do uso de um ambiente de geometria dinâmico e dos momentos de discussão e debate de ideias como um contexto propício para o seu desenvolvimento matemático. Revela, ainda, a preferência de ambas as formas, oral e escrita, de apresentar os seus raciocínios porque “complementam-se, facilitando a explicação.” (E). Quanto à argumentação, Filipa destaca aspetos que considera fundamentais para a sua caracterização, tais como “a discussão de ideias, a explicação de afirmações e a prova de raciocínios matemáticos” (E).

Após a implementação desta experiência de ensino, Nélia dá um novo significado à argumentação matemática. Nesse sentido, a aluna evidencia reconhecer o contributo dos ambientes de geometria dinâmica para a formulação e prova de conjeturas, no que diz respeito ao “rigor das construções”, à “simplificação do trabalho realizado” e à “possibilidade de mover um ponto e a figura aumentar ou diminuir mas manter a mesma forma” (E). Nélia valoriza, também, os momentos onde os alunos apresentam, justificam e defendem as conjeturas formuladas por “porem à prova a nossa capacidade de argumentação e a nossa capacidade de ‘persuadir’ os outros de que tínhamos razão.” (E). Neste contexto, a aluna destaca a sua preferência pela expressão oral por considerar “mais fácil de explicar” (E). Nélia revela ter sentido dificuldade em provar conjeturas, no que concerne à “forma generalizada com que tinham de trabalhar” (E). Como forma de superar esta dificuldade, Nélia reforça a contribuição das discussões e debates promovidos na sala de aula onde “somos constantemente desafiados a ‘persuadir’ os outros, utilizando os cálculos e teoremas” (E). Ao reconhecer a importância das situações argumentativas que emergem de atividades de natureza exploratória e investigativa desenvolvidas em ambientes de geometria dinâmica, Nélia confere um novo significado à atividade argumentativa na sala de aula: “Para mim, argumentar matematicamente é apresentar os nossos raciocínios e convencer os outros através da utilização de linguagem matemática, teoremas e cálculos, que o nosso raciocínio está correto.” (E).

Ao analisar o percurso que efetuou no decorrer da experiência de ensino, Júlia reflete sobre as atividades que desenvolveu. A aluna exprime a importância de apresentar, justificar e defender as conclusões perante a turma porque “permitiu-me ouvir diferentes conclusões e novas formas de raciocínio e, também, expor os meus pontos de vista e ser corrigida quando estava errada” (E). Embora a aluna consiga expressar as suas ideias da forma escrita e oral, a preferência de Júlia recai para a forma escrita. Relativamente a dificuldades sentidas na prova de conjeturas, Júlia indica a dificuldade em “compreender as relações [matemáticas] que se podem formar com os elementos dados nas questões” (E). A aluna reconhece que dos momentos dedicados à discussão de questões emergem “novas formas de raciocínio e novas conclusões” (E) que considera fundamentais para o seu desenvolvimento matemático. Para a formulação de conjeturas e de provas, Júlia destaca o contributo que os ambientes de geometria dinâmica proporcionam, apoiados por tarefas de natureza exploratória e investigativa:

> O GeoGebra permite-nos construir figuras com rapidez e rigor, permite mover a figura sem a alterar, embora possam ser modificadas as medidas dos lados, dos ângulos ou dos arcos, mas mantém-se a mesma forma e, assim, conseguem-se muitos outros novos casos para procurar regularidades e identificar relações entre os elementos da figura. (E)

Para Júlia, a ação de argumentar matematicamente uma afirmação é encarada como “um conjunto de explicações e justificações matemáticas que resultam dos momentos de discussão e debate das conclusões apresentadas” (E).

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

O presente estudo procura analisar o contributo dos ambientes de geometria dinâmica, mais especificamente, do programa computacional GeoGebra, e do quadro interativo para potenciar a capacidade de argumentação em alunos do 9.º ano no estudo da Geometria. Para esse efeito, procurou-se sistematizar os aspetos mais pertinentes das atividades desenvolvidas pelos alunos que compõem o caso. Não se tenciona realizar comparações entre os alunos que integram este estudo de caso, mas antes identificar e compreender o resultado das atividades matemáticas dos alunos quando formulam, testam e provam conjeturas geométricas e quando são confrontados com a necessidade de justificarem e defenderem os seus raciocínios perante o grupo turma.

5.1. Síntese do estudo

O crescente progresso da sociedade da informação tem vindo a suscitar uma reflexão das práticas escolares, bem como uma adaptação da escola às novas exigências da sociedade. O uso das TIC como um suporte ao ensino da Matemática tem, assim, fomentado a criação de ambientes apropriados ao desenvolvimento de uma aprendizagem mais significativa e profunda da Matemática, permitindo, deste modo, ao aluno ter uma participação mais ativa na construção da sua aprendizagem. Tal facto tem desencadeado, segundo Castilho (2008), uma transformação profunda nas práticas pedagógicas das salas de aula. No caso específico da Geometria, os ambientes de geometria dinâmica são frequentemente apontados como ambientes propícios e facilitadores de uma aprendizagem significativa, servindo como motivação para o seu estudo. Assim, emerge a questão sobre quais os recursos mais adequados para estimular uma abordagem mais indutiva e experimental da Matemática. Tanto as indicações metodológicas do Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007) como a linha de pensamento de alguns autores, tais como Hirschhorn e Thompson (1996) e Healy e Hoyles (2001), apontam os recursos tecnológicos como promotores do desenvolvimento dos raciocínios dos alunos, onde, conjuntamente com a exploração de atividades, permitem desenvolver as capacidades dos alunos refletirem, confrontarem ideias, conjeturarem, concluírem e registarem os resultados do trabalho desenvolvido.

Assim, este estudo apresenta o objectivo de compreender como os alunos desenvolvem a sua capacidade argumentativa com recurso às TIC e a tarefas de natureza exploratória e investigativa no estudo do tema de Geometria. Para isso, procura-se dar resposta às seguintes questões:

(1) Como argumentam os alunos as suas ideias e discutem as argumentações de outros? Que dificuldades manifestam em argumentar as suas ideias?
(2) Que perspetivas têm os alunos sobre a argumentação matemática e a aprendizagem da Geometria com recurso a ambientes de geometria dinâmica e a tarefas de exploração e de investigação?

Mediante a problemática do estudo, onde foi observada uma situação particular, a investigação foi orientada por uma abordagem de natureza qualitativa com um design de estudo de caso. A recolha de dados foi efectuada nas aulas de Matemática de uma turma de 9º ano, de uma Escola Básica com 2.º e 3.º ciclo, do distrito do Porto, constituída por 27 alunos com idades compreendidas entre os 13 e os 15 anos, onde trabalharam, num total de dezasseis blocos de noventa minutos, tópicos do tema de Geometria – Circunferência e Polígonos. Rotação; Trigonometria do triângulo retângulo e Espaço – Outra visão. O trabalho de campo foi organizado em grupos de dois alunos para a exploração das tarefas e, posteriormente, em grande grupo para apresentação das conclusões obtidas nas suas explorações, com espaço para a discussão em grande grupo. As tarefas foram construídas em conformidade com as atuais orientações curriculares e foram adaptadas para a utilização do Geogebra e os alunos tiveram de realizar construções, explorar figuras e as suas relações, formular e testar conjeturas e realizar pequenas provas, onde adquiriram vocabulário específico e aplicaram conceitos aprendidos. Na sua preparação houve não só a preocupação de ir ao encontro do programa de matemática do ensino básico como também de serem progressivas, tanto ao nível de dificuldade como ao facto de ter por base conceitos adquiridos em tarefas anteriores.

Para responder à primeira questão de investigação foi necessário relacionar os três aspetos da argumentação matemática – formulação, teste e prova de conjeturas – nos diferentes momentos em que a informação foi recolhida. Para responder à segunda questão foi necessário analisar o que os alunos pensavam sobre a argumentação matemática e sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria com recurso ao Geogebra e a tarefas de natureza exploratória, antes e depois da experiência de ensino. Para isso, foram selecionados, após a experiência de ensino na aprendizagem do tema Geometria, seis alunos com níveis de desempenho diferenciados: dois com desempenho bom (Júlia e Nélia), dois com desempenho suficiente (Anita e Filipa) e dois alunos com desempenho insuficiente (Diana e Mara) — que constituíram o estudo de caso. Os dados das atividades destes alunos foram recolhidos em três momentos distintos – antes da experiência de ensino, durante da experiência de ensino e no final da experiência de ensino. A análise de dados centrou-se nas diversas técnicas de recolha de dados: questionário, entrevista, observação e análise documental (onde inclui registos escritos pelos alunos e transcrições das aulas gravadas em formato áudio-vídeo).

Foi através das interações fomentadas na sala de aula, do recurso ao Geogebra e da produção das suas conclusões que os alunos que participaram neste estudo foram "levados a expor e clarificar os seus pontos de vista, as suas compreensões, reavaliando ideias, numa perspectiva de partilha e negociação de significados", tal como afirma Piteira (2000, p. 217). O ambiente de geometria dinâmica, Geogebra, e as tarefas de natureza exploratória e investigativa tiveram um papel fundamental na construção do raciocínio matemático dos alunos. O simples facto de os alunos serem motivados a pensar e refletir sobre as suas ações de modo a poder estabelecer e compreender relações geométricas, estimula os alunos a pensar e a trabalhar a Geometria (Noss e Hoyles, 1994).

5.2. Conclusões do estudo

Neste subcapítulo são apresentadas as principais conclusões tendo em conta três aspetos que emergem das questões de investigação: (1) aspectos da argumentação matemática; (2) perspectivas sobre a aprendizagem da Geometria com recurso aos ambientes de geometria dinâmica e a tarefas de natureza exploratória e investigativa; (3) perspectivas sobre a argumentação. Inicia-se com a análise do desempenho dos seis alunos em relação a aspetos da argumentação matemática, tendo em vista os três momentos da experiência de ensino, e com a sustentação teórica elaborada. Posteriormente é analisada a estratégia adotada e os recursos utilizados para a sua consecução e, por fim, é efetuada uma análise da perspetiva dos alunos considerando as práticas que tinham antes da experiência de ensino e o resultado do trabalho desenvolvido ao longo da experiência de ensino, assim como, a importância que estas tiveram no desenvolvimento do seu raciocínio matemático.

5.2.1. Aspetos da argumentação matemática

Formulação e teste de conjeturas. No início desta experiência de ensino, os alunos reconhecem a importância que as representações matemáticas assumem na procura de regularidades. No entanto, apresentam dificuldades em efetuar a distinção entre uma observação particular de uma conjetura. Dos alunos que consegue generalizar as situações apresentadas nas tarefas, apenas Júlia evidencia compreender a importância das letras na tradução dos raciocínios. A apresentação dos resultados dos alunos à turma constituiu um momento importante para a verificação das relações encontradas, como sustenta Pedemonte (2002). A discussão sobre os resultados ajudou na clarificação de algumas conjeturas com pouco sentido crítico, como a apresentada por Anita: "a amplitude do ângulo é 90º porque é um ângulo reto" (NC-10.02.2011). Também Filipa, nesta fase, revela ausência de análise crítica quando transfere relações de um tópico matemático a outros tópicos, como exemplifica a afirmação "A soma dos ângulos inscritos numa circunferência é 180°" (RE-T3). Os seis alunos que integram este estudo não revelaram dificuldades na construção de figuras, no GeoGebra, na sua exploração e na representação dos valores obtidos, através de tabelas. No entanto, quando foram confrontados com a formulação de conjeturas, notaram-se algumas dificuldades. Em situações concretas, Filipa e Mara mostraram perceber as relações que estabeleceram entre os elementos em estudo, por exemplo quando mostram a existência de uma relação entre a amplitude de uma circunferência e a amplitude de cada um dos ângulos formados obtidos por uma divisão em oito partes iguais. Na generalização para n partes iguais, as alunas revelaram não distinguir o significado da letra n em relação à amplitude da circunferência. De um modo geral, no início da experiência de ensino, os alunos conseguiram, ao seu ritmo, realizar as construções solicitadas e, com a possibilidade de arrastamento de uma figura num ambiente de geometria dinâmica, obter novos valores, representá-los numa tabela e explorá-los para a procura de regularidades (Laborde, 1997, 1998), o que os motivou para se iniciarem na formulação de conjeturas das relações estudadas. Aos poucos, foram-se apercebendo da relevância que a construção de uma diversidade de situações tinha nas justificações que apresentavam para convencerem os outros das suas convicções.

Durante a experiência de ensino, alguns alunos mostraram novas estratégias de resolução que iam emergindo das interações promovidas na sala de aula e identificaram a consequência que as premissas têm nas conclusões que tiram. Diana, através destas explorações revelou ter adquirido destreza técnica com o manuseamento das caraterísticas do

GeoGebra, o que se refletiu na motivação para a procura de regularidades. Na formulação de conjeturas nem sempre os alunos sentiram necessidade de justificar as suas afirmações, como é exemplificado por Júlia. Após ter sido questionada sobre as razões que a levaram a relacionar as rectas que passam pelo centro de uma circunferência com os eixos de reflexão, a aluna articulou conhecimentos sobre diferentes conceitos e relações matemáticas, derivando numa justificação para a relação que tinha estabelecido. No entanto, alguns alunos revelaram ainda ter dificuldades em encadear os dados que são fornecidos no enunciado, de modo a obter a conclusão que se pretende, como se verificou numa das resoluções apresentadas por Anita: "quando temos uma reta tangente num ponto da circunferência quando se encontra com um raio forma sempre um ângulo de 90°" (RE-T5). Nesta fase, Nélia mostra ter já adquirido convicção nas conclusões a que chega, bem como nas justificações que apresenta: "a área do quadrado maior é o dobro da área do quadrado menor... experimentei com outras medidas e dá sempre igual" (RE-T7). Júlia revelou, ainda, ter desenvolvido a capacidade de identificar argumentos matemáticos quando distingue os exemplos considerados dos argumentos matemáticos gerais. A aluna reconhece e apresenta generalizações matemáticas, exemplos e contraexemplos de uma determinada afirmação. Os alunos mostraram assim ter desenvolvido aptidão para procurar regularidades nas explorações que realizaram, testarem casos e apresentarem já algumas justificações, que, de acordo com Yackel (2001) e Whitenack e Yackel (2008), são aspectos promotores do desenvolvimento do raciocínio matemático.

No final da experiência de ensino, os alunos encontravam-se já familiarizados tanto com o ambiente de geometria dinâmico como com o tipo de tarefas que se foram desenvolvendo, sendo notória uma diversificação das estratégias de resolução. Os momentos de discussão na turma revelaram-se importantes para os alunos por terem tido a possibilidade de partilhar as suas ideias e raciocínios, o que, de acordo com Coelho e Saraiva (2002), leva os alunos a construírem o seu conhecimento. Os alunos, nesta fase, não apresentaram dificuldades em procurar regularidades, formular conjeturas e justificar os seus argumentos. Nas discussões fomentadas na sala de aula, verificaram-se algumas situações em que as conjeturas foram questionadas pelos participantes nessas interações. De acordo com de Viiliers (2003), os alunos são levados a reformular as suas respostas ou a procurar novos argumentos. Júlia destaca-se dos restantes alunos por ter desenvolvido a capacidade de identificar argumentos matemáticos quando distingue os exemplos considerados dos argumentos matemáticos gerais. Segundo

Jones (2000), os ambientes de geometria dinâmica funcionam como mediadores das interpretações efetuadas pelos alunos.

Prova de conjeturas. No início desta experiência de ensino, a forma como os alunos abordaram a prova matemática revelou pouca familiaridade com processos desta natureza. Os alunos conferiram demasiada ênfase à prova como uma verificação indutiva/experimental em detrimento da sua vertente dedutiva. Nesta fase, os alunos ainda não sentiram necessidade de procurar argumentos dedutivos como uma tentativa de esclarecer um raciocínio, o que, de acordo com de Villiers (2003), inviabiliza a sistematização do conhecimento matemático.

No decorrer da experiência de ensino, Júlia e Diana encararam a prova não como um produto acabado, mas, e de acordo com Loureiro e Bastos (2002), como uma atividade matemática onde destacaram a procura de argumentos válidos e convincentes como uma forma de explicação e descoberta do próprio raciocínio. No entanto, Mara conferiu demasiada ênfase à prova como uma mera confirmação de casos particulares, em detrimento da tentativa de caraterização de um raciocínio, justificado por um resultado ou padrão. A compreensão e o reconhecimento da necessidade da prova como forma de sistematizar o conhecimento matemático parecem, assim, ainda um pouco distantes para parte dos alunos.

No final da experiência de ensino, alguns alunos continuaram a apresentar algumas dificuldades em produzirem provas. Apesar disso, a prova começou a ser aceite pela maioria dos alunos como uma atividade matemática. Diana e Mara começaram a estabelecer relações entre o que era dado e o que se pretendia provar. Por sua vez, Nélia e Júlia recorreram a vários tipos de representações para clarificar aspetos do seu raciocínio, o que evidencia que as alunas conseguiram estabeleceram conexões com os conceitos aprendidos. Já Diana e Filipa não conseguiram apresentar argumentos válidos e convincentes para sustentar conjeturas que formularam. De acordo com Mason et al. (1982), justificar uma conjetura não se tem mostrado tarefa fácil, dado que os alunos continuam a manifestar dificuldades em estabelecer uma ligação entre o que se sabe e o que se pretende justificar ou provar.

5.2.2. Perspetivas sobre a aprendizagem da Geometria com recurso aos ambientes de geometria dinâmica e a tarefas de natureza exploratória e investigativa

No início da experiência de ensino, a generalidade dos alunos revelou curiosidade em explorar tarefas de natureza exploratória e investigativa recorrendo a um ambiente de geometria dinâmica, o GeoGebra. Mara não constituiu exceção, quando atribuiu algumas qualidades a este ambiente computacional. Diana não partilha da mesma opinião quando indica as construções geométricas com régua e compasso o método que usualmente recorre. Apesar de a Geometria não ser um tema preferencial, Anita mostrou-se favorável ao uso de programas de geometria dinâmica na sua aprendizagem. Contrariamente, Filipa valoriza a Geometria e considerou que os ambientes de geometria dinâmica, juntamente com tarefas de carácter exploratório e investigativo, constituem um recurso importante para a compreensão dos tópicos relacionados com esta área da Matemática. Já Nélia apresentou uma visão limitativa sobre temas matemáticos e sobre os ambientes de geometria dinâmica – "eu gosto é do papel e do lápis, gosto de cálculos" (Q) e revelou não ter usado este tipo de recursos nas suas atividades matemáticas. Júlia atribuiu importância tanto ao tema da Geometria, como ao recurso a ambientes de geometria dinâmica, o que lhe permitiu abrir "novas perspectivas" (Q). Quanto às tarefas de natureza exploratória e investigativa, a maioria dos alunos salientou que não teve anteriormente experiências de ensino com esse tipo de metodologia de trabalho.

Após a experiência de ensino, as opiniões modificaram significativamente. Para Mara, o ambiente de geometria dinâmica teve um contributo fundamental porque lhe permitiu obter os resultados de uma forma mais rápida na exploração das tarefas, e que, por estarem "subdivididas ... e orientadas" (E) permitiu-lhe ser a própria a chegar aos resultados. Realçou, ainda, o facto das tarefas de natureza investigativa lhe terem possibilitado um trabalho mais autónomo. Contudo, foram sentidas algumas dificuldades na realização das tarefas, em particular na formulação e prova de conjeturas, que foram colmatadas através da observação e discussão dos resultados. Para Diana, foram destacados os contributos do computador e do GeoGebra para a compreensão de conceitos, de relações geométricas, para a justificação de procedimentos matemáticos na análise de caraterísticas e propriedades de figuras, tendo valorizado a exploração conjunta das tarefas. Anita valorizou os momentos de discussão que foram criados com recurso a GeoGebra e às tarefas e considerou o ambiente de geometria dinâmica fundamental para iniciar a produção de provas, onde foi imprescindível na criação de um número considerável de casos, para a formulação e prova de conjeturas. Através da observação das provas realizadas pelos seus colegas, Anita pôde procurar iniciar o seu processo de prova. Também Filipa destacou vantagens nestes recursos pela possibilidade das representações visuais e pela autonomia que proporcionam. Valorizou, também, as transformações geométricas que considerou imprescindíveis para a criação de uma diversidade de casos e a caraterística própria de "mexer a figura sem ela ser destruída" (E). Nélia efetuou uma avaliação positiva do uso de tarefas exploratórias e investigativas com recurso às tecnologias informáticas das tecnologias, tendo salientado uma maior motivação para a aprendizagem da Geometria do que nas 'aulas normais', dado que foram dadas ferramentas para manipular os objetos construídos, analisar caraterísticas e propriedades de figuras e formular, testar e explorar conjeturas. Destacou, também, a rapidez e o rigor com que se realizaram as construções geométricas.

5.2.3. Perspetivas sobre a argumentação

No início da experiência de ensino, a generalidade dos alunos não omitiu opiniões muito concretas sobre a noção de argumentação. Enquanto Mara definiu argumentação como um ato de "dar uma opinião" (E), Diana perspetivou a argumentação como sendo um meio de "comentar uma afirmação e falar sobre ela." (Q). Também a opinião de Anita reduziu-se a uma forma de "explicar e raciocinar" (E) e Filipa refere somente que argumentar é "ver se está correta" (E). Para Nélia, argumentar é "dizer o que achamos" (E) e Júlia indica a argumentação como uma forma de "saber apresentar uma crítica e uma opinião acerca do assunto abordado" (E). Todos os alunos valorizaram a oportunidade de discutir e debater as suas conclusões e de ouvir os seus colegas e foram unânimes em mencionar que Diana manifestou, também, preferência por apresentar os seus raciocínios de forma oral, por achar que lhe facilita a apresentação.

No final da experiência de ensino, Diana e Mara revelam que durante a implementação das tarefas que integram esta experiência de ensino foram criados momentos de discussão, que tiveram o contributo do GeoGebra que funcionou como promotor da formulação de conjeturas e da produção de provas. Evidenciaram que continuam com dificuldade em "perceber aquilo que é dado, daquilo que é pedido" (E). Anita e Filipa destacaram também os momentos de discussão que ocorreram durante a implementação das tarefas e reconheceram o contributo do GeoGebra para a formulação e prova de conjeturas, onde identificaram como elementos fundamentais para o desenvolvimento da capacidade argumentativa dos alunos.

Nélia dá um novo significado à argumentação matemática. Nesse sentido, a aluna evidencia reconhecer o contributo dos ambientes de geometria dinâmica para a formulação e prova de conjeturas, no que diz respeito ao "rigor das construções", à "simplificação do trabalho realizado" e à "possibilidade de mover um ponto e a figura aumentar ou diminuir mas manter a mesma forma" "a compreensão de certos exercícios não era tão rápida" (E). Salientou ainda que os ambientes de geometria dinâmica puderam por à prova a capacidade de argumentação e a capacidade de "persuadir os outros de que tínhamos razão" (E), como uma forma de convencer os outros Finalmente, Júlia reconheceu que dos momentos dedicados à discussão de questões emergiram "novas formas de raciocínio e novas conclusões" (E) que considerou fundamentais para o seu desenvolvimento matemático. Valorizou, ainda os ambientes de geometria dinâmica, apoiados por tarefas de natureza exploratória e investigativa, por terem tido a possibilidade de construir figuras com rapidez e rigor, permitir mover uma figura sem a alterar e, assim, conseguem-se muitos outros novos casos para procurar regularidades e identificar Assim, para os alunos na sua globalidade argumentar matematicamente uma afirmação é encontrar um conjunto de explicações e justificações matemáticas que resultem dos momentos de discussão e debate das conclusões apresentadas.

5.3. Implicações do estudo para o ensino da Geometria

A consecução das tarefas que integram este estudo, conjuntamente com os recursos tecnológicos usados, permitiu criar condições para que os alunos formulassem e explorassem conjecturas geométricas. Caracterizadas como um conjunto de evidências com uma determinada regularidade, as explorações constituíram, assim, uma condição indispensável para os alunos conceberem afirmações. Em consonância com a linha de pensamento de Mason et al. (1982), emergiu a necessidade de verificar a veracidade dos resultados, estímulo que permitiu aos alunos, de acordo com de Villiers (2003), darem início ao processo de prova, caracterizado como um misto de intuição, verificação quase-empírica e prova lógica, não necessariamente rigorosa. Em praticamente todas as tarefas, os alunos foram conduzidos a explorar uma determinada construção e, através da sua manipulação, procurar estabelecer relações e propriedades geométricas. Inicialmente, tal facto não se verificou de forma espontânea, tendo sido necessário orientar os alunos nesse sentido e no sentido de refletir sobre as variações ou invariâncias observadas, sobre o porquê dessas variações ou invariâncias, de modo a desenvolverem uma atitude investigativa e crítica. Todos os alunos deste estudo manifestaram apetência para manipular as figuras, para as transformar, pintando-as, aumentando-as ou diminuindo-as. No entanto, este fascínio de observar as transformações das suas construções condicionou a sua atenção para a procura de relações invariantes e para a formulação de conclusões, tendo de ser orientados nesse sentido. Com o decorrer do estudo, os alunos acabaram por autonomamente e sem dificuldade, procederem à manipulação de objetos com o intuito de explorarem, testarem e validarem propriedades e relações, alcançando uma visualização crítica e reflexiva sobre o que variava e sobre o que se conservava invariante. No entanto, ainda relativamente à exploração dos objetos, surgiram algumas dificuldades quanto à percepção de que a ordem com que os mesmos eram construídos influenciava a conservação das suas caraterísticas aquando da sua manipulação, ou seja, permitia que não desmanchassem. Esta dificuldade sentiu-se com mais intensidade no início da experiência de ensino, na medida em que os mesmos, ao observarem as construções realizadas e os menus do software, ainda apresentaram relutância em inferir que elementos deveriam selecionar e quais as opções disponíveis em cada um dos menus. Outra dificuldade sentida no início da experiência relacionou-se com o facto de os alunos não terem a percepção de que a manipulação dos objetos e a visualização imediata das alterações produzidas potenciava a descoberta de propriedades e de relações geométricas. Esta dificuldade foi mais notória nos alunos que apresentavam um desempenho menor – limitavam-se a observar as figuras que construíam sem saber o que fazer ou dizer. Depois de referenciado que nestes ambientes, os alunos tinham a possibilidade de manipular as figuras e obter várias representações, que podiam explorar, de uma forma mais interativa e eficaz, que constituía uma ferramenta para refletir sobre as relações geométricas e para tirar conclusões a partir do feedback recebido do computador, os alunos começaram então a explorar, a descobrir e a construir conceitos, a fazer conjecturas e a raciocinar, treinando, assim, o seu pensamento de uma forma mais ativa e autónoma. Este aspecto torna-se evidente nos registos das conclusões dos alunos, quando afirmam, por exemplo, que "quando arrastamos os vértices do polígono, ... a soma dos ângulos [externos] mantém-se 360°" (RE-T6).

Para a consecução das tarefas que integram este estudo, foi imprescindível poder usufruir de uma sala de aula com recursos informáticos. Da percepção que a investigadora detém sobre a realidade escolar, nem sempre tal é conseguido. No entanto, perante a persistência e alguns ajustes entre os professores, a situação pode melhorar. A escola onde foi desenvolvido este estudo contempla duas salas equipadas com catorze computadores. Uma das salas é destinada à lecionação da disciplina das TIC e a outra sala é prioritária para a disciplina de Matemática. Assim, antes da experiência de ensino, surgiu a necessidade de efetuar uns pequenos ajustes quanto à distribuição da sala equipada com os computadores, entre os professores da disciplina, de tal forma a assegurar a sala equipada para a realização das tarefas que fazem parte deste estudo.

Quanto ao desenvolvimento de todo o processo de justificação de uma conjectura, foi também evidente a dificuldade manifestada pelos alunos no início da experiência de ensino. Este processo conduziu os alunos à procura de argumentos que validassem a conjectura formulada, tal como sustentam Brocardo (2001), de Villiers (2003), Healy e Hoyles (2001). Na linha de pensamento de Coelho e Saraiva (2002), as práticas pedagógicas usadas realçaram as interações estabelecidas entre professor, alunos e ambiente de geometria dinâmica, e levaram o aluno a construir o próprio conhecimento. Com a familiarização com este tipo de práticas pedagógicas e com o decorrer do tempo, as dificuldades foram diminuindo. Para isso, muito contribuiu o uso do GeoGebra como um elemento mediador na construção do conhecimento matemático dos alunos. Tal como enfatiza Laborde (1997, 1998), a possibilidade de arrastamento de uma figura num ambiente de geometria dinâmica permitiu aos alunos explorar, rápida e dinamicamente, diferentes construções de uma mesma figura, novos ângulos, novos arcos, novas medidas, entre outros, orientando-os a obter conclusões sobre propriedades e relações geométricas. Os alunos seguiram, então, uma resolução geométrica referenciada por Laborde (1993), da qual consta a percepção natural das construções, a identificação dos elementos fixos e dos elementos variantes, e a elaboração de inferências a partir de informação visual.

De acordo com Boavida (2005), a argumentação pode-se desenvolver em diversos domínios, sendo que o que é apropriado num determinado domínio pode já não o ser noutro domínio. Através da análise deste estudo, evidencia-se o desenvolvimento da vertente discursiva, dialéctica e social da argumentação. A vertente discursiva, identificada no uso da linguagem natural como uma ferramenta de comunicação (Pedemonte, 2002), está patente nos diálogos desenvolvidos pelos alunos, nos três momentos da recolha de dados que integram este estudo. A vertente dialéctica, entendida, pela mesma autora, como uma tentativa de justificação de uma ideia a partir do que se acredita ser verdade, também se identifica nos três momentos da recolha de dados, embora a partir do segundo momento da recolha de dados se apresente com mais força, uma vez que contemplam tarefas de natureza investigativa. Por fim, a vertente social, visada como um conjunto de interações que mobilizam vários protagonistas (Pedemonte, 2002), apresenta um carácter discursivo (Ballacheff, 1999), e revela-se com maior intensidade nos dois primeiros momentos da recolha de dados. Este aspecto é evidenciado pelas interações emergentes na exploração do erro das propostas de resolução dos alunos que, como sugere Krummheuer (1998), promove um maior desenvolvimento do conhecimento matemático. As tarefas utilizadas neste estudo, de natureza exploratória e investigativa, segundo defendem alguns autores, como Coelho (1999), Jones (1997) e Junqueira (1995), constituem a base para a introdução de *software* de geometria dinâmica nas salas de aula, que deve assentar na natureza dessas tarefas. Para isso, muito contribuiu a realização de tarefas com recurso a um ambiente de geometria dinâmico na medida em que devido, à sua característica facilitadora da experimentação e da possibilidade de investigação de relações e propriedades geométricas a partir de invariâncias ao arrastamento, são frequentemente apontados, tal como aponta de Villiers (2003), como poderosas ferramentas para o ensino e aprendizagem dos alunos, estimulantes e facilitadores, encorajadores do desenvolvimento da compreensão e construção de conceitos.

De uma forma geral, com a implementação deste tipo de tarefas e com o recurso a um ambiente de geometria dinâmica, foram proporcionadas condições para que os alunos pudessem formular, testar e explorar as suas conjecturas. No entanto, são ainda notórias dificuldades na produção da prova matemática, situação que se observa com maior intensidade nos dois primeiros momentos da recolha de dados e nos alunos que apresentam menor desempenho. Assim, do segundo momento para o terceiro momento da recolha de dados notou-se uma evolução na formulação de conjecturas, na apresentação de argumentos que as validem e, nos alunos com maior desempenho, da necessidade de provar a sua validade.

Apesar dos ambientes de geometria dinâmica terem tido um papel importante na produção de provas (Junqueira, 1995), as justificações baseadas na recolha de evidências foram predominantes e mais visíveis no primeiro e segundo momento da experiência de ensino e nos alunos que apresentaram menor desempenho, formulando as suas conjecturas e justificações com base nos poucos casos que experimentavam. Por vezes misturavam a aparência com algumas relações ou propriedades que já tinham estudado, mas sem conseguirem estabelecer um encadeamento lógico das relações que observavam e discutiam connosco, o que os levou a optar pela evidência das imagens como forma de justificação por ser o "caminho mais fácil"! Foram, também, sentidos alguns constrangimentos, mais especificamente na construção dos polígonos circunscritos a uma circunferência, devido, em parte, à falta de domínio de algumas ferramentas do GeoGebra, assim como algumas imprecisões nas medições das áreas dos polígonos construídos, factor que advém da escala de aproximação assumida pelo próprio programa.

Com este estudo, verificou-se uma mudança nas perspectivas dos alunos sobre a argumentação e sobre a aprendizagem da Geometria com recurso aos ambientes de geometria dinâmica e a tarefas de natureza exploratória e investigativa. Apesar de se terem evidenciado vantagens no uso de ambientes de geometria dinâmica, tais como o tempo despendido na construção de lugares geométricos e a possibilidade de alteração de uma figura, por arrastamento, tal facto, não constitui por si só uma tentativa de depreciação da abordagem tradicional, nem tão pouco uma tentativa de dissolução dos efeitos da prática manual e da assimilação do método de construção de lugares geométricos, segundo Schumann e Green (2003), ambos os métodos são válidos, dependendo do objetivo que se pretender alcançar.

Os ambientes de geometria dinâmica são, assim, recursos propícios à descoberta de propriedades e de relações geométricas, favorecendo a aprendizagem, beneficiando a aquisição de conhecimentos e incluindo a produção de provas (Brocardo, 2001; de Villiers, 2003; Healy & Hoyles, 2001; Jones, 1998), influenciando positivamente tanto na concepção, como na forma de analisar e de argumentar.

5.4. Recomendações para futuros estudos

Quando os alunos são confrontados com as suas afirmações e as suas ações, tomam consciência da sua aprendizagem, o que parece implicar, gradualmente, que tendem a abandonar a evidência como argumento principal para pensarem sobre o processo de construção do seu conhecimento matemático. No entanto, não se conseguiu fazer compreender a importância desse processo na sua totalidade e os alunos com desempenho fraco e médio continuaram a não entender a necessidade da prova. A prova tendo sido sentida como dispensável, teve de passar pelas interações professor/aluno.

Esta investigação sugere que a utilização de ambientes de geometria dinâmica, como uma ferramenta, esteja a associada a atividades matemáticas que ajudem os alunos a desenvolver a sua capacidade de argumentação. Assim, a investigação mostra, igualmente, a importância de uma cuidadosa preparação de tarefas e materiais que permitam desenvolver interações entre os participantes no estudo, tendo como papel fundamental na aprendizagem dos conceitos geométricos. Neste sentido, foi desenvolvido um trabalho assente em tarefas exploratórias e de natureza investigativa, com recurso a um ambiente de geometria dinâmica, para generalizar relações estabelecidas através da observação de evidências.

Dado que esta investigação seguiu uma metodologia de carácter qualitativo e interpretativo, sobre uma turma do 9.º ano, os dados não podem ser generalizáveis. No entanto, a investigadora esforçou-se para que os dados fossem coerentes e consistentes para que, assim, possam constituir novas hipóteses de trabalho, assim como serem aplicados a outras situações e utilizados noutras investigações. Deste modo, para estudos futuros, seria pertinente analisar o contributo dos ambientes de geometria dinâmica no desenvolvimento da capacidade argumentativa dos alunos ao longo do 2.º e 3.º ciclo do ensino básico, na aprendizagem da Geometria, através do recurso a tarefas de natureza exploratória, investigativa e de resolução de problemas. Uma pretensão inicial da investigadora foi a de analisar a qualidade dos argumentos dos alunos envolvidos neste estudo e classificar a relação entre os tipos de afirmações que os alunos fazem e os níveis de oposição, segundo alguns modelos (*e.g.*, Clark & Sampson, 2008, e Erduran, Simon & Osborne, 2004).

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: ME-DEB.

Alibert, D., & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215-230). Netherlands: Kluwer Academy Publishers.

Almeida, C., Viseu, F., & Ponte, J. P. (2004). Reflections of a student teacher on his construction and implementation of a WebQuest to teach 7th grade statistics. In R. Ferdig, C. Crawford, R. Carlsen, N. Davis, J. Price, R. Weber, & A. Willis (Eds.), *Information Technology & Teacher Education Annual: Proceedings of SITE 2004*, (pp. 4353-4358). Norfolk, VA: Association for the Advancement of Computing in Education.

APM (2003). A propósito das recomendações da Comissão para o Estudo da Matemática e das Ciências. *Educação e Matemática,* 75, 28-29.

Ball, B. (2003). Teaching and learning mathematics with an interactive whiteboard. *Micromath*, 4–7.

Bell, A. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23–40.

Bell, M. (1998). *Teachers' perceptions regarding the use of the interactive electronic whiteboard in instruction*. Acedido em 12 de dezembro, 2010, de http://downloads01.smarttech.com/media/sitecore/en/pdf/research_library/higher_education/teachers_perceptions_regarding_the_use_of_the_interactive_electronic_whiteboard_in_instruction.pdf

Bieda, K. N. (2010). Enacting Proof-Related Tasks in Middle School Mathematics: Challenges and Opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(4), 351–382.

Boavida, A. M. (2001). Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática. *Educação e Matemática*, 63, 11-15.

Boavida, A. M. (2005). A argumentação na aula de Matemática: Um olhar sobre o trabalho do professor. In J. Brocardo, F. Mendes, & A. M. Boavida (Eds.), *Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 13-43). Setúbal: APM.

Boavida, A. M., Gomes, A., & Machado, S. (2002). A argumentação na aula de Matemática. Olhares sobre um projecto de investigação colaborativa o trabalho do professor. *Educação e Matemática*, 70, 18-26.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação – uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: um projecto curricular no 8.º ano*. Lisboa: APM.

Brown, S. (2003). *Interactive whiteboards in education. TeachLearn for Joint Information Systems Committee*. Acedido em 20 de dezembro, 2010, de http://www.jisc.ac.uk/uploaded_documents/Interactivewhiteboards.pdf

Brown, M., Jones, K., & Taylor, R. (2003). *Developing geometrical reasoning in the secondary school: outcomes of trialling teaching activities in classrooms, a report to the QCA.* Southampton, UK, University of Southampton, School of Education.

Candeias, N. J. (2005). *Aprendizagem em Ambientes de Geometria Dinâmica*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Candeias, N., & Ponte, J. P. (2005). Aprendizagem da Geometria: O papel das tarefas, do ambiente de trabalho e do software de geometria dinâmica. In J. Brocardo, F. Mendes, & A. M. Boavida (Eds.), *Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 183-204). Setúbal: APM.

Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa*, 11(2), 171-194.

Clark, D., & Sampson, V. (2008). Assessing dialogic argumentation in online environments to relate structure, grounds, and conceptual quality. *Journal of Research in Science Education*, 45(3), 293-321.

Coelho, F. (1999). Prefácio à edição brasileira da obra de C. Perelman, & L. Olbrechts-Tyteca *Tratado da argumentação: A nova retórica* (pp. xi-xxi). São Paulo: Martins Fontes.

Coelho, I., & Saraiva, J. (2002). Tecnologias no Ensino/Aprendizagem da Geometria. In M. J. Saraiva, M. I. Coelho, & J. M. Matos (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem da Geometria*, (pp. 7-

33). Covilhã: Secção de Educação Matemática e Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SPCE).

Conlon, T (2005). *Schools net won't join up thinking*. TES. Acedido em 14 de dezembro, 2010, de http://www.tes.co.uk/search/story/?story_id=2145322.

De Corte, E. (1992). Aprender na escola com as novas tecnologias de informação. *Educação e computadores*, 89-159.

De Villiers, M. (1997). The role of proof in investigue, computer-based geometry: some personal reflections. In J. King e D. Schattschneider (Eds.), *Geometry turned on – Dynamic software in learning, teaching, and research* (pp. 15-24). Washington, D.C.: Mathematical Association of America (MAA).

De Villiers M. (2003) *Rethinking Proof with Sketchpad*. Key Curriculum Press Emeryville, CA: USA.

Dodge, B. (1997). *Building blocks of a WebQuest*. Acedido em 18 de Novembro, 2010, de http://projects.edtech.sandi.net/staffdev/buildingblocks/p-index.htm.

Douek, Nadia (1998). *Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications*. Acedido em 8 de Março, 2010, de http://www.cabri.net/Preuve/Resumes/Douek/Douek98.html

Douek, N., & Pichat (2003). From oral to written texts in grade I and the approach to mathematical argumentation. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA*, Volume 2 (pp.341-348). Honolulu: CRDG, College of Education of University of Hawai.

Driver, R., Newton, P., & Osborne, J. (2000). Establishing the Norms of Scientific Argumentation in Classrooms. *Science Education*, 3 (84), 287-312.

Duschl, R., & Osborne, J. (2002). Supporting and promoting argumentation discourse in science education. *Studies in Science Education*, 38, 39–72.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: MacMillan.

Fernandes, J. A., & Vaz, O. (1998). Porquê usar tecnologia nas aulas de Matemática? *Boletim da SPM*, 39, 43-55.

Fernandes, J. A., Alves, M. P., Viseu, F., & Lacaz, T. M. (2006). Tecnologias de informação e comunicação no currículo de Matemática do ensino secundário após a reforma curricular de 1986. *Revista de Estudos Curriculares*, 4(2), 291-329.

Ferreira, E. M. (2005). *Ensino e Aprendizagem de Geometria em Ambientes Geométricos Dinâmicos: O Tema de Geometria do Plano no 9º Ano de Escolaridade*. (Tese de Mestrado, Universidade do Minho).

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dorderecht, Holand: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting *Mathematics Education.* Dorderecht, Holand: Reidel.

Goldenberg, P. (1998). Hábitos de pensamento: Um principio organizador para o currículo (II). *Educação e Matemática*, 48, 37-44.

Gomes, A. S., & Vergnaud, G. (2004). On the learning of geometric concepts using dynamic geometry Software. RENOTE: *Novas Tecnologias na Educação*, 2(1).

Grácio, R. (1993). *Racionalidade argumentativa*. Porto: Edições ASA.

Grácio, R. (2010). *A Interacção Argumentativa*. Coimbra: Grácio Editor.

Grize, J. (1990). *Logique et Langage*. Paris: Ed. Ophrys.

Guimarães, H. (1988). *Ensinar Matemática: Concepções e Práticas* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education.* Toronto, Ontario: OISE Press.

Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics*, 9(1), 20–23.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), 6–13.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42–49.

Hanna. G. (2002). *Proof and its Classroom Role: A Survey* (pp. 75-104), Ontario Institute for Studies in Education of the University of Toronto.

Hannafin, R., Barry, D., & Scott, N. (1998). Identifying critical learner traits in a dynamic computer-based geometry program. *The Journal of Education Research*, 92(1), 3-11.

Healy, L., & Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 235-256.

Higgins, S., Falzon, C., Hall, I., Moseley, D., Smith, F., Smith, H., & Wall, K. (2005). *Embedding ICT in the literacy and numeracy strategies: Final report*. Newcastle, UK. Newcastle University.

Hirschhorn, D., & Thompson, D. (1996). Technology and reasoning in algebra and geometry. *Mathematics Teacher*, 89, 138-142.

Hoyles, C., & Jones, K. (1998), Proof in Dynamic Geometry Contexts. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 121-128). Dordrecht: Kluwer.

Jiménez Aleixandre, M., & Díaz Bustamante, J. (2003). Discurso de Aula Y Argumentación en la Classe de Ciencias: Cuestiones Teóricas y Metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 21 (3), 359-370.

John, P., & Sutherland, R. (2005). Affordance, opportunity and the pedagogical implications of ICT. *Educational Review*, 57(4).

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 55-85.

Jones, K. (1999). Student interpretations of a dynamic geometry environment. In I. Schwank (Ed.) *European Research in Mathematics Education* (pp. 245-258). Osnabrueck: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Jones, K. (1998): The mediation of learning within a dynamic geometry environment. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 96-103).

Jones, K. (1997): Children learning to specify geometrical relationships using a dynamic geometry package. In E. Penkonen (Ed.) *Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 121-128).

Jorge, A., & Puig, N. (2000). Enseñar a argumentar científicamente: un reto de las clases de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), 405-422.

Junqueira, M. (1996). Exploração de construções geométricas em ambientes computacionais dinâmicos. *Quadrante*, 5 (1), 61 – 108.

Junqueira, M. (1995). *Aprendizagem da geometria em ambientes computacionais dinâmicos – Um estudo no 9.º ano de escolaridade*. Lisboa: APM.

Kelly, G., & Takao, A. (2001). Epistemic levels in argument: an analysis of university oceanography students´use of evidence in writing. *Science Education*, 86, 314-342.

Kilpatrick, J., & Moura, E. (1999). Reflexões sobre os Standards. *Educação e Matemática*, 55, 43-46.

Knuth, E. (2002). Proof as a Tool for Learning Mathematics. *Mathematics Teacher*, *95*(7), 486-490.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NY: Erlbaum.

Lakatos, I. (1976). *Preuves et réfutations. Essais sur la logique de la découverte mathématique*. Paris: Hermann.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal,* 27, 29-63.

Laborde, C. (1993). The computer as part of learning environment: the case of Geometry. In C. Keitel & K. Ruthen (Eds.), *Learning from computers: Mathematics Education and Technology* (pp.48-67).

Lavy, I. (2004). Kinds of arguments emerging while exploring in a computerized environment. *Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 185-192.

Lessard-Hébert, M., Boutin, G., & Goyette, G. (1994). *Investigação qualitativa – Fundamentos*. Lisboa: Instituto Piaget.

Levy, P. (2002). Interactive whiteboards in learning and teaching in two Sheffield schools: a developmental study. Department of Information Studies (DIS), University of Sheffield, UK. Acedido em 4 de dezembro, 2010, de http://dis.shef.ac.uk/eirg/projects/wboards.htm.

Meireles, A. (2006). *Uso de quadros interactivos em educação: uma experiência em Fisico-Químicas com vantagens e "resistências"*. (Tese de Mestrado, Universidade do Porto).

Lewin, C., Somekh, B., & Steadman, S. (2008). Embedding interactive whiteboards in teaching and learning: The process of change in pedagogic practice. *Education and Information Technologies*, 13 (4), 291-303.

Loureiro, C., & Bastos, R. (2002). Demonstração - uma questão polémica. In M. J. Saraiva, M. I. Coelho, & J. M. Matos (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem da Geometria* (pp. 105-128). Covilhã: Secção de Educação Matemática e Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SPCE).

Lüdke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Bristol: Addison-Wesley.

Marrades, R., & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-25.

Matos, J. M., & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Matos, J. M. (2006). A penetração da Matemática Moderna em Portugal na revista Labor. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 5*, 91-110.

Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Ministério da Educação (1991). *Programa Matemática – Plano de organização do ensino-aprendizagem, Ensino Básico 3º Ciclo* (vol. II). Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2007). *Programa Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Mota, J. (2004). *O Geometer´s Sketchpad e o ensino/aprendizagem da geometria: Um estudo em duas turmas do 9º ano de escolaridade numa escola dos Açores*. (Tese de Mestrado, Universidade dos Açores).

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM & IIE.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Noss, R., Hoyles, C., Healy, L., & Hoelzl, R. (1994). Constructing meanings for constructing: An exploratory study with Cabri Géomètre. In J. P. Ponte, & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 360-367).

Oléron, P. (1996). *L' argumentation*. Paris: Presses Universitaires de France.

Olive, J. (2002). Implications of Using Dynamic Geometry Technology for Teaching and Learning. In M. J. Saraiva, M. I. Coelho, & J. M. Matos (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem da Geometria* (pp. 35-59). Covilhã: Secção de Educação Matemática e Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SPCE).

Patton, M. (2002). *Qualitative research and evaluation methods*. London: Sage.

Piteira, G. (2000). *Actividade matemática emergente com os ambientes dinâmicos de geometria dinâmica*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Piteira, G., & Matos, F. (2002). Ambientes Dinâmicos de Geometria como Artefactos Mediadores para a Aprendizagem da Geometria. In M. J. Saraiva, M. I. Coelho, & J. M. Matos (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem da Geometria* (pp. 61-72). Covilhã: Nova Forma.

Pedemonte, B. (2002). Relation between argumentation and proof in mathematics: cognitive unity or break? In J. Novotná (Ed.), *Proceedings of the PME* (pp. 70-80). Prague: Charles University, Faculty of Education.

Perelman, C. (1993). *O império retórico: Retórica e argumentação*. Porto: Edições Asa.

Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (1999). *Tratado da argumentação: A nova retórica*. São Paulo: Martins Fontes.

Pólya, G. (1954). Mathematics and plausible reasoning. Vol. 1: *Induction and analogy in mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

Ponte, J. P., & Canavarro, A. P. (1997). *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Varandas, J. M., Brunheira, L., & Oliveira, H. (1999). *A Relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas*. Lisboa: APM.

Rojas, R. (2001). *El Cuestionario*. Acedido em 26 de Setembro, 2010, de http://www.nodo50.org/sindpitagoras/Likert.htm

Sadler, T., & Fowler, S. (2006). A Threshold model of content knowledge transfer for socioscientific argumentation. *Science Education*, 90, 986-1004.

Santos, M., & Carvalho, A. (2009). Os Quadros Interactivos Multimédia: Da Formação à Utilização. Em P. Dias & A. Osório (orgs), *Actas da VI Conferência Internacional de Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação – Challenges* (pp. 941-954). Braga: Centro de Competência da Universidade do Minho.

Santos, L., Canavarro, A. P., & Machado, S. (2006). Orientações curriculares actuais para a Matemática em Portugal. In *Actas do XV Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 13-43). Montegordo: Secção de Educação Matemática, Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sence-makin: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J. F. Voss, D. N. Perkins, & J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp. 311-343). Hillsdale, N. J. Lawrence Earlbaum Associates.

Schumann, H., & Green, D. (1994). *Discovering geometry with a computer – using Cabri Géomètre*, London, Chartwell-Bratt.

Skoumios, M. (2009). The Effect of Sociocognitive Conflict on Students' Dialogic Argumentation about Floating and Sinking. *International Journal of Environmental & Science Education*, 4(4), 381-399.

Stake, R. (1994). Case studies. In N. Denzin, & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 236-247). London: Sage.

Sunal, C., Sunal, D. & Tirri, K. (2001). *Using evidence in scientific reasoning: exploring characteristics of middle school students´ argumentation*. Comunicação apresentada no Encontro Anual da American Educational Research Association, Seattle, 10 a 14 de Abril.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 289–321.

Toulmin, S. (1993). *Les usages de l'argumentation*. Paris: PUF.

Tuckman, B. (2000). *Manual de investigação em educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Vacaretu, A. (2010). *Math lessons for the thinking classrooms*. Acedido em 04 de janeiro, 2011, de http://math.unipa.it/~grim/21_project/Vacaretu559-564.pdf

van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally*. Boston: Pearson Education.

van Eemeren, F., Grootendorst, R., & Henkemans, F. (2002). *Argumentation: Analysis, Evaluation, Presentation*. Mahwah, NJ/London: Lawrence Erlbaum Associates, (pp. xiv- 195).

van Eemeren, F., & Grootendorst, R. (2004). *A systematic theory of argumentation. The pragma-dialected approach*. Cambridge: Cambridge University Press.

Varandas, J. (2000). *Avaliação de investigações matemáticas: Uma experiência*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa), Acedido em 12 de Setembro, 2010, de http://ia.fc.ul.pt/textos/jvarandas/index.htm.

Veloso, E. (1998). *Geometria-Temas Actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Vieira, F. (1993). *Supervisão – uma prática reflexiva de formação de professores*. Rio Tinto: Edições ASA.

Whitenack, J., & Yackel, E. (2008). Construindo argumentações matemáticas nos primeiros anos: A importância de explicar e justificar ideias. *Educação e Matemática*, 100, 85-88.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in a mathematics classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 171-191.

Yackel, E., & Cobb, P. (1994). *The development of young children's understanding of mathematical argumentation*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1-24). Utrecht: Utrecht University.

Yin, R. (1989). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park, CA: Sage.

ANEXOS

Anexo I

PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO À DIREÇÃO DO AGRUPAMENTO

Exma Senhora

Diretora do Agrupamento de Escolas Passos José

Eu, Ana Cristina Pires Fernandes, professora do grupo 500 do quadro do Agrupamento de Escolas Irmãos Passos, na qualidade de aluna do Curso de Mestrado em Ciências da Educação, área de especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática, da Universidade do Minho, venho, por este meio, solicitar a sua autorização para desenvolver, com a turma A do 9º ano de escolaridade, em colaboração com a professora Teresa de Jesus Ferreira, um projeto de ensino e aprendizagem sobre o tema *As TIC no desenvolvimento da capacidade de argumentação de alunos do 9.º ano na aprendizagem de geometria*.

De um modo muito sucinto, este projeto tem por objectivo averiguar o papel que as TIC desempenham no desenvolvimento da capacidade de argumentação de alunos do 9.º ano na aprendizagem de Geometria com recurso a ambientes de geometria dinâmica e ao quadro interativo.

O projeto insere-se no âmbito de uma investigação individual que culminará na minha Dissertação de Mestrado.

Fico à inteira disposição de V. Exa. para complementar toda a informação que julgue oportuna.

Agradecendo desde já a sua colaboração, subscrevo-me com os melhores cumprimentos,

Guifões, 06 de Setembro de 2010.

Atenciosamente

____

(Ana Cristina Pires Fernandes)

Anexo II

PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO AO ENCARREGADO DE EDUCAÇÃO

Exmo(a) Sr(a)

Encarregado(a) de Educação

Guifões, 23 de Setembro de 2010.

No âmbito do desenvolvimento da minha dissertação de mestrado, vai ser implementado com os alunos desta turma, em conjunto com a professora da disciplina de Matemática, Dra. Teresa de Jesus Ferreira, um projecto de ensino-aprendizagem da Geometria com o recurso às Tecnologias da Informação e Comunicação, nomeadamente o programa de geometria dinâmico GeoGebra e o quadro interactivo. Este projecto ao envolver os alunos nas actividades que desenvolve com tarefas de natureza exploratória e investigativa, com recuso à tecnologia, procura averiguar como os alunos se envolvem em actividades de argumentação matemática na forma como explicam e justificam os seus raciocínos matemáticos aos seus colegas e à sua professora.

Devido ao interesse que este tipo de trabalho tem despertado junto da comunidade educativa, torna-se necessário divulgá-lo. Para tal, solicito a sua autorização para que o(a) seu(sua) educando(a) possa participar na recolha de dados – questionários, entrevistas, fotocópias dos trabalhos realizados pelos alunos, gravações audio e vídeo do trabalho desenvolvido na sala de aula – comprometendo-me a preservar o anonimato do(a) aluno(a). Em todas as aulas, a responsável pela turma continuará a ser a professora de Matemática e as evidências recolhidas não servirão para avaliar o(a) seu(sua) educando(a), mas sim para compreender os procedimentos matemáticos que utiliza, o seu raciocínio que possam potenciar a sua aprendizagem na disciplina de Matemática. Esta recolha e análise de dados vai ser fundamental para divulgar esta experiência e, assim, contribuir para uma melhoria do ensino da Matemática.

Agradecendo, desde já, a colaboração prestada por Vossa Excia, solicito que preencha a declaração em baixo, devendo depois destacá-la e devolvê-la.

✂ ....

Declaro que autorizo o(a) meu(inha) educando(a) ____ a participar na recolha de dados conduzida pela Dra. Ana Cristina Pires Fernandes, no âmbito da sua dissertação de Mestrado.

Solicito/Não solicito (*riscar o que não interessa*) que seja mantido o anonimato do(a) meu(minha) educando(a) no texto que for publicado.

Guifões, _____ / _____ / __________

Assinatura do Encarregado de Educação

____

Anexo III

QUESTIONÁRIO

Caro(a) aluno(a):

As tuas opiniões são fundamentais para o estudo que estou a realizar, relativo ao papel das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), mais especificamente de um programa de geometria dinâmica, na aprendizagem da Geometria. Com este questionário pretendo estudar as perspectivas que os alunos têm face à Geometria e à argumentação.

Para a obtenção de resultados válidos é da maior importância que respondas de forma consciente e sincera a todas as questões que se apresentam a seguir. Pela minha parte, enquanto pessoa com acesso aos dados, comprometo-me a utilizá-los de forma anónima e apenas para efeitos da investigação.

Muito obrigada pela colaboração.

Prof. Ana Cristina Fernandes

Informação pessoal

1. Nome: ____

Idade:__________

2. Profissão da mãe: ________________ Profissão do pai: ____________________

3. Como ocupas os teus tempos livres?

____

____

4. Qual a tua disciplina preferida?

____

5. Qual a disciplina em que tens mais dificuldades?

____

6. É a primeira vez que frequentas o 9º ano de escolaridade? Sim ☐ Não ☐

7. Tiveste sempre nível positivo a Matemática? Sim ☐ Não ☐. Se não, em que ano(s) de escolaridade tiveste nível negativo?________ Quais os motivos?________________

____

8. Na disciplina de Matemática, qual(ais) foi(ram) a(s) matéria(s) que <u>mais</u> gostaste?

____

Porquê?____

____

E a(s) que <u>menos</u> gostaste?______________________________

Porquê? ____

____

9. Costumas usar o computador quando estudas Matemática? Sim ☐ Não ☐

10. Conheces programas de computador sobre matemática? Sim ☐ Não ☐ Se sim, apresenta alguns exemplos desse estudo :

____

____

Se não, indica as razões porque não usas o computador no teu estudo____________________

____

Perspectivas sobre a Geometria

1. O que é para ti a Geometria?____

____

____

____

2. Que importância tem a Geometria na compreensão e resolução de situações do dia-a-dia? Indica algumas dessas situações. ______________________________________

____

____

____

3. Quais os tópicos de Geometria que estudaste nos anos anteriores? ____________________

____

____

4. Dos tópicos de Geometria que já estudaste, quais os que te agradaram <u>mais</u>? Porquê?

____

____

____

____

5. Dos tópicos de Geometria que já estudaste, quais os que te agradaram menos? Porquê?

____

____

____

6. O que é que gostaste mais de fazer nas aulas de Geometria dos anos anteriores? Porquê?

____

____

7. O que é que gostaste menos de fazer nas aulas de Geometria dos anos anteriores? Porquê?

____

____

8. Já utilizaste o computador nas aulas de Geometria? Sim ☐ Não ☐ . Se sim, indica o(s) programa(s) que usaste e a sua finalidade: _______________________

____

____

9. Costumas trabalhar com o Quadro Interactivo Multimédia? Sim ☐ Não ☐. Se sim, indica a(s) actividade(s) que realizaste: _______________________

____

____

10. Relativamente aos vários métodos para aprender Geometria, indicados a seguir, assinala três opções da tua preferência.

☐ Exposição da matéria pelo professor.

☐ Construções geométricas com régua e compasso.

☐ Resolução de problemas sobre situações reais.

☐ Utilização de materiais manipuláveis (*tangram, geoplano,...*).

☐ Construções geométricas com programas de geometria dinâmica.

☐ Resolução de exercícios do manual escolar.

☐ Realização de trabalhos em grupo/pares.

☐ Resolução de tarefas exploratórias e de investigação.

☐ Discussão das diferentes estratégias e respostas.

☐ Estabelecimento de definições, regras e propriedades pelo aluno.

11. Na tua opinião, qual o contributo dos programas de geometria dinâmica na aprendizagem de Geometria? ____

____

____

Perspectivas sobre a argumentação

1. O que é, para ti, argumentar sobre uma afirmação matemática?

____

____

____

____

2. Costumas apresentar e discutir as tuas conclusões? Justifica a tua resposta.

____

____

____

____

3. Achas importante discutir e debater as tuas conclusões perante a turma? Justifica a tua resposta.

____

____

____

4. Preferes apresentar os teus raciocínios de forma escrita ou oral? Justifica a tua opção.

____

____

____

____

Anexo IV

TAREFA 1 – Ângulo ao centro e ângulo inscrito. relação entre o ângulo ao centro e o arco correspondente

1. Com recurso ao GeoGebra, constrói duas circunferências de centros O e O’, respectivamente. Na circunferência de centro O, marca os pontos A, B e C, e na circunferência de centro O’ marca os pontos D, E, F, G e H, como mostram as seguintes figuras. Constrói e observa os ângulos que estão assinalados.

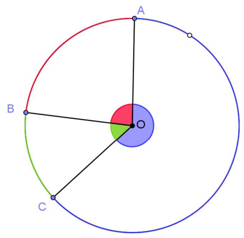


Figura I

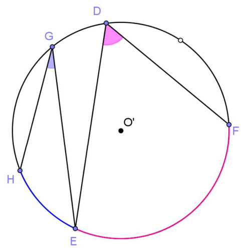


Figura II

1.1. Que características têm os ângulos que estão assinalados na figura I? E que características têm os ângulos da figura II?

1.2. Os ângulos AOB, BOC e AOC são ângulos ao centro. Define ângulos ao centro de uma circunferência.

1.3. Os ângulos EDF e HGE são ângulos inscritos. Define ângulos inscritos numa circunferência.

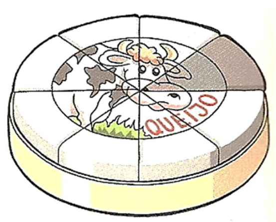
1.4. Na figura I, ao ângulo ao centro BOC podes fazer corresponder o arco menor BC.
Mede as amplitudes do ângulo ao centro BOC e do seu arco correspondente BC. Arrasta um dos pontos B ou C, deslocando-o sobre a circunferência e regista os valores na tabela seguinte:

$B\hat{O}C$ (ângulo ao centro)	$\widehat{BC}$ (arco correspondente)

O que observas?

1.5. Escreve uma conjectura que relacione as amplitudes de um ângulo ao centro e do seu arco correspondente.

Aplicação: algumas situações com que nos deparamos no dia-a-dia representam ângulos ao centro de uma circunferência, como por exemplo a distribuição de queijos com a mesma forma numa caixa circular, como se pode ver na imagem ao lado.

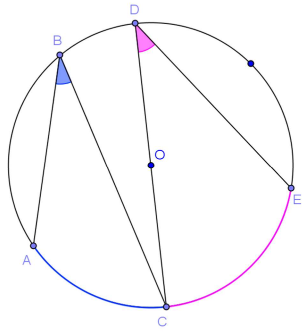


1. Considerando a distribuição dos queijos ilustrados na imagem, determina a amplitude de um dos ângulos ao centro e do seu arco correspondente.
2. E se a caixa tivesse n queijos iguais, qual seria a amplitude de cada um dos ângulos ao centro? E do seu arco correspondente?

Anexo V

TAREFA 2 – Relação entre o ângulo inscrito e o arco correspondente

1. Com recurso ao GeoGebra constrói uma circunferência de centro O. Marca os pontos A, B, C, D e E na circunferência. Constrói e observa os ângulos, como mostra a seguinte figura.



1.1. Como se designam os ângulos ABC e CDE? Porquê?

1.2. Mede as amplitudes do ângulo ABC e do seu arco correspondente. Arrasta um dos pontos, A ou C, deslocando-o sobre a circunferência, e regista os valores obtidos na tabela seguinte:

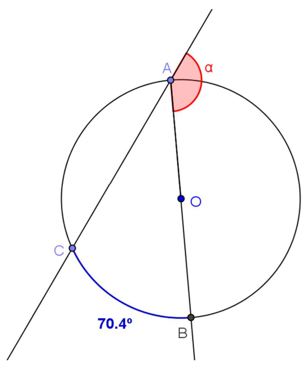
$A\hat{B}C$ (ângulo inscrito)	$\widehat{AC}$ (arco correspondente)

O que observas?

1.3. Escreve uma conjectura que relacione as amplitudes de um ângulo inscrito e do seu arco correspondente.

1.4. Considera, agora, o ângulo CDE. Constrói o triângulo [DOE]. Com base no ângulo CDE e no triângulo construído, prova a conjectura que estabeleceste na alínea anterior.

Aplicação: Na seguinte figura, o ponto O é o centro da circunferência.

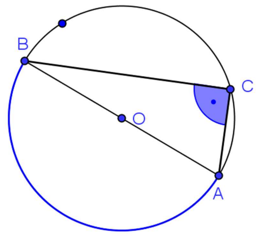


Determina o valor de α, justificando cada um dos passos utilizados no teu raciocínio.

Anexo VI

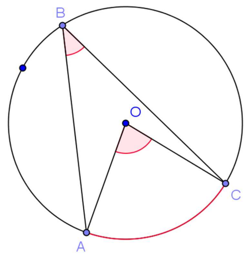
TAREFA 3 – Relação entre o ângulo ao centro e o ângulo inscrito no mesmo arco correspondente

1. Com recurso ao GeoGebra constrói uma circunferência de centro O. Marca os pontos A, B e C na circunferência. Constrói e observa o ângulo BCA, como mostra a seguinte figura.



1.5. Qual é a amplitude do ângulo BCA? Justifica a tua resposta.
1.6. Mede a amplitude do ângulo BCA. Qual a amplitude do seu arco correspondente?
1.7. Arrasta o ponto C, deslocando-o sobre a semicircunferência. O que observas?
1.8. Que relação existe entre todos os ângulos inscritos numa semicircunferência? Porquê?

2. Constrói, com recurso ao GeoGebra, uma outra circunferência de centro O e marca um ângulo inscrito ABC e o ângulo ao centro AOC, como mostra a seguinte figura.



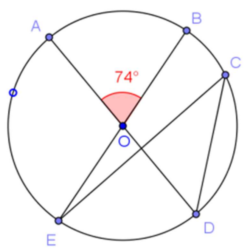
2.1. Mede as amplitudes dos ângulos ABC e AOC e do seu arco correspondente. Que relação observas entre as amplitudes do ângulo ao centro AOC, do ângulo inscrito ABC e do seu arco correspondente AC? Arrasta o ponto C sobre a circunferência e regista os resultados obtidos na seguinte tabela:

$A\hat{O}C$ (ângulo ao centro)	$A\hat{B}C$ (ângulo inscrito)	$\widehat{AC}$ (arco correspondente)

O que verificas?

2.2. Escreve uma conjectura que relacione o ângulo ao centro com o ângulo inscrito no mesmo arco correspondente.

Aplicação: Considera a circunferência de centro O. Atendendo aos dados da figura, mostra que o ângulo ECD tem de amplitude 37°.



Anexo VII

TAREFA 4 – Relação entre cordas geometricamente iguais e os correspondentes ângulos ao centro e arcos

1. Com recurso ao GeoGebra, constrói uma circunferência e desenha duas cordas geometricamente iguais.
   (Obs.: para desenhares uma corda CD, geometricamente igual a uma corda AB desenhada, considera um eixo de simetria da circunferência e realiza uma reflexão nesse eixo dos extremos da corda, pontos A e B, e renomeia os pontos obtidos para C e D, respectivamente)

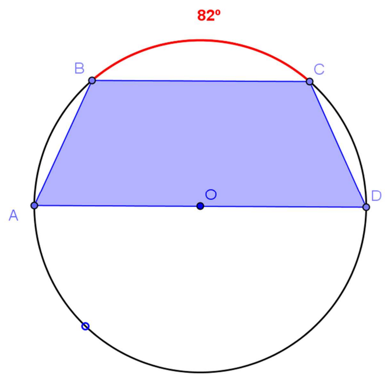
1.1. Desenha os ângulos ao centro correspondentes às cordas desenhadas e mede as suas amplitudes, bem como as amplitudes dos arcos descritos por estas cordas. O que verificas?

1.2. Desloca um ponto da corda traçada inicialmente sobre a circunferência e regista os resultados obtidos numa tabela.

$A\hat{O}B$	$C\hat{O}D$	$\widehat{AB}$	$\widehat{CD}$

Escreve uma conjectura que relacione as cordas com os arcos e com os ângulos ao centro correspondentes, respectivamente.

Aplicação: O trapézio [ABCD] é isósceles e está inscrito na circunferência de centro O. Atendendo aos dados da figura, determina as amplitudes dos arcos AB e CD, respectivamente.



Anexo VIII

TAREFA 5 – Propriedades geométricas em circunferências

1. **Reflexões numa circunferência**

   Com recurso ao GeoGebra, constrói uma circunferência de centro O, com um raio à tua escolha. Traça uma recta que passe pelo seu centro e marca os pontos de intersecção com a circunferência.

   1.1. A recta dividiu a circunferência em quantas partes? Essas partes são iguais? Como se designa essa recta?

   1.2. Qual o número máximo de eixos de reflexão de uma circunferência? Escreve uma conjectura que relacione as rectas que passam pelo centro de uma circunferência com os eixos de reflexão.

2. **Recta que passa pelo centro de uma circunferência e é perpendicular a uma corda**

   Com recurso ao GeoGebra, constrói uma circunferência de centro O e desenha uma corda AB. Desenha uma recta r que passe pelo centro da circunferência e seja perpendicular à corda AB.

   2.1. Na circunferência, marca o ponto de intersecção da circunferência com a recta r, ponto C. Desenha os arcos obtidos, arcos AC e CB, os ângulos ao centro BOC e COA e mede as suas amplitudes, respectivamente. O que observas?

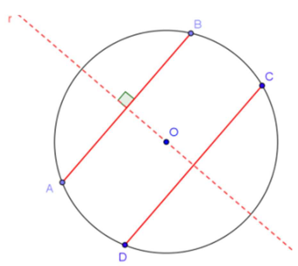
   2.2. Marca o ponto M, ponto de intersecção da recta r com a corda AB, e mede os segmentos obtidos, [MA] e [MB]. O que verificas?

   2.3. Move o ponto A. O que verificas? Escreve uma conjectura que relacione uma recta que passe pelo centro da circunferência com as cordas que lhes são perpendiculares e com os arcos e ângulos ao centro correspondentes.

   2.4. Prova a conjectura que estabeleceste na alínea anterior.

3. **Arcos e cordas compreendidos entre rectas paralelas**

   Com recurso ao GeoGebra, constrói uma circunferência de centro O e desenha uma corda AB e uma corda CD que seja paralela à corda AB.



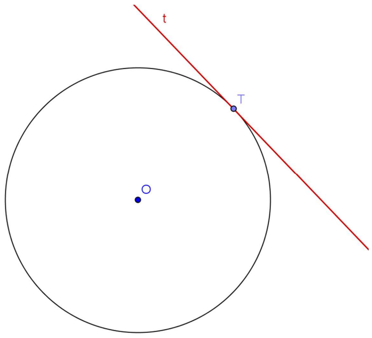
   3.1. Define as cordas AD e BC e mede os seus comprimentos. Move o ponto A. O que verificas?

   3.2. Define, agora, os arcos AD e BC e mede as suas amplitudes. Move o ponto A. O que verificas?

3.3. Escreve uma conjectura que relacione arcos e cordas compreendidos entre cordas paralelas. Prova a conjectura que estabeleceste.

4. **Tangente a uma circunferência**

Com recurso ao GeoGebra, constrói uma circunferência de centro O, um ponto T e a tangente, t, à circunferência no ponto T.



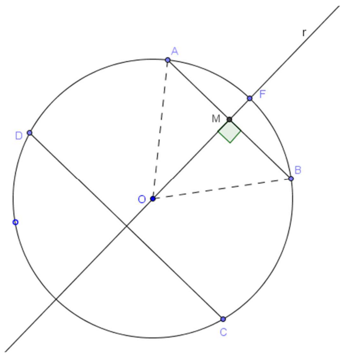
4.1. Desenha o raio OT. Qual é a posição relativa do raio OT e da recta tangente t?

4.2. Move o ponto T. O que observas?

4.3. Escreve uma conjectura que relacione uma recta tangente num ponto de uma circunferência com o raio no ponto de tangência.

4.4. Prova a conjectura que estabeleceste na alínea anterior.

Aplicação: Na figura, O é o centro da circunferência, as cordas AB e CD são paralelas e r é a mediatriz da corda AB.



1. Mostra que:
   - $\overline{OA} = \overline{OB}$
   - a recta r é um eixo de reflexão;
   - $[ABCD]$ é um trapézio isósceles.

2. Sabendo que a circunferência tem de raio $5cm$ e que $\overline{AB} = 8cm$, calcula $\overline{OM}$.

Anexo IX

TAREFA 6 – Soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de um polígono

1. **Soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono**

Já sabes que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° e de um quadrilátero é de 360°. Como determinar a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer? Para verificares o que acontece com outros polígonos convexos, vais resolver as questões que se seguem.

1.1. Com recurso ao GeoGebra, constrói os seguintes polígonos:

- um triângulo
- um quadrilátero
- um pentágono
- um hexágono
- um heptágono
- ...
- um polígono com 10 lados
- um polígono com 11 lados

De seguida, em cada um dos polígonos traça as suas diagonais a partir de um vértice fixado.

1.2. Completa a tabela que se segue:

Polígono	N.º de lados	N.º de triângulos em que o polígono ficou dividido	Soma dos ângulos internos do polígono
Triângulo	**3**	1	$\mathbf{1} \times 180° = 180°$
Quadrilátero	**4**	2	$\mathbf{2} \times 180° = 360°$
Pentágono			
Hexágono			
Heptágono			
...	...	...	...
Polígono com 10 lados			
Polígono com 11 lados			
...	...	...	...
Polígono com n lados			

1.3. Observa as colunas da tabela que preencheste. Encontras alguma relação entre os valores encontrados? De que depende a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo?

1.4. Escreve uma conjectura que relacione a soma das amplitudes de um polígono com o seu número de lados. Justifica.

2. **Soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono**

Ângulo externo de um polígono é o ângulo que num dado vértice do polígono é formado pelo prolongamento de um lado do polígono com o outro lado consecutivo.

2.1. Com recurso ao GeoGebra, constrói um pentágono $[ABCDE]$ à tua escolha e marca os seus ângulos externos. Mede as amplitudes de cada um desses ângulos e regista-as numa tabela:

Amplitude dos ângulos externos					Soma

Arrasta os vértices do polígono que construíste e compara os valores que registastes. O que observas?

2.2. Escreve uma conjectura para a soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono convexo.

Aplicação: Cada ângulo interno de um polígono regular mede 140°. Por quantos lados é composto o polígono? E qual a soma das amplitudes dos seus ângulos internos?

Anexo X

TAREFA 7 – Quadrado inscrito e circunscrito na mesma circunferência

Até agora pudeste observar que um polígono está inscrito numa circunferência quando todos os seus vértices forem pontos da circunferência. Também foi visto que um polígono está circunscrito a uma circunferência se tiver os seus lados tangentes à circunferência.

Utiliza o GeoGebra para investigar a relação entre a área de um quadrado circunscrito a uma circunferência e a área de outro quadrado inscrito na mesma circunferência. Investiga o que se passa se, em vez do quadrado, fosse considerado um outro polígono regular.

Escreve as tuas conjecturas e apresenta todas as justificações que julgues necessárias para validá-las.

Anexo XI

TAREFA 8 – Pavimentações com polígonos regulares

Um plano diz-se pavimentado quando estiver totalmente revestido, ou seja, quando não houver espaços vazios nem sobreposições.

As pavimentações com polígonos regulares podem ser encontradas de variadas formas na natureza, na arte, na ciência, em desenhos, e classificam-se tendo em conta o número e o tipo de formas geométricas que contêm. Assim:

- as que envolvem apenas a repetição de polígonos regulares congruentes, e cada vértice da pavimentação é também vértice do polígono regular, designam-se por *pavimentações regulares*;
- as que combinam dois ou mais tipos de polígonos regulares, e os vértices da pavimentação são todos do mesmo tipo, por *pavimentações semi-regulares*;
- as que combinam dois ou mais tipos de polígonos regulares, mas os vértices da pavimentação não são todos do mesmo tipo, por *pavimentações demi-regulares*.

Com recurso ao GeoGebra, constrói um conjunto de polígonos regulares cujos lados tenham o mesmo comprimento.

Indica duas combinações de dois dos polígonos regulares construídos para obter uma pavimentação semi-regular. E com três dos polígonos regulares construídos, quais as combinações possíveis?

Que condições devem existir para que uma combinação de polígonos regulares dê origem a uma pavimentação do tipo semi-regular?

Apresenta uma descrição das tuas construções, indicando as transformações geométricas utilizadas bem como todas as etapas que estiveram na base da estrutura das tuas construções.

Data de entrega: 07 de Abril de 2011.

Anexo XII

TAREFA 9 – Razões trigonométricas de ângulos agudos

1. Com recurso ao GeoGebra, constrói um triângulo [ABC], rectângulo em A e com um ângulo α de amplitude 60°, em B, por exemplo.

1.1. Mede os lados do triângulo rectângulo e completa a tabela seguinte. Calcula as razões entre as medidas dos lados. Desloca o ponto A e regista os valores obtidos para as novas posições deste ponto.

$\hat{B} = 60°$	Medidas dos lados do triângulo			Razões entre as medidas dos lados		
	Cateto oposto	*Cateto adjacente*	*Hipotenusa*	$\frac{Cateto\ oposto}{Hipotenusa}$	$\frac{Cateto\ adjacente}{Hipotenusa}$	$\frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente}$
Posição 1						
Posição 2						
Posição 3						

1.2. Compara os resultados obtidos na tabela. O que observas?

1.3. O valor encontrado para cada razão depende das medidas dos lados dos triângulos obtidos? Justifica a tua resposta.

1.4. Considera, agora, o ângulo B com amplitude do 30° ou 45°. Desloca o ponto A e regista os novos valores encontrados nas tabelas que se seguem:

$\hat{B} = 30°$	Medidas dos lados do triângulo			Razões entre as medidas dos lados		
	Cateto oposto	*Cateto adjacente*	*Hipotenusa*	$\frac{Cateto\ oposto}{Hipotenusa}$	$\frac{Cateto\ adjacente}{Hipotenusa}$	$\frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente}$
Posição 1						
Posição 2						
Posição 3						

$\hat{B} = 45°$	Medidas dos lados do triângulo			Razões entre as medidas dos lados		
	Cateto oposto	*Cateto adjacente*	*Hipotenusa*	$\frac{Cateto\ oposto}{Hipotenusa}$	$\frac{Cateto\ adjacente}{Hipotenusa}$	$\frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente}$
Posição 1						
Posição 2						
Posição 3						

O que observas?

1.5. O valor encontrado para cada razão depende das amplitudes dos ângulos considerados? Justifica a tua resposta.

1.6. As razões anteriormente determinadas têm denominações específicas:

$$\frac{Cateto\ oposto\ a\ \alpha}{Hipotenusa} \rightarrow sen(\alpha)$$

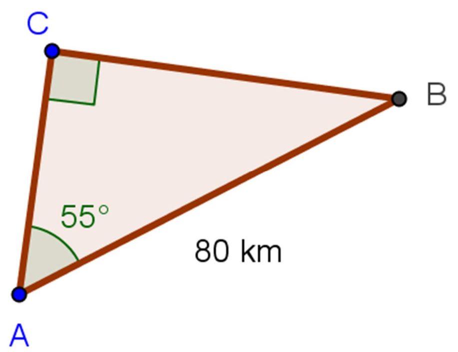
$$\frac{Cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{Hipotenusa} \rightarrow cos(\alpha)$$

$$\frac{Cateto\ oposto\ a\ \alpha}{Cateto\ adjacente\ a\ \alpha} \rightarrow tg(\alpha)$$

Observa os valores das razões trigonométricas determinadas anteriormente. Para que valores parecem variar as razões seno e cosseno? Justifica a tua resposta.

Aplicação

Duas cidades A e B distam 80 km. Uma cidade C forma com as cidades A e B um triângulo [ABC], rectângulo em C.



Sabendo que $C\hat{A}B = 55°$, determina a distância entre as cidades A e C e entre as cidades B e C.

Anexo XIII

TAREFA 10 – Relações entre as razões trigonométricas

Com recurso ao GeoGebra, constrói um triângulo [ABC] rectângulo em C. Considera α um ângulo agudo do triângulo construído.

1. Considerando diferentes amplitudes para o ângulo α completa a tabela seguinte, utilizando as medidas dos lados dos respectivos triângulos.

$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{sen(\alpha)}$	$\boldsymbol{cos(\alpha)}$	$\boldsymbol{tg(\alpha)}$	$\boldsymbol{\frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}}$			

2. Compara os resultados obtidos na tabela. O que observas?
3. Escreve uma conjectura que relacione a tangente de um ângulo agudo de um triângulo rectângulo com a razão entre o seu seno e o seu cosseno.
4. Prova a conjectura que estabeleceste na alínea anterior.
5. Para cada uma das amplitudes do ângulo α consideradas na tabela anterior, eleva ao quadrado os valores do seno e do cosseno e, posteriormente, adiciona os resultados obtidos. Regista os valores na tabela anterior e compara os seus resultados. Escreve uma conjectura que relacione os quadrados destas razões trigonométricas.
6. Prova a conjectura que estabeleceste na alínea anterior.

Aplicação

Sendo β a amplitude de um ângulo agudo de um triângulo rectângulo e $tg(\beta) = 3{,}2$ determina os valores exactos de $cos(\beta)$ e de $sen(\beta)$.

Anexo XIV

TAREFA 11 – Investigando volumes

No nosso quotidiano deparámo-nos com objetos comuns de formas distintas. Além dos prismas e cilindros, podemos observar outro tipo de formas. Por exemplo, o planeta onde nós vivemos tem a configuração de uma esfera. Os gelados são muitas vezes servidos em cones ou copos cilíndricos. Alguns dos monumentos históricos que nós estudamos têm a forma de pirâmides. Todas estas formas podem ser caracterizadas pelas suas dimensões: o prisma quadrangular, por exemplo, é definido pelo comprimento e largura da sua base (constituída por um quadrilátero) e pela sua altura; o cilindro é caracterizado pelo raio da base circular e pela sua altura; o cone define-se pelo raio da base circular e pela sua altura; as esferas, embora possam diferir no seu tamanho, são todas do mesmo formato e, assim, são definidas pelo seu raio; a pirâmide quadrangular caracteriza-se pelo comprimento e largura da sua base (constituída por um quadrilátero) e pela sua altura.

Nesta investigação, vais procurar relações entre cones, cilindros e esferas. Para isso, lê com atenção a seguinte situação.

> "A Ana e o João decidem ir comer um gelado. Quando estão prestes a sair da geladaria, a Ana lembrou-se de comprar um gelado para o seu irmão mais pequeno que ficou em casa, mas tem receio de chegar a casa com o gelado derretido. O João não vê qualquer problema porque se a Ana decidir escolher qualquer um dos recipientes, cone ou copo cilíndrico, o gelado não vai derreter para fora do recipiente. Qual dos recipientes, cone ou copo cilíndrico, deve a Ana escolher de tal forma a que não entorne gelado, caso ele derreta por completo?"

1. Sabendo que cada recipiente tem uma altura de 8 centímetros e um raio de 4 centímetros e que cada bola de gelado é uma esfera com um raio de 4 centímetros, qual dos recipientes deve a Ana escolher? Justifica a tua resposta.

2. Quantas bolas de gelado podem ser embaladas em cada um dos recipientes?

3. Escreve uma conjectura que relacione os volumes do cone, do cilindro e da esfera considerados.

4. Prova a conjectura que estabeleceste na alínea anterior.

(Consulta o site http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_275_g_3_t_3.html)

Anexo XIV

Guião da entrevista

1. A metodologia de trabalho adoptada nas aulas de Geometria do 9.°ano estimulou a tua aprendizagem?
2. 1.2. Indica algumas vantagens e desvantagens do uso do quadro interativo, do computador e do GeoGebra na tua aprendizagem de assuntos de Geometria do 9.° ano
3. 1.4. Gostarias de usar o computador e o GeoGebra na aprendizagem de outros assuntos da Matemática?
4. Gostarias de usar o computador e o GeoGebra na aprendizagem de outros assuntos da Matemática?
5. Que diferenças identificas entre as aulas em que usaste o computador e o GeoGebra e as aulas em que não usaste estes recursos?
6. Dos tópicos abordados nas aulas de Geometria, qual(ais) o(s) que, na tua opinião, foi(ram) mais interessante(s)?
7. Que dificuldades sentiste quando resolveste as tarefas propostas?
8. 2.4. Das tarefas realizadas, houve alguma que tenhas preferido particularmente? Indica qual(ais) e justifica a(s) tua(s) escolha.
9. Quais as maiores dificuldades com que te deparaste na realização das tarefas? Como as colmataste?
10. Durante a implementação da maior parte das tarefas, houve momentos de discussão de algumas questões. Achaste importante apresentar, justificar, discutir e defender as tuas conclusões perante a turma?
11. Preferiste apresentar os teus raciocínios de forma escrita ou oral? Justifica
12. Qual o contributo do GeoGebra, para a formulação de conjecturas
13. Qual foi a maior dificuldade que sentiste quando tentaste provar uma conjectura? Como ultrapassaste essa dificuldade?
14. O que é, para ti, argumentar matematicamente?

Anexo XIV

GUIÃO DA PARA A ELABORAÇÃO DE UM RELATÓRIO

Um relatório escrito é um trabalho que descreve pormenorizadamente uma situação. Este tipo de trabalho tem como objectivo principal desenvolver a capacidade de comunicar por escrito a tarefa realizada. Além de outros aspectos, num relatório devem constar não só as conclusões mas também todos os procedimentos utilizados para chegar a essas mesmas conclusões.

Assim, pode ser organizado de acordo com os seguintes aspectos:

– apresentar uma breve introdução, referindo o objectivo do trabalho bem como as questões colocadas;

– descrever, de uma forma clara e organizada, todas as fases que foram aplicadas para a exploração da tarefa, englobando as estratégias usadas (mesmo os erros cometidos na criação das conjecturas e a forma como foram ultrapassados) e todos os valores encontrados e, caso seja adequado, incluir esquemas, tabelas, esboços de figuras (...);

– apresentar as conclusões, elaborando um resumo de tudo o que foi aprendido com a realização deste trabalho;

– efetuar uma apreciação crítica da tarefa, referindo o interesse despertado pela mesma, as dificuldades com que se deparou assim como a forma como decorreu o trabalho de grupo.

Relativamente à avaliação de um relatório, há aspectos a ser tidos em conta nomeadamente a organização de todo o trabalho, a descrição dos procedimentos utilizados, a forma como são apresentados e explicados os argumentos usados, a criatividade e a correção da linguagem usada.