Universidade do Minho
Escola de Ciências

Helena Maria Correia dos Santos

“Limite”: um estudo sobre manuais escolares e exames, em Portugal

Outubro de 2010

Helena Maria Correia dos Santos **“Limite”: um estudo sobre manuais escolares e exames, em Portugal**

UMinho | 2010

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Helena Maria Correia dos Santos

“Limite”: um estudo sobre manuais escolares e exames, em Portugal

Dissertação de Mestrado
Mestrado em Matemática – Formação Contínua de Professores

Trabalho efectuado sob a orientação do
Professora Doutora Maria Elfrida Ramos de Matos Ralha

Outubro de 2010

Agradecimentos

Este espaço é dedicado a todos que contribuíram para que este trabalho fosse concretizado.

Em primeiro lugar quero destacar a Professora Doutora Elfrida Ralha, que desde o primeiro momento me ajudou a traçar o caminho que fui percorrendo. A sua preciosa ajuda fez com que as minhas hesitações se tornassem em noções claras, o que funcionou como um importante estímulo.

Devo também um agradecimento especial ao Henrique, principal incentivador da realização deste trabalho, cujo apoio nos momentos cruciais, tal como o da minha mãe, foi fundamental.

Existem, ainda, pessoas que com o seu contributo, por mais pequeno que fosse, me ajudaram a atingir esta meta. Neste grupo estão alguns colegas e amigas, dos quais destaco a Ana, a Armanda, a Arminda, a Bé, a Cristina, a Fernanda e o João Pedro. A eles o meu sincero agradecimento.

Estou, também, imensamente reconhecida às colegas Fátima, Luísa e Iolanda que me ajudaram nas pesquisas realizadas nas bibliotecas das escolas, respectivamente, Escola Secundária Sá de Miranda, Escola Secundária Rodrigues de Freitas e Escola Secundária Santa Maria Maior.

Considero que, o profissionalismo do pessoal de algumas bibliotecas que frequentei, se converteu, para mim, numa excelente ajuda e, por isso, lhe devo uma palavra de agradecimento.

Resumo

A experiência no ensino da Matemática, em especial no Ensino Secundário, e nomeadamente no ensino do Cálculo Infinitesimal, fez com que nos defrontássemos com a realidade que é o ensino/aprendizagem do conceito matemático de “Limite”.

Ficamos com a percepção que existem inúmeras dificuldades inerentes ao ensino/aprendizagem deste conceito matemático, o que fez com que nos surgissem diversas questões:

- Porque se torna tão difícil, para os estudantes, o estudo deste conceito?
- Quando começou a ser estudado este conceito, a nível de ensino secundário/liceal?
- Como se tem enquadrado este conceito, nos diversos programas e níveis de ensino?
- Como tem sido feita a abordagem deste conceito base nos manuais escolares, nos diversos programas da disciplina?
- Que “obstáculos” à aprendizagem podem ser encontrados nesses manuais?
- Como tem evoluído a prática deste conceito, nesses manuais?

Os exames estão de acordo com essa prática, e também com as indicações programáticas?

Neste trabalho procuramos encontrar respostas para estas questões, começando por realizar um enquadramento histórico e uma análise das abordagens e práticas deste conceito, no ensino secundário, em Portugal. Assim:

No Capítulo I introduzimos origens históricas respeitantes ao conceito de limite.

No Capítulo II reflectimos sobre o papel desempenhado pelas definições em Matemática. Explorámos, em especial, as definições de limite segundo Heine e segundo Cauchy.

No Capítulo III coligimos uma série de programas de Matemática para os ensinos Básico e Secundário e que atravessaram, em particular, diversas reformas educativas em Portugal

No Capítulo IV analisámos manuais escolares portugueses dos ensinos Secundário/Liceal e Universitário e que atravessam, em geral, o século XX.

No Capítulo V detivemo-nos numa análise de exames nacionais para os quais o conceito de limite estaria, por defeito, ligado.

Registámos, em jeito, de notas conclusivas, o nosso sentimento quer relativamente à investigação desenvolvida, quer no que respeita a possíveis trabalhos futuros. Uma longa, mas não exaustiva, lista bibliográfica encerra, finalmente, esta dissertação.

Abstract

The experience in teaching Mathematics at a secondary school, namely Infinitesimal Calculus, has prompted the reality of teaching/learning the concept of “Limit”. We have come across countless difficulties in teaching/learning this mathematical concept, which gave rise to several questions, which are as follows:

- Why is this concept so difficult to grasp by students?
- When did this concept start being taught at secondary/highschool level?
- How as this concept fitted the several syllabus and teaching levels?
- How has the approach to this concept been in text books, in the several syllabuses?
- Which “hinderances” to learning can be found in those text books?
- How as the practice of this concept evolued in those text books?
- Are the exams in accordance with that practice and with the syllabus guidelines as well?

This project has sought to find the answers to these questions, by starting with the historical frames and analysis of the approaches and practice of the concept of limit, mainly, at secondary school level, in Portugal.

Índice

“É, aliás, por isso que nenhum objecto pode atingir a velocidade da luz. Se o fizesse, a sua massa tornar-se-ia infinitamente grande, o que requereria uma energia infinita para movimentar esse objecto. Ora, isso não pode ser, não é? Daí que se diga que a velocidade da luz é a velocidade limite do universo. Nada a pode igualar, se um corpo a igualasse, a sua massa tornar-se-ia infinitamente grande.”

“A Fórmula de Deus”
José Rodrigues dos Santos

CAPÍTULO I

1. Introdução

> *“Graças ao conceito de limite, a análise matemática está hoje construída com rigor lógico inigualável, superior ao da geometria dos gregos”*
>
> (Silva & Paulo, 1956)

Sabemos, através dos inúmeros estudos realizados[1], que na iniciação à área da Matemática denominada de Análise (ou Cálculo)[2] Infinitesimal a maioria dos obstáculos que os alunos enfrentam estão relacionados com os conceitos matemáticos de “limite” e de “infinito”.

Além disso, refere Schubring (Schubring, 2005) os conceitos, na Análise, não podem ser vistos de uma forma isolada, mas como conexões dentro de uma série de conceitos básicos, que para Bohlmann, em particular, são: número, função e limite.

Tendo em consideração a fase tardia em que estes conceitos foram rigorosamente formalizados, dentro da história da Matemática, somos induzidos a pensar, se outras razões não houvesse, que se tratam de conceitos de grau de dificuldade elevado.

O denominado Cálculo Infinitesimal, que está na origem do estudo dos “Limites”, teve oficialmente o seu início no século XVII, com o inglês Isaac Newton e o alemão Gottfried

[1] Veja-se, por exemplo, (Projecto AHA, Heuristic Approach to Analysis (Hauchart and Schneider, 1996) (Robert & Speer, 2001)

[2] A designação de “Cálculo” é uma expressão simplificada usada pelos matemáticos para se referirem à ferramenta usada para analisar, qualitativamente ou quantitativamente, variações que ocorrem em fenómenos de natureza física.

Leibniz. Contudo, nem o início foi acidental, resulta de muitos séculos de reflexões afins sobre os conceitos nem a “paternidade” do assunto que se atribui a Newton e a Leibniz foi desprovida de conflitos.

Segundo Kline (Kline, 1959) já os contemporâneos de Newton (e de Leibniz) consideravam o Cálculo como sendo uma colecção de *ingénuas falácias* e mais de um século após, Lagrange, (1736-1813) considerava esta área do saber matemático pouco sólida, embora apresentasse resultados correctos *porque os erros se anulavam uns aos outros*. Também D’Alembert, em finais do mesmo século XVIII, alertava os estudantes de que, no Cálculo, iriam necessitar de fé para poderem prosseguir a sua aprendizagem.

À partida, para o ensino destes conceitos como para o ensino de quaisquer outros conceitos matemáticos, o professor, mesmo cumprindo as orientações programáticas, necessita de efectuar opções a vários níveis, as quais almejam, como seria de imaginar um ensino com sucesso, isto é, uma aprendizagem/compreensão dos conceitos bem sucedida por parte dos alunos. Estas opções podem ter a ver com as escolhas de imagens, com a apresentação do que escreve, com a sequência daquilo que diz e escreve, com a selecção de exemplos e de exercícios, etc.. Em suma, dentro dessas opções incluímos quer as definições quer as representações dos conceitos em análise e que se tornam, naturalmente, fundamentais no processo ensino-aprendizagem.

Em Portugal, desde a fundação da Faculdade de Matemática (século XVIII), primeira no mundo, pelo Marquês de Pombal na Universidade de Coimbra (F. G. Teixeira, 1934), que existe uma disciplina onde se estudava o Cálculo Infinitesimal e nunca mais este tópico matemático foi excluído do ensino (F. G. Teixeira, 1934), independentemente da dimensão desta presença e/ou da precocidade com que surge nos programas curriculares (dos Ensinos Secundário e/ou Superior). De resto é opinião generalizada de que depois da Geometria de Euclides, o Cálculo é o mais original e frutífero ramo da Matemática (Kline, 1959).

Sendo o Cálculo Infinitesimal um tema deveras importante para o desenvolvimento de outras ciências, é, actualmente, iniciado no Ensino Secundário (quer em Matemática, quer na Física), prolonga-se para o Ensino Superior e nós próprias optámos por centrar a nossa investigação num dos conceitos basilares que constituem esta área do saber matemático: o conceito matemático de **limite**.

Assim, neste estudo, interessar-nos-á analisar de que forma tem sido tratado o conceito de limite, quer numa perspectiva histórica, quer numa dimensão didáctica, reflectindo, em particular, nos factores que podem constituir obstáculos à sua aprendizagem/compreensão, e comparando também a ênfase que é colocada no ensino (partindo, em particular, **da análise de manuais escolares**) com aquilo que se exige ao aluno, no final do ensino secundário, em termos das questões que lhe são colocadas em **exames nacionais**. Este estudo envolverá, necessariamente, a análise de programas da disciplina de Matemática, manuais escolares, exames nacionais e outros documentos afins relacionados com o ensino do conceito de limite, no Ensino Secundário e em Portugal.

Estaremos ainda particularmente sensibilizadas para a forma como se realiza, em termos da aprendizagem do conceito de limite, a transição do ensino secundário para o ensino superior.

2. As origens do conceito de limite

2.1 Breve resenha histórica do aparecimento do conceito

Registos relativos ao uso do conceito de limite podem, em particular, ser encontrados na Grécia Antiga, em problemas relacionados com a determinação de áreas de regiões limitadas por linhas curvas e de volumes.

O longo percurso percorrido teve possivelmente origens, na descoberta da incomensurabilidade (e da existência de quantidades irracionais) entre, por exemplo, o lado e a diagonal de um quadrado ou o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro.

Para a resolução de problemas de áreas (quadraturas) e de volumes (cubaturas), os matemáticos gregos (particularmente Arquimedes) recorriam ao, denominado, *Método da Exaustão*, atribuído a Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.) e que é enunciado, por exemplo, na primeira proposição do Livro X, do famoso tratado *Os Elementos de* Euclides (Heath, 1956)*:*

> *Two unequal magnitudes being set out, if from the greater there be subtracted a magnitude greater than its half, and from that witch is left a magnitude greater than its half, and if this process be repeated continually, there will be left some magnitude witch will be less than the lesser magnitude set out.*

A determinação da área de um círculo era, em particular, abordada, tendo em conta que se tratava de uma figura que se podia inscrever e circunscrever num polígono regular. Aumentando/duplicando o número de lados do polígono, a área da circunferência ia ficando limitada/compreendida entre as áreas dos polígonos inscritos e circunscritos que se iam obtendo sucessivamente.

Se designarmos por δ a diferença entre o valor da área procurada e os dos polígonos usados, a aplicação deste método permitia enquadrar essa área com a aproximação determinada por δ. Estas questões de convergência – termo, segundo (Estrada, Sá, Queiró, Silva, & Costa, 2000), sem qualquer significado na Antiguidade, mas aqui usado para significar questões relativas à determinação de medidas só possíveis de obter por uma sequência repetitiva de cálculos que conduzem ao valor pretendido – tinham essencialmente uma concepção geométrica, a qual os Gregos não ultrapassavam.

Podemos assim dizer que foram os Gregos os primeiros a trabalhar com o conceito matemático que só cerca de dois mil anos depois foi definido: **limite**. Podemos, inclusive argumentar que Arquimedes foi, porventura, um precursor exímio deste nosso conceito; usava-o, magistralmente, recorrendo a este método de demonstração - a que mais tarde, Gregório de S. Vicente havia de chamar de “exaustão” - e que, nós hoje em dia, identificaríamos como uma dupla redução ao absurdo. Estamos, seguramente, perante um conceito com uma forte identidade geométrica mas, para além desta concepção geométrica, também se identificam, no conceito de limite, uma concepção aritmética e/ou ainda uma concepção, topológica[3].

[3] Esta última concepção resulta da necessidade de definir número real.

Os trabalhos realizados por Dedekind (1831-1916) e Cantor (1845-1918) , no século XIX, conduzindo à criação da Teoria dos Conjuntos, vieram colmatar falhas relativamente ao conhecimento do tipo de número que o limite poderia admitir, apesar de Cauchy ter já afirmado que um número irracional poderia ser o limite de uma sequência de números racionais.

Newton no séc. XVII alcançou, por sua vez, a aritmetização (Caraça, 1940) do conceito e sem o ter estabelecido, com os parâmetros de rigor actuais, esteve muito próximo de uma definição actual, a saber (Katz, 1998):

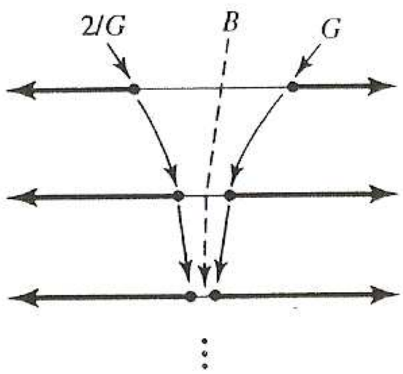
> *The ultimate ratio of evenescent quantities…[are] limits towards which the ratios of quantities decreasing without limit do always converge; and to which they approach nearer than by any given difference, but never go beyond, nor in effect attain to, till the quantities are diminished in infinitum.*

2.2 O conceito de limite: alguns problemas históricos

2.2.1 Um problema atribuído a Eudoxo

Eudoxo procurou as medidas dos lados de um rectângulo de área 2, designando por G e por 2/G essas medidas.

Assim, designando por B o valor médio para cada G e 2/G, e atribuindo ao novo valor de G o valor de B obtido anteriormente, verificamos que os sucessivos valores de G convergem para $\sqrt{2}$. Recorrendo à representação com números decimais (não disponíveis na época de Eudoxo), mas que para nós facilita a comparação com $\sqrt{2}$, temos (Prisley, 1998):



2/G	B	G
1.33333	1.41667	1.50000
1.41176	1.41422	1.41667
1.41421		1.41422
⋮	⋮	⋮

Na época de Eudoxo, os números $2/G$ e G, usados no exemplo acima, seriam representados por:

$2/G$	G
$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{24}{17}$	$\frac{17}{12}$
$\frac{816}{577}$	$\frac{577}{408}$

Cantor utiliza a condição de Cauchy, para efectuar a passagem dos números racionais aos reais. Sendo a condição de Cauchy uma condição de convergência de sucessões numéricas é a partir de sucessões de números racionais que satisfazem aquela condição, que se define número real.

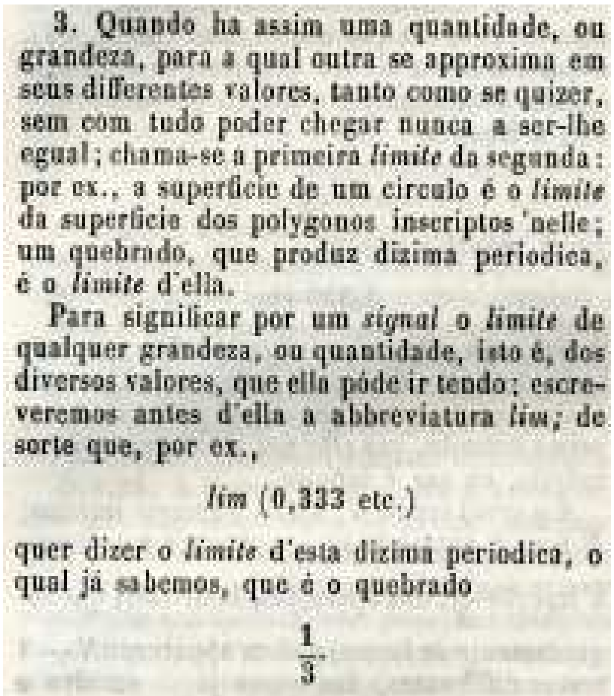
Como vemos, podemos encontrar os fundamentos da Análise na Teoria de Conjuntos.

2.2.2 Uma questão relacionada com a concepção aritmética

Como complemento ao livro de Bezout, que serviu de compêndio no primeiro ano da Faculdade de Matemática, aquando da reforma pombalina de 1772, Sebastião Corvo d’Andrade escreveu, quase um século depois, uma “*Nota sobre a dízima periódica*”, onde esta concepção aritmética de limite nos surge bem exemplificada (Andrade, 1860). Diz o autor:

> *…por exemplo a fracção* $\frac{1}{3}$ *assim reduzida produz 0,333 etc.*
>
> *Designando pelo etc. escripto no fim, que esta serie de notas decimaes assim repetidas não acaba nunca; o que por outras palavras se exprime dizendo, que ella vai ou se prolonga ao infinito, ou que é infinita.*

Nesta nota é descrita a forma de transformar em dízima uma divisão em que houve resto, ou reduzir a dízima numa fracção ordinária e seguidamente apresenta um exemplo onde uma dízima periódica é transformada num quebrado. Note-se, em particular, o uso da notação de “lim”


3. Quando ha assim uma quantidade, ou grandeza, para a qual outra se approxima em seus differentes valores, tanto como se quizer, sem com tudo poder chegar nunca a ser-lhe egual; chama-se a primeira *limite* da segunda: por ex., a superficie de um circulo é o *limite* da superficie dos polygonos inscriptos n'elle; um quebrado, que produz dizima periodica, é o *limite* d'ella.

Para significar por um *signal* o *limite* de qualquer grandeza, ou quantidade, isto é, dos diversos valores, que ella póde ir tendo; escreveremos antes d'ella a abbreviatura *lim*; de sorte que, por ex.,

$$\mathit{lim}\ (0{,}333\ \text{etc.})$$

quer dizer o *limite* d'esta dizima periodica, o qual já sabemos, que é o quebrado

$$\frac{1}{3}.$$

Esta “Nota” inicia-se com um pequeno texto de Carnot (1796-1832) onde o Método da Exaustão é reconhecido como estando na origem do Cálculo Infinitesimal e é denominado como o “método da invenção dos antigos” (Andrade, 1860):

Cette doctrine *(de la méthode d'exhaustion)* est certainement très-belle et très-précieuse; elle porte avec elle le caractère de la plus parfaite évidence, et ne permet pas qu'on perde son objet de vue: c'était la méthode d'invention des anciens; elle est encore très-utile aujourd'hui, par ce qu'elle exerce le jugement, qu'elle accoutume à la rigueur des démonstrations, et qu'elle renferme le germe de l'analyse infinitésimale. Il est vrai qu'elle exige quelque contention d'esprit; mais la méditation n'est elle pas indispensable à tous ceux qui veulent pénétrer dans la connaissance des lois de la nature, et n'est-il pas nécessaire d'en contracter l'habitude de bonne heure, pourvu qu'on n'y sacrifie pas un temps trop considerable? CARNOT, *Reflex. sur la Metaph. du Calc. Infini tés.* n.º 109.

2.3 A formalização do conceito em Cauchy

Apesar de nos trabalhos de Jean le Rond d’Alembert (1718-1783) e Simon L’Huilier (1750-1840) se reconhecer uma forte concepção geométrica, da noção de limite, pode dizer-se que eles foram preparativos para o trabalho de Cauchy, no sentido da popularização da ideia. Senão vejamos, numa entrada sob o nome de “Limite” (1765), publicado em “Encyclopédie methodique” (1784-97), da autoria de d’Alembert podemos ler a seguinte definição:

> *LIMITE, s. f. (Mathémat.) On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la premiere plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche, puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche; ensorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable.*

Ao que se segue um exemplo (claramente de natureza geométrica):

> *Par exemple, supposons deux polygones, l’un inserit & l’autre circonserit à un circle, il est évident que l’on peut en multiplier les côtés autant que l’on veudra; & ,dans ce cas, chaque polygone approchera toujoursde plus en plus de la circonférence du cercle, le contour du polygone inserit augmentera, & celui du circonscrit diminuera; mais le périmetre ou le contour du premier ne surppassera jamais la longuer de la circonférence, &celui du second ne será jamais plus petit que cette même circonférence; la circonférence du cercle est donc la limite de l’augmentation du premier polygone, & de la diminuition du second.*

Da mesma forma, na obra de Simon L’Huilier intitulada “Exposition Élémentaire des príncipes des calculs supérieurs” (1786) o autor apresenta alguns exemplos (novamente de índole geométrica) relacionados com a definição de “limite”. Entre eles podemos ver (L'Huilier, 1786):

> *Archiméde a démontré: qu’on peut inscrire & circonscrire au cercle des polygones réguliers de même nom, dont, tant les contours de les surfaces, different du contour & de la surface de ce cercle, moins que d’aucune ligne*

> *au d’aucune surface assigné.Et comme le contour & la surface du cercle sont plus grands que les contours & les surfaces des polygones inserits, & plus petits que les contours & surfaces des polygones circonscrits, le contour & la surface du cercle sont respectivement les limites en grandeur & en petitesse des contours & des surfaces, d’une part, des polygones inscrits, & et de l’autre part, des polygones circonscrits. Il en est de même des surfaces & des solidités, des cylindres, des cones, & de la sphère, relativement aux prismes, pyramides, & polyèdres, qui leur sont respectivement inscrits & circonscrits.*
>
> *Item. Le rapport d’égalité est la limite en grandeur ou en petitesse des rapports des contours & des surfaces des polygones inscrits & circonscrits au cercle, au contour & à la surface de ce cercle; & il en est de même des cylindres, cônes, & sphères, relativement aux prismes, pyramides, & polyèdres qui leur sont inscrits & circonscrits.*

Cauchy, por sua vez, sugere, no *“Cours d’analyse”*, em 1821, uma definição onde apela às noções de número, variável e função, ultrapassando, deste modo, os exemplos associados às intuições geométricas e dinâmicas. Para ilustrar este conceito, Cauchy dá como exemplo um número irracional que é o limite de várias fracções racionais, as quais terão valores cada vez mais próximos desse irracional (Cauchy, 1821). A saber:

> Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus; &c....

E apresenta como exemplo:

> une variable, qui n’admettrait pour valeurs successives que les différens termes de la suite
>
> $$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \&c....$$
>
> prolongée à l’infini, décroitrait constamment, mais non pas indéfiniment, puisque ses valeurs successives convergeraient vers la limite 1. Au contraire,

A definição de Cauchy tem por base o conceito de infinitésimo, o qual, para este matemático, não passa de uma variável tendente para zero – resultado do desenvolvimento do conceito de função, durante o séc. XVIII (Cauchy, 1821), nomeadamente:

> On dit qu'une quantité variable devient *infiniment petite*, lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro.

Em suma: vemos, em Cauchy, o conceito de limite associado ao de "infinitésimo".

2.4 As origens do conceito em Portugal – José Anastácio da Cunha

Ainda sobre as origens do conceito de limite, não podemos deixar de fazer referência ao matemático português José Anastácio da Cunha, que publicou postumamente, em 1790, uma obra mestra em cerca de 300 páginas, a que chamou, porventura numa tradição Newtoniana, "Principios Mathematicos para a instrução dos alumnos do Collegio de São Lucas, da Real Casa Pia do Castello de São Jorge".

Gomes Teixeira, considerou que, tal como outros matemáticos estrangeiros, Anastácio da Cunha, preso à tradição grega evitou a utilização da palavra "limite", o que, segundo Gomes Teixeira, tornaria mais explícitas algumas condições incluídas nas demonstrações. Efectivamente, Gomes Teixeira salientou que a essência do conceito de limite já existia na obra de Anastácio da Cunha, apesar de esta noção não existir, de forma explícita, nos "Princípios Mathematicos". Para ilustrar esta opinião de Gomes Teixeira, Pedro José da Cunha (Pedro José Cunha, 1940), salienta a definição de série convergente apresentada nos "Princípios Mathematicos" (Livro IX):

> *Série convergente chamam os Mathematicos áquela, cujos termos são semelhantemente determinados, cada hum pelo numero dos termos precedentes, de sorte que sempre a série se possa continuar, e finalmente venha a ser indiferente continua-la ou não, por se poder desprezar sem erro notável a somma de quantos termos se quizesse ajuntar aos já descritos ou indicados: e estes últimos indicam-se escrevendo & depois dos primeiros dois ou trez, ou quantos se quizer: he porem necessário que os termos escritos mostrem como se poderia continuar a série, ou que isso se saiba por outra via.*

Segundo Pedro José da Cunha, a "falta de precisão" nesta definição resulta do facto de ter sido evitado o recurso à noção de "limite".

Se nos lembrarmos que estamos a trinta anos da formalização do conceito, podemos simplesmente conjecturar a forma como os trabalhos deste matemático teriam evoluído, caso não tivesse havido o afastamento de Anastácio da Cunha da Universidade, pela Inquisição, assim como a ocorrência prematura da sua morte. De resto, ainda recentemente se encontraram manuscritos inéditos dignos de uma referência adicional (Ralha & al, 2006).

CAPÍTULO II

1. O papel desempenhado pelas definições matemáticas

1.1 Algumas considerações de índole geral

A questão da formação de conceitos em Matemática engloba, naturalmente, o papel da definição dos próprios conceitos. Enquanto uma actividade matemática, numa definição usam-se quer conceitos previamente definidos quer termos primitivos (que não se definem). Assim, uma definição estabelece, cientificamente, um conjunto de condições necessárias e suficientes relativas ao conceito e que desejavelmente são não supérfluas nem circulares. Todavia, nessas mesmas definições matemáticas se as entendermos enquanto actividade didáctica não têm necessariamente que cumprir todos estes requisitos, nomeadamente o da minimalidade.

Compete, pois, ao professor olhar criticamente para as definições e tentar identificar e/ou prever obstáculos, à aprendizagem, que essas definições possam vir a criar na mente do aprendiz.

A este respeito, Poincaré (Poincaré, 1947), colocava a seguinte questão:

> (*Qu’est-ce qu’une bonne définition? Pour le philosophe, ou pour le savant, c’est une définition qui s’applique à tous les objets définis et ne s’applique qu’à eux ; c’est celle qui satisfait aux règles de la logique. Mais dans l’enseignement, ce n’est pas cela) ; une bonne définition, c’est celle qui est comprise par les élèves.*

Ou seja, para Poincaré a qualidade de uma definição matemática mede-se à custa do grau de compreensão que os alunos têm desse conceito. A definição enquanto actividade matemática pode evitar erros, corrigir dificuldades, esclarecer dúvidas porquanto sendo uma actividade humana de cariz geral (partilhada por toda uma comunidade) interage directamente com a denominada imagem mental do conceito, que cada um cria e é, por conseguinte, individual.

Segundo Fischbein (Fischbein, 1994), nas componentes das definições em matemática identificam-se, a intuição, tal como a algoritmização e a formalização, enquanto actividade humana. Tais componentes interagem, são suportadas umas pelas outras e não podem, por conseguinte e segundo o autor, ser tratadas de forma disjunta nem sequer hierárquica. Este autor revelou-se-nos ainda importante por exemplificar a sua teoria destas componentes com um caso relativo ao conceito de "limite" que começa por afirmar ser, intuitivamente, pouco complicado. Vejamos (Fischbein, 1994):

> *Intuitively, it is relatively easy to understand, as Courant and Robins say, the concepts of limit and convergence. Intuitively, one may consider a sequence of numbers* a_n *that come closer and closer to a certain number a as n tends to* ∞. *The number a is then the limit of the sequence* a_n, *and the sequence is said to converge to a. If one adds also an exemple, things become tottaly clear intuitively. For instance, one may consider the sequence whose nth term is is* $a_n = 1/n$. *The series*
>
> $$1, \, 1/2, \, 1/3, \dots 1/n, \dots$$
>
> *Has the limit 0, for increasing n:* $1/n \to 0$ *as* $n \to \infty$.
>
> ***But we cannot go directly from the intuitive representation to the formal, rigorous definition****. The formal definition reverses the order of ideas, contradicts the natural, dynamic representation of the process. And this makes the definition of limit, as a matter of fact, counterintuitive, difficult to grasp.*

Neste excerto, o autor termina alertando o leitor para alguns dos obstáculos de aprendizagem associados à definição de "limite"; a saber: a inversão da ordem natural/intuitiva das ideias e a representação dinâmica do processo.

A tradução de "limite", em linguagem formal é, no presente caso:

$$|a - a_n| < \varepsilon \text{ for all } n > N$$

sendo, "a" o limite, a_n a sucessão de termos e ε qualquer valor positivo.

1.2 As definições (clássicas) de limite, segundo Cauchy e Heine

No exemplo com que terminámos a subsecção anterior vimos Fischbein reportar-se à definição de limite a que chamamos de "Heine" mas Cauchy (1789-1857) foi o primeiro matemático, do século XIX, a estabelecer o Cálculo Infinitesimal com base no conceito de "Limite".

Apesar da noção de limite ter vindo a ser discutida desde o século XVII, nomeadamente com Newton e Leibniz, Cauchy terá sido o primeiro a traduzir uma noção originalmente vaga numa noção em termos aritméticos que encontramos na sua obra "Cours d'Analyse" - 1[er] Partie – Analyse Algébrique (Cauchy, 1821). Diz assim:

> fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres.

Ora, no Ensino Secundário, o conceito de limite, não se apoia nesta definição dos primórdios. Recorre, em vez disso, à definição apresentada por Heine (1821-1881) (Heine, 1871) e expressa nos seguintes termos:

> 3. *Definition.* Ist A ein bestimmtes Zahlzeichen, und sinkt $A - B_n$ mit wachsendem n unter jedes angebbare Zahlzeichen, *so heisst A die Grenze der B.*

No Ensino Superior a definição utilizada é, contudo, tradicionalmente a de Cauchy (1789-1857) e, assim, podemos encontrar um mesmo estudante a aprender o conceito em fases distintas do seu percurso académico com ênfases muito distintas (como se pode deduzir das definições originais que apresentámos anteriormente). De facto, em termos históricos, é a definição de Cauchy que surge primeiro e, por isso, parece-nos lícito que se levante a seguinte questão:

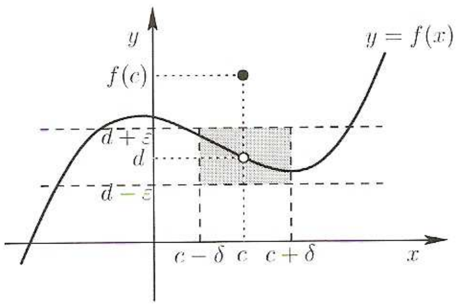
Porque razão é a definição de Heine, cronologicamente posterior, a escolhida para uma primeira abordagem do aluno ao conceito de limite?

Esta questão, que abordaremos de forma mais cabal adiante neste trabalho, vai começar por ser analisada a partir da forma formal actual que damos a estas definições: a de Cauchy e a de Heine. A saber, de acordo com (Miranda & Santos, 2004):

Definição de limite, de uma função f num ponto, **segundo Cauchy**– o número real d é o limite de $f(x)$, quando x tende para c, que é ponto de acumulação do domínio função (X) se para qualquer número real $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que se tenha $|f(x) - d| < \varepsilon$, sempre que $x \in X$ e $0 < |x - c| < \delta$. De forma simbólica escreve-se:

$$\lim_{x \to c} f(x) = d \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in X}\ 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - d| < \varepsilon$$

Esta definição, nos manuais, vem acompanhada de uma imagem (de resto muito típica em muitos outros textos que consultámos):



Por outro lado, segundo (Garcia, Anjos, & Ruivo, 1976):

Definição de limite, de uma função num ponto, **segundo Heine** é a seguinte:

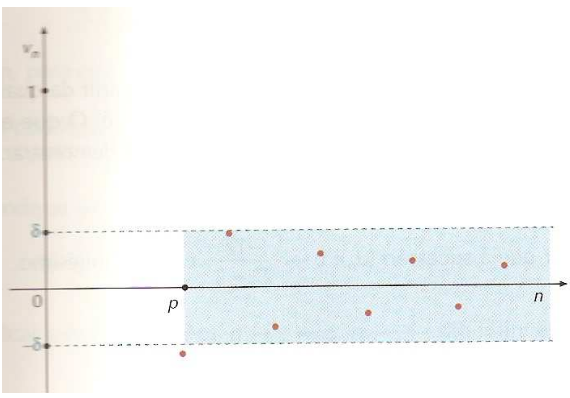
Sendo *a* e *b* constantes (finitas ou infinitas), diz-se que a função $x \to f(x)$, real de variável real, tem por limite *b*, quando *x* tende para *a* – e escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ – se e só se toda a sucessão $x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n, \ldots$ de valores de x (distintos de *a* e todos pertencentes ao domínio da função), tendente para *a*, corresponde uma sucessão $f(x_1), f(x_2) \ldots f(x_n) \ldots$ tendente para *b*. Simbolicamente:

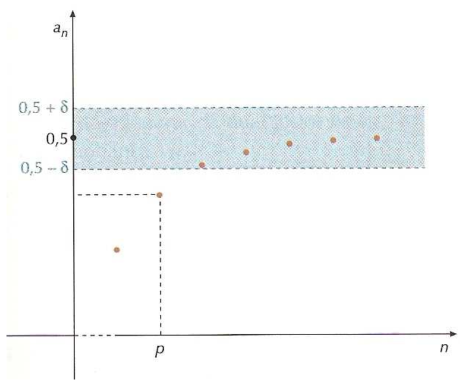
$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in D, x_n \neq a, \lim_n x_n = a \Rightarrow \lim_n f(x_n) = b$$

Em manuais escolares mais recentes esta definição encontra-se, de alguma forma condensada, escrevendo-se:

$$\lim u_n = a \Leftrightarrow \forall_{\delta > 0} \exists_{p \in IN} : n > p \Rightarrow |u_n - a| < \delta$$

Também esta definição, nos manuais escolares, vem acompanhada de imagens que se pretende que sejam sugestivas. (Costa, Resende, & Rodrigues, 2004) sugerem-nos:





1.2.1 Sobre a equivalência das definições (de Cauchy e de Heine)

Efectivamente as duas formas de definir, o limite de uma função num ponto, são cientificamente equivalentes, como se demonstra a seguir. E a demonstração dessa equivalência pode, como seria de imaginar, abordar-se de várias formas.

Sebastião e Silva (Silva, 1978) apresenta-nos uma dessas demonstrações que foi, à época, destinada a alunos de nível secundário e está exposta no "Compêndio de Matemática". Tratando-se matematicamente de uma demonstração de equivalência o método usado é o habitual, isto é, a demonstração em dois passos de cada uma das implicações: a definição de Heine implica a de Cauchy e, vice-versa a de Cauchy implica a de Heine. Sebastião e Silva apresenta-nos a equivalência da seguinte forma:

(Cauchy implica Heine)

1ª parte Suponhamos que a proposição (1) $f(x) \to b$ *quando* $x \to a$ *é verdadeira segundo Cauchy.*

Queremos provar que também é verdadeira segundo Heine; isto é: sendo u_n *uma sucessão qualquer de números reais distintos de a (pertencentes a*

D_f) tal que $u_n \to a$, trata-se de provar que $f(u_n) \to b$. É o que vamos fazer.

Seja δ um número positivo arbitrário. Então existe um número positivo ε tal que

$$|u_n - a| < \varepsilon \underset{n}{\Rightarrow} |f(u_n) - b| < \delta$$

porque admitimos, por hipótese, que a definição de Cauchy é verdadeira. Assim, para qualquer valor real x:

$$|x - a| < \varepsilon \underset{x}{\Rightarrow} |f(x) - b| < \delta$$

Por outro lado, como $u_n \to a$, existe um número p *tal que*

$$n > p \underset{n}{\Rightarrow} |u_n - a| < \varepsilon$$

Isto é, terá de existir uma ordem *p*, para a qual $|u_n - a| < \varepsilon$, porque sabemos que os termos de u_n estão cada vez mais próximos de *a*.

Logo

$$n > p \underset{n}{\Rightarrow} |f(u_n) - b| < \delta$$

E, como δ pode ser um número positivo qualquer, isto significa que $f(u_n) \to b$ e que, portanto, a proposição (1) é verdadeira segundo Heine.

(Heine implica Cauchy)

2^a parte. Suponhamos que a proposição (1) é verdadeira segundo Heine. Queremos provar que também é verdadeira segundo Cauchy; isto é, que:

$$\text{(2)} \quad \forall\, \delta > 0, \exists\, \varepsilon > 0 : |x - a| < \varepsilon \wedge x \neq a \underset{x}{\Rightarrow} |f(x) - b| < \delta$$

A sugestão, neste caso, é de usarmos o método de demonstração por redução ao absurdo!

Suponhamos que a proposição (2) é falsa, isto é, suponhamos o seguinte:

Existe pelo menos um $\delta > 0$ tal que:

$$\text{(3)} \quad \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, x : |x - a| < \varepsilon \wedge x \neq a \wedge |f(x) - b| \geq \delta$$

Seja então $\delta 0$ um número positivo que verifique esta condição e seja n *um número natural qualquer. Como $1/n > 0$, conclui-se de (3), com $\varepsilon = 1/n$, que existe pelo menos um* x *tal que*

$$\text{(4)} \quad |x - a| < \frac{1}{n} \wedge x \neq a \wedge |f(x) - b| \geq \delta 0$$

Seja x_n um determinado valor de x que verifique esta condição, escolhido arbitrariamente (pode haver mais de um!). Assim, a cada $n \in IN$, fizemos *corresponder um (e um só!) número real* x_n *que verifica as três condições seguintes:*

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \quad , \quad x_n \neq a \quad , \quad |f(x_n) - b| \geq \delta 0 \qquad (\forall n)$$

Nesta instância, Sebastião e Silva, como excelente pedagogo que frequentemente mostra os seus dotes, desafia o leitor/aprendiz a questionar-se. Diz assim:

Da primeira deduz-se: *(5)* $x_n \to a$ *(porquê?)*

Na verdade, para cada *n* obtemos um valor para x_n que obedece à primeira condição acima referida, e, portanto essa sucessão de termos converge para a. E, da mesma forma:

Da terceira deduz-se: *(6)* $f(x_n) \to b$ *(porquê?)*

Isto é, a cada valor de n corresponde um valor $f(x_n)$, podendo assim obter-se uma sucessão de valores que convergem para *b*.

E, como $u_n \neq a$ *para todo o* n, *conclui-se que a proposição*

$$f(x) \to b \ \text{ quando } \ x \to a$$

é falsa segundo Heine. Mas isto é contra a hipótese. Fica, portanto, provado o que pretendíamos.

Isto é, não é quando $x \to a$ que $f(x) \to b$, por isso, se diz que a proposição segundo Heine é falsa.

Para um outro nível de ensino (dito superior), Coimbra de Matos (A. C. Matos, 1960) também apresenta uma demonstração para a equivalência das definições. Chama-lhe “Teorema”, seguramente um termo de cariz eminentemente formal (Sebastião e Silva não o faz).

Começa por afirmar que é imediata a verificação segundo Heine, sabendo que é válida a condição segundo Cauchy, isto é, no seu texto a demonstração desta implicação está ausente, é deixada, porventura, ao cuidado dos alunos (enquanto exercício, ou enquanto desafio) mas note-se que o próprio autor, Coimbra de Matos, a classifica à partida como “imediata”.

E, para efectuar a demonstração no sentido inverso, utiliza uma propriedade da Lógica Matemática, segundo a qual não sendo verdadeira a condição segundo Cauchy implica que também não o é segundo Heine, é equivalente a afirmar que sendo válida a condição segundo Heine também será segundo Cauchy. O autor diz assim:

Seja f *uma função real definida em um conjunto E, parte de* IR. *Se* $\lim_{x \to c} f(x) = b$ *segundo a definição de Cauchy, também* $\lim_{x \to c} f(x) = b$ *segundo a definição de Heine e reciprocamente.*

…; vamos agora ver que, se b *não é limite de* f *no ponto* c *segundo a definição de Cauchy, também* b *não é limite de* f *no ponto* c *segundo a definição de Heine, o que demonstra a recíproca. Na verdade, existirá então um número positivo* ε *tal que, qualquer que seja o número positivo* δ, *o conjunto:*

$$A_{1/\delta} = \left\{ x \middle| x \in E \cap \overline{U}(c,\delta) \ e \ f(x) \notin U(b,\varepsilon) \right\}$$

é não vazio.

A representação $\overline{U}(c,\delta)$ representa qualquer vizinhança de *c*.

Efectivamente, o conjunto acima referido pode ser não vazio, basta atribuir a ε um valor de tal forma que o intervalo $U(b,\varepsilon)$ não contenha nenhum valor de $f(x)$.

O autor faz a demonstração pretendida desta forma:

> *Tomemos, em particular,* $\delta = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ *e seleccione-se em cada conjunto* A_n *um só número* x_n.
>
> *É:* $x_n \in E$, $x_n \neq c$ *e* $\lim x_n = c$. *Todavia* $\left(f(x_n)\right)_{n=1,2,\ldots}$ *não tende para b.*

Esta conclusão resultado facto de $f(x_n) \notin U(b,\varepsilon)$

A demonstração no sentido Heine – Cauchy é mais complexa e podemos ainda encontrá-la de uma outra forma no “Cours d’Analyse” (Lelong, 1968) num estilo também interessante

Este autor considera que se demonstrar que a condição de Heine é necessária e suficiente para a verificação da condição de Cauchy, então a primeira condição implica a segunda.

Começa, então, por demonstrar que a condição de Heine é necessária para que se verifique a de Cauchy. Para isso diz:

> *Supposons en effect que* $f(x)$ *tende vers **b** lorsque x tend vers **a**, et soit* (x_n) *une suite de points de* $A - \{a\}$ *convergeant vers **a**. Désignons par V un voisinage quelconque de **b**, et soit U un voisinage de **a** tel que* $(x \in A \cap U \text{ et } x \neq a)$ *entraîne* $f(x) \in V$. *La convergence de* (x_n) *vers **a** entraîne l’existence d’un entier **p** tel que l’inégalité* $n > p$ *entraîne* $x_n \in U$. *Pour* $n > p$, *on aura donc* $f(x_n) \in V$, *ce qui prouve que* $f(x_n)$ *tends vers **b**.*

Efectivamente, não há outra forma de a condição de Cauchy se verificar que não seja a de Heine se verificar obrigatoriamente, ou seja, **necessariamente** a de Heine terá de ser válida. Portanto, em algum momento, os termos (x_n) terão de pertencer a A e, sendo convergentes para *a*, $f(x_n)$ será convergente para *b*, que é o pressuposto de onde partimos.

Seguidamente, mostra que a condição de Heine é suficiente para que se verifique a de Cauchy, nestes termos:

> *Supposons que, pour toute suite* (x_n) *de points de* $A - \{a\}$ *convergeant vers **a**, la suite* $f(x_n)$ *admette une limite. Nous allons d’abord montrer que <u>cette limite ne dépend pas de la suite</u>* (x_n) *<u>choisie</u>: en effet, s’il existait deux suites* (x_n) *et* (x'_n) *conduisant à des limites distinctes* $b = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ *et*

> $b' = \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$ *nous pourrions former une nouvelle suite* (x''_n) *en pousant* $x''_{2p} = x_p$, $x''_{2p+1} = x'_p$ *pour toute* $p \in IN$.

Esta nova sucessão (x''_n) tem expressões diferentes para os termos pares e para os termos ímpares, por isso, o autor diz:

> *La suite* (x''_n) *satisferait aux memes hypotheses que les suites* (x_n) *et* (x'_n)*, mais la suite* $f(n''_n)$ *admettrait b et b' pour valeurs d'adhérence, et ne serait pas convergence.*

Desta forma, ficamos com a indicação de que se a sucessão (x_n) tende para *a* e $f(x_n)$ admite um limite é indiferente a escolha dessa sucessão:

> *Donc le point* $b = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ *ne depend pas de la suite* (x_n).

O autor prossegue esta demonstração izendo:

> *Si* $f(x)$ *ne tendait pas vers **b** lorsque **x** tend vers **a**, la condition énoncée III.1.3.*[4] *ne serait pas vérifiée. Il existerait donc un nombre* $\varepsilon > 0$ *tel que chaque boule de centre **a** et de rayon* $\eta > 0$ *contienne au moins un point **x** de* $A - \{a\}$ *satisfaisant à* $d[f(x), b] > \varepsilon$. *En donnant à* η *une suite de valeurs tendant vers zéro (par exemple* $\eta_n = \frac{1}{n}$ *on obtiendrait une suite* (x_n) *de points de* $A - \{a\}$ *convergeant vers **a** [puisqu'on aurait* $d(a, x_n) < \eta_n$*] et telle que* $f(x_n)$ *ne tende pas vers **b** [puisqu'on aurait* $d(f(x_n), b) > \varepsilon$*]*

Ora, esta situação contraria a hipótese inicial, é, portanto, uma hipótese absurda. Assim, pode concluir-se que a condição enunciada é **suficiente**.

1.2.2 Análise destas definições: em busca de possíveis "obstáculos"

Actualmente a definição formal de limite, no Ensino Secundário, inicia-se durante o estudo da convergência de Sucessões e, a partir daí, aquando do estudo da convergência de funções surge, de forma natural, a definição de Heine. A temática do estudo das funções é, no Ensino Superior de cursos diversos, nomeadamente, das Ciências, das Engenharias, da Economia, mas ainda das Farmácia ou Medicinas um assunto incontornável e, neste âmbito, os estudantes são confrontados com a definição de limite, segundo Cauchy.

Sendo, como anteriormente explicámos, ambas as definições (cientificamente) equivalentes a verdade é que tanto uma quanto a outra englobam características que se podem criar obstáculos à sua aprendizagem cabal. Optámos, a este propósito, por reportar várias reflexões/estudos conduzidos por diversos autores e aos quais iremos, oportunamente, adicionar as nossas próprias

---

[4] *Pour que* $f(x)$ *tende vers **b** lorsque **x** tend vers **a**, il faut et il suffit qu'a chaque nombre* $\varepsilon > 0$ *donné, on puísse faire correspondre un nombre* $\eta > 0$ *tel que les relations* $x \in A$ *et* $0 < d_E(a, x) < \eta$ *entraînent* $d_F[b, f(x)] < \varepsilon$

impressões, enquanto actividade profissional que conhecemos bem: a de ensinar o conceito de “limite” a alunos (portugueses) do Ensino Secundário.

Por exemplo:

O sinal “$\rightarrow$” usado na representação simbólica das definições que se traduz por “tende para” não tem significado matemático, podendo a expressão associar-se a uma intenção. Esta expressão resulta da noção dinâmica de “limite”, que se obtém intuitivamente. Fischbein (Fischbein, 1994) salienta possíveis questões relacionadas com a expressão “tender para”, a qual pode significar:

- ser um valor eventualmente diferente de
- nunca atingir o valor
- atingindo o valor
- parecido com

A própria **palavra “limite”**, segundo Cornu (Cornu, 1991) este termo pode ter diversos significados, diferindo de pessoa para pessoa e até diferindo, na mesma pessoa, em momentos diferentes. Por exemplo, o “limite” pode ser visto como:

- algo atingível
- algo inatingível
- um ponto do qual qualquer outro se aproxima sem o atingir
- um ponto do qual qualquer outro se aproxima atingindo-o
- o limite superior (ou inferior)
- o máximo ou o mínimo
- um intervalo
- aquele que vem “imediatamente depois” do que pode ser atingido
- um constrangimento, uma proibição, uma regra
- o fim

Ou seja, a interpretação que cada aluno faz, pode, por um lado, depender do conceito intuitivo que ele tem da palavra “limite” e para Fischbein (Fischbein, 1994) este problema tem a ver com o facto de, a nossa mente não estar preparada para o conceito de infinito.

Há, ainda, a salientar a dificuldade simbólica/lógica suscitada pelos dois **quantificadores**, o universal e o existencial, os quais, em linguagem corrente, têm frequentemente um entendimento diferente.(Cornu, 1991)

O conflito entre o conceito intuitivo e o formal, conforme refere Fischbein (Fischbein, 1994) leva à formação de falsos conceitos. Como prova disso, este autor refere-se a um estudo realizado por Shlomo Vinner e que consistiu em pedir a quinze estudantes que definissem o conceito de limite, após

este ter sido leccionado e verificou que apenas um estudante formulou correctamente a definição e, mesmo assim, incompleta.

Este estudo revelou haver algumas confusões, em termos conceptuais, o que se depreende de afirmações como:

> • *A sequence “must not reach its limit” (thus the sequence 1,1,1,…would be said not to converge to a limit).*
>
> • *The sequence should be either monotonically increasing or monotonically decreasing. Thus, for instance, the sequence whose nth element is given by* $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ *does not tend to a limit.*

> • *The limit is the "last" term of the sequence. You arrive at the limit after "going through" infinitely many elements.*

Mesmo considerando que tenha havido compreensão acerca da escrita das definições, em linguagem simbólica, sabemos, por experiência profissional, que existem inúmeras dificuldades na sua escrita, o que poderá revelar dificuldades adicionais na compreensão do conceito.

Analisando a definição de Heine, parece fácil considerar uma sequência de números, a_n, que se aproxima de um determinado valor a, quando n tende para ∞, mas, depois, não é assim tão simples efectuar a passagem da representação intuitiva para a formal, porque existe uma **inversão da ordem** das ideias. Digamos que, a definição se torna contra-intuitiva. Efectivamente, começamos por mencionar um δ, tão pequeno quanto se queira, e depois referimo-nos a p, como se δ fosse independente de p, o que não acontece realmente. Quando passamos para a definição formal, escrevemos p, como dependente de δ, o que inverte a ordem natural do pensamento.

Para além do uso dos quantificadores, também **o sinal de módulo** não está, e sabemo-lo igualmente por experiência profissional própria, na generalidade dos nossos alunos, interiorizado no sentido de representar uma distância, o que dificulta a visualização do significado de $|u_n - a| < \delta$.

Esta questão dos problemas levantados por algumas definições, foram também percepcionados e referidos, já em 1923 pelo Dr. Pedro José da Cunha, numa Conferência. Dizia então a este propósito e lembrando o autor a definição apresentada pelos "antigos" (Pedro José Cunha, 1923):

> *Quando uma grandeza variável toma sucessivamente valores que se aproximam cada vez mais de uma grandeza constante, de modo que a diferença para com esta se possa tornar e manter menor que qualquer quantidade dada, diz-se que a constante é o limite da variável*

Refere ainda que Duhamel, no seu livro "Éléments de Calcul Infinitesimal" sentiu necessidade de esclarecer melhor esta noção acrescentando:

> *que se a diferença entre a constante e os valores sucessivos da variável, depois de se tornar inferior a uma quantidade designada, se tornar em seguida maior que ela, depois mais pequena, em seguida maior, e assim indefinidamente, a constante não deve ser considerada como limite da variável.*

Apesar deste esclarecimento adicional, Pedro José da Cunha, considera que enunciando desta forma a noção de "limite", se induz o leitor à exclusão das funções que

> *quando a variável de que dependem varia sempre no mesmo sentido aproximando-se de um número dado, oscilam indefinidamente em tôrno de um valor limite, sendo cada vez menor a amplitude das oscilações; tal é, por exemplo, a função* $\frac{sen\, x}{x^2}$*, que tende para zero quando* x *tende para infinito, e passa e repassa indefinidamente pelo valor zero.*

Para Pedro José da Cunha, a falta de rigor das expressões “tornar-se” e “manter-se menor” explica a adopção de uma nova definição que veio retirar à anterior “o que ela tinha de vago e de impreciso”.

Mesmo assim, o autor considera que esta forma de definir o “limite” parece, apenas, **contemplar sucessões de valores numeráveis**, excluindo a situação mais comum, em que a variável “passa por uma infinidade de valores contínuos”. Sendo certo que de um conjunto contínuo se pode encontrar uma infinidade de conjuntos numeráveis, Pedro José da Cunha esclarece que o limite só existe se para qualquer um desses conjuntos, extraídos do conjunto contínuo, o limite for o mesmo.

1.2.3 Heine, porquê?

Chegamos ao momento em que se torna oportuno tentar encontrar uma resposta para a questão “Heine, porquê?”, nomeadamente como 1ª abordagem para o conceito de “limite” encontrada pelos alunos no seu percurso académico

Após a análise de cada uma das definições e aquilo que cada uma delas envolve, à partida, nenhuma razão encontramos para justificar que seja a definição de Heine a eleita, para o ensino secundário.

Ao tentarmos descrever tudo aquilo que cada uma das definições envolve, encontramos:

- conjuntos,
- sequências de termos,
- distâncias entre dois pontos,
- o conceito de ordem,
- a noção de quantificadores, universal e de existência,
- o conceito de infinitésimo: “tão pequeno quanto se queira”
- a expressão que não tem significado matemático “tende para”.

Relativamente aos conjuntos envolvidos, encontramos um reforço para esta equivalência, na observação de Pedro José da Cunha que diz que o teorema não é apenas válido para as sucessões numeráveis, mas que é

> *interessante reconhecer que ele é verdadeiro, mesmo que a variável passe por um conjunto de valores que tenha a potência do contínuo; isto é, que os limites de todas as sucessões numeráveis, que desse conjunto se podem tirar, são, neste caso, necessariamente iguais entre si.*

Digamos que, sendo os conceitos envolvidos, os mesmos, o grau de dificuldade também seria em teoria o mesmo, para cada uma das definições. Contudo, a definição de Heine surge como mais espontânea.

Esta reflexão aponta mais para uma desvantagem, em usar em primeiro lugar a definição de Heine e, só no ensino superior, a de Cauchy, do que se se tivesse usado a definição de Cauchy desde o início. Isto é, torna-se desnecessário preocuparmo-nos em “prender” uma sucessão à função dada, basta pensar em qualquer valor da variável que pertença ao domínio da função.

Nesta ordem de ideias, Sebastião e Silva até sugere que a definição de Heine “pode ser substituída por uma definição directa”(Silva, 1978) – a de Cauchy.

Contudo, Sebastião e Silva, num artigo publicado na Gazeta de Matemática, intitulado “A Análise Infinitesimal no Ensino Secundário” (Silva, 1951), salienta a necessidade de considerar finitos tanto os valores para os quais tende a variável como o do respectivo limite, para efectuar as demonstrações dos teoremas relativos a limites. Razão que terá levado a optar pela definição de Heine, no ensino secundário:

> As vantagens da primeira definição (no estilo de Heine) não se reduzem à espontaneidade da definição em si: concretizam-se depois nas demonstrações dos teoremas relativos ao «limite da soma», «limite do produto», etc. — já que, por esta via, esses teoremas aparecem como consequências *imediatas* das correspondentes proposições relativas a sucessões. Mais ainda: *a referida definição aplica-se perfeitamente ao caso em que uma das constantes* a, b *(ou ambas) é um dos símbolos* ∞, $+\infty$ ou $-\infty$. Ora tal não acontece com a definição de Cauchy, que só é válida no caso de a, b serem finitos. Quando esta hipótese

2. Factores, possíveis obstáculos, à aprendizagem do conceito de Limite

Investigações realizadas por Cornu (1991) e Sierpinsk (1985), Azcárate e colaboradores (1996) referidas num artigo da revista UNIÓN (Engler, Vrancken, M., D., & I., 2007) revelam *"que la enorme dificultad de la enseñanza y del aprendizage del concepto de límite se debe a su riqueza y complejidad tanto como al hecho de que los aspectos cognitivos implicados no se pueden generar puramente a partir de la definición matemática."*

Neste mesmo artigo, referem um estudo de Michéle Artigue (1995) acerca das dificuldades na aprendizagem do cálculo agrupando-as em três categorias que estão directamente ligadas a:

- *la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo,*
- *la conceptualización y formalización de la noción de límite en el núcleo de su contenido y a su tratamiento en la enseñanza, y*
- *la ruptura álgebra / cálculo, la brecha entre el pensamiento analítico y el algebraico.*

No que diz respeito aos objectos básicos do cálculo, destacamos o símbolo ∞. Este símbolo foi introduzido por John Wallis, em 1655, adoptado dos antigos romanos para representar o número 1000 e passou a ser usado a partir do início do séc. XVIII, no Cálculo Infinitesimal.

Na teoria das funções, ele é usado em mais que um sentido:

- ora para significar que $f(a)=\infty$, se $\dfrac{1}{f(a)}=0$
- ora para representar o limite de uma função num determinado ponto ($\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$)(Cajori, 1993).

Esta dupla utilização, para além do conceito em si, vem dificultar o seu entendimento, uma vez que não o colocamos a desempenhar um único papel.

A dificuldade, se não impossibilidade, de o tornar rigoroso está exemplificada de uma forma simples, mas bem esclarecedora no livro de Timothy Gowers, "Matemática – uma breve introdução"(Gowers, 2008), recorrendo a um problema histórico:

> *Gostaríamos de dar sentido à afirmação de que existe uma dízima infinita cujo quadrado é 2.*

Através de um processo muito simples, o qual consiste no enquadramento do número 2, por duas potências de expoente 2 o autor verifica que quantos mais dígitos usarmos para $\sqrt{2}$, mais noves vamos obter, como parte decimal do número 1. E, então, conclui:

> *Por isso, se usarmos a expansão infinita de $\sqrt{2}$, obtemos uma infinidade de noves, e 1,99999999…..(uma infinidade de noves após o ponto decimal) é igual a 2.*

O autor chama a isto "domesticar" o infinito, ou seja, faz-se a interpretação de "um enunciado em que o infinito ocorre como uma versão abreviada de um processo complicado sem referência ao infinito".(Gowers, 2008)

Para este matemático é certo que os matemáticos, e, neste caso, também os professores de matemática, "estão conscientes de que não estão a ser completamente sérios", quando utilizam expressões como "no limite" ou "no infinito", pois "quando pressionados para explicar exactamente o que têm em mente, começam a falar de aproximações"*(Gowers, 2008)*

Podemos considerar uma tentativa de ajuda, para ultrapassar este problema, se reflectirmos sobre a origem da palavra "limite" – palavra da mesma família da palavra *limen*, em Latim, que significa "limiar".(Pristley, 1998)

Ainda o conceito de infinitésimo ou infinitamente pequeno, também um objecto básico do Cálculo Infinitesimal, pode também levantar dúvidas semelhantes àquelas sentiram os precursores do Cálculo Infinitesimal, considerando o infinitésimo como algo que é simultaneamente nulo e não nulo, como se exemplifica a seguir (Silva, 1977):

> O que será então *um infinitésimo*? Deveria ser a grandeza que se obtém dividindo a unidade *num número infinito de partes iguais*. Mas o que se pode obter, dividindo por exemplo um segmento de recta num número infinito de partes iguais? Obtêm-se *pontos,* dirão os alunos. Como o comprimento dos pontos é nulo, um infinitésimo deveria ser então uma grandeza nula. *Mas como pode um comprimento não nulo resultar da soma de comprimentos nulos*? A intuição diz-nos que tal não é possível: somando grandezas nulas, por maior que seja o seu número, apenas se obtêm grandezas nulas.

Para além dos factores meramente técnicos, o sucesso da aprendizagem passa, também, pelas decisões relativas ao que se ensina, como se ensina e quando se ensina.

Isto é, processo ensino-aprendizagem envolve uma grande diversidade de variáveis, cuja conjugação é determinante para o sucesso. Sendo o currículo uma dessas variáveis, a sua construção depende das crenças sobre a forma como se aprende o cálculo (Engler, Vrancken, M., D., & I., 2007). Essas crenças "determinan la importancia que un educador da al empleo de técnicas o en aprovechar la curiosidad, el interés y la motivción del alumno e influyen en la forma en la que los docentes desarrollan metodologias, presentan conceptos, evalúan logros y corrigen errores y dificultades"(Engler, Vrancken, M., D., & I., 2007)

3. Sugestões, de alguns autores, no sentido de ajudar a ultrapassar as dificuldades inerentes à aprendizagem do conceito de Limite

A proposta didáctica, para o ensino de qualquer conceito matemático, apresentada pelas autoras do artigo referido acima, da revista ÚNION (Engler, Vrancken, M., D., & I., 2007) assenta nos seguintes pressupostos:

- *para haver mudança nas crenças é necessário confrontar concepções pré-existentes*
- *os conhecimentos constroem-se por adaptação a um meio que começa por ser problemático*
- *as actividades propostas, aos alunos, devem ser ricas quanto à quantidade de conhecimentos implicados, mas não forma excessiva, de forma a permitir ao aluno, relacioná-lo e gerir as suas aprendizagens. Devemos, ainda, apresentar abertura suficiente à colocação de questões, que não estavam incluídas inicialmente.*

Nesta ordem de ideias, para o ensino do Cálculo Infinitesimal, Roland Fischer (Fauvel, 2000) é de opinião que os conceitos essenciais, num nível inicial, devem ser abordados de uma forma mais heurística, remetendo a exactidão e o rigor para níveis superiores. Assim, sugere que se deve começar por apresentar uma ideia do conceito de limite e só posteriormente a sua definição.

Kronfellner (Fauvel, 2000) salienta que, para Toeplitz, uma das vantagens de efectuar um estudo aproximativo, é permitir que o professor faça um paralelo com o desenvolvimento histórico, acrescentando ao ensino pormenores históricos.

Por outro lado, este método, relativamente ao ensino mais formal, torna-se mais moroso. Mas, numa fase inicial da aprendizagem, um nível elevado de rigor e formalização pode ser um obstáculo à aprendizagem.

A este propósito, e contrariando esta opinião, podemos referir o artigo de Aline Robert e Natasha Speer (Robert & Speer, 2001) onde as autoras começam por reconhecer a dificuldade que o estudo do Cálculo é para a maioria dos estudantes e salientam um estudo que sugere haver especial dificuldade quando a formalização de um conceito ocorre bastante tempo depois de um primeiro contacto, com o conceito, de forma empírica. Esta dificuldade refere-se tanto ao ensino como à aprendizagem. Isto é compreensível, uma vez que a formalização generaliza uma série de aspectos anteriormente estudados, para além de existir uma grande diferença entre a definição de um conceito e a vasta noção da imagem do conceito, que conforme David Tall refere num dos seus estudos(Robert & Speer, 2001), permite explicar falhas na compreensão.

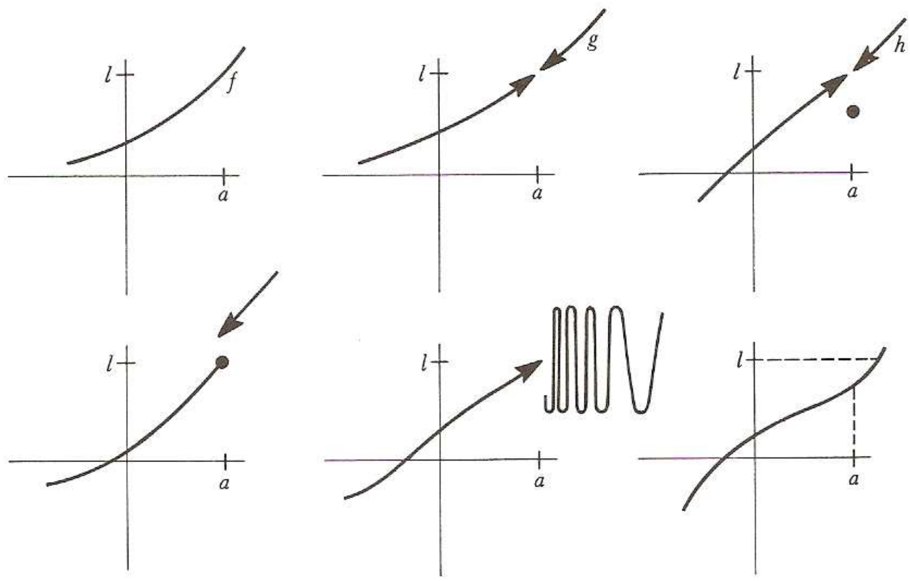
Uma noção interessante é a de “procept (a combination of process and concept), apresentada por Tall e Gray (Robert & Speer, 2001) e que, segundo estes autores, se adapta ao estudo do Cálculo e à Introdução à Análise. Para estes autores são exemplos de “procepts” funções, derivadas, integrais e limite. Na mesma linha de pensamento, outros estudos (Robert & Speer, 2001) referem que a visão dos conceitos em múltiplas perspectivas, permitem uma melhor organização do conhecimento.

Comenius, que pode considerar-se o iniciador da didáctica moderna, defendia que a melhor forma de aprender era experimentar e que o professor deveria encontrar técnicas para estimular os seus alunos.(Freudenthal, 1973)

Esta metodologia também é defendida actualmente. Assim, no estudo do conceito de limite devem ser propostas, aos alunos, situações cuja reflexão ajude a esclarecer este conceito, indo ao encontro de uma das normas que constituem as “Normas Gerais” (Silva, 1975) e que diz:

> *Muito raramente se deve definir um conceito sem ter partido de exemplos concretos e, tanto quanto possível, sugestivos. Se a preocupação psicológica tiver sido bem conduzida, será muitas vezes o aluno quem acabará por definir espontaneamente o conceito, com ou sem ajuda do professor. Em qualquer caso, este deverá encaminhar o aluno para o rigor de linguagem, que equivale a dizer, de pensamento. Para isso, será de grande auxílio a introdução á lógica matemática, feita logo de início.*

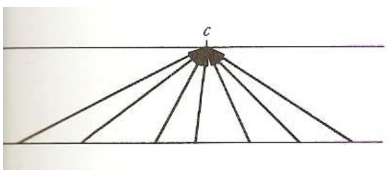
No livro “Calculus” de Michael Spivak é apresentada uma proposta, neste sentido, e que consta na análise dos gráficos seguintes, no sentido de tentar interpretá-los quanto à existência de limite no ponto *a*:



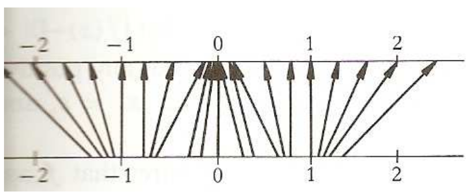
Verifica-se que somente as três primeiras funções se aproximam de *l* quando *x* se aproxima de a.

É de notar que $g(a)$ não existe e que $h(a)$ é definido no “wrong way” (Spivak, 1994) e que mesmo assim podemos continuar a dizer que *g* e *h* são funções que se aproximam de *l*, quando *x* se aproxima de *a*. Isto é, a imagem de *a* não é necessária na determinação do limite quando *x* se aproxima de *a*. Ou seja, não interessa qual o valor de *a* nem mesmo se ele existe.

Este autor propõe um método para verificar se o limite de *f*, no ponto *a*, é *l*: desenhar duas rectas, horizontais, cada uma delas representando $\Re$, e colocar setas a partir de um ponto *x*, numa das rectas, para outro ponto $f(x)$, na outra recta. Por exemplo:

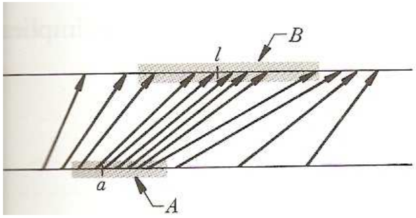


e

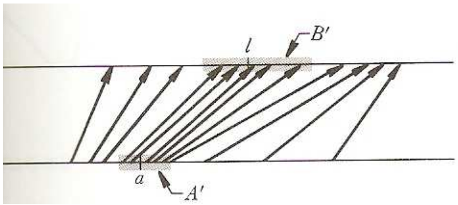


onde a primeira figura representa a função $f(x)=c$ e a segunda a função $f(x)=x^3$.

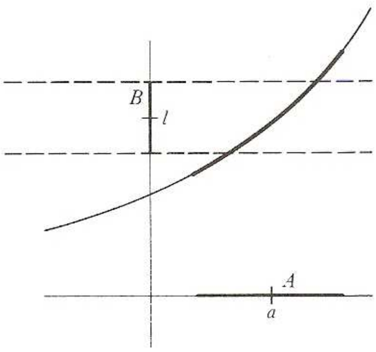
Se considerarmos uma função cuja representação, com este modelo, é a seguinte:



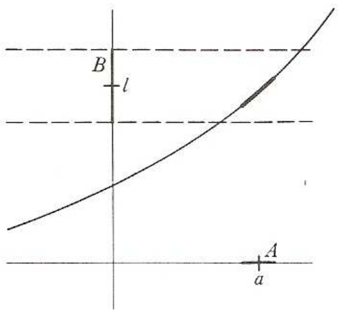
e quisermos saber se $f(x)$ tende para *l*, quando *x* se aproxima de *a*, verificamos que para qualquer valor do intervalo aberto B existe sempre um elemento do conjunto A e por isso a hipótese é verdadeira.



Esta representação no sistema O*xy* será:



ou



Uma outra proposta de actividade, para os alunos, e que, eventualmente, poderá ser bastante útil na ajuda à interpretação do conceito, foi sugerida por Larson e Edwards (Larson & Edwards, 2010) e consiste em propor as seguintes tarefas:

• Escrever uma breve descrição acerca do significado da seguinte notação: $\lim_{x \to 8} f(x) = 25$

• A definição de limite, requer que sendo *f* uma função definida num intervalo aberto que contém *c* e exclui a possibilidade de a variável ser igual a *c*. Porque é necessário este requisito?

• Identificar três tipos de comportamentos de funções associadas à não existência de limite, ilustrando cada tipo com um gráfico.

Estas propostas pressupõem-se que devem ajudar a combater a situação indesejável, em que os alunos conseguem resolver exercícios usando este conceito, sem, verdadeiramente, terem compreendido o formalismo da definição, na sua totalidade. (Cornu, 1991)

Em termos de conclusão, achamos por bem apresentar uma reflexão acerca do estudo do Cálculo, na qual se afirma:

Para abordar el estúdio del cálculo se require cierta madurez que permita abrir la mente a distintas formas de proceder. Esta madurez no siempre es alcanzada por los estudiantes. Por esto los docentes debemos propiciar cambios metodológicos que permitan que los alumnos descubran cómo se construyen los conceptos a partir de sus conocimientos prévios. (Engler, Vrancken, M., D., & I., 2007)

CAPÍTULO III

1. O Ensino Secundário em Portugal: Introdução

A lei n.º 47/2006, publicada no D. R., 1ª série n.º 165 de 28 de Agosto de 2006, no seu artigo 3º - Conceitos – define “Programa” como sendo

> *o conjunto de orientações curriculares, sujeitas a aprovação nos termos da lei; específicas para uma dada disciplina ou área curricular disciplinar, definidora de um percurso para alcançar um conjunto de aprendizagens e de competências definidas no currículo nacional do ensino básico ou no currículo nacional do ensino secundário;*

Neste capítulo, é nosso objectivo realizar um levantamento dos programas oficiais, do ensino secundário, mesmo sabendo que a sua definição oficial não tenha sido, sempre, exactamente a que se encontra acima, para verificar de que forma o conceito de limite tem sido, neles, referido.

Nesta análise, interessa-nos identificar as alterações sofridas ao longo do tempo, quanto à localização, nos respectivos programas, e abordagem, para posteriormente as confrontar com o tratamento dedicado a este tema, nos manuais escolares.

Uma vez que o nosso estudo se centra no ensino/aprendizagem do conceito de limite, faz todo o sentido, efectuar a análise referida, a partir do momento em que este conceito começou a ser ensinado.

Em termos temporais, vamos começar por separar o estudo em dois grandes momentos: o momento que vai desde a reforma de Marquês de Pombal até à criação dos liceus em Portugal, em 1836, e daí até à actualidade.

O primeiro momento, a que nos referimos, serve, apenas, para percepcionarmos de que forma o Cálculo Infinitesimal estava inserido no ensino, ou seja, a nível universitário.

Marquês de Pombal foi nomeado por D. José I para dirigir a recem criada Secretaria de Estado dos Negócios do Reino, promovendo importantes reformas das quais se destacam a criação da Direcção Geral de Estudos, do Colégio Real dos Nobres e da Faculdade de Matemática (Carvalho, 2001).

A criação do Colégio dos Nobres (1761-1837) teve como objectivo preparar jovens, de famílias da alta aristocracia, entre os sete e os treze anos, para as carreiras militares. Todavia, o ensino das

Ciências, no Colégio dos Nobres, a cargo de professores estrangeiros, foi muito mal sucedido, acabando por ser abolido em 1772.

A par deste acontecimento, a reforma Pombalina da Universidade, cria a Faculdade de Matemática, em 1772, para além de outras cinco, cujo ingresso dependia da conclusão do curso em Escolas Menores. O curso tinha a duração de quatro anos e era no seu 2º ano que existia, na cadeira de Álgebra, temas ligados à Análise Infinitesimal: Álgebra Infinitesimal e Cálculo Diferencial e Integral (Carvalho, 2001).

Devido a várias vicissitudes, o Colégio dos Nobres foi extinto em 1837, sendo o imóvel ocupado pela recem criada Escola Politécnica de Lisboa e, mais tarde, em 1911, transformada na Faculdade de Ciências de Lisboa.

A data da criação dos liceus coincide com a da criação da Escola Politécnica. Relativamente aos programas para o nível liceal, que começaram por ser difusos, foram, ao longo do tempo, adquirindo directrizes mais específicas para o ensino, em particular no capítulo da Análise Infinitesimal.

2. Os programas da disciplina de Matemática

1º Momento – da reforma de Marquês de Pombal à criação dos liceus

Lembrando que estamos a falar de um momento em que o ensino do Cálculo Infinitesimal se realizava, apenas, na Universidade, interessa-nos, apenas, ter a noção do momento em que este tema era estudado e, dentro do possível, conhecer os temas a ele relativos, ali contemplados.

Artigos publicados na revista literária e científica “O Instituto” (Instituto, 1853) (Instituto, 1855) revelam-nos que, decorridos mais de 80 anos da criação da Faculdade de Matemática, continuava a ser no 2º ano que se estudava, na Universidade, a Análise Infinitesimal.

O terceiro número desta revista, revela os conteúdos relativos a este tema (Instituto, 1855):

> *Methodo das tangentes – rectificação – e quadraturas. Princípios e regras do cálculo diferencial tratado pelo methodo infinitesimal. Comparação deste methodo com os de exaustão; dos limites; das fluxões e das derivadas. Sua vantagem sobre os outros.*

Na Universidade de Coimbra, até 1892, o quadro de estudos era o mesmo que vigorava desde 1872, apesar das “alterações e melhoramentos resultantes do incessante progresso da ciência” *(A. J. Teixeira, 1892).*

A evolução verificou-se principalmente no campo das Matemáticas Puras e, para dar conta disso, António José Teixeira (A. J. Teixeira, 1892), apresenta a relação dos livros adoptados, naquela faculdade, em cada uma das épocas referidas. Assim, enquanto em 1872, o único livro adoptado, para as 1ª e 2ª cadeiras do curso, era o “Curso Completo de Mathematicas Puras” de

Francoeur, traduzido pelo Dr. Francisco de Castro Freire e pelo Dr. Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto; no ano lectivo 1891-1892, para a 1ª cadeira foram adoptadas as seguintes obras: de Carnoy, "Geometria Analítica", de Francoeur, "Álgebra Superior" e de Souto Rodrigues, "Additamento à Álgebra de Francoeur" e para a 2ª cadeira o livro de Gomes Teixeira, " Curso de Analyse Infinitesimal".

Estas notas, associadas à descrição do conteúdo de alguns destes livros, e que constitui o assunto do capítulo seguinte, servem para dar conta da semelhança, relativa ao tratamento deste assunto, numa fase inicial, na Universidade e nos Liceus.

2º Momento - desde a criação dos liceus à actualidade

A Passos Manuel ficou a dever-se importantes reformas no ensino, nomeadamente no ensino secundário, com a criação dos liceus. Neles, iria ser estudada uma rubrica intitulada "Aritmética e Álgebra, Geometria, Trigonometria e Desenho". O tratamento destas matérias dependia da preparação dos professores, que no caso da Matemática, também não era em número suficiente.

Esta reforma, de 1836, não menciona o número de anos de que deveria constar o curso, nem quais as matérias a leccionar em cada ano, nem as programações de cada uma delas. Efectivamente, os liceus só começaram a surgir em 1840.

Sobressai das reformas de Passos Manuel, a intenção de estimular o ensino das matérias científicas e técnicas, considerando-as fundamentais para o progresso da Nação (Carvalho, 2001).

> *Nós até 1860 não tivemos marcada por lei a duração do curso de estudos secundários ou dos preparatórios, como então se dizia (para os cursos superiores); naquele ano fixou-se aquela duração (nos liceus oficiais) em 5 anos, pelos quais se repartiam as diversas disciplinas, de modo muito ingénuo; em 1880 acrescentou-se um ano e em 1895 elevou-se a duração total do curso secundário (geral e complementar) a 7 anos …(Coelho, 1913)*[5]

A propósito destas tentativas de ajuste que se verificaram no ensino secundário, Adolfo Coelho refere, no mesmo artigo de que acima se apresentou um excerto:

> *Observa-se ainda grande arbitrariedade no modo por que se distribuem as disciplinas por anos e horas das semanas; a qual resulta da incerteza dos princípios em que deve basear-se. As velhas regras do fácil para o difícil, do simples para o composto, do próximo para o remoto, são muito banais para que delas se tire alguma coisa vantajosa. Psicólogos e pedagogos muito notáveis (por exemplo Stuart Mill, Tomás Arnold, Ana Sullivan W. Stern) rejeitaram a regra de que nada se apresentasse ao educando que ele não pudesse logo entender, que ele não estivesse preparado para entender, e a regra do simples para o composto é falsa, entendida à letra, porque o simples é o que muitas vezes mais tarde se atinge. (Coelho, 1913)*

O século XX foi marcado por importantes mudanças de regime político, as quais tiveram repercussões no plano educativo.

[5]Francisco Adolfo Coelho (1847-1919) – filólogo, escritor e pedagogo. Foi uma das figuras mais importantes da intelectualidade portuguesa, dos finais do século XIX. (wikipedia)

Num primeiro momento, de 1895 até 1967, ou seja, pouco depois da introdução da Matemática Moderna, em 1963, o ensino liceal estava estruturado da seguinte forma:

▪ Curso Geral com, 5 anos, subdivididos em 1º e 2º ciclos;
▪ Curso Complementar, com 2 anos, havendo duas áreas distintas: a de Letras e a de Ciências.

A primeira reforma (DG nº 250 de 4 Nov 1905) que data, precisamente, de 1905, apesar de introduzir o conceito de derivada, não contempla o estudo de limite de uma função, num ponto.

Só a reforma seguinte, de Alfredo Magalhães, cujos programas curriculares foram publicados no decreto n.º 5:002 do D.G. n.º 257 de 28 de Novembro de 1918, apresenta, pela primeira vez, um capítulo intitulado "Elementos de Cálculo Infinitesimal", onde o conceito de limite antecede a noção de derivada. Esta reforma, relativamente ao Cálculo Infinitesimal, é bastante importante, uma vez que é a primeira vez que esta área começa, efectivamente, a ganhar autonomia, relativamente à Álgebra. Este assunto está integrado na VI classe do Curso Complementar de Ciências, cuja estrutura é a seguinte:

> *Elementos de Cálculo Infinitesimal:*
> *Teoria de limites. Teoremas sobre limites da soma, produto e quociente.*
> *Derivada: importância desta noção. Derivadas …(Aires & Vázquez)*

A reforma de Joaquim José de Oliveira legislada pelo decreto n.º 6:132 do D.G. n.º 196 de 26 de Setembro de 1919 (Pública, 1919), contempla a noção de limite, no programa decretado pelo mesmo Diário do Governo, também, no Curso Complementar de Letras, na VI classe, da seguinte forma:

> *Análise de algumas demonstrações, já feitas, para a aquisição da noção de limite (ciclometria, volume do tetraedro, etc.). Noção de derivada, de diferencial e de integral. Aplicações simples ao cálculo das áreas e volumes, do movimento e das tangentes às curvas.* (Pública, 1919)

O programa tem como recomendação: "A aquisição da noção de limite, derivada, diferencial e integral, e as suas aplicações só em casos muito simples se fará exclusivamente pelo método analítico, todo o restante é sugerido e garantido pela geometria" – Diário do Governo n.º 266 – I série de 30 de Dezembro de 1919 (Martins, 1923)

E, no Curso Complementar de Ciências, o capítulo "Elementos de Cálculo Infinitesimal" pertence à VII classe, com a seguinte forma:

> *Elementos de Cálculo Infinitesimal:*
> *Teoria de limites. Teoremas sobre limites da soma, produto e quociente.*
> *Derivada: importância desta noção. Derivadas …(Pública, 1919)*

Até 1926, data de início de um novo regime político – o Estado Novo – nada de importante foi legislado, relativo ao ensino secundário, mantendo-se, portanto, os programas em vigor.

A primeira reforma do Estado Novo, da responsabilidade de Ricardo Jorge, cujos programas datam de 2 de Novembro de 1926 – Decreto n.º 12:594 do D. G. n.º 245 – apresenta alterações significativas quanto a este assunto. Assim, o Cálculo Infinitesimal surge num capítulo de Álgebra na IV classe do Curso Geral, que se mantém com cinco anos e com a seguinte estrutura:

> *a) Continuação do estudo da álgebra.*
>
> …
>
> *Noção de limite, apresentada por meio de exemplos de aritmética, da álgebra e da geometria.*
>
> *Noção de derivada* (Pública, 1926)

Nesta reforma, e apenas nesta, o Curso Complementar passa a ser de um ano.

É de salientar que a noção de função estava contemplada, apenas, no programa da VI classe do Curso Complementar de Ciências, num capítulo intitulado “Elementos de Álgebra”.

Em 1929, Cordeiro Ramos, restitui os dois anos ao Curso Complementar e, para terminar com as divergências que se estavam a verificar entre os vários liceus, fixou os conteúdos programáticos para as VI e VII classes (Decreto n.º 16:362 do D. G. n.º 11 de 14 de Janeiro de 1929). Assim, na VI classe, do Curso Complementar de Ciências, num capítulo de Álgebra vem (Pública, 1929):

> *Álgebra:*
>
> *Números algébricos e complexos.*
>
> *Noção de função; representação gráfica; noção intuitiva dos limites das funções de uma variável, de continuidade e de derivada; interpretação geométrica.*
>
> *Polinómios inteiros; propriedades gerais e elementares.*
>
> *Fracções algébricas; significado dos símbolos:* $\frac{m}{0}$, $\frac{m}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0\times\infty$ *e* $\infty\times\infty$.

Durante esta reforma, são publicados novos programas para o ensino liceal – Decreto n.º 18:885 de 27 de Setembro de 1930 – e, novamente, num capítulo de Álgebra, na VI classe do Curso Complementar de Ciências temos:

> *a) Álgebra:*
>
> *Funções; classificação das funções; propriedades elementares das funções inteiras; princípio das identidades; método dos coeficientes indeterminados; aplicações. Funções fraccionárias; símbolos de impossibilidade e indeterminação. Limites de funções de uma só variável; teoremas relativos à soma, ao produto e ao quociente destes limites; exercícios sobre a determinação dos limites de funções. (Aires & Vázquez)*

Esta programação sugere preocupação, relativamente à sequência dos assuntos estudados, pois verificamos que o estudo das funções, da teoria dos limites de uma função de uma só variável e a continuidade de funções precedem o estudo das derivadas.

Apesar de se terem publicado novos programas, em 1931 (Decreto n.º 20:369 do Diário do Governo n.º 232 de 8 de Outubro), em 1934 e em 1935 o assunto em causa não sofreu alterações em nenhum deles.

A mudança de regime político, em 1926, teve, em 1936, importantes repercussões no ensino, com Carneiro Pacheco. Este ministro, retira ao ensino liceal o papel de transição para o ensino superior, e, desta forma, acaba com a distinção entre o Curso Geral e o Curso Complementar e com a separação entre Letras e Ciências. Durante o período em que vigorou esta reforma o ensino liceal estava dividido em três ciclos: ao 1º ciclo correspondiam o 1º, 2º e 3º anos, ao 2º ciclo, o 4º, 5º e 6º anos e ao 3º ciclo, o 7º ano (Aires & Vázquez). Como consequência, destas alterações, os conteúdos programáticos foram

reduzidos. A noção de limite encontra-se no capítulo de Álgebra, no 5º ano, conforme se apresenta no Decreto-lei n.º 24: 084 do D. G. n.º 241 de 14 de Outubro de 1936:

> *a) Álgebra:*
> …
> *Noção de limite de uma sucessão apresentada por meio de exemplos da aritmética e da geometria; primeiras noções de infinitamente grande e de infinitamente pequeno. Definição de limite de uma sucessão.*(Nacional, 1936)

Neste programa a noção de limite está, apenas, associada à de sucessão. As funções são estudadas no ano seguinte, mas sem qualquer referência ao limite de uma função num ponto.

As observações feitas no próprio programa referem que:

> *As noções de limite e de infinitamente pequeno têm aplicação imediata na avaliação das áreas das superfícies planas indicadas nos programas do 5º e das áreas e volumes de quási todos os sólidos geométricos ali especificados, ficando ao critério do professor a escolha de um ou outro desses métodos para cada caso particular* (Nacional, 1936).

E ainda:

> *O apelo à intuição geométrica facilitará o estudo e a apresentação de alguns assuntos, tais como as noções de número irracional e de limite, etc. Os conhecimentos adquiridos na álgebra, por sua vez, fortalecem-se com a resolução de determinados problemas geométricos. É o caso, por exemplo, das noções de limite e de infinitamente pequeno aplicadas à dedução das fórmulas das áreas e volumes dos sólidos geométricos, e da teoria dos logaritmos aplicada à resolução de exercícios de avaliação dessas áreas e volumes* (Nacional, 1936).

A reforma seguinte, de Pires de Lima, é promulgada em 17 de Setembro de 1947 pelo Decreto n.º 36:507 do D. G. n.º 216, e, além de repor o plano de estudos que Carneiro Pacheco tinha alterado, retoma os objectivos do ensino secundário e altera, obviamente, os conteúdos programáticos (Decreto n.º 37:112 do D. G. n.º 247 de 22 de Outubro de 1948). A Análise Infinitesimal, em particular a noção de “limite”, continua a estar incluída no capítulo da Álgebra no 6º ano do Curso Complementar de Ciências, da seguinte forma:

> *Álgebra:*
> *Noção elementar de variável e de função; expressão analítica de uma função; classificação das funções; funções inversas; representação geométrica de algumas funções.*
> *Infinitamente grandes; infinitésimos; infinitésimos simultâneos; teoremas relativos ao produto e à soma de infinitésimos. Limite de uma variável; limite de uma função; operações sobre limites.*
> *Noção elementar de continuidade de uma função.* (Educação, 1948)

E no 7º ano, também no capítulo de Álgebra:

> *O problema das tangentes e o das velocidades: noção de derivada de uma função num ponto; função derivada. Derivada das funções algébricas e das funções circulares directas; derivada da função de função.*

Relativamente a este programa, Sebastião e Silva, no artigo “Análise Infinitesimal no Ensino Secundário” (Silva, 1951), regozija-se com o facto de que “ao conceito de limite, se anteponha o conceito de infinitésimo”, o que, segundo este matemático e pedagogo, tem “toda a vantagem, do ponto de vista pedagógico”, uma vez que, “o conceito de infinitésimo é formalmente mais simples que o conceito de limite”

Uma das críticas que Sebastião e Silva faz a este programa, nesse mesmo artigo, é relativa ao desfasamento entre o estudo da teoria dos limites, no 6º ano, e o das derivadas, no 7º ano, visto que esta é a única aplicação da teoria dos limites, no ensino secundário.

Em 1954 houve alterações dos programas, publicados no Decreto n.º 39:807 do D. G. n.º 198 de 7 de Setembro de 1954, onde se mantêm, relativamente ao programa anterior, as indicações sobre o estudo do conceito de limite.

O aparecimento da Matemática Moderna, em 1963, introduz alterações significativas no ensino complementar (6º e 7º anos) com a inclusão de novos temas e a partir de 1967 a criação do Ciclo Preparatório encurta o Curso geral de 5 para 3 anos.

A reforma de Veiga Simão, em 1974, faz publicar novos programas para o ensino liceal, que, relativamente à Matemática, são dois: um para o programa de Matemática Moderna e outro para a Matemática Clássica. O estudo dos limites está incluído em cada um deles, da seguinte forma:

- no caso do programa de Matemática Moderna, este capítulo pertence ao 2º ano, do curso complementar de Ciências, com a seguinte estrutura (Cultura, 1974):

> *Capítulo I – Introdução á Análise Infinitesimal*
>
> *1.1 Cálculo numérico aproximado*
>
> *1.2 Limites de sucessões*
>
> *1.3 Limites de funções de variável real*
>
> *Exemplos e definição (segundo Heine). Teoremas sobre limites. Infinitésimos simultâneos. Limites laterais. Indeterminações.*
>
> *1.4 Funções contínuas*
>
> *1.5 Derivadas e primitivas*

Como observação, o programa sublinha, relativamente ao Cálculo Numérico Aproximado, que *“o objectivo deste número é a aquisição de linguagem adequada ao estudo dos assuntos abordados nos números seguintes…”* — o estudo do conceito de limite, neste programa, está intimamente relacionado com o conceito numérico.

As correcções que Sebastião e Silva propunha, para o programa anterior, verificam-se aqui, apesar de este estudo avançar para o 7º ano.

> - no caso da Matemática Clássica, pertence ao 1º ano, da seguinte forma:
>
> *As funções da variável natural. Limites de sucessões.*
>
> *NOTA: Demonstração dos dois primeiros teoremas relativos a infinitésimos, do da unicidade do limite e dos relativos à soma e produto de duas variáveis convergentes.*
>
> *Limites de funções de variável real: continuidade.*

NOTA: não deve ser dada nenhuma demonstração, mas os conceitos devem ficar bem esclarecidos.

Derivadas: definição de derivada de uma função num ponto e sua interpretação geométrica.

Derivabilidade e continuidade (com demonstração).

A função derivada. Regras de derivação, incluindo a derivada da raiz. Dedução nos casos da soma, produto, potência e derivada da função inversa.

Aplicação a problemas de máximos e mínimos e representação gráfica de funções. (Cultura, 1974)

A partir do ano lectivo de 1978/1979 o ensino secundário passa a ter a seguinte estrutura:

▪ Curso Unificado, com 5 anos;

▪ Curso Complementar, com 2 anos (10º e 11º anos)

▪ 12º ano que surge pela primeira vez no ano lectivo 80/81

Para esta nova estrutura, a Análise Infinitesimal está patente no programa do 10º/11º [6] ano da seguinte forma (Educação, 1979):

1. Limites de sucessões

…

Limite de uma sucessão; sucessões convergentes.

Unicidade do limite (com demonstração). Infinitésimos. Limite de uma sucessão constante. …

3. Limites de funções reais de variável real. Continuidade.

Definição de ponto de acumulação de um subconjunto de $\Re$.

Definição, à Heine, de limite de $f(x)$ *quando* x *tende para um ponto de acumulação* a *do domínio de* f *(considerando apenas sucessões de termos diferentes de* a*). Extensão ao caso em que* a *é* $+\infty$ *ou* $-\infty$.

Teorema da unicidade do limite (com demonstração).

Limite de uma função constante.

Limites laterais. Informação de que a igualdade dos limites laterais é condição suficiente para a existência de limite.

Eventual referência à definição de limite de $f(x)$ *segundo Cauchy.*

Podemos verificar que a abordagem deste tema, no 10º ano, se distancia da concepção de número, recorrendo ao estudo das sucessões, ou seja, ao conceito de infinitésimo, para obter a definição de limite de uma função num ponto segundo Heine, e, “eventualmente”, fazer referência à definição de Cauchy.

Relativamente ao 11º ano, este tema, é tratado praticamente da mesma forma, mas com significativa perda do número de aulas.

Ambos os programas apresentam exemplos daquilo que se pretende que o aluno saiba fazer, no final do seu estudo, e enquanto no 10º ano se pretende que o aluno saiba aplicar a definição, para verificar se um determinado número é limite, no 11º ano, é, também, exigido que o aluno saiba calcular limites.

Nas indicações metodológicas pode ler-se: “f) os conhecimentos e capacidades já adquiridos em anos anteriores, nomeadamente os do 10º ano, deverão ser utilizados, sempre que possível, no

[6] Inicialmente, este programa seria aplicado no 10º ano. Não tendo sido possível concretizar-se, ele passou a ser aplicado no 11º ano.

estudo dos novos temas agora propostos. Em particular, os conhecimentos e a simbologia da lógica deverão ser usados sempre que se julgue conveniente (estudo dos limites, da continuidade, da derivação, das probabilidades, etc.).

É interessante constatar a importância do estudo da lógica, no estudo dos limites, o que nos programas actuais não acontece.

Numa fase de transição, após a conclusão do Curso Complementar, surgiu o Ano Propedêutico. Conforme se diz nos textos de apoio, relativos ao seu primeiro ano de funcionamento, este destina-se a colmatar a diferença entre o programa oficialmente atribuído ao 2º ano do Curso Complementar e o programa mínimo estabelecido, e a orientar as matérias, no sentido de facilitar posteriores aprendizagens, na Universidade (Superior, 1977-1978). No que se refere ao estudo dos “limites”, primeiro de uma sucessão e depois de uma função, vemo-lo associado ao aparecimento dos números reais e às aproximações *(Superior, 1977-1978)*:

> *2. Introdução à Análise Infinitesimal*
>
> *2.1 Erro de um valor aproximado. Noção de vizinhança de um número real. Erro cometido na avaliação de uma grandeza.*
>
> *2.2 Propagação de erros através de operações.*
>
> *Majoração do erro de uma soma e de uma diferença.*
>
> *Majoração do erro de um produto e de um quociente.*
>
> *Majoração do erro de uma potência.*
>
> *2.3 Aplicação das noções adquiridas no cálculo Aproximado no esclarecimento do conceito de limite (de sucessões e de funções) e do conceito de diferencial e derivada*

A Lei de Bases do Sistema Educativo, publicada em 1986 vem, mais uma vez, alterar a estrutura do ensino secundário, no qual passa a constar, apenas o 10º, 11º e 12º anos.

Em 1991, surgem novos programas para o ensino secundário, estando o estudo dos limites incluído da seguinte forma.*(Educação, 1991)*:

11º ano:

> *6. Sucessões II – Limites*
>
> *- Infinitamente grandes e infinitésimos.*
>
> *- Sucessões convergentes. Unicidade do limite*

Nas indicações metodológicas apela-se ao recurso da calculadora gráfica e de representações gráficas, para o estudo de infinitamente grandes e de infinitésimos.

Este capítulo é visto como preparativo para a obtenção do conceito de limite de uma função real de variável real, e tendo em vista a delicadeza dos conceitos de infinitamente grande e infinitésimo, o

programa indica que estes devem “ser intuídos, numérica e geometricamente, antes de serem definidos e as definições, sem perda de rigor, serão dadas em linguagem corrente”(Educação, 1991)

> *7. Funções III – Limites. Derivadas.*
>
> *- Limites e continuidade de funções.*
>
> *- Derivação de funções racionais. Segunda derivada.*

- Aplicações.

O programa refere que o conceito de limite (à Heine), tal como outros conceitos relativos a funções, será intuído a partir de exemplos e as definições serão dadas em linguagem corrente, tendo por base apenas funções polinomiais e funções fraccionárias.

Trata-se de uma alteração relativamente aos programas anteriores, pois, quando se diz: “os conceitos básicos de Análise Infinitesimal são introduzidos intuitivamente e só posteriormente aperfeiçoados, evitando sempre uma excessiva formalização, dá-se relevo à interpretação e esboço de gráficos cartesianos (recorrendo, quando oportuno, à calculadora) ”, estamos a recorrer a novas ferramentas – por um lado à intuição e por outro à tecnologia. Há também um distanciamento relativamente ao formalismo e o termo limite aparece pela primeira vez aos estudantes, mesmo sem qualquer definição, associado ao estudo de propriedades de funções reais de variável real, e não ao estudo das sucessões.

12º ano *(*Educação, *1991)*:

5. Funções VI – Funções trigonométricas em $\Re$.
- Fórmulas. Equações e identidade.
- Seno, co-seno e tangente como funções de variável real.
- Limites, continuidade, derivada, variação.
…

Este programa, depois de um período experimental, foi aplicado de forma generalizada, em 1993.

Rapidamente surgiram dificuldades de concretização e, por isso, até surgir o programa ajustado em 1997, foram dadas, pelo Ministério da Educação, algumas orientações no sentido de permitir a conclusão deste programa. Entre essas orientações, lê-se *(Educação, 1995a)*:

> *Não calcular limites de funções pela definição.*
> *Não proceder a demonstrações.*
> *Informar as regras operatórias de limites de funções dizendo que são consequências das regras operatórias de limites de sucessões (incluindo a regra para o quociente de dois polinómios).*

Estas orientações, consideramos nós, são a confirmação da consciência da extensão do programa.

A par do ensino liceal diurno, a Lei de Bases do Sistema Educativo, também contemplava o Ensino Recorrente. Este tipo de ensino tinha como objectivo assegurar “uma nova oportunidade de acesso à escolaridade aos que dela não usufruíram na idade própria (ensino básico até aos 15 anos e secundário até aos 18 anos), aos que abandonaram precocemente o sistema educativo e aos que o procuram por razões de promoção cultural ou profissional” (CEDEFOP).

O programa de 1993, para este tipo de ensino, relativamente aos objectivos gerais e ao estudo de limites diz: “Investigar limites, estudando sucessões infinitas, séries e áreas limitadas por curvas” (Educação, 1993*)*. Neste caso, o “limite de uma sucessão” inicia-se com o estudo da vizinhança de um número real, ou seja, o conceito é introduzido através de uma concepção numérica.

O Programa Ajustado que surgiu em 1997, em virtude de o programa anterior ser demasiado extenso, nas considerações acerca da distribuição dos conteúdos, no ensino secundário, diz: “No estudo do Cálculo Diferencial dá-se prioridade ao trabalho com a noção de derivada, sendo deixada a formalização da definição de “limite” para uma fase posterior. Ao contrário dos programas anteriores, a noção de limite é visada primeiro de forma apenas intuitiva; em seguida é formalizada no tema de sucessões, sendo mais tarde generalizada para funções quaisquer (via definição de Heine)." (Secundário, 1997)

Este programa contempla o estudo da noção de limite da seguinte forma *(*Educação*, 1997)*:

> *11º ano –Introdução ao Cálculo Diferencial I*
>
> - *Estudo intuitivo tanto a partir de um gráfico particular, como usando a calculadora gráfica de propriedades das funções e dos seus gráficos (…,limites nos ramos infinitos,…)…para as seguintes funções:*
>
> *i) funções racionais definidas por* $f\left(x\right)=a+\dfrac{b}{cx+d}$ *;*
>
> *ii) funções definidas por dois ou mais ramos (cujo domínio é um intervalo ou união de intervalos)*
>
> - *Uso da calculadora para uma aproximação experimental da noção de limite, de* $-\infty$ *e* $+\infty$ *.*
>
> *12º ano –Introdução ao Cálculo Diferencial II*
>
> -…
>
> - *Limite de uma função segundo Heine. Propriedades operatórias sobre os limites (informação); limites notáveis (informação). Indeterminações. Assímptotas. Continuidade.*

A abordagem da noção de limite continua a ser de forma intuitiva, mas com alterações significativas: o conceito deixa de surgir a propósito do estudo das Sucessões para ser referido como uma das propriedades das funções racionais fraccionárias.

Que intenções estarão por detrás desta decisão?

Somos levadas a pensar que a abordagem intuitiva, num ano e a apresentação da definição no ano seguinte, traduz uma aposta na maturação dos alunos, isto é, existe a constatação da dificuldade inerente ao conceito.

Sem excluir a hipótese anterior, podemos também pensar, que esta alteração, serviu para alterar a filosofia de abordagem do tema. Assim, podemos considerar que a assimptota será uma tentativa de apelo à intuição, funcionando como uma constante, da qual se aproximam os valores da função indefinidamente.

No actual programa do ensino secundário, para os cursos Gerais de Ciências Naturais, de Ciências e Tecnologias e de Ciências Sócio-Económicas, homologado em 2002 e tendo entrado em vigor no ano lectivo 2004/05, a estrutura deste conteúdo mantém-se. É dada, ao professor, a indicação de que "o conceito de limite, a ser formalizado mais tarde, deve ser utilizado de forma intuitiva" e de que "Este conceito deve ser abordado de forma experimental"(Educação, 2002a).

Para o cálculo das derivadas, o professor deverá recorrer à interpretação geométrica, "recorrendo a um uso informal da noção de limite"(Educação, 2002a).

Só no capítulo "Sucessões" é apresentada uma definição formal de limite. As indicações metodológicas referem: "…utilizando a calculadora gráfica, através de cálculos e representações gráficas de sequências de termos chegar aos conceitos de infinitamente grande, de infinitamente pequeno e de limite de uma sucessão. …As definições são estabelecidas em linguagem corrente seguindo as conclusões a tirar de cada exemplo e contra-exemplo. Após cada redacção em linguagem corrente deve ser estabelecida uma redacção em simbologia matemática e devem ser aplicados exercícios rápidos em que as definições simbólicas sejam testadas" (Educação, 2002a).

Nestas indicações sobressai, relativamente ao programa anterior, preocupação com a linguagem simbólica. Veremos se em termos práticos esta indicação está a ser seguida.

3. Reflexões Finais

Da análise dos programas ao longo do tempo, sobressai:

• O estudo deste conceito foi integrado, de forma regulamentada, no ensino liceal, a partir de 1905, ou seja, 65 anos após o início da entrada em funcionamento dos liceus, tendo sofrido um interregno de doze anos (entre 1936 e 1948);

• A dificuldade em ordenar o estudo de “Limite” e de “Derivada”, no ensino liceal, quando este tipo de ensino surgiu, sugere alguma debilidade no tratamento dos temas – só a partir de 1918, o estudo de “Limite” antecede o de “Derivada”;

• É a partir dos programas de 1948 que o conceito de “limite”, no ensino liceal/secundário, adquire maior rigor no tratamento, com o estudo dos infinitésimos antes do dos limites;

• O estudo do conceito foi quase sempre associado ao conceito de número;

• O estudo do limite, só numa fase muito recente, isto é, a partir dos programas de 78/79 deixa de ter uma ligação tão directa ao estudo dos erros e das aproximações;

• O estudo do limite “liberta-se” da Álgebra, nos nossos programas, só a partir de 1974, o que indica uma necessidade de reconhecer um lugar próprio para o Cálculo Infinitesimal, na Matemática;

• O facto de a abordagem inicial ao conceito, começar a ser realizada de forma intuitiva, sugere reconhecimento na dificuldade que ele apresenta, o que veio a acontecer a partir de 1991;

• É também a partir de 1991 que se introduz a calculadora gráfica, para o estudo do conceito. Este acontecimento leva a crer que, a introdução das tecnologias será uma mais-valia para a aprendizagem do conceito;

• As indicações metodológicas fazem parte dos programas só muito recentemente (desde 1991), o que traduz uma diminuição da importância do professor;

• Actualmente, isto é, a partir do programa de 1991, o estudo do conceito faz-se em espiral. Ou seja, o conceito é abordado várias vezes de diferentes formas: primeiro é dada uma noção intuitiva, através das funções, depois é dada a definição de limite de uma sucessão e, por fim, é dada a definição de “limite” de uma função, num ponto;

• Actualmente, (programas de 1997 e de 2002) a noção intuitiva de limite é apresentada, pela primeira vez aos estudantes, a propósito do estudo de propriedades de funções racionais;

• Desde que os programas do ensino liceal começaram a ser melhor definidos, o conceito de limite tem sido progressivamente adiado para níveis cada vez mais superiores (é a partir de 1997, ou seja, muito recentemente, que a definição de limite de uma função num ponto é adiada para o 12º ano);

• As demonstrações foram sendo desvalorizadas, ao longo do tempo;

• As representações simbólicas nem sempre foram valorizadas.

Sabemos que o conceito de “Limite”, na História da Matemática, ocupa um lugar muito recente, o que se repercute em termos de ensino. Podemos, então, dizer que este conceito só há muito pouco tempo faz parte dos conteúdos programáticos. Desse pouco tempo, sobressai o aumento do equilíbrio entre o estudo gráfico e o analítico, o qual ao longo do tempo tem vindo a perder rigor na formalização.

CAPÍTULO IV

1. Os manuais escolares: Introdução

O mesmo artigo da lei n.º 47/2006 referido no capítulo “Programas”, relativo a “Conceitos”, também define Manual Escolar. Oficialmente este conceito significa:

> *o recurso didáctico-pedagógico relevante, ainda que não exclusivo, do processo de ensino e aprendizagem, concebido por ano e por ciclo, de apoio ao trabalho autónomo do aluno que visa contribuir para o desenvolvimento das competências e das aprendizagens definidas no currículo nacional para o ensino básico e para o ensino secundário, apresentando informação correspondente aos conteúdos nucleares dos programas em vigor, bem como propostas de actividades didácticas e de avaliação das aprendizagens, podendo incluir orientação de trabalho para o professor;*

Esta designação é actual, mas, seja qual for a designação, a sua função é de servir de material auxiliar, no estudo dos alunos, conforme refere J. Jorge Calado na Memória Descritiva do livro “Compêndio de Álgebra”, datado de 1956:

“E uma vez que a Administração impõe Livro Único, tacitamente preconiza que tal livro deva ser, para os alunos, auxiliar que baste para o aprendizado da matéria teórica e das suas consequentes aplicações práticas…”(Calado, 1956).

Neste capítulo iremos procurar identificar de que forma a definição de “limite”, tem sido tratada, nos manuais escolares, ao longo do tempo. Uma vez que, só mais recentemente, ele pretende ser um material de apoio ao trabalho autónomo, iremos investigar de que forma ele facilita, ou não, esse trabalho. Se atendermos ao Prefácio do livro “Compêndio de Álgebra” (Silva & Paulo, 1958):

> *Com o presente livro procuram os autores contribuir, na justa medida, para a melhoria do ensino liceal da matemática no nosso País, admitindo, como norma, que o livro não pode substituir o ensino oral, mas pode e deve servir de apoio e complemento às lições do professor.*

Vemos que, naquela época, na qual a definição de manual escolar não sendo necessariamente a mesma, existia a preocupação de que ele pudesse servir de material de apoio, ao trabalho dos alunos.

Nessa análise, interessa-nos identificar o tipo de definição e os aspectos didácticos que se destacam em cada uma delas, assim como a adequação do tratamento do tema com as indicações metodológicas sugeridas pelos programas oficiais, sempre que elas existirem.

Como dissemos atrás, também nos interessa analisar manuais utilizados na Universidade, mas, aqui, está fora de questão, a sua adequação aos programas e às indicações metodológicas.

Antes de iniciar esta tarefa, vamos expor algumas questões relacionadas com a elaboração de manuais escolares e que são fundamentais para a análise que se fará posteriormente.

Segundo Dreyfus (Dreyfus, 1999), em muitos manuais escolares “more or less formal arguments are used, together with visual or intuitive justifications, generic exemples, and naive induction. Even the formal arguments are often only formal in appearance.” e nos livros de Cálculo são comuns argumentos experimentais e visuais. Exemplificando, o autor cita uma passagem de um livro de Fraleigh (1990) onde se introduz intuitivamente a inclinação da tangente como o limite da inclinação da secante, usando argumentos físicos, sem previamente discutir a noção de “limite”. Aqui o uso da expressão “you would expect”, durante a exposição, é visto como uma forma astuciosa de encaminhar o raciocínio do leitor/estudante.

A questão da passagem do intuitivo para o formal, que é o que realmente está em causa, segundo Dreyfus, também não está claramente marcada num outro exemplo do livro de Fraleigh, onde intuitivamente, se chega à definição de “limite” segundo Cauchy e, posteriormente, são propostas actividades que exigem demonstrações formais. Situações como estas, são potenciadoras da inibição do uso do manual escolar autonomamente.

Na verdade, devemos ter em conta, o dilema com que se debatem os autores de manuais escolares, acerca das precedências, uma vez que a aprendizagem, em matemática, consiste no estabelecimento de conexões e relações, construindo uma teia de ideias, onde, por vezes, umas se formam a partir de outras. Um exemplo clássico desta dificuldade, e aqui muito oportuno, é o da introdução do conceito de limite antes ou depois do estudo do conceito de derivada (Dreyfus, 1999).

Digamos que na elaboração de um manual escolar existem problemas específicos, que não são simples de contornar, como é o caso da escolha do melhor percurso para se atingir o formalismo desejável e da sequência dos assuntos. Quando se fala na escolha do melhor percurso, estamos a pensar na selecção de exemplos, imagens, representação simbólica, linguagem utilizada e sequência da exposição/tratamento.

Convém salientar que, durante bastante tempo, o ensino do conceito em estudo, foi realizado da mesma forma, no ensino secundário e no ensino superior e, por isso, para épocas mais remotas, o tratamento deste tema nos manuais era semelhante para os dois graus de ensino (Pedro José Cunha, 1940).

E, por isso, se justifica a análise desta definição, em diversos manuais, destinados ao ensino universitário, como a que se apresenta de seguida.

1.1 Manuais utilizados no ensino universitário

A razão de existir desta secção, prende-se com o facto de nos interessar estabelecer um paralelo, tanto quanto possível, quanto à definição do conceito de limite nos manuais do ensino superior e do ensino secundário. Desta forma, realizamos uma enumeração, até quando ela se justifica, de manuais utilizados na Universidade, o que, até ao princípio do século XX, não é, de forma nenhuma, extensa.

Em 1794, Garção Stockler, professor de Matemática na Academia Real da Marinha e sócio da Academia Real das Sciencias, nas primeiras páginas do seu livro “Compendio da theorica dos limites”(Stockler, 1794) afirma que esta obra foi “comunicada à Academia Real das Sciencias em Dezembro de 1791, justamente no tempo em que, encarregado por S. Majestade da regência da Cadeira de Cálculo, e Foronomia da Academia Real da Marinha, me vi precizado a manifestar algumas proposições da dita Theorica aos meus Discipulos, como fundamento, em que estabelecesse o meu Methodo das Fluxões, do qual também lhes expuz os principios fundamentaes”.

Nesta obra, o autor, também, faz referência aos estudos sobre este tema, até à época, apresentando concepções que se iniciam com Newton e terminam com l´Huilier.

A III[a] Definição, neste livro, é relativa ao “limite” (Stockler, 1794):

III.ª

Huma quantidade constante chama-se *limite* de huma variavel, quando esta póde crescer, ou deminuir de tal sorte, que ainda que o seu valor naõ possa nunca ser igual ao valor d’aquella, possa comtudo aproximar-se tanto a elle, que a sua differença venha a ser menor que qualquer quantidade, que se tenha assignado, por quaõ pequena esta seja.

É um livro que, como seria de esperar, não apresenta qualquer representação gráfica, de forma a facilitar a construção de uma imagem mental adequada. A aprendizagem, com a utilização deste livro, é feita através da interpretação do texto e consequentemente a construção mental da imagem a que ela conduz, como a maioria dos livros da época. Isto não significa que, nesta época, os livros não contivessem imagens, pois elas aparecem nos capítulos de Geometria, mas sim, que os autores não sentiam necessidade de recorrer a imagens como ajuda na compreensão deste tema.

Esta definição cria a imagem de uma variável que se aproxima de um valor sem nunca o atingir, portanto, como sabemos actualmente, induzirá o aluno em erro, nalgumas situações.

Efectivamente, este livro nunca foi adoptado no ensino, apesar da imensa necessidade de compêndios, com esta finalidade, desde a criação da Faculdade de Matemática em 1772 (Pedro José Cunha, 1940).

Os livros adoptados na Universidade de Coimbra eram traduções de obras didácticas francesas. O livro “Elementos de Analyse Mathematica” que é uma tradução de M. Bezout, efectuada por José Joaquim Faria (Freire, 1872), é exemplo disso, mas é um livro onde não existe o termo limite como sendo um conceito matemático. Este termo surge relacionado com o estudo dos infinitésimos e dos infinitamente grandes (Bezout, 1801):

> que acabamos de dizer. Vê-ſe que os termos da ſerie $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$ &c. cada vez ſe approximaõ mais da unidade, mas nunca podem paſſar deſte limite por mais que ſe continuem. Cada termo póde ſer repreſentado por $\frac{x}{x+1}$, ſubſtituindo em lugar de x o numero do meſmo termo. Como pois os termos continuamente ſe vaõ avezinhando da unidade, e tanto mais ſe ap- pro-
>
> proximaõ quanto mais ſe apartaõ da origem; eſtá claro que ſó a huma diſtancia infinita da origem he que poderáõ tocar o dito limite da unidade; logo para acharmos o ultimo termo da ſerie, devemos ſuppor x infinito no ſeu termo geral $\frac{x}{x+1}$. Porém eſta quantidade, conforme o principio eſtabelecido, reduz-ſe a $\frac{x}{x}$, iſto he a 1;

Questões relacionadas com os infinitésimos tinham vindo a ser matéria de estudo de vários matemáticos (para além de outros, d'Alembert e L'Huile, atrás referidos) o que é compreensível que este assunto surja neste momento, nos manuais utilizados no ensino universitário.

Sendo uma realidade a necessidade de manuais, foi aprovada, em 1838, a proposta da adopção da obra "Curso completo de matemáticas puras" de Fancoeur, traduzida por Castro Freire e Souza Pinto (Pedro José Cunha, 1940).

Este foi o manual adoptado, por diversos anos, nos 1º e 2º anos na Faculdade de Matemática, tendo havido diversas edições, com sucessivos aumentos e correcções (Pedro José Cunha, 1940).

O manual para o 2º ano "Cálculos Diferencial e Integral" daqueles autores, na edição de 1863, apresenta a seguinte definição de limite:

> *Limite duma grandeza variável é a quantidade constante, da qual a variável se pode approximar indefinidamente, de modo que a differença entre ellas seja menor que qualquer quantidade assignalavel, sem que cheguem a tornar-se rigorosamente eguaes.*

Trata-se, mais uma vez, de uma definição que afirma que a variável não pode atingir o valor do limite, o que reconhecemos como sendo uma incorrecção (Pedro José Cunha, 1940) e também não pressupõe qualquer interpretação gráfica.

Na Escola Politécnica de Lisboa, fundada em 1837 com o objectivo de preparar os candidatos a oficiais do Exército e da Marinha, o livro adoptado por vários anos foi "Elements de Calcul Infinitesimal" de Duhamel (Pedro José Cunha, 1940). Nesse livro é assim que o autor se refere, pela primeira vez, ao conceito de "limite" (Duhamel, 1860):

5. *Limite d'une variable.*—Lorsqu'une grandeur prend successivement des valeurs qui se rapprochent de plus en plus de celle d'une grandeur constante, de telle sorte que la différence avec cette dernière puisse devenir et rester moindre que toute grandeur désignée, soit que la variable soit toujours au-dessous, ou toujours au-dessus, ou tantôt au-dessous et tantôt au-dessus de la constante, on dit que la première *approche indéfiniment* de la seconde, et que celle-ci en est la *limite*.

Ainsi nous appelons *limite* d'une variable, une *quantité constante dont la variable approche indéfiniment sans jamais l'atteindre*.

Para melhor esclarecer esta noção, Duhamel salienta “que se a diferença entre a constante e os valores sucessivos da variável, depois de se tornar inferior a uma quantidade designada, se tornar em seguida maior que ela, depois mais pequena, em seguida maior, e assim indefinidamente, a constante não deve ser considerada como limite da variável” (Pedro José Cunha, 1923).

Para Pedro José da Cunha, esta ideia de limite, “Parece, à primeira vista, excluir o caso de certas funções que, quando a variável de que dependem varia sempre no mesmo sentido aproximando-se dum número dado, oscilam indefinidamente em tôrno dum valor limite, sendo cada vez menor a amplitude das oscilações; tal é, por exemplo, a função $\frac{sen\ x}{x^2}$, que tende para zero quando x tende para o infinito, e passa e repassa indefinidamente pelo valor zero.”

Por outro lado, as expressões “tornar-se” e “manter-se menor”, não traduzidas por símbolos matemáticos, não ofereciam nitidez e precisão suficientes”(Pedro José Cunha, 1923).

Com esta definição, continuamos na mesma linha de pensamento quanto à possibilidade da variável atingir o valor do limite.

No final do século XIX, Francisco Gomes Teixeira dá um excelente contributo para o ensino o superior, com a sua obra “Curso de Analyse Infinitesimal”. E, aqui sim, há um grande salto qualitativo na forma de considerar a noção de limite, retirando o que “havia de vago e impreciso na definição daquele conceito fundamental”(Pedro José Cunha, 1940*)*.

Este conceito é exposto da seguinte forma (F. G. Teixeira, 1890):

10. — A noção de *limite* appareceu já na Arithmetica e nos Elementos de Geometria, onde se disse que uma quantidade constante A é o limite para que tende uma quantidade variavel u se os valores successivos da variavel se approximam indefinidamente da constante de tal modo que o valor absoluto da differença $A - u$ possa tomar e conservar um valor menor do que qualquer grandeza dada, por mais pequena que seja.

Em termos mais precisos póde dizer-se que *uma quantidade constante A é o limite para que tende uma quantidade variavel u, que passa por uma infinidade de valores successivos u_1, u_2, etc., quando a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequena que seja, corresponde um valor n_1 tal que a desigualdade*

$$(1) \qquad |A - u_n| < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de n superiores a n_1.

Aqui, no capítulo “Theoria dos números irracionais”, Gomes Teixeira afirma que

Os numeros irracionaes appareceram tambem na Geometria Elementar debaixo de um ponto de vista mais geral do que o procedente, como limites de uma série de numeros racionaes. E' debaixo d'este ponto de vista que vamos agora estudal-os.

Trata-se de uma abordagem com recurso à Aritmética e à Geometria, que se torna mais intuitiva e terá surgido com uma intenção pedagógica, incorrendo na possibilidade de estar a falar num limite, sem saber se ele existe:

II — Diz-se que um numero racional, variavel e crescente u_n cujos valores successivos são u_1, u_2, etc., tende para um *limite* racional a quando n augmenta indefinidamente, se os numeros u_1, u_2, etc. se approximam successivamente de a, de modo que a cada valôr que se dê ao numero arbitrario δ, por mais pequeno que seja, corresponda um valôr n_1 de n tal que seja (em valôr absoluto)

$$u_n - a < \delta$$

quando $n > n_1$.

Se o numero racional u_n crescer á medida que n augmenta, sem todavia poder jámais exceder um numero racional determinado, e não tender para um limite racional, diz-se, por definição, que tende para um *numero irracional* (que representaremos por lim u_n) maior do que qualquer dos numeros racionaes u_n ou inferiores a u_n e menor do que qualquer dos outros.

Efectivamente, a definição deixa de levantar problemas quanto aos valores da variável poderem ser maiores ou menores que o limite, quanto à possibilidade de o limite ser ou não atingido e é uma noção aplicável a qualquer tipo de variável, seja ela real ou imaginária (Pedro José Cunha, 1940).

Apesar de não apresentar qualquer representação gráfica que facilite a compreensão, há a introdução da linguagem simbólica, o que significa um grande avanço no estudo do conceito.

Em 1940 Bento de Jesus Caraça, assenta a definição de limite na de infinitésimo:

$$\lim_{x \to a} y(x) = A \text{ se } y(x) - A \text{ é um infinitésimo com } x - a \text{ .}$$

A definição de infinitésimo é dada *apriori*:

Def. 1.ª *Seja, sôbre um eixo em que se tomou um ponto O como origem, (E) um conjunto de pontos pertencentes à vizinhança* [**1, 3**] *dum ponto* a *dêsse eixo. Se fôr x a variável representativa das abscissas dos pontos de (E), ela satisfaz à seguinte condição — dado um número $\delta > 0$, arbitràriamente pequeno, existem valores de x tais que*

$$1) \qquad |x - a| < \delta;$$

a diferença $x - a$ é dita, então, infinitésima.

Assim como a definição de infinitésimo de $y(x)$ no ponto *a* (Caraça, 1940):

Def. 2.ª *Seja a função $y(x)$, real de variável real e seja* a *um ponto de acumulação do domínio de x. Diz-se que $y(x)$ é um infinitésimo no ponto* a, *ou que é um infinitésimo com $x-a$, quando a todo o número real $\delta > 0$ se pode fazer corresponder um número real $\sigma(\delta) > 0$ tal que a desigualdade $|y(x)| < \delta$ seja verificada para todos os valores de x que verificarem a desigualdade $|x-a| < \sigma(\delta)$.*

Abreviadamente põe-se

3) $$|x-a| < \sigma(\delta) \longrightarrow^{1} |y(x)| < \delta$$

ou, o que é equivalente,

4) $$-\sigma(\delta) < x-a < +\sigma(\delta) \longrightarrow -\delta < y(x) < +\delta.$$

Em vez disto, escreve-se também, com significado idêntico,

5) $$\lim_{x \to a} y(x) = 0$$

Nesta definição Bento de Jesus Caraça chama a $y(x)$ função, o que na verdade, é uma variável. Efectivamente, quando, num capítulo anterior, o autor definiu função, distinguiu variáveis de designações genéricas de funções:

Para indicar o valor particular u_i da função que corresponde ao valor z_i da variável independente escreve-se

2) $$u_i = u(z_i) \qquad \text{ou} \qquad u_i = f(z_i)$$

usando aquele símbolo externo $f, F, \varphi, \psi, \cdots$ que tiver sido adoptado na designação genérica da função.

Consideramos, pois, que aquela designação seja uma gralha.

Nesta definição é interessante a nota do autor relativamente ao símbolo $\rightarrow$, na qual o autor diz: "Leia-se: arrasta, ou implica", explicitando a noção de movimento a que esta definição conduz, ou seja, o autor salienta o carácter dinâmico desta definição.

Há, ainda, o cuidado de fazer acompanhar esta definição de uma representação gráfica, que complemente/descreva a definição de forma a facilitar a sua compreensão:

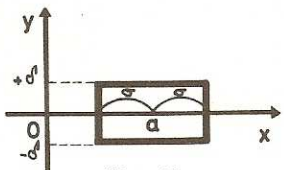


Fig. 49

Mesmo assim, o autor chama à atenção para situações particulares, fazendo observações relativamente à situação em que a expressão analítica não determina o valor da função no ponto *a*, "definindo-a no entanto num contorno dele"(Caraça, 1940) e para o caso da variável real poder não ser contínua, bastando que o ponto *a* seja ponto de acumulação do seu domínio, pertencendo ou não a esse domínio.

Efectivamente, a definição de limite torna-se de fácil compreensão desde que a definição de infinitésimo tenha sido compreendida.

Mas, ao referir "Aspectos da definição" o autor dá-lhe outras formas, estas de aspecto mais complexo:

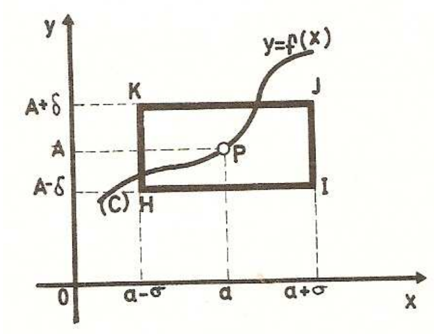
a)…, dizer que $\lim\limits_{x \to a} y(x) = A$ é afirmar que a todo o número real $\delta > 0$ *se pode fazer corresponder um número* $\sigma(\delta) > 0$ *tal que* $|x - a| < \sigma(\delta) \to |y(x) - A| < \delta$.

b) Pode fazer-se $y(x) - A = \xi$ *, donde* $y(x) = A + \xi$ *e, então, dizer que* $\lim\limits_{x \to a} y(x) = A$ *é afirmar que existe um contorno* (a, σ) *dentro do qual vale a igualdade*

$$y(x) = A + \xi$$

onde ξ *é um infinitésimo com* $x - a$ *.*

Para facilitar/complementar a interpretação, o autor apresenta o significado geométrico:



com a respectiva interpretação.

Para finalizar, o autor faz um alerta para a seguinte particularidade:

As considerações que acabam de fazer-se podem alargar-se – para que se possa definir limite da função $y(x)$ *quando x tende para a, não é necessário que ela seja definida em todos os pontos dum contorno de a; basta que o seja num conjunto (E) de pontos que tenha a como ponto de acumulação, pertencente ou não a (E) de pontos que tenha a como ponto de acumulação, pertencente ou não a (E). Por exemplo, se se tiver a variável racional r e* α *for um ponto de abcissa irracional, compreendido entre os extremos do domínio r, se, além disso,* $y(r) - A$ *for infinitésima com* $r - \alpha$ *, tem-se ainda, por definição,* $A = \lim\limits_{r \to \alpha} y(x)$.

Trata-se, efectivamente, de um livro com bastantes preocupações didácticas, sugeridas pelas particularidades apresentadas, pelo recurso às representações gráficas e pelos esclarecimentos adicionais às definições.

Para o estudo em causa, não se justifica continuar esta pesquisa nos manuais utilizados no ensino superior, pois a produção de obras com esta finalidade começa a ser demasiado vasta, mesmo já desde o início do século XX.

1.2 Manuais utilizados no ensino liceal/secundário

Apenas, entre 1947 e 1974 e também no período anterior a 1905, o ensino secundário tinha um manual único adoptado (J. M. Matos, 2006) . Nas restantes épocas, estava a cargo de cada liceu a selecção do manual.

Para este estudo, relativamente às épocas em que se utilizavam diversos manuais, iremos analisar apenas alguns, cuja selecção se baseia num dos seguintes critérios:

- é um manual com características diferentes da maioria, por apresentar a matéria através da prática: "Matemática 7" (Fernandes, 1982)
- é um manual que sobressai pelas preocupações didácticas: "M 11" (Abrantes & Carvalho, 1984) e "M12"
- é um manual adoptado por muitas escolas: "Matemática 12 º ano" (Neves & Brito, 1996), "Espaço 11" (Costa, Resende, & Rodrigues, 2004) e "Espaço 12" (Costa, Resende, & Rodrigues, 2005)
- é um manual que parece conter mais informação que a maioria dos outros: "Matemática – Teoria e Prática" (Câmara, 1998)
- é um manual que recorre a exemplos como método de exposição: "Funções 12" (A. V. Lopes et al., 1999)
- é um manual da mesma época do anterior, mas com características muito diferentes: "A Solução" (Ribeiro, Branco, Pona, Sousa, & Dias, 1999b)
- é um manual que apela à calculadora gráfica: "Mat 12" (Brito & Aubyn, 2005)

Nas épocas anteriores a 1947, já dissemos que não havia livro único, mas, aqui, os livros usados neste trabalho não foram, apenas, resultado de uma selecção, mas, sobretudo, os que conseguimos obter após pesquisas nos seguintes locais: bibliotecas públicas de Lisboa, Porto e Coimbra, biblioteca da Escola Secundária Sá de Miranda, em Braga, biblioteca da Escola Santa Maria Maior, em Viana do Castelo, biblioteca da Escola Secundária Rodrigues de Freitas, no Porto, Arquivo e Centro de Documentação do Ministério da Educação e alguns alfarrabistas, no Porto.

De forma a facilitar o enquadramento do manual a analisar, indicaremos o programa a que ele se refere.

Para os primórdios do ensino liceal, Pedro José da Cunha classifica o livro "Tratado Elementar de Arithmetica" do professor Luiz Porfírio da Mota Pegado como "um dos melhores do seu tempo". Nele é assim que se define limite *(*Pedro José Cunha, 1940*):*

> *Em geral chama-se limite de uma quantidade variável a uma quantidade constante, da qual a variável se approxima indefinidamente sem contudo chegar a ser rigorosamente egual a ella.*

Esta definição refere-se ao limite de uma variável, cujo conceito se manteve nos programas do ensino liceal, no curso geral ou no 2º ciclo do ensino liceal, conforme a época, até ao programa de1954, com início no programa de 1918.

Trata-se de uma concepção numérica, ainda afastada da noção de limite de uma função e que está muito próxima da definição que se encontra no livro de Duhamel.

Programa 1918,1919

Conforme vimos na secção relativa aos programas, numa determinada época, a disciplina de Matemática fazia parte do currículo do Curso Complementar de Letras. Assim, na VI classe, desse curso, está contemplada a noção de limite.

Dando cumprimento às recomendações, para esse programa, atrás referidas, no manual "Compêndio de Álgebra" (Martins, 1923) o autor expõe o tema "Cálculo Infinitesimal", recorrendo a exemplos.

Numa introdução histórica o autor começa por referir o método da exaustão de Arquimedes, do qual, apenas, salienta a sua utilidade na determinação da área de uma parábola e de outras curvas. Método esse, que esteve na origem de um "cálculo novo que facilita muito o método"(Martins, 1923). As referências a Newton e Leibnitz são inevitáveis, no sentido da formalização desse cálculo. E, assim, explica que:

87 — No fundo êste método procura substituir uma função qualquer pela função mais simples da proporcionalidade.

Evidentemente que não se pode substituir a função dada pela função

$$y=kx$$

êste número que se chama a derivada da função, reduzindo-se o seu cálculo a novas regras que são o próprio cálculo infinitesimal.

Será fácil de aceitar, que é previsível que qualquer aprendiz que leia este texto, sinta tudo demasiado vago.

Concretizando, o autor expõe o "Problema das velocidades", no qual é definida a velocidade, num instante, por redução do tempo tanto quanto se queira, recorrendo ao cálculo do limite: $v = \lim\limits_{\delta t=0} \frac{\delta e}{\delta t}$, designando δt por um aumento arbitrário de tempo e δe o respectivo aumento do

sendo assim levados ao estudo do limite da razão

$$\frac{f(t+\delta t)-f(t)}{\delta t}$$

quando δt tende para zero, limite que se chama a *derivada da função $f(t)$*, e que é o coeficiente de proporcionalidade que procuramos.

espaço percorrido.

Nesta explicação, o conceito de limite passa para segundo plano, relativamente ao conceito de derivada, de acordo com as indicações programáticas.

A seguir, o autor expõe o "Problema das tangentes", dizendo que é um outro problema que leva ao estudo do limite da mesma razão.

Este problema,

É em linguagem geométrica, a substituïção dum arco de curva pelo segmento rectilíneo que melhor o substitui; o que vem a ser algèbricamente, a substituïção da função pela da proporcionalidade para cada valor de x.

E o autor conclui:

Vemos, pois, que, para definirmos a tangente a uma curva $y = f(x)$, precisamos de achar o limite da razão

$$\frac{f(x + \partial x) - f(x)}{\partial x}$$

quando ∂x tende para 0, isto é, precisamos de achar a derivada da função $f(x)$.

Aqui, o estudo do limite está unicamente associado ao seu cálculo, mas nunca explorando esta vertente.

O que verificamos é que o limite é uma ferramenta que aparece associada à redução do tempo “tanto quanto quisermos” – conceito de infinitésimo. De facto, a indicação do programa é que se deve dar a noção de limite, “através de demonstrações, já feitas” e, quanto a isso, verificamos que o autor não se afasta destas directrizes. Mas, mesmo sendo essa a indicação, com que noção de limite ficará o aluno após a análise destes exemplos?

Que o limite é uma constante de proporcionalidade relativa a uma lei do movimento?

Que o limite é uma ferramenta para cálculos em que o denominador é zero, ou, muito próximo de zero?

Para o Curso Complementar de Ciências, o manual “Álgebra – VI e VII Classes – para o Curso Complementar de Sciências” (Albuquerque, 1924) começa por referir que:”O conceito de limite é frequente na sciência matemática”, remetendo para a seguinte nota de rodapé:

(1) Em geometria a significação de limite é a posição fixa de uma certa figura de que outra se aproxima indefinidamente, dadas certas condições. O exemplo mais notável, que se pode e convem dar, é o emprêgo que Descartes e Fermat, no século XVII, fizeram, dando a definição verdadeiramente satisfatória e geral da tangente a uma curva: considerando a tangente a uma curva como a *posição limite* de uma secante da curva num ponto fixo e noutro que se aproxima indefinidamente daquele.

De seguida, apresenta a definição:

Definição. — Uma quantidade x, que pode tomar inumeráveis valores sucessivos x_1, x_2, x_3, ..., de modo que haja sempre um dêles e todos os seguintes que difiram de um certo valor fixo A, para excesso ou para defeito, tão pouco quanto se queira, diz-se que o valor variável x tem por *limite* A, ou que *x tende para o limite* A; e exprime-se assim:

$$\lim. x = A.$$

Para a introdução do conceito de limite, este texto começa com uma abordagem geométrica, mas apenas em termos descritivos, isto é, sem qualquer imagem representativa e sem qualquer outra explicação, passa para a definição, que não parece ser de percepção imediata. Que entendimento terá o estudante de “valores sucessivos x_1, x_2, x_3...”? Provavelmente, à partida, o estudante não terá facilidade em estabelecer relação entre o exemplo geométrico e a definição apresentada.

A noção de limite, neste manual, está unicamente associada à noção de quantidade e de variável, ou seja, a noção de limite está distante do estudo das funções reais de variável real.

Ao estabelecer a "condição, pois, necessária e suficiente para que A seja limite da variável x", o autor escreve:

$$|A - x| < \varepsilon$$

a qual deverá ser sempre válida "quando se dá a x os seus valores variáveis" e "onde ε é um número positivo tão pequeno quanto se queira".

Esta tentativa de formalização da condição, relativa à definição, é passível de criar alguns obstáculos. O sinal de módulo é, logo à partida, um deles, conforme tinha já sido identificado num capítulo anterior e, além disso, esta representação não contém nada que nos remeta para a expressão "haja sempre um deles e todos os seguintes", existente na definição em linguagem corrente.

A noção de infinitamente pequeno surge a partir da noção de limite:

> A diferença $A - x$ é, portanto, ela própria uma variável que tem o número fixo zero por limite, ou, como se diz, essa diferença é *infinitamente pequena*: lim. $(A - x) = 0$.

Posteriormente, o autor faz o seguinte esclarecimento:

> **109.** Convem observar que entre a variável e o seu limite existe uma *diferença intrínseca*, que obsta a que uma e outro se confundam.

Isto, para dizer que é possível que o valor da variável venha a coincidir com o seu limite, dando para isso o exemplo:

> Exemplo: seja a variável $x = \dfrac{8n^2 + 2n}{2n^2 + 1}$

Neste exemplo, a variável "passa pelo valor limite 4, cresce ainda, decrescendo depois para convergir para o seu limite."

Isto é, existe da parte do autor preocupação em aperfeiçoar a definição, que não esclarecia esta situação, e que anteriormente ficou diversas vezes em aberto.

Em termos de conclusão, podemos dizer que esta a noção de limite anda à volta dos conceitos de número, de variável e de aproximação e nela encontramos o conceito de infinitésimo associado a uma diferença, tal como vimos, anteriormente, em Gomes Teixeira.

A conclusão do estudo, deste conceito, é feita com o estudo dos teoremas sobre limites (da unicidade e da função constante) e operações com limites, com as respectivas demonstrações.

Programa de 1929 e 1930

Analisemos, agora, um manual de 1932 – "Curso de Matemáticas Elementares" – dedicado "a alunos dos liceus (6ª e 7ª classes), dos institutos médios e das escolas que habilitam para exames de admissão às universidades"(Rodrigues, 1932).

Convém relembrar que a noção de função só começa a fazer parte dos programas a partir de 1926, e, como tal, é posterior a esta data o estudo do limite em funções.

A noção de limite, neste manual, é apresentada em primeiro lugar a partir de sequências de termos que se aproximam de um número “sem nunca o atingirem” (verificamos que esta questão continua a existir):

> **211. Limite duma variável qualquer.** — Seja $y = f(x)$ uma quantidade variável com outra x, da qual depende segundo uma lei qualquer, e suponhamos que a variável independente x, passando por valores crescentes ou decrescentes, pode representar qualquer número algébrico ou sómente os números que satisfazem a determinadas condições como, por exemplo, a de não excederem ou a de não se tornarem inferiores a um número designado a, ou a de pertencerem a um intervalo definido por dois números dados.

e posteriormente o “Limite de uma variável qualquer”:

> Pôsto isto, diz-se que *a variável y tende para o limite b quando x tende para o infinito* ou *para um número designado a*, por valores crescentes ou decrescentes, se a cada número positivo dado δ, tão pequeno quanto se queira, corresponde um valor de x tal que dele em diante, até ao infinito ou até ao número a, a todos os valores de x correspondem valores de y compreendidos entre $b - \delta$ e $b + \delta$.

Nesta definição vê-se, pela primeira vez, a utilização da letra δ para representar uma quantidade tão pequena quanto se queira, tal como vimos na definição apresentada por Gomes Teixeira.

E, continuamos a ver a definição de infinitésimo a assentar na de “limite”:

> Quando y tende para um limite b a diferença $y - b$ tende para zero ou é uma quantidade infinitamente pequena, isto é, sendo
>
> $$\lim. y = b, \quad \text{é} \quad \lim. (y - b) = 0.$$

O texto, na generalidade, é de difícil leitura, mas sentimos, principalmente, a falta de representações gráficas associadas à explicação e constatamos a falha relativamente à obrigatoriedade de os valores da variável serem sempre inferiores ou superiores ao número a. Por outro lado, fica por esclarecer esta obrigatoriedade, quando os valores da variável independente pertencem “a um intervalo definido por dois números dados”.

O programa relativo ao qual este manual se deveria adequar, relativamente aos limites diz: “Limites de funções de uma só variável,…” e, neste aspecto, a explicação é demasiado pobre para a variedade de situações que os vários tipos de funções nos possibilitam.

O tratamento, deste tema, continua com os teoremas sobre limites e operações com limites, com as respectivas demonstrações.

Programa de 1954 (igual ao de 1948)

Para responder ao programa de 1954, que se manteve inalterável relativamente ao de 1948, quanto ao estudo dos limites de funções, temos o manual de António Augusto Lopes: “Compêndio de Álgebra”(A. A. Lopes, 1955).

Cumprindo o estipulado no programa, o autor, a seguir ao estudo dos infinitésimos, apresenta a definição de limite de uma variável e depois o limite de uma função. Convém relembrar que nesta altura era estudado, a nível de 2º ciclo, o limite de uma sucessão.

Portanto, estamos a partir do princípio que os alunos já tinham tido contacto com a noção de limite, através da noção de infinitésimo e das aplicações geométricas do conceito de limite, apresentadas no manual "Compêndio de Álgebra" (Calado, 1956).

Este teria sido o manual único adoptado, o que podemos confirmar pela leitura da sua Memória Descritiva, onde se lê: "O compêndio que de novo temos a honra de submeter à douta apreciação da 3ª Secção da Junta Nacional de Educação, pouco difere daquele que, durante os últimos 5 anos, foi oficialmente Livro Único para o ensino da álgebra do 2º ciclo liceal."

Relativamente ao limite de uma variável, que supomos ser introdutório ao estudo do limite de uma função, encontramos o seguinte texto:

Simbòlicamente, para designar que **a** *é o limite de* **x**, escreve-se

$$\lim x = a \quad \text{ou} \quad x \Rrightarrow a$$

e lê-se, respectivamente, *o limite de* **x** *é* **a**, ou **x** *tende para* **a**.

Esta explicação é, sem dúvida, bastante esclarecedora em termos de linguagem simbólica. Isto é, o autor desmistifica o significado do sinal "=", utilizado na expressão $\lim x = a$ e utiliza um sinal de igual com uma seta a meio, que actualmente não se utiliza, mas que pretende ser mais realista, ou, pelo menos, evidencia que aqui o sinal "=" não tem o mesmo significado que o que se atribui, por exemplo, na expressão 3+2=5.

A explicação do limite de uma função, num ponto, é assente na noção de infinitésimo:

Consideremos a função $y(x)$ definida pela expressão

$$y = \frac{3x+4}{2}.$$

Para $x = 2$ o valor numérico da função, é 5. Se damos a x valores cada vez mais próximos de 2 (sejam maiores ou menores que este número) verificamos que os correspondentes valores de y são também cada vez mais próximos de 5.

Como a diferença $y - 5$ pode escrever-se sob a forma

$$y - 5 = \frac{3x+4}{2} - 5 = \frac{3(x-2)}{2}$$

vem :

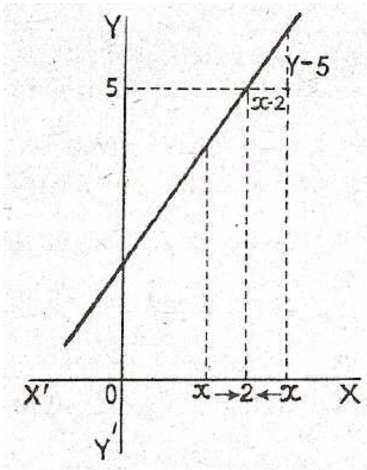
$$|y-5| = \left|\frac{3}{2}(x-2)\right| = \frac{3}{2}|x-2|$$

Esta igualdade permite concluir que *a diferença* $y - 5$ *é um infinitésimo com* $x - 2$.

Traduzimos esta propriedade dizendo que «*a função* $y(x)$ *tem o limite* 5, *quando* x *tende para* 2, *de qualquer modo*» :

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+4}{2} = 5$$

Sendo auxiliada pela representação gráfica:



Podemos considerar que para uma primeira abordagem, se trata de um exemplo significativo, mas, no exemplo seguinte: $y = \dfrac{3x^2 - 2x - 8}{2(x-2)}$, onde também seria vantajosa a representação gráfica, de forma a salientar que o limite de uma função num ponto é independente da imagem desse ponto, nessa função, ela já não existe.

Para o autor estes dois exemplos “justificam a definição”:

«*A função $y = f(x)$ tem por limite o número* **b**, *para $x = a$, se a diferença $y - b$ é um infinitésimo com $x - a$*».

Simbòlicamente,

9) $$\lim_{x \to a} y = b$$

Salientamos, novamente, a preocupação do autor relativamente à linguagem simbólica:

Esta anotação significa que a todo o número positivo δ é possível fazer corresponder um número positivo $\varepsilon(\delta)$ por forma que a condição $|x - a| < \varepsilon(\delta)$ implique $|y - b| < \delta$;

10) $$|x - a| < \varepsilon(\delta) \Longrightarrow |y - b| < \delta$$

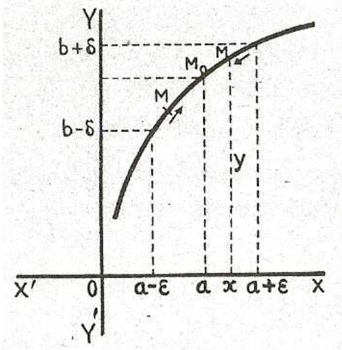
Pondo $y - b = \beta$ (infinitésimo com $x - a$), tem-se

11) $$y = b + \beta$$

isto é: se $\lim_{x \to a} y = b$, *existem valores* **x** *(tão próximos de* **a** *quanto se queira)* para os quais é verdadeira a igualdade 11), *sendo β um infinitésimo com $x - a$.*

É, também, interessante verificar que o número ε é descrito como uma função de δ, acentuando que estes valores não são independentes um do outro.

Quanto à interpretação geométrica, cujo gráfico é:



o texto que a acompanha

> Quando *b é o limite de y, para* $x = a$, o ponto variável M, de ordenada *y*, tende para o ponto fixo M_o, de ordenada $b = \overline{a\,M_o}$ ao mesmo tempo que, no intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, os pontos de abissa variável x tendem, à direita ou à esquerda, para o ponto fixo de abcissa *a*. Mantendo-se x no intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, y mantem-se em $(b - \delta, b + \delta)$.

pode criar algumas dificuldades na sua interpretação. Assim, quando se diz que "*b* é o limite de *y*, para $x = a$" este "=" significa mesmo igual? E, se não é o mesmo igual, até aqui, não foi assim que se representou.

A par do gráfico, o autor fala da possibilidade da função não estar definida em $x = a$, mas a representação gráfica não existe, o que seria um auxiliar poderoso, na aprendizagem.

O capítulo prossegue com o estudo dos limites laterais e dos teoremas sobre limites e operações, com as respectivas demonstrações.

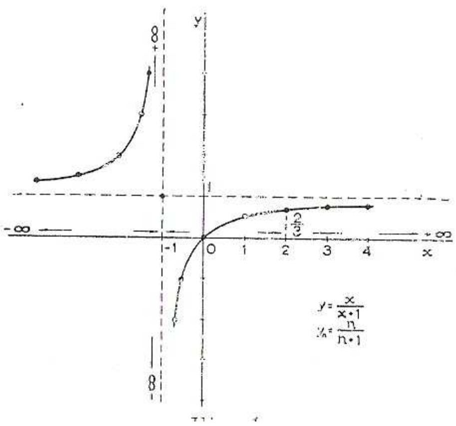
Para a mesma época, vamos agora analisar o manual de Sebastião e Silva, "Compêndio de Álgebra" (Silva & Paulo, 1958).

No capítulo "Limites de funções de variável real" usa-se a estratégia de conduzir, os estudantes, até à definição através da apresentação de exemplos.

São, então, apresentadas três situações distintas, relativamente à sucessão que vamos utilizar na expressão da função:

- a sucessão de valores tende para infinito;
- a sucessão de valores tende para uma constante qualquer;
- a sucessão de valores tende par um valor que não pertence ao domínio da função.

as quais "podem tornar-se mais intuitivas recorrendo à representação gráfica da função" (Silva & Paulo, 1958).



Para os três exemplos há um cuidado relativamente à escrita da expressão $\lim_{x \to a} f(x) = b$, no sentido de esclarecer o significado do sinal “=”, ou seja, aqui este sinal não significa o resultado de uma operação algébrica.

As situações expostas, segundo os autores, conduzem à definição:

> DEFINIÇÃO 1. *Sendo* f(x) *uma função qualquer e sendo* a *e* b *constantes quaisquer, finitas ou infinitas, diz-se*
>
> « $f(x)$ **tende para** b **quando** x **tende para** a »,
>
> *se, a* **toda** *a sucessão de valores de* x *tendente para* a *(sendo esses valores diferentes de* a *), corresponde uma sucessão de valores de* f(x) *tendente para* b (1).

para a qual existe uma chamada de atenção, relativamente à sucessão que tende para *a*, dizendo que a definição se mantém “para **todas** as possíveis sucessões de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, diferentes de *a*, tais que $x_n \to a$ ”

Relativamente ao outro manual notamos um decréscimo significativo relativamente à linguagem simbólica.

Em nenhum dos manuais é referido o nome do matemático a quem se deve esta definição, conforme também não indica o programa respectivo.

Este último manual, diz, ainda

> 3*. **Outra maneira de definir limite duma função.** — Em matemática superior adopta-se de preferência a seguinte definição de limite duma função:
>
> DEFINIÇÃO 2. Sendo a e b números reais, diz-se que uma função f(x) *tende para* b *ao tender* x *para* a, quando, dado um número positivo δ qualquer (por menor que seja), se pode sempre encontrar um número positivo ε de modo que se tenha
>
> $$|f(x) - b| < \delta, \quad \text{desde que seja} \quad |x - a| < \varepsilon, \quad \text{com} \quad x \neq a.$$

o que não parece trazer qualquer benefício à aprendizagem do conceito.

Após esta exposição podemos esperar que, neste momento, surjam questões do tipo:

- o limite de uma função existe sempre?
- se não existe sempre, qual será o aspecto do gráfico da função nesse ponto?
- como se escreve quando o limite não existe?
- para que valores da variável independente posso calcular o limite da função?

Para algumas destas questões, os estudantes encontrarão respostas até ao final do capítulo, onde se estudam limites laterais, após os teoremas sobre limites e sobre operações com limites.

O estudo dos limites laterais, cujos limites à esquerda e à direita, de um ponto, são diferentes, permite concluir rapidamente, que o limite, de uma função num ponto, nem sempre existe.

De seguida, apresenta-se uma situação em que os limites laterais num ponto são $+\infty$ e $-\infty$, com a seguinte conclusão:

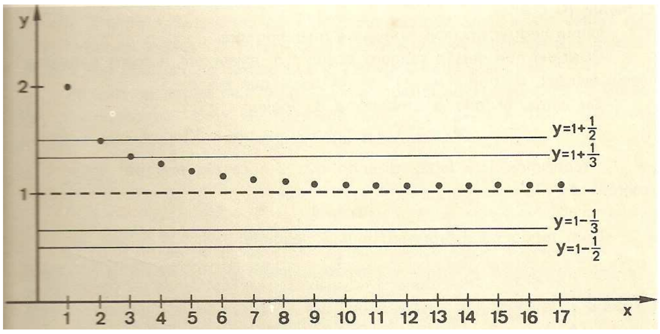
Assim, como se vê, quando x tende para -1 (de qualquer modo), a função tende para infinito sem sinal determinado, mas os limites à direita e à esquerda de -1 já têm sinal determinado ($+\infty$ à esquerda e $-\infty$ à direita).

Mas, relativamente aos limites laterais, cujo resultado é infinito, fica por esclarecer, quanto à existência de limite, no caso de os dois limites laterais serem infinito, com o mesmo sinal. Isto é, em nenhum local se vê de forma explícita que o limite não existe quando o seu resultado é infinito.

Programa de 1974 (Reforma de Veiga Simão - 1973)

No manual de 1976, "Compêndio de Matemática – 2º ano do Curso Complementar" (Garcia, Anjos, & Ruivo, 1976) o termo limite é usado pela primeira vez a propósito da convergência de sucessões, sendo também a primeira vez que os estudantes têm contacto com este termo.

A partir do gráfico



são analisadas algumas particularidades e depois é feito o resumo daquilo que se viu intuitivamente: "Qualquer que seja o grau de aproximação de δ fixado, existe uma ordem depois da qual todos os termos da sucessão são valores aproximados de 1 a menos de δ."

Seguindo em direcção ao formalismo, esta expressão é traduzida noutra "mais concisa e mais correcta":

> *Qualquer que seja o número positivo* δ*, existe um número p (pelo menos), tal que* $|u_n - 1| < \delta$ *desde que* $n > p$.
>
> *Ou ainda, usando o simbolismo da lógica:*
>
> $\forall_{\delta>0}\ \exists_{p\in IN} : n > p \underset{n}{\Rightarrow} |u_n - 1| < \delta$
>
> *Traduzimos este facto, dizendo que a sucessão tem por limite 1 e escrevendo* $u_n \to 1$

Após a leitura deste texto, é natural que o aluno sinta alguns obstáculos:

- a expressão entre parêntesis "pelo menos" pode não ser imediata
- a leitura do sinal de módulo, dificilmente será lida como uma distância entre dois pontos.

Neste momento existe uma preocupação por parte dos autores relativamente à aproximação dos valores da sucessão. Os autores sentem necessidade de esclarecer que não basta que os termos da sucessão se aproximem do valor ***a***: "Os termos da sucessão que consideramos, $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$, vão-se aproximando cada vez mais de zero, mas zero não é limite da sucessão. Com efeito, escolhido, por exemplo $\delta = \frac{1}{10}$, não existe uma ordem depois da qual todos os termos da sucessão são valores aproximados de 0 a menos de $\frac{1}{10}$.”

Este esclarecimento reforça a ideia de que δ poderá ser um número pequeno qualquer, por muito pequeno que seja.

E acrescentam:

> *A liberdade de escolher um qualquer grau δ de aproximação e a certeza de que a cada δ, livremente escolhido, corresponde uma ordem depois da qual todos os termos da sucessão são valores aproximados de **a** a menos de δ, é que nos permite afirmar que a é limite da sucessão.*

Neste manual, sobressai o aumento significativo na utilização da linguagem simbólica, mas, relativamente a este facto, não podemos esquecer que já estava implementada a Matemática Moderna, no nosso ensino.

Conhecendo as dificuldades que este conceito pode suscitar, e sabendo o valor da importância para novas aprendizagens, os autores, tentando alertar os alunos para este facto, aconselham: “Procure apreender bem o conteúdo da definição apresentada de limite de uma sucessão. Uma vez compreendido este conceito base, não terá qualquer dificuldade no estudo que vai fazer-se.”

No capítulo seguinte “ Limites de funções de variável real” é com recurso ao estudo acima referido e a gráficos exemplificativos que os autores apresentam a definição “rigorosa“ de limite de uma função num ponto, após o apelo à intuição para imaginar sucessões “presas” às funções:

> S*endo **a** e **b** constantes (finitas ou infinitas), diz-se que a função $f(x)$, real, de variável real, tem por limite **b**, quando x tende para **a** – e escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ – sse a toda a sucessão $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de valores de x (distintos de **a** e todos pertencentes ao domínio da função), tendente para **a**, corresponde uma sucessão $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) \ldots$ tendente para **b**.*

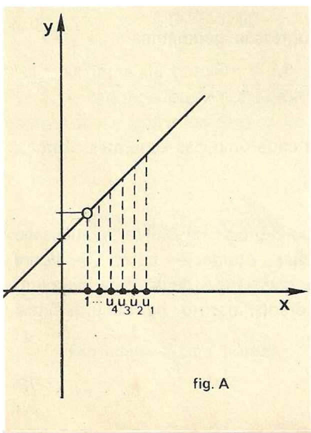
O que se traduz em linguagem simbólica por:

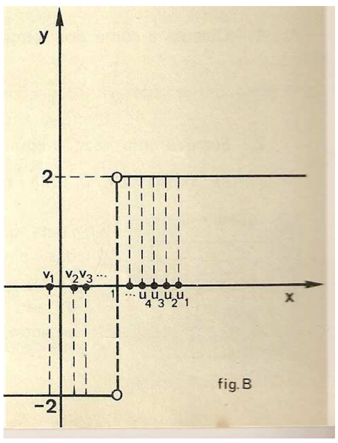
$$\bullet \lim_{x \to a} f(x) = b \text{ sse } (u_n \to a \wedge u_n \neq a, \forall n) \underset{u_n}{\Rightarrow} f(u_n) \to b$$

e

$$\bullet \lim_{x \to a} f(x) = b \text{ sse } \forall u_{n,} u_n \to a \wedge (u_n \neq a, \forall n) \Rightarrow f(u_n) \to b$$

e os gráficos utilizados neste estudo são:





onde o segundo gráfico serve de contra-exemplo.

Neste manual, vemos o estudo do limite de uma sucessão estar na base do estudo do limite de uma função.

Assistimos, também pela primeira vez, à informação da autoria desta definição, conforme sugerem as indicações programáticas.

Tal como nos manuais anteriores, são estudados os limites laterais e os teoremas sobre limites. Relativamente às demonstrações, é apresentada uma, a título exemplificativo, ficando as restantes a cargo do estudante, uma vez que "são inteiramente análogas".

O manual que constituiu o "texto-piloto" de uma "experiência de modernização do ensino em Portugal, dirigida pelo Prof. Sebastião e Silva" (Silva, 1978) foi o "Compêndio de Matemática" (Silva, 1978), o qual também serviu de base de trabalho para os alunos do Ensino Propedêutico, que funcionou entre os anos lectivos 77/78 e 79/80.

Aqui, o conceito de limite assenta nas noções de Cálculo Aproximado (Educação, 1977-78):

> Isto leva-nos naturalmente a acrescentar à simples ideia de que através da função $a \smile a^3$ ao 3 corresponde 27, a ideia mais elaborada de que aos valores dentro de certa vizinhança ε de 3 correspondem valores dentro de certa vizinhança δ de 27, a pequenez dos valores de δ variando directamente com pequenez de ε(**).
>
> (*) Veja-se fórmula da majoração do erro da potência
>
> (**) Visto podermos tomar $\delta = 3(3.1)^2 \varepsilon$
>
> Daqui, se retirarmos à vizinhança ε de 3, o próprio 3, pode claramente colher-se o conceito de limite segundo Cauchy.

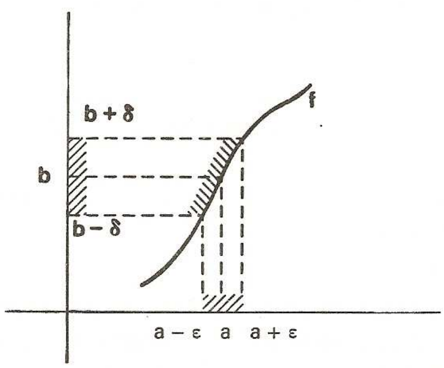
Sendo a definição apresentada a de Cauchy, a qual, segundo o autor, se trata de uma "definição directa" comparando-a com a de Heine.

A definição existe em linguagem simbólica:

DEFINIÇÃO. Diz-se que $f(x) \to b$ quando $x \to a$, sse:

$$\forall \delta > 0,\ \exists\, \varepsilon > 0: \ |x-a| < \varepsilon \wedge x \neq a \underset{x}{\Rightarrow} |f(x)-b| < \delta$$

para além da tradução em linguagem corrente e a representação gráfica, que se pretende que seja esclarecedora:



Vemos que, relativamente ao que se tinha estudado no Curso Complementar esta definição de limite é mais complexa — existe, na utilização da definição de Cauchy, uma aproximação ao Ensino Superior.

Programa de 1978/79

O manual “Matemática 7” (Fernandes, 1982) tem características diferentes dos anteriores, apresentando as definições através de exercícios e exemplos, como se mostra a seguir:

“Mostrar, aplicando a definição de limite de uma função num ponto, que:”

b) $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = \infty$ se $x \xrightarrow{g} \dfrac{x}{x-3}$;

Resolução:

b) Tal como anteriormente, consideremos uma sucessão qualquer x_1, x_2, ..., x_n, ... de elementos distintos, pertencentes a $]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$ (domínio da função) e convergente para 3.

A esta sucessão corresponderá uma outra sucessão de valores da função:

$$\frac{x_1}{x_1-3}, \frac{x_2}{x_2-3}, \ldots, \frac{x_n}{x_n-3}, \ldots$$

determinando o $\lim\limits_{x_n \to 3} \dfrac{x_n}{x_n-3}$

Por aplicação dos respectivos teoremas de limites das sucessões virá:

$$\lim_{x_n \to 3} \frac{x_n}{x_n-3} = \frac{\lim\limits_{x_n \to 3} x_n}{\lim\limits_{x_n \to 3}(x_n-3)} = \frac{\lim\limits_{x_n \to 3} x_n}{\lim\limits_{x_n \to 3} x_n - 3} = \frac{3}{3-3} = \infty$$

Ora, como este facto se verifica para qualquer sucessão $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ (convergente para 3), podemos concluir:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x}{x-3} = \infty$$

É verdade que o autor se propõe a apresentar os conteúdos através de exemplos, mas a sensação com que se fica, é que não é necessário tecer grandes considerações acerca do conceito, o que interessa é passar rapidamente à prática.

As explicações não são acompanhadas de qualquer representação gráfica.

Neste livro interessa-nos analisar aspectos relativamente às técnicas de cálculo de limites, que são susceptíveis de constituir obstáculos à aprendizagem.

Analisando o exemplo exposto acima, julgamos que a escrita da igualdade $\dfrac{3}{3-3} = \infty$, possa constituir um obstáculo à aprendizagem, pois, para além de ∞ não ser um número, é muito provável que os estudantes sintam dificuldades em colocar este resultado em situações semelhantes.

Num outro exemplo, onde se pede para verificar se as funções são infinitésimos com *x*, é dada a função:

; b) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}+x}$ $(x \neq 0)$;

e a respectiva resolução:

$$\text{b)}\ \lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{x}+x} = \frac{2}{\sqrt{\lim_{x\to 0} x} + \lim_{x\to 0} x} = \frac{2}{0} = \infty$$

pelo que y e x não são infinitésimos simultâneos.

A aprendizagem através de resoluções, como estas, pode levantar questões do tipo:

- Terei que dividir 2 por 0? E como faço isso?
- Como é que 2 a dividir por 0 dá ∞?
- Será que o sinal de fracção corresponde, mesmo, a uma divisão?
- Mas, se não é uma divisão, porque se coloca o traço de fracção?

Este manual tem, realmente, características diferentes daquilo a que estamos habituados. A lógica subjacente é proporcionar a manipulação, de forma rápida, de técnicas de cálculo, por isso, estes livros foram tão "queridos" pelos estudantes, durante tanto tempo.

O manual "M11" (Abrantes & Carvalho, 1984), tem características completamente diferentes do anterior – o que interessa é entrar nos detalhes do conceito.

Na introdução ao capítulo, fala-se em estudar o comportamento de funções nas proximidades de um ponto, que pode nem pertencer ao domínio das funções.

O primeiro exemplo é:

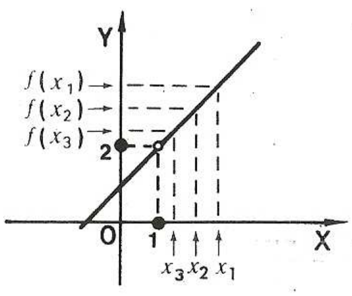
Exemplo 1: Dada a função definida em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ por $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, estudar o seu *comportamento local* no ponto 1.

e para sucessões convergentes para 1, são dados dois exemplos, tendo uma sucessão valores inferiores e outra superiores a 1, cuja tabela de valores dos termos das sucessões e respectivas imagens, influenciam a conclusão que se pretende obter. Salienta-se o cuidado em escolher mais que uma sucessão convergente para 1.

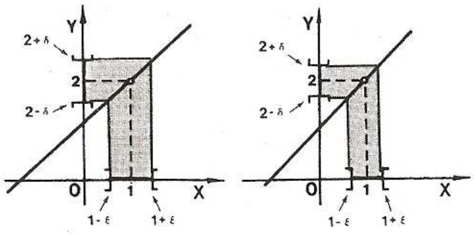
A tabela faz-nos recorrer à intuição:

n	1	2	3	4	5	6	
$x'_n = 1 - \dfrac{1}{n}$	0	0,5	0,66...	0,75	0,8	0,83...	$\to 1$
$f(x'_n) = x'_n + 1$	1	1,5	1,66...	1,75	1,8	1,83...	$\to 2$
$x''_n = 1 + \dfrac{1}{10\,n}$	1,1	1,05	1,03...	1,025	1,02	1,016...	$\to 1$
$f(x''_n) = x''_n + 1$	2,1	2,05	2,03...	2,025	2,02	2,016...	$\to 2$

Para completar a análise pode ver-se a tradução em termos gráficos:



ou , usando a noção de vizinhança:



isto é:

para cada vizinhança de 2, $V_\delta(2)$, existe
uma vizinhança de 1, $V_\varepsilon(1)$, tal que

$$x \in V_\varepsilon(1) \Rightarrow f(x) \in V_\delta(2)$$

Esta explicação faz-nos aproximar da definição de Cauchy, a qual, o programa ao qual este manual pretende satisfazer, recomenda uma eventual referência.

Digamos que os dois últimos gráficos se libertam de sucessões "presas" à função. Aqui o que está em destaque é a vizinhança.

No exemplo seguinte, trata-se de uma função contínua:

Exemplo 2: Estudar a função $x \overset{}{\underset{g}{\longmapsto}} x^2 - 4x + 5$ na *vizinhança* do ponto 2.

e no outro a função é definida por ramos:

Exemplo 3: Estudar o *comportamento* da função

$$h(x) = \begin{cases} 3 & \text{se} \quad s \to -1 \\ x + 2 & \text{se} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

a valores de x *muito próximos* de -1.

Nota-se, relativamente a outros manuais, da mesma ou diferentes épocas, uma maior preocupação na variedade e quantidade de exemplos os quais pretendem criar "melhores condições para apresentar de forma rigorosa o novo conceito" (Abrantes & Carvalho, 1984).

Neste manual, também é de salientar a reflexão acerca dos pontos onde se pode "discutir este problema":

o limite de uma função f num ponto a apenas será estudado desde que exista pelo menos uma sucessão de valores de x, todos pertencentes a D_f e todos diferentes de a, que seja convergente para a.

Após a qual se apresenta a definição de limite de uma função num ponto:

- Seja f uma f.r. de v.r. e a um número real tal que em qualquer vizinhança de a existe pelo menos um elemento de D_f distinto de a. Então, supondo $b \in \mathbb{R}$,

Definição: Diz-se que o limite da função f no ponto a é igual a b ou que f tende para b quando x tende para a sse qualquer que seja a sucessão (x_n) de valores de x (todos pertencentes a D_f e todos diferentes de a) convergente para a, a correspondente sucessão das imagens, $f(x_n)$, é convergente para b.

com a indicação do matemático a quem ela se deve.

A linguagem simbólica não está aqui contemplada.

Dando cumprimento ao estabelecido no programa: “eventual referência à definição de limite de $f(x)$ segundo Cauchy”, na faixa lateral da página vê-se:

■ Conhecida por definição de limite segundo Cauchy é a seguinte

Definição: $\lim\limits_{a} f(x) = b$ sse

$\forall \delta > 0 \ \exists \varepsilon > 0:$

$x \in D_f \setminus \{a\} \wedge |x - a| < \varepsilon \underset{x}{\Rightarrow} |f(x) - b| < \delta$

ou, usando vizinhanças,

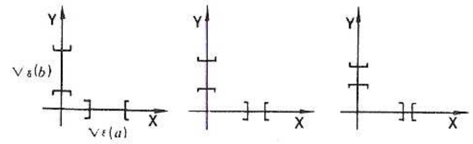
$\forall \delta > 0 \ \exists \varepsilon > 0:$

$x \in D_f \setminus \{a\} \cap V_\varepsilon(a) \underset{x}{\Rightarrow} f(x) \in V_\delta(b)$

o que, com certeza, só prenderá a atenção aos alunos mais interessados.

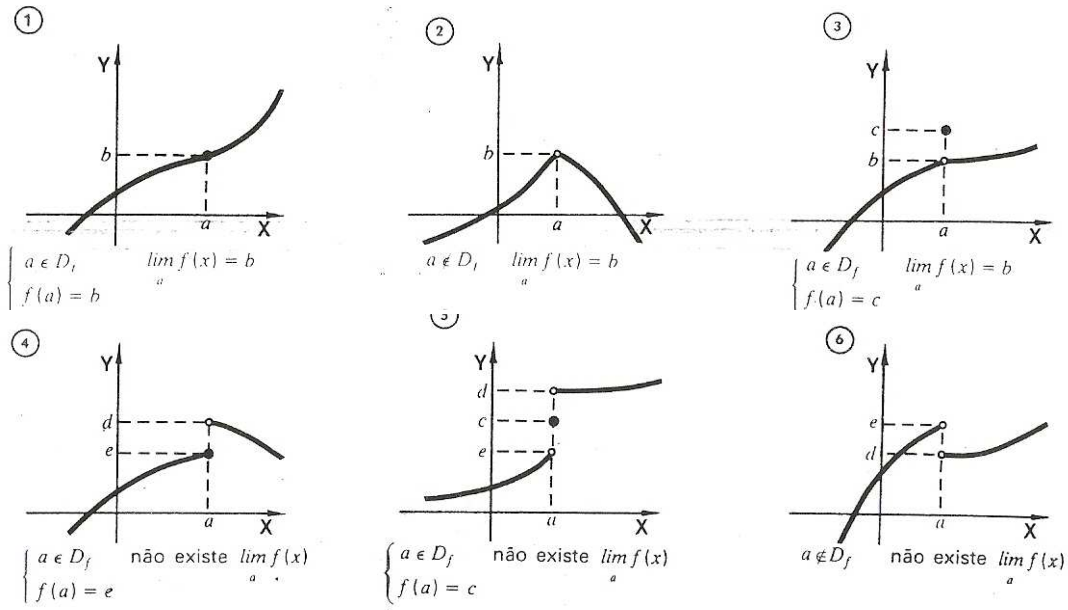
Uma vez que esta definição só está escrita em linguagem simbólica, isto criará obstáculo suficiente para que os estudantes desistam facilmente da sua interpretação. Para isso, contribuem os quantificadores, os sinais de módulo e a relação $\varepsilon - \delta$.

Para esta última questão há uma tentativa de ajuda, através dos gráficos:



o que poderá não ser suficiente.

As várias situações apresentadas a seguir, e que visam “melhor se compreender a noção de limite” (Abrantes & Carvalho, 1984), são, sem dúvida, contributos importantes para um trabalho autónomo:



O estudo neste manual continua com os limites laterais, assimptotas e propriedades dos limites, para cujas demonstrações são dadas sugestões ao estudante.

Programa de 1991 (Lei Bases Sistema Educativo – 1986)
Ajustamento dos programas em 95/96

Com base no programa de 1991 e respectivo ajustamento no ano lectivo 95/96, vamos analisar o estudo dos limites no manual “Matemática – 11º ano”(Neves & Brito, 1996).

Neste manual o termo limite aparece pela primeira vez associado à convergência de sucessões, apesar de anteriormente se ter falado em infinitésimos.

Como tem sido habitual, também neste manual, as autoras recorrem a exemplos para conduzir à definição.

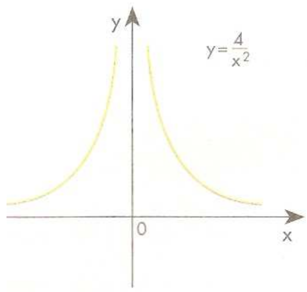
Temos, então, três exemplos de funções:

I - $f(x)=\dfrac{4}{x^2}$; II - $f(x)=2x-1$; III - $f(x)=\begin{cases} x & \Leftarrow x \le 2 \\ x+1 & \Leftarrow x > 2 \end{cases}$

Para a função indicada em I apresenta-se a tabela:

x	$y = \frac{4}{x^2}$
0,1	400
0,01	40 000
0,001	4 000 000
0,0001	400 000 000
⋮	⋮

e, ao lado do gráfico respectivo,



lê-se: “o método de atribuir valores à variável independente, cada vez mais próximos de uma constante a e verificar se a variável dependente se aproxima de b (finito ou infinito) é sempre muito útil”. Este texto, à partida, poderá levar o estudante a pensar que deverá construir sempre uma tabela semelhante à anterior, para determinar limites.

E, quando a seguir se diz “Estudamos o limite da função quando x tendia para zero $0 \notin D_f$ ”, a palavra limite que está associada à noção de convergência, poderá criar uma barreira na compreensão do texto, isto é, não existe a “ponte” que ligue a palavra limite associada às sucessões e agora às funções.

Consideramos que este texto é pouco eficaz para um trabalho autónomo, pois, relativamente ao exemplo I, ao afirmar que “estudamos o limite quando x tendia para zero”, o estudante poderá pensar

que basta analisar o comportamento da função de um dos lados do valor para o qual se aproxima a variável independente.

Na função referida em II, a tabela tem um aspecto diferente da anterior, pois, aqui é estudado o comportamento da função dos dois lados da variável independente:

x aproxima-se de 2 pela esquerda					2	x aproxima-se de 2 pela direita				
x	1,9	1,99	1,999	1,9999		x	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x)	2,8	2,98	2,998	2,9998		f(x)	3,0002	3,002	3,02	3,2
f(x) aproxima-se de 3					3	f(x) aproxima-se de 3				

É natural que o estudante questione esta mudança de estratégia, para a qual não encontrará resposta.

No último exemplo repete-se o procedimento anterior, para chegar à conclusão que o limite, nesse ponto, não existe.

Estando cada tabela acompanhada do respectivo gráfico, com estas três situações fica por esclarecer se o valor da variável tem ou não que pertencer à função e para que valores da variável, se pode ou deve calcular o limite.

A definição apresentada, em parte, clarifica este problema:

Definição de limite de uma função num ponto (segundo Heine)

Seja f uma função real de variável real e a um ponto de acumulação do domínio de f .

Diz-se que f(x) tende para b , quando x tende para a e escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

se, e só se, a toda a sucessão de valores de x , do domínio de f , convergente para a , sendo os termos da sucessão todos diferentes de a , corresponde uma sucessão de imagens por f , convergente para b .

Se é à definição de Heine que interessa chegar, seria de todo o interesse que a cada função estivesse associada pelo menos uma sucessão de termos, o que nunca acontece e, por isso, é de contar que a interpretação da definição não se faça nem facilmente, nem autonomamente.

O simbolismo, neste manual, não passa além da escrita de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Este estudo continua com o estudo de teoremas sobre limites (sem as respectivas demonstrações), limites laterais e o estudo das situações designadas por indeterminações.

Também a questão da não existência de limite não é tratada de forma que se torne clara, ao estudante.

Programa Ajustado de 1997

Uma vez que estamos a falar de uma época, a partir da qual o estudo do conceito está repartido por dois anos, vamos, agora, colocar duas situações:

1ª Situação: o aluno inicia o estudo com um manual, no 11º ano e completa-o com um manual de outros autores, no 12º ano.

2ª Situação: o aluno realiza o estudo do conceito de limite, utilizando manuais dos mesmos autores, no 11º e 12º anos.

1ª Situação

No manual "Matemática – Teoria e Prática" (Câmara, 1998) para o 11º ano, na Unidade Introdução ao Cálculo Diferencial I, no capítulo Funções Reais de Variável Real, após as Generalidades sobre funções e a definição de função Polinomial e Função Módulo, encontramos uma lista de "Conceitos básicos" sendo um deles:

> **Limites (Noção intuitiva)**
> É importante reconhecer o comportamento das imagens de uma função f quando a variável independente toma valores ou "muito" positivos ou "muito" negativos, escrevendo-se respectivamente, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
> Para estudarmos o limite de uma função f num ponto qualquer a, tomamos valores da variável independente tão próximos de a quanto se queira e observamos os valores das imagens correspondentes. Por vezes, temos de calcular separadamente o limite à esquerda e à direita de um certo ponto, escrevendo-se respectivamente, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.
> Dizemos ainda que o limite de uma função f num ponto a existe se os limites laterais nesse ponto são iguais.

Sendo uma indicação programática, que o conceito deve ser introduzido de forma intuitiva, parece-nos que esta abordagem tem esta designação, apenas para cumprir as indicações programáticas. Efectivamente, não existe um caminho que conduza ao conceito através da intuição, o que se verifica é que há uma utilização da palavra apenas para abreviar a escrita de "limite de $f(x)$ quando se aproxima de $\pm\infty$".

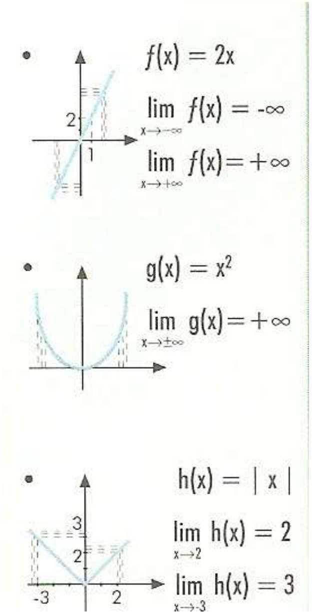
Esta forma de apresentar o conceito acaba por nem ser intuitiva nem formal.

É difícil imaginar que noção deste conceito poderá um estudante ter adquirido, através deste texto, o qual está incluído, surpreendentemente, nos "Conceitos básicos".

As informações dadas no segundo parágrafo, não são, certamente, suficientes para que o estudante construa uma imagem do que se pretende. Basta pensar que quando se diz:

- "num ponto qualquer *a*", será mesmo um *a* qualquer de que estamos a falar?
- "observamos os valores" – O que devemos observar nesses valores?
- "Por vezes" – Quando? Em que situações?

Também, os gráficos que acompanham esta explicação, para além de estarem pouco destacados (pertencem à barra lateral existente na página e em tamanho demasiado pequeno), são insuficientes:



O termo limite surge de novo no capítulo das Funções Racionais Fraccionárias, que é o capítulo seguinte, e aqui o termo é usado como se já fizesse parte do vocabulário, em matemática:

$x = 0$ é **assímptota vertical ao gráfico da função g**, pois o limite de g é infinito (∞) quando x tende para 0 e escrevemos

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to0^-} g(x) = -\infty$$

ou apenas $\lim_{x\to0^\pm} g(x) = \pm\infty$

A noção de limite, tendo por base os infinitésimos, surge a propósito das sucessões convergentes, e é aqui que se estudam algumas técnicas de cálculo, a aplicar posteriormente nas funções reais de variável real. Mas esse estudo é feito com recurso à utilização da variável δ, o que, para a generalidade dos estudantes, não é de fácil compreensão. A seguir apresentamos um exemplo, que se encontra neste manual:

“Consideremos a sucessão: $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ ”

Para um número real qualquer δ:

$$|u_n - 1| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \delta \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta} - 1 \Leftrightarrow n > \frac{1-\delta}{\delta}$$

Logo, para cada δ: $n > \dfrac{1-\delta}{\delta} \Rightarrow |u_n - 1| < \delta$

Vamos então dizer que (u_n) tende para 1 ou que converge para 1 ou que tem por limite 1.
Escreve-se $u_n \to 1$ ou $\lim u_n = 1$

No 11º ano nada mais se acrescenta a este conceito e, é partindo destes conhecimentos, que se estudam limites de sucessões e de funções, no 12º ano.

A formalização da noção de limite no manual, de 12º ano, “A Solução” (Ribeiro, Branco, Pona, Sousa, & Dias, 1999a) recorre ao estudo da função $f(x)=\frac{4}{x+4}$. Com a apresentação do gráfico desta função e usando o conceito intuitivo de “limite”, referido no ano anterior, as autoras concluem que não existe limite no ponto -4, uma vez que $\lim_{x\to -4^-} f(x)=-\infty$ e $\lim_{x\to -4^+} f(x)=+\infty$.

Mesmo depois desta conclusão, as autoras atribuem a *x* uma sucessão de valores x_n, tendendo para -4, ora por valores inferiores ora por valores superiores, para concluir o mesmo.

Para obter o limite da função no ponto zero, as autoras utilizam a sucessão $x_n=\frac{1}{n}$, que tende para zero, mas apenas percorrendo uma série de valores positivos. Contudo, as autoras concluem que $\lim_{x\to 0} f(x)=1$. À semelhança de outro manual atrás referido, esta incoerência, muito provavelmente, suscita dúvidas, criando uma barreira à aprendizagem autónoma.

Esta explicação é, para as autoras, suficiente para poder estabelecer a definição de limite de uma função segundo Heine.

Consideramos que ficam por esclarecer uma série de questões:

- e se o ponto pertence ao domínio e a sua imagem não coincide com os limites laterais?
- e se os limites laterais são iguais, mas a imagem do ponto não existe?
- e se a imagem coincide com um dos limites laterais?

O estudo continua com a informação das regras operatórias sobre limites, o estudo das indeterminações, das assimptotas e da continuidade.

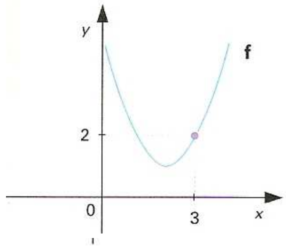
Se esta situação chegasse a ser uma realidade, seria previsível que os estudantes não realizassem, com a facilidade desejada, a leitura dos limites laterais em $x=-4$, na função acima referida, uma vez que o estudo gráfico, no manual do 11º ano, não prepara, suficientemente, neste sentido.

Se o programa propõe uma abordagem intuitiva, será com a intenção de criar um ambiente facilitador para uma abordagem formal posterior. Esse ambiente, não nos parece ter sido conseguido, no 11º ano e, por isso, o estudo com o manual do 12º ano não poderá ser visto como um complemento do anterior.

Analisando um outro manual, tendo por base o mesmo programa, intitulado “Funções 12” (A. V. Lopes et al., 1999) consideramos ter havido preocupações diferentes na apresentação dos conceitos.

O exemplo apresentado, graficamente é semelhante ao anterior, mas aqui, o cálculo do $\lim_{x\to 0} f(x)$ inclui aproximações de zero, por valores superiores e inferiores e, relativamente à condição de existência de limite num ponto é salientada a situação em que a função está definida, apenas, à direita ou à esquerda desse ponto. Nesta sequência é também definido limite de uma função num intervalo. Estes pormenores, dão-nos a indicação clara de existir uma maior preocupação em abranger o máximo das situações possíveis.

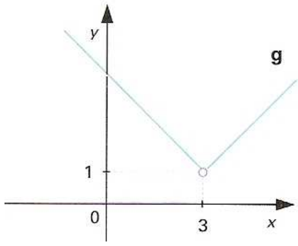
Em síntese e intitulado de “Gráficos e limites laterais” encontramos representações gráficas que, pensamos serem suficientemente esclarecedoras, e nos fazem recordar a exploração gráfica deste conceito no manual “M11”, contribuindo, certamente, para uma melhor compreensão do conceito:



• $D_f = R$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$ $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$

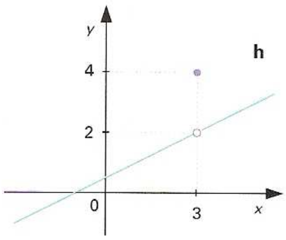
$\lim_{x \to 3} f(x) = 2$



• $D_g = R \backslash \{3\}$

$\lim_{x \to 3^-} g(x) = 1$ $\lim_{x \to 3^+} g(x) = 1$

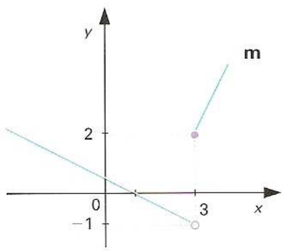
$\lim_{x \to 3} g(x) = 1$



• $D_h = R$

$\lim_{x \to 3^-} h(x) = 2$ $\lim_{x \to 3^+} h(x) = 2$

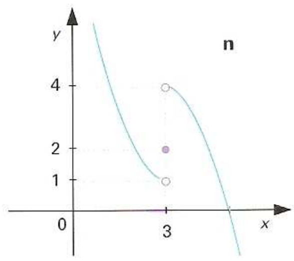
$\lim_{x \to 3} h(x) = 2$



• $D_m = R$

$\lim_{x \to 3^-} m(x) = -1$ $\lim_{x \to 3^+} m(x) = 2$

Não existe $\lim_{x \to 3} m(x)$



• $D_n = R$

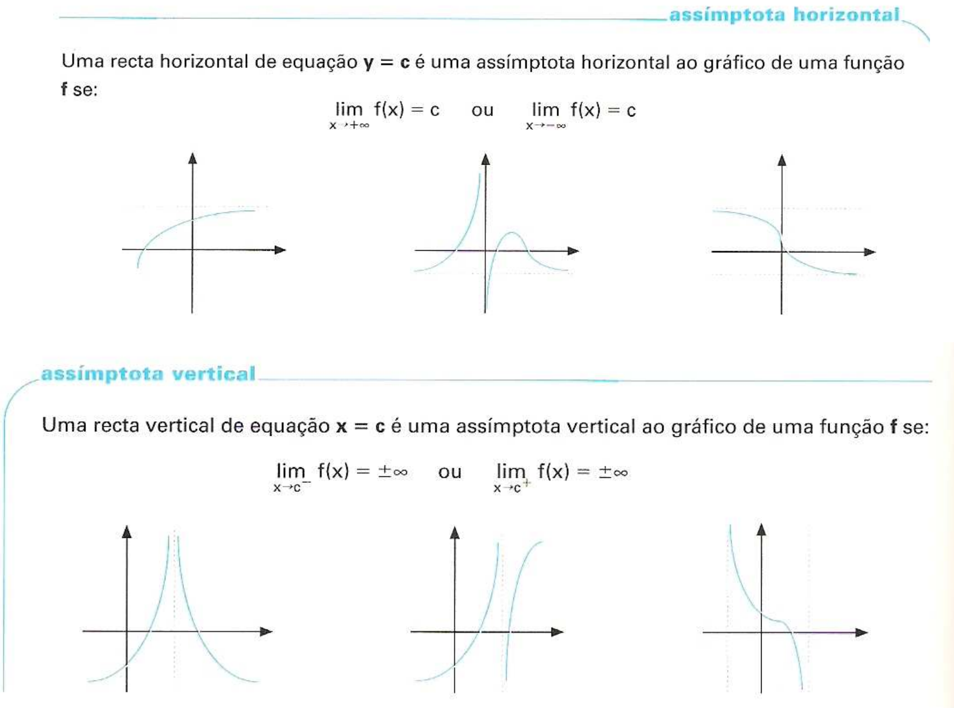
$\lim_{x \to 3^-} n(x) = 1$ $\lim_{x \to 3^+} n(x) = 4$

Não existe $\lim_{x \to 3} n(x)$

Para os casos em que, pelo menos, um dos limites laterais, num ponto, é ∞, existe a indicação de que o limite, nesse ponto, não existe, se os infinitos têm sinais diferentes ou se num dos lados o limite é uma constante. Mas quando os limites laterais são infinito, com o mesmo sinal, apenas se diz que o limite, nesse ponto, é infinito com esse sinal, precipitando a noção de assimptota. Isto é, não é claro, para o estudante, que esse limite não existe. É, por isso, natural que o aluno tenha dificuldade em responder à questão: Se o limite é infinito, ele existe ou não?

Relativamente ao cálculo de limites pela definição, este manual, é pouco elucidativo, não contribuindo com a ajuda que julgamos necessária, se é que pretendemos que exista um trabalho autónomo.

As explicações prosseguem com o estudo das assimptotas, e, também aqui, se nota preocupação na exploração gráfica do conceito:


assímptota horizontal

Uma recta horizontal de equação **y = c** é uma assímptota horizontal ao gráfico de uma função **f** se:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = c \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = c$$

assímptota vertical

Uma recta vertical de equação **x = c** é uma assímptota vertical ao gráfico de uma função **f** se:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$$

O estudo dos limites contínua com o estudo das regras operatórias de limites (sem demonstrações), indeterminações, limites notáveis e continuidade, sempre com uma componente gráfica muito forte.

O que dissemos relativamente ao manual anterior, aqui continua a ser válido e, talvez, de forma mais veemente, uma vez que, neste manual, o tratamento gráfico é o eleito, contrariamente ao manual do 11º ano.

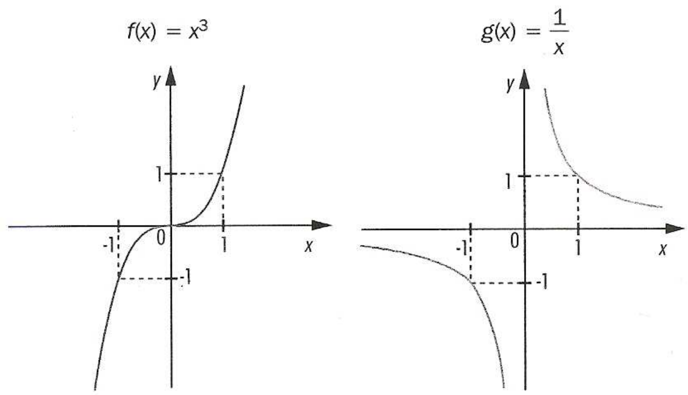
2ª Situação

Para esta segunda situação optamos por utilizar o manual, de 11º ano, “A Solução” (Ribeiro, Branco, Dias, Pona, & Sousa, 1999), por considerar que os outros dois (“Matemática – Teoria e Prática” do 11º e 12º anos), foram, provavelmente, menos utilizados.

Assim, vamos partir do princípio que os alunos que no 12º ano utilizaram o manual “A Solução”, usaram também o manual dos mesmos autores, no 11º ano.

Neste caso, a “aproximação experimental” da noção de limite terá sido apresentada de forma bastante diferente da que se expôs na situação anterior.

Esse estudo experimental, neste manual do 11º ano, consiste na análise dos gráficos das funções



relativamente ao seu comportamento, quando o valor da variável aumenta ou diminui muito, ou quando se aproxima de um valor que pode ou não pertencer ao domínio da função. Esse estudo é completado com tabelas de valores, que incluem a aproximação pela esquerda e pela direita, no caso de a variável se estar a aproximar de um valor (neste caso do zero, na função *g*).

Existe como representação simbólica:

Simbolicamente:
- quando $x \to +\infty$ então $f(x) \to +\infty$;
- quando $x \to +\infty$ então $g(x) \to 0$.

Existe, ainda, a indicação da não existência de limite quando os limites laterais são diferentes, ficando novamente por esclarecer a situação em que os dois limites laterais são ambos infinito, mas com o mesmo sinal.

Perante estas duas situações, não temos dúvidas em reconhecer que a segunda é mais vantajosa, para o estudante.

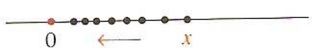
O aspecto intuitivo, apontado pelo programa, para o 11º ano, está aqui mais patente, proporcionando uma melhor interpretação dos gráficos apresentados no manual do 12º ano.

Para esta segunda situação ainda podemos pensar na possibilidade de existir trabalho autónomo, mas muito dificilmente, colocaríamos esta hipótese para a primeira situação.

Programa de 2002

O programa de 2002, para o 11º ano, no tema II – Introdução ao Cálculo Diferencial I – contém o item: “Estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando na calculadora gráfica, para a seguinte classe de funções: $f(x) = a + \dfrac{b}{cx+d}$ ” e, para este estudo sugere-se o estudo de diversas propriedades destas funções, tais como assimptotas e limites nos ramos infinitos.

No manual “Espaço 11”(Costa, Resende, & Rodrigues, 2004), para o estudo destas funções, os autores começam pela situação mais simples: $f(x) = \dfrac{1}{x}$. E, pelo facto de não existir $f(0)$, os alunos são levados a reflectir sobre as imagens da função para valores cada vez mais próximos de zero, a partir de 0,001. Pela primeira vez o aluno é confrontado com a expressão “a tender”, a qual ultrapassará com alguma facilidade porque ao mesmo tempo que se fala em imaginar valores cada vez mais próximos de zero, acrescenta-se a seguinte imagem:



Neste momento, surge um apelo à intuição para aceitar que $f(x)$ pode tomar valores tão grandes quanto se queira através do texto:

> *Assim, pode-se afirmar que, quando x tende para zero por valores à direita, $f(x)$ tende para $+\infty$.*
>
> *Diz-se que $f(x)$ tende para $+\infty$ quando $x \to 0^+$*

É de esperar que o aluno possa estranhar o facto de se usar o sinal “$\to$” quando se quer dizer que os valores da variável se aproximam de zero, ou seja, tendem para zero, uma vez que ele não se utiliza quando se diz que $f(x)$ tende para $+\infty$. Logo a seguir lê-se: “Representa-se por $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$”, que é uma representação da expressão “ $f(x)$ tende para $+\infty$ quando x tende para 0, com valores superiores a 0”. Ou seja, a expressão atrás referida é uma forma de representar simbolicamente aquilo que se vê na representação gráfica.

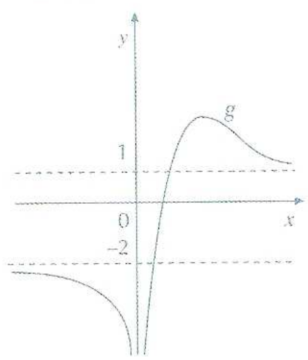
Esta representação simbólica poderá levantar diversas questões, uma vez que agora se utiliza o sinal “=” relativamente àquilo que se exprime por “tende”. Será de esperar que surjam questões do tipo:

- Este sinal de igual quererá mesmo dizer o mesmo que quando se escreve 3+2=5?
- Quantos significados tem o sinal de igual?
- Porque é que se escreve “=”e atrás se disse “tende” substituindo a expressão por $\to$?.

Se é suposto o manual ser um material de trabalho autónomo, com obstáculos deste tipo é de esperar que o aluno procure outro tipo de ajudas.

A par destas explicações este manual apresenta propostas de trabalho, numa coluna lateral, que se supõe serem facilitadoras da aprendizagem.

A primeira proposta é a seguinte:


5. Na figura está uma representação gráfica de uma função g.

Por observação do gráfico, completa as igualdades:

5.1. $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \ldots$

5.2. $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \ldots$

5.3. $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \ldots$

5.4. $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = \ldots$

Com uma actividade como esta, constatamos que o aluno fica pressionado a indicar valores que correspondem a limites, sem saber, exactamente o seu significado. Que conceito “intuitivo” de limite estará ele a fazer neste momento?

Depois, para definir assimptota os autores recorrem à representação gráfica da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e propõem “analisar o comportamento da função nos ramos infinitos”. Não será de estranhar que imediatamente surja a questão: “O que são ramos infinitos? Terá a ver com os objectos ou com as imagens?” A actividade que neste momento é proposta não será com certeza esclarecedora, pois tanto pede para indicar o limite quando a variável tende para infinito, como quando o limite é um infinito.

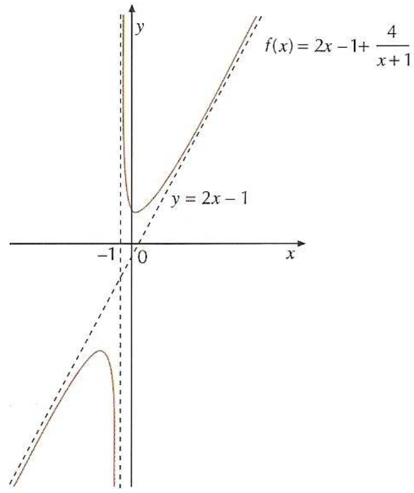
Continuando com o estudo das propriedades das funções, quase sem nos apercebermos, e se o aluno não desistiu até aqui, o manual acaba por permitir que o aluno determine limites, de algumas expressões, sem conhecer a Teoria de Limites. Neste momento, a obtenção de limites, não o cálculo de limites, está totalmente subordinada à representação gráfica da função.

Mais à frente, a propósito das assimptotas oblíquas pretende-se que o aluno efectue a divisão dos polinómios de forma a poder obtê-la. Mas, no exemplo apresentado, $f(x)=\dfrac{2x^2+x+3}{x+1}$, diz-se:

> *Assim, a função f pode ser definida pela expressão* $f(x)=2x-1+\dfrac{4}{x+1}$.
>
> *O gráfico da função* $y=\dfrac{4}{x+1}$ *admite como assimptotas as rectas* $x=-1$ *e* $y=0$.
>
> *Tem-se* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{x+1}\right)=0^+$ *e* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4}{x+1}\right)=0^-$
>
> *Intuitivamente, percebe-se que, à medida que os valores de x aumentam, as respectivas imagens por f são cada vez mais próximas das imagens desses mesmos valores de x obtidas pela função* $y=2x-1$

x	$y=\dfrac{4}{x+1}$	$y=2x-1$	$f(x)=2x-1+\dfrac{4}{x+1}$
0	4	–1	3
100	0,039604	199	199,039604
2000	0,001999	3999	3999,001999
5000	0,000799	9999	9999,0008
...	...	...	...
$\downarrow$ $+\infty$	$\downarrow$ 0^+	$\downarrow$ $+\infty$	$\downarrow$ $+\infty$

e o gráfico que acompanha a explicação é:



Após estas leituras, no caso de um trabalho autónomo, o que estamos à espera que possa acontecer, quando se sugere a actividade: “Indicar as assimptotas oblíquas do gráfico da função $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x+2}$, caso existam”?

Ficamos a pensar que, provavelmente, o aluno sentirá necessidade de construir uma tabela semelhante àquela que é apresentada no manual, tal como já se verificou noutros manuais. Mesmo assim, se o aluno construir apenas a tabela e não o gráfico, sentir-se-á seguro na resposta?

E se construir o gráfico, recorrendo à calculadora gráfica, aquilo que vai encontrar será esclarecedor?

Ou será que esta possibilidade lhe traz mais obstáculos? Estamos a pensar na hipótese de estar visível a assimptota vertical que o gráfico possui.

Lembrando o que diz o programa (Educação, 2002a):

> *Retomando os conhecimentos de polinómios, o estudante deverá ser capaz de transformar expressões como:* $\frac{x^2+2}{x+1}$ *em* $x - 1 + \frac{3}{x+1}$ *ou* $\frac{x+3}{x+1}$ *em* $1 + \frac{2}{x+1}$ *e observar que, do ponto de vista computacional, normalmente se ganha em precisão, pois se efectua um número mais reduzido de operações. Por outro lado, esta simplificação permite que se estude o comportamento no infinito sem necessidade de recorrer ao gráfico. Contudo, os estudantes devem efectuar este tipo de transformações e simultaneamente confirmarem pelo gráfico da função, antes de concluírem sobre o limite no infinito de uma função racional.*

Se seguirmos esta indicação metodológica, que aconselha o recurso ao gráfico para poder concluir acerca do limite, e, sendo as calculadoras gráficas de uso obrigatório, neste programa, a serem utilizadas como “meios incentivadores do espírito de pesquisa”(Educação, 2002a) podemos esperar que o aluno utilize este meio para a construção do gráfico. É de esperar que o aluno não se aperceba do problema que se levanta em situações como $y = \frac{x^2 - 4}{x+2}$ e até possa pensar que a função é a mesma que $y = x - 2$, visto que os dois gráficos “coincidem”.

Consideramos, que nesta situação, é o estudo analítico que irá ajudar à leitura do gráfico.

Este tipo de problema só começou a aparecer a partir do momento em que as calculadoras gráficas passaram a ser um recurso.

Cumprindo o que está estipulado no programa, interrompe-se o trabalho que envolve limites, sempre de uma forma intuitiva, retomando-o com a definição formal, alguns capítulos à frente.

Quando se chega à formalização, a propósito da convergência de sucessões, escreve-se:

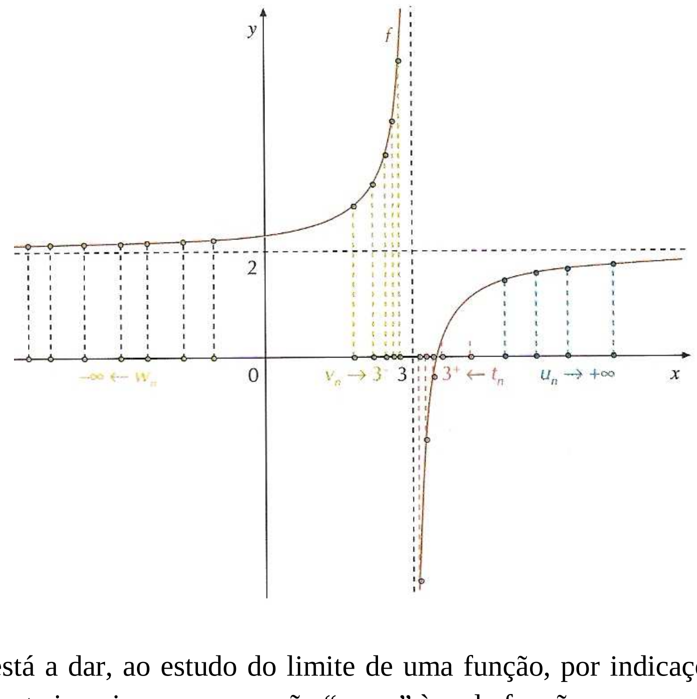
> Uma sucessão (u_n) diz-se **convergente para o número real** a se, qualquer que seja o número real positivo δ, existe uma ordem p tal que, a partir dessa ordem, $|u_n - a| < \delta$.
>
> $\forall \delta > 0\ \exists p \in \mathbb{N}: n > p \Rightarrow |u_n - a| < \delta$
>
> Representa-se por: $\lim (u_n) = a$.

o que apenas permite que o aluno verifique se um número é limite da sucessão, desde que a relação entre a ordem do termo a partir da qual se verifica a condição e o valor δ se tenha estabelecido com clareza.

Depois, sem qualquer demonstração, expõem-se as regras operatórias dos Limites de Sucessões e termina desta forma o programa de 11º ano, no que se refere ao estudo deste assunto.

O limite de uma função, num ponto, com a definição de Heine, surge no 12º ano.

Para esta definição vemos as funções a serem "transformadas" em sucessões (Costa, Resende, & Rodrigues, 2005):



O rumo que se está a dar, ao estudo do limite de uma função, por indicações programáticas, obriga a que o estudante imagine uma sucessão "presa" àquela função.

Esta situação faz-nos recordar a reflexão que fizemos atrás, acerca das duas definições, pois, parece-nos existir um trabalho extra que poderia ser simplificado, se, se considerasse um conjunto de valores da variável a aproximarem-se desse ponto, isto é, à partida seria aceitável ver, neste momento, a definição de Cauchy.

Num dos exemplos, que se pretende ser esclarecedor, para obter a definição de Heine vemos:

Neste exemplo, considere-se a função *f*, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{se } x>1\\ 2 & \text{se } x\le 1\end{cases}$$ e duas sucessões (u_n) e (v_n) de termos gerais

$u_n=1+\dfrac{3}{n}$ e $v_n=1-\dfrac{4}{n}$. Ambas as sucessões são convergentes para 1 (uma por valores à direita e outra por valores à esquerda).

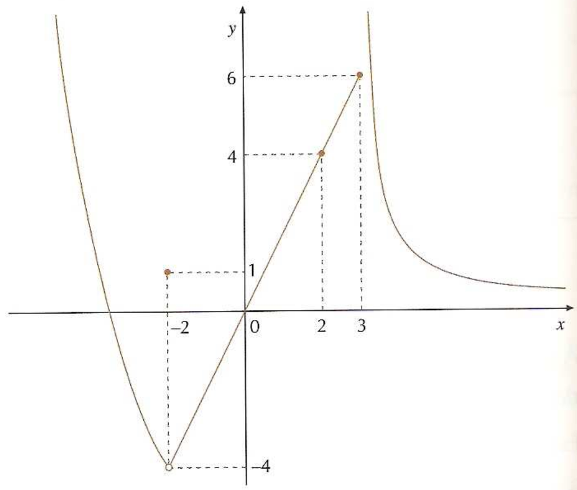
Quais os limites das sucessões $(f(u_n))$ e $(f(v_n))$?

e cá estão novamente sucessões que se associam à função, mas no exemplo seguinte:

A função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, é definida pela expressão

$$f(x)=\begin{cases}x^2+3x-2 & \text{se } x<-2\\ 1 & \text{se } x=-2\\ 2x & \text{se } x\in\,]-2,3]\\ \dfrac{2}{x-3} & \text{se } x>3\end{cases}$$

e admite a seguinte representação gráfica:



o recurso a uma sucessão, gráfica ou analiticamente, desaparece e fala-se em qualquer sucessão que tenda para 3, por valores superiores a 3.

Esta sequência de situações é passível de criar algum "desconforto", uma vez que, até aqui, existia uma sucessão em concreto para "colar" na função e agora ela deixa de existir.

Quando surge a definição formal

Definição de limite de uma função num ponto segundo Heine

Dada uma função *f*, real de variável real, de domínio D_f, diz-se que

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

se e só se a toda a sucessão (u_n), de termos pertencentes a D_f que tenda para *a* por valores diferentes de *a*, corresponde a sucessão das imagens ($f(u_n)$) a tender para *b*.

não existe linguagem simbólica a acompanhá-la.

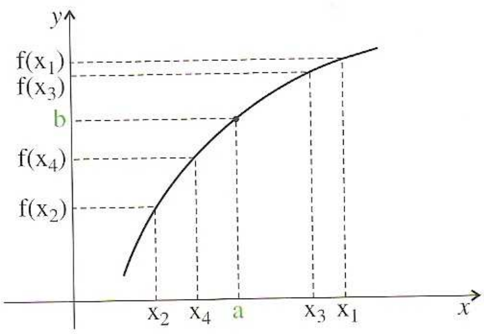
Podemos dizer que estamos, ainda, “muito longe” da definição

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in X} \; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

que é aquela que os alunos irão, em princípcio, encontrar no ensino superior.

Para o mesmo programa, se analisarmos o manual “MAT 12”(Brito & Aubyn, 2005) sentimos que existe uma preocupação em chegar rapidamente ao cálculo dos limites, em prejuízo da análise detalhada do conceito.

Como apoio à definição, que está identificada como a de Heine, existe apenas o gráfico:



$$\begin{array}{ccccccccc} x_2 & , & x_3 & , & \cdots & , & x_n \cdots & \to a \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \\ f(x_2) & , & f(x_3) & , & \cdots & , & f(x_n) \cdots & \to b \end{array}$$

sendo outras situações estudadas através de exercícios para calcular limites. Portanto, aqui, não podemos dizer que a definição é *a posteriori*, como acontece com os manuais mais recentes.

O recurso à calculadora gráfica, para exemplificar a determinação de um limite de uma função quadrática, num ponto, dá continuidade a este texto inicial, o que nos parece forçado. Este recurso aqui, não trás qualquer vantagem sobre a apresentação de gráficos e a respectiva tabela de valores, que nos habituamos a ver nos outros manuais.

Nestes dois manuais do 12º ano, o estudo do limite está centrado no cálculo de Limites de Funções, através das propriedades operatórias e da utilização de técnicas de cálculo.

1.3 Reflexões Finais

A elaboração de um manual é, sem dúvida, uma tarefa difícil. Para se obter a clareza desejável, existem diversas opções na abordagem do tema, nos exemplos, que se pretende sejam elucidativos e no momento, para expor as definições, que se deseja oportuno.

O Cálculo Infinitesimal distancia-se da Álgebra e da Geometria, pelo seu carácter intuitivo, o que dificulta a obtenção do racionalismo desejado, mais fácil de obter nos outros dois ramos da Matemática.

Por conseguinte, escrever manuais sobre o Cálculo Infinitesimal, é uma tarefa de dificuldade redobrada.

O estudo do conceito de limite, enquanto objecto de estudo formal legislado, foi analisado, em diversos manuais escolares, no período que vai desde a introdução desta matéria no ensino liceal até à actualidade.

Desta análise salientamos:

- Através da descrição dos diversos manuais conseguimos aperceber-nos que o espaço, neles dedicado a este estudo, aumentou a partir da introdução da Matemática Moderna;
- As definições, que começaram por ser *a priori*, a partir dos programas de 1948, de uma forma geral, passaram a ser *a posteriori*;
- Verificamos que, nos manuais escolares, só muito recentemente existe a indicação do matemático a quem se deve a definição em causa;
- A mudança de estratégia que atrás se referiu, implicou recurso a representações gráficas, até aqui pouco utilizadas;
- As representações gráficas, em muitos manuais, são insuficientes;
- A partir do momento em que se recorre à intuição, para uma abordagem inicial, a definição formal foi sendo desvalorizada e os estudantes são “pressionados” na determinação de limites, com a aplicação de técnicas de cálculo. Ou seja, a partir do momento em que se faz o desdobramento, entre o 11º e o 12º anos, do estudo deste conceito, verifica-se uma precipitação nas técnicas de cálculo, desvalorizando a apreensão do conceito, que começou por ser intuitivo;
- A questão da não existência de limite, ou não é mesmo tratada, ou, ao ser referida, não o é com clareza;
- Os manuais mais recentes têm uma componente prática muito forte, contrariamente aos mais antigos, isto é, actualmente os manuais são, em simultâneo, livros de actividades;
- A simbologia utilizada nem sempre é suficientemente clara;
- Alguns exemplos que são usados como introdutórios, apresentam resultados de limites, que consideramos demasiado “precipitados”;
- Segundo a legislação em vigor, os manuais devem ser material de trabalho autónomo, e, relativamente a isso consideramos difícil que algum o consiga ser verdadeiramente;
- A utilização da calculadora gráfica, obrigatória, no actual ensino secundário não nos parece ser essencial no entendimento do conceito de “limite”.

É inquestionável e fruto de uma evolução natural, a tentativa de tornar os manuais escolares o mais apelativos e eficazes possível, mas, a grande verdade, é que as orientações que os estudantes necessitam, procuram-nas junto do professor.

CAPÍTULO V

1. Os exercícios/Os exames

Para se conseguir ter uma percepção mais completa, acerca da evolução do ensino do conceito de Limite, a alunos do ensino secundário, temos ainda, para além da abordagem do conceito nos manuais, dois elementos fundamentais: os exercícios propostos nos manuais e os exames nacionais.

Neste capítulo, iremos analisar de que forma as propostas de trabalho para os alunos, relativamente ao estudo dos limites, apresentadas em manuais escolares, vão de encontro àquilo que é exigido nos exames nacionais e, também, verificar se os exames nacionais estão de acordo com aquilo que é proposto pelos programas oficiais.

A análise das tarefas propostas é um bom elemento para reflectir acerca da evolução do ensino deste conceito.

O estudo iniciar-se-á no sentido da actualidade para o passado, até onde for possível realizar, uma vez que nem sempre este assunto foi matéria contemplada em exames.

Programa de 2002

Relativamente ao programa elaborado em 2002, analisamos os manuais: “Espaço 12” (Costa, Resende, & Rodrigues, 2005), “Espaço 11” (Costa, Resende, & Rodrigues, 2004) e “MAT 12” (Brito & Aubyn, 2005)

Nestes manuais encontramos exercícios que, relativamente ao conceito de limite, têm como objectivo preparar os alunos para questões que contemplam os seguintes itens:

A. Estudo gráfico das assimptotas

B. Conhecimento do significado de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

C. Conhecimento do significado de $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x)-(ax+b)]$

D. Estudo analítico das assimptotas

E. Propriedades operatórias dos limites

F. Aplicação de técnicas de cálculo (levantar indeterminações, usar limites notáveis)

G. Relação entre limite e continuidade

H. Recurso à definição Heine para a determinação de limite

I. Aplicação do conceito de limite

J. Determinação de derivadas pela definição[7]

Após esta descrição consideramos útil fazer a seguinte observação: apesar de os itens B e C estarem contemplados no estudo analítico das assimptotas (item D) decidimos realizar esta separação, pois uma situação é saber usar a informação fornecida por este meio, outra é usar, de uma forma mais ou menos sequencial, técnicas para obter assimptotas. E, pelo facto de termos encontrado exercícios onde estes itens aparecem isoladamente, julgamos ser importante mencionar cada um deles separadamente.

Relativamente aos exames, que irão ser referidos ao longo deste texto, usaremos a numeração romana para nos referirmos aos diferentes assuntos relativos ao estudo do conceito limites e questionados nos diversos exames analisados, durante todo o tempo em que este estudo foi possível. A enumeração desses assuntos é a seguinte:

I. Aplicação das propriedades operatórias / Aplicação de técnicas de cálculo

II. Estudo da continuidade

III. Conhecimento do significado de $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

IV. Conhecimento do significado de $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x)-mx]$

V. Estudo das assimptotas

VI. Aplicação da definição de limite segundo Heine

VII. Utilização da calculadora gráfica

VIII. Aplicação do conceito de limite

IX. Determinação de derivadas pela definição.

O item VIII, nos exames, equivalente à letra I, nos manuais – Aplicação do conceito de limite – refere-se à interpretação/identificação de um limite, para posterior utilização.

A descrição dos diversos tipos de aplicações, do conceito de limite, resume-se, essencialmente, a uma única categoria, de exploração, que é a “Aplicação”. Assim, os itens designados nos manuais pelas letras A, B, C, D, E, F, G e J e nos exames pelos números I, II, III, IV, V, VI e IX encontram-se nesta categoria. O item que está designado pela letra I ou pelo número VIII é o único que pertence a uma categoria diferente, uma vez que implica uma interpretação para posterior aplicação.

[7] Usaremos esta nomenclatura para nos referirmos aos mesmos itens noutros manuais enquanto ela for aplicável.

De seguida, apresentamos uma tabela onde se encontram registadas todas as questões saídas em exame, relativas a este programa, e que envolvem este conceito, onde se pode constatar quais dos itens, atrás referidos, estão envolvidos.

Os exames nacionais, que se enquadram no programa com data de 2002, tiveram início em 2006, por isso, é nesta data que se inicia a primeira tabela.

Saliente-se que, esta e as outras tabelas relativas aos exames, não pretendem ser exaustivas, mas meramente ilustrativas.

Exame (c. 635)		**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	**IX**
2009	1ª F	I-5 II- 4 II- 7	I-5	II - 4		II – 4				
	2ª F	II – 6.1 II- 6.2	II – 6.1	I-5		II-6.2				
2008	1ª F	II- 4 II- 7.1				I-5 II – 4 II- 7.1				
	2ª F	I- 6					I-5		I-6	
2007	1ª F	I- 1								
	2ª F	I- 3 I- 4							I- 3 I- 4	
2006	1ª F	I- 2		II- 5		II- 5				
	2ª F	I- 3 II- 2.1				I-3 II- 2.1			I- 3	

Pela observação da tabela destacamos a forte associação, a nível de exames, entre o cálculo de limites e o estudo das assimptotas de uma função.

Uma vez que verificamos existir grande analogia entre os diversos itens contemplados, quer nos manuais, quer nos exames, só poderemos afirmar que uns não se adaptam aos outros, se o grau de dificuldade dos exames for superior ao das actividades propostas nos manuais.

Esta comparação será realizada utilizando, para o efeito, exercícios seleccionados num e noutro dos elementos em estudo, após a referência às indicações metodológicas contidas no programa de 2002, para o 12º ano (Educação, 2002b):

> *As indeterminações são referidas apenas para mostrar as limitações dos teoremas operatórios. O programa apenas pressupõe que se levantem indeterminações em casos simples. Dificuldade a não exceder:* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^4-2x+1}{x^2+3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$.
>
> *É aconselhável que os estudantes experimentem numérica e graficamente a relação entre os limites no infinito da exponencial, da potência e dos logaritmos.*

No desenvolvimento do programa, a recomendação é que os limites notáveis, apesar de não estarem especificados, sejam dados como informação.

No manual “Espaço 12” (Costa, Resende, & Rodrigues, 2005) de forma intuitiva, o aluno é conduzido aos seguintes limites: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^n}=+\infty, a>1$ e $n\in\Re$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^\alpha}=0, a>1$ e $\alpha>0$, no subtema “Funções exponenciais e logarítmicas” e, mais à frente, no subtema “Cálculo diferencial”, a propósito do estudo da derivada da função exponencial e da função logarítmica, são deduzidos outros dois limites: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=0$ e $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$. No capítulo “Trigonometria e Números Complexos” é feito o estudo intuitivo do limite: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{sen\,x}{x}$, e fica assim concluído o estudo dos limites notáveis, relativos a funções, e que compõem o formulário apresentado, aos alunos, nos exames.

Para a aprendizagem do cálculo destes limites existem, para além de outras, as seguintes aplicações:

33.2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{sen}\,(2x)}{\text{sen}\,x}$;

33.3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{tg}\,x}{x}$;

33.4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$;

33.5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$;

19. Determina:

19.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$;

19.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5^x}{\sqrt{x}}$;

19.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}$;

19.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x.3^{-2x}\right)$;

19.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}-x}{e^x}$;

19.6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4^x-x^2}{2^x.x}$.

145. Determina:

145.1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$;

145.2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1-e^x}$;

145.3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{x}$;

145.4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x-1}-1}{1-x^2}$;

145.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)$.

153. Determina:

153.1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln^2(x+1)}{x}$;

153.2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}$;

153.3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(3x+1)}{2x}$;

153.4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(2x+1)}{e^x-1}$;

153.5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{2x\ln x}$.

Esta selecção de exercícios é uma das várias possíveis, conforme irá acontecer com outros tipos de exercícios e com outros manuais, mas que consideramos suficiente para comparar com os exercícios propostos nos exames.

O que interessa é conseguir encontrar em cada manual, actividades onde se consiga reconhecer o nível adequado à preparação para os exames nacionais.

O estudo das indeterminações, das assimptotas e da continuidade, contém aplicações como:

102. Seja g a função definida por

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3}{x^2+2} & \text{se } x\leq 0\\ \ln x-\ln(x+1) & \text{se } x>0\end{cases}.$$

Determina as assimptotas do gráfico de g

Considera a função f definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^3-16x} & \text{se } x>4\\ \dfrac{k}{8} & \text{se } x=4\\ \dfrac{2k^2}{5-x} & \text{se } x<4\end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$.

Indica o domínio da função.

Mostra que o gráfico de f admite uma e uma só assimptota horizontal.

Determina k de modo que exista $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ mas a função seja descontínua.

No manual "Mat 12" (Brito & Aubyn, 2005) salientamos o facto não existir qualquer referência ao limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$. Os outros limites notáveis encontram-se no capítulo "Limites e continuidade", com excepção de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,x}{x}$ que se estuda no capítulo "Funções trigonométricas".

As propostas de trabalho incluem muitos exercícios saídos em exames de anos anteriores, por isso, não podemos dizer que eles não se adequam aos exames.

Analisando as questões mais elaboradas saídas em exames nacionais, relativos a este programa, e que envolvem estas técnicas, temos (Educação, 1996 a 2009):

:

6. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} - x & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os dois itens seguintes.

6.1. Estude a continuidade de h no domínio $\mathbb{R}$.

6.2. Estude a função h quanto à existência de assimptotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as suas equações.

e

4. Seja f a função de domínio $\left[-\pi, +\infty\right[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-4x+1} & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{3\,\text{sen}\,(x)}{x^2} & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados, escrevendo as suas equações, caso existam.

A resolução destas actividades permite-nos concluir que:

- o cálculo de limites que envolve o levantamento de indeterminações, solicitado nos exames, não ultrapassa o grau de dificuldade recomendado pelo programa;
- os limites designados por notáveis puderam ser devidamente explorados nos manuais acima referidos;
- o estudo das assimptotas e da continuidade, recorrendo aos manuais acima referidos, poderá ser considerado eficaz para permitir a preparação desejada.

Para questões como (Educação, 1996 a 2009):

4. Sejam f e g duas funções, ambas de domínio $\mathbb{R}^+$.

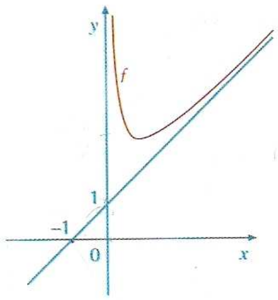
Sabe-se que:

- $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 0$;
- a função g é definida por $g(x) = f(x) + x^2$.

Prove que o gráfico de g não tem assimptotas oblíquas.

também é possível encontrar preparação em cada um dos manuais, como, por exemplo, em questões do tipo (Costa, Resende, & Rodrigues, 2005):

103. As assimptotas do gráfico da função f, representada abaixo, são as rectas de equações $y = x + 1$ e $x = 0$.



Sejam g e h as funções tais que $g(x) = f(-x)$ e $h(x) = f(x + 2)$.

Determina:

103.1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{x}$.

103.2. os números reais a e b de modo que:

$$\lim_{x \to +\infty} \big(h(x) - ax - b\big) = 0.$$

E (Brito & Aubyn, 2005):

.1. Determina as assimptotas de cada uma das funções reais de variável real:

a) $x \curvearrowright \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

b) $x \curvearrowright \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

c) $x \curvearrowright e^x - 1$

d) $x \curvearrowright \ell n\left(\dfrac{x + 2}{x}\right)$

e) $x \curvearrowright \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$

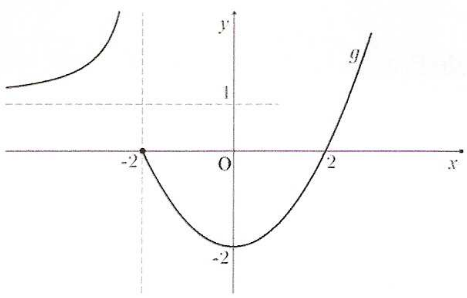
f) $x \curvearrowright \sqrt{x^2 - 1}$

g) $x \curvearrowright \log\,(x - 1)$

E, para as questões que envolvem a aplicação da definição de limite segundo Heine, que neste conjunto de exames se encontra apenas uma vez (Educação, 1996 a 2009):

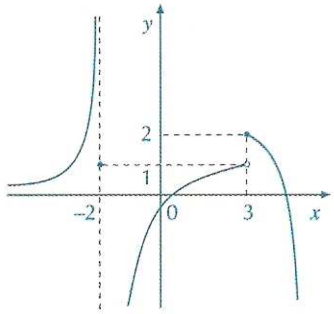
5. Na figura 1 está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$ e contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
As rectas de equações $x = -2$ e $y = 1$ são as únicas assimptotas do gráfico de g.

Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} g(x_n) = +\infty$.



temos em cada um dos manuais, aplicações que consideramos apropriadas (Costa, Resende, & Rodrigues, 2005); a saber:

53. Seja g a função representada no referencial da figura.



Relativamente à sucessão (u_n), sabe-se que $\lim g(u_n) = 1$.

O termo geral de (u_n) pode ser:

A: $u_n = -2 + \frac{1}{n}$; −2

B: $u_n = -2 - \frac{1}{n}$; −2

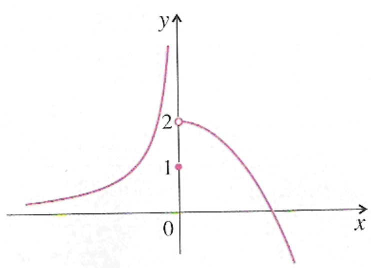
C: $u_n = 3 - \frac{1}{n+1}$; 3

D: $u_n = 3 + \frac{\pi}{n}$. 3

e (Brito & Aubyn, 2005):

Escolhe a resposta correcta:

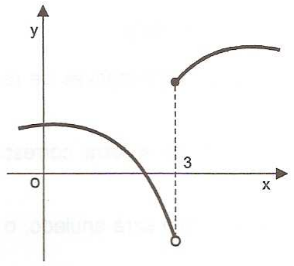
Na figura está parte da representação gráfica de uma função g de domínio $\mathbb{R}$ e contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.



Considera a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$. Indica o valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} g(u_n)$

Exercícios que envolvem a aplicação do conceito de limite, tais como (Educação, 1996 a 2009):

Na figura, está representada parte do gráfico de uma função f, real de variável real.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) Não existe $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{f(x)}$

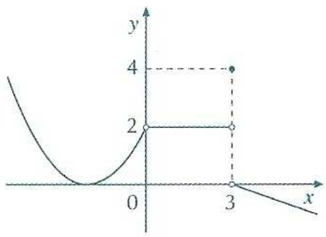
(B) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$

(C) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{2}$

(D) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{f(x)} = 0$

Encontramos, no manual “Espaço 12”, propostas que consideramos serem suficientemente preparatórias para a resolução de exercícios como o que está apresentado acima, como por exemplo (Costa, Resende, & Rodrigues, 2005):

55. Seja f a função a seguir representada graficamente:



55.1. Indica o valor de:

55.1.1. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$;

55.1.2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$;

55.1.3. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$;

55.1.4. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$;

55.1.5. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

55.2. Comenta a afirmação:

“Existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, mas não existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$”.

Este tipo de tarefa no manual “Mat 12” não está explorado graficamente, mas apenas analiticamente.

Programa de 1997

Um dos manuais analisados e que pretende dar cumprimento ao Programa de 1997 – "Funções 12" (A. V. Lopes et al., 1999) – apresenta propostas que insistem no estudo gráfico, apelando ao uso da calculadora gráfica, e solicitando a construção de gráficos sem calculadora.

Apesar de estar referido no programa, verificamos que não existem actividades para determinar o limite usando a definição de Heine.

Neste manual, os limites notáveis, que são apresentados no formulário que integra o exame, são obtidos com recurso a gráficos e tabelas de valores exemplificativos, ou seja, de forma experimental.

Verificamos que este manual tem aplicações que ajudam a preparar os alunos para questões que envolvem os seguintes itens:

A. Estudo gráfico das assimptotas
B. Conhecimento do significado de $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$
C. Conhecimento do significado de $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]$
D. Estudo analítico das assimptotas
E. Propriedades operatórias dos limites
F. Aplicação de técnicas de cálculo (levantar indeterminações, usar limites notáveis)
G. Relação entre limite e continuidade
I. Aplicação do conceito de limite

As indicações metodológicas, para este programa, são as mesmas do programa analisado anteriormente.

É a partir do ano 2000 que o programa ajustado de 1997 é contemplado a nível de exames nacionais.

A tabela seguinte, à semelhança da anterior, contém a referência às questões colocadas em exames e que contemplam Limites de Funções.

A numeração romana refere-se aos itens anteriormente explicitados.

Exame (C. 435)		**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	**IX**
2005	1ª F	II- 2.1			I- 2	I- 2	I- 2			I- 3
	2ª F	II- 4.2				II- 4.2				
2004	1ª F	I- 4							I- 4	
	2ª F	II2.1.2				II-2.1.2				
2003	1ª F 1ª ch	I- 3				I- 2 I- 3			I- 3	
	1ª F 2ª ch	I- 3								
	2ª F	II- 3.1								II- 3.1

2002	1ª F 1ª ch	I- 4 II- 4.2				I- 4				
	1ª F 2ª ch	I- 3				I- 3				II- 3.1.1
	2ª F	II- 2.1.1				II- 2.1.1				
2001	1ª F 1ª ch	II- 2.1.1 II- 3.2				II- 2.1.1			II- 3.2	
	1ª F 2ª ch	I-1 II- 4	I-1	II- 4		II- 4				
2000	1ª F 1ª ch	5				5				
	1ª F 2ª ch	II- 2.3				II- 2.3			I-1	
	2ª F	—	—	—	—	—	—	—	—	—

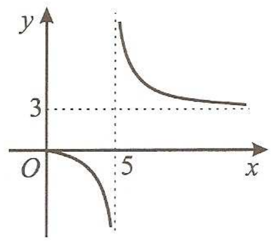
Com um conjunto maior de exames é mais fácil salientar que as questões colocadas em exame, que solicitam o cálculo de limites, são, na grande maioria, destinadas ao estudo das assimptotas.

Conforme podemos verificar, a variedade de itens envolvidos nos exames, de uma forma geral é bastante inferior àquela que as actividades do manual contemplam.

Quanto ao coeficiente de dificuldade, será a questão (Educação, 1996 a 2009):

Na figura está representada parte do gráfico de uma função h, de domínio $[0,5[\cup]5,+\infty[$

As rectas de equações $x=5$ e $y=3$ são as únicas assimptotas do gráfico de h.

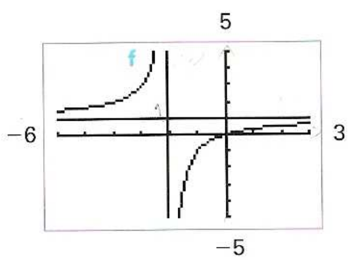


Indique o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{3+e^{-x}}$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 5 **(D)** $+\infty$

mais complexa que (A. V. Lopes et al., 1999):

Observa o gráfico da função racional f.



Indica os limites quando $x\longrightarrow -\infty$ e quando $x\longrightarrow +\infty$ de cada uma das funções definidas por:

a. $f(x)$ **b.** $f(x)+5$ **c.** $f(x-5)$ **d.** $-5f(x)$ **e.** $|f(x)|$

?

ou (Educação, 1996 a 2009)

3. Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\log_2 x}{e^x - 1}$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $-\infty$ **(D)** $+\infty$

com grau de dificuldade superior à d) do exercício seguinte (A. V. Lopes et al., 1999)?

129. *Calcula:*

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{2x}$ **d.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(x+1)}$

Mas, para questões do tipo (Educação, 1996 a 2009):

4. De uma função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a bissectriz dos quadrantes ímpares é uma assimptota do seu gráfico.

Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

Prove que o eixo Ox é uma assimptota do gráfico de h.

ou (Educação, 1996 a 2009):

5. Considere uma função f de domínio $\mathbb{R}^+$. Admita que f é positiva e que o eixo Ox é assimptota do gráfico de f. Mostre que o gráfico da função $\dfrac{1}{f}$ não tem assimptota horizontal.

que, em termos de estrutura, não têm uma semelhança tão visível com os exercícios propostos no livro, será que as poderemos considerar de grau de dificuldade superior?

O que podemos dizer é que exercícios deste tipo requerem uma boa interiorização dos conceitos, de forma a facilitar a sua manipulação.

Programa de 1991

Relativamente ao programa de 1991 foram analisados os manuais: “Matemática 11º ano” (Neves & Brito, 1996) e “Matemática 12º ano” (Neves & Brito, 1995).

No manual do 11º ano, podemos ler: “A definição de Heine, normalmente, não se usa para calcular o $\lim\limits_{x \to a} f(x)$”, por isso, não estamos à espera de encontrar actividades para calcular o limite segundo a definição estudada, o que, realmente, acontece.

Também, nas “Orientações de Gestão do Programa” (Educação, 1995b) emanadas pelo Departamento do Ensino Secundário, em Julho de 1995, encontramos a seguinte recomendação: “Não calcular limites de funções, utilizando a definição”.

Da análise dos manuais acima referidos, encontramos propostas de actividades que incluem os seguintes itens:

B. Conhecimento do significado de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

C. Conhecimento do significado de $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right]$

D. Estudo analítico das assimptotas

E. Propriedades operatórias dos limites

F. Aplicação de técnicas de cálculo (levantar indeterminações, usar limites notáveis)

G. Relação entre limite e continuidade

J. Determinação de derivadas pela definição.

Quanto aos exames relativos a este programa, e que tiveram a sua primeira edição em 1996, a distribuição dos diversos itens encontra-se na tabela seguinte:

Exame (C. 135)		**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	**IX**
2001	1ª F 1ª ch	II- 1.1 II- 2.2				II- 1.1			II- 2.2	
	1ª F 2ª ch	I- 1	I- 1							
	2ª F	I- 1 I- 4 II- 2.1	I- 1			II- 2.1			II- 2.1	I- 4
2000	1ª F 1ª ch	2ªParte 1.3				2ªParte 1.3			1ªParte 1	
	1ª F 2ª ch	2ª Parte 2.3				2ª Parte 2.3			1ª Parte 1	
	2ª F				1ªParte 4					
1999	1ª F 1ª ch	II- 1.1	II- 1.1				I- 1		I- 1	
	1ª F 2ª ch	I- 3							I- 3	
	2ª F			I- 3		I- 3				
1998	1ª F 1ª ch	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	1ª F 2ª ch	1ª Parte 1								
	2ª F	I- 3	I- 3							
1997	1ª F 1ª ch	II-2b)				II-2b)				
	1ª F 2ª ch	I- 2								
	2ª F	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1996	1ª F 1ª ch	2ª parte III- 4								
	1ª F 2ª ch	1ª parte 4.2				1ª parte 4.2				
	2ª F					1ª parte 4.1			1ª parte 4.1	

Pela análise da tabela verificamos que o cálculo de limites está quase sempre relacionado com o estudo das assimptotas e menos com o estudo da continuidade, sobressaindo, também, questões que envolvem a aplicação do conceito de limite.

Num dos exames existe uma questão que recorre à definição de Heine, para obter um limite e, por isso, consideramos que, aqui, este manual se torna insuficiente (Educação, 1996 a 2009):

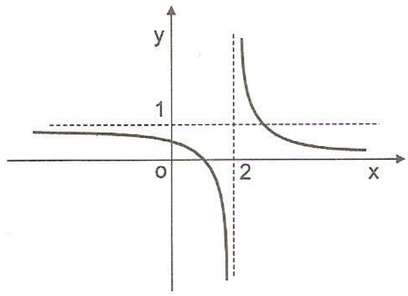
1. Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função f, cujo domínio é $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

As rectas de equações $x=2$, $y=1$ e $y=0$ são assimptotas do gráfico de f.

Seja (x_n) a sucessão de termo geral

$$x_n = 2 - n^2$$

Indique o valor de $\lim f(x_n)$



(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $-\infty$ **(D)** $+\infty$

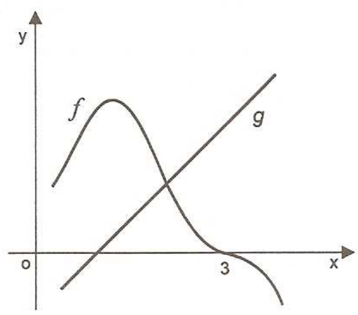
O manual acima referido, no que diz respeito aos limites notáveis, dá a informação relativamente aos limites que incluem a função exponencial, deduz os limites relativos à função logarítmica e faz o estudo de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\, x}{x}$, conforme refere o programa.

Mas, no que respeita aos exercícios de aplicação, verificamos que existe algum distanciamento relativamente àquilo que se encontra nos exames. Isto é, consideramos que o manual não explora o aspecto gráfico, e, por isso, não prepara convenientemente para exercícios do tipo (Educação, 1996 a 2009):

3. Na figura está representada parte dos gráficos de duas funções f e g, contínuas em $\mathbb{R}$.

O gráfico de f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 3.

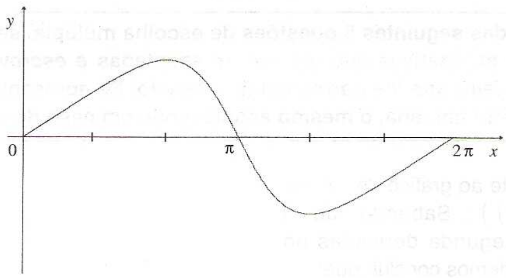
Indique o valor de $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{g(x)}{f(x)}$



(A) $-\infty$ **(B)** $+\infty$ **(C)** 0 **(D)** 1

ou (Educação, 1996 a 2009):

4. A representação gráfica de uma função g em $[0, 2\pi]$ é a seguinte:



4.1. Quanto à existência de assimptotas do gráfico da função $\frac{1}{g}$, no mesmo intervalo, pode afirmar-se que:

A Não existem.

B São as rectas $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$.

C São as rectas $x = 0$ e $y = 0$.

D São as rectas $x = 0$, $x = \frac{1}{\pi}$ e $x = \frac{1}{2\pi}$.

O item “Utilização da calculadora gráfica” de agora em diante deixa de fazer sentido analisar, uma vez que, só a partir dos programas de 1991 é que a utilização da calculadora gráfica passou a ser obrigatória.

Quanto aos exercícios que apenas envolvem técnicas de cálculo, verificamos que o manual contém aplicações, cujo grau de dificuldade supera as necessidades dos exames.

Parece-nos válido afirmar que as questões (Educação, 1996 a 2009):

1. Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 e^{x+1} & se \ \ x \leq 0 \\ \dfrac{x + \text{sen}\, x}{x} & se \ \ x > 0 \end{cases}$

1.1. Estude a função f quanto à continuidade.

1. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1 + e^x & se \ x < 0 \\ 2 & se \ x = 0 \\ 3x + 2 & se \ x > 0 \end{cases}$$

Relativamente à continuidade da função h, no ponto 0, qual das afirmações seguintes é verdadeira ?

(A) É descontínua à esquerda e à direita

(B) É contínua à esquerda e descontínua à direita

(C) É contínua à direita e descontínua à esquerda

(D) É contínua

e (Educação, 1996 a 2009):

1. Para um certo valor de k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por

$$f(x)=\begin{cases}0 & se\ \ x\leq 0\\ \ln(x+k) & se\ \ x>0\end{cases}$$

($\ln$ designa logaritmo de base e)

Qual é o valor de k ?

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** -1

de forma alguma serão mais complexas que (Neves & Brito, 1995):

3. Considere a função definida em IR do seguinte modo:

$$f(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{2}{x}} & \text{se}\ \ x>0\\ k+\log(x+e) & \text{se}\ \ x\leqslant 0\end{cases},\quad k\in\mathbb{R}$$

3.1 Determine k de modo que f seja contínua em IR .

e que (Neves & Brito, 1995):

4. Considere a função real de variável real.

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}\alpha x}{\operatorname{sen}(3x)}+\cos x & \text{se}\ \ x<0\ \ \text{e}\ \ \alpha\neq 0\\ \dfrac{\log(x+1)}{x-2} & \text{se}\ \ x\geqslant 0\end{cases}$$

4.2 Determine α de modo que g seja contínua em $x=0$.

Programa 78/79 (11º ano) e 80/81(12º ano)

Os programas que começaram a ser aplicados no 10º ano, no ano lectivo 1978/79 e no 12º ano, no ano lectivo1980/81, reflectem-se em termos de exames, ao nível do 11º e 12º anos, uma vez que, só a partir do ano lectivo 91/92, o ensino secundário integra o 12º ano.

Apesar do conceito de limite ser introduzido no 11º ano, ele é aprofundado, com novas funções, no 12º ano. E, é com os conhecimentos adquiridos neste nível, que os alunos se candidatam a exame de 12º ano.

Interessa, pois, analisar e comparar as propostas de trabalho em manuais deste nível com os respectivos exames, que tiveram a sua primeira edição em 1981.

Um dos manuais analisados foi “M12 – Matemática – 12º ano” (Machado, Abrantes, & Carvalho, 1990) e nele, no capítulo “Complementos sobre funções reais de uma variável real”, as propostas de trabalho, remetem para os seguintes itens:

D. Estudo analítico das assimptotas
E. Propriedades operatórias dos limites
F. Aplicação de técnicas de cálculo (levantar indeterminações, usar limites notáveis)
G. Relação entre limite e continuidade
J. Determinação de derivadas pela definição.

Se analisarmos os exames, encontramos questões que envolvem sobretudo as propriedades operatórias, o levantamento de indeterminações e a determinação de assimptotas.

Na tabela seguinte apresentamos a distribuição dos itens contemplados e do respectivo exame:

Exame	(Via Ensino)	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VIII**	**IX**
2002	1ª F 1ª ch	4.2							
	1ª F 2ª ch	3.2				3.2			
2001	1ª F 1ª ch	4.2							
	1ª F 2ª ch	3.3 4.1				3.3			
	2ª F	3.1						3.1	
2000	1ª F 1ª ch	3.3 4.1				3.3			
	1ª F 2ª ch	3.3: 4.2				3.3			
1999	1ª F 1ª ch	3.3 4.1				3.3			
	1ª F 2ª ch	3.3				3.3			
	2ª F	3.3 4.2				3.3			
1998	1ª F 1ª ch	3.2 4.1				3.2			
	1ª F 2ª ch	3.1				3.1			
	2ª F	3.1 3.2	3.1			3.2		3.1	
1997	1ª F 2ª ch	3.1 4.1	3.1						
	2ª F	3.2				3.2			
1994	1ª F 1ª ch	4.4							
	2ª F	4.2				4.2			
1993	1ª F 1ª ch	A.2 4.2				4.2			
1992	1ª F 1ª ch	3.2 B.2				3.2			
	1ª F 2ª ch	6.1 A.2				6.1			
	2ª F	5.1				5.1			
1991	1ª F 1ª ch	—	—	—	—	—	—	—	—
	2ª F	6.3				6.3			
1990	1ª F 1ª ch	2.2							
	1ª F 2ª ch	4.2				4.2			
	2ª F	—	—	—	—	—	—	—	—

1989	1ª F 1ª ch	—	—	—	—	—	—	—	—
	1ª F 2ª ch	III- 2 A.1	A.1						
	2ª F	V- 2				V- 2			
1988	1ª F 1ª ch	I- 3.2				I- 3.2			
	1ª F 2ª ch	I- 2.3							
	2ª F	—	—	—	—	—	—	—	—
1987	1ª F 1ª ch	III			IV- 4				
	1ª F 2ª ch	IV - 3							
	2ª F	IV- 2			IV- 1				
1986	1ª F 1ª ch	III- 2				III- 2			
	1ª F 2ª ch	IV- 1 IV- 3 VI- 1				IV- 1			VI- 1
	2ª F	IV- 1 IV- 2 VI- 2	IV- 1						IV- 2
1985	1ª F 1ª ch	III c)				III c)			
	1ª F 2ª ch	IV a)							
	2ª F	III a) III b)				III b)			
1984	1ª F 2ª ch	III a) III b) III c) IV b)	III b)			III c)			III a)
1983	1ª F 1ª ch	IV b) VI a)							
	1ª F 2ª ch	V b)							
1981	1ª F 1ª ch	VII a)							
	1ª F 2ª ch	VI a)							

Da análise da tabela podemos concluir que existe uma valorização na aplicação das propriedades operatórias e de técnicas de cálculo, associadas ao estudo de assimptotas.

Salienta-se, ainda, uma séria diminuição de itens envolvidos em exames relativamente aos que existem nos manuais escolares.

Comparemos, agora, os exercícios contidos num e noutro dos elementos em estudo.

No manual atrás referido são propostos exercícios como:

17. Calcular os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1+2x}{x}\right)^{1-x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x+2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(e^x + x^{\frac{1}{x}}\right)$

e) $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_{0,1}(x^2)}{2x+3^x}$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x}$

h) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\ln(x-3)}{x-2}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-e^{6x}}{\operatorname{sen}(3x)}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2 \cdot \operatorname{sen}(x)}$

l) $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)^{5x}$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x^2}}$

1. Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto, calcular a derivada de cada uma das seguintes funções reais de variável real num ponto X_0 (supondo este, em cada caso, um ponto do domínio que é ponto de acumulação):

a) $y = \frac{1}{x^2}$

b) $y = \sqrt{x-1}$

c) $y = \frac{5x}{x^2-1}$

d) $y = \ln(x^2)$

2. Determinar as assímptotas dos gráficos das funções reais de variável real:

g) $y = 2x + \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$

h) $y = x e^{\frac{2}{x}} + 1$

o que, em termos de coeficiente de dificuldade, não serão muito diferentes de (Educação, 1981 a 2002):

Considere a função f, real de variável real, definida por

$$f(x) = \frac{\log_e(7x - 2x^2 - 5)}{1 - e^{2-x}} \qquad (e\text{, número de Neper})$$

2. Calcule $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

2. Seja f a função real de variável real, definida por

$$1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad .$$

2.2. Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}$

5. Considere a função real de variável real

$$g(x) = \frac{e^x}{x} \cdot (x - 1) \quad .$$

5.1. Estude a função quanto à existência de assimptotas.

A análise de exercícios em cada um dos elementos sugere haver proximidade quanto ao coeficiente de dificuldade, mas sobressai, relativamente aos exercícios anteriores, um aumento na complexidade das técnicas envolvidas no cálculo de limites.

Para efectuar um estudo semelhante, mas para o 11º ano / Curso Complementar Liceal, analisamos os seguintes manuais: “M11 – Matemática, 11º ano” (Abrantes & Carvalho, 1984) e “Matemática” (Fernandes, 1982).

O manual “M11” (Abrantes & Carvalho, 1984) contém actividades que envolvem:

D. Estudo analítico das assimptotas
E. Propriedades operatórias dos limites
F. Aplicação de técnicas de cálculo (levantar indeterminações, usar limites notáveis)
G. Relação entre limite e continuidade
H. Definição de limite segundo Heine
J. Determinação de derivadas pela definição.

E, também, a definição de limite segundo Cauchy:

17. Seja f a função definida em $\mathbb{R}_0^+$ por $x \longmapsto f(x) = x^2 - 1$

a) Comenta a seguinte afirmação:

Para cada intervalo do tipo $]3 - \delta, 3 + \delta[$, $\delta \in \mathbb{R}^+$, existe pelo menos um real positivo α tal que

$$x \in]2 - \alpha, 2 + \alpha[\underset{x}{\Rightarrow} f(x) \in]3 - \delta, 3 + \delta[$$

b) Calcula o maior valor que α pode tomar para que se verifique

$$x \in]2 - \alpha, 2 + \alpha[\underset{x}{\Rightarrow} f(x) \in]2, 4[$$

No manual de Palma Fernandes, encontramos propostas de trabalho como:

4. Mostrar, aplicando a definição de limite de uma função num ponto, que:

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ se $x \underset{f}{\mapsto} x^2 - 1$; **b)** $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = \infty$ se $x \underset{g}{\mapsto} \dfrac{x}{x-3}$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} t(x) = \dfrac{4}{3}$ se $x \underset{t}{\mapsto} \dfrac{4x}{3x+1}$

11. Verificar se as seguintes funções são infinitésimos com x .

a) $x \underset{f}{\mapsto} x^2 + 2x$; **b)** $x \underset{g}{\mapsto} \sqrt{3x \cdot (x^2 - 1)}$.

Estas actividades envolvem os seguintes itens:

E. Propriedades operatórias dos limites

H. Definição de limite segundo Heine

Segundo o programa, pretende-se que o aluno:

- averigue da existência de limite, ou de limites laterai

de uma função quando x tende para um ponto, recorrendo às definições, em casos não mais complicados que:

$x \mapsto \dfrac{x^2-3}{\sqrt{1-x^2}}$ quando $x \to -1$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 2x^2+1 & \text{para } x > 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{para } x < 1 \end{cases} \qquad \text{quando } x \to 1$$

- determine o limite de uma função num ponto, recorrendo aos teoremas sobre limites, em casos não mais complicados que os anteriores.

- averigue da existência de limite em casos de indetermi-nação não mais complicados que:

$x \mapsto \dfrac{x^3-2x+1}{x^2-2x+1}$ quando $x \to 1$

$x \mapsto \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x-a}$ quando $x \to a$

$x \mapsto \dfrac{x - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ quando $x \to -\infty$

- estude a continuidade de uma função em casos não mais complicados que:

$$x \rightsquigarrow f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{para } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2x+1}{3} & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

$$x \rightsquigarrow f(x) = \begin{cases} x & \text{para } x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x \rightsquigarrow x + C(x) \quad \text{com } x \in [-2, 2]$$

Alguns exames podem ser apreciados, na tabela abaixo, quanto aos itens envolvidos.

Exame 11º ano		**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VIII**	**IX**
1995	1ª F	4.2	4.2						
1994	1ª F	4.1				4.1			
1993	2ª F	4.3				4.3			
1992	2ª F		4.3.2						
1991	1ª F 1ª ch	4.2				4.2			
1989	1ª F 1ª ch	2.1				2.1			
1988	2ª Fase.	1.3							
1987	1ª F 1ª ch	1.2 6.A- 2.1	6.A- 2.1						
	1ª F 2ª ch	—	—	—	—	—	—	—	–
	2ª Fase		1.1						
1986	1ª F 1ª ch	4.1	4.1						
	1ª F. 2ª ch	5.1	5.1						
	2ª F								.1.2
1985	1ª F. 1ª ch	1.4	1.3.2						
	1ª F. 2ª ch	1.3 3.1 3.2	3.2						
	2ª F	1.1.1 1.1.2 1.5	1.1.1						
1984	1ª Ép 1ª ch		2.4						2.3
	1ª Ép 2ª ch	—	—	—	—	—	—	—	–
	2ª Ép	1.2 1.3							
1983	1ª Ép 1ª ch	—	—	—	—	—	—	—	–
	1ª Ép 2ª ch	3.2							
	2ª Ép	1.2							

1982	1ª Ép 1ª ch	I 2-b)	I 2-b)						
	1ª Ép 2ª ch	I 1-b) 1º I 1-b) 2º I 2 a)	I 2 a)						
	2ª Ép.		I.2						
1981	1ª Ép 1ª ch	1.3.2	1.1						1.3.1
	1ª Ép 2ª ch		B. 1						

Desta tabela depreende-se que o cálculo dos limites está mais directamente relacionado com o estudo da continuidade. Isto é, o assunto "limite" parece não poder existir "per si", apoiando-se, sistematicamente, no conceito de continuidade quando, como sabemos, a existência de um limite num ponto nem sequer "obriga" a esse ponto pertencer ao domínio da função.

Os exercícios no manual "M 11" (Abrantes & Carvalho, 1984), como, por exemplo:

10. Calcula cada um dos limites seguintes (se existir):

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - 2x - 3x^2}{5 + 3x^2}$ g) $\lim\limits_{0} \dfrac{\sqrt{x}}{x - x^2}$

b) $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{2x^2 + 1}{10x - 1}$ h) $\lim\limits_{-1} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$

e) $\lim\limits_{4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ l) $\lim\limits_{1/2} \dfrac{x^3 - 2x - \frac{1}{2}x^2 + 1}{2x - 1}$

f) $\lim\limits_{2} \dfrac{3x - 6}{4 - x^2}$ m) $\lim\limits_{3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2}$

12. Dada a função $x \longmapsto \dfrac{|x + 3|}{x - 1}$, investiga se ela é contínua ou descontínua para $x = -3$.

13. Estuda a continuidade das funções seguintes nos pontos indicados

a)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{para } x < 2 \\ \dfrac{1}{3} & \text{para } x = 2 \\ \dfrac{2x - 3}{4} & \text{para } x > 2 \end{cases} \qquad \text{(no ponto 2)}$$

d) Calcula $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ e diz qual é o significado geométrico deste limite.

não serão muito diferentes de (Educação, 1981 a 1995):

1. Dada a função real de variável real $f : x \curvearrowright x^3 - 3x^2$.

1.3. Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{f(x)}$.

2. Considere a função f definida por $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x \leq 2 \\ \dfrac{x}{x-2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$

2.1. Indique, justificando, equações das assimptotas do gráfico de f paralelas aos eixos.

3. Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \Leftarrow x < 0 \\ \dfrac{x+2}{2x^2+2} & \Leftarrow x > 0 \end{cases}$$

3.1. Mostre que existe limite da função no ponto zero.

5. Considere a família de funções reais de variável real cuja derivada é definida em $\mathbb{R}$ por

$$\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

5.1.2. Justifique que para toda a função f da família se tem

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{9}$$

Mais uma vez, somos levadas a concluir que, nesta matéria, o coeficiente de dificuldade dos exercícios propostos nos manuais, pode bem servir para regular o nível de preparação necessário para enfrentar uma situação de exame, com sucesso, e que os exames cumprem o estipulado pelas recomendações programáticas. Além disso, consideramos que o grau de dificuldade segue as indicações relativas a este programa.

Na época anterior ao Ensino Secundário estar dividido em Curso Unificado, Curso Complementar e 12º ano, o ensino liceal, terminava com a conclusão do 2º ano do Curso Complementar.

Para a preparação para estes exames, que tinham por base o Programa 1974, analisamos o manual “Compêndio de Matemática – 2º ano do Curso Complementar” (Garcia, Anjos, & Ruivo, 1976).

Nele, encontramos actividades que envolvem:

D. Estudo analítico das assimptotas

E. Propriedades operatórias dos limites
F. Aplicação de técnicas de cálculo (levantar indeterminações, usar limites notáveis)
G. Relação entre limite e continuidade
H. Recurso à definição Heine para a determinação de limite
J. Determinação de derivadas pela definição

Analisando a tabela construída à semelhança das anteriores, apesar de possuirmos uma amostra reduzida, podemos verificar que o cálculo de limites se relaciona, principalmente, com o estudo da continuidade.

Exame		**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VIII**	**IX**
1980	1ª Óp1ª ch	6.1.1							
1979	1ª É 1ª ch	1.1	1.1						
	1ª Óp1ª ch E	1.1							1.1
1978	1ª Óp 1ª ch	4.1 4.2	4.1						4.2

Analisemos, agora, o que acontece, relativamente aos exercícios, através dos exemplos seguintes, retirados do manual:

. Aplicando a definição de limite de uma função num ponto, calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x}{x+1}$ c) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{x+2}$

Averigúe se são, ou não, infinitésimos com x, as funções

a) $x \underset{f}{\mapsto} x^3 + 3\sqrt{x}$ b) $x \underset{g}{\mapsto} 5x^3 - 2x^2$

Sendo f e g as funções definidas, respectivamente, por

$f\colon x \mapsto f(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } x \geqslant -3 \\ 4 & \text{para } x < -3 \end{cases}$ $g\colon x \mapsto g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x \geqslant -3 \\ -1 & \text{para } x < -3 \end{cases}$

calcule, se existirem, a) $\lim\limits_{x \to -3} (f+g)(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -3} (f-g)(x)$
c) $\lim\limits_{x \to -3} (f \cdot g)(x)$

. Compare as ordens dos seguintes infinitésimos com x

a) $x \mapsto f(x) = 3x^4 + 2x^3$ $x \mapsto g(x) = x^5 + 2x$

b) $x \underset{f}{\mapsto} \sqrt{x}$ $x \underset{g}{\mapsto} \sqrt[4]{x}$

Calcule, se existir, cada um dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 - 25}{(x+5)(x-3)}$ *b)* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^6 + 2x^3}{x^4 + 2}$ *c)* $\lim\limits_{x \to 1} \left[(x-1) \times \dfrac{2x+3}{x^2 - 1} \right]$

d) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{|x+2|}{x+2}$ *e)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ *f)* $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$

Para além do estudo analítico da continuidade,

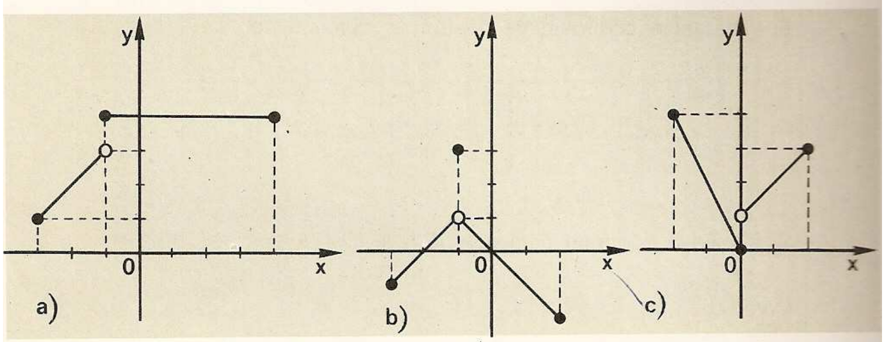
Considere a função

$$x \curvearrowright f(x) = \begin{cases} 2 & \Leftarrow \quad x \leqslant 1 \\ \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x + 3} & \Leftarrow \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Justifique que é descontínua no ponto $x = 1$.

existe, também, um estudo gráfico, que é um complemento forte para a aquisição do conceito, mas não é frequente em questões de exame, nesta época.

I — 1. Por simples observação, verifique que cada uma das funções representadas é descontínua, dizendo qual o caso de descontinuidade.



Determine a partir da definição

a) $f'(3)$ sendo $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$

b) $f'(2)$ sendo $f(x) = x^2 - 5x$

c) $f'(9)$ sendo $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f'(0)$ sendo $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

Verificamos que o conteúdo e o coeficiente de dificuldade permitem enfrentar questões, em exames, como (Educação, 1978 a 1980):

4. Sendo g uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tal que,

$$g : x \smile g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \Leftarrow -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3 & \Leftarrow x < -2 \vee x > 2, \end{cases}$$

4.1. mostre que g é uma função descontínua para $x = 2$;

4.2. aplicando a definição de derivada de uma função num ponto, calcule $g'(-1)$;

1. Dada a função f, real de variável real, tal que

$$f : x \smile f(x) = \begin{cases} x + 4 \Leftarrow x < 2 \\ \dfrac{3x}{x-1} \Leftarrow x \geqslant 2 \end{cases},$$

1.1. averigúe se a função f é, ou não, contínua para $x = 2$;

Seja dada a função *j*, real de variável real, assim definida:

$$x \smile j(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - x, \text{ se } x \leq 1 \wedge x \neq 0 \\ x^2 - x, \text{ se } x > 1. \end{cases}$$

6.1.1. Mostre que *j* é um infinitésimo com x − 1.

O programa de 1974 foi o culminar de uma experiência iniciada no ano lectivo 63/64 e cuja generalização teve o seu início no ano lectivo 73/74: introdução da Matemática Moderna.

Durante o período de experimentação, foram criadas turmas experimentais ou turmas piloto, relativamente às quais achamos por bem analisar exames a que tivemos acesso: exames de 1971, de 1973 e 1974.

Nestes exames os itens contemplados são:

1. Demonstrações;
2. Esclarecer o significado de expressões que contêm o símbolo "lim" ou a expressão"tende";
3. Aplicação de técnicas de cálculo;
4. Estudo da continuidade;
5. Estudo de assimptotas;
6. Calcular limite de uma sucessão a partir da definição;
7. Identificar a definição de derivada com um limite.

Exame		1	2	3	4	5	6	7
1971	1ª ch	6-A						
	2ª ch	6-B						
	2ªch	VI-B						
	2ª Ép		VI-A. a)					
1973	1ª ch	7-A.2	7-A.1					
	2ª ch	6-A						
	2ª Ép	6-A.1					6-A.2	2.b)
1974	1ª ch	——	——	——	——	——	——	——
	2ª ch				5			
	2ª Ép 1ª ch			5.b)				
	2ª Ép 2ª ch					3	5.b)	

Neste conjunto de exames, destacamos o facto de as questões relacionadas com limites estarem, quase sempre, num dos grupos de opção. Destacamos ainda que em nenhum outro conjunto de exames, da era denominada de Matemática Moderna, existem demonstrações.

Programa de 1954

A base de trabalho relativa ao Programa 1954, o qual se manteve, relativamente ao estudo dos limites, inalterado comparativamente ao programa anterior, o de 1948, era o manual da autoria de Sebastião e Silva e de Silva Paulo.

As actividades propostas são descritas sem a terminologia usada até aqui, por esta não se adaptar. Assim, temos:

- Cálculo de limites pela definição;
- Cálculo de limites com a aplicação dos teoremas sobre limites;
- Estudo de infinitésimos;
- Cálculo de limites recorrendo ao levantamento de indeterminações;
- Estudo de limites laterais;
- Demonstrações;
- Problemas de aplicação ao mundo físico,
- Estudo da continuidade de uma função

Relativamente aos exames, sabemos que na década de 50 não existiam questões que envolviam este assunto, por isso, o que interessa não é efectuar o paralelismo entre manuais e exames, mas sim, apreciar as principais diferenças, no que diz respeito aos exercícios, relativamente a manuais posteriores.

Neste manual, encontramos demonstrações:

14.* Prove que, sendo p um número natural, se tem $\lim\limits_{x \to +\infty} x^p = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} x^p = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} x^p = -\infty$ conforme p é par ou ímpar.

17.* Represente gràficamente a função $(-1)^{C(x)}$ de x e mostre que esta função não tende para limite nenhum, quando $x \to +\infty$ ou quando $x \to -\infty$. O mesmo para a função $(-1)^{C(1/x)}$ quando $x \to 0^+$ ou quando $x \to 0^-$. (Notar que, por exemplo, $\frac{1}{x} \to +\infty$, quando $x \to 0^+$).

que, apesar de estarem assinaladas como facultativas, não deixam de existir, o que significa, pelo menos, que um grupo de alunos deveria ser capaz de trabalhar este tipo de problemas.

Efectivamente, este tipo de exercícios não se encontra em manuais posteriores.

Quanto aos exercícios para calcular o limite pela definição ou usando os teoremas sobre limites ou recorrendo ao levantamento de indeterminações e mostrar que expressões são infinitésimos com outras, verificamos que eles são de graus de dificuldade semelhantes aos apresentados em manuais posteriores:

2. Aplicando a definição 1 deste Capítulo, calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x}{x^2 - 4}$; b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}$; c) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{2x^2 - 2}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 - 3x^2}{x + 5x^2}$ (Dividir ambos os termos por x^2)

e) $\lim\limits_{x \to 8} \frac{1}{2 - \sqrt[3]{x}}$; f) $\lim\limits_{x \to 0} |x|$; g) $\lim\limits_{x \to 0} |x - 3|$

3. Aplicando os teoremas sobre limites de funções, mostre que:

a) $\lim\limits_{x \to -2} (1 - 3x^2) = -11$; b) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{5}{(1 + x)^3} = \frac{1}{25}$

6. Mostre que são infinitésimos com $t + 1$ as variáveis

$$\frac{2t + 2}{t - 1} \quad \text{e} \quad t^2 - t - 2 .$$

8. Calcular:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 + x}{3x + \sqrt{x}}$ (Dividir ambos os termos por x)

O conjunto de exames, que nos foi possível obter, relativos a este programa, permite-nos fazer a listagem dos itens contemplados, os quais são, agora, em número reduzido (os itens III, IV, V e VIII deixaram de fazer sentido) e apresentam-se na tabela seguinte:

Exame		**I**	**II**	**VI**	**IX**
1974 Mat Clássica	1ª ch	2.a)			
	2ª ch	2.b)			
	2ªÉp 1ª ch	—	—	—	—
	2ªÉp 2ª ch	2.a) 8.b)	2.a)		
1973 Mat Clássica	1ª ch	2.a)	2.a)		
	2ª ch	1.b)			
	2ªÉp	8	7.c)		8
1971 Mat Clás.	1ª ch	1.a)	1.b)		
	2ª ch	2			
1961 3º ciclo	1ª ch	—	—	—	—
	2ªÉp	—	—	—	—

Relativamente ao exame de 1974, 2ª Época, 1ª chamada, apesar de não existirem questões relativas a limites de funções, existe uma questão sobre limites de sucessões e que consta de uma demonstração.

Deste pequeno conjunto de exames, verificamos que, a existirem questões relativas ao Cálculo Infinitesimal, elas relacionam-se com a aplicação de técnicas de cálculo, incluindo ou não o estudo da continuidade.

Os exames liceais das décadas de 40 e 50 não têm questões que envolvam o Cálculo Infinitesimal. Como vimos atrás, entre 1936 e 1948 houve um interregno no ensino da Cálculo Infinitesimal, nos liceus, o que justifica o facto para a década de 40.

Os programas de 1948 retomaram este tema, mas na década de 50, questões a ele relativas, encontram-se, apenas, presentes nos exames de aptidão às Universidades.

O livro “Exercícios de Matemática” (Guimarães, 1954) destinado ao 3º ciclo dos liceus e à preparação de exames de aptidão às Universidades, elaborado segundo os programas de 1948, dá-nos uma noção do tratamento deste tema, em termos práticos.

Assim, segundo o Dr. Andrade Guimarães, Assistente de Matemática da Faculdade de Ciências do Porto, os alunos deveriam estar preparados para resolver questões que envolvam:

• Verificações/Demonstrações

Analisemos um dos exercícios resolvidos, neste livro:

1) *Verificar que a função* $y = x^2$ *é infinitésima com* x.

Resolução

Regressando uma vez mais ao exercício proposto, temos de provar que dado um número real positivo $\delta > 0$ se pode encontrar um número real positivo ε, tal que, para *todos* os valores de x que satisfazem à condição $|x| < \varepsilon$, também os valores de y correspondentes satisfazem à condição $|y| < \delta$, ou seja (por ser $y = x^2$) $x^2 < \delta$.

Ora a desigualdade $x^2 - \delta > 0$ equivale à seguinte

$(x - \sqrt{\delta})\ (x + \sqrt{\delta}) < 0$, que se verifica quando um dos binómios fôr negativo e o outro positivo. Suponhamos x negativo; então $x - \sqrt{\delta} < 0$, e deve ser $x + \sqrt{\delta} > 0$, isto é, $x > -\sqrt{\delta}$; como $|x| = -x$, multiplicando a última desigualdade por -1 em ambos os membros, fica: $-x < \sqrt{\delta}$ ou seja $|x| < \sqrt{\delta}$.

Supondo x positivo, como $x + \sqrt{\delta} > 0$, deve ser $x - \sqrt{\delta} < 0$, isto é $x < \sqrt{\delta}$.

Como as operações executadas se podem refazer *em sentido inverso*, isto é, do fim para o princípio, concluímos que para os valores de x tais que $|x| < \sqrt{\delta}$, também $x^2 < \delta$, e portanto, tomando $\varepsilon = \sqrt{\delta}$, a função $y = x^2$ satisfaz à definição de *infinitésimo para* $x = 0$, como se desejava.

• Determinação da ordem infinitesimal entre duas funções

4) *Determinar as ordens infinitesimais das funções* *a)* $x^2 - a^2$ *b)* $x^2 + x - a^2 - a$, *em relação a* $x - a$.

• Cálculo de limites

$$\textit{Calcular}\ \lim f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}.$$

Pensamos que, por lapso, neste enunciado não diz que se pretende calcular o limite quando *x* tende para 2, o que se depreende da resolução:

Como $f(2) = \frac{0}{0}$, concluímos que $x = 2$ não pertence ao *domínio* da função, uma vez que a expressão $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$ *não define número algum* para $x = 2$. Apesar disso, o *limite de* $f(x)$ *para* $x = 2$ *pode existir,* e existe mesmo, neste caso.

Fazendo a mudança de variável $x = 2 + h$, é claro que $x = 2$ equivale a $h = 0$. Vamos pois calcular:

$$\lim_{h \to 0} f(2 + h) = \lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^2 - 5(2 + h) + 6}{(2 + h)^2 - 4} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - h}{h^2 + 4h}$$

Como o valor $h = 0$ *não pertence ao domínio da função racional de h que é* $\frac{h^2 - h}{h^2 + 4h}$ podemos simplificar a fracção anterior e calcular $\lim\limits_{h \to 0} \frac{h - 1}{h + 4}$,

o que de acordo com o resultado do Exercício precedente, dá $-\frac{1}{4}$. Logo,

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\frac{1}{4}$. (1)

Pela resolução apresentada, confirmamos, como seria, nestas condições, expectável, ser a noção de infinitésimo a base para o cálculo de limites.

• Estudo da continuidade de funções.

53) *Determinar os pontos de discontinuidade da função*
$$y = \frac{x^2+1}{)x-1)(x+2)}.$$

Exercícios como os que acabamos de ver requerem capacidade criativa e um raciocínio dedutivo elaborado, para a realização das demonstrações.

Mas, os exercícios para calcular limites e estudar a continuidade, são semelhantes aos que se encontram no manual destinada, apenas, aos liceus.

Verificamos que o que pretendia era um estudo, apenas de forma analítica, assente na noção de infinitésimo.

O livro de exercícios "Exercícios de Álgebra, Trigonometria e Aritmética Racional" (Fernandes, 1950), destinado a alunos do 6º ano dos liceus, mostra-nos a semelhança que acabamos de referir:

• Estudar a ordem dos infinitésimos:

1) Supondo que $x \to 0$ dizer qual é dos infinitésimos $2x^3 - x$ e $4x^3 - 3x^2$ o que tem maior ordem.

• Calcular limites:

4) Determinar o limite da função $f(x) = \frac{2x^3 - 3x + 1}{5x^3 + 2x^2 - 3}$ quando $x \to \infty$.

Cuja resolução é pelo mesmo processo que o que vimos anteriormente:

Façamos $x = \frac{1}{h}$ na função dada ou seja

$$f(x) = f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\frac{2}{h^3} - \frac{3}{h} + 1}{\frac{5}{h^3} + \frac{2}{h} - 3} = \frac{2 - 3h^2 + h^3}{5 + 2h - 3h^3}$$

Atendendo a que quando $x \to \infty$, $h \to 0$ teremos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{h \to 0} f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{2 - 0 + 0}{5 + 0 - 0} = \frac{2}{5}$$

• Estudar a continuidade

:

9) Determinar se a função $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x+2}$ é contínua quando $x = 2$.

Como uma função $f(x)$ é contínua no ponto $x = a$ quando $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$, teremos

$$f(2) = \frac{3 \times 2^2 - 1}{2+2} \quad \text{ou} \quad f(2) = \frac{11}{4},$$

$$f(2+h) = \frac{3(2+h)^2 - 1}{2+h+2} \quad \text{ou} \quad f(2+h) = \frac{3h^2 + 12h + 11}{h+4}$$

e, portanto, $\lim\limits_{h \to 0} f(2+h) = \frac{11}{4}$

conclui-se que a função dada é contínua quando $x = 2$ visto

que $\lim\limits_{h \to 0} f(2+h) = f(2) = \frac{11}{4}$

Relativamente aos manuais elaborados para os programas posteriores, destaca-se a ausência de exercícios que envolvam gráficos e de funções definidas por ramos.

Para programas anteriores a 1936, onde este conceito era estudado, o estudo da continuidade possuía um carácter bem distinto, uma vez que não era o conceito de infinitésimo, mas sim o de valor aproximado que lhe servia de suporte.

Para resolver a questão (Martins, 1931):

62) A função

$$3x^2 + 4x - 1$$

é contínua no ponto 2? e em 5? E no ponto x?

cuja resolução se pode analisar a seguir, verificamos isso mesmo:

62) A função $f(x)$ é contínua no ponto a se for, quando h tende para 0:

$$lim\, f(a+h) = f\,[lim\,(a+h)] = f(a).$$

Ora a função

$$3x^2 + 4x - 1$$

tem o valor

$$3 \times 4 + 4 \times 2 - 1 = 19$$

para $x = 2$.

É contínua no ponto 2, se, para valores de x tam próximos de 2 quanto quisermos, a função difere de 19 menos do que uma quantidade anteriormente tomada, por mais pequena que esta seja. Ora para os valores que diferem h de 2, ou seja para os valores $2 + h$, a função tem o valor

$$3(2+h)^2 + 4(2+h) - 1 = 19 + 12h + 3h^2 + 4h = \\ = 19 + h(16 + 3h).$$

A diferença entre êste valor e 19 é

$$h(16 + 3h)$$

¿pode tornar-se menor que ε, sendo ε um número positivo tam pequeno quanto quisermos?

Basta que seja

$$h(16 + 3h) < \varepsilon$$

ou

$$|h| < \frac{\varepsilon}{16 + 3h}$$

o que prova que, para todos os valores de h cujo módulo seja inferior a $\frac{\varepsilon}{17}$, o valor da função difere de 19 menos que ε, por mais pequeno que êste seja. A função é contínua no ponto 2.

O estudo dos limites estando subordinado ao estudo das derivadas, conforme previsto no programa, conduzia à resolução de questões do tipo:

134) ¿ Qual a função linear que, no ponto 0, substitui a função

$$x^3 - 2x^2 + x + 1\ ?$$

da seguinte forma:

134) Quere-se a função da forma $ax + b$ que no intervalo 0 h, sendo h infinitamente pequeno, dê os mesmos valores para a função dada. Temos, pois, de fazer uma interpolação linear naquele intervalo, isto é, calcular a e h, de modo que seja

$$f(0) = a.0 + b$$
$$f(h) = ah + b.$$

Ora no caso temos:

$$f(0) = 1$$
$$f(h) = h^3 - 2h^2 + h + 1.$$

Tendo de ser, portanto

$$\left|\begin{array}{l} b = 1 \\ ah + b = h^3 - 2h^2 + h + 1. \end{array}\right.$$

Donde

$$\left|\begin{array}{l} b = 1 \\ a = h^2 - 2h + 1. \end{array}\right.$$

Mas como h é infinitamente pequeno, temos, tomando o limite para que tende a, quando h tende para 0

$$a = 1.$$

A função pedida é, portanto

$$x + 1.$$

Estes dois exemplos apresentados servem apenas para que se possa estabelecer comparação com fases posteriores do ensino deste conceito.

2. Reflexões finais

Chegamos ao momento em que é possível fazer uma avaliação da forma como o ensino do conceito de limite de uma função num ponto, tem evoluído, em termos da exigência imputada ao aluno.

A preparação para os exames não se limita à resolução de exercícios do manual adoptado, mas também, à resolução de outras actividades, de outros livros. Mas, aqui, o que interessa é verificar se as propostas de exercícios, apresentadas em alguns manuais, vão de encontro àquilo que se espera que os alunos resolvam, em situação de exame.

A recolha de exercícios efectuada, permite-nos salientar os seguintes aspectos:

- De uma forma geral, existe paralelismo entre aquilo que é exigido, a nível de exercícios, e o que se pratica com a ajuda dos manuais;
- No que diz respeito ao 12º ano, salientamos a acentuada diminuição do grau de dificuldade, no que diz respeito às técnicas de cálculo envolvidas, nos dois últimos programas;
- O estudo do conceito de limite, com recurso a gráficos de funções, pertence a uma fase muito recente, ou seja, a partir dos programas de 1991;
- O número de itens envolvidos nos exercícios propostos nos manuais, é mais diversificado nos programas mais actuais;
- Para cada conjunto de exames e respectivos manuais analisados, o número de itens envolvidos nestes últimos, é sempre maior;
- Apesar de termos analisado uma quantidade significativa de exames, não encontramos questões sobre este tema, que recorram à calculadora gráfica;
- Poucos são os exames que não têm questões que envolvam limites;
- O cálculo de limites, pela definição, é muito pouco frequente nos exames;
- O item “Demonstrações” não foi incluído nas diversas tabelas, por não estar contemplado nos exercícios, com excepção dos manuais relativos ao programa de 1954;
- Os exames cumprem as indicações programáticas.

Notas conclusivas

Ao longo desta dissertação fomos, em jeito de reflexões finais de cada capítulo, fazendo, de algum modo, as nossas conclusões. Interessa agora sumariar as nossas vivências no decurso desta investigação.

Partimos para este trabalho com um sentimento de insatisfação na forma como, por um lado, os manuais exploravam o conceito de “limite” e, por outro, a forma como os nossos alunos, ao longo dos anos, pareciam sentir, se possível, dificuldades acrescidas no que respeita à aprendizagem de tão fulcral conceito matemático. Partilhando ainda essas nossas reflexões com outros colegas de trabalho, havíamos percebido de que a insatisfação por nós sentida era, na realidade, generalizada. Propusemo-nos, pois, no âmbito desta oportunidade de uma dissertação de mestrado, abraçarmos essas nossas angústias à procura, porventura, de soluções claras.

A História da Matemática pareceu-nos um campo adequado para percebermos este percurso: olhando para o passado, aspirávamos a compreender o presente e a preparar o futuro, tal como Heródoto nos havia já dito no séc. V antes de Cristo. Sabíamos que a tarefa seria difícil: de todos os assuntos que constituem o programa de matemática do Ensino Secundário, o conceito de “Limite” é, regra geral, o que mais hesitações e constrangimentos suscita, tanto a professores como a alunos.

Fomos à procura da abordagem e do desenvolvimento do tema nos diversos manuais, ao longo do tempo em que este conceito tem sido estudado, em conformidade com os programas oficias. Fomos ainda aferir da relação (ou falta dela) entre os exames e os próprios manuais e/ou programas. Verificámos, a este propósito, de que se num passado os exames reflectiam preocupações genéricas patentes mais nos programas do que nos manuais; num passado recente, actualmente, de facto, os exames parecem ser o culminar de uma prática de regras que os manuais exploram quase à exaustão e que os próprios “exames” preparatórios da responsabilidade do próprio Ministério vem condicionar. Na realidade parece que a importância da compreensão e do raciocínio fica relevada para um 2º plano, em relação à algoritmização/tecnicismos tão frequentes, em particular, quando está em causa o conceito de “limite”

Por outro lado, das diversas alterações curriculares, depreende-se, de formas cada vez mais explícitas, a necessidade de encontrar respostas cada vez mais sustentáveis, isto é, há necessidade de encontrar estratégias mais eficazes para a compreensão dos conceitos matemáticos em geral e, em particular, do de "limite".

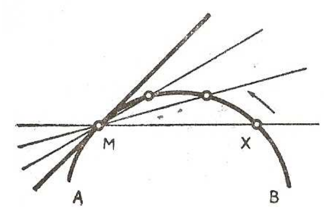
O recurso à intuição, coloca o "limite" num nível diferente de complexidade, relativamente à Álgebra e à Geometria, porquanto nem as técnicas nem as imagens respondem, cabalmente, a esta intuição tão "ingrata" porquanto englobalizadora do próprio conceito de "infinito" (com todas e, cada uma, das suas vertentes: potencial, actual, etc.). E foi precisamente na álgebra e na Geometria que a Análise Infinitesimal começou por se apoiar, a partir do conceito de número e de valores aproximados,

> *Um conjunto ser denso, quer dizer que, entre dois quaisquer elementos do conjunto, se situa uma infinidade de outros elementos do conjunto* (Educação, 1977-78)

e a partir da posição de figuras que se deslocam no espaço.

> *O comprimento duma circunferência é o limite para que tende a sucessão dos perímetros dos polígonos inscritos, quando o número de lados cresce indefinidamente.(Calado, 1956)*

> *Chama-se tangente a uma curva AB, num ponto M, ao limite da posição da secante MX quando o ponto X, deslocando-se sobre AB, se aproxima indefinidamente do ponto M (Calado, 1956)*



Os primeiros manuais, para o ensino secundário, que falam deste conceito, parecem colocar o estudo dos limites na dependência do conceito de derivada – o limite parece servir, apenas, para se poder falar numa quantidade variável tão pequena, quanto se queira, remetendo este conceito para o estudo do movimento, que está na sua origem.

> *The problem of defining and calculating instantaneous rates such as speed and acceleration attracted almost all the mathematicians of the seventeenth centur* – Morris Kline
>
> *(Anton, Bivens, & Davis, 2005)*

Portanto, a noção de quantidade variável e de aproximação é a que está presente, para a introdução deste conceito, e durante muito tempo, por se ver nele grande utilidade.

> *O assunto com que abre este volume – CÁLCULO NUMÉRICO APROXIMADO, em íntima ligação com a TEORIA DOS LIMITES e como base heurística para a introdução ao CÁLCULO DIFERENCIAL… (Silva, 1978)*

> *Aliás, como teremos ocasião de ver, é o estudo dos valores aproximados que conduz naturalmente à teoria dos limites, base de toda a ANÁLISE INFINITESIMAL, que, tal como a aritmética dos números naturais, pode ser desenvolvida com rigor lógico impecável, a partir de um sistema de axiomas (Silva, 1978)*

Esta situação não foi, todavia, a que perdurou até aos nossos dias. Vemos que já nos programas de 1978 este tipo de estudo deixa de se fazer, sendo o estudo dos infinitésimos o ponto de partida para o estudo dos limites.

Mas, “Também no CÁLCULO NUMÉRICO APROXIMADO, que introduzimos no capítulo I, os erros desprezáveis (por exemplo no cálculo de um produto) podem ser chamados infinitésimos.”(Silva, 1978)

Portanto, se o que interessa é estudar situações em que uma variável tem valores próximos de zero, tanto quanto se queira, segundo este programa, o estudo pode começar com o estudo dos infinitésimos.

Entretanto, o que se perdeu ao passar por cima do estudo do Cálculo Numérico Aproximado?

A observação relativa a este tema, que se encontra no programa de Matemática, para o ano lectivo 74-75 diz que “O objectivo deste número é a aquisição de linguagem adequada ao estudo dos *assuntos* abordados nos números seguintes*”*: limites de sucessões e limites de funções reais de variável real.

A partir daqui, vemos o estudo dos limites das funções a apoiar-se no estudo dos limites das sucessões, através dos infinitésimos.

O resultado não terá sido o que se esperava, pois recentemente houve necessidade de reformular o estudo dos limites das funções. Por um lado, a introdução deste conceito, passou a ser feito a partir das
propriedades das funções racionais fraccionárias de forma intuitiva, e por outro lado, o estudo do conceito, foi alargado em termos temporais – estudo intuitivo num ano e formalização do conceito no ano seguinte.

Com estas alterações, podemos supor que os estudantes passaram a conhecer melhor este conceito?

Provavelmente, sim. Na verdade, fazendo a comparação entre os exercícios propostos nos manuais mais recentes e nos mais antigos, facilmente nos apercebemos da grande diferença, no sentido de existir uma evolução positiva. Actualmente, só pelo facto de fazermos uma exploração gráfica mais completa, acreditamos que o estudante formule uma imagem mais próxima daquela que se pretende e, neste sentido, é compreensível o estudo das assimptotas, neste momento.

Os exercícios dos manuais mais antigos, restringem-se, basicamente, ao cálculo de limites, com aplicação no estudo da continuidade.

O que se diz relativamente aos exercícios dos manuais, confirma-se nos exames nacionais.

Mas("Estatutos da Universidade de Coimbra, 1772", 1772),

,

4 Além deſta excellencia privativa , de que goza a Mathematica pelas luzes da evidencia mais pura ; e pela exactidão mais rigoroſa , com que procede nas ſuas Demonſtrações ; e com que dirige praticamente o Entendimento ; habituando-o a penſar ſólida , e methodicamente em quaeſquer outras materias ; contém em ſi meſma hum Syſtema grande de Doutrinas da maior importancia.

Então, será que a Matemática está a cumprir plenamente o seu papel, com a exclusão das demonstrações, neste tema, no ensino secundário actual?

As demonstrações requerem um tipo de trabalho intelectual específico e, talvez, aqui fosse uma boa oportunidade para ele começar a ser desenvolvido. Efectivamente, este trabalho já se fez em programas anteriores, em circunstâncias de políticas de ensino, bem distintas, o que não impede que não se faça uma reflexão para as políticas actuais.

O que temos verificado é que, em termos práticos, os estudantes, no cálculo de limites, pensam em substituir o valor da variável pelo valor para o qual tende o limite, sem existir uma consciência plena dessa prática.

Parece que o que se conseguiu foi aumentar as capacidades de manusear este conceito em detrimento de uma concepção formal.

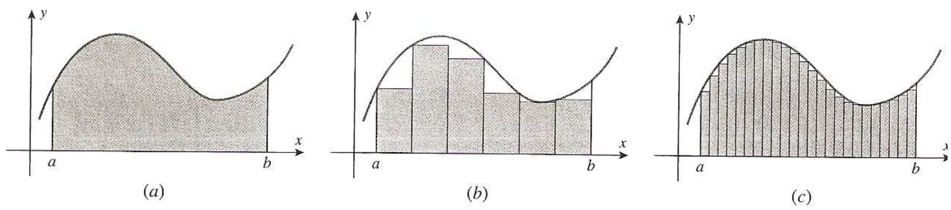
De qualquer forma, existe a noção clara de que, sem a maturidade necessária para enfrentar este conceito, qualquer que seja a estratégia utilizada, ela será infrutífera.

A par desta questão da aprendizagem, existe também uma outra vertente que é importante ser dada a conhecer aos estudantes, no sentido da relevância deste estudo, que é o da aplicabilidade do conceito.

A primeira aplicação que os estudantes conhecem é relativa ao estudo das derivadas.

Através deste novo conceito os estudantes vêem a possibilidade de determinar velocidades instantâneas e a inclinação de uma curva, num determinado ponto.

Mas, apesar de, actualmente, não estar contemplado no ensino secundário o Cálculo Integral, seria interessante dar a perceber a aplicação do cálculo de limites na determinação de áreas de figuras, limitadas por curvas irregulares, com uma leitura de imagens como (Anton, Bivens, & Davis, 2005):



que permitem transmitir a noção de que a área da figura será a soma das áreas dos “infinitos” rectângulos, com larguras tão próximas de zero, quanto possível.

As aplicações é que “dão vida” aos conceitos e podem servir de estímulo ao estudo daqueles.

Agora que damos por finalizada esta etapa, parece-nos importante recomeçar: muitos documentos ficaram por encontrar, muitos mais por analisar, muitas reflexões/caminhos possíveis por explorar e voltaremos, seguramente, a eles.

Sentimo-nos, porventura, menos seguros por causa de todos esses domínios inexplorados na nossa dissertação mas sentimo-nos, igualmente, mais confiantes no que respeita às dificuldades que os nossos alunos, antes de termos desenvolvido esta investigação, nos apresentavam. Ganhámos, seguramente, uma bagagem científica que, estamos em crer, beneficiará, principalmente, esses a quem dedicamos o nosso saber: os aprendizes do conceito de “limite”!

Referências bibliográficas

Abrantes, P., & Carvalho, R. F. (1984). *M11 - Matemática, 11º Ano* (1ª ed.). Lisboa.

Aires, A. P. F., & Vázquez, M. S. O conceito de derivada no ensino secundário ao longo do século XX. from http://www.spce.org.pt/sem/7.pdf

Albuquerque, J. A. (1924). *Álgebra - VI e VII Classes - para o Curso Complementar de Sciências*. Porto.

Andrade, S. C. d. (1860). Nota sobre a dízima periódica. *O Instituto, 8,* 291-294.

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2005). *Calculus* (7ª ed.). New York, Chichester, Weinheim, Brisbane, Toronto, Singapure.

Bezout, M. (1801). *Elementos de analyse* (3ª ed. Vol. II). Coimbra.

Brito, C., & Aubyn, M. C. S. (2005). *MAT 12* (Vol. 2). Lisboa.

Cajori, F. (1993). *A History of Mathematical Notations* (Vol. I e II). New York: Dover Publications, Inc.

Calado, J. J. G. (1956). *Compêndio de Álgebra - 3º, 4º e 5º ano*. Lisboa.

Câmara, Â. M. (1998). *Matemática - Teoria e prática 11º ano*. Lisboa: Edições Rumo.

Caraça, B. J. (1940). *Lições de Álgebra e Análise - Funções, Limites, Continuidade* (Vol. II). Lisboa.

Carvalho, R. (2001). *História do Ensino em Portugal* (3ª ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Cauchy, A.-L. (1821). *Cours d'Analyse*.

CEDEFOP. from http://portal.iefp.pt/portal/page?_pageid=177,154985&_dad=gov_portal_iefp&_schema=GOV_PORTAL_IEFP

Coelho, F. A. (1913). Programas e planos de ensino. *O Instituto, 60*, 401-409.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advenced Mathematical Thinking*: Kluwer Academic Publishers.

Costa, B., Resende, L. C., & Rodrigues, E. (2004). *Espaço 11*. Porto.

Costa, B., Resende, L. C., & Rodrigues, E. (2005). *Espaço 12*. Porto.

Cultura, M. E. (1974). *Matemática - Programa para o ano lectivo 1974-1975*. Lisboa.

Cunha, P. J. (1923). *Sobre as noções fundamentais da análise infinitesimal*.

Cunha, P. J. (1940). *Congresso do Mundo Português Como se introduziram e desenvolveram entre nós as Noções de Limite e de Infinitamente Pequeno* (Vol. XII). Lisboa.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. In D. Tirosh (Ed.), *Forms of Mathematical Knowledge*. Dordrecht/Bostn/London: Kluwer Academic Publishers.

Duhamel, M. (1860). *Éléments de calcul Infinitésimal* (2ª ed. Vol. 1). Paris.

Educação, M. (1948). *Programas das disciplinas do Ensino Liceal - decreto n.º 37:112, de 22 de Outubro de 1948*: Imprensa Nacional de Lisboa.

Educação, M. (1977-78). *Matemática - A P*: Secretaria de Estado do Ensino Superior.

Educação, M. (1978 a 1980). *Exames Nacionais de Matemática - Curso Complementar*.

Educação, M. (1979). *Programa de Matemática - Curso Complementar (Áreas A,B,C e E)- 11º ano*.

Educação, M. (1981 a 1995). *Exames Nacionais de Matemática - 11º ano / Curso Complementar*.

Educação, M. (1981 a 2002). *Exames Nacionais de Matemática - 12º ano Via Ensino - de 1981 a 2002, excepto os de 1982, 1995 e 1996*.

Educação, M. (1991). *Programa de Matemática (10º-12º anos) Para aplicação em Regime de Experiência Pedagógica*. Lisboa.

Educação, M. (1993). *Programa de Matemática - Ensino Secundário Recorrente - Componente de Formação Científica*.

Educação, M. (1995a). *Matemática - Orientações de Gestão do Programa*.

Educação, M. (1995b). *Orientações da Gestão do Programa*.

Educação, M. (1996 a 2009). *Exames Nacionais de Matemática - 12º ano - Códigos: 135, 435 e 635*.

Educação, M. (1997). *Matemática - Programas 10º, 11º e 12º anos* (Editorial do Ministério da Educação ed.).

Educação, M. (2002a). *Programa de Matemática A - 11º ano*.

Educação, M. (2002b). *Programa de Matemática A - 12º ano*

Engler, A., Vrancken, S., M., H., D., M., & I., G. M. (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de limite finito de una variable finita". *UNIÓN, 11*.

Estatutos da Universidade de Coimbra, 1772. (1772). from http://bdigital.sib.uc.pt/bg1/UCBG-R-44-3_3/UCBG-R-44-3_3_item1/index.htm

Estrada, M. F., Sá, C. C., Queiró, J. F., Silva, M. C., & Costa, M. J. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Fauvel, J. M., Jan van. (2000). *History in Mathematics Education* Dordrech: Kluwer Academic Publishers.

Fernandes, A. N. P. (1950). *Exercícios de Álgebra, Trigonometria e Aritmética Racional* (6ª ed.). Braga.

Fernandes, A. N. P. (1982). *Matemática 7* (1ª ed.). Lisboa.

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In R. S. Rolf Biehler, Rudolf Straber e Bernard Winkelmann (Ed.), *Didactics of mathematics as a Scientific Discipline*: Kluwer Academic Publishers.

Freire, F. C. (1872). *Memória Histórica da Faculdade de Matemática*. Coimbra: Imprensa da Universidade.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*.

Garcia, M. M., Anjos, A. O., & Ruivo, A. F. (1976). *Compêndio de Matemática - 2º ano do Curso Complementar* (Vol. 1º). Porto.

Gowers, T. (2008). *Matemática - uma breve introdução* (L. S. Silva, Jorge Nuno Trans. 1ª ed.). Lisboa: Gradiva.

Guimarães, A. A. (1954). *Exercícios de Matemática*. Porto.

Heath, T. (1956). *Euclid - The thirteen book of Elements* (Vol. vol.3). New York: Dover Publications.

Heine, E. (1871). Die Elemente der Functionenlehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik, 74*, 172-188.

Instituto, O. (1855). Universidade de Coimbra - Programas. *O Instituto, 3*, 2-3,13-14,26-27.

Katz, V. J. (1998). *A History of Mathematics* (2ª ed.): USA: Addison-Wesley.

Kline, M. (1959). *Mathematics and the physical world*. New York: Dover Publications, Inc.

L'Huilier, S. (1786). *Exposition Élémentaire des principes des calculs supérieurs*.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2010). *Calculus* (9ª ed.): Richard Stratton.

Lelong. (1968). *Cours d'Analyse* (2ª ed.). Paris: Centre de Documentation Universitaire.

Lopes, A. A. (1955). *Compêndio de Álgebra*. Porto: Porto Editora.

Lopes, A. V., Bernardes, A., Loureiro, C., Varandas, J. M., Viana, J. P., & Bastos, R. (1999). *Funções 12* (1ª ed.). Porto.

Machado, A., Abrantes, P., & Carvalho, R. F. (1990). *M12 - Matemática - 12º ano* (4ª ed.). Lisboa: Texto Editora, Lda.

Martins, A. (1923). *A Matemática*. Porto: Renascença Portuguesa.

Martins, A. (1931). *A Matemática - Exercícios do Curso Complementar de Sciências*. Porto.

Matos, A. C. (1960). *Funções reais de uma variável real (Teoria elementar)*. Porto: Centro de Estudos Matemáticos do Porto.

Matos, J. M. (2006). A penetração da Matemática Moderna em Portugal na revista Labor. *Únion - Revista Iberoamericana de Educação Matemática*, *5,* 91-110.

Miranda, F., & Santos, L. (2004). *Introdução à análise real* (1ª ed.): Departamento de Matemática da Universidade do Minho.

Nacional, M. I. (1936). *Ensino Liceal - Reforma dos estudos e respectivos programas. Decreto-lei n.º 27:084 de 14 de Outubro de 1936*. Lisboa.

Neves, M. A., & Brito, M. L. C. (1995). *Matemática 12º ano* (Vol. 2º). Porto: Porto Editora.

Neves, M. A., & Brito, M. L. C. (1996). *Matemática 11º* (Vol. 2º). Porto

Poincaré, J. H. (1947). *Science et méthode*. Paris: Ernest Flammarion.

Prisley, W. M. (1998). *Calculus: A Liberal Art* (2ª ed.). New York: Springer.

Pristley, W. M. (1998). *Calculus: A Liberal Art* (2ª ed.). New York: Springer.

Pública, M. I. (1919). *Diário do Governo - Decreto n.º 6:132*.

Pública, M. I. (1926). *Programas do Curso dos Liceus*.

Pública, M. I. (1929). *Programas do Curso dos Liceus - da 6ª e 7ª Classes de Sciências e Letras*.

Ralha, M. E., & al. (2006). *José Anastácio da Cunha: o tempo, as ideias, a obra e os inéditos*: CMAT - CMUP - Arquivo Distrital de Braga

Ribeiro, A., Branco, A. P., Dias, I., Pona, F., & Sousa, H. I. (1999). *A Solução - Matemática - 11º ano* (2ª ed.). Lisboa.

Ribeiro, A., Branco, A. P., Pona, F., Sousa, H. I., & Dias, I. (1999a). *A Solução* (1ª ed.). Lisboa.

Ribeiro, A., Branco, A. P., Pona, F., Sousa, H. I., & Dias, I. (1999b). *A Solução - Matemática - 12º ano* (1ª ed.). Lisboa.

Robert, A., & Speer, N. (2001). Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary Analysis. In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (Vol. 7). Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Rodrigues, A. P. (1932). *Curso de Matemáticas Elementares* (1ª ed.). Porto.

Schubring, G. (2005). *Conflits betwween generalization, rigor, and intuition*. New York: Springer.

Secundário, M. E.-D. E. (1997). *Matemática - Programas 10º, 11º e 12º anos*.

Silva, J. S. (1951, Outubro de 1951). A Análise Infinitesimal no Ensino Secundário. *Gazeta de Matemática, n.º 49,* 4.

Silva, J. S. (1975). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (Vol. 1º). Lisboa: G.E.P. do M.E.I.C.

Silva, J. S. (1977). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática (2º e 3º Volumes)*: GEP do MEIC.

Silva, J. S. (1978). *Compêndio de Matemática* (Vol. 2º): GEP do MEC.

Silva, J. S., & Paulo, J. D. S. (1956). *Compêndio de Álgebra- 3º ciclo dos liceus - 6º ano* (Vol. I). Lisboa.

Silva, J. S., & Paulo, J. D. S. (1958). *Compêndio de Álgebra*. Lisboa.

Spivak, M. (1994). *Calculus* (3.ª ed.).

Stockler, F. B. G. (1794). *Compendio da theorica dos limites*. Lisboa.

Superior, S. E. E. (1977-1978). *Matemática - A P*.

Teixeira, A. J. (1892). O ensino da Faculdade de Mathematica. *O Instituto, 40*.

Teixeira, F. G. (1890). *Curso de Analyse Infinitesimal - Cálculo diferencial* (2ª ed.). Porto.

Teixeira, F. G. (1934). *História das Matemáticas em Portugal*.

wikipedia. Francisco Adolfo Coelho. Retrieved 30 Janeiro 2010, from http://pt.wikipedia.org/wiki/Francisco_Adolfo_Coelho