



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA



Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Física
Campus de Azurém
4800-058 Guimarães

FÍSICA I

CINEMÁTICA

E

DINÂMICA DAS CAMES

*2º Ano da Licenciatura em Engenharia Mecânica da universidade de Aveiro
1º Semestre*

*1º Ano da Licenciatura em Engenharia Civil da Universidade do Minho
1º Semestre
(2008)*

FRANCISCO QUEIRÓS DE MELO

JOAQUIM CARNEIRO

Índice

1 – INTRODUÇÃO.....	3
2 – CONSTITUIÇÃO E DESENHO DAS CAMES	3
3 – ANÁLISE CINEMÁTICA DE ALGUNS TIPOS DE CAMES.....	5
3.1 – CAME CIRCULAR EXCÊNTRICA COM IMPULSOR DE ROLETE	5
3.3 – AJUSTE DE FUNÇÕES AO PERFIL PRETENDIDO PARA UMA CAME	10
3.4 – CURVA DE ELEVAÇÃO COMBINANDO DIVERSOS TIPOS DE PERFIL	13
4 – DINÂMICA DOS SISTEMAS DE CAMES.....	20
4.2 – DETERMINAÇÃO DA VELOCIDADE DE ROTAÇÃO LIMITE DE UM MECANISMO DE CAME	20

1 – Introdução

As *comes* ou *ressaltos* (ou ainda *excêntricos*) são acessórios mecânicos destinados a transformar rotações em movimentos rectilíneos, ou mesmo noutras rotações de amplitude geralmente limitada.

As suas aplicações são bastante conhecidas sobretudo na indústria automóvel, com incidência nos motores a 4 tempos, onde as válvulas de admissão e escape são comandadas por excêntricos ou comes tal como mostra a figura 1.

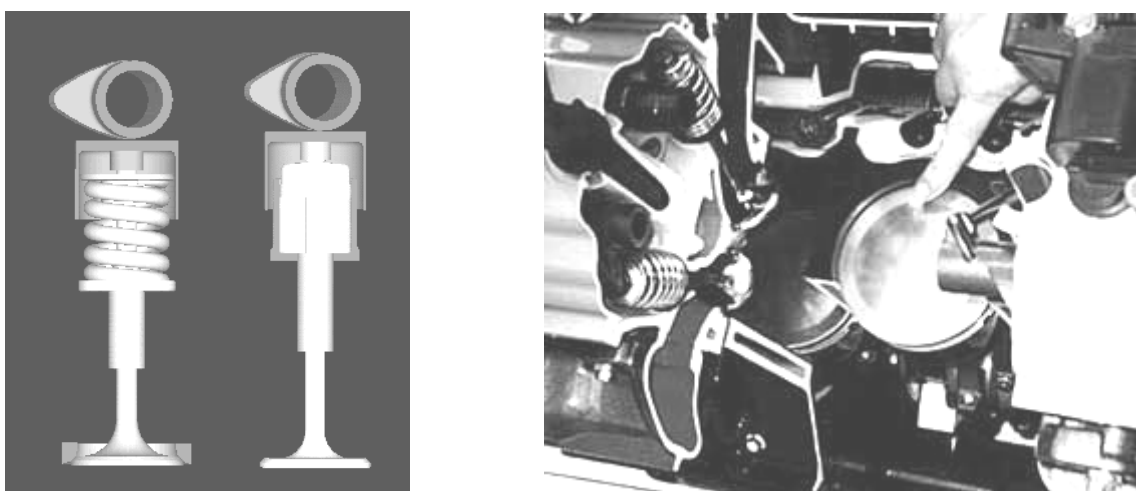


Fig. 1 – Exemplo de comando de válvulas em motores a 4 tempos de aplicação automóvel

Para além deste exemplo bem conhecido, conhecem-se aplicações de comes no accionamento de pequenas prensas mecânicas, maquinaria têxtil e máquinas ferramenta.

2 – Constituição e desenho das comes

Na figura 2 apresenta-se o esquema elementar de um mecanismo com came ou excêntrico. Neste caso, uma haste ou impulsor tem um rolete com raio r que está encostado à superfície (o perfil real) da came. O centro do rolete de raio r está sempre à mesma distância do perfil real, definindo deste modo a geração de um perfil teórico, que permite o mesmo deslocamento ao impulsor que no caso do rolete, mas agora com o

rolete suprimido e no lugar do seu centro geométrico está agora um gume que termina no perfil teórico, como mostra a figura 2-a

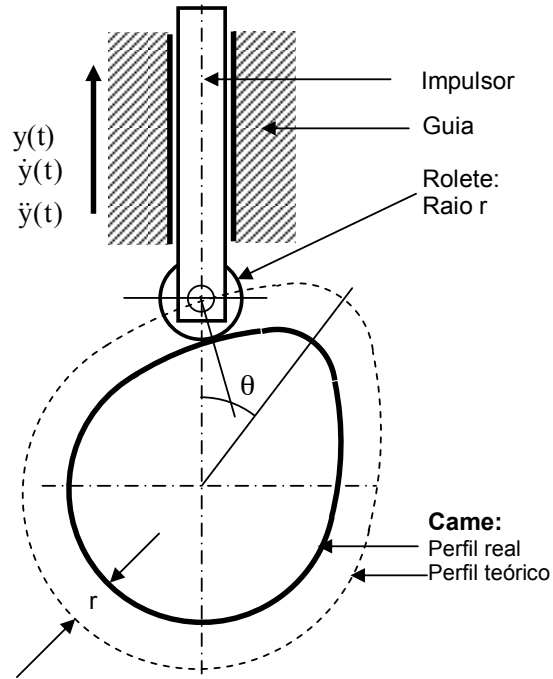


Fig. 2 – Came accionando um impulsor de rolete

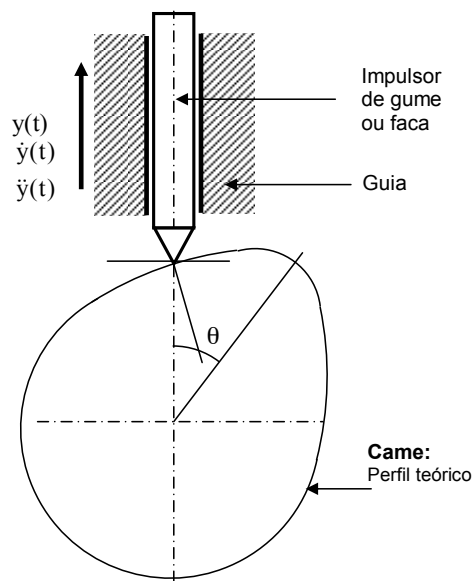


Fig. 2-a – came accionando um impulsor de faca ou gume

A figura 3 mostra outro tipo de impulsor em que o contacto com o perfil da came é assegurado por um prato. O ponto P representa o contacto do prato com o perfil da came, podendo este ponto variar sobre a superfície do prato.

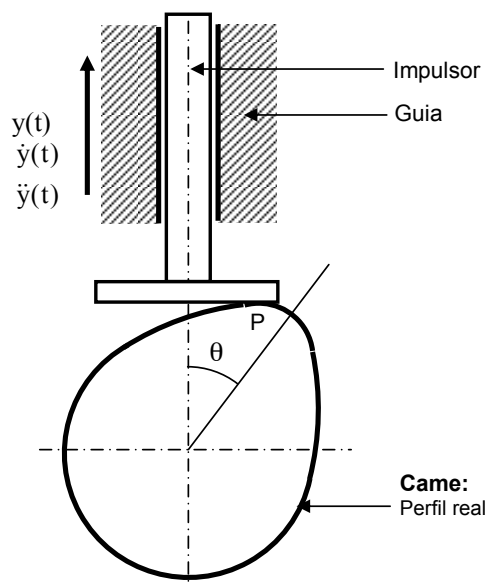


Fig. 3 – Came com impulsor de prato

Claro que uma mesma came impulsionando numa vez um impulsor de rolete e noutra um impulsor de prato dará o mesmo levantamento máximo, mas a lei de variação do levantamento em função do ângulo de posição θ será diferente, assim como diferentes serão a velocidade $\dot{y}(t)$ e a aceleração $\ddot{y}(t)$.

3 – Análise cinemática de alguns tipos de cames

3.1 – Came circular excêntrica com impulsor de rolete

Considere-se o mecanismo de came representado na figura 4, realizado a partir de um disco circular mas girando com excentricidade e .

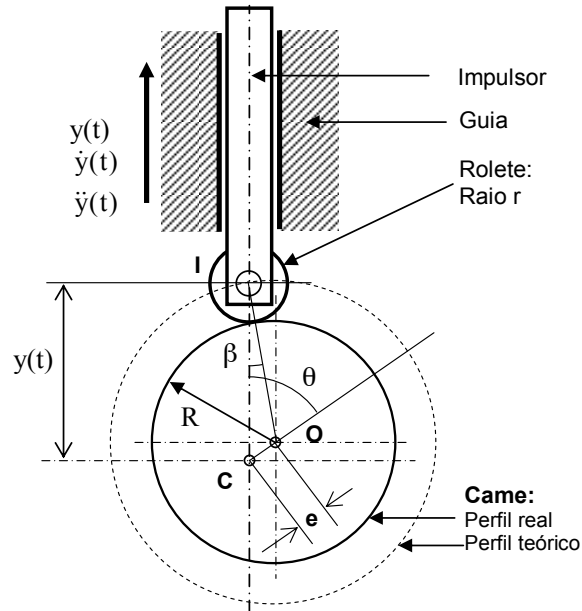


Fig. 4 – Mecanismo de came circular excêntrico

Neste primeiro exemplo admite-se que o eixo do impulsor passa pelo centro de rotação **O** da came; o centro geométrico da came é **C**, tal como mostra a figura 4. O centro de rotação real **O** dista **e** do ponto **C**, sendo **e** a excentricidade da came. Supondo que a came gira em torno de **C** à frequência angular $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \text{const.}$, o que se necessita para definir o movimento é caracterizar a função levantamento do impulsor $y(t)$ ou $y=y(\theta(t))$. Para isto, nota-se que a construção geométrica formada pelo triângulo ΔICO ; o lado IC é o levantamento $y(t)$. Seja β o ângulo $O\hat{I}C$; este ângulo chama-se ângulo de pressão da superfície do rolete contra a superfície da came. O ângulo $\theta = \omega t$ pode considerar-se uma variável independente. As equações caracterizando o estado cinemático da came e do respectivo impulsor são:

$$\begin{cases} y(t) = e \times \cos\omega t + (r + r) \times \cos\beta \\ e \times \sin\omega t = (r + r) \times \sin\beta \end{cases} \quad (1)$$

Podemos eliminar o ângulo β e explicitar depois em $y(t)$. Assim, as duas equações de (1) passam a ser:

$$\begin{cases} y(t) - e \times \cos \omega t = (r + r) \times \cos \beta \\ e \times \sin \omega t = (r + r) \times \sin \beta \end{cases} \quad (1-a)$$

Quadrando e somando as duas equações anteriores, dá:

$$y^2 + e^2 \cos^2 \omega t - 2ye \cos \omega t + e^2 \sin^2 \omega t = (R + r)^2 \quad (2)$$

Ou ainda:

$$y^2 + e^2 - 2ye \cos \omega t = (R + r)^2 \quad (3)$$

Temos deste modo uma equação do 2º grau em y para cada instante caracterizando o argumento $\theta = \omega t$ da função cosseno. A solução é:

$$y = \frac{2e \cos \omega t \pm \sqrt{4e^2 \cos^2 \omega t - 4 \times (e^2 - (R + r)^2)}}{2} \quad (4)$$

repare-se que a fórmula resolvente anterior tem sempre raízes reais, desde que $(R+r) \geq e$, o que se verifica sempre por simples inspeção da geometria da came (nunca pode a excentricidade ser maior do que a soma dos raios). A velocidade $\dot{y}(t)$ e a aceleração $\ddot{y}(t)$ são obtidas por derivação de (4), o que não se apresenta como tarefa simples. Uma solução alternativa à obtida pode desenvolver-se como se segue:

Tomando as equações (1) ou (1-a), escrevemos o ângulo β deste modo:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{e \sin \omega t}{(R + r)}\right) \quad (5)$$

As expressões seguintes devem ser agora usadas:

$$\begin{aligned}
y(t) &= e \cos \omega t + (R + r) \cos \beta \\
\dot{y}(t) &= -\omega e \sin \omega t - \dot{\beta}(R + r) \sin \beta \\
\ddot{y}(t) &= -\omega^2 e \cos \omega t - \dot{\beta}^2 (R + r) \cos \beta - \ddot{\beta}(R + r) \sin \beta
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\text{onde } \dot{\beta} = \frac{\frac{e\omega}{R+r} \cos \omega t}{\sqrt{1 - \left(\frac{e \sin \omega t}{R+r}\right)^2}} \tag{7}$$

Se na expressão (7) admitirmos que $R \gg r$, o denominador de (7) tem praticamente o valor 1 (já que $(R+r) \gg e \sin \omega t$). Então (7) passa a ser:

$$\dot{\beta} = \frac{e\omega}{R+r} \cos \omega t \tag{7-a}$$

Agora a segunda derivada temporal de β obtém-se sem dificuldade:

$$\ddot{\beta} = -\frac{e\omega^2}{R+r} \sin \omega t \tag{8}$$

As expressões para $y(t)$ e suas derivadas passam a ser:

$$\begin{aligned}
y(t) &= e \cos \omega t + (R + r) \cos \left[\arcsin \left(\frac{e \sin \omega t}{R + r} \right) \right] \\
\dot{y}(t) &= -\omega e \sin \omega t - e \omega \cos \omega t \times \frac{e \sin \omega t}{R + r} \\
\ddot{y}(t) &= -\omega^2 e \cos \omega t + e \omega^2 \sin \omega t \times \frac{e \sin \omega t}{R + r} - \\
&\quad \left(\frac{e\omega}{R+r} \cos \omega t \right)^2 (R + r) \cos \left[\arcsin \left(\frac{e \sin \omega t}{R + r} \right) \right]
\end{aligned} \tag{9}$$

(notar que são expressões aproximadas, tendo em conta o uso de (7-a))

Exercício proposto:

Utilize o EXCEL[®] para obter graficamente as funções deslocamento, velocidade e aceleração do impulsor de rolete sobre a came de perfil harmónico simples que acaba de ser analisada. Compare os resultados obtidos pelas expressões exactas (4), (5) e (6) com as aproximadas em (9).

3.2 – Came circular excêntrica com impulsor tipo prato

Neste caso a geometria do conjunto came-impulsor orienta-se pela figura 5.

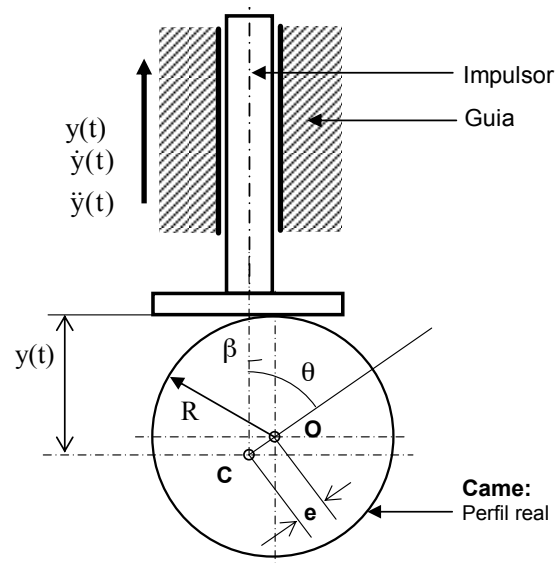


Fig. 5 – Came circular excêntrica harmónica simples com impulsor de prato

As expressões referentes ao deslocamento, velocidade e aceleração:

$$\begin{cases} y(t) = e \cos \omega t \\ \dot{y}(t) = -\omega e \sin \omega t \\ \ddot{y}(t) = -\omega^2 e \cos \omega t \end{cases} \quad (10)$$

Como se pode verificar, estas expressões são muito mais simples do que as necessárias à caracterização do deslocamento na came com rolete (eqs. (9))

3.3 – Ajuste de funções ao perfil pretendido para uma came

Os dois exemplos anteriormente analisados correspondem a um único tipo de perfil trigonométrico, o qual consiste em expressões analíticas do tipo *harmónico simples* (chama-se assim por envolver um argumento $\theta = \omega t$ de ordem 1; se fosse ordem mais elevada, $n > 1$, seria $\theta = n\omega t$). É possível ajustar uma função ou conjunto de funções de forma a obter um perfil de came correspondendo a especificações de deslocamento, velocidade e aceleração em posições bem definidas no tempo (condições iniciais e de fronteira). Isto pode ser levado a cabo em apenas alguns intervalos do ângulo total de rotação da came. Vejamos um exemplo:

Pretendemos projectar uma came que efectue o movimento do impulsor esquematizado na figura 6.

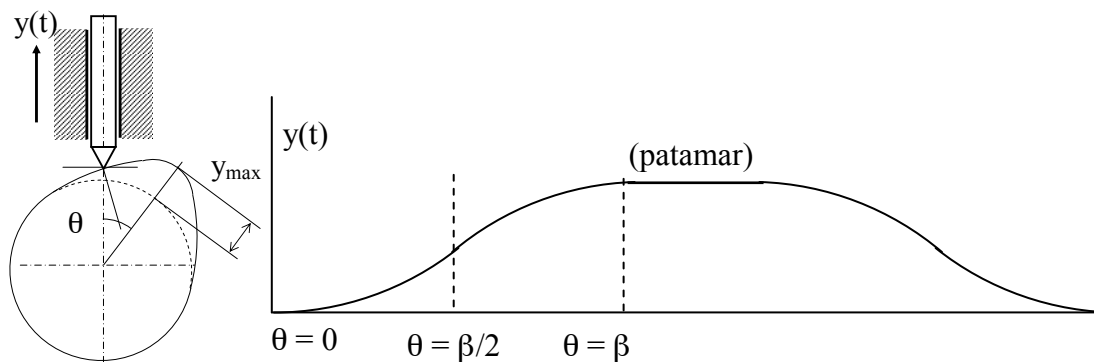


Fig. 6 – Esquema de levantamento do impulsor de uma came a desenhar

Vamos admitir que a rampa de levantamento tem na came um perfil parabólico, isto é, corresponde a uma função do 2º grau de $\theta = \omega t$. A rampe que se na fig. 6 resulta da composição de dois perfis de parábola; uma que se estende de $\theta = 0$ (início do levantamento) até $\theta = \beta/2$; outra que liga $\theta = \beta/2$ a $\theta = \beta$. Depois há um esquema de movimento de retorno do impulsor à posição inicial por simetria das curvas a obter como se vê na figura. Há um ângulo para o qual o impulsor não se move (corresponde ao patamar na função $y(t)$) que pode ser ajustado no projecto da came dentro de certos limites, naturalmente.

Pretendemos pois ajustar uma função do 2º grau em θ ao perfil da came capaz de efectuar o levantamento mostrado na fig.6, abrangendo um domínio desde $\theta = 0$ até $\theta = \beta$. Sabendo que o levantamento máximo da came é $y_{\max}=L$, prodede-se deste modo:

- A expressão genérica para $y(\theta)$ é da forma $y(\theta) = A\theta^2 + B\theta + C$ (2º grau), onde A, B e C são coeficientes a determinar.
- Derivamos em θ a expressão anterior, obtemos a velocidade e a aceleração:

$$y'(\theta) = 2A\theta + B$$

$$y''(\theta) = 2A$$

Com estas expressões podemos relacionar as curvas parabólicas de $\theta=0$ com $\theta=\beta/2$ (sendo β um ângulo qualquer, não podendo contudo exceder limites associados ao desenho da came, como já foi mencionado). Observando a figura 6, conclui-se que deve ser:

Para a 1ª parte da curva

$$\begin{cases} y'(\theta = 0) = 0; & y(\theta = \beta/2) = L/2 \\ y(\theta = 0) = 0 \end{cases} \quad \text{(reparar que só podemos especificar 3 condições para uma função do 2º grau)}$$

Destas relações obtemos $A = \frac{2L}{\beta^2}; B = C = 0$

Então a primeira parte da curva parabólica para o levantamento a definir (válido desde $\theta = 0$ até $\theta = \beta/2$) tem a seguinte expressão:

$$y(\theta) = 2L\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2, \text{ válida para } \theta \in (0, \beta/2)$$

Vejamos a segunda parte do levantamento do impulsor (desde $\theta = \beta/2$ até $\theta = \beta$). Neste caso, as equações são:

$$\begin{cases} A\beta^2 + B\beta + C = L & (\text{para } \theta = L) \\ 0 = 2A\beta + B \end{cases}$$

Notar que agora a 1ª derivada deve ser igual à do caso anterior, ou seja

$$y'(\theta) = 2L \times 2 \left(\frac{\theta}{\beta} \right) \times \frac{1}{\beta} = \frac{4\theta L}{\beta^2}, \text{ para } \theta = \beta/2, \text{ dá } y'_{\theta=\beta/2} = \frac{2L}{\beta}. \text{ Daqui obtemos:}$$

$\frac{2L}{\beta} = 2A \times \frac{\beta}{2} + B$; donde, para a 2ª parte da curva parabólica de levantamento, os

$$\text{coeficientes são: } A = -\frac{2L}{\beta^2}; B = \frac{4L}{\beta}; C = -L$$

As expressões finais são:

$$\begin{cases} \text{I (1ª parte do levantamento) } y = 2L \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 & (\theta \in (0, \beta/2)) \\ \text{II (2ª parte do levantamento) } y = L \left[1 - 2 \left(1 - \frac{\theta}{\beta} \right)^2 \right] & (\theta \in (\beta/2, \beta)) \end{cases}$$

A figura 7 representa aproximadamente a geometria a ter em conta para o desenho da came com o perfil que acabamos de definir.

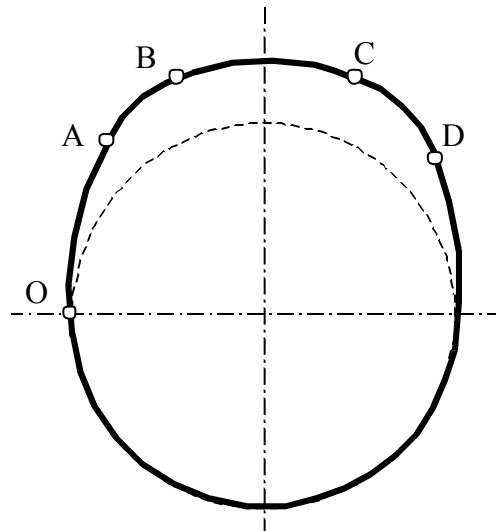


Fig. 7 – Perfil da came para o exemplo 3.3. O arco OA é a parábola de elevação inicial com aceleração constante positiva; o arco AB é a parábola de elevação final com aceleração negativa; o arco BC corresponde a um patamar

Exercício: represente os gráficos para a velocidade e aceleração desta came

3.4 – Curva de elevação combinando diversos tipos de perfil

Na fase do projecto de uma came podemos combinar perfis de constituição diferente. Se por exemplo, desejarmos combinar perfis do tipo parabólico (anteriormente visto) com perfis lineares (em que a velocidade de elevação ou descida é constante), o procedimento efectua-se impondo compatibilidade de deslocamentos, velocidades e acelerações (se possível) nos pontos de transição.

Exemplo I

Suponhamos que se pretende projectar a seguinte came:

- i) – De $\theta = 0$ a $\theta = \pi/6$ O perfil deve ser parabólico, efectuando um levantamento $L/3$ (L é o levantamento total);
- ii) – De $\theta = \pi/6$ a $\theta = \pi/3$ o perfil deve ser linear (levantamento a velocidade constante, desde $L/3$ até $2L/3$);
- iii) De $\theta = \pi/3$ a $\theta = \pi/2$ o levantamento volta a ser do tipo parabólico desde $2L/3$ até L (ver figura 8).

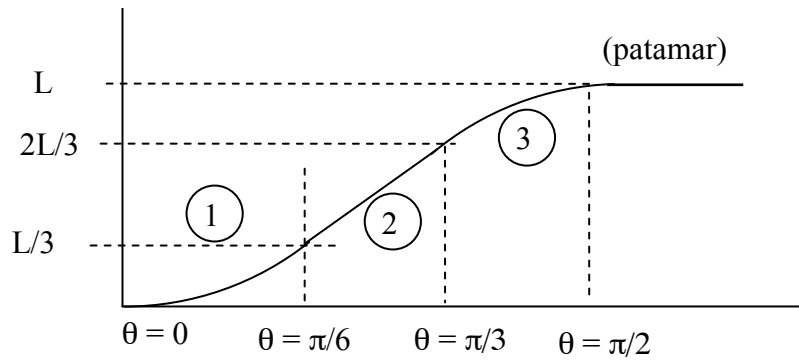


Fig. 8 – levantamento de came em três etapas, sendo dois perfis parabólicos e um linear

Para a curva de levantamento “1”: a forma polinomial é:

$$y(\theta) = A\theta^2 + B\theta + C \quad (a)$$

$$y'(\theta) = 2A\theta + B \quad (b)$$

As condições disponíveis neste polinómio são 3, pois temos apenas 3 coeficientes:

$$\theta = 0 \Rightarrow y(0) = 0 \text{ (levantamento inicial nulo);}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow y'(0) = 0 \text{ (velocidade inicial nula)}$$

$$\Rightarrow \text{Agora podemos impor que seja (por exemplo): } \theta = \pi/6 \Rightarrow y(\pi/6) = L/3$$

Deste modo, vamos obter:

- Para a velocidade $y'(0)$ (ver (b)) $\Rightarrow B = 0$
- Para o levantamento; como $y(0) = 0$ será $C = 0$ (ver (a))

A função levantamento para a primeira fase fica agora completa a partir da condição:

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = A\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{L}{3} \quad (c)$$

$$\text{donde obtemos } A = \frac{12L}{\pi^2} \text{ (válido para } \theta \in (0, \pi/6))$$

A primeira parte do perfil tem então a seguinte função:

$$y = \frac{12L}{\pi^2} \theta^2$$

A segunda parte da curva de levantamento é linear; tem portanto a equação de uma recta da forma $y(\theta) = A\theta + B$. Há dois parâmetros incógnita, de modo que no ponto de transição ($\theta = \pi/6$), devemos ter:

$$\begin{cases} y(\theta = \pi/6) = \frac{L}{3} \\ y'(\theta = \pi/6) = \frac{24L\theta}{\pi^2} = \frac{4L}{\pi} \end{cases} \quad (\text{com } \theta = \pi/6) \quad (d)$$

A parte linear do perfil fica então completamente definida:

$$\begin{cases} y(\theta = \pi/6) = \frac{L}{3} = A \times \frac{\pi}{6} + B \\ y'(\theta = \pi/6) = \frac{4L}{\pi} = A \end{cases} \quad (e)$$

A equação da recta para a segunda parte do perfil é $y(\theta) = \frac{4L}{\pi} \theta - \frac{L}{3}$

Com esta curva devemos acesso ao levantamento quando $\theta = \pi/3$ (fim da 2ª parte da curva). Para isso, faremos na função anterior $\theta = \pi/3$:

$$y = \frac{4L}{\pi} \times \frac{\pi}{3} - \frac{L}{3} = L$$

Este resultado está errado, pois deveria ser igual a $L/3$. Daqui verifica-se que não é possível satisfazer a condição do levantamento em $\theta = \pi/3$, o qual deveria ser $2L/3$ e não L como obtivemos. Revendo a solução, vamos impor que seja no extremo final do perfil recto o levantamento $y=2L/3$; busquemos agora qual o ângulo θ em que esse levantamento ocorre:

$$y = \frac{2L}{3} = \frac{4L}{\pi} \theta - \frac{L}{3}; \text{ donde:}$$

$$\frac{4L}{\pi}\theta = L;$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Só a partir daqui podemos completar a came com a restante curva do 2º grau (parabólica).

Desta forma, para $\theta=\pi/4$, vamos obter:

$$\begin{cases} y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4L}{\pi} \times \frac{\pi}{4} - \frac{L}{3} = \frac{2L}{3} \\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4L}{\pi} \end{cases} \quad (f)$$

Por fim, o polinómio do 2º grau com a forma $y(\theta) = A\theta^2 + B\theta + C$, só pode definir-se se tivermos 3 condições de compatibilidade (pois há 3 parâmetros A, B e C)

$$a) \quad -\theta = \pi/4 \Rightarrow \begin{cases} y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2L}{3} \\ \text{-----} \end{cases} ; \text{ se } \theta = \pi/2 \Rightarrow \begin{cases} y\left(\frac{\pi}{2}\right) = L \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}, \text{ ou:}$$

$$b) \quad \theta = \pi/4 \Rightarrow \begin{cases} y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2L}{3} \\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4L}{3} \end{cases} ; \text{ se } \theta = \pi/2 \Rightarrow \begin{cases} y\left(\frac{\pi}{2}\right) = L \\ \text{-----} \end{cases} \quad (\text{os traços significam condição não-}$$

disponível)

(h)

verifica-se pois que existem duas soluções possíveis para satisfazer o problema, uma vez que há condições a mais. Podemos escolher a opção a), por exemplo:

$$\begin{cases} A\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + B\left(\frac{\pi}{4}\right) + C = \frac{2L}{3} \\ A\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + B\left(\frac{\pi}{2}\right) + C = L \\ 2A\frac{\pi}{2} + B = 0 \Rightarrow B = -A\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\frac{\pi^2}{16} - A\frac{\pi^2}{4} + C = \frac{2L}{3} \\ A\frac{\pi^2}{4} - A\frac{\pi^2}{2} + C = L \\ 2A\frac{\pi}{2} + B = 0 \Rightarrow B = -A\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{16L}{3\pi^2} \\ C = -\frac{L}{3} \end{cases}$$

O polinómio de solução é:

$$y(\theta) = -\frac{16L}{3\pi^2}\theta^2 + \frac{16L}{3\pi}\theta - \frac{L}{3} \quad (\text{válido para } \theta \in (\pi/4, \pi/2))$$

(verifique os resultados da função quando $\theta = \pi/4$ e $\theta = \pi/2$)

Exemplo II

Pretende-se obter o perfil de uma came capaz de um levantamento de 10 mm num ângulo total de 60°. O esquema do deslocamento do impulsor (suposto do tipo faca) está representado na figura 9.

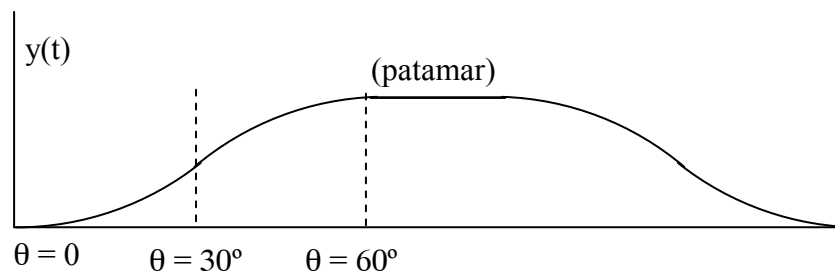


Fig. 9 – Deslocamento do impulsor da came a calcular no exemplo II

Vamos usar uma função polinomia para o objectivo proposto. As especificações totais deste problema são as seguintes:

- Para o ângulo de rotação $\theta = 0$:
 - O deslocamento $y(0) = 0$;
 - A velocidade $\dot{y}(0) = 0$;

→ A aceleração $\ddot{y}(0) = 0$

- Para o ângulo $\theta = 60^\circ$:

→ O deslocamento $y(60^\circ) = 10\text{mm}$;

→ A velocidade $\dot{y}(60^\circ) = 0$;

→ A aceleração $\ddot{y}(60^\circ) = 0$

No total temos pois *seis* condições a satisfazer, o que determina o uso de um *polinómio completo do 5º grau*:

$$y(\theta) = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + a_4\theta^4 + a_5\theta^5$$

A etapa seguinte consiste em obter os coeficientes desconhecidos a_i ($i= 0, \dots, 5$). Antes devemos obter as derivadas primeira e segunda em ordem ao tempo, definindo a velocidade e a aceleração do impulsor:

$$\dot{y}(\theta) = a_1 + 2a_2\theta + 3a_3\theta^2 + 4a_4\theta^3 + 5a_5\theta^4$$

$$\ddot{y}(\theta) = 2a_2 + 6a_3\theta + 12a_4\theta^2 + 20a_5\theta^3$$

Para isto, basta forçar o polinómio a satisfazer as *seis condições* anteriormente especificadas nos pontos do argumento θ seguintes:

$$\theta = 0 \Rightarrow y(0) = 0; \dot{y}(0) = 0; \ddot{y}(0) = 0;$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 10 \text{ mm}; \dot{y}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0; \ddot{y}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

Estas condições são estruturadas na equação matricial seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\pi}{3} & \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 & \left(\frac{\pi}{3}\right)^3 & \left(\frac{\pi}{3}\right)^4 & \left(\frac{\pi}{3}\right)^5 \\ 0 & 1 & 2 \times \frac{\pi}{3} & 3 \times \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 & 4 \times \left(\frac{\pi}{3}\right)^3 & 5 \times \left(\frac{\pi}{3}\right)^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \times \frac{\pi}{3} & 12 \times \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 & 20 \times \left(\frac{\pi}{3}\right)^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{a})$$

A solução deste sistema permite então obter o polinómio referente ao perfil da came:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 87.08 \\ -124.7 \\ 47.644 \end{Bmatrix} \quad (\text{b})$$

$$y(\theta) = 87.08 \theta^3 - 124.732 \theta^4 + 47.644 \theta^5 \quad (\text{c})$$

(com $\theta = \omega t$, válido de $\theta = 0$ até $\theta = \pi/3$)

Exercício:

- *verifique o deslocamento, a velocidade e a aceleração nos pontos extremos $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 60^\circ$ para a came com o perfil assim obtido.*
- *Determine qual os ângulos para a máxima velocidade e aceleração*

4 – Dinâmica dos sistemas de cames

4.1 – Posição do problema

Vimos que uma came é um mecanismo que transforma uma rotação num movimento linear periódico. Este último tem uma expressão matemática mais ou menos complexa dependente do tempo, a qual pode ser derivada de modo a definir a velocidade e as acelerações (a primeira aceleração e outras de ordem superior) do impulsor. A determinação das acelerações das massas em movimento linear é de grande importância na análise de vibrações de mecanismos dotados de cames, uma vez que as forças de inércia geradas durante o funcionamento são as principais fontes de fenómenos vibratórios. Como é previsível, a intensidade dos efeitos vibratórios provenientes de mecanismos de cames depende da frequência de rotação da came; isto é, quanto maior for w (a frequência de rotação), maiores serão as acelerações nas massas em movimento alternativo e consequentemente, as forças de inércia. O modo como opera o mecanismo de uma came, tal como se esquematiza na figuras 2 ou 3 consiste essencialmente no movimento de um impulsor encostado à superfície (ou perfil) da came. A força de contacto é normalmente assegurada pela acção de uma mola, dispositivos pneumáticos ou hidráulicos. Se a frequência de rotação atingir valores suficientemente elevados, pode haver descolamento do impulsor da superfície (ou perfil) da came, perturbando-se a lei de movimento prevista para o mecanismo da came. Chama-se *rotação crítica* ao valor de ω a partir da qual o impulsor *deixa de contactar de modo estável* com a superfície da came; a sua determinação é objectivo do ponto seguinte.

4.2 – Determinação da velocidade de rotação limite de um mecanismo de came

Consideremos um mecanismo elementar constituído por uma came e um impulsor mantido em contacto com a came através da acção de uma mola comprimida, como mostra a figura 11.

Nesta figura, a mola é comprimida, aumentando a força de contacto à medida que o levantamento da came sobre o impulsor progride e alivia a força de contacto sempre que a came reduza o referido deslocamento.

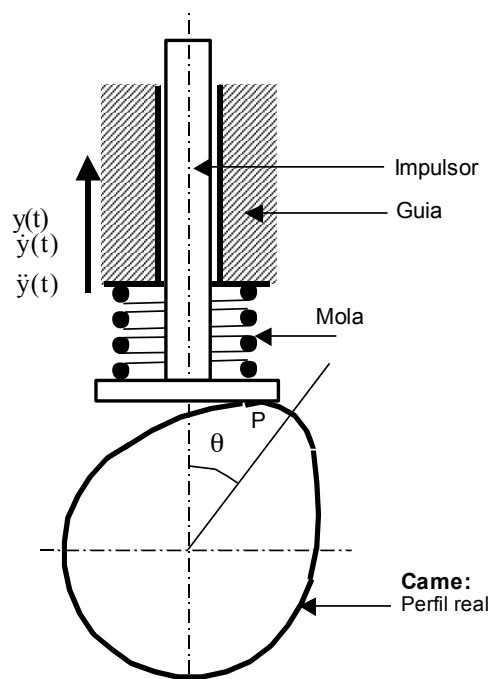


Fig. 11 – Mecanismo elementar com mola de encosto

O modelo simplificado apenas para o impulsor está representado na figura seguinte (figura 12). A partir desta figura faremos o diagrama de corpo livre a fim de permitir uma análise dinâmica do mecanismo de forma compreensível.

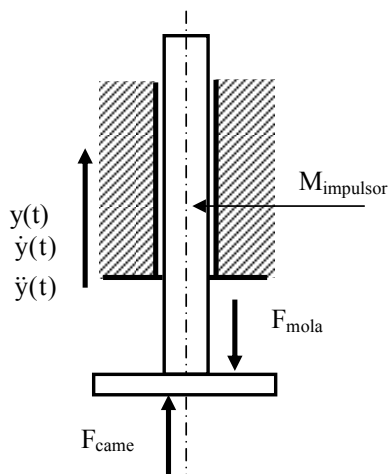


Fig. 12 – Modelo dinâmico (ou mecanismo de corpo livre) do impulsor de uma came

Pela figura anterior é possível estabelecer o equilíbrio do impulsor em regime dinâmico, estabelecendo a *Relação Fundamental da Dinâmica (lei de Newton)*:

$$F_{\text{came}} - F_{\text{mola}} = M_{\text{impulsor}} \times \ddot{y}(t) \quad (\text{a})$$

Normalmente a mola é um elemento linear elástico, respondendo com uma força proporcional ao deslocamento que lhe é imposto. Deste modo, a equação anterior pode reescrever-se desta forma:

$$F_{\text{came}} = K \times y(t) + M_{\text{impulsor}} \times \ddot{y}(t) + F_0 \text{ onde } F_0 \text{ é uma força de } \textit{pré-encosto}$$

A velocidade crítica para a rotação da came a partir da qual deixa de haver um contacto estável entre o impulsor e a came obtém-se fazendo na equação anterior a força de contacto F_{came} nula:

$$K_{\text{mola}} \times y(t) + M_{\text{impulsor}} \times \ddot{y}(t) = -F_0$$

Esta equação corresponde à situação de vibração livre para o sistema dinâmico constituído exclusivamente pelo impulsor e pela mola (a came deixou de fazer parte do conjunto, pois cinematicamente *separa-se ao atingir a velocidade crítica*). A expressão anterior é uma equação diferencial de segunda ordem em t , que pode ser escrita na forma simplificada:

$$\omega_0^2 y(t) + \ddot{y}(t) = -\frac{\omega_0^2}{K_{\text{mola}}} F_0, \text{ onde } \omega_0 = \sqrt{\frac{K_{\text{mola}}}{M_{\text{impulsor}}}}$$

A solução geral desta equação é da forma $y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \text{sen} \omega_0 t - \frac{F_0}{K_{\text{mola}}}$, sendo C_1

e C_2 constantes dependentes das condições iniciais do problema e F_0 a *pré-força de contacto* na came, constituindo esta última um *integral particular da equação diferencial*. Para os objectivos anteriormemnte referidos, os quais se prendem com a determinação da velocidade crítica da came, o parâmetro ω é aqui o mais importante,

constituindo precisamente a *pulsção angular que permite determinar a frequência crítica*.

Veamos exemplos:

Exemplo I

No sistema de distribuição de um motor de automóvel funcionando no ciclo de 4 tempos, o impulsor e a mola têm as seguintes características;

- Massa do impulsor (corresponde à válvula do cilindro): 0.05 Kg
- Constante K da mola: K=50 kN/m

A velocidade crítica para a árvore de cames é assim obtida:

$$\omega = \sqrt{\frac{50000}{0.05}} = 1000 \text{ rad/s}$$

$$\text{Esta pulsção corresponde à frequência } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1000}{2\pi} = 159 \text{ Hz}$$

Uma vez que a árvore de cames roda a metade da velocidade da cambota do motor, esta rodará a um regime de 318 rot/s ou seja, cerca de 19080 rpm (pouco mais do que pode atingir um “*Fórmula 1*” actualmente...). O valor da máxima aceleração obtém-se naturalmente por derivação da solução anterior $y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t - \frac{F_0}{K_{\text{mola}}}$:

$$\ddot{y}(t) = -\omega_0^2 (C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t) \text{ onde } \omega_0 = \sqrt{\frac{K_{\text{mola}}}{M_{\text{impulsor}}}} \text{ e as constantes } C_1 \text{ e } C_2 \text{ como}$$

função das condições iniciais do problema.

Exemplo II

Consideremos neste caso que a came tem o perfil do tipo harmónico simples actuando sobre um impulsor de prato, tal como descrito na secção 3.2 destes apontamentos:

$$\begin{cases} y(t) = e \cos \omega t \\ \dot{y}(t) = -\omega e \sin \omega t \\ \ddot{y}(t) = -\omega^2 e \cos \omega t \end{cases} \quad (10)$$

onde e é a excentricidade da came. A equação referente ao diagrama de corpo livre do impulsor na situação de descolamento da superfície da came é como vimos:

$$\omega_0^2 y(t) + \ddot{y}(t) = -\frac{\omega_0^2}{K_{\text{mola}}} F_0, \text{ onde } \omega_0 = \sqrt{\frac{K_{\text{mola}}}{M_{\text{impulsor}}}}$$

Substituindo as expressões (10) de forma conveniente, vamos ter:

$$\omega_0^2 e \cos \omega t - \omega^2 e \cos \omega t = -\frac{\omega_0^2}{K_{\text{mola}}} F_0$$

ou:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) e \cos \omega t = -\frac{\omega_0^2}{K_{\text{mola}}} F_0$$

Observando as equações (10) vê-se que a aceleração máxima é obtida para $t=0 \pm 2\pi/\omega$; deste modo, a última expressão anterior permite obter a rotação crítica resolvendo a equação em ω :

$$(\omega_0^2 - \omega^2) = -\frac{\omega_0^2}{K_{\text{mola}}} F_0;$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{F_0}{K_{\text{mola}}}} \text{ onde } \omega_0 = \sqrt{\frac{K_{\text{mola}}}{M_{\text{impulsor}}}}$$

Exemplo:

Se $K_{\text{mola}}=50\text{KN/m}$, $F_0=100\text{N}$ e $M_{\text{impulsor}}=0.05\text{Kg}$, $\omega_0=1000\text{rad/s}$, então $\omega \approx 1000\text{rad/s}$. Este resultado depende da força de pré-carga F_0 , embora não muito; com efeito, se a rigidez da mola for muito maior que F_0 , a frequência de rotação é praticamente igual ao valor próprio do sistema vibratório.