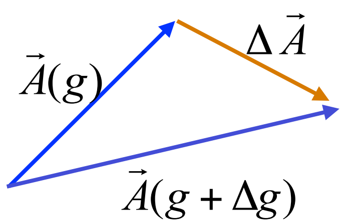
Cinemática da partícula – 1ª Parte

1.1 – Derivada de um vector em ordem a um escalar

Seja um vector $\vec{A}$ função de um escalar g : $\vec{A} = \vec{A}(g)$

Define-se

$$\frac{d\vec{A}}{dg} = \lim_{\Delta g \to 0} \frac{\vec{A}(g+\Delta g) - \vec{A}(g)}{\Delta g} = \lim_{\Delta g \to 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta g}$$



Notar que sendo

$$\vec{A} = A_1 \vec{u}_1 + A_2 \vec{u}_2 + A_3 \vec{u}_3 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix}$$

vem

$$\frac{d\vec{A}}{dg} = \frac{dA_1}{dg}\vec{u}_1 + A_1 \frac{d\vec{u}_1}{dg} + \frac{dA_2}{dg}\vec{u}_2 + A_2 \frac{d\vec{u}_2}{dg} + \frac{dA_3}{dg}\vec{u}_3 + A_3 \frac{d\vec{u}_3}{dg}$$

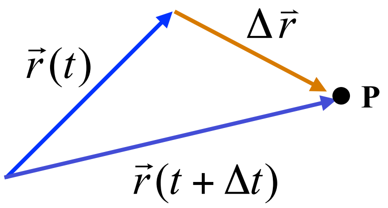
pois os versores podem depender de g !

Considere-se o caso particular em que o vector $\vec{A}$ é o vector posição $\vec{r}$ de um ponto P que se se desloca no espaço quando o tempo decorre e em que o escalar (g) é o tempo t.

$$\vec{r} = r_1\,\vec{u}_1 + r_2\,\vec{u}_2 + r_3\,\vec{u}_3 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix}$$

A sua derivada em ordem ao tempo chama-se ***velocidade*** do ponto P:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr_1}{dt}\vec{u}_1 + r_1\frac{d\vec{u}_1}{dt} + \frac{dr_2}{dt}\vec{u}_2 + r_2\frac{d\vec{u}_2}{dt} + \frac{dr_3}{dt}\vec{u}_3 + r_3\frac{d\vec{u}_3}{dt}$$

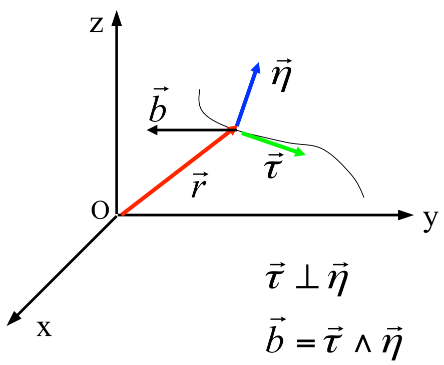


Ao quociente $\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ chama-se *velocidade média* durante o intervalo de tempo Δt.

1.2 – Representação intrínseca da velocidade e da aceleração

Vamos estudar um sistema de coordenadas a que se chama "intrínseco" pelo facto de ser definido a partir da própria trajectória. Notar que, assim sendo, os versores irão depender não só da posição do ponto mas também da maneira como essa posição varia (trajectória).

Triedo de Frenet $(\vec{b}\,;\vec{\tau}\,;\vec{\eta})$



$\vec{\tau} \perp \vec{\eta}$

$\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{\eta}$

a) Versor da tangente $(\vec{\tau})$

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}}$$

➡ É tangente, pois $d\,\vec{r}$ o é;

➡ É versor, pois $|d\,\vec{r}| = |ds| \Rightarrow |\vec{\tau}| = 1$

b) Versor da normal $(\vec{\eta})$

$$\boxed{\vec{\eta} = \frac{1}{K}\frac{d\vec{\tau}}{ds}}$$

K → Curvatura da linha no ponto considerado.

$$\boxed{\vec{\eta} = R\frac{d\vec{\tau}}{ds}}$$

R → Raio de curvatura da linha no ponto considerado.

▶ Por definição é $\frac{1}{R} = K = \left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|$, pelo que o vector $\vec{\eta}$ acima definido tem módulo 1, i.é, é *versor.*

▶ Verifiquemos que é $\vec{\eta} \perp \vec{\tau}$

$$|\vec{\tau}| = 1 \Rightarrow \vec{\tau}\cdot\vec{\tau} = 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}\underbrace{(\vec{\tau}\cdot\vec{\tau})}_{=cte} = 0 \Rightarrow$$

$$0 = \frac{d}{ds}(\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}) = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot\vec{\tau} + \vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{ds} = 2\vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{\tau}}{ds} \perp \vec{\tau}$$

Notar que não foi o facto de o módulo ser 1 que foi relevante, mas sim o facto de o módulo ser constante!

" Se um vector depende de um escalar mas tem módulo constante (i.é, se só a sua direcção varia) a sua derivada em relação ao escalar produz um vector que lhe é perpendicular".

C) Velocidade $(\vec{v})$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{ds}}_{=\vec{\tau}}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{=v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = v\vec{\tau}$$

A velocidade é um vector dirigido segundo a direcção tangente à trajectória.

d) Aceleração $(\vec{a})$

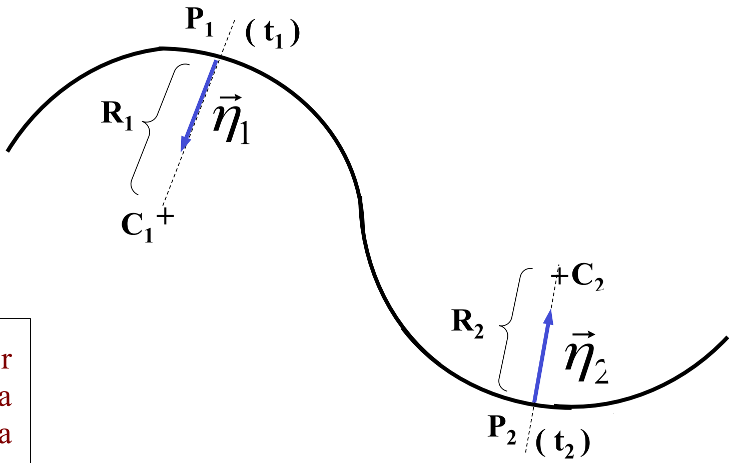
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{=a_t}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$$como \quad \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{\tau}}{ds}}_{=\frac{1}{R}\vec{\eta}}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{=v} = \frac{v}{R}\vec{\eta} \Rightarrow \quad \vec{a} = a_t\vec{\tau} + \underbrace{\frac{v^2}{R}}_{=a_\eta}\vec{\eta}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} \rightarrow aceleração\ \mathrm{tan}\,gencial$$

$$a_\eta = \frac{v^2}{R} \rightarrow aceleração\ normal\ (ou\ centrípta)$$

À aceleração normal também pode chamar-se *centrípeta* porque ela aponta para o centro de curvatura da trajectória.



O "centro de curvatura" por definição situa-se sobre a recta normal, a uma distância da curva, "para dentro", igual ao raio de curvatura.

➪ A componente tangencial da aceleração está associada (é igual, aliás) à variação do módulo da velocidade isto é, à variação da "rapidez".

➪ A componente normal da aceleração está associada à variação da direcção do vector velocidade:

$$\boxed{a_n = v\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|}$$

Assim, as acelerações ($\Rightarrow$ forças) são necessárias não só para fazer variar a rapidez de um movimento mas também necessárias para fazer variar a direcção da trajectória.

Casos particulares

$$1^{\circ}\ \vec{\tau} = \overrightarrow{cte} \quad (direcção\ constante)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\underbrace{\frac{d\vec{\tau}}{dt}}_{=0} = \overbrace{\frac{dv}{dt}}^{=a_t}\vec{\tau} = \vec{a}_t$$

È claro que neste caso a trajectória é uma recta como se pode verificar

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{\eta} \quad (geral);$$

$$neste\ caso\ é \quad \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} \Rightarrow \frac{v^2}{R} = 0 \Rightarrow R = \infty,\ K = 0$$

Uma linha com curvatura nula (ou, equivalentemente, com raio de curvatura infinito) é uma recta.

2º v = cte. (movimento “uniforme” no que respeita à rapidez)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{=0}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \overbrace{\frac{v^2}{R}}^{=a_\eta}\vec{\eta} = \vec{a}_\eta$$

O caso R = const. — *movimento circular* — é um caso particular deste caso particular.

1.3 – Lei do movimento

Descrever um movimento é fornecer a *lei do movimento,* isto é, especificar a posição do ponto em estudo num dado sistema de referência em todos os instantes de tempo por meio de uma expressão

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cdots \\ (qq\ sist.\ de\ coord.) \end{cases}$$

È claro que as equações anteriores são as equações paramétricas da trajectória, sendo o tempo, o parâmetro. As equações cartesianas da trajectória obtêm-se pois por eliminação do tempo.

$$\text{Ex.} \qquad \vec{r} = 2t\vec{i} + t^2\vec{j} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2t \\ t^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 \\ z = 0 \end{cases}}_{\substack{eq.\ paramétricas \\ da\ trajectória}} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} \\ z = 0 \end{cases}}_{\substack{eq.\ cartesiana \\ da\ trajectória}}$$

1.3.1 – Problemas fundamentais da cinemática

$$\underline{Dados}: \qquad \underbrace{\vec{r}_o\,;\vec{v}_o}_{\substack{condições\ iniciais \\ (t=t_0)\ \underline{dado}}} \qquad ; \qquad \underbrace{\vec{a}(t)}_{\substack{(função\ do\ tempo \\ no\ caso\ geral)}}$$

$$\underline{Determinar}: \quad \vec{r}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \quad (lei\ do\ movimento)$$

È o problema mais frequente. Vejamos o método de resolução no caso particular de o vector aceleração ser constante.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \longrightarrow d\vec{r} = \vec{v}\,dt \qquad\qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \longrightarrow d\vec{v} = \vec{a}\,dt$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt \qquad\qquad \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}\,dt$$

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}(t - t_0) \Rightarrow$$

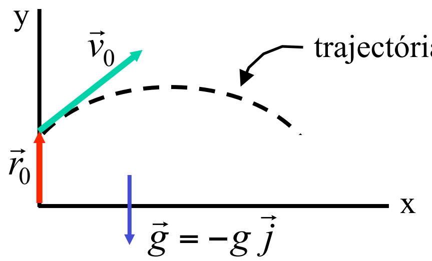
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t \qquad (se\ t_0 = 0)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt$$

Logo,

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$$

Ex .



$\underline{Dados}: \quad \vec{r}_0 = 2\,\vec{j}\,;\, \vec{v}_0 = (\vec{i} + \vec{j})\,;\, \vec{a} = \vec{g}\ (cte)$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2 \Leftrightarrow$$

$$\vec{r} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}g\,t^2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \overbrace{\begin{Bmatrix} t \\ 2 + t - \frac{1}{2}g\,t^2 \\ 0 \end{Bmatrix}}^{eq.\ paramétricas} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

A *equação cartesiana* da trajectória obtém-se como vimos, por substituição do parâmetro t;

$$x = t \Rightarrow$$

$$y = 2 + x - \frac{1}{2} g x^2 \Longrightarrow \textit{(Parábola)}$$

1.3.2 – Alguns casos particulares

1.3.2.1 - Movimento com aceleração constante e rectilíneo ($\vec{a} = \overrightarrow{cte}\cdot$)

Neste caso, e escolhendo para eixo do x a própria recta sobre a qual se efectua o movimento, temos que $\vec{r}\,;\vec{r}_0\,;\vec{v}\,;\vec{v}_0$ *e* $\vec{a}$ têm todos a mesma direcção, tendo componentes apenas segundo aquele eixo. Notar em particular que $\vec{a}$ tem a direcção de $\vec{v}$ (de outro modo, a trajectória encurvaria !!).

Podemos pois escrever a seguinte relação escalar:

$$x = x_0 + v_0\, t + \frac{1}{2} a t^2$$

Não esquecer que pode ser

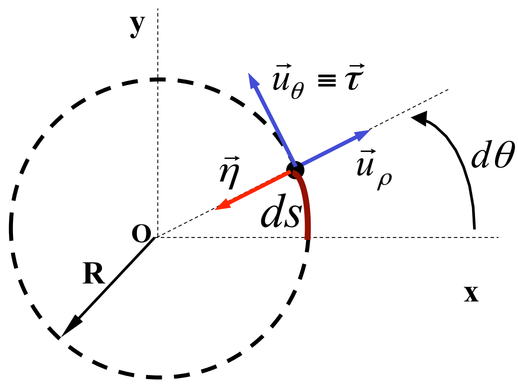
a > 0 $\Rightarrow$ *aceleração positiva* $\Rightarrow$ (movimento uniformemente acelerado)

a < 0 $\Rightarrow$ *aceleração negativa* $\Rightarrow$ (movimento uniformemente retardado)

a = 0 $\Rightarrow$ *aceleração nula* ($\Rightarrow$ v = v_o) $\Rightarrow$ (movimento uniforme)

1.3.2.2 – Movimento circular

Neste caso é preferível utilizar a representação polar:



$$\begin{cases} \vec{u}_\theta \equiv \vec{\tau} \\ \vec{u}_\rho \equiv -\vec{\eta} \end{cases}$$

Velocidade / aceleração:

$$(\bullet)\ \vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = v\vec{\tau}$$

$$v = \frac{ds}{dt}\ ;\ ds = R\,d\theta \Rightarrow v = R\frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta} \quad (R = cte.)$$

$$(\bullet\bullet)\ \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{\eta}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}(R\dot{\theta}) = R\ddot{\theta}$$

$$\vec{\eta} = -\vec{u}_\rho$$

Então:

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho$$

Define-se:

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} & \rightarrow Velocidade\ angular \\ \alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} & \rightarrow Aceleração\ angular \end{cases}$$

θ−ângulo de rotação [rad]
ω−velocidade angular [rad/s]
α− aceleração angular [rad/s^2]

Vector velocidade angular, ou Vector rotação

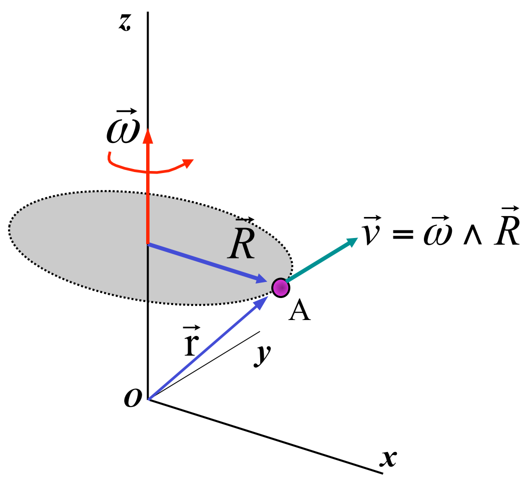
Define-se vector velocidade angular um vector tal que

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{R} \Leftrightarrow \vec{v} = M_A \vec{\omega}\ (momento\ em\ A\ do\ vector\ \vec{\omega})$$

Notar:

1º $\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$

2º $\vec{\omega} \perp trajectória$



Existe uma correspondência entre os movimentos de rotação e os de translação, que pode ser expressa pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} x &\leftrightarrow \theta \\ v &\leftrightarrow \dot{\theta}\ (ou\ \omega) \\ a &\leftrightarrow \ddot{\theta}\ (ou\ \alpha) \end{aligned}$$

$$v = \frac{dx}{dt};\ \omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

$$a = \frac{dv}{dt};\ \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\theta}$$

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_y.r_z - \omega_z.r_y \\ \omega_z.r_x - \omega_x.r_z \\ \omega_x.r_y - \omega_y.r_x \end{Bmatrix}$$

Assim, e por exemplo, sabendo que para um movimento de translação com aceleração constante se tem

$$x = x_0 + v_0\,t \pm \frac{1}{2}a\,t^2$$

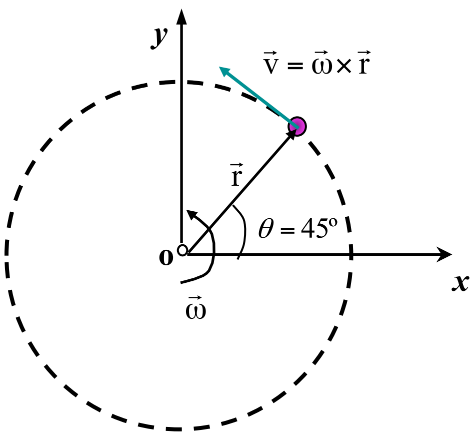
$$v = v_0 \pm a\,t$$

pode escrever-se imediatamente a expressão para um movimento de rotação com aceleração constante:

$$\theta = \theta_o \pm \omega_o t \pm \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega = \omega_o \pm \alpha\,t$$

Exemplo de aplicação: Determinar para a posição representada na figura, a velocidade linear de uma partícula que executa uma trajectória circular com um raio de 1,5 m e com velocidade angular constante de 10 rad/s.



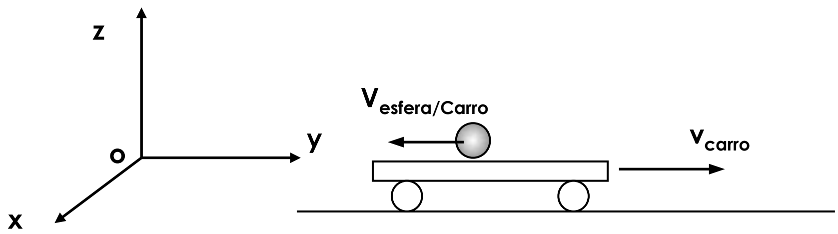
$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k} \qquad \vec{r} = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r\cos(45) \\ r\sin(45) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k} \qquad \vec{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \qquad \vec{v} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} r\cos(45) \\ r\sin(45) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}\,r\sin(45) \\ \dot{\theta}\,r\cos(45) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10.61 \\ 10.61 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2 - Cinemática da partícula – 2ª Parte

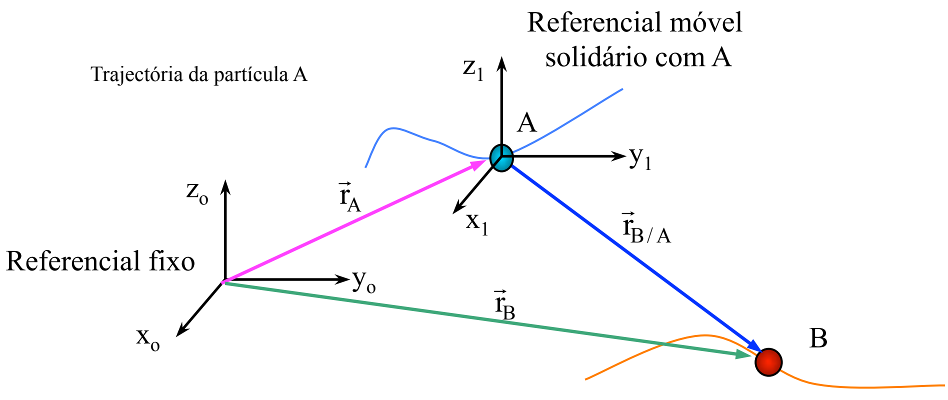
2.1 - Movimento Relativo de Translação



$V_{esfera/carro}$- Velocidade da esfera em relação ao carro

$V_{esfera/solo}$- Velocidade do carro

Na figura seguinte estão representados a posição de duas partículas onde os vectores $\mathbf{r_A}$ e $\mathbf{r_B}$ são as posições absolutas dessas partículas. A posição relativa entre as duas partículas é definida pelo vector $\mathbf{r_{B/A}}$, e representa a posição da partícula B em relação à partícula A.

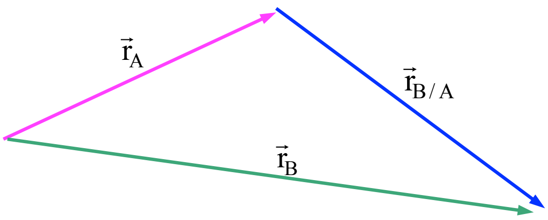


$\vec{r}_A$ - Posição absoluta da partícula A

$\vec{r}_B$ - Posição absoluta da partícula B

$\vec{r}_{B/A}$ - Posição relativa da partícula B em relação à partícula A e ao eixo móvel.

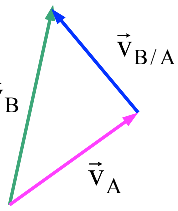
➢**Posição**:A posição da partícula B é definida como a soma vectorial da posição absoluta da partícula A e a posição relativa da partícula B em relação à partícula A



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$

➢**Velocidade**:A velocidade da partícula B é determinada a partir das derivadas dos vectores posição em ordem ao tempo.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

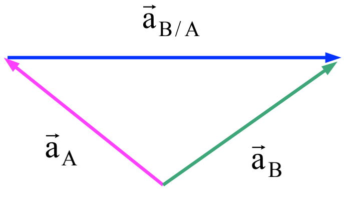


Onde $\vec{v}_A = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt}$ e $\vec{v}_B = \dfrac{d\vec{r}_B}{dt}$ são velociades absolutas, porque são medidos a partir do referencial fixo.

A velocidade relativa $\vec{v}_{B/A} = \dfrac{d\vec{r}_{B/A}}{dt}$ é observada a partir do refrencial móvel

➢**Aceleração**:Através da derivada no tempo da velocidade é obtido aceleração absoluta e relativa, cuja relação é semelhante à obtida com os vectores posição.

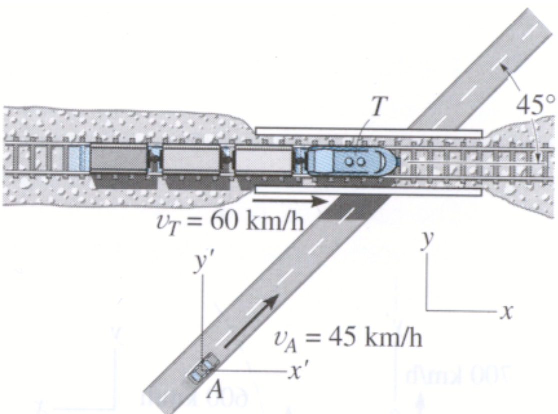
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$



Onde $\vec{a}_{B/A} = \dfrac{d\vec{v}_{B/A}}{dt}$ é a aceleração B que observamos quando se está colocado em A e solidário com o eixo móvel x_1, y_1, z_1

Exemplo de aplicação:

Um comboio desloca-se a uma velocidade constante de 60km/h, atravessando uma estrada conforme a figura mostra. Se o carro se deslocar à velocidade de 45km/h, determine a velocidade relativa do comboio em relação ao carro.



(a)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

$$\begin{Bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \\ v_{Bz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \\ v_{Az} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_{(B/A)x} \\ v_{(B/A)y} \\ v_{(B/A)z} \end{Bmatrix}$$

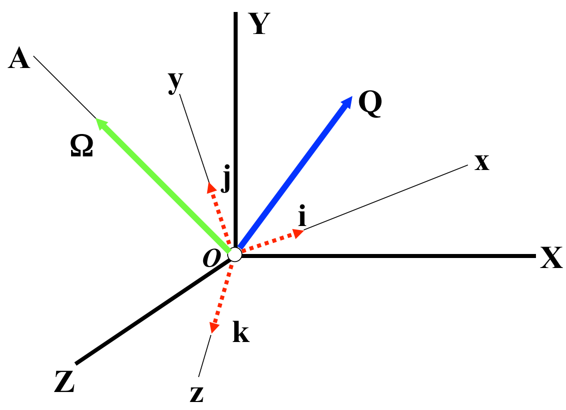
$$\begin{Bmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 45\cos(45) \\ 45\sin(45) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_{(B/A)x} \\ v_{(B/A)y} \\ v_{(B/A)z} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_{(B/A)x} \\ v_{(B/A)y} \\ v_{(B/A)z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60 - 45\cos(45) \\ -45\mathrm{sen}(45) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 28.18 \\ -31.82 \\ 0 \end{Bmatrix} [\mathrm{km/h}]$$

$$\vec{v}_{B/A} = 28.18\vec{i} - 31.82\vec{j}\ [km/h]$$

2.2 – Sistemas em movimento relativo de rotação

Considerem-se dois sistemas de referência centrados em O, um *OXYZ* fixo e outro rotativo em torno do eixo fixo *OA*; seja **Ω** a velocidade angular do sistema *Oxyz* num dado instante (ver figura). Considere-se agora uma função vectorial **Q** (t) representada pelo vector **Q** aplicado em O; como o tempo t varia, tanto o módulo como a direcção de **Q** variam. Como a variação de **Q** vista por um observador que usa o sistema *OXYZ* como referência é diferente da variação de **Q** vista por um que usa o sistema *Oxyz,* deve-se esperar que a derivada de **Q** dependa do sistema que for tomado como referência. Portanto, devemos designar por $(\dot{Q})_{OXYZ}$ a derivada de **Q** em relação ao sistema fixo *OXYZ* e por $(\dot{Q})_{Oxyz}$ a derivada em relação ao sistema rotativo *Oxyz.* Propomo-nos determinar a relação entre estas duas derivadas.



Em primeiro lugar iremos decompor o vector **Q** em componentes segundo os eixos x, y e z do sistema rotativo. Designando por i, j e k os versores correspondentes, escrevemos

$$\vec{Q} = Q_x\vec{i} + Q_y\vec{j} + Q_z\vec{k}$$

Derivando a expressão anterior em ordem ao tempo, e considerando os versores i, j e k como fixos (pois para um observador em *Oxyz* são fixos), obtemos a derivada de **Q** *em relação ao sistema rotativo Oxyz*.

$$\dot{\vec{Q}}_{Oxyz} = \dot{Q}_x\vec{i} + \dot{Q}_y\vec{j} + \dot{Q}_z\vec{k}$$

Para obter a derivada de **Q** *em relação ao sistema fixo OXYZ,* devemos considerar os versores i,j e k como varáveis (móveis) quando derivamos **Q**

$$\dot{\vec{Q}}_{OXYZ} = \frac{d}{dt}[Q_x\vec{i} + Q_y\vec{j} + Q_z\vec{k}] =$$

$$\dot{\vec{Q}}_{OXYZ} = (\dot{Q}_x\vec{i} + Q_x\frac{d\vec{i}}{dt}) + (\dot{Q}_y\vec{j} + Q_y\frac{d\vec{j}}{dt}) + (\dot{Q}_z\vec{k} + Q_z\frac{d\vec{k}}{dt}) =$$

$$\dot{\vec{Q}}_{OXYZ} = \underbrace{(\dot{Q}_x\vec{i} + \dot{Q}_y\vec{j} + \dot{Q}_z\vec{k})}_{=\dot{\vec{Q}}_{Oxyz}} + (Q_x\frac{d\vec{i}}{dt} + Q_y\frac{d\vec{j}}{dt} + Q_z\frac{d\vec{k}}{dt})$$

Observamos que a derivada de $(\dot{Q})_{OXYZ}$ se reduziria aos três últimos termos da expressão anterior se o vector **Q** estivesse fixo dentro do sistema *Oxyz*, uma vez que $(\dot{Q})_{Oxyz}$ seria então nulo. Mas, neste caso, $(\dot{Q})_{OXYZ}$ representaria a velocidade de um ponto material localizado na ponta de **Q** e pertencente a um corpo rigidamente ligado ao sistema *Oxyz*. Então os três últimos termos da referida expressão representam a velocidade desse ponto material; como o sistema *Oxyz* tem uma velocidade angular **Ω** em relação a *OXYZ,* no instante considerado, escrevemos

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{i} \\ \dfrac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{j} \\ \dfrac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{k} \end{array}\right\} \Rightarrow (Q_x\frac{d\vec{i}}{dt} + Q_y\frac{d\vec{j}}{dt} + Q_z\frac{d\vec{k}}{dt}) = \vec{\Omega} \wedge \vec{Q}$$

Sendo assim, obtemos a ***relação fundamental***:

$$\boxed{\dot{\vec{Q}}_{OXYZ} = \dot{\vec{Q}}_{Oxyz} + \vec{\Omega} \wedge \vec{Q}}$$

2.2.1 – Movimento tridimensional de um ponto material em relação a um sistema rotativo. Aceleração de Coriolis

Vimos anteriormente que, uma dada função vectorial **Q**(t) e dois sistemas de referência centrados em *O* — um sistema fixo *OXYZ* e um sistema móvel *Oxyz* — as derivadas de **Q** em relação aos dois sistemas satisfazem a relação

$$\boxed{\dot{\vec{Q}}_{OXYZ} = \dot{\vec{Q}}_{Oxyz} + \vec{\Omega} \wedge \vec{Q}}$$

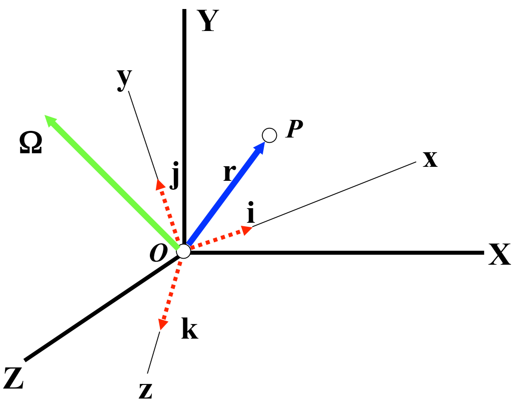
Supusemos, então, que o sistema *Oxyz* fora construído para girar em torno de um eixo fixo OA. Entretanto, a derivada, permanece válida quando o sistema *Oxyz* é obrigado a ter somente um ponto fixo *O*. Sob esta suposição mais geral, o eixo OA representa o eixo *instantâneo* de rotação do sistema *Oxyz, e o vector* **Ω**, a sua velocidade angular no instante considerado.

Consideremos agora o movimento tridimensional de um ponto material P em relação ao sistema rotativo *Oxyz* que tem uma origem fixa *O*. Se o vector **Q** representar o vector posição **r** de um ponto P num dado instante e **Ω** a velocidade angular do sistema *Oxyz* em relação ao sistema fixo *OXYZ* no mesmo instante (ver figura), então a velocidade absoluta $\mathbf{v_P}$ do ponto material é definida como a velocidade observada do sistema fixo *OXYZ* e é igual à derivada $(\dot{r})_{OXYZ}$ de **r** em relação ao sistema.

$$\vec{v}_P = \dot{\vec{r}}_{OXYZ} = \dot{\vec{r}}_{Oxyz} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$$

Mas $\dot{\vec{r}}_{Oxyz}$ define a velocidade $\vec{v}_{P/M}$ do ponto P em relação ao sistema móvel *Oxyz.*

Se considerarmos que o ponto P foi ligado ao sistema móvel, então $\mathbf{v_{P/M}}$ representará a *velocidade relativa*. Por outro lado o termo **Ω ∧ r** representará a velocidade $\mathbf{v_{P'}}$ dum ponto P' do sistema móvel que coincide com P no instante considerado e costuma designar-se por *velocidade de transporte*. Temos, então,



$$\vec{v}_P = \vec{v}_{p'} + \vec{v}_{P/M}$$

onde $\vec{v}_P$ = *velocidade absoluta do ponto material P*

$\vec{v}_{P'}$ = *velocidade do ponto P' do sistema móvel que coincide com P*

$\vec{v}_{P/M}$ = *velocidade de P em relação ao sistema móvel*

A aceleração absoluta $\mathbf{a_P}$ do ponto material é definida como a derivada de $\mathbf{v_P}$ em relação ao sistema fixo *OXYZ*. Calculando as derivadas em relação a *OXYZ* dos termos da relação fundamental, escrevemos

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{v}}_P = \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r} + \Omega \wedge \dot{\vec{r}} + \frac{d}{dt}[\dot{\vec{r}}_{Oxyz}]$$

onde todas as derivadas estão definidas em relação a *OXYZ,* excepto onde for indicado de outro modo. Relembrando a relação fundamental, observamos que o último termo da expressão anterior pode ser expresso como:

$$\frac{d}{dt}[\dot{\vec{r}}_{Oxyz}] = \ddot{\vec{r}}_{Oxyz} + \vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{r}}_{Oxyz}$$

Por outro lado, $\dot{\vec{r}}$ representa a velocidade $\mathbf{v_P}$ e pode ser substituído pelo membro do lado direito da expressão representativa da velocidade absoluta $\mathbf{v_P}$ apresentada anteriormente. Assim, ficará

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge (\dot{\vec{r}}_{Oxyz} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}) + (\ddot{\vec{r}}_{Oxyz} + \vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{r}}_{Oxyz})$$

$$\vec{a}_P = \ddot{\vec{r}}_{Oxyz} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{r}}_{Oxyz}$$

O primeiro termo desta última relação representa a *aceleração relativa* $\mathbf{a_{P/M}}$ do ponto P em relação ao sistema rotativo. A *aceleração de transporte* será a que existir quando a velocidade relativa (e portanto também a aceleração relativa) for nula e corresponde à soma do 2º e 3º termo da expressão anterior e está associada à aceleração $\mathbf{a_{P'}}$ do ponto P' do sistema móvel que coincide com P no instante considerado. Ao termo que "sobra" chama-se "*aceleração complementar ou de Coriolis*" em homenagem ao matemático francês De Coriolis (1792 – 1843).

Note-se que a aceleração de Coriolis só existe se existirem simultaneamente :

$$\rightarrow mov.^{to}\ de\ transporte \quad (\vec{\Omega})$$

$$\rightarrow mov.^{to}\ relativo \quad (\vec{v}_{P/M})$$

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_{p'} + \vec{a}_{P/M} + \vec{a}_c}$$

e se além disso, não for $\vec{\Omega} // \vec{v}_{P/M}$

Exemplo de aplicação: Considere-se um ponto P materializado por uma cursor que se move em translação (parâmetro **s**) com velocidade constante **u** ao longo de uma barra **OB**, que por sua vez gira com velocidade angular constante ω em torno de O e no plano vertical.

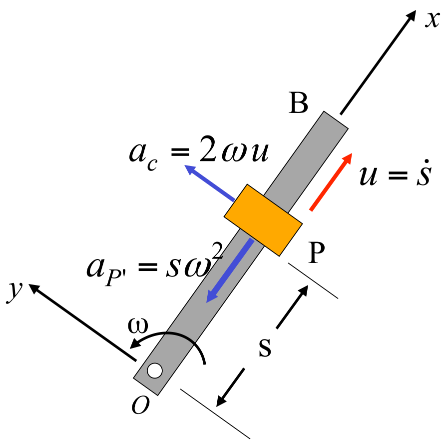
Determinar a aceleração do ponto P.

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_{p'} + \vec{a}_{P/M} + \vec{a}_c}$$

$$\vec{a}_{p'} = \underbrace{\dot{\vec{\omega}}}_{=0} \wedge \overrightarrow{OP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})$$

$$\vec{a}_{P/M} = \vec{0} \quad (pois\ u\ é\ const.)$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P/M}$$



Ficará:

$$\vec{a}_P = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \wedge \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} S \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)}_{=\vec{a}_{P'}} + \underbrace{2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{=\vec{a}_c}$$

$$\vec{a}_P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega S \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 2\omega u \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega^2 S \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 2\omega u \\ 0 \end{Bmatrix}$$

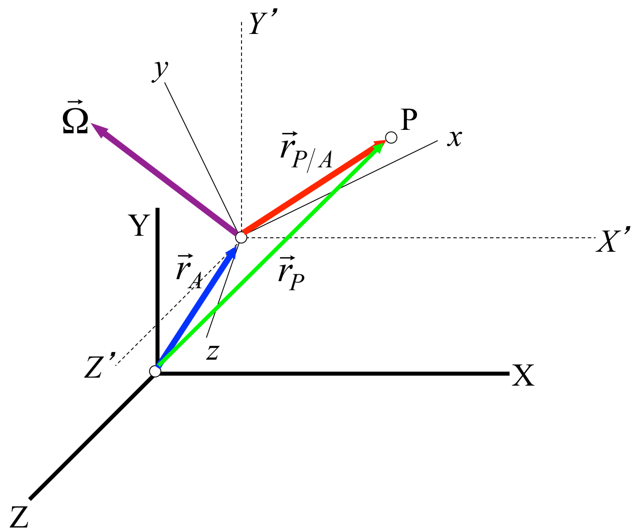
$$\vec{a}_P = \begin{Bmatrix} -\omega^2 S \\ 2\omega u \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2.2.2 – Sistema de referência em movimento geral

Considere-se um sistema fixo de referência *OXYZ* e um sistema *Axyz* que se desloca de maneira conhecida em relação a *OXYZ* (gira e translada). Seja P um ponto material que se movimenta no espaço. A posição de P é definida, em qualquer instante, pelo vecto $\mathbf{r_P}$ no sistema fixo, e pelo vector $\mathbf{r_{p/A}}$ no sistema móvel. Designando por $\mathbf{r_A}$ o vector posição de A no sistema fixo, virá

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_{P/A} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_P = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{r}}_{P/A} = \vec{v}_A + \vec{v}_{P/A}$$



Mas a velocidade $\mathbf{v_{P/A}}$ de P em relação a AX'Y'Z' pode ser obtida aplicando a relação fundamental, bastando substituir o vector **Q** pelo vector $\mathbf{r_{P/A}}$ naquela equação. Assim virá:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \underbrace{\vec{\Omega} \wedge \vec{r}_{P/A} + (\dot{\vec{r}}_{P/A})_{Axyz}}_{=\vec{v}_{P/A}}$$

A aceleração absoluta $\mathbf{a_{P/A}}$ do ponto material é obtida derivando-se a expressão anterior, e escrevemos

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{v}}_P = \dot{\vec{v}}_A + \dot{\vec{v}}_{P/A} \Rightarrow$$

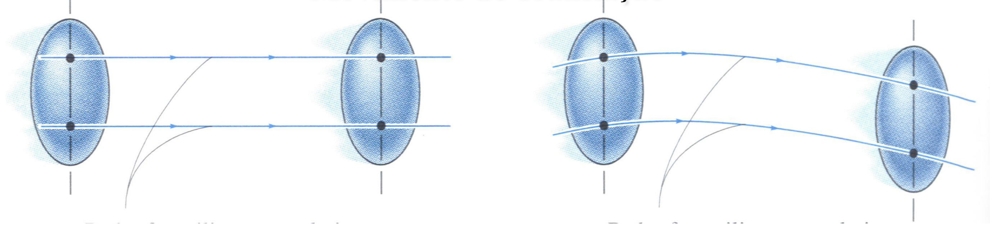
$$\vec{a}_P = \underbrace{\vec{a}_A}_{=\dot{\vec{v}}_A} + \underbrace{\dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r}_{P/A} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}_{P/A}) + 2\vec{\Omega} \wedge (\dot{\vec{r}}_{P/A})_{Axyz} + (\ddot{\vec{r}}_{P/A})_{Axyz}}_{=\dot{\vec{v}}_{P/A}}$$

3 - Cinemática de Corpos Rígidos

3.1 - Movimento no Plano

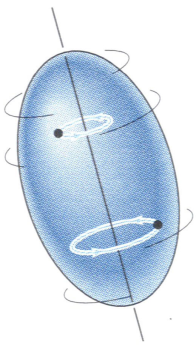
O movimento plano de corpos rígidos pode ser decompostos em três tipos de movimento diferentes, classificados a seguir por ordem crescente de complexidade:

Movimento de Translação

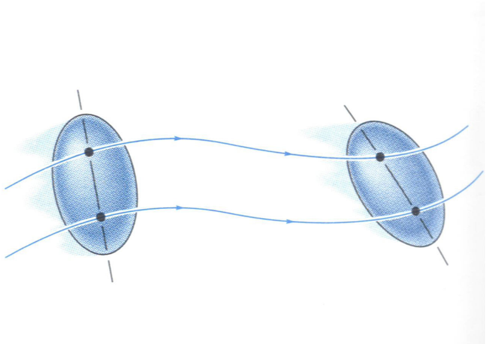


Movimento de Translação: Graficamente regista-se este tipo de movimento quando um qualquer segmento de recta formado por dois pontos do corpo, permanece sempre paralelo e igual ao segmento original durante o movimento sendo a trajectória dos pontos sempre equidistante.

Movimento de rotação em torno de um eixo fixo

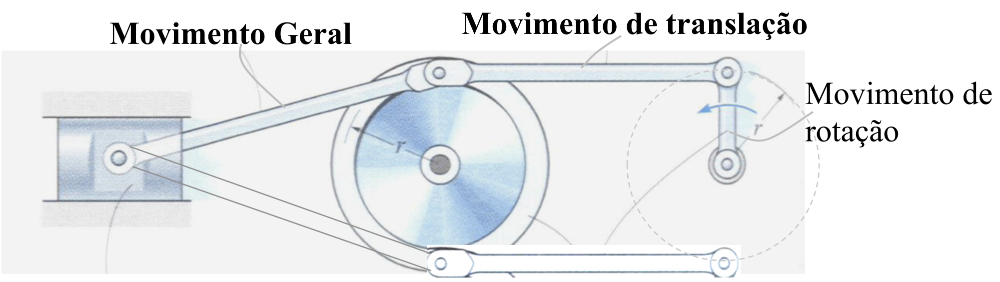


Movimento de Geral no Plano



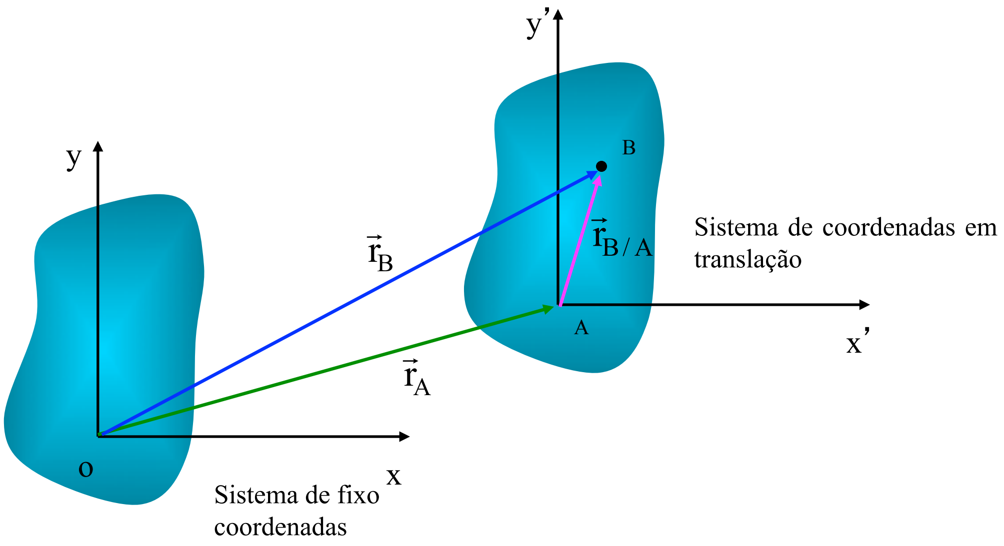
Movimento de rotação em torno de um eixo fixo: No movimento de rotação os pontos não pertencentes ao eixo fixo têm trajectórias circulares.

Movimento Geral no Plano: Quando um corpo está sujeito ao movimento geral no plano, este pode ser sempre decomposto numa combinação de um movimento translação e num movimento de rotação.



Movimento de Translação

Num corpo rígido sujeito a uma translação no plano x o y, a localização dos pontos A e B são definidos para um eixo fixo x,y através dos vectores $\mathbf{r_A}$ e $\mathbf{r_B}$. O sistema em translação de coordenadas x', y' está fixo ao corpo com origem no ponto A.



➢**Posição:** A posição dos pontos A e B são definidas respectivamente, pelos vectores $\mathbf{r_A}$ e $\mathbf{r_B}$. A posição relativa do ponto B em relação ao ponto A é definida pelo vector $\mathbf{r_{B/A}}$. Estes relacionam-se entre si pela seguinte expressão:

$$\boxed{\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}}$$

➢**Velocidade:** A velocidade é determinada pela derivada do respectivo vector posição em ordem ao tempo. Sendo que o vector da velocidade relativa de B em relação a A é nulo, pois o corpo é considerado indeformável.

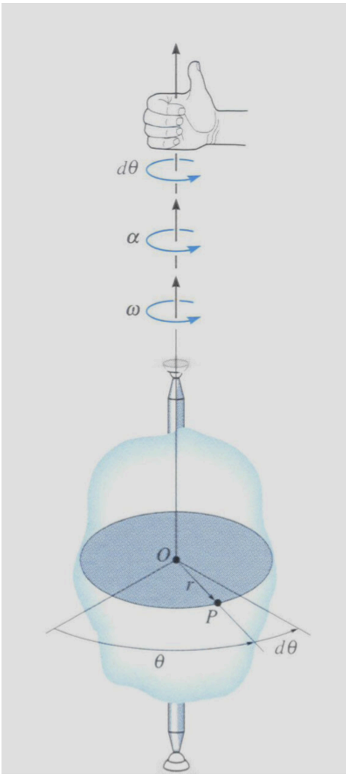
$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A}$$

➢**Aceleração:** A aceleração é calculada a partir da derivada do vector velocidade. Para o movimento de translação é expressa pela seguinte relação.

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A}$$

Movimento de Rotação

No movimento de rotação em torno de um eixo, o movimento dos pontos que formam o corpo é caracterizado pelas seguintes quantidades: *posição angular*, *velocidade angular* e *aceleração angular*:



•Posição angular é definida pela variável dθ [rad]

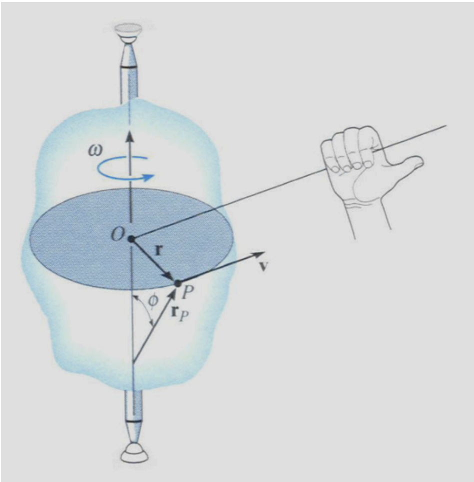
•Vector velocidade angular é definido pela variável **ω** [rad/s] e a relação entre a velocidade e a posição é expressa por:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$$

•Vector aceleração angular é definido pela variável **α** [rad/s^2] e a relação entre as outras quantidades vem definida por:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad \vec{\alpha} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$$

Velocidade Linear- Os pontos que não pertencem ao eixo de rotação possuem velocidade linear que se relaciona com a velocidade angular do corpo. Para um ponto P genérico, a velocidade linear nesse ponto é definida por:

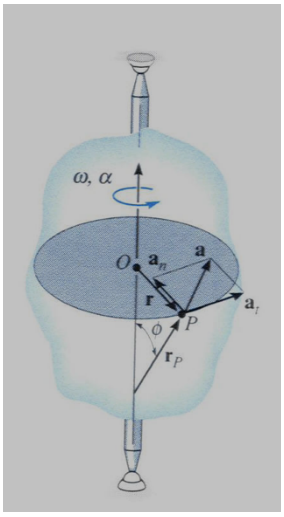


$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P$$

$$\text{em que } \vec{v}_P = \begin{Bmatrix} v_{Px} \\ v_{Py} \\ v_{Pz} \end{Bmatrix}, \vec{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \text{ e } \vec{r}_P = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}$$

A partir do módulo do vector velocidade linear obtemos somente a intensidade da velocidade. No sistema a duas dimensões, a direcção e sentido do vector velocidade podem ser conhecidos a partir da normal ao plano formado pelo vectores velocidade angular **ω** e **r** e por aplicação da regra da mão direita; roda-se o vector velocidade angular **ω** no sentido do vector **r.**

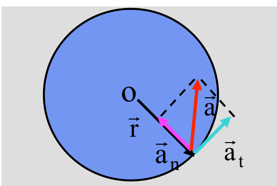


Aceleração Linear- Por conveniência, a aceleração linear de um ponto P que não pertence a esse eixo é decomposto em duas componentes; componente tangencial e componente normal a seguir definidas e representadas nas figuras.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}_P + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}_P}{dt}$$

$$mas\ \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad e \quad \vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_P + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P\right)$$

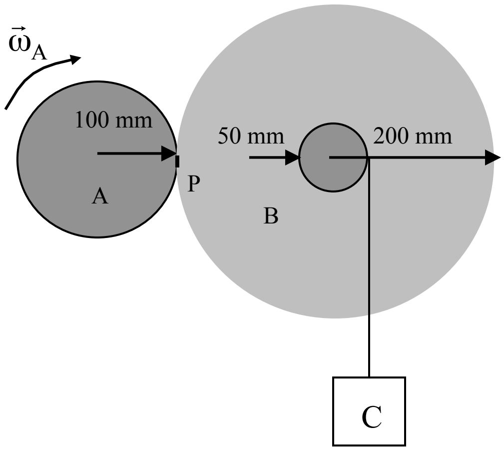


$$a_n = \omega^2 r$$

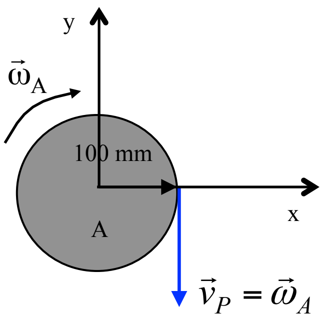
$$a_t = \alpha\, r$$

$$\left\|\vec{a}\right\| = a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

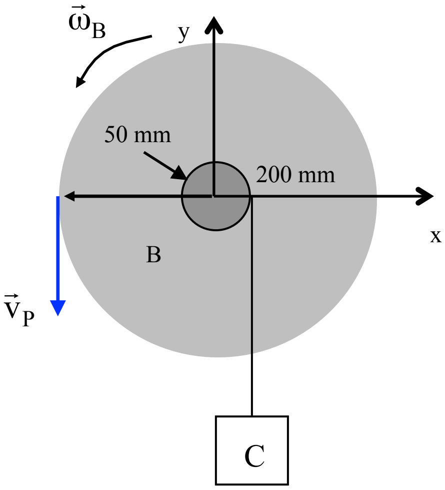
Exemplo: Um sistema de transmissão é constituído por dois discos A e B. O disco A actua sobre o disco B que provoca o enrolamento da corda; com isto faz subir o bloco C. Se inicialmente o disco A tiver velocidade angular de ω_A=8 rad/s e uma desaceleração de α_A = -1.5 rad/s^2, determinar qual a velocidade e aceleração do bloco C ao fim de 2 s .



•Velocidade



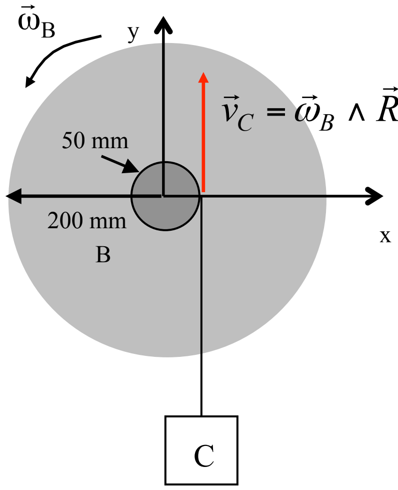
$$\vec{v}_P = \vec{\omega}_A \wedge \vec{R}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.8 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\vec{v}_P = \vec{\omega}_B \wedge \vec{R}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.8 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

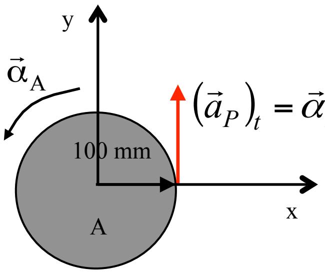
$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -0.8 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_B \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -0.2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} rad/s$$

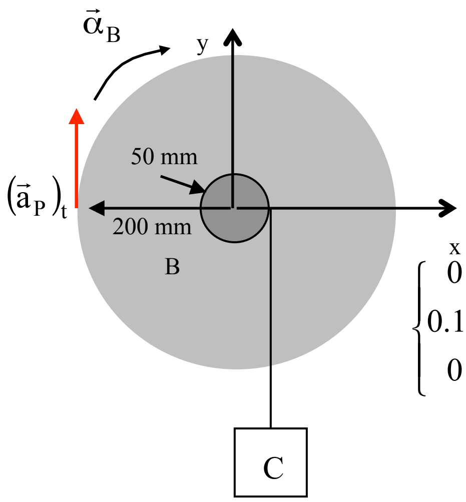


$$\vec{v}_C = \vec{\omega}_B \wedge \vec{R}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0.05 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \end{Bmatrix} m/s$$

•Aceleração



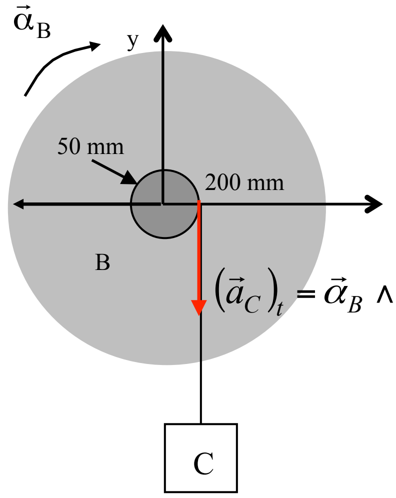
$$(\vec{a}_P)_t = \vec{\alpha}_A \wedge \vec{R}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.15 \\ 0 \end{Bmatrix} m/s^2$$



$$(\vec{a}_P)_t = \vec{\alpha}_B \wedge \vec{R}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.15 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.15 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha_B \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -0.2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \alpha_B = 0.75$$

$$\vec{\alpha}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.75 \end{Bmatrix} \text{rad/s}^2$$



$$\left(\vec{a}_C\right)_t = \vec{\alpha}_B \wedge \vec{R}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.75 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0.05 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.0375 \\ 0 \end{Bmatrix} m/s^2$$

As equações paramétricas para o movimento uniformemente retardado do bloco C podem ser escritas:

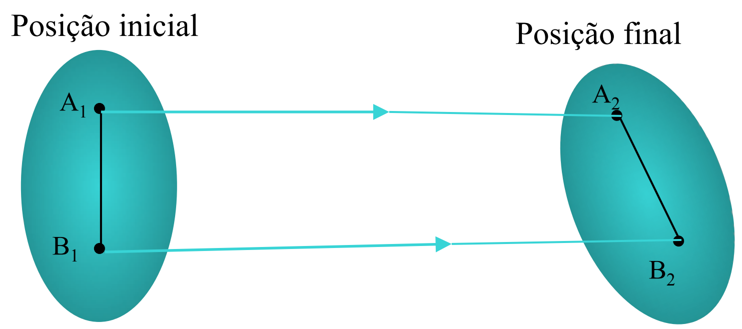
$$\vec{v}_y = \vec{v}_{oy} + \vec{a}_y t$$

$$v_y\Big|_{t=2s} = 0.2 - 0.0375 * (2) = 0.125 m/s$$

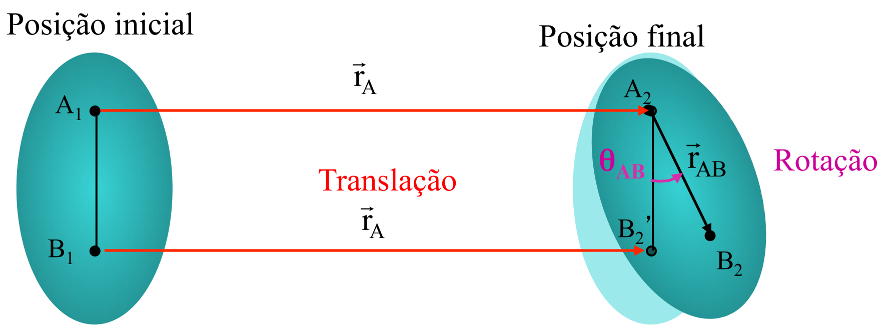
O movimento do bloco é caracterizado por possuir uma aceleração constante durante o movimento, pelo que esta é igual à aceleração inicial e vale:

$$a_y = -0.0375 m/s^2$$

Movimento Geral no Plano



O movimento geral no plano pode ser sempre decomposto no movimento em translação e num movimento relativo de rotação. A partir do exemplo anterior é apresentado graficamente esse princípio.



Na representação anterior o movimento foi decomposto num movimento de translação até fazer coincidir os pontos A_1 com a posição do ponto A_2; de seguida aplicou-se o movimento de rotação em torno do ponto A_2 de forma a obter a configuração da posição final do corpo. Assim pode definir-se o movimento do ponto B como a soma de um movimento de translação mais um movimento relativo em rotação.

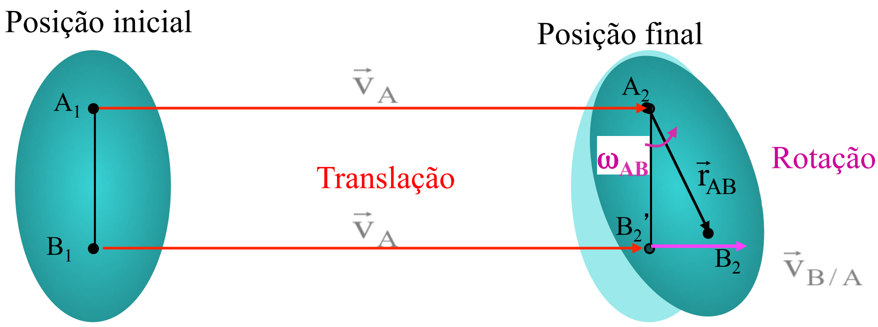
$$\boxed{\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{A/B}}$$

A partir da derivada em ordem ao tempo do vector posição obtêm-se respectivamente para a primeira e segunda derivadas, a expressão da velocidade e da aceleração.

- Velocidade

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{AB}}$$

Na figura seguinte representa-se graficamente as componentes da velocidade absoluta $\mathbf{V_A}$ e da velocidade relativa $\mathbf{V_{B/A}}$.



- Aceleração

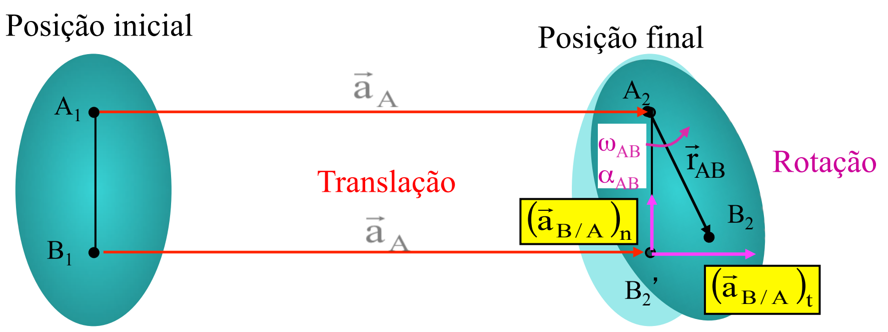
$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{AB}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega}_{AB} \times \left(\vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{AB}\right) = \\ &= \vec{a}_A + \left(\vec{a}_{B/A}\right)_t + \left(\vec{a}_{B/A}\right)_n\end{aligned}}$$

As componentes da aceleração relativa (tangencial e normal) definem-se a seguir:

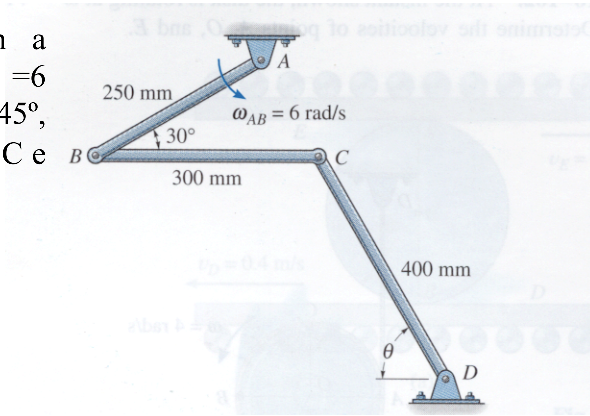
$$\left(\vec{a}_{B/A}\right)_t = \vec{\alpha}_{AB} \times \vec{r}_{AB}$$
$$\left(\vec{a}_{B/A}\right)_n = \vec{\omega}_{AB} \times \left(\vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{AB}\right)$$

Na figura seguinte estão representados graficamente a aceleração absoluta e a aceleração relativa, com componentes tangencial e normal.

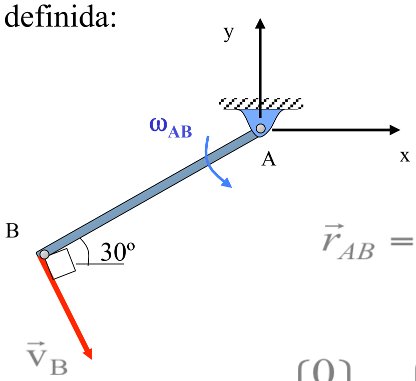


Universidade do Minho
Departamento de Física

A barra AB está a rodar com a velocidade angular constante de ω_{AB} =6 rad/s, Sabendo que o ângulo θ=45º, determine as velocidades angulares BC e CD.



A barra *AB* possui um movimento de rotação em torno do ponto *A*. A velocidade no ponto B é definida decompondo o movimento geral em movimento de translação e no movimento relativo de rotação. Assim a velocidade do ponto B é definida:



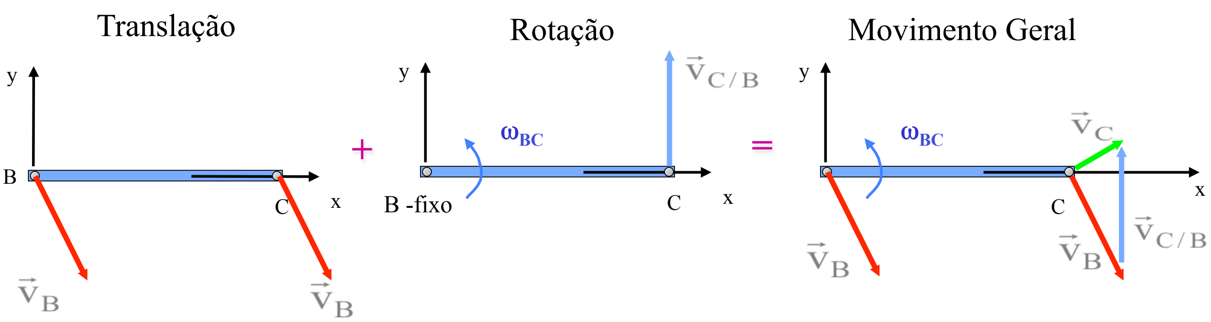
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{r}_{AB}$$

$$\vec{r}_{AB} = \begin{Bmatrix} -0.25 * \cos(30) \\ -0.25 * \sin(30) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.217 \\ -0.125 \\ 0 \end{Bmatrix} m$$

$$\vec{v}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -0.217 \\ -0.125 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.75 \\ -1.302 \\ 0 \end{Bmatrix} m/s$$

A barra *BC* possui movimento geral no plano. A velocidade no ponto C é uma combinação da velocidade de translação de B e uma velocidade relativa de C em relação a B (Velocidade de rotação). Neste caso a velocidade no ponto C é definida da seguinte forma:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{C/B} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \wedge \vec{r}_{BC}$$

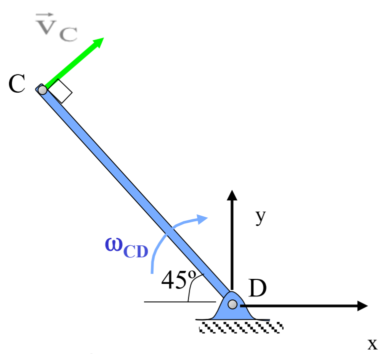


$$\vec{v}_B = \begin{Bmatrix} 0.75 \\ -1.302 \\ 0 \end{Bmatrix} m/s \qquad \vec{\omega}_{BC} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{BC} \end{Bmatrix} rad/s \qquad \vec{r}_{BC} = \begin{Bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} m$$

$$\vec{v}_C = \begin{Bmatrix} 0.75 \\ -1.302 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{BC} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.75 \\ -1.302 + 0.3 * \omega_{BC} \\ 0 \end{Bmatrix} m/s$$

A barra *CD* possui um movimento de rotação no ponto D. A velocidade no ponto C corresponde a uma velocidade de C em relação a D (Velocidade de rotação). Assim pode escrever-se a seguinte expressão:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{v}_{C/D} = \vec{v}_D + \vec{\omega}_{CD} \wedge \vec{r}_{DC}$$



$$\vec{r}_{DC} = \begin{Bmatrix} -0.4 * \cos(45) \\ 0.4 * \sin(45) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.283 \\ 0.283 \\ 0 \end{Bmatrix} m$$

$$\vec{v}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_{DC} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -0.283 \\ 0.283 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.283 * \omega_{CD} \\ 0.283 * \omega_{CD} \\ 0 \end{Bmatrix} m/s$$

Como o ponto C é comum às barras BC e CD, então, este, deve ter as mesmas componentes de velocidade em ambas as barras. Impondo esta condição obtém-se:

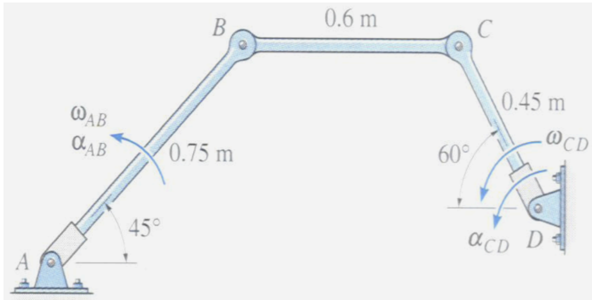
$$\begin{Bmatrix} 0.75 \\ -1.302 + 0.3 * \omega_{BC} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.283 * \omega_{CD} \\ 0.283 * \omega_{CD} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$x : 0.75 = 0.283 * \omega_{CD} \qquad \omega_{CD} = 2.65 rad/s$$

$$y : -1.302 + 0.3 * \omega_{BC} = 0.283 * \omega_{CD} \qquad \omega_{BC} = 6.84 rad/s$$

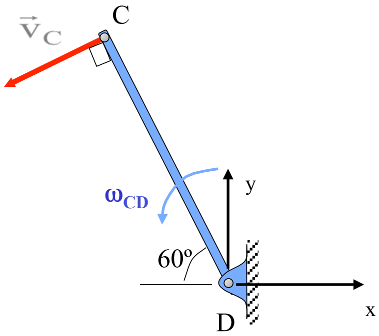
$$\vec{\omega}_{CD} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.65 \end{Bmatrix} rad/s \qquad \vec{\omega}_{BC} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6.84 \end{Bmatrix} rad/s$$

No instante mostrado, a barra *CD* tem uma aceleração angular α_{CD}=5 rad/s^2 e uma velocidade angular ω_{CD}=2 rad/s^2 . Pretende-se saber qual a velocidade e a aceleração angular da barra *AB*.



➢**Velocidade**

A barra CD temi movimento de rotação centrado no ponto D.



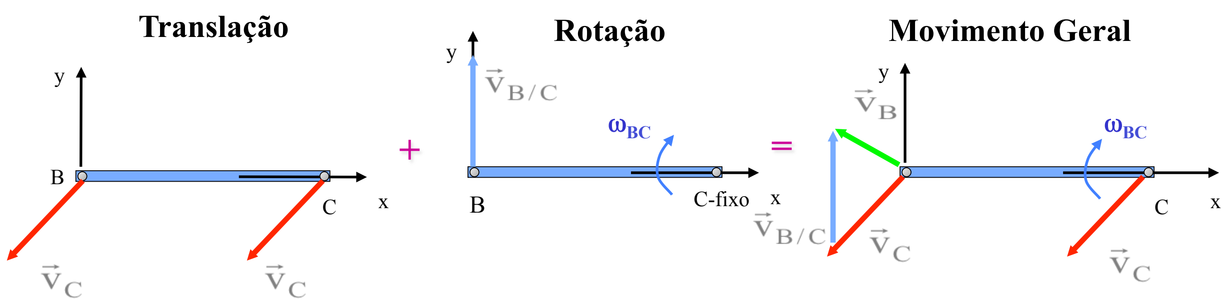
$$\vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{v}_{C/D} = \vec{v}_D + \vec{\omega}_{CD} \wedge \vec{r}_{DC}$$

$$\vec{r}_{DC} = \begin{Bmatrix} -0.45*\cos(60) \\ 0.45*\sin(60) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.225 \\ 0.39 \\ 0 \end{Bmatrix} m$$

$$\vec{v}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -0.225 \\ 0.39 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.8 \\ -0.45 \\ 0 \end{Bmatrix} m/s$$

A barra BC tem movimento geral no plano, (simultaneamente movimento de translação e movimento de rotação).

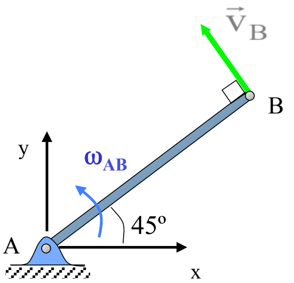
$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{B/C} = \vec{v}_C + \vec{\omega}_{BC} \wedge \vec{r}_{CB}$$



$$\vec{v}_C = \begin{Bmatrix} -0.8 \\ -0.45 \\ 0 \end{Bmatrix} m/s \qquad \vec{\omega}_{BC} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_{BC} \end{Bmatrix} rad/s \qquad \vec{r}_{CB} = \begin{Bmatrix} -0.6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} m$$

$$\vec{v}_B = \begin{Bmatrix} -0.8 \\ -0.45 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_{BC} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -0.6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.8 \\ -0.45 + 0.6 * \omega_{BC} \\ 0 \end{Bmatrix} m/s$$

A barra *AB* sofre um movimento de rotação em torno do ponto *A*.



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{r}_{AB}$$

$$\vec{r}_{AB} = \begin{Bmatrix} 0.75 * \cos(45) \\ 0.75 * \sin(45) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.53 \\ 0.53 \\ 0 \end{Bmatrix} m$$

$$\vec{v}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AB} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0.53 \\ 0.53 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.53 * \omega_{AB} \\ 0.53 * \omega_{AB} \\ 0 \end{Bmatrix} m/s$$

Pela igualdade da velocidade no ponto B entre as barras AB e BC, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} -0.53 * \omega_{AB} \\ 0.53 * \omega_{AB} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.8 \\ -0.45 + 0.6 * \omega_{BC} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$x : -0.53 * \omega_{AB} = -0.8 \qquad \omega_{AB} = 1.51\,\mathrm{rad/s}$$

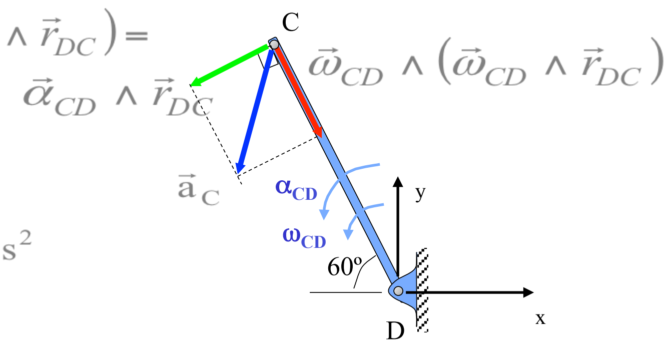
$$y : 0.53 * \omega_{AB} = -0.45 + 0.6 * \omega_{BC} \qquad \omega_{BC} = 2.083\,\mathrm{rad/s}$$

$$\vec{\omega}_{AB} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.51 \end{Bmatrix} \mathrm{rad/s} \qquad \vec{\omega}_{BC} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.083 \end{Bmatrix} \mathrm{rad/s}$$

- **Aceleração**

A barra CD tem movimento de rotação centrado no ponto D.

$$\vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{\alpha}_{CD} \wedge \vec{r}_{DC} + \vec{\omega}_{CD} \wedge \left(\vec{\omega}_{CD} \wedge \vec{r}_{DC}\right) =$$
$$= \vec{a}_D + \left(\vec{a}_{C/D}\right)_t + \left(\vec{a}_{C/D}\right)_n$$



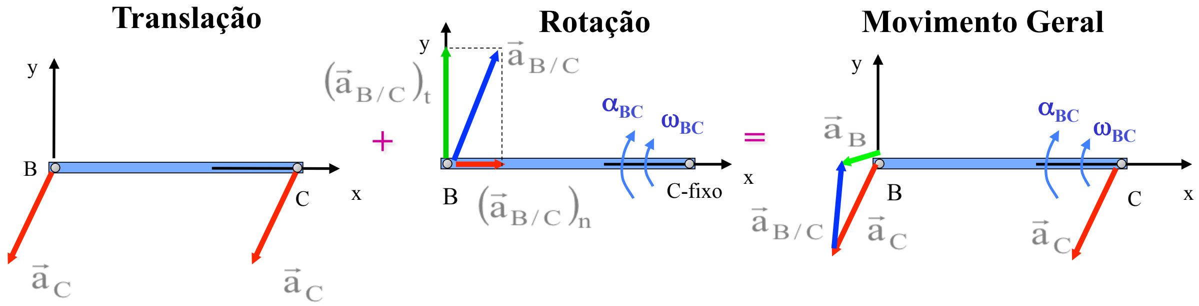
$$\vec{\omega}_{CD} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} \mathrm{rad/s} \qquad \vec{\alpha}_{CD} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{Bmatrix} \mathrm{rad/s^2}$$

$$\vec{a}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -0.225 \\ 0.39 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} \wedge \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -0.225 \\ 0.39 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.95 \\ -1.125 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9 \\ -1.6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.05 \\ -2.725 \\ 0 \end{Bmatrix} m/s^2$$

A barra BC possui movimento geral no plano, simultaneamente movimento de translação e movimento de rotação.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{B/C}$$

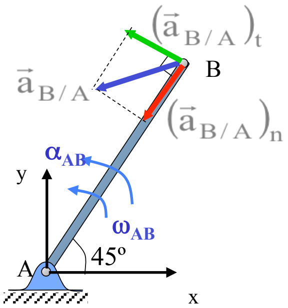


$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_{BC} \wedge \vec{r}_{CB} + \vec{\omega}_{BC} \wedge (\vec{\omega}_{BC} \wedge \vec{r}_{CB})$$

$$\vec{a}_B = \begin{Bmatrix} -1.05 \\ -2.725 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha_{BD} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -0.6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.083 \end{Bmatrix} \wedge \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.083 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -0.6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.05 \\ -2.725 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.6 * \alpha_{BD} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2.6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.55 \\ -2.725 + 0.6 * \alpha_{BD} \\ 0 \end{Bmatrix} m/s^2$$

A barra *AB* tem movimento de rotação em torno do ponto *A*.



$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \wedge \vec{r}_{AB} + \vec{\omega}_{AB} \wedge (\vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{r}_{AB})$$

$$\vec{\omega}_{AB} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.51 \end{Bmatrix} rad/s$$

$$\vec{a}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_{AB} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0.53 \\ 0.53 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.51 \end{Bmatrix} \wedge \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.51 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0.53 \\ 0.53 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.53 * \alpha_{AB} \\ 0.53 * \alpha_{AB} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1.208 \\ -1.208 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.208 - 0.53 * \alpha_{AB} \\ -1.208 + 0.53 * \alpha_{AB} \\ 0 \end{Bmatrix} m/s^2$$

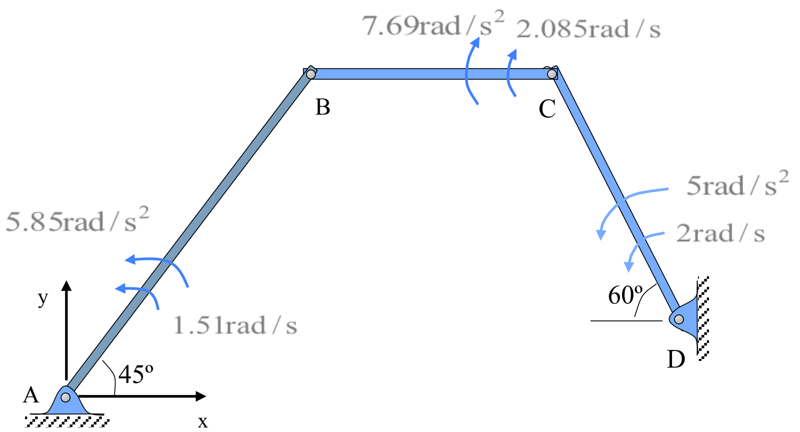
Por igualdade das acelerações no ponto B, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} -1.208 - 0.53 * \alpha_{AB} \\ -1.208 + 0.53 * \alpha_{AB} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.55 \\ -2.725 + 0.6 * \alpha_{BD} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$x: -1.208 - 0.53 * \alpha_{AB} = 1.55 \qquad \alpha_{AB} = 5.85 rad/s^2$$

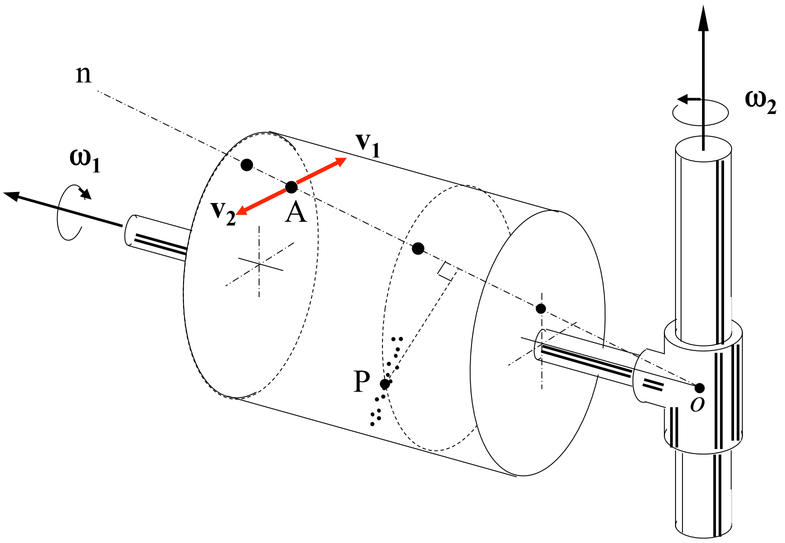
$$y: -1.208 + 0.53 * \alpha_{AB} = -2.725 + 0.6 * \alpha_{BD} \qquad \alpha_{BD} = 7.69 rad/s^2$$

$$\vec{\alpha}_{AB} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.85 \end{Bmatrix} rad/s^2 \; ; \quad \vec{\alpha}_{BC} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7.69 \end{Bmatrix} rad/s^2$$



3.2 - Movimento no espaço ; Rotação em relação a um ponto fixo

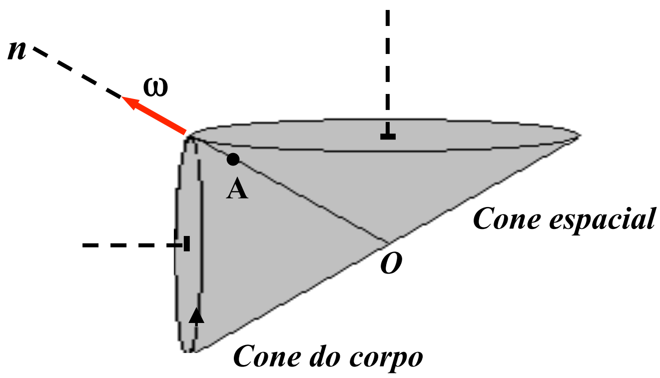
Quando um corpo gira em relação a um ponto fixo (por ex. o movimento de um pião), o vector velocidade angular não permanece fixo. De facto, para qualquer instante de tempo, um corpo com um ponto fixo gira instantaneamente em relação a um eixo que passa pelo ponto fixo (isto já foi referido anteriormente). Para ajudar à visualização do conceito de eixo instantâneo de rotação, daremos um exemplo específico. A figura seguinte representa um rotor cilíndrico, feito de plástico claro, contendo partículas escuras espalhadas por todo o seu volume. O rotor gira em relação ao seu eixo com velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}_1$, e o seu eixo, por sua vez, gira em relação ao eixo vertical fixo com velocidade angular também constante $\boldsymbol{\omega}_2$ nos sentidos indicados.



Se o rotor for fotografado num dado instante durante o seu movimento, a fotografia mostraria uma linha forte de pontos pretos, indicando que a sua velocidade, instantaneamente , seria nula. Tal linha de pontos sem movimento estabelece a posição instantânea do eixo de rotação *O – n.* Qualquer ponto desta linha, tal como A, teria componentes de velocidade iguais e opostas, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ devido a $\boldsymbol{\omega}_2$. Todos os outros pontos, tais como P, apareceriam fora do foco, e o seu movimento mostraria manchas com a forma de pequenos aros circulares em planos perpendiculares ao eixo *O – n.* Sendo assim, todas as partículas excepto aquelas sobre a linha *O – n,* giram em arcos circulares relativamente ao eixo instantâneo de rotação. Se fosse tirada uma sucessão de fotografias, observaríamos que o eixo de rotação seria definido por uma nova série de pontos pretos, e que o eixo teria mudado de posição, tanto no espaço com em relação ao corpo. Resumindo, diremos que para a rotação de um corpo rígido em relação a um ponto fixo, o eixo de rotação não é uma linha fixa no corpo.

3.2.1 – Cones do corpo e espacial

Ainda em relação ao cilindro de plástico, o eixo instantâneo de rotação $O - n$ gira num cone circular recto em relação ao eixo do cilindro designado por *cone do corpo.* Como o cilindro gira também em relação ao eixo vertical, o eixo instantâneo de rotação gera também um cone circular recto em relação ao eixo vertical designado por *cone espacial.* A figura seguinte, caso particular em que as velocidades angulares são constantes, mostra que o cone do corpo rola sobre o cone espacial.

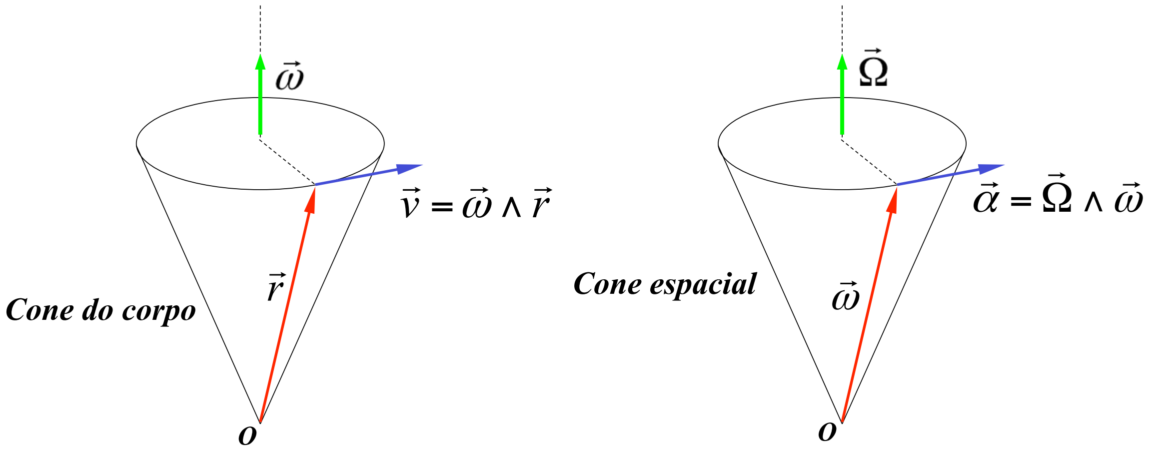


3.2.2 – Aceleração angular

A aceleração angular **α** de um corpo rígido em movimento tridimensional é a derivada em relação ao temo da velocidade angular, **α** = **dω/dt**. Contrastando com o caso de rotação num plano único, em que o escalar α media apenas a *variação no módulo da velocidade angular,* no movimento tridimensional o vector **α** reflecte não só *variação no módulo* mas também a mudança de direcção do vector **ω**. A aceleração angular é um vector que, no caso particular de **ω** ser constante, é perpendicular a **ω**. Com efeito, se fizermos **Ω** representar a velocidade angular com que o vector **ω** propriamente dito gira (isto é, ***precessa***) ao formar o cone espacial, a aceleração angular que mede a variação da direcção do vector **ω** pode ser escrita como:

$$\boxed{\vec{\alpha} = \vec{\Omega} \wedge \vec{\omega}}$$

A única diferença entre o caso de rotação em relação a um eixo fixo e rotação em relação a um ponto fixo reside no facto de que, para a rotação em relação a um ponto fixo, a aceleração angular **α** tem uma componente normal a **ω** devido à variação da direcção de **ω**, bem como uma componente na direcção de **ω**, reflectindo as mudanças no módulo de **ω**. Por outro lado, para a rotação em relação a um eixo fixo, **α** tem apenas componente, ao longo do eixo fixo, reflectindo a variação do módulo de **ω**. Além disso, *pontos do eixo fixo de rotação não têm, obviamente, velocidade nem aceleração.*



Exemplo de aplicação: A carcaça do motor e o seu suporte giram em torno do eixo Z com velocidade angular constante (precesão) dθ/dt = 3 rad/s. O eixo do motor e o disco giram a 8 rad/s em relação à carcaça do motor, na direcção mostrada. Se β for constante e igual a 30º, determine a velocidade e a aceleração do ponto A no topo do disco, e a aceleração angular α do mesmo sabendo que:

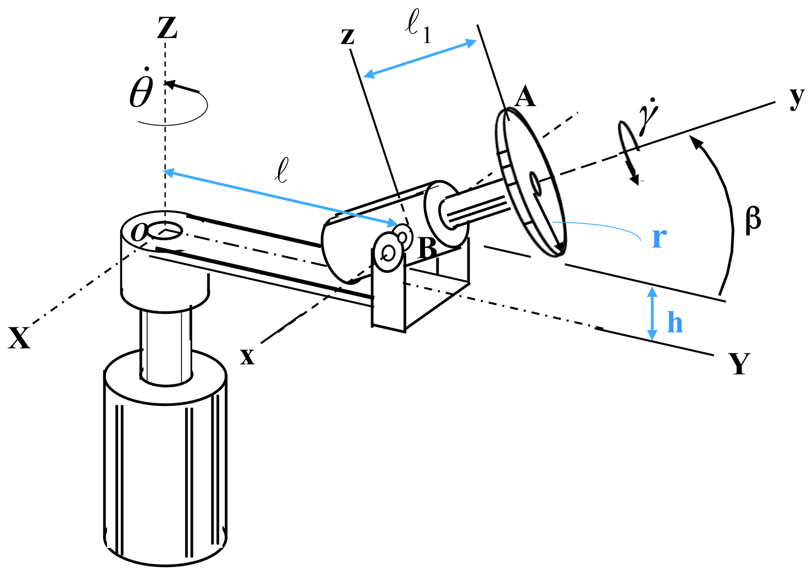
$\ell = 350\ mm$

$\ell_1 = 300\ mm$

$h = 150\ mm$

$r = 120\ mm$

$\dot{\gamma} = 8\ rad/s\,;\dot{\theta} = 3\ rad/s$



Velocidade:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

Na resolução que se segue, iremos projectar todas as grandezas vectoriais no referencial móvel (i.é, o ref$^{al.}$ $Oxyz$) que designaremos por $Ox_2 y_2 z_2$ enquanto que o referencial fixo, (ou seja, o ref$^{al.}$ $OXYZ$) será designado por $Ox_1\ y_1\ z_1$. Sendo assim, a matriz de transformação de coordenadas entre os dois referenciais, ou seja a matriz que projecta o referencial $Ox_1 y_1 z_1$ no referencial $Ox_2 y_2 z_2$ tem a forma:

$$[T_{12}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Além disso designaremos por:

$$\|\vec{\omega}_1\| = \dot{\theta} \ ; \ \|\vec{\omega}_2\| = \dot{\gamma}$$

Assim, Virá:

$$* \, \vec{v}_B = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_B\big|_{S_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ \ell \\ h \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} -\ell\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.05 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$* \, \vec{v}_{A/B} = \vec{\omega}_1\big|_{S_2} \wedge \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_{A/B}$$

onde,

$$\vec{\omega}_1\big|_{S_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}\sin\beta \\ \dot{\theta}\cos\beta \end{Bmatrix}$$

Ficará:

$$*\,\vec{v}_{A/B} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}\sin\beta \\ \dot{\theta}\cos\beta \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ \ell_1 \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ \ell_1 \\ r \end{Bmatrix} =$$

$$\vec{v}_{A/B} = \begin{Bmatrix} r\dot{\theta}\sin\beta - \ell_1\dot{\theta}\cos\beta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r\dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}(r\sin\beta - \ell_1\cos\beta) + r\dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.361 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Logo,

$$\vec{v}_A = \begin{Bmatrix} -1.05 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.361 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.689 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} m/s$$

Aceleração:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$

$$*\,\vec{a}_B = \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_B)\big|_{S_2} =$$

$$\vec{a}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}\sin\beta \\ \dot{\theta}\cos\beta \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -\ell\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\ell\dot{\theta}^2\cos\beta \\ \ell\dot{\theta}^2\sin\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2.728 \\ 1.575 \end{Bmatrix}$$

$$*\,\vec{a}_{A/B} = \underbrace{\vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{A/B})\big|_{S_2}}_{=\vec{a}^{tr}} + \underbrace{\vec{\omega}_2 \wedge (\vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_{A/B})}_{=\vec{a}^{rel}} + \underbrace{2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}^{rel}\big|_{S_2}}_{=\vec{a}^{cor}}$$

$$\vec{a}^{tr} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}\sin\beta \\ \dot{\theta}\cos\beta \end{Bmatrix} \wedge \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}\sin\beta \\ \dot{\theta}\cos\beta \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ \ell_1 \\ r \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}^2(r\sin\beta\cdot\cos\beta - \ell_1\cos^2\beta) \\ \dot{\theta}^2(\ell_1\sin\beta\cdot\cos\beta - r\sin^2\beta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1.56 \\ 0.899 \end{Bmatrix}$$

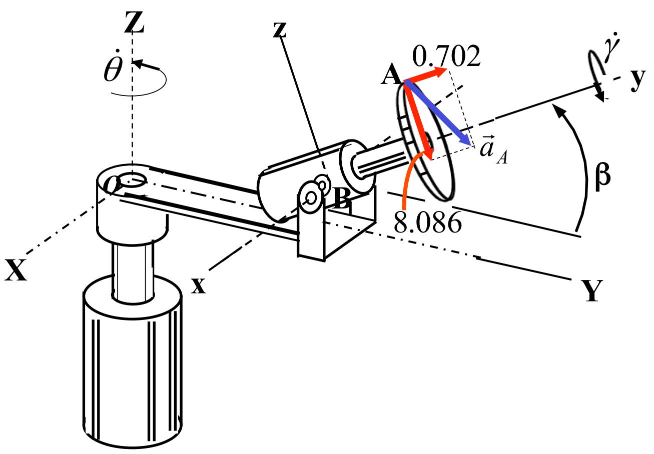
$$*\ \vec{a}^{rel} = \begin{Bmatrix}0\\ \dot{\gamma}\\ 0\end{Bmatrix} \wedge \underbrace{\left(\begin{Bmatrix}0\\ \dot{\gamma}\\ 0\end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix}0\\ \ell_1\\ r\end{Bmatrix}\right)}_{=\vec{v}^{rel}} = \begin{Bmatrix}0\\ \dot{\gamma}\\ 0\end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix}r\dot{\gamma}\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{a}^{rel} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\\ -r\dot{\gamma}^2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\\ -7.68\end{Bmatrix}$$

$$*\ \vec{a}^{cor} = 2\begin{Bmatrix}0\\ \dot{\theta}\sin\beta\\ \dot{\theta}\cos\beta\end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix}r\dot{\gamma}\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 2r\dot{\theta}\dot{\gamma}\cos\beta\\ -2r\dot{\theta}\dot{\gamma}\sin\beta\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 4.99\\ -2.88\end{Bmatrix}$$

Finalmente,

$$\vec{a}_A = \begin{Bmatrix}0\\ -2.728\\ 1.575\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}0\\ -1.56\\ 0.899\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}0\\ 0\\ -7.68\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}0\\ 4.99\\ -2.88\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0.702\\ -8.086\end{Bmatrix} m/s^2$$

$$\|\vec{a}_A\| = \sqrt{(0.702)^2 + (-8.086)^2} = 8.12\ m/s^2$$



Aceleração angular:

$$\vec{\alpha} = \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)\big|_{S_2} =$$

$$\vec{\alpha} = \begin{Bmatrix}0\\ \dot{\theta}\sin\beta\\ \dot{\theta}\cos\beta\end{Bmatrix} \wedge \left(\begin{Bmatrix}0\\ \dot{\theta}\sin\beta\\ \dot{\theta}\cos\beta\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}0\\ \dot{\gamma}\\ 0\end{Bmatrix}\right) =$$

$$\vec{\alpha} = \begin{Bmatrix}-\dot{\theta}\dot{\gamma}\cos\beta\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-20.8\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} m/s^2$$

4 – Cinemática de massas

4.1 - Introdução

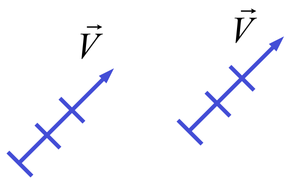
Para o estudo da dinâmica do sólido, que constitui o objectivo final desta disciplina, vai ser necessário estabelecer as relações que existem entre forças aplicadas aos sólidos e os movimentos que estes vão ter. Nestas relações intervêm, directa ou indirectamente, a massa, o modo como esta se distribui no espaço e as distribuições espaciais de velocidades e acelerações dos sistemas materiais.

Caracterizar-se-ão, neste capítulo, os sistemas de vectores "*quantidade de movimento*" e "*quantidade de aceleração*", em cuja definição intervém a massa e a velocidade ou aceleração, respectivamente. Caracterizar-se-á ainda a "*energia cinética*" dos sistemas materiais. A compreensão deste capítulo é fulcral para o domínio das matérias que se lhe seguirão.

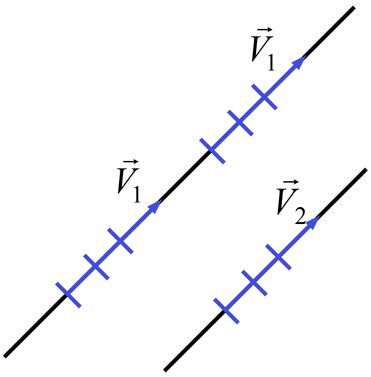
4.2 – Torsor das quantidades de Movimento

4.2.1 - Definições

Por vezes interessa considerar apenas a grandeza, direcção e sentido de um vector. Diz-se então que este é um ***vector livre***.



Outras vezes, interessa saber também qual a recta suporte do vector.



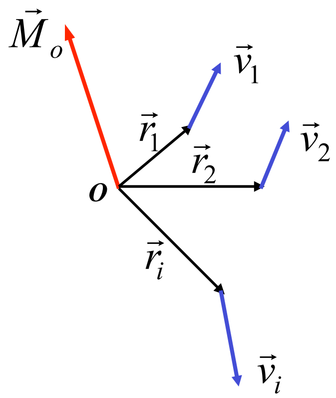
Os vectores $\mathbf{V_1}$ são o "*mesmo vector*"; $\mathbf{V_1}$ e $\mathbf{V_2}$ são "*equipolentes*" , ou "*iguais*" mas não são o "*mesmo*" vector. Designam-se tais vectores por *vectores deslizantes*. A um conjunto de vectores deslizantes chama-se ***torsor***. Outras vezes ainda, interessa (não só a grandeza, direcção, sentido e recta suporte, mas também) o *ponto de aplicação* (por ex., no estudo da deformação de um sólido: a sua deformação depende do ponto de aplicação da força).

Interessa agora definir os *elementos característicos de um torsor*. Considere-se um torsor (conjunto de forças, ou velocidades, p.ex.) e um ponto O no espaço. Sejam $\mathbf{V_i}$ o conjunto de vectores deslizantes que constituem o torsor. Chama-se *vector principal, ou vector soma*, **V** do torsor ao vector livre definido por:

$$\vec{V} = \sum_i \vec{v}_i$$

Chama-se *momento resultante em relação a O* $\mathbf{M_o}$ ao vector cuja linha de acção passa em O e tal que

$$\vec{M}_o = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i = \sum_i M_o(\vec{v}_i)$$

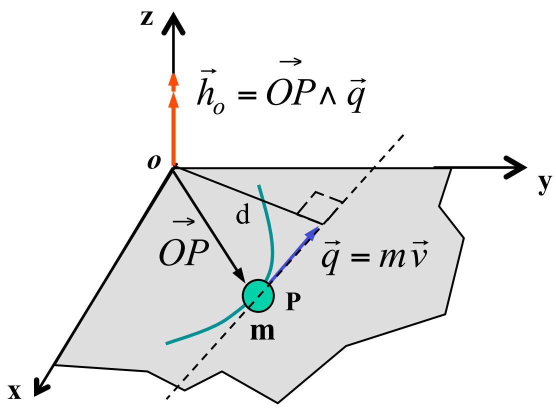


$\vec{V}$ e $\vec{M}_o$ são os elementos característicos dos torsor em O.

A – Ponto material isolado

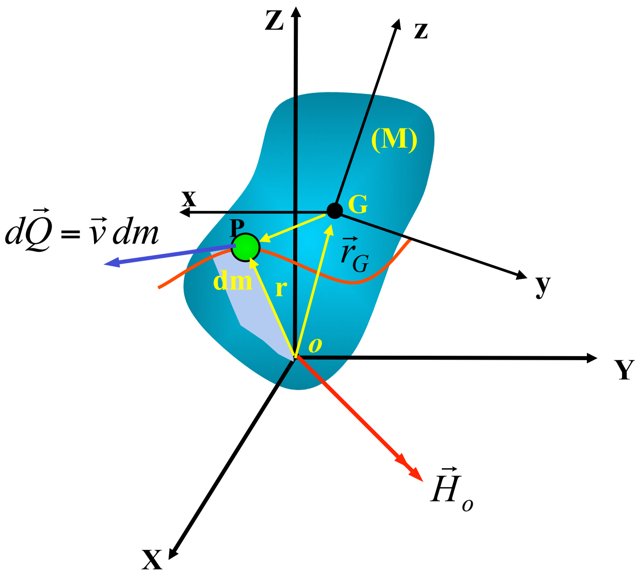
No caso de o vector genérico que tem vindo a ser apresentado, se tratar da velocidade de um ponto material P, então define-se "*quantidade de movimento*" de um ponto material, como um vector proporcional à sua velocidade, sendo a massa o factor de proporcionalidade.

Define-se "*momento cinético*" de um ponto material em relação a um dado pólo (ponto O), como o momento em relação a esse pólo, do vector quantidade de movimento acima definido.



B – Sistema material contínuo (rígido)

Para uma distribuição contínua de massa, admite-se que os sistemas são constituídos por um número infinito de pontos materiais discretos, aos quais se associa uma massa elementar "dm". Os vectores *quantidade de movimento* e *momento cinético* num ponto, terão definição análoga, apenas substituindo o somatório (sistema discreto de pontos materiais) por um integral estendido à massa total do sistema material.



$$\vec{Q} = \int_M \vec{v}\, dm$$

$$\vec{H}_o = \int_M \vec{OP} \wedge \vec{v}\, dm = \int_M (\vec{OG} + \vec{GP}) \wedge \vec{v}\, dm$$

Vector quantidade de movimento - $\vec{Q}$

$$\vec{Q} = \int_M \vec{v}\, dm = \int_M (\vec{v}_G + \vec{v}_{P/G})\, dm = \int_M (\vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{GP})\, dm =$$

$$\vec{Q} = \int_M \vec{v}_G\, dm + \int_M \vec{\omega} \wedge \vec{GP}\, dm =$$

$$\vec{Q} = \vec{v}_G \int_M dm + \vec{\omega} \wedge \int_M \vec{GP}\, dm = M\, \vec{v}_G$$

Nota :

$\int_M \vec{GP}\, dm = \vec{0} \rightarrow$ *momento estático relativamente ao centro de massa*

$\int_M dm = M$

Conclusão : Qualquer que seja o tipo de distribuição de massa, teremos sempre

$$\vec{Q} = M\, \vec{v}_G$$

Vector momento cinético em O - $\vec{H}_o$

$$\vec{H}_o = \int_M \vec{OP} \wedge \vec{v}\, dm$$

$$= \int_M (\vec{OG} + \vec{GP}) \wedge (\vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{GP})\, dm$$

$$= \int_M \vec{OG} \wedge \vec{v}_G\, dm + \int_M \vec{OG} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{GP})\, dm + \int_M \vec{GP} \wedge \vec{v}_G\, dm$$

$$+ \int_M \vec{GP} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{GP})\, dm$$

$$= \vec{OG} \wedge \vec{v}_G \int_M dm + \vec{OG} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \int_M \vec{GP}\, dm\right) + \left(\int_M \vec{GP}\, dm\right) \wedge \vec{v}_G$$

$$+ \int_M \vec{GP} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{GP})\, dm$$

$$= \vec{OG} \wedge M\, \vec{v}_G + \int_M \vec{GP} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{GP})\, dm$$

no entanto,

$$\int_M \vec{GP} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{GP})\, dm = \int_M \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \wedge \left(\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \right) dm$$

contudo,

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \wedge \left(\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} z\omega_y - y\omega_z \\ x\omega_z - z\omega_x \\ y\omega_x - x\omega_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (y^2 + z^2)\omega_x - x\,y\,\omega_y - x\,z\,\omega_z \\ -y\,x\,\omega_x + (x^2 + z^2)\omega_y - y\,z\,\omega_z \\ -z\,x\,\omega_x - z\,y\,\omega_y + (x^2 + y^2)\omega_z \end{Bmatrix}$$

mas,

$$\int_M (y^2 + z^2)\, dm = I_{xx} \quad ; \quad -\int_M x\,y\, dm = -\int_M y\,x\, dm = -I_{xy}$$

$$\int_M (x^2 + z^2)\, dm = I_{yy} \quad ; \quad -\int_M x\,z\, dm = -\int_M z\,x\, dm = -I_{xz}$$

$$\int_M (x^2 + y^2)\, dm = I_{zz} \quad ; \quad -\int_M y\,z\, dm = -\int_M z\,y\, dm = -I_{yz}$$

virá

$$\int_M \vec{GP} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{GP})\, dm = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = [I_G]\{\omega\}$$

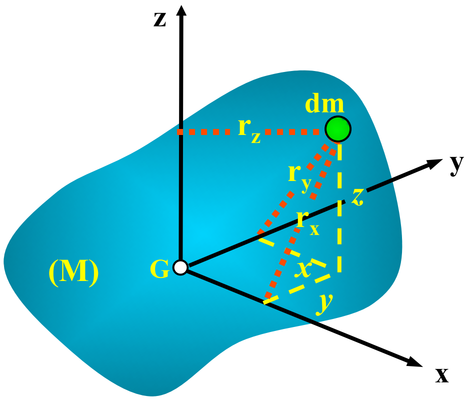
Assim, ficará:

$$\vec{H}_o = [I_G]\{\omega\} + \overrightarrow{OG} \wedge M\,\vec{v}_G$$

$$ou$$

$$\vec{H}_o = \underbrace{[I_G]\{\omega\}}_{=\vec{H}_G} + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{Q} \quad ,ou \quad \vec{H}_o = \vec{H}_G + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{Q}$$

$$I_{xx} = \int r_x^2\, dm = \int (y^2 + z^2)\, dm$$
$$I_{yy} = \int r_y^2\, dm = \int (x^2 + z^2)\, dm$$
$$I_{zz} = \int r_z^2\, dm = \int (x^2 + y^2)\, dm$$



O momento cinético de um sistema contínuo, num dado ponto *O,* pode ser obtido pela soma das seguintes duas parcelas:

1ª resulta da multiplicação da matriz de inércia do sistema, definida no seu centro de massa $[I_G]$, pelo vector velocidade angular (caso o corpo esteja a a rodar em torno de um eixo que passe por G, obviamente).

2ª é o produto vectorial do vector posição do centro de massa **OG**, pelo vector quantidade de movimento do sistema **Q**.

Este resultado já era esperado. Com efeito, conhecido o vector principal e o vector momento em *G* de um sistema de vectores deslizantes, podemos calcular o vector momento num outro ponto qualquer, utilizando a expressão fundamental dos campos dos momentos que acabou de se escrever. Tal equação traduz o conhecido ***primeiro teorema de Koenig*** e é de uso muito frequente no cálculo de vectores momento cinético.

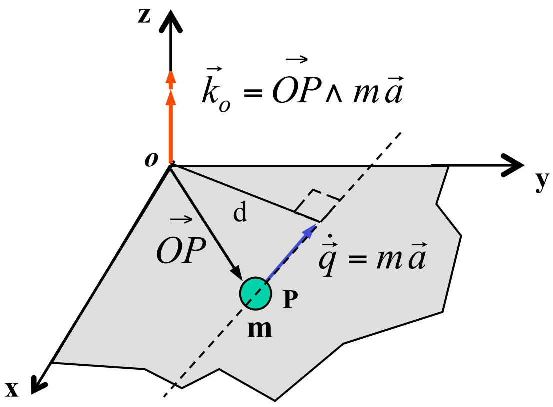
4.3 – Torsor das quantidades de aceleração

4.3.1 - Definições

A – Ponto material isolado

Define-se "quantidade de aceleração" de um ponto material P, como um vector igual ao produto da massa pelo seu vector aceleração.

O momento em relação a um dado ponto *O* desse vector, chama-se "***momento dinâmico* em *O***" do ponto material P.

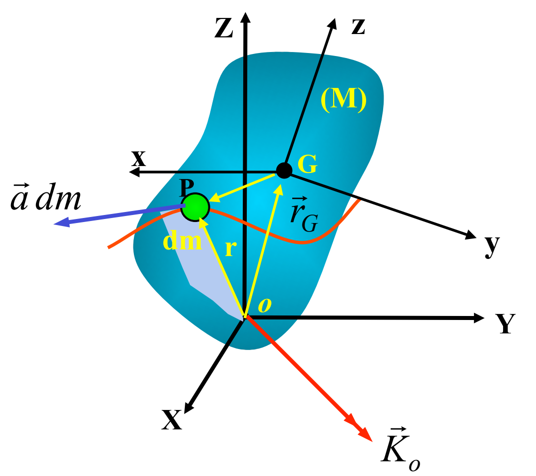


B – Sistema material contínuo

Numa distribuição contínua de massa, o torsor das quantidades de aceleração terá definição semelhante, bastando apenas substituir um somatório (associado à contribuição de vários pontos materiais) por um integral estendido a toda a massa.

$$\dot{\vec{Q}} = \int_M \vec{a}\,dm$$

$$\vec{K}_o = \int_M \overrightarrow{OP} \wedge \vec{a}\,dm$$



4.3.2 – Vector quantidade de aceleração - $\dot{\vec{Q}}$

Qualquer que seja o tipo de distribuição de massa (discreta ou contínua), é sempre possível calcular o vector principal deste torsor, multiplicando a massa total pela aceleração do centro de massa. Com efeito, tem-se:

$$\dot{\vec{Q}} = \int_M \vec{a}\,dm = \int_M \frac{d}{dt}(\vec{v}\,dm) = \frac{d}{dt}\int_M \vec{v}\,dm = \frac{d}{dt}(M\,\vec{v}_G) = M\,\vec{a}_G$$

4.3.3 – Vector momento dinâmico em *O* - $\vec{K}_o$

$$\vec{K}_o = \int_M \overrightarrow{OP} \wedge \vec{a}\,dm$$

contudo,

$$\overrightarrow{OP} = (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}) \quad ; \quad \vec{a} = (\vec{a}_G + \vec{a}_{P/G})$$

então,

$$\vec{K}_o = \int_M (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}) \wedge (\vec{a}_G + \vec{a}_{P/G})\,dm = \int_M (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}) \wedge [\vec{a}_G + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{GP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GP})]\,dm$$

$$= \overrightarrow{OG} \wedge \vec{a}_G \int_M dm + \overrightarrow{OG} \wedge \dot{\vec{\omega}} \wedge \int_M \overrightarrow{GP}\,dm + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \int_M \overrightarrow{GP}\,dm\right) +$$

$$+ \left(\int_M \overrightarrow{GP}\,dm\right) \wedge \vec{a}_G + \int_M \overrightarrow{GP} \wedge (\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{GP})\,dm + \int_M \overrightarrow{GP} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GP})]\,dm =$$

$$= \overrightarrow{OG} \wedge M\,\vec{a}_G + \underbrace{\frac{d}{dt}\int_M \overrightarrow{GP} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GP})\,dm}_{=\vec{K}_G}$$

$$Nota: \quad \int_M \overrightarrow{GP}\,dm = \vec{0}$$

$$\int_M \overrightarrow{GP} \wedge (\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{GP})\,dm + \int_M \overrightarrow{GP} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GP})]\,dm = \frac{d}{dt}\int_M \overrightarrow{GP} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GP})\,dm$$

Então,

$$\boxed{\vec{K}_0 = \underbrace{\vec{K}_G}_{=\dot{\vec{H}}_G} + \overrightarrow{OG} \wedge M\,\vec{a}_G}$$

Esta última expressão, traduz o ***2º teorema de Koenig*** e é muito utilizada no cálculo dos momentos dinâmicos como se verá adiante. Caso o sistema material seja constituído por uma associação de corpos rígidos, poderá calcular-se o momento cinético e o dinâmico de cada um deles no respectivo centro de massa, transpô-lo para o mesmo ponto e fazer então o respectivo somatório, obtendo-se assim os momentos cinético e dinâmico do corpo como um todo.

4.3.4 – Componentes do vector momento dinâmico em G, de um sólido rígido

No caso mais geral, teremos a seguinte situação:

$$\vec{H}_G = [I_G]\{\omega\} \quad ; \quad [I_G] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad ; \{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$

Admitindo como opção lógica, que o referencial *Gxyz* é tal que a matriz de inércia é constante (em geral este referencial estará rigidamente ligado ao sólido), obtém-se:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_M \vec{GP} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{GP})]dm}_{=\vec{K}_G=\dot{\vec{H}}_G} = \underbrace{\int_M \vec{GP} \wedge (\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{GP})dm}_{=[I_G]\{\dot{\omega}\}} + \underbrace{\int_M \vec{GP} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{GP})]dm}_{=\{\omega\}\wedge([I_G]\{\omega\})}$$

$$\vec{K}_G = [I_G]\{\dot{\omega}\} + \{\omega\} \wedge ([I_G]\{\omega\})$$

No caso particular de o referencial *Gxyz* corresponder aos eixos centrais principais de inércia do sólido, então

$$[I_G] = \begin{bmatrix} I_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_1} \end{bmatrix}$$

4.4 – Energia cinética de um sistema material

4.4.1 - Generalidades

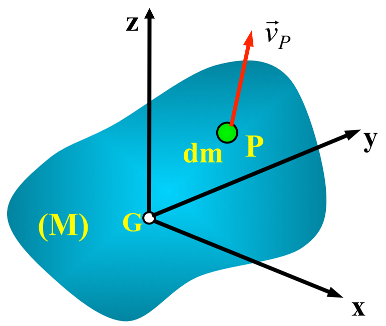
A energia cinética, energia acumulada por um corpo em movimento, pode ser encarada, como mais tarde se verá, como uma *função potencial* de que derivam as chamadas "forças de inércia" associadas a esse corpo.

Trata-se de uma grandeza escalar, cuja definição matemática, no âmbito do ponto material, já é de todos conhecida:

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

Mais adiante, quando os conceitos de trabalho e energia forem estudados, esta expressão será justificada. Num ***sistema contínuo***, consideram-se um número infinito de pontos materiais, cuja energia cinética global será:

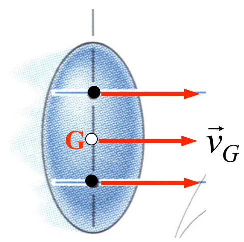
$$T = \frac{1}{2} \int_M v^2 dm$$



4.4.2 – Energia cinética de um sólido em translação

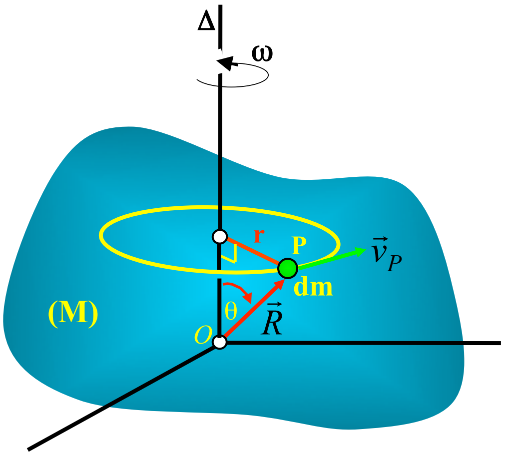
$$T = \frac{1}{2} \int_M \vec{v}_G^2\, dm = \frac{1}{2} \vec{v}_G^2 \int_M dm = \frac{1}{2} M\, \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G =$$

$$= \frac{1}{2} M \{v_{G_x}, \quad v_{G_y}, \quad v_{G_z}\} \begin{Bmatrix} v_{G_x} \\ v_{G_y} \\ v_{G_z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} M \underbrace{\left(v_{G_x}^2 + v_{G_y}^2 + v_{G_z}^2 \right)}_{= v_G^2}$$



A energia cinética de um sólido em translação é exactamente igual à energia que um ponto material desse sólido (i.é, o centro de massa) teria, se nele estivesse concentrada toda a sua massa M.

4.4.2 – Energia cinética de um sólido em rotação



$$T = \frac{1}{2}\int_M (\vec{\omega} \wedge \vec{OP})\cdot(\vec{\omega} \wedge \vec{OP})\, dm =$$

$$= \frac{1}{2}\int_M (\omega R \sin\theta)^2\, dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int_M r^2\, dm$$

$$T = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$$

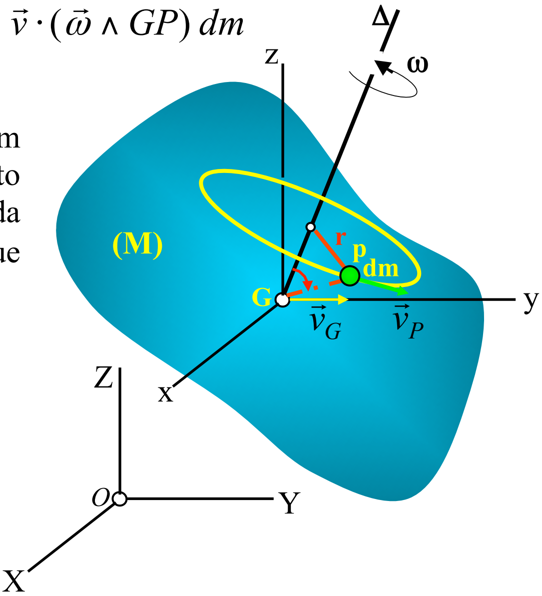
A expressão de cálculo da energia cinética é agora formalmente idêntica à correspondente ao movimento de translação, sendo a massa substituída pelo momento de inércia em relação ao eixo de rotação e a velocidade linear pelo vector velocidade angular ou vector rotação **ω**.

4.4.3 – Energia cinética de um sólido em movimento qualquer

Um movimento arbitrário de um corpo rígido pode ser sempre decomposto na soma de um movimento de translação com o centro de massa, com um movimento de rotação em torno deste ponto. Fazendo esta decomposição de movimentos, a expressão de cálculo da energia cinética toma a forma

$$T = \frac{1}{2}\int_M (\vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{GP})\cdot(\vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{GP})\, dm =$$

$$= \frac{1}{2}\int_M v_G^2\, dm + \frac{1}{2}\int_M (\vec{\omega} \wedge \vec{GP})\cdot(\vec{\omega} \wedge \vec{GP})\, dm + \int_M \vec{v}\cdot(\vec{\omega} \wedge \vec{GP})\, dm$$



Atendendo a que, na última parcela, $\mathbf{v}_G$ e **ω** são constantes em relação à massa, esta anula-se, visto conter o factor "momento estático em ralação ao centro de massa". A primeira e segunda parcelas podem ser transformadas de modo semelhante ao que foi feito na secção anterior. Assim,

$$\int_M v_G^2\, dm = v_G^2 \int_M dm = M\, v_G^2$$

$$\int_M (\vec{\omega} \wedge \vec{GP})\cdot(\vec{\omega} \wedge \vec{GP})\, dm = \omega^2 \int_M r^2 dm = I_{\Delta G}\, \omega^2$$

dando origem à seguinte forma de cálculo da energia cinética,

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M\, v_G^2 + \frac{1}{2} I_{\Delta G}\, \omega^2}$$

Esta expressão traduz o "3º Teorema de Koenig" e permite decompor a energia cinética de um sólido com movimento qualquer, em apenas duas parcelas: a energia correspondente à translação do centro de massa e a energia de rotação em torno do centro de massa.

É importante referir que, para efeitos de cálculo, a parcela referente à energia de rotação o momento de inércia $I_{\Delta G}$, deverá ser obtido a partir de momentos e produtos de inércia em relação aos eixos baricentricos *Gxyz* que passam pelo ponto G, do eixo de rotação. Com efeito, tem-se

$$\frac{1}{2} I_{\Delta G}\, \omega^2 = \frac{1}{2}\left(I_{\Delta G}\, \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{\omega} \cdot \left[I_G\right]\{\vec{\omega}\}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\omega_x, \omega_y, \omega_z\right\} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\omega_x, \omega_y, \omega_z\right\} \begin{Bmatrix} I_{xx}\,\omega_x - I_{xy}\,\omega_y - I_{xz}\,\omega_z \\ -I_{xy}\,\omega_x + I_{yy}\,\omega_y - I_{yz}\,\omega_z \\ -I_{xz}\,\omega_x - I_{yz}\,\omega_y + I_{zz}\,\omega_z \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} I_{xx}\,\omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy}\,\omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz}\,\omega_z^2 - I_{xy}\,\omega_x\,\omega_y - I_{yz}\,\omega_y\,\omega_z - I_{xz}\,\omega_x\,\omega_z$$

ou numa forma mais compacta:

$$\frac{1}{2} I_{\Delta G}\, \omega^2 = \frac{1}{2}\{\omega\}^t \left[I_G\right]\{\omega\}$$

Ou seja, tudo se passa como se houvesse uma projecção do vector momento cinético (**[I]** {ω}) na direcção do vector **ω** (obviamente colinear com o eixo de rotação). De facto, conhecida a matriz de inércia de um sólido, se quisermos obter o valor do seu momento de inércia ($\mathbf{I_\Delta}$), na direcção de um dado eixo que tenha como co-senos directores **l,m,n**, faremos:

$$I_\Delta = \{\vec{\lambda}\}^t \left[I\right] \{\vec{\lambda}\}$$

Onde o vector $\vec{\lambda}$, corresponde ao versor da direcção do eixo Δ, e que tem as seguintes componentes:

$$\vec{\lambda} = l\,\vec{i} + m\,\vec{j} + n\,\vec{k}$$
$$l = \cos\theta_x \;;\; m = \cos\theta_y \;;\; n = \cos\theta_z$$

Deste modo o ***3º Teorema de Koenig*** pode ser escrito da modo mais compacto na seguinte forma:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M\,\vec{v}_G \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2}\{\omega\}^t \left[I_G\right]\{\omega\}}$$

Exemplo de aplicação:

O sistema mecânico representado na figura é constituído por:

Corpo 1 – Um veio de raio **r**, comprimento ℓ e massa $\mathbf{m_1}$, apoiado em duas chumaceiras planas **A** e **B** , que sob a acção de momento motor $\mathbf{M_m}$ roda em torno de um eixo horizontal $\mathbf{X_0}$ com velocidade angular $\dot{\theta}$ e aceleração angular $\ddot{\theta}$ ·

Corpo 2 – Um disco de raio **R**, comprimento **d** e massa $\mathbf{m_2}$, rigidamente ligado ao corpo 1 no ponto *O*.

Suponha conhecidas as matrizes de inéricia dos dois corpos, em relação a eixos centrais principais de inércia. Determine:

a) O torsor das Quantidades de Aceleração de cada corpo no respectivo centro de massa;

b) O torsor das Quantidades de Aceleração do mecanismo no ponto *O*;

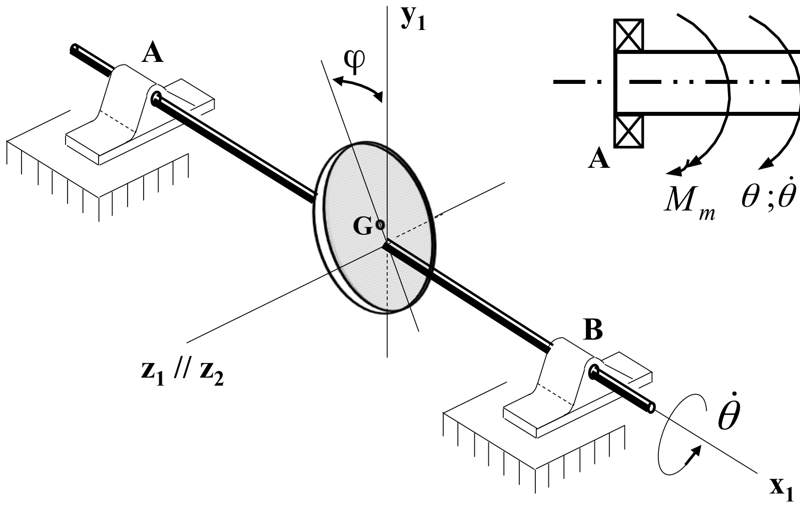
c) A energia cinética do mecanismo.

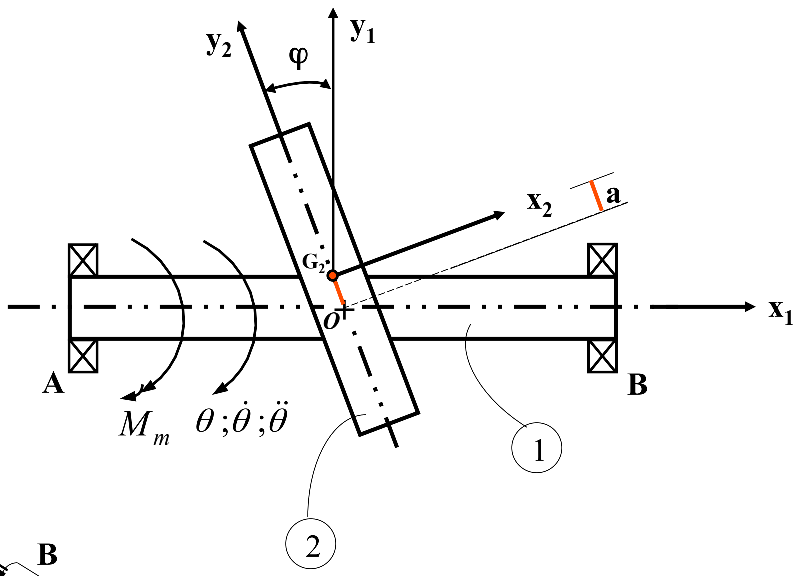
$O \equiv G_1$

$\overline{OG}_2 = a$ *(excentricidade)*

$\overline{OA} = \overline{OB} = \frac{\ell}{2}$

$\varphi = cte.$





Resolução:

Iremos exprimir todas as grandezas no referencial S_1 (x_1, y_1, z_1).

a) ***Corpo 1***

➪ *quantidade de aceleração*

$$\dot{\vec{Q}}_1 = m_1 \vec{a}_{G_1} = m_1 \vec{a}_0 = \vec{0}$$

➪ *momento dinâmico*

$$\vec{K}^1_{G_1}\Big|_{S_1} = \dot{\vec{H}}^1_{G_1}\Big|_{S_1} + \vec{\omega} \wedge \vec{H}^1_{G_1}\Big|_{S_1}$$

$$\vec{K}^1_{G_1}\Big|_{S_1} = \dot{\vec{H}}^1_{G_1}\Big|_{S_1} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} I_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}^1_{G_1}\Big|_{S_1} = \dot{\vec{H}}^1_{G_1}\Big|_{S_1} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} I_{x_1}\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{K}^1_{G_1}\Big|_{S_1} = \begin{Bmatrix} I_{x_1}\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{x_1}\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Corpo 2

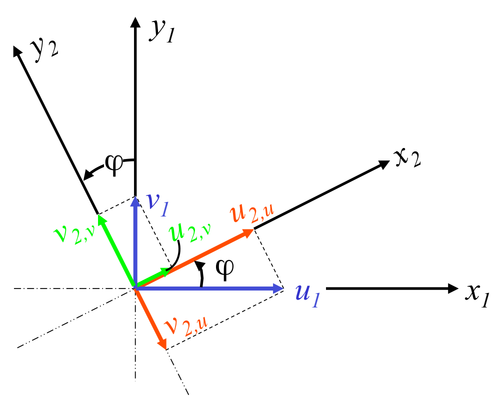
⇨ *quantidade de aceleração*

$$\dot{\vec{Q}}_2 = m_2\,\vec{a}_{G_2}$$
$$\vec{a}_{G_2} = \underbrace{\vec{a}_0}_{=\vec{0}} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overline{OG_2} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{OG_2})$$

$$\vec{a}_{G_2} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -a\sin\varphi \\ a\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \left(\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -a\sin\varphi \\ a\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$\vec{a}_{G_2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ a\ddot{\theta}\cos\varphi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ a\dot{\theta}\cos\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ a\ddot{\theta}\cos\varphi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -a\dot{\theta}^2\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\vec{Q}}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_2\,a\dot{\theta}^2\cos\varphi \\ m_2\,a\ddot{\theta}\cos\varphi \end{Bmatrix}$$



$$\begin{cases} u_2 = u_{2,u} + u_{2,v} \\ v_2 = -v_{2,u} + v_{2,v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = u_1\cos\varphi + v_1\sin\varphi \\ v_2 = -u_1\sin\varphi + v_1\cos\varphi \end{cases}$$

⇨ *momento dinâmico*

$$\vec{K}^2_{G_2}\Big|_{S_1} = \dot{\vec{H}}^2_{G_2}\Big|_{S_1} + \vec{\omega} \wedge \vec{H}^2_{G_2}\Big|_{S_1}$$

$$\begin{cases} \vec{H}^2_{G_2}\Big|_{S_1} = \left[T_{2\to1}\right]\vec{H}^2_{G_2}\Big|_{S_2} \\ \vec{H}^2_{G_2}\Big|_{S_2} = \left[I_{G_2}\right]\vec{\omega}_2 \\ \vec{\omega}_2 = \left[T_{1\to2}\right]\vec{\omega} \end{cases}$$

Por exemplo, a matriz de transformação de coordenadas do referêncial – 1 no referêncial – 2 pode ser obtida a partir da figura anterior. Ficará

$$\begin{cases} u_2 = u_1 \cos\varphi + v_1 \sin\varphi \\ v_2 = -u_1 \sin\varphi + v_1 \cos\varphi \\ z_2 = z_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=[T_{1\to 2}]} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}$$

Assim, teremos

$$\vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}\cos\varphi \\ -\dot{\theta}\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{H}^2_{G_2}\Big|_{S_2} = \left[I_{G_2}\right]\vec{\omega}_2$$

$$\vec{H}^2_{G_2}\Big|_{S_2} = \begin{bmatrix} I_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}\cos\varphi \\ -\dot{\theta}\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{x_2}\dot{\theta}\cos\varphi \\ -I_{y_2}\dot{\theta}\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{x_2}\dot{\theta}\cos\varphi \\ -\frac{1}{2}I_{x_2}\dot{\theta}\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Notar que:

$I_{x_2} \rightarrow$ "*momento polar de inércia*"

$$I_{x_2} = I_{y_2} + I_{z_2}$$

$$I_{z_2} = I_{y_2} \Rightarrow I_{z_2} = I_{y_2} = \frac{1}{2} I_{x_2}$$

De maneira inteiramente análoga, podemos obter a matriz de transformação de coordenadas do referencial – 2, no referencial – 1. Assim, ficará:

$$\left[T_{2\to 1}\right] = \left[T_{1\to 2}\right]^t = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{H}^2_{G_2}\Big|_{S_1} = \left[T_{2\to 1}\right]\vec{H}^2_{G_2}\Big|_{S_2}$$

$$\vec{H}^2_{G_2}\Big|_{S_1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_{x_2}\dot{\theta}\cos\varphi \\ -\frac{1}{2}I_{x_2}\dot{\theta}\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{x_2}\dot{\theta}\cos^2\varphi + \frac{I_{x_2}}{2}\dot{\theta}\sin^2\varphi \\ I_{x_2}\dot{\theta}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{I_{x_2}}{2}\dot{\theta}\sin\varphi\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{H}^2_{G_2}\Big|_{S_1} = \begin{Bmatrix} \frac{I_{x_2}}{4}\dot{\theta}(3+\cos 2\varphi) \\ \frac{I_{x_2}}{4}\dot{\theta}\sin 2\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{H}}^2_{G_2}\Big|_{S_1} = \begin{Bmatrix} \frac{I_{x_2}}{4}\ddot{\theta}(3+\cos 2\varphi) \\ \frac{I_{x_2}}{4}\ddot{\theta}\sin 2\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\omega}\wedge\vec{H}^2_{G_2}\Big|_{S_1} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} \frac{I_{x_2}}{4}\dot{\theta}(3+\cos 2\varphi) \\ \frac{I_{x_2}}{4}\dot{\theta}\sin 2\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{I_{x_2}}{4}\dot{\theta}^2\sin 2\varphi \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}^2_{G_2}\Big|_{S_1} = \dot{\vec{H}}^2_{G_2}\Big|_{S_1} + \vec{\omega}\wedge\vec{H}^2_{G_2}\Big|_{S_1}$$

$$\vec{K}^2_{G_2}\Big|_{S_1} = \begin{Bmatrix} \frac{I_{x_2}}{4}\ddot{\theta}(3+\cos 2\varphi) \\ \frac{I_{x_2}}{4}\ddot{\theta}\sin 2\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{I_{x_2}}{4}\dot{\theta}^2\sin 2\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{I_{x_2}}{4}\ddot{\theta}(3+\cos 2\varphi) \\ \frac{I_{x_2}}{4}\ddot{\theta}\sin 2\varphi \\ \frac{I_{x_2}}{4}\dot{\theta}^2\sin 2\varphi \end{Bmatrix}$$

b) *Quantidade de aceleração total (do mecanismo)*

$$\dot{\vec{Q}} = \dot{\vec{Q}}_1 + \dot{\vec{Q}}_2$$

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{0} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_2\, a\dot{\theta}^2 \cos\varphi \\ m_2\, a\ddot{\theta}\cos\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_2\, a\dot{\theta}^2 \cos\varphi \\ m_2\, a\ddot{\theta}\cos\varphi \end{Bmatrix}$$

Momento dinâmico total do mecanismo no ponto O

$$\vec{K}_o = \vec{K}_o^1 + \vec{K}_o^2$$

$$\vec{K}_o^1 = \vec{K}_{G_1} + \underbrace{\overline{OG_1} \wedge \dot{\vec{Q}}_1}_{=\vec{0}} = \vec{K}_{G_1} = \begin{Bmatrix} I_{x_1}\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}_o^2 = \vec{K}_{G_2} + \overline{OG_2} \wedge \dot{\vec{Q}}_2 = \vec{K}_{G_2} + \begin{Bmatrix} -a\sin\varphi \\ a\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_2 a\dot{\theta}^2 \cos\varphi \\ m_2 a\ddot{\theta}\cos\varphi \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}_o^2 = \begin{Bmatrix} \dfrac{I_{x_2}}{4}\ddot{\theta}(3+\cos 2\varphi) \\ \dfrac{I_{x_2}}{4}\ddot{\theta}\sin 2\varphi \\ \dfrac{I_{x_2}}{4}\dot{\theta}^2 \sin 2\varphi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_2 a^2\ddot{\theta}\cos^2\varphi \\ \frac{1}{2} m_2 a^2\ddot{\theta}\sin 2\varphi \\ \frac{1}{2} m_2 a^2\dot{\theta}^2 \sin 2\varphi \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}_o^2 = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}\left[\dfrac{I_{x_2}}{4}(3+\cos 2\varphi) + m_2 a^2\cos^2\varphi\right] \\ \dfrac{\ddot{\theta}}{2}\left[\frac{I_{x_2}}{2} + m_2 a^2\right]\sin 2\varphi \\ \dfrac{\dot{\theta}^2}{2}\left[\frac{I_{x_2}}{2} + m_2 a^2\right]\sin 2\varphi \end{Bmatrix}$$

Então:

$$\vec{K}_0 = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}\left[I_{x_1} + \frac{I_{x2}}{4}(3+\cos 2\varphi) + m_2 a^2 \cos^2\varphi\right] \\ \frac{\ddot{\theta}}{2}\left[\frac{I_{x2}}{2} + m_2 a^2\right]\sin 2\varphi \\ \frac{\dot{\theta}^2}{2}\left[\frac{I_{x2}}{2} + m_2 a^2\right]\sin 2\varphi \end{Bmatrix}$$

Se por exemplo, for $m_2 = 40\,kg$; $\frac{m_2}{m_1} = 1.25$; $r = 2\,cm$; $R = 20\,cm$; $a = \frac{R}{5}$; $\varphi = 30^\circ$

e para um determinado instante se verificar que, $\dot{\theta} = 290\,rpm$; $\ddot{\theta} = cte. = 15\,rad/s^2$

ficará:

$$I_{x_2} = \frac{1}{2} m_2 R^2 = 0.8\,kg \cdot m^2$$

$$I_{x_1} = \frac{1}{2} m_1 r^2 = 6.4 \times 10^{-3}\,kg \cdot m^2$$

$$a = 0.04\,m$$

$$\dot{\theta} = \frac{290 \times 2\pi}{60} = 30.37\,rad/s$$

então,

$$\dot{\vec{Q}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1278 \\ 20.1 \end{Bmatrix} N\,; \quad \vec{K}_o = \begin{Bmatrix} 11.316 \\ 3.014 \\ 185.314 \end{Bmatrix} N \cdot m$$

c) *Energia cinética do mecanismo*

$$T = T_1 + T_2$$

Corpo - 1

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \underbrace{(\vec{v}_{G_1} \cdot \vec{v}_{G_1})}_{=0} + \frac{1}{2}\{\omega\}^t [I_{G_1}]\{\omega\}$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\{\dot{\theta}, 0, 0\}\begin{bmatrix} I_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_1} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\{\dot{\theta}, 0, 0\}\begin{Bmatrix} I_{x_1}\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow T_1 = \frac{1}{2} I_{x_1}\dot{\theta}^2$$

Corpo - 2

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\vec{v}_{G_2} \cdot \vec{v}_{G_2}) + \frac{1}{2}\{\omega_2\}^t [I_{G_2}]\{\omega_2\}$$

$$\vec{v}_{G_2} = \vec{\omega} \wedge \overline{OG}_2 = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -a\sin\varphi \\ a\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}\, a\cos\varphi \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_{G_2} \cdot \vec{v}_{G_2} = \{0, 0, \dot{\theta}\, a\cos\varphi\}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}\, a\cos\varphi \end{Bmatrix} = (\dot{\theta}\, a\cos\varphi)^2$$

$$\{\omega_2\}^t [I_{G_2}]\{\omega_2\} = \{\dot{\theta}\cos\varphi, -\dot{\theta}\sin\varphi, 0\}\begin{bmatrix} I_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{\theta}\cos\varphi \\ -\dot{\theta}\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\omega_2\}^t [I_{G_2}]\{\omega_2\} = \{\dot{\theta}\cos\varphi, -\dot{\theta}\sin\varphi, 0\}\begin{Bmatrix} I_{x_2}\dot{\theta}\cos\varphi \\ -\frac{1}{2} I_{x_2}\dot{\theta}\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\omega_2\}^t [I_{G_2}] \{\omega_2\} = \left[I_{x_2}(\dot{\theta}\cos\varphi)^2 + \frac{1}{2} I_{x_2}(\dot{\theta}\sin\varphi)^2 \right]$$

$$\{\omega_2\}^t [I_{G_2}] \{\omega_2\} = I_{x_2}\dot{\theta}^2(\cos^2\varphi + \frac{1}{2}\sin^2\varphi) = \frac{I_{x_2}}{4}\dot{\theta}^2(3+\cos 2\varphi)$$

então,

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2(\dot{\theta}\, a\cos\varphi)^2 + \frac{I_{x_2}}{8}\dot{\theta}^2(3+\cos 2\varphi)$$

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} I_{x_1}\dot{\theta}^2}_{=T_1} + \underbrace{\frac{1}{2} m_2(\dot{\theta}\, a\cos\varphi)^2 + \frac{I_{x_2}}{8}\dot{\theta}^2(3+\cos 2\varphi)}_{=T_2}$$

$$T = \frac{1}{2} m_2(\dot{\theta}\, a\cos\varphi)^2 + \frac{1}{2}\left[I_{x_1} + \frac{1}{4} I_{x_2}(3+\cos 2\varphi) \right]\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{40}{2}(30.37\times 0.04\times\cos 30^\circ)^2 + \frac{1}{2}\left[6.4\times 10^{-3} + 0.25\times 0.8\,(3+\cos 60^\circ)\right]\times 30.37^2$$

$$T = (22.14 + 325.77) = 347.91\, J$$